# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
**"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"**

**UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS**

# SITUACIÓN DIDÁCTICA DE ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE UTILIZANDO EL SENTIDO BIDIRECCIONAL DEL SIGNO IGUAL EN UN ESCENARIO VIRTUAL EN BACHILLERATO

Tesis que para obtener el grado de

**Maestro en Matemática Educativa**

**con Orientación en el Nivel Bachillerato**

Presenta:

**Juan Ernesto Corona Maldonado**

Directoras de tesis:

**M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara**

**M. en M. Elvira Borjón Robles**

Zacatecas, Zac., DICIEMBRE 2021

Este trabajo ha sido realizado gracias al

Apoyo financiero otorgado por el

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de

Septiembre 2019 a Julio 2021

No. De Becario: 756884

No. De CVU: 1005860

# *Dedicatoria*

A mis padres Juan y María por su apoyo incondicional

# *Agradecimientos*

Agradezco a mis directoras de tesis la M. en C. Nancy Calvillo Guevara y M. en M. Elvira Borjón Robles por su dedicación y tiempo brindado durante el desarrollo de esta investigación. Sus consejos, conocimientos y apoyo fueron fundamentales para concluir de manera satisfactoria este trabajo.

A la Mtra. Gabriela Lizette Álvarez Ríos directoria del plantel Bachillerato 33 de la Universidad de Colima por brindarme las facilidades para realizar las actividades de la investigación relacionadas con el profesor y alumnos de dicha institución educativa.

A Juan, María y Saúl, mi familia por sus palabras de aliento en los momentos difíciles y por motivarme a continuar con mis estudios de posgrado. Su paciencia y presencia en estos tiempos de virtualidad en la educación fueron muy importantes para que pudiera continuar con las clases de la maestría.

A mis comentaristas la Dra. Carolina Carrillo, la Mtra. Mónica Torres y la Dra. Leticia Sosa por sus sugerencias y comentarios durante las diferentes etapas del desarrollo de la tesis. Sus aportaciones enriquecieron de manera sustancial tanto el trabajo realizado como mi formación profesional.

A los docentes del Núcleo Académico de la Maestría en Matemática Educativa de la UAZ por compartir sus conocimientos y experiencia dentro y fuera del aula que indudablemente contribuyó a mi preparación académica.

A mis amigos y compañeros de la maestría en Zacatecas por ser tan solidarios y amables conmigo tanto en aspectos académicos como personales.

A quien corresponda:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "*Situación didáctica de ecuaciones lineales de una variable utilizando el sentido bidireccional del signo igual en un escenario virtual en bachillerato*" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. Juan Ernesto Corona Maldonado, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; cumple con los requisitos de calidad académica para **ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la maestría.

Atentamente

Zacatecas, Zac., a 17 de diciembre de 2021

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Asesora

M. en M. Elvira Borjón Robles

Asesora

## CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 17 del mes de Diciembre del año 2021, el que suscribe Juan Ernesto Corona Maldonado, alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 39207243; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado titulado "*Situación didáctica de ecuaciones lineales de una variable utilizando el sentido bidireccional del signo igual en un escenario virtual en bachillerato*" bajo la dirección de las M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara y M. en M. Elvira Borjón Robles.

Por tal motivo, asume la responsabilidad de su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Atentamente

Juan Ernesto Corona Maldonado

## RESUMEN

El signo igual es uno de los primeros símbolos matemáticos que el alumno conoce, en el que, sin explicación previa, aparece repentinamente en las operaciones básicas, específicamente, suma, resta y multiplicación. Por lo tanto, su uso y comprensión se desarrolla de manera empírica a través de ejemplos donde se observa que "construimos y reconstruimos los significados de manera idiosincrásicas cada vez que aprendemos o manejamos ideas" (Arcavi, 2006, p. 29).

En este sentido, las concepciones que se tengan del signo igual en los diferentes contextos matemáticos determinarán el aprendizaje del álgebra formal. En concreto, en la resolución de ecuaciones lineales de una variable, estudios como Fyfe, Matthews & Amsel (2017) y Knuth et al. (2006) han demostrado que los alumnos que tienen una comprensión relacional de dicho signo tienen mayores probabilidades de resolver correctamente ecuaciones lineales que quienes solo lo comprenden de manera operacional.

Así, el objetivo de la investigación es proponer una situación didáctica diseñada desde el sentido bidireccional del signo igual para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales de una variable con estudiantes de segundo semestre de bachillerato. El marco teórico que fundamenta el trabajo es la Teoría de Situaciones Didácticas y la metodología empleada es la Ingeniería Didáctica.

El principal resultado fue que los estudiantes poseen una comprensión operativa arraigada del signo que no les permite resolver las ecuaciones eficazmente. También, que mediante la situación didáctica los alumnos confrontaron sus conocimientos previos para establecer un aprendizaje que les facultó comprender y resolver correctamente ecuaciones lineales de una variable.



**Palabras clave**: Situación Didáctica, ecuaciones lineales de una variable, signo igual

## ABSTRACT

The equal sign is one of the first mathematical symbols that the student knows, in which, without prior explanation, it only appears in basic operations, specifically, addition, subtraction and multiplication. Therefore, its use and understanding is developed empirically through examples where it is observed that “construimos y reconstruimos los significados de manera idiosincrásicas cada vez que aprendemos o manejamos ideas” (Arcavi, 2006, p. 29).

In this sense, the conceptions of the equal sign in different mathematical contexts will determine the learning of formal algebra. Specifically, in solving linear equations of one variable, papers such as Fyfe, Matthews & Amsel (2017) and Knuth et al. (2006) have shown that students who have a relational understanding of this sign are more likely to correctly solve linear equations than those who only understand it operationally.

Thus, the objective of the research is to propose a didactic situation designed from the bidirectional sense of the equal sign for the learning of solving linear equations of one variable with students of the second semester of high school. The theoretical framework underlying the work is the Theory of Didactic Situations and the methodology used is Didactic Engineering.

The main result was that students have an ingrained operational understanding of the sign that does not allow them to solve equations effectively. Also, that through the didactic situation the students confronted their previous knowledge to establish a learning that enabled them to understand and correctly solve linear equations of one variable.

**Keywords:** Didactic situation, linear equations with one variable, equal sign

Índice

## Índice de Figuras

## Índice de Tablas

# INTRODUCCIÓN

La presente investigación surge de la idea de considerar la comprensión del signo igual en la construcción de diseños didácticos para la mejora del desempeño de los estudiantes de bachillerato en torno a la resolución de ecuaciones lineales de una variable.

Lo antes mencionado tiene su causa en que las dificultades, en temas de álgebra, que presentan los estudiantes que se encuentran en el Nivel Medio Superior se pueden atribuir a inadecuadas comprensiones del signo igual cuando trabajan con expresiones y ecuaciones simbólicas (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Así, para solventar estas deficiencias se han construido diferentes diseños didácticos desde diferentes perspectivas teóricas, sin embargo, poco se ha contemplado el signo igual como la idea central en las investigaciones que realizan propuestas didácticas para mejorar la eficacia de los estudiantes en torno al tema matemático mencionado.

La importancia de realizar este tipo de investigaciones surge de la necesidad de generar recursos didácticos en cuanto al pensamiento algebraico desde elementos reportados en la literatura. En este sentido, el *Early algebra* conforma una manera de pensar las matemáticas de mayor nivel en edades tempranas de tal manera que se logre reducir la brecha entre la transición de la aritmética y el álgebra. De acuerdo con Socas (2011) algunos países como España, Estados Unidos, Reino Unido y Holanda han incorporado resultados de los estudios centrados en el pensamiento algébrico en sus propuestas de desarrollo curricular en niveles de educación primaria y secundaria. Así, una alternativa para poder equiparar esta estrategia con los alumnos de mayor edad consiste en extrapolar tales ideas y conocimientos del *Early algebra* y materializarlos en propuestas correspondientes al nivel educativo.

