



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV      Número 2      Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova

Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.

Sitio WEB

Esnel Pérez H.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

## INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO CON EL USO DE TECNOLOGÍA

<sup>1</sup>Jaime Ramos Gaytán, <sup>1</sup>Eduardo Carlos Briceño Solís, <sup>2</sup>José David Zaldívar Rojas

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas, <sup>2</sup>Universidad Autónoma de Coahuila

*derivadamayor@hotmail.com, ecbs74@gmail.com, jdzaldivar.mate@gmail.com*

Para citar este artículo:

Ramos, J., Briceño, E. C. y Zaldívar, J. D.. (2016). Interpretación del concepto de desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de bachillerato con el uso de tecnología. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO CON EL USO DE TECNOLOGÍA

<sup>1</sup>Jaime Ramos Gaytán, <sup>1</sup>Eduardo Carlos Briceño Solís, <sup>2</sup>José David Zaldívar Rojas

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas, <sup>2</sup>Universidad Autónoma de Coahuila  
*derivadamayor@hotmail.com, ecbs74@gmail.com, jdzaldivar.mate@gmail.com*

**Palabras clave:** Modelación, graficación, tecnología, pensamiento y lenguaje variacional, derivada.

### Resumen

Investigaciones en matemática educativa, reportan que un fenómeno que prevalece en el discurso matemático escolar (dME), es que el conocimiento matemático se considera utilitario, en donde el centro de atención son los algoritmos y no los procesos de construcción de conocimientos (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012). En particular, en el cálculo diferencial es muy común considerar a la derivada, simplemente como otra operación que hay que realizar sobre las funciones y por tanto, ésta es presentada de forma abstracta y sin considerar su base empírica (Cantoral, 2013). Es por esta razón, que reportamos en el presente artículo un acercamiento a la derivada, a partir de desarrollar actividades de modelación con el uso de tecnología en el marco de un laboratorio. Con el fin de dar cuenta de los significados variacionales que sobre la derivada, estudiantes de bachillerato generan para favorecer su Pensamiento y Lenguaje Variacional.

### Introducción

En esta investigación, abordamos una problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de un concepto de gran relevancia en la enseñanza del cálculo, tanto por su relación con otros conceptos, como por su aplicabilidad en diversas ramas científicas: la derivada.

Se pueden encontrar diversidad de aportes en investigaciones de Matemática Educativa, sobre la comprensión del concepto de derivada y la construcción de significados sobre la misma. Algunas de ellas reportan conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los alumnos y lo que se presenta formalmente en un curso de cálculo, por ejemplo: nociones relacionadas con el concepto, los modos de pensamiento puramente algebraicos y a las especificidades del trabajo técnico (Artigue *et al.*, 1995). En otras investigaciones, se hace una crítica de cómo en libros de texto de cálculo de bachillerato en México, se suele emplear el concepto de límite para eventualmente definir la derivada, señalando también que existe una tendencia marcada hacia el uso de algoritmos o técnicas preestablecidas en los ejercicios y problemas que en ellos se proponen (Cantoral y Farfán, 1998; Dolores, 2006).

Acercamientos alternos a la definición de la función derivada por límites, pueden consultarse en Font (2009), Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) y Rosado (2004). Particularmente, se han realizado investigaciones que consideran fundamental el trabajo de la derivada, desde una perspectiva variacional y su relación con otras áreas, ver por ejemplo los trabajos de Cantoral y Farfán (1998), Cantoral, Molina, y Sánchez (2005), Sánchez y Molina (2006), Cantoral (2013) y Dolores (1998a, 1998b, 2000a, 2000b, 2001,

2006). Así como trabajos enfocados al estudio de la derivada a través de variaciones sucesivas (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005; Testa, 2004).

Coincidimos con algunas investigaciones en que la enseñanza de este tópico se suele centrar en lo algorítmico, el empleo de las reglas de derivación (fórmulas) o el tratamiento geométrico desconectado de lo numérico y lo algebraico. Por lo tanto, pretendemos contribuir en el desarrollo de la práctica docente, respondiendo a la cuestión de cómo el estudiante construye significados variacionales sobre la derivada articulando dos elementos: situaciones de Modelación-Graficación (M-G) y un escenario de Laboratorio. Para ello, se elaboraron diseños fundamentados en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) y los *usos de gráficas* que apoyan a la generación de significados variacionales.

Nuestro interés en la M-G (Suárez, 2014), es que forma un marco de referencia para la resignificación de la variación, pues en dicha situación, las gráficas de las funciones son herramientas que sirven para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración, y en donde podrían intervenir entre otras cosas, la razón de cambio y el manejo simultáneo de dos o más órdenes de variación. Esto implica una aproximación a la noción derivada significativamente diferente a la del dME, donde su estudio se basa en el concepto de límite.

Específicamente, tratamos de establecer un acercamiento a la noción de derivada mediante la línea de investigación del PyLV, para lo cual se rediseñaron situaciones experimentales de variación sujetas a modelación y graficación, propiciando el uso de estrategias variacionales en el desarrollo de las mismas. Nuestro análisis lo centramos en el nivel bachillerato con estudiantes de la Unidad Académica Preparatoria de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAPUAZ).

De esta manera, el presente artículo pretende resignificar la noción de derivada a partir de situaciones de modelación-graficación, que discutan ideas variacionales para favorecer el pensamiento y lenguaje variacional en dichos estudiantes. Nuestro análisis lo conforma un estudio de los usos de las gráficas que los estudiantes realizan cuando se enfrentan a dichas situaciones, caracterizando diversas estrategias variacionales, que los estudiantes emplean en la puesta en escena de una situación de modelación-graficación que se denomina “Agua Fría”.