Por tanto, se planteó construir una situación didáctica que esté orientada en la comprensión del signo igual desde el sentido bidireccional en ecuaciones lineales de una variable para estudiantes de segundo semestre de bachillerato. Enseguida se exponen los capítulos que justifican el proceso de investigación.

El informe del trabajo está estructurado por cinco capítulos: El planteamiento del problema de investigación, Fundamento Teórico, Metodología, Desarrollo de la Ingeniería didáctica y Conclusiones y reflexiones finales, los cuales se detallan enseguida.

En el Capítulo I, se explica la motivación que originó la idea del proyecto. También, se describe la revisión de antecedentes desde tres categorías: Signo igual, Ecuaciones lineales de una variable y El signo igual en correlación con la resolución de ecuaciones lineales de una variable. Se concluye este apartado con una reflexión del vacío identificado en la literatura revisada. Asimismo, en el capítulo se incluye la problemática, problema, pregunta de investigación, objetivos y justificación.

En el Capítulo II, se aborda el sustento teórico que fundamenta la investigación. Se describen algunos puntos relevantes de la Teoría de Situaciones Didácticas como los conceptos de Situación didáctica, Situación a-didáctica y Tipos de funciones. También incluye los significados asociados al signo igual de Singh & Kosko (2017) y Molina (2006). Además de un apartado acerca del fundamento matemático sobre las ecuaciones lineales de una variable y las propiedades del signo igual.

En el Capítulo III, se redactan algunos elementos metodológicos que serán de utilidad en el trabajo de investigación, como el concepto de Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y las Fases que la conforman. Además de abordar la parte conceptual, también se indican algunos ejemplos.

El Capítulo IV consiste en el desarrollo de la metodología Ingeniería didáctica a través de sus fases. En la fase 1 se describe el análisis preliminar de las ecuaciones lineales de una variable y del signo igual mediante la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica. En la fase 2, se enuncian los aspectos que fueron considerados para la construcción de la situación didáctica, las variables didácticas, el análisis *a priori* y los resultados de la prueba piloto. La Fase 3, detalla las características de la aplicación, los participantes, el contexto de la experimentación y las fuentes de información. Por último, en la fase 4 se puntualiza el análisis a posteriori y validación de la situación didáctica.

En el Capítulo V, se establecen las reflexiones finales que resultan a partir de los capítulos anteriores. Se responde la pregunta de investigación y se especifica el cumplimiento de los objetivos. Asimismo, se presentan las aportaciones, limitaciones y algunas recomendaciones para futuras investigaciones. Por último, se incluye una reflexión que aborda tanto la experiencia de realizar este trabajo como el transcurso de la maestría.

Por otra parte, como advertencia en cuanto a la lectura de este trabajo es preciso esclarecer con anterioridad el uso de las palabras alumno, estudiante y discente, las cuales se emplean como sinónimos para referirse al mismo término. Es decir, en el proceso de enseñanza y aprendizaje son denominaciones utilizadas para el individuo que la mayor parte del tiempo está aprendiendo y que en un sistema escolar le corresponden ciertas responsabilidades educativas de acuerdo con el rol establecido.

# CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo está compuesto por tres apartados. En el primero se describe la motivación que originó el estudio. En el segundo se expone la revisión de antecedentes relacionados con el tema de investigación desde tres categorías: Signo igual, ecuaciones lineales de una variable y el signo igual en correlación con la resolución de ecuaciones lineales de una variable y se realiza una reflexión en torno a los aspectos que están ausentes en la literatura revisada. Y, en el tercero, está el planteamiento del problema de investigación que incluye la problemática, el problema, la pregunta de investigación, el objetivo general y los específicos y la justificación.

## 1.1. Motivación

La motivación con respecto al tema de investigación surgió a partir de la tesis realizada en la licenciatura. En ese trabajo analicé la comprensión y diversos usos del signo igual, desde los fundamentos teóricos del *Early Algebra* con alumnos de primaria. Los resultados obtenidos me han inspirado para examinar dichas ideas, pero ahora en el Nivel Medio Superior por el potencial que otorga para promover conceptos algebraicos en diversos contextos matemáticos.

Por otra parte, elijo el signo igual por la relevancia y cotidianidad que presenta en la trayectoria escolar de los estudiantes, pues la concepción que se le atribuye está dada por convenciones sociales y puede ocasionar malinterpretaciones en los entornos en los que se presente. Además, la trascendencia que tiene dicho signo en el aprendizaje de estructuras algebraicas complejas es un componente que puede ser la causa de la continuidad o deserción en el Sistema Educativo.

Otro aspecto para mencionar es el de fomentar el sentido bidireccional del signo igual en los estudiantes, pues, regularmente, en las aulas de clases los alumnos están expuestos a sentencias donde predomina el uso operativo del signo que indica que después de observar una "operación" inmediatamente está el "resultado". Esta forma de comprender dicho signo es necesaria, sin embargo, si se limita a sólo una, puede provocar dificultades de aprendizaje en temas de álgebra en grados posteriores. Es de mi interés promover en los alumnos otra comprensión de dicho signo, por ejemplo, el de equivalencia, que es determinante en la resolución de ecuaciones lineales porque desarrolla el pensamiento relacional.

A su vez, me interesan las ecuaciones lineales de una variable porque es un contenido matemático en el bachillerato, que frecuentemente, se estudia desde la memorización de técnicas para obtener el valor de la incógnita, por ejemplo, cuando en un lado de la igualdad un término está sumando (número o variable) pasa restando al otro lado y viceversa. En este sentido, considero pertinente tener recursos que fomenten la comprensión del procedimiento de resolución para que sea un catalizador de aprendizaje en los temas posteriores del currículo.

Por otro lado, contemplo que uno de los factores de la actitud de rechazo a las matemáticas se debe a la transición abrupta de la aritmética al álgebra en el nivel secundaria donde los alumnos tratan de mantener el ritmo del docente, lo cual, puede ser un motivo para la deserción escolar. De manera posterior, posiblemente, de aquellos que logren avanzar en su formación académica, algunos deserten en primer semestre de bachillerato con la asignatura de álgebra, cuando los temas a estudiar requieran de bases sólidas o se mantendrán con la apatía hacia la materia. Por tal situación, una alternativa para disminuir esto es la creación de recursos didácticos con relación a las ecuaciones lineales de una variable, lo cual, es un aspecto más que me incentiva a la realización de este trabajo.

Por tales motivos, me resulta de interés investigar con respecto al diseño de situaciones didácticas que fomenten el sentido bidireccional del signo igual, que "implica comprenderlo como un signo que indica un equilibrio entre la parte derecha e izquierda" (Fernández-Verdú y Ivars, 2016. p. 16). Además, que se debe centrar en las relaciones entre los términos y sus propiedades fundamentales (Fernández-Verdú y Ivars, 2016). Para lograr lo anterior, el medio que empleé son las ecuaciones lineales con alumnos de segundo semestre de Nivel Medio Superior con el propósito de proporcionar herramientas a los docentes que puedan aprovechar para sus alumnos donde la comprensión del signo se limita al sentido operativo.

## 1.2. Antecedentes

Una de las preocupaciones que ha destacado a través del tiempo en la Educación Matemática es la enseñanza del álgebra pues se considera que emplea métodos tradicionalistas y es inadecuada para el aprendizaje con relación a conceptos algebraicos, también, el poco vínculo que se le otorga con las demás ramas de la matemática (Castro y Molina, 2007).

La tendencia en la Matemática Educativa en los 80's por investigar sobre las dificultades que presentaban los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra ocasionó que los planes de estudios incrementaran su espacio curricular con relación a aspectos algebraicos en la Educación Secundaria, incluso, desde el nivel Primaria (Rojano, 2018).

De acuerdo con esta autora, indica que:

> Cambios conceptuales identificados en las investigaciones sobre pensamiento algebraico como el consistente en pasar de concebir la igualdad como un operador a entenderla como una relación de equivalencia (Kieran, 1981a), o como el paso de operar sobre cantidades conocidas (los números) a operar con cantidades desconocidas (las incógnitas) (Filloy y Rojano 1984; 1989) y con números generales

> (Booth, 1981; Küchemann, 1981), o el resolver problemas de enunciado con métodos analíticos a aprender el método cartesiano de "poner en ecuación" (Puig y Cerdán, 1999), suponen tiempos didácticos prolongados que rebasan el tiempo destinado al álgebra en aquel nuevo programa. (Rojano, 2018, pp. 247-248)

En este sentido, la comprensión del signo igual como equivalencia requiere estudiarse mucho tiempo antes de iniciar con la resolución de ecuaciones, sin embargo, los planes de estudio de Educación Básica priorizan los cálculos aritméticos (Molina, 2009). De esta manera, los alumnos de Bachillerato aún están en la adquisición de dicha comprensión del signo por tanto resulta ineludible seguir fomentándola en dicho nivel educativo.

Así, en este apartado se describe la síntesis de la revisión de la literatura con relación al tema de investigación. Los criterios para la búsqueda consistieron en que los documentos fueran de corte científico y publicados en revistas, actas o en repositorios institucionales. Para localizar estudios previos, se utilizaron palabras clave como: "Situación didáctica de signo igual", "Ecuaciones lineales con una variable", "Ecuaciones lineales con una incógnita", "Secuencia didáctica de ecuación lineal con una variable" y "equal sign meanings". Además, algunas de las fuentes de información son revistas como *Journal for research in Mathematics Education*, PNA, Uno Revista de Didáctica de las matemáticas, entre otras. También Tesis de licenciatura y de maestría de universidades como de la Universidad de Granada, Universidad Nacional de Colombia, por mencionar algunas.

Los trabajos encontrados en la literatura se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Signo igual
- Ecuaciones lineales de una variable
- El signo igual en correlación con la resolución de ecuaciones lineales de una variable

En las siguientes secciones se presenta la revisión de los estudios acorde con las categorías mencionadas.

### *1.2.1. Signo igual*

Diversos estudios (Kieran y Filloy, 1989; Palarea 1999; Godino y Font, 2003; Castro, 2012; Fuentes, 2016) explican que los alumnos conciben el signo igual de manera diferente dependiendo del contexto donde se les presente; es decir, en un contexto aritmético el sentido que le otorgan es operativo de manera unidireccional donde en una igualdad numérica visualizan el miembro izquierdo como la "operación" y del lado derecho como el "resultado"; mientras que, en un contexto algebraico lo perciben como equivalencia cuando se le otorga un sentido bidireccional al signo. La mayoría de los estudiantes tienen dificultades al integrar en su compresión ambos usos del signo igual, específicamente, el sentido de equivalencia, lo cual provoca errores cuando se trabaja con ecuaciones lineales.

En este orden de ideas, en esta sección se alude a las investigaciones que abordan el signo igual desde diferentes perspectivas metodológicas. Según los documentos consultados, se catalogan en: a) Importancia del signo igual, b) Concepciones del signo igual y c) Propuestas didácticas para fomentar el pensamiento relacional.

Con relación al a) Importancia del signo igual, el trabajo realizado por Ramírez (2010) planteó la importancia de los signos y símbolos en el lenguaje matemático y la relación que implican en el aprendizaje de las Matemáticas. Así, el signo igual tiene un significado convencional, es decir, la relación con el objeto matemático que representa es arbitraria y es una realidad que depende del individuo que la interpreta, en consecuencia, no tiene un concepto único ni definido, por tanto, los alumnos suelen mostrar dificultades en su aprendizaje.

El objetivo que propone versó acerca de realizar una revisión de libros de texto de Educación Primaria para identificar los contextos en los que los discentes tienen contacto con el signo igual al inicio de su trayectoria escolar y con ello deducir si en el trascurso de los ciclos escolares los estudiantes logran adquirir una comprensión adecuada del signo.

Además, indicó que la pertinencia de la investigación reside en que para comprender las expresiones aritméticas y algebraicas es necesario el aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos, especialmente el del signo igual, pues alude a que diversos estudios (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005, Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006; Essien & Setati, 2006; Hunter, 2007, citado en Ramírez, 2010) reportaron que los alumnos de secundaria presentan dificultades al momento de comprender su significado.

Asimismo, utilizó los fundamentos teóricos del *Early Algebra* y el marco metodológico radicó en un estudio de corte cualitativo puesto que analizó y describió los diferentes contextos en los que aparece el signo igual en los libros de texto de cuatro editoriales mediante una clasificación que elaboró basándose en los estudios de McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens y Hattikudur, 2006 y Ginsburg, 2003, citado en Ramírez, 2010.

Dicha clasificación se estructura de la siguiente manera:

1. Contextos Aritméticos
    a. Contexto Aritmético Canónico
        i. Operación igual resultado: $a + b = c$
    b. Contexto Aritmético no Canónico
        i. Operaciones en ambos lados del signo igual: $a + b = c + d$ o $a * b = a + a + a\ (b\ veces)$
        ii. Resultado igual operación: $a = b + c$

2. Contextos no Aritméticos
    a. Comparación de cantidades: $a = a$
    b. Contexto de medida: 1 metro = 10 decímetros
    c. Contextos de equivalencia de monedas: 1 euro = 100 céntimos
    d. Sistema numérico decimal: 400 unidades = 4 centenas
    e. Otros contextos no aritméticos: $a = 1$

Ramírez (2010) obtuvo como resultado que el signo igual aparece en mayor medida en contextos aritméticos. Cabe mencionar que en éstos es donde se ven reflejadas igualdades, donde el lado izquierdo representa una operación y el derecho su resultado. Por tanto, señaló que los contextos en la Educación primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, y posiblemente, imposibilite en grados posteriores la adquisición del significado de equivalencia de éste.

Ramírez (2010) concluyó con respecto a la comprensión del signo igual que adquieren los estudiantes en primaria, que ésta se debe a que los libros de texto favorecen una interpretación operacional, por lo tanto, esto podría obstaculizar el aprendizaje de equivalencia si no se expone a los alumnos a situaciones variadas de dicho signo.

Por lo que se refiere al b) Concepciones del signo igual, existen varios estudios al respecto (Molina, 2006; Chica y Soto, 2015; Medina, 2016; Corona y Díaz-Menchaca, 2018). Molina (2006) concibió la idea de ahondar en la investigación vinculada al desarrollo del pensamiento algebraico por las evidencias del potencial del *Early Algebra* al promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, por tanto, se propuso estudiar "el uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los alumnos ponen de manifiesto, en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas" (Molina, 2006. p. 16). La metodología que empleó consistió en un estudio longitudinal con duración de un año. Fue del tipo exploratorio y descriptivo.