### **Marco Teórico**

Como referente teórico de la investigación empleamos la Teoría Socioepistemológica (TS), pues consideramos que el conocimiento matemático sobre la derivada no es preexistente, sino que se construye y se encuentra normado por prácticas sociales que anteceden al mismo objeto matemático.

Es de interés en esta teoría explicar la constitución del conocimiento matemático a través de las prácticas sociales, es decir, el interés de estudio no es la producción matemática final que logra el hombre, sino el análisis de la actividad humana al hacer y usar matemáticas en un contexto social específico (Molfino, 2010).

Esta teoría reconoce a la Modelación-Graficación (M-G) como una categoría que genera conocimiento, razón por la cual la argumentación gráfica tiene un estatus que permite resignificar ese conocimiento matemático (Cordero, 2006a). Por resignificación

entenderemos que no es dotar de nuevos significados un saber matemático o nuevas definiciones de un concepto, es más bien:

... reforzar, robustecer, ampliar, enriquecer, articular e integrar un significado ya existente que las personas tienen y que lo están usando en un momento o situación particular, con una finalidad específica y en el ejercicio de diferentes prácticas (Córdoba, 2011, p. 70).

Al hacer referencia a la modelación y no al modelo, nos referimos a que el centro es el proceso de modelación, el cual es relevante porque es allí donde los elementos adquieren significados y se articulan para generar conocimiento, llevando de esta forma la matemática a un nivel funcional (Morales *et al*, 2012), pasando a segundo plano el modelo explícito que da cuenta de algún fenómeno. Considerando además, que el constructo teórico de uso de las gráficas y su categoría de análisis funcionamiento y forma, permiten explorar la naturaleza del saber matemático y permite abordar cuestiones acerca de cómo las gráficas desarrollan conocimiento matemático, cómo lo explican o cómo lo fundamentan (Buendía, 2011).

La Socioepistemología propone una reorganización del Cálculo, producto de un análisis exhaustivo realizado por Cordero (1998) sobre varias investigaciones de corte epistemológico. Ésta reorganización propone construir el cálculo mediante tres posibles situaciones: variación, transformación y aproximación (Cordero, 2006a; Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012). Y cada una de estas construcciones, tendrá asociados ciertos significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos. De acuerdo con Cordero (2001), en este tipo de marcos los estudiantes construyen representaciones<sup>1</sup> y aplican procedimientos con relación a: las operaciones que ellos son capaces de hacer, las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y los conceptos que ellos van construyendo progresivamente. Además, estos cuatro elementos articulan una *Socioepistemología del Cálculo* (SC) la cual, permite hacer un análisis contextual para conocer el desarrollo de pensamiento matemático en las situaciones.

Finalmente, de acuerdo con Caballero y Cantoral (2013), el Pensamiento y Lenguaje Variacional es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, la cual se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos que involucran el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros, motiva el estudio y análisis de la variación. Los mismos autores caracterizan los elementos del PyLV y sostienen que para generar el desarrollo del pensamiento variacional, es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que lo conforman.

## Metodología

Como habíamos mencionado en los apartados anteriores, la enseñanza tradicional de la derivada en bachillerato, que es donde se ubica nuestra investigación, suele centrarse en prácticas algorítmicas y algebraicas, dejando de lado otros procesos como los argumentos visuales, los enfoques numéricos y el trabajo de ideas variacionales. Por lo que nuestro objetivo fue precisamente poner en juego este tipo de ideas y procesos, y por ende desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes.

---

<sup>1</sup> Para Cordero (2001) representación es concebida no como un instrumento para la transmisión de información, sino como un medio dinámico para la acción social que compone un sistema de recursos para construir significados.

Tomamos una postura epistemológica de prácticas, en donde la articulación de los elementos del PyLV y del binomio M-G<sup>2</sup> favorecen las construcciones de la SC para una situación de variación. Concretamos esto último rediseñando tres actividades experimentales cuyo eje rector fue la variación y donde el uso de la gráfica fue determinante en la construcción de las argumentaciones de los estudiantes. Dichas actividades conforman un escenario de tipo Laboratorio donde los estudiantes exploraron propiedades de situaciones de movimiento, manipularon diversos materiales, recopilaron datos en forma manual y emplearon recursos tecnológicos. Asimismo, el escenario de Laboratorio permitió el análisis de simulaciones en software (Geogebra), y de manera general, generar justificaciones funcionales y resignificaciones del contenido matemático en cuestión.

Se contemplaron tres situaciones, Área Extrema, Agua Fría y Representando el Movimiento, las cuales fueron desarrolladas por un grupo activo y entusiasta de 18 alumnos de sexto semestre del Bachillerato de Físico-Matemático de la Unidad Académica Preparatoria Programa VI de la Universidad Autónoma de Zacatecas, ubicada en el municipio de Trancoso del estado de Zacatecas. La forma en que trabajaron fue en equipos colaborativos de cuatro integrantes<sup>3</sup>. Los tres experimentos fueron seleccionados del trabajo de Suárez (2014), y pasaron por un proceso de rediseño e implementación con tecnología (sensores, calculadoras gráficas y software Geogebra). Los estudiantes transitaron por tres momentos durante el desarrollo de los mismos: la exploración, que contempla el registro de sus ideas iniciales y conjeturas (Momento 1) respecto a una situación específica; continuaron con la experimentación y las múltiples realizaciones (Momento 2), la cual llevaron a cabo tantas veces como necesitaron (uso de tecnología); y finalmente regresaron a la situación para confrontar sus conjeturas y lo experimentado con una simulación de la situación en Geogebra (Momento 3).