En el marco teórico, propuso una clasificación de once significados que se le otorgan al signo igual en los contextos aritmético y algebraico. Tal clasificación la elaboró partiendo de las distinciones realizadas por diferentes autores (Wheeler, 1981; Kieran, 1981; Vergnaud, 1984; Vergnaud, Cortes y Favre–Artigue, 1987; Schoenfeld y Arcavi, 1988; Grupo Azarquiel, 1991; Wolters, 1991; Maurin y Johsua, 1993; Freudenthal, 1994; Linchevski, 1995; Proyecto Sur, 1997; Palarea, 1998; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998; Anglada, 2000; Rojano, 2002; Carpenter et al. 2003; Godino y Font, 2003; Seo y Ginsburg, 2003; Molina, 2005; Smith, 2006, citado en Molina, 2006).

Los significados que presentó son los siguientes:

> Propuesta de actividad de cálculo, operador, separador, expresión de una acción, expresión de equivalencia condicional (ecuación), expresión de equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o de

> dependencia, indicador de cierta conexión o correspondencia y aproximación. (Molina, 2006, pp. 148-152)

Cabe mencionar que el significado expresión de equivalencia presenta 4 subcategorías por lo que suman un total de 14 significados distintos.

Entre los resultados que consiguió fueron que los alumnos exhiben cuatro significados del signo igual: operador, expresión de una acción, equivalencia numérica y similitud numérica, que le permitió observar los niveles de comprensión que poseen los estudiantes. Además, indicó que, de acuerdo con la literatura, los estudiantes "tienden a interpretar el signo igual de forma operacional y muestran resistencia a adoptar o desarrollar el significado del signo igual equivalencia numérica" (Molina, 2006, p. 466).

Por su parte, Chica y Soto (2015) aludieron a que el bajo rendimiento en matemáticas ha ocasionado que se analicen los factores que influyen en el fracaso escolar de esta área. Consideraron pertinente enfocarse no sólo en el análisis de la estructura metodológica sino también en el origen de las problemáticas con respecto al aprendizaje.

En este sentido, se centraron en "Analizar las concepciones sobre equivalencia desarrolladas en la educación básica, grado quinto de la institución educativa San Simón sede Montealegre" (Chica y Soto, 2015, p. 17). Asimismo, la pertinencia de su investigación residió en la relación que existe entre la aritmética y el álgebra pues las concepciones erróneas que adquieren los estudiantes en aritmética ocasionan deficiencias en la comprensión de conceptos algebraicos.

El trabajo que realizaron fue del tipo investigación-acción. La muestra la conformaron 15 estudiantes entre 10 y 12 años, y otros 15 más entre 14 y 16 años de la institución mencionada. Hicieron uso de dos test para la recolección de los datos en cada nivel educativo y complementaron la información mediante entrevistas a los participantes y al docente. También, para el procesamiento emplearon el software *ATLAS.ti* para esquematizar los datos y simplificar la información.

En los resultados sobre las concepciones, identificaron que 10 alumnos las tienen erróneas y 4 alumnos correctas con respecto a la igualdad y equivalencia en la interpretación de conjuntos. Igualmente, en preguntas orientadas a la interpretación del signo igual dentro de una secuencia de operaciones los estudiantes mostraron que la sentencia presentada era verdadera.

Algunas de las conclusiones a las que llegaron son que "Las concepciones erróneas sobre equivalencia evidenciadas por los estudiantes, refiere la necesidad de liderar nuevas estrategias de enseñanza – aprendizaje" (Chica y Soto, 2015, p. 84) y que "Las concepciones erróneas que adquieren los estudiantes durante su educación primeria [*sic*] tendrán una incidencia de aprendizaje fuerte para su paso a la etapa de secundaria" (Chica y Soto, 2015, p. 84).

Por su parte, Medina (2016) señaló que algunas de las dificultades en el desarrollo del pensamiento algebraico se deben a las interpretaciones incorrectas o incompletas del signo igual, de tal manera que persiste el pensamiento operacional en algunos contextos. En este aspecto, reconoció la importancia de analizar si los maestros en formación han adquirido una comprensión amplia del signo igual durante el transcurso de su trayectoria escolar.

En este orden de ideas, la finalidad de su estudio fue "dar cuenta del conocimiento del signo de igual que han construido los estudiantes de cuarto año de magisterio en un instituto de formación docente del Uruguay" (Medina, 2016, p. 16). Así pues, puntualizó que, con el enfoque *Early Algebra*, es mayor la exigencia de formación hacia los futuros docentes para estar preparados para los requerimientos de los currículos escolares.

La investigación mencionada en supra líneas fue de corte cualitativo, del tipo de estudio de casos. El instrumento que utilizó es un cuestionario y entrevistas a estudiantes, para luego, seleccionar uno para analizarlo. La muestra la constituyeron 32 estudiantes de cuarto año de la carrera magisterial. Para la categorización de los significados del signo que mostraron los participantes, utilizaron la clasificación propuesta por Molina (2006) con la ampliación propuesta por Burgell (2012), citado en Medina (2016).

Los resultados que reportaron consistieron en que todos los participantes evidenciaron aceptación del uso del signo igual cuando deben de verificar de forma correcta o incorrecta sentencias con operaciones en ambos miembros de la igualdad. Mientras que, en ítems donde se les solicitó completar espacios en blanco en una cadena de igualdades se manifestó que solo el 20% de los próximos docentes emplearon el significado de equivalencia numérica.

Por otro lado, el sentido operacional se reflejó en el 25% de los cuasi-profesores al responder de manera incorrecta sentencias del tipo $57 + 86 = \_\_ + 84$. Igualmente, cuando se les presentaron sentencias de la forma $12 = 16 - 4$ o $\_ = 16 - 4$ mencionaron que estaba "al revés" y dudaron al completar dicho ejercicio.

Por lo que se refiere al trabajo realizado por Corona y Díaz-Menchaca (2018), establecieron que la manera habitual con la que se ha enseñado matemáticas en el transcurso del tiempo ha generado un aprendizaje superficial de las mismas. También, indicaron, otro de los problemas en el aprendizaje del álgebra formal consiste en la transición abrupta con la aritmética, pues, consideraron que en los niveles básicos no se incentiva a los estudiantes para que desarrollen habilidades del pensamiento algebraico con la finalidad de disminuir las problemáticas en grados superiores.

Por tales motivos, se plantearon el objetivo de "Analizar la comprensión y usos del signo igual por parte de estudiantes de educación primaria a través de actividades (tareas) diseñadas desde el enfoque *Early Algebra* para el desarrollo de su pensamiento algebraico" (Corona y Díaz-Menchaca, 2018, p. 12). Otro aspecto, es que consideraron oportuna su tesis por la tendencia, en ese tiempo, por generar conocimiento sobre el *Early Algebra*, la cual, está en su momento en auge entre los matemáticos educativos para promover el pensamiento algebraico.

El estudio que presentaron tiene un enfoque cualitativo con alcance descriptivo y la metodología que utilizaron fue un estudio de diseño que se desprende del experimento de enseñanza. Los participantes del estudio fueron discentes de nivel Primaria de 11 y 12 años perteneciente a la Secretaría de Educación Pública (SEP). La muestra la seleccionaron por conveniencia.

Los resultados que consiguieron se refieren a que el sentido operativo fue el que más prevaleció en las tareas implementadas, a causa de los contextos a los que los alumnos están sistemáticamente expuestos. Además, identificaron tres formas de pensar con relación a las sentencias: Sentido operativo, Pensamiento relacional y Pensamiento relacional parcial. Este último pensamiento, expresan que "es una combinación entre el Sentido operativo y el Pensamiento relacional o un estadio intermedio entre los dos tipos de pensamiento" (Corona y Díaz-Menchaca, 2018. p. 64).

Ahora bien, respecto a esta subcategoría, se pueden percibir que las concepciones de los diferentes estudios coinciden en dos principales maneras de comprender el signo igual: Operacional y Relacional. La operacional consiste en una señal para "hacer algo", frecuentemente se utiliza en contextos aritméticos, como en sentencias del tipo $a \pm b = \_\_$, y se desarrolla en el transcurso de la Educación Primaria. La relacional es cuando se interpreta como una relación de equivalencia, usualmente en contexto algebraicos y se empieza a observar de esa manera desde Secundaria en adelante (Kieran, 1981).

Acerca de la tercera subcategoría denominada c) Propuestas didácticas para fomentar el pensamiento relacional, se localizó una investigación de Medellín (2014) donde la problemática a tratar la originó la escasa motivación que muestran, en su actitud, los estudiantes con las matemáticas, pues, no sólo influyen los factores de los alumnos sino también del tipo de prácticas del docente. Más aún, la transición de la aritmética al álgebra es un elemento que repercute en el desempeño de los discentes, pues, "cambian los procesos de razonar matemáticamente, pero especialmente en la que cambian los objetos, se pasa de manejar los números a interpretar y dar significado a las variables y en este contexto las operaciones y relaciones" (Medellín, 2014, p. 1).

Uno de los cambios en la transición que experimentan los discentes, señaló, son los significados que los estudiantes le dan al signo igual en aritmética ya que "se reduce a una instrucción para operar, lo que incrementa sus dificultades para interpretar una identidad algebraica, entender la equivalencia de expresiones y dar sentido a una ecuación" (Medellín, 2014, p. 2).

Medellín (2014) estableció los significados que se le asocian al signo igual en los contextos de la aritmética y el álgebra, de la siguiente manera:

> En los niveles de la básica primaria y en el primero de básica secundaria la igualdad se aborda usualmente como una instrucción para operar: en una dirección, de izquierda a derecha y no en la expresión de una equivalencia. El problema es más evidente cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de una ecuación que requiere trasponer términos y trabajar con expresiones equivalentes. (p. 2)

En el estudio antes descrito planteó “Diseñar una unidad didáctica para estudiantes de grado octavo fundamentada en un análisis conceptual, histórico y epistemológico de los conceptos de igualdad, equivalencia y ecuación” (Medellín, 2014, p. 2). Es preciso aludir que las edades de esos grados son de 15 o 16 años. El motivo para la creación de dicha unidad consistió en el aporte a la solución de la problemática expuesta con materiales prácticos para el docente.

Por lo que se refiere a la metodología aplicada, hizo un análisis, el cual describió en el objetivo del trabajo, que fue el sustento para la elaboración de la unidad didáctica. La característica de ésta consistió en iniciar del contexto aritmético al algebraico favoreciendo el planteamiento, resolución e interpretación de problemas para alumnos de octavo grado. Tal unidad estuvo compuesta por tres guías donde la primera “se orienta a trabajar la igualdad como una relación de equivalencia en un contexto de medida” (Medellín, 2014, p. 31).

La guía número 2:

> Hace énfasis en la igualdad como equivalencia en el contexto aritmético, aplicando propiedades de las operaciones, descomposición aditiva y multiplicativa. Lo anterior como punto de partida para dar significado a la variable como incógnita y aproximarse a la solución de ecuaciones lineales. (Medellín, 2014, p. 32)

Y la guía número 3:

> Se orienta inicialmente a la comprensión de la bilateralidad de la igualdad en el contexto algebraico, para lo cual parte del análisis del modelo de la balanza para dar significado a la resolución de ecuaciones de primer grado. En la parte final de esta guía se trabaja la equivalencia de expresiones algebraicas apoyándose en un modelo geométrico. (Medellín, 2014, p. 32)

Los resultados del estudio evidenciaron que los discentes tienen dificultades para otorgar al signo igual un sentido de equivalencia, pues la mayoría de los participantes lo concibe como una acción, es decir, como el cálculo de una operación o de un resultado final. Del mismo modo, Medellín (2014) infirió que el predominio de la visión operacional tiene que ver con las experiencias a las que los estudiantes de Primaria están expuestos, por ejemplo, “encuentran referencias a la igualdad en varias frases o problemas que buscan que efectúen operaciones, estas operaciones aparecen usualmente a la izquierda del signo y se insta a los estudiantes a que anoten la respuesta en la parte derecha” (p. 31).

De tal manera, concluyó que la comprensión que se le otorgue al signo igual posibilita o dificulta el trabajo con expresiones algebraicas, ecuaciones e identidades, en las que se requiere utilizar el signo como una relación de equivalencia.

### *1.2.2. Ecuaciones lineales de una variable*

En esta sección se presentan los estudios analizados que corresponden a las ecuaciones lineales de una variable. La relación que tiene este tema con el signo igual se debe a que, regularmente, el uso de este signo cambia en el contexto algebraico en comparación con el aritmético. Además, este es el contenido matemático donde más se evidencia la importancia de una adecuada comprensión y las dificultades que puede ocasionar en el aprendizaje. De tal manera que la descripción general de los estudios se realiza desde dos categorías: a) Análisis de las dificultades en la resolución y b) Propuestas didácticas para su resolución.

En cuanto al a) Análisis de las dificultades en la resolución de ecuaciones lineales de una variable está el trabajo de Maffey (2006) donde estableció que los estudiantes que cursan la Educación Secundaria y que ingresan al Nivel Medio Superior poseen, entre sus conocimientos previos, aprendizajes logrados con respecto a la resolución de ecuaciones lineales, por tanto, hipotetizan que los saberes que tienen son elementales pero precisos (e.g. concepto, la utilidad y reglas básicas que fundamentan los procedimientos de resolución).

Sin embargo, expresó que la experiencia le ha demostrado que varios estudiantes no tienen la base conceptual necesaria para tener un dominio sobre el tema, lo cual les resulta preocupante porque las ecuaciones lineales son el fundamento para el aprendizaje de contenidos matemáticos posteriores y por la relación que tiene con ciencias como la física y la química, así como la resolución de problemas de su vida cotidiana y profesional.

Por tanto, expuso como objetivo:

> Contar con una valoración del estado en que se encuentra la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, tomando en consideración que [*sic*] tanta importancia se da a la resolución de problemas por medio de éstas. (Maffey, 2006, p. 14)

La justificación de su estudio se estructuró por la manera en la que se aborda el tema de ecuaciones lineales, pues indicó que, primeramente, se presentan características y propiedades de las igualdades para después continuar con el tema de ecuaciones. Luego, se estudian en contextos fuera de significado, además de que se evita la resolución gráfica y la vinculación en ámbitos de la realidad.

La metodología del estudio fue de corte cualitativo. Realizó una ubicación histórica del tema. Revisó los programas de estudio de Educación Secundaria de la SEP. Aplicó encuestas a 13 estudiantes para determinar la concepción que le dan al signo igual. Utilizó cuestionarios con 34 alumnos de diferente semestre que hubieran aprobado el curso de álgebra de cuatro instituciones educativas, y con 14 profesores para establecer el aprendizaje y metodología de enseñanza que existe en tales escuelas. Analizó los libros de texto que los docentes indicaron que empleaban como apoyo para la enseñanza.

Y por último, llevó a cabo una revisión de los planes de estudio de algunos de los planteles que ofrecen la Educación Media Superior como El Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional y el Sistema Incorporado a la Escuela Nacional Preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México con la finalidad de conocer las metas propuestas en correspondencia con el tema de investigación.