En concreto, a partir del *funcionamiento* y la *forma* de las gráficas que surgieron de la modelación de las situaciones, los estudiantes participaron en experiencias llevando a cabo múltiples realizaciones donde identificaron patrones, hicieron ajustes, relacionaron la situación específica y las gráficas que obtuvieron. Logrando un desarrollo en sus argumentaciones gráficas, pero todas con eje central el estudio de la variación.

### **La puesta en escena de las situaciones en un escenario de Laboratorio**

De manera general, en cada situación de las antes mencionadas, primeramente los estudiantes tenían la instrucción de construir una gráfica que representara la situación antes de la simulación con tecnología. Una vez que lograron hacer la gráfica (del comportamiento del área, temperatura o movimiento) sin el uso de tecnología, pasaron a realizar la simulación del fenómeno con el sensor y la calculadora graficadora, excepto en la primera, pues no se diseñó de esa manera. Los sensores toman datos de tiempo y distancia o temperatura que se transfieren directamente a la calculadora, los cuales se pueden guardar en documentos, de esta manera se obtienen la gráfica de la temperatura/tiempo y distancia/tiempo. La Figura 1 muestra la metodología del trabajo dentro del Laboratorio.

---

<sup>2</sup> Los elementos característicos del binomio M-G son: múltiples realizaciones, realización de ajustes, identificación de patrones y desarrollo del razonamiento.

<sup>3</sup> Excepto el equipo E2 que contó con dos integrantes adicionales por las características de los estudiantes.

Para recolectar la información se emplearon diferentes medios y artefactos en un proceso continuo (grabación en video por cada equipo y la grabación en audio de las discusiones de un equipo en particular). Como ya se mencionó, cada experimento contempló tres momentos y los estudiantes respondieron algunas preguntas por escrito y registraron sus respuestas en las hojas de papel que conformaban el experimento.

El análisis de la información generada, tanto oral como escrita, se enfocó en el aspecto cualitativo, y la interpretación de la misma. Se puso especial atención en la identificación de estrategias variacionales específicas (Caballero y Cantoral, 2013) en las respuestas y producciones de los alumnos, lo que a su vez nos permitió dar respuesta al problema de investigación.

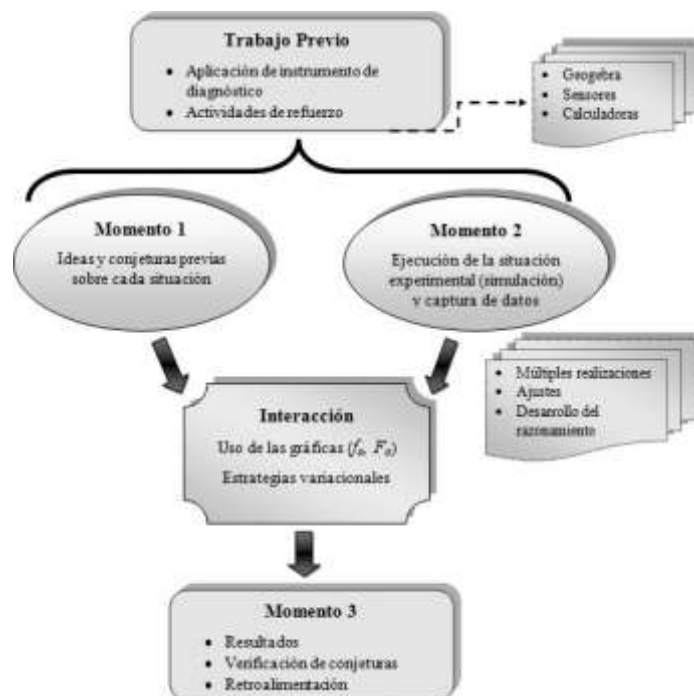


Figura 1. Proceso de trabajo.

### Análisis de Resultados

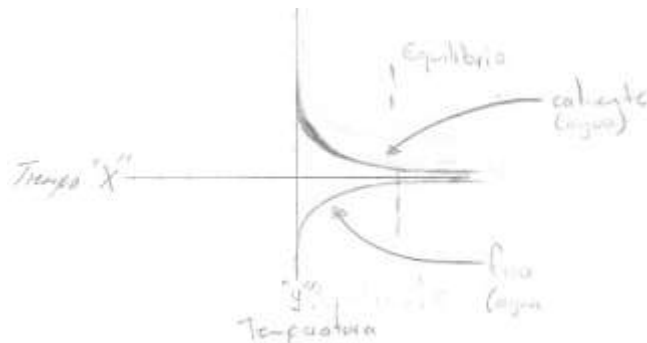
Por cuestiones de espacio sólo mostraremos algunos extractos y resultados de la situación Agua Fría (AF) para ilustrar lo descrito anteriormente. El objetivo de dicha situación es explorar la variación térmica que presentan dos sustancias a diferentes temperaturas al entrar en contacto (no directo) hasta llegar a un equilibrio, por medio de un uso de las gráficas generadas a través de sensores de temperatura.

El momento M1 está formada por tres preguntas. En principio se cuestiona a los estudiantes sobre qué sucederá a la temperatura de agua caliente al entrar en contacto con agua fría, pero sin mezclar ambos tipos de agua. Los cuatro equipos contestaron la pregunta (conjeturaron y formularon hipótesis) recurriendo a sus conocimientos previos (ver Extracto 1).