Los resultados en virtud de la comprensión del signo igual, indicó la autora, mostraron que el 100% de los participantes presentan la idea de que este signo demuestra la obtención de un resultado. También, el 61.5% no reconocieron otros significados cuando se les presentaron igualdades donde el signo evidenciaba otros usos, tales como: equivalencia y definición de un objeto matemático. Y el 38.5% no lograron completamente analizar y entender los significados que implicaban las sentencias expuestas.

En las conclusiones estableció que la secuencia didáctica con la que se aborda el estudio de ecuaciones lineales, generalmente, se caracteriza por iniciar con la presentación de definiciones y propiedades, luego, ejercitación de resolución de ecuaciones y, en pocas ocasiones, el planteamiento de problemas. En consecuencia, el aprendizaje obtenido de los estudiantes tiene deficiencias cuando se les solicita resolver un ejercicio o problema con relación al tema tratado.

Por otro lado, Mejía (2012) planteó que, a partir de la experiencia empírica, como profesor se ha percatado que la mayoría de los estudiantes utilizan con poca frecuencia las ecuaciones lineales como una herramienta para resolver problemas cotidianos donde se puede aplicar dicho modelo matemático. En este sentido, observa que los discentes plasman sus procedimientos, para tales problemas, a través de estrategias aritméticas.

Asimismo, puntualizó que cuando los alumnos emplean las ecuaciones lineales comúnmente lo hacen de manera equivocada pues el planteamiento matemático que realizaban no describía la situación problemática. Ahora bien, en los casos donde llegan a obtener la respuesta al problema no les surge el menester de comprobar la validez de dicha solución.

En este aspecto, se expone como objetivo:

> Identificar y describir a partir de la Teoría de los Campos Conceptuales los esquemas de acción que sobre las ecuaciones lineales de una variable tienen los estudiantes del curso Matemáticas I, del Colegio de Bachilleres plantel Luis Moya, en el estado de Zacatecas. (Mejía, 2012, p. 4)

El origen que motivó la realización de la anterior investigación se debe a los índices de reprobación en la asignatura de matemáticas, particularmente, en el área del Álgebra en el nivel Medio Superior. De tal manera, indica que una de las alternativas para ayudar a disminuir esa estadística reside en conocer los esquemas de acción de los alumnos acerca del concepto de ecuación lineal de una variable, lo que significa conocer cómo comprenden los estudiantes cuando se les presenta una actividad familiar de dicho tema matemático.

La metodología que utilizó consistió en un estudio de corte cualitativo. Para la obtención de la información empleó dos cuestionarios. La muestra que empleó estuvo conformada por dos grupos de estudiantes de primer semestre del Bachillerato uno con 27 alumnos y otro con 28. Cabe mencionar que adoptó tres referentes teóricos para el análisis de datos: Fenomenología didáctica, Teoría de campos conceptuales y Resolución de problemas.

Por otra parte, Mejía (2012) realizó una clasificación de los errores y dificultades de las respuestas de los estudiantes desde dos vertientes: la matematización horizontal y la matematización vertical. Para el desarrollo de las categorías usó el planteamiento y la resolución de la ecuación, respectivamente. El problema que empleó fue el siguiente: "Gera, Jos y Alex ganan entre los tres $120. Jos gano [*sic*] $20 menos que Gera y Alex ganó el doble que Jos ¿Cuánto ganó cada uno?" (Mejía, 2012, p. 40).

En este sentido, la clasificación de los errores y dificultades que planteó Mejía (2012) es la que se muestra a continuación:

**Matematización horizontal**

Dos incógnitas para la misma variable

Traducción literal de dinero de Jos

Alex como base de Gera

Traducción mecánica del enunciado

Uso del álgebra sólo para repartir

La ecuación no planteada

**Matematización vertical**

Errores ligados a la jerarquía de operaciones

Errores ligados a la variable y su signo

Errores ligados a las leyes de los signos

Errores ligados con las leyes de la igualdad

Errores ligados a los exponentes

En cuanto a los resultados que exhibió, retomo aquellos que se refieren al signo igual. En el apartado de errores ligados con las leyes de la igualdad, aludió que, algunos discentes evidenciaron deficiencias cuando utilizan el teorema en acto de la propiedad uniforme para la suma. Éste se interpreta de manera que "Establece que si dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por una misma cantidad la igualdad se conserva" (Mejía, 2012, p. 71).

En lo que concierne a las conclusiones, Mejía (2012) interpretó que una de las principales dificultades en el aprendizaje y resolución de ecuaciones lineales se debió a las situaciones de matematización horizontal y con las estrategias empleadas en la validación de respuestas.

Por otro lado, Chavarría-Arroyo (2014) cita a Esquinas (2009) para hacer mención sobre el aprendizaje del álgebra, el cual, en la mayoría de las ocasiones, crea confusiones por el manejo del lenguaje matemático y de las "nuevas" reglas a utilizar.

Además, Muñoz y Ríos (2008), citado en Chavarría-Arroyo (2014), puntualizó que el cambio de la aritmética al álgebra genera dificultades en el aprendizaje que se agrava con la resolución de problemas que implican plantear ecuaciones lineales, pues, considera que se necesitan emplear más habilidades que solamente la mecanización de algoritmos. Asimismo, por lo antes mencionado, Chavarría-Arroyo (2014) señaló que la resolución de problemas ocupa un lugar primordial en la mayoría de las carreras universitarias y que no debe limitarse a un concepto abstracto sino también de aplicación.

Por consiguiente, el propósito del trabajo fue "analizar las dificultades de estudiantes de octavo año, al aprender el tema de resolución de problemas algebraicos modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita" (Chavarría-Arroyo, 2014, p. 15). De igual forma, se refirió a la justificación de la elaboración del estudio con la necesidad de conocer más sobre el cómo beneficiarse del error del estudiante cuando resuelve problemas.

La investigación fue de enfoque cualitativo del tipo exploración descriptiva. Utilizó el método de estudio de caso grupal. La muestra fueron seis estudiantes de bajo desempeño en matemáticas del tercer año de secundaria. Las técnicas de recolección de información fueron la revisión bibliográfica, la observación y la entrevista.

Los resultados que obtuvo indican que todos los estudiantes tuvieron al menos un error al realizar una operación básica. También, uno de los mayores obstáculos para los estudiantes fue el escaso dominio de las tablas de multiplicar. Otro aspecto fue con relación a los inestables conocimientos previos adquiridos, pues, confundían doble con cuadrado, y al sumar términos no semejantes y la transposición de términos.

Chavarría-Arroyo (2014) concluyó que un factor que influyó en las dificultades de aprendizaje en la resolución de problemas fue la escasa familiaridad del contexto en el que se presentaron. Igualmente, la inconsistencia de algunos conocimientos previos y la memorización de procesos algorítmicos sin comprensión previa. Este último, se caracterizó porque los estudiantes están proclives a la resolución de ejercicios mediante un desarrollo mecánico, lo cual, hace complejo el trabajar con problemas que demandan análisis e iniciativa.

Acerca de la categoría b) Propuestas didácticas para la resolución de ecuaciones lineales de una variable, se retoman varios trabajos al respecto (Erazo, 2011; García-Fajardo, 2014; García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas, 2016; Navia, 2019). El origen del estudio efectuado por Erazo (2011), quien señaló la apatía y falta de compromiso de los estudiantes en las matemáticas, especialmente en el álgebra. Dicha actitud se ve reflejada en los resultados de las evaluaciones que lleva a cabo.