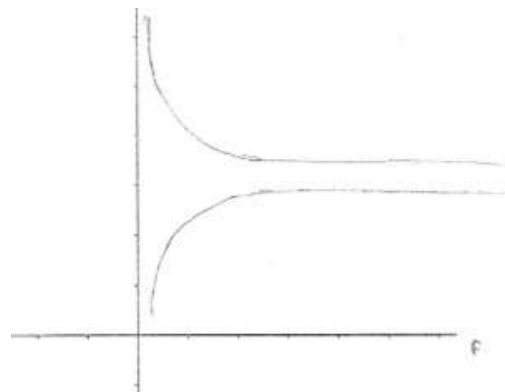
Cos el paso del tiempo los dos se van a hacer templadas  
Con el tiempo se pondrá la misma temperatura (equilibrio)  
Creemos se igualara la temperatura a un punto equitativo  
Se llegaría a una temperatura de equilibrio

*Extracto 1.* Conjeturas iniciales de los cuatro equipos (M1).

En la tercera pregunta, los estudiantes debían esbozar la gráfica del comportamiento de la temperatura de los dos tipos de agua conforme transcurre el tiempo. Los cuatro equipos presentan resultados muy similares aun cuando sólo se les proporcionó como referente, un plano cartesiano no graduado (ver Extracto 2 y Extracto 3).



*Extracto 2.* Esbozo de gráficas Tiempo-Temperatura, E2.



*Extracto 3.* Esbozo de gráficas Tiempo-Temperatura, E3.

En particular el tercer integrante del E3 menciona el porqué del esbozo de la gráfica del agua caliente (ver Extracto 4).

(01:33-01:47)

3E3: “pues va a ir disminuyendo pero... va a ser gradualmente... como se dice... en picada” [El equipo decide establecer una graduación al tanteo y propone los valores de la temperatura para la misma]

*Extracto 4.* Código variacional del E3

El M2 comprende ocho pasos de la experimentación (Ver Anexo 1). En él los estudiantes llevaron a cabo la recopilación de datos usando los sensores y las calculadoras gráficas, tanto para el agua fría como para el agua caliente. La recopilación anterior y las instrucciones de los pasos 6, 7 y 8, ayudaron a que los equipos ejecutaran múltiples realizaciones del experimento, notaran regularidad en el comportamiento gráfico y ajustaran los tiempos de captura. Obteniendo con ello datos que fueran muy próximos al fenómeno real de equilibrio térmico (ver Figura 2, Figura 3 y Figura 4).



Figura 2. Llenado de recipientes, E1.

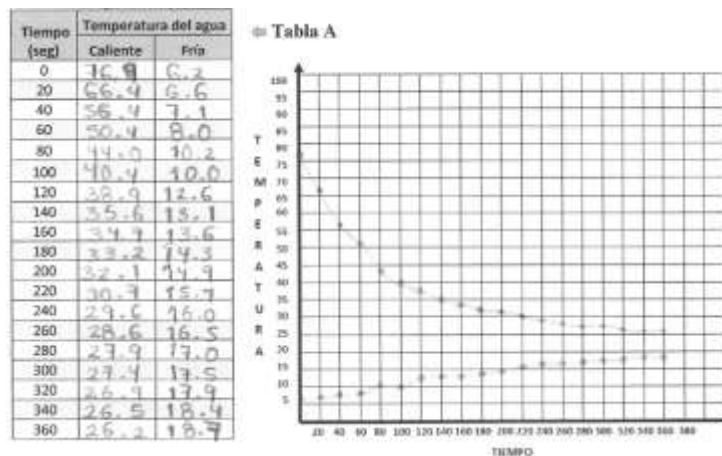


Figura 3. Captura de datos, E2.



Figura 4. Estabilización de registros de temperatura, E4.

Cabe hacer notar que cuando iniciaban la captura de datos a destiempo, ya sea porque introducían mal el sensor de temperatura o no efectuaban la captura simultáneamente, debían repetir el procedimiento hasta lograr una sincronización lo más precisa posible. En total, y por realización, se recopilaron 19 datos para cada tipo de agua a intervalos de 20 segundos, completando 6 minutos para la variable denominada tiempo. Para no perder información los equipos registraron los datos en las Tablas A y B (pasos 6 y 8), y construyeron las gráficas para cada tipo de agua diferenciándolas con colores rojo y azul. Como ejemplo tenemos el Extracto 5 que muestra la captura del equipo E3.



Extracto 5. Captura de datos primer experimento, E3.

Todos los equipos lograron identificar y establecer las temperaturas iniciales de cada tipo de agua (incisos a y b del paso 7). Para el agua caliente la temperatura inicial reportada osciló entre los 70 y los 80 grados centígrados, mientras que para el agua fría el dato se ubicó entre 6 y 7 grados centígrados. Además, en esta fase los equipos pudieron corroborar en parte, sus conjeturas iniciales (inciso c del paso 7), por lo que sus respuestas fueron complementadas con un poco más de información. Como ejemplo se muestra lo reportado por el equipo E4 (ver Extracto 6).

c. ¿Concuerda lo que obtuvieron con lo que contestaron en los inciso i) y iii) al inicio de la actividad? SI  
 ¿Por qué? Porque las temperaturas aumentan y disminuyen y alcanzan un equilibrio

Extracto 6. Contraste entre conjetura inicial con resultado de la experimentación, E4.

Se pudo notar también que algunos equipos recurrieron a sus conocimientos previos sobre características de gráficas de funciones, identificando correctamente en los incisos d)



y e) del paso 7 que la gráfica tiempo-temperatura del agua caliente es decreciente, mientras que la gráfica tiempo-temperatura del agua fría es creciente, sin embargo ninguno explica el porqué. A partir de estos comportamientos gráficos los equipos E1, E2 y E3 dedujeron que la temperatura de equilibrio entre los dos tipos de agua se encontraría entre los 20 y los 25 grados centígrados, mientras que el equipo E4 si expresa que “*aproximadamente 23°C*”, que era la temperatura ambiente real entre las 7 y 8:30 de la mañana del día de aplicación.

Para el inciso h) del paso 7 se vuelven a notar coincidencias en la respuesta de los equipos, todos ellos concluyen que el agua caliente se enfría más rápido que lo que se calienta el agua fría, para ello probablemente aluden al comportamiento de las gráficas (lo visual) y a la información tabular que obtuvieron del experimento. Por ejemplo del E3 tenemos el Extracto 7.

(57:49-58:16)

4E3: “*las dos cosas al mismo tiempo*” [El cual es corregido por su compañero de equipo]

3E3: “*el agua caliente cayó muy rápido... hubo una parte en la que iba en picada...*”

*Extracto 7. ¿Qué ocurre más rápido?, E3.*

En el inciso i) del paso 7, se les pide de manera indirecta hacer una predicción sobre lo que ocurre con las temperaturas después de llegar al equilibrio térmico; a lo que los equipos E1, E3 y E4 contestan que se aproxima a la temperatura ambiente, sin especificar qué valor podría tener ésta, por ejemplo el siguiente extracto (ver Extracto 8).

i. ¿Qué pasa después de que llega al equilibrio térmico?

*no sufre ningún cambio se queda estable puesto que es la temperatura ambiente...*

*Extracto 8. Comportamiento después del equilibrio, E2.*

El paso 8 les permite hacer una reproducción del mismo experimento con la variante de que deben duplicar la cantidad de agua fría. Los cuatro equipos lo realizan (y repiten) con más fluidez, empleando la experiencia adquirida de la fase anterior.

Por el diseño de la situación, las comparaciones se pudieron efectuar sobre una misma gráfica y sobre varias gráficas del mismo tipo; las primeras con el objetivo de predecir la temperatura del equilibrio térmico en el primer experimento; y las segundas sobre comparaciones en reproducciones sucesivas del mismo, en donde se incrementó la cantidad de agua fría. El primer caso, inciso a) del paso 8, cuestiona sobre el cambio de temperatura que se presentó en los dos experimentos en un intervalo de tiempo determinado (60-80 segundos). Los cuatro equipos emplearon la estrategia de comparación entre los datos numéricos (calcularon las diferencias con los datos de la tabla) para cuantificar el cambio, es decir, determinaron la variación de temperatura en dicho intervalo, un ejemplo de ello lo podemos observar en el extracto siguiente del E3 (ver Extracto 9).

Tiempo (seg)	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0	76.9	6.2
20	66.4	6.6
40	56.4	7.1
60	50.4	8.0
80	44.0	10.2
100	40.4	10.0

**Cuantificación de dos estados (E<sub>2</sub>-E<sub>1</sub>)**

	Caliente	Fría
Experimento 1	Baja 6.4°C	Subió 2.2°C
Experimento 2	Baja 10.2°C	Subió 0.6°C

Extracto 9. Cuantificación del cambio de temperatura, E3.

Además los equipos concluyen que al duplicar la cantidad de agua fría el agua caliente se enfría más rápido, por lo que dan indicios de manejar un primer orden de variación (ver Extracto 10).

b. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente?

La caliente se enfría más rápido y la fría se tarda más en calentarse.

Extracto 10. Cambio del cambio en la temperatura, E3.

Para llevar a cabo el M3, los equipos recuperaron de la calculadora el registro de los dos experimentos (pasos 6 y 8), pero únicamente se trabajó con las temperaturas del agua caliente. Los archivos, nombrados como captura1 y captura2, se transfirieron, por el profesor, desde la calculadora gráfica a un archivo en Excel nombrado como AguaFria.xlsx. Conforme terminaban el paso 8, cada equipo copió sus datos del archivo de Excel a la hoja de cálculo del archivo AguaFria.ggb (Geogebra), inciso a) del paso 9. Los equipos seleccionaron los datos de la hoja de cálculo de Geogebra (inciso b) del paso 9) y generaron los puntos en la vista gráfica, obteniendo la distribución puntual del agua caliente para los dos experimentos (ver Figura 5 y Figura 6).



Figura 5. Generación de puntos en Geogebra, E2.



Figura 6. Comparación de datos en Geogebra, E2.

Aun cuando sólo se les solicitó la estimación del cambio en el intervalo 60-80 segundos, algunos equipos aprovecharon el dinamismo de la actividad para practicar con las rectas paralelas, e hicieron la comparación entre otros valores y con intervalos diferentes. Para referirse a la medición de los cambios se utilizó la notación incremental, pero haciendo énfasis en que este cambio es negativo (decremento de temperatura). Lo trabajado en el inciso a) del paso 8 y d) del paso 9 hizo referencia a un comportamiento hasta cierto punto local, por referirse a un intervalo específico en el que sólo hay registro de dos puntos. Sin embargo la captura se puede configurar para que se registren datos suficientes como para que la representación gráfica parezca una curva continua.

Para el inciso e) los equipos E1, E3 y E4 contestan que el agua caliente se enfría más rápido, mostrando evidencia de que conocen o tienen la noción de un primer orden de variación (ver Extracto 11).

e. ¿Qué es lo que notas cuando el agua fría es el doble del agua caliente?  
(expliquen lo más detallado posible)

que baja más rápido la temperatura del agua caliente y se llega a equilibrio más tarde

Extracto 11. Noción de un primer orden de variación mediante el gráfico, E4.