Erazo (2011) resaltó las dificultades de los estudiantes cuando trabajan en la resolución de problemas que conllevan a ecuaciones lineales porque considera que se debe a una deficiencia en habilidades previas necesarias, como lo menciona a continuación:

> La exposición y la resolución de situaciones problemas que conlleven al planteamiento de ecuaciones lineales o cuadráticas son habilidades generales en las que los estudiantes de básica secundaria presentan serias dificultades al no tener, para ello, suficientemente desarrolladas las destrezas esenciales como lo son *traducir del lenguaje habitual al algebraico y viceversa*, por ende, es importante resaltar la estrecha relación existente entre desarrollo del pensamiento variacional y la construcción de un lenguaje algebraico para la modelación de una situación que lo requiera para su interpretación. (p. 83-84)

En este marco de ideas, concibió como propósito de la investigación "el desarrollo y planteamiento de una estrategia didáctica de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales con una incógnita y su aplicación en situaciones problema" (Erazo, 2011, p. 83). La razón que manifestó para la ejecución del estudio la relaciona con lo que alude Londoño (2010), citado en Erazo (2011), pues la manera mecanizada con la que se enseñan las ecuaciones lineales no promueve más que solo operar con expresiones algebraicas. De tal manera, se exhibió un interés de "generar estrategias didácticas de enseñanza – aprendizaje de ecuaciones lineales con una incógnita y su aplicación en situaciones problema, conducentes a mejorar el nivel de desarrollo de competencias interpretativa, argumentativa y propositiva" (Erazo, 2011, p. 84).

La metodología que utilizó consta de un diseño cuasiexperimental. La muestra la conformaron dos grupos (control y experimental) de estudiantes de grado séptimo. En ambos grupos se aplicó una actividad diagnóstica. El nivel académico de los grupos es homogéneo. Los resultados se analizaron a través de la prueba *t-student*.

Cabe mencionar que en el reporte de su investigación presenta solamente la fase *a priori*, por tanto, en las conclusiones evidenció hipótesis fundamentadas en la teoría tal como: lograr mayores niveles de las competencias mostradas en el desarrollo del estudio e incrementar la motivación, interés y disposición de los estudiantes.

Por lo que se refiere a García-Fajardo (2014), explica que los docentes tienen el desafío de la enseñanza del álgebra en la Educación Secundaria porque es cuando los alumnos se enfrentan a la generalización de operaciones aritméticas en lenguaje algebraico.

A causa de este reto, mencionó que los Matemáticos Educativos se han centrado en investigar sobre la transición entre ambas ramas de las matemáticas, concretamente, con el concepto de variable o incógnita cuando el estudiante plantea y resuelve ecuaciones.

En este sentido, propuso como objetivo "Reconocer los aspectos teóricos y metodológicos que fundamentan la concepción, diseño, experimentación y evaluación de una secuencia didáctica que integra *GeoGebra* para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo" (García-Fajardo, 2014, p. 3). La pertinencia de su investigación radicó en que al fomentar el pensamiento algebraico se facilita a los discentes el acceso a otras áreas de las matemáticas como la geometría y el cálculo, así también, las ciencias de la física y la química.

García-Fajardo (2014) diseñó tres situaciones didácticas, dos para los temas de ecuaciones lineales y una para el sistema de ecuaciones lineales de 2x2. La situación 1 la denominó *Descubriendo ecuaciones,* el objetivo de ésta fue "Permitir que el estudiante encontrara expresiones a partir de la manipulación de aplicativos diseñados en Geogebra" (p. 49). El desarrollo de la situación consistió en plantear actividades con figuras geométricas de tal manera que "el estudiante determinara la variación de las medidas dadas y modelara la situación que se planteó, es decir, que obtuviera a partir de la experimentación, la expresión algebraica que representara dicha situación" (p. 50).

La segunda situación *Modelando situaciones* la estructuró con dos tareas con el propósito de que "el estudiante a partir de la interpretación de enunciados modele situaciones, es decir que determine la expresión algebraica que representa tal situación e interprete sus resultados haciendo uso de dos aplicativos diseñados en geogebra para cada tarea" (García-Fajardo, 2014, p. 57).

Ahora bien, el estudio fue de enfoque cualitativo de carácter descriptivo-interpretativo. El marco metodológico que utilizó es la Ingeniería Didáctica que, para fines del estudio, consiste en una micro ingeniería. La muestra estuvo conformada por 30 estudiantes entre 11 y 14 años de grado octavo.

Las conclusiones que presentó se refieren a la transición de la aritmética al álgebra. Por ejemplo, el conjunto de obstáculos que interfieren en los procesos cognitivos de los estudiantes. Estos obstáculos, puntualizó, impiden que los discentes puedan segregar el manejo aritmético de situaciones en aquellas de carácter algebraico.

En este orden de trabajos donde el origen de la problemática ha sido mediante la observación y la experiencia docente está el trabajo realizado por García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas (2016), el cual fue de carácter empírico, puesto que mencionaron, que han comprobado que muchos de los discentes de nivel secundaria y bachillerato tienen dificultades con las ecuaciones lineales. Además, puntualizaron la importancia de que el estudiante domine las ecuaciones lineales porque "formarán parte imprescindible de otros contenidos matemáticos a lo largo de su formación académica" (García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas, 2016, p. 57).

El objetivo de la investigación, previamente mencionada, consistió en "propiciar la comprensión del concepto de ecuación lineal con una incógnita y de ecuación lineal con dos variables en estudiantes de primer grado de secundaria, mediante el uso de manipulables, en este caso la balanza concreta" (García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas, 2016, p. 57).

La pertinencia del estudio radicó en que el álgebra es el área de las matemáticas que más se enseña en la escuela y que existen pocos modelos que aporten significado a los símbolos algebraicos, lo cual, produce que el álgebra se vea limitada a solo la manipulación de expresiones por medio de reglas preestablecidas.

La metodología que aplicaron fue estudio de casos. Analizaron cinco casos conformados por binas de estudiantes de primer grado de secundaria. La aplicación de sus actividades comprendió cinco sesiones de tres horas cada una. La información que recabaron fue por medio de hojas de trabajo y videograbaciones.

Para el desarrollo de las sesiones, implementaron material concreto, particularmente, la balanza. El diseño de este material les permitió que los estudiantes pudieran manipular objetos, directamente, al interactuar con los elementos que lo conformaban. Asimismo, por las características del material, lo limitan exclusivamente a soluciones positivas y únicas.

La conexión que le conceden a la balanza con los elementos de la ecuación la explican de la siguiente manera:

> Una ecuación se representa mediante una balanza en equilibrio: en los platillos del lado izquierdo de la balanza se representa el primer miembro y en los platillos del lado derecho de la balanza se representa el segundo miembro. Los términos independientes de una ecuación se representan mediante canicas depositadas en recipientes descubiertos, los términos independientes serán números enteros. Los términos con incógnita se representan mediante recipientes cubiertos, que representarán las cantidades a descubrir (incógnita). (García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas, 2016, p. 58)

Las conclusiones que establecieron residen en que el material que utilizaron logró su objetivo, pues contemplan que fue determinante en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal con una y dos variables. Asimismo, la combinación de actividades escritas con material concreto promovió habilidades de exploración, reflexión, y análisis en los estudiantes.

Con respecto a la investigación llevada a cabo por Navia (2019) señaló que existen varios factores que influyen en el rendimiento en matemáticas por parte de los discentes. De esta manera, indicó que, resulta imperante el diseño de nuevas metodologías de enseñanza para la mejora del aprendizaje a través de la adaptación de nuevos conocimientos.

De este modo, planteó que las ecuaciones lineales de una variable representan un tema fundamental de las matemáticas donde la aplicación de éstas faculta la resolución de problemas relacionados con la misma ciencia en cuestión, así como de otras relacionadas a la misma. Pues, gracias a que permite traducir del lenguaje verbal al algebraico facilita los procesos y operaciones implicados en el mecanismo de solución a los planteamientos propuestos.