Con las reproducciones anteriores del experimento se pretendió que en el inciso f), los equipos predijeran el comportamiento gráfico si se agregaba el triple de agua fría y se conservaba la cantidad de agua caliente. El equipo E1 respondió haciendo referencia al comportamiento gráfico, utilizando frases que involucraron rapidez de descenso de temperatura o incremento de la misma, mostrando nuevamente la noción de un primer orden de variación, es decir, de cómo cambia la temperatura (ver Extracto 12).

f. ¿Cómo será la gráfica en ese mismo intervalo si se agregara el triple de agua fría? Va a descender de temperatura aun más rápido de el agua caliente y se tardara más en subir la de el agua fría.

Extracto 12. Noción del cómo cambia el cambio, E1.

Finalmente, la cuantificación de los cambios en los incisos a (pregunta 8) y d (pregunta 9) les permitió aproximar el valor del cambio. Por ejemplo el E1 cuantifica un cambio de 0.7 grados entre el experimento inicial y el experimento en que se duplica la cantidad de agua fría, con ello proporcionan un intervalo para el posible valor (ver Extracto 13).

i. ¿Aproximadamente cuál sería el valor del cambio?

Como entre 6.0 y 6.5.

Extracto 13. Predicción del cambio al triplicar la cantidad de agua fría, E1

En el experimento, emerge el estudio de la variación cuando los equipos usan códigos variacionales, los cuales están presentes en expresiones como “se va a llegar al equilibrio”, “la temperatura baja sube y la alta baja... y se mantienen estables”, “pues va a ir disminuyendo pero... va a ser gradualmente... como se dice... en picada”, “el agua caliente cayó muy rápido... hubo una parte en la que iba en picada...”. Además con gestos o ademanes con su cuerpo como por ejemplo: cuando el estudiante mueve la mano derecha de forma horizontal, indicando estabilidad; cuando mueve ambas manos de arriba hacia abajo hasta nivelarlas, es decir eventualmente las ubica a la misma altura; al mover la mano derecha hacia la izquierda y viceversa; o cuando mueve las dos manos hacia el frente, proyectando que eventualmente las temperaturas llegaran a ser iguales.

El análisis de las producciones de los equipos en los tres momentos, permitió identificar argumentaciones de los estudiantes para la situación AF, sintetizadas en la Tabla 1. Asimismo enunciamos los funcionamientos y formas de las gráficas que los estudiantes generaron al momento de interpretar, construir y reflexionar sobre la gráfica. Complementamos este análisis, incluyendo qué argumentos variacionales generaron los estudiantes en la argumentación sobre la situación. La tabla 1 condensa nuestro análisis y

conforma un marco de referencia para la resignificación de la derivada en la situación Agua Fría como un argumento que permitió analizar local y tendencialmente el comportamiento de la gráfica de la temperatura.

La articulación de las estrategias variacionales usadas durante la situación, nos permite afirmar que desde el uso de las gráficas, los estudiantes delimitaron un argumento que consiste en que: a mayor cantidad de agua fría más rápido se enfriará el agua caliente, y el tiempo de equilibrio térmico se reduce. A pesar de que las proporciones de agua sean diferentes, el comportamiento gráfico global será muy similar.

### **Conclusiones**

En la situación Agua Fría, el empleo de sensores de temperatura y calculadoras graficadoras contribuyó de manera positiva en la realización y reproducción de la misma, pues con su uso los estudiantes, lograron capturar datos tantas veces como consideraron necesario. Pudieron observar el comportamiento de la temperatura en las gráficas registradas en la calculadora.

Se optó por transferir los datos a Geogebra, con el objetivo de tener una visión más amplia, tanto por el tamaño de la pantalla como por la realización del M3 en este software. Durante la captura de datos, los cuatro equipos comprendieron el funcionamiento de los sensores de temperatura y consensaron los ajustes para lograr una reproducción del fenómeno lo más aproximada posible. Esto les permitió contrastar sus conjeturas iniciales, notar regularidades, visualizar comportamientos simultáneos de temperaturas e identificar patrones de comportamiento gráfico. Lo anterior repercutió positivamente pues en el M2, el registro tabular y el gráfico correspondiente se puede apreciar en los resultados de sus producciones.

Como ya habíamos mencionado, la articulación de esas argumentaciones con los elementos del PyLV y la M-G ayudaron a caracterizar un uso de la gráfica con su respectivo funcionamiento y forma (ver Tabla 1). La gráfica fue usada para analizar comportamientos locales y la tendencia de la temperatura conforme transcurre el tiempo ( $U_{AF}$ ), en este caso coincidimos con el tercer uso de la gráfica identificado por Zaldívar (2014). El funcionamiento ( $f_{AF}$ ) que le dieron los equipos a la gráfica en esta situación, fue el de herramienta para anticipar el comportamiento de las temperaturas del agua fría y caliente que están en contacto directo, pero sin mezclarse. Para ello, más allá de capturar datos y reproducir el experimento, tuvieron que identificar y analizar cambios locales en la temperatura ( $F_{AF}$ ). Se lograron poner en juego las estrategias variacionales de Comparación y Predicción.

El escenario de laboratorio sustentado en situaciones, fue un espacio en la clase de cálculo diferencial en donde los estudiantes tuvieron la libertad de expresar lo que pensaban, de reflexionar, conjeturar, emplear la intuición, explorar, de ofrecer alternativas de solución, experimentar las situaciones, discutir, refutar y consensar en equipo para establecer sus argumentos. En este escenario de trabajo, los equipos pusieron en juego sus conocimientos previos, construyeron sus propios datos, vivieron la situación de manera muy diferente a una clase tradicional; construyeron conocimiento al usar gráficas, el cambio y la variación e identificaron comportamientos en el fenómeno de equilibrio térmico.

Tabla 1. *Análisis de situación Agua Fría.*

<b>SITUACIÓN: AGUA FRÍA</b>			
<b>Uso de la gráfica (<math>U_{AF}</math>):</b> <i>Análisis del comportamiento local y tendencial</i>			
<b>Funcionamiento de la gráfica (<math>f_{AF}</math>):</b> <i>Anticipar el comportamiento tendencial estable</i>			
<b>Forma del uso (<math>F_{AF}</math>):</b> <i>Identificar y analizar cambios locales</i>			
<b>CONSTRUCCIONES</b>			<b>ARGUMENTOS VARIACIONALES</b>
<b>Variación</b>	<b>SIGNIFICADOS</b>	La variación es entendida como una cuantificación de cambios de temperatura respecto del tiempo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Al incrementar la cantidad de agua fría varía la temperatura de enfriamiento del agua caliente, conservando comportamiento gráfico.</li> <li>El equilibrio térmico se logra cuando la gráfica temperatura-tiempo para el agua caliente y el agua fría coinciden (tienden al mismo valor).</li> <li>La variación entre la temperatura y el tiempo no es constante, es más pequeña cuando se acerca a la temperatura ambiente (equilibrio térmico).</li> <li>La comparación de dos estados (entre gráficas) permite predecir la temperatura a cierto tiempo (bajo ciertas condiciones).</li> </ul>
<b>Múltiples Realizaciones</b>		Obtener gráficas por medio de: <ul style="list-style-type: none"> <li>Captura de datos con sensores y calculadoras.</li> <li>Distribución de puntos.</li> <li>Simulación con software.</li> </ul>	
<b>Identificación de Patrones</b>	<b>P R O C E D I M I E N T O S</b>	Relacionar la tabulación y la gráfica con los cambios entre las variables, notando la dependencia de la temperatura respecto del tiempo (comportamiento gráfico similar). Predecir el equilibrio térmico comparando temperaturas con diferentes proporciones de agua fría y agua caliente.	
<b>Realización de Ajustes</b>		Comparación de temperaturas en intervalos iguales. Reproducción de experimento hasta obtener una curva con comportamiento decreciente (creciente). Asociar comportamientos a la gráfica temperatura-tiempo.	<b>ESTRATEGIAS VARIACIONALES</b>
<b>Desarrollo del Razonamiento</b>	<b>PROCESOS-OBJETOS</b>	Asociación de un gráfico (distribución de puntos) con el comportamiento de la temperatura respecto del tiempo. (Equilibrio como gráfica: Curva-Temperatura/Tiempo).	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Comparación</li> <li>➤ Predicción</li> </ul>

Las tres situaciones experimentales desarrolladas en el proyecto, permitieron resignificar la derivada a través del uso de las gráficas, rompiendo con el tratamiento estático, algorítmico y con significados parciales producidos al trabajar con el límite, prevalecientes en el dME. Enfatizamos el uso del cambio y la variación, para construir argumentaciones de la derivada opacas en la enseñanza tradicional.

Finalmente, cabe señalar que los diseños experimentales y las simulaciones en Geogebra se centraron en los procesos de cambio, enfatizando en las preguntas del M2 y M3, la identificación de aquello que cambia, cuantificarlo y analizar como varían los cambios. Y como afirma Cantoral (2013), el conocimiento matemático para constituirse en saber, exige de su uso. Precisamente eso es lo que hemos propiciado en estas situaciones experimentales. Pues el estudiante desarrolla en las situaciones la M-G, que de acuerdo con Suárez (2014), permite resignificar la variación.

### **Bibliografía**

- Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.
- Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: una mirada desde la Socioepistemología. *Premisa-Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) 13* (48), 41-50. Argentina.
- Caballero, M. y Cantoral R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 463-468.
- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. DF, México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-9362-03-4.
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, 42(3), 854-856.
- Cantoral, R., Molina, J., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18(1), 463-468.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 1(1), 56-74.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(2)103-128.
- Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*, 265-286.
- Dolores, C. (1998a). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272), México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Dolores, C. (1998b). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11*, 6-10. Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

- Dolores, C. (2000a). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal, ICME-8* (pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dolores, C. (2000b). La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia de la Universidad Autónoma de Sinaloa* 2(20), 9-17.
- Dolores, C. (2001). El Desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14, 345-353. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- Dolores, C. (2006). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Navarro, C., López, I., Carrillo, C., Farfán, R. M., Martínez, G., y Dolores, C., *Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Ediciones Díaz de Santos, pp. 169-204.
- Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función  $f(x)=x^2$  sin usar la definición por límites. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 18, 15-18.
- Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico*, Tesis de Doctorado, México, IPN-CICATA.
- Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), 237-256.
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Cinvestav-IPN, México: Tesis de maestría no publicada.
- Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 739-744. México: Clame.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.
- Suárez, L. (2014). *Modelación- Graficación para la Matemática Escolar*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. (Tesis inédita de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

### Anexo 1: Experimento

Pasos:

1. Calienten agua (en la estufa o cafetera) y llenen el vaso de plástico que tiene la **marca roja** (hasta esa altura), con cuidado de no quemarse.






2. En otro vaso viertan agua previamente enfriada con hielos (la misma cantidad que el agua caliente-**marca azul**) y deposítela en el recipiente **R**, evitando derramar líquido.

2

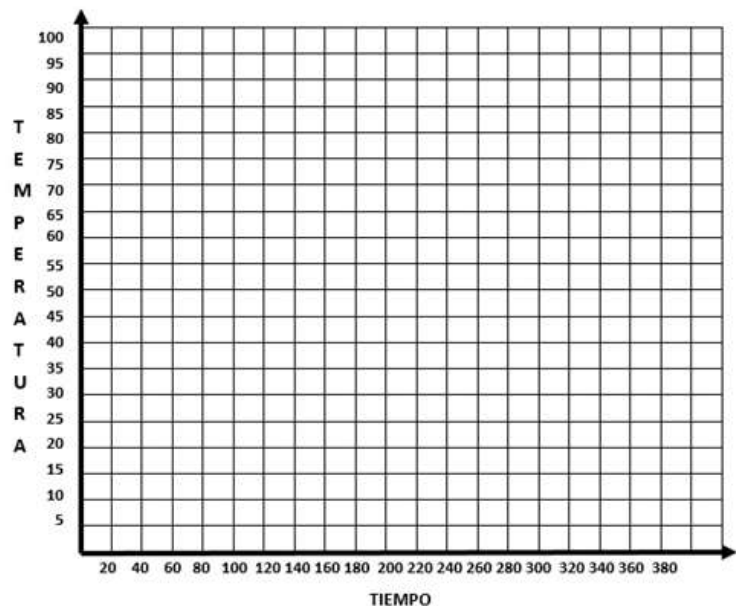
3. Coloquen la punta de un sensor en el agua caliente y otro en el agua fría y esperen 15 segundos para que se estabilice un poco la temperatura del sensor con el agua, aparecerá algo similar a la imagen.



4. Cambien en las dos calculadoras de la vista medidor  a la vista tabla 
5. Transcurridos los 15 segundos, coloquen el vaso que contiene el agua caliente dentro del recipiente que contiene el agua fría, evitando mezclar los tipos de agua y sin sacar los sensores, y presionen la tecla de  recopilación de datos en ambas calculadoras al mismo tiempo.
6. Copien los datos recopilados en la vista tabla tanto de la temperatura del agua caliente como del agua fría en las columnas correspondientes de la **Tabla A** y hagan las gráficas correspondientes a las variaciones de temperatura del agua caliente (**rojo**) y del agua fría (**azul**). Guarden los datos con el nombre **captural**.

Tiempo	Temperatura del agua	
	Caliente	Fría
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		
220		
240		
260		
280		
300		
320		
340		

← **Tabla A**





7. Preguntas para reflexionar

- a. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua caliente? \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua fría? \_\_\_\_\_
- c. ¿Concuerda lo que obtuvieron con lo que contestaron en los inciso i) y iii) al inicio de la actividad? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

d. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica que obtuvieron para el vaso de agua caliente?

- A) Creciente                      B) Decreciente                      C) Ninguna

e. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica que obtuvieron para el agua fría?

- A) Creciente                      B) Decreciente                      C) Ninguna

f. ¿Cuál es aproximadamente la temperatura de equilibrio entre el agua caliente y el agua fría?

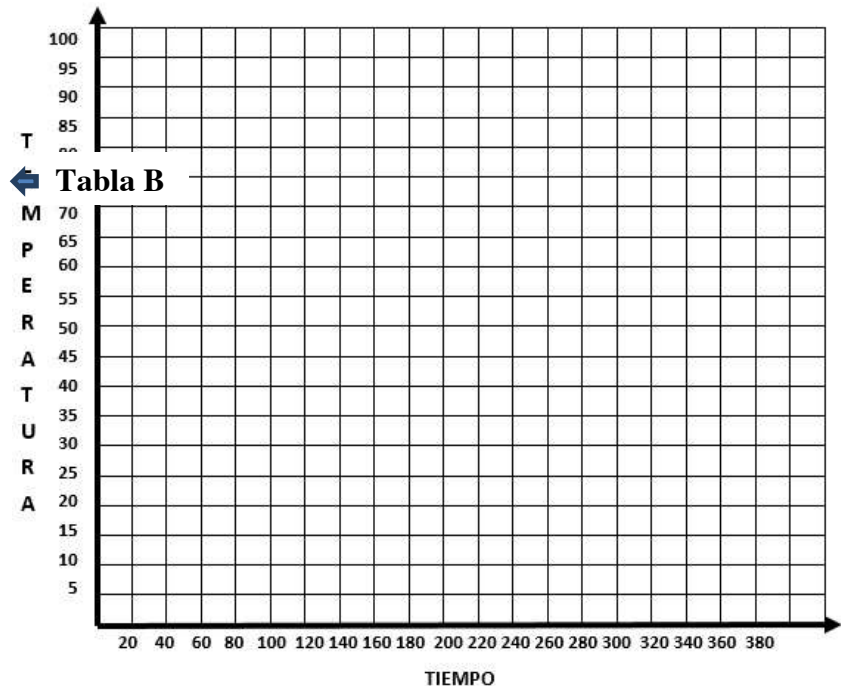
g. ¿Cómo se comporta la temperatura del agua caliente con respecto al tiempo?

h. ¿Qué es más rápido, el agua caliente enfriándose o el agua fría calentándose?

i. ¿Qué pasa después de que llega al equilibrio térmico?

8. Repitan el procedimiento desde el paso 1 hasta el 7, pero ahora agreguen el doble de agua fría (vasos con marca azul) y registren los datos en la **Tabla B**. Guarden los datos con el nombre **captura2**.

Tiempo	Temperatura del agua
--------	----------------------



(seg)	Caliente	Fría
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		
220		
240		
260		
280		
300		
320		
340		
360		