El objetivo residió en "identificar, organizar y analizar las dificultades que se presentaron respecto a la transformación de un lenguaje a otro y sus interpretaciones, las cuales son argumentadas en base a la actividad de conversión propuesta por Duval" (Navia, 2019, p. 40).

La justificación de su investigación correspondió a las ecuaciones lineales por ser uno de los temas con mayor interés entre la comunidad de Matemáticos Educativos donde su principal enfoque es:

> Establecer o proponer distintas estrategias o metodologías para contrarrestar la resistencia de algunos estudiantes frente al trabajo con ecuaciones, sobre todo aquello que les causa dificultad en la comprensión, aplicación y solución de un problema matemático o de cualquier otra ciencia. (Navia, 2019, p. 40)

La perspectiva metodológica de su estudio fue de tipo cualitativo con enfoque interpretativo. Los datos le fueron proporcionados a través de cuestionarios, fotografías, videos, observación y participación en clase. Las actividades que llevó a cabo fueron mediante una unidad didáctica con el desarrollo de tres momentos: ubicación, desubicación y reenfoque. La muestra la conformó con 10 estudiantes entre 14 y 15 años. Cabe mencionar que el referente teórico que utilizó es la teoría de Representaciones Semióticas de Duval.

La actividad que presentó consiste en el uso del juego "parqués". Este juego se compone por seis dados donde dos son de color rosa. Las caras de un dado son el signo igual y en el otro los signos de suma y resta. El resto de los cubos son blancos donde uno tiene en las caras los números del 0 al 5, en otro del 6 al 11, en otro más del 12 al 17 y en el último las variables $x$, $y$, $z$, $m$, $n$ y $r$.

La dinámica del juego es la siguiente:

> Para jugar con el parqués de ecuaciones se organizaron grupos de 4 estudiantes. Luego, cada jugador lanzó según su turno los dados de color rosado con los cuales tenía que plantear una Ecuación Lineal Con Una Variable (E.L.C.U.V.), la cual debió resolver utilizando los dados de color blanco y el puntaje obtenido fue el valor que recorrió con una de las fichas del color asignado en su puesto. El estudiante que primero lograra sacar las cuatro fichas debía encargarse de orientar y apoyar a los

> demás compañeros del grupo sobre el uso de los dados para resolver las ecuaciones para obtener al final también una nota cuantitativa grupal de la clase. Luego se evaluaron los avances cognitivos y procedimentales que cada uno de los integrantes mostró en el proceso. (Navia, 2019, p. 45)

Los resultados que obtuvo aluden a que los estudiantes hacen un tratamiento en el tipo de registro gráfico y, además, hacen la conversión del registro verbal al registro gráfico. Y también, del lenguaje verbal al algebraico. Lo cual, mencionó, cumple con al menos dos tipos de registros para llevar a cabo las tres funciones cognitivas necesarias para la aprehensión de un concepto matemático: formación, tratamiento y conversión.

### *1.2.3. El signo igual en correlación con la resolución de ecuaciones lineales de una variable*

En esta sección se presentan los estudios que analizan dos componentes esenciales: la comprensión del signo igual y la resolución de ecuaciones lineales, para determinar si existe una correlación directa entre ambos, es decir, si la comprensión del signo incide en la resolución de ecuaciones ya sea de manera favorable o es contraproducente.

De acuerdo con Knuth, Stephens, McNeil & Alibali (2006), en diversos estudios (Ladson-Billings, 1998; Moses & Cobb, 2001; *National Research Council* [NRC], 1998, citado en Knuth et al., 2006) la creciente preocupación respecto a la restringida preparación de los alumnos en los temas de álgebra y el reconocimiento de esta rama de las matemáticas como factor selectivo en las oportunidades educativas o laborales.

Además, la problemática de su estudio incurrió en el nivel primaria con las operaciones aritméticas que involucran el signo igual. Éstas las consideraron sencillas de realizar porque mencionaron que, en ese nivel se promueve, regularmente, el sentido operacional. Sin embargo, señalaron que dicho sentido no es muy útil cuando se requiere resolver ecuaciones con mayor complejidad en grados posteriores. De esta manera, puntualizaron, las dificultades que presentan los estudiantes se pueden atribuir a inadecuadas comprensiones del signo cuando trabajan con expresiones y ecuaciones simbólicas (Knuth et al., 2006).

Así, Knuth et al. (2006) se plantearon como objetivo: "*we report results from a study that examined middle school students' understanding of the equal sign and its relation to their performance solving algebraic equations*" (p. 298). Esto quiere decir que el estudio reportado examinó la comprensión de discentes con respecto al signo igual con relación al desempeño en el momento de resolver ecuaciones lineales.

La pertinencia de su investigación residió en:

> *The ubiquitous presence of the equal sign at all levels of mathematics highlights its importance. The concept of equality and its symbolic instantiation are traditionally introduced during students' early elementary school education, with little*

> *instructional time explicitly spent on the concept in the later grades*. (Knuth et al., 2006, p. 298)

Esto es, la importancia de conocer acerca de la comprensión del signo en los estudiantes radica por la presencia que tiene en todos los niveles de educación. Pues, se introduce desde primaria con el concepto de igualdad y su representación simbólica y en los grados escolares siguientes no hay una previa instrucción explícita de su significado.

Los participantes de su investigación fueron 177 estudiantes de bachillerato (47 de sexto grado, 72 de séptimo grado, 58 de octavo grado). Los datos son las respuestas de los estudiantes de los ítems (Desarrollados por los autores y retomados de otros estudios) de una prueba escrita. Diseñaron dos pruebas donde el cambio versó en los datos y la presentación de los problemas (simbólica y verbal). El análisis de los resultados lo realizaron enfocándose en tres ítems de la prueba aplicada.

Los resultados que exhibieron es que la mayoría de los estudiantes de sexto y octavo grado muestran un sentido operacional, en cambio, en el pensamiento relacional representan la minoría de los mismos discentes de estos grados. Los alumnos de séptimo grado mostraron mayormente conceptos relacionales que operacionales.

Knuth et al. (2006) concluyeron que los estudiantes que comprenden el signo igual como un símbolo de equivalencia tienen más éxito para resolver ecuaciones algebraicas que aquellos que no lo comprenden de esa manera. En consecuencia, consideraron que es necesario poner mayor atención en la comprensión del signo igual en las matemáticas que se estudian en secundaria.

Otra investigación es la de Fyfe, Matthews & Amsel (2017) en la cual puntualizaron que, en la literatura, a través de los años, han reportado las falencias de estudiantes de primaria y secundaria con respecto a cómo visualizan el signo igual pues lo comprenden como una indicación para hacer algo. Asimismo, mencionaron que la investigación de dicho signo es importante porque es un concepto fundamental en el álgebra.

De tal manera expresaron como objetivo interpretar cómo el conocimiento de los estudiantes universitarios influye en el éxito de su desempeño con la resolución de problemas algebraicos. Dicho desde sus palabras “*We examined college students’ knowledge of the equal sign and its relation to their performance on key algebraic problems*” (Fyfe, Matthews & Amsel, 2017, p. 281).

El argumento para llevar a cabo su trabajo incidió en que algunas investigaciones sugieren que en el nivel universitario aún persiste el sentido operativo del signo igual. Además, que existen pocos estudios que analizan si el signo igual es un factor que determina la eficacia en la resolución de ecuaciones lineal y, sobretodo, en dicho nivel mencionado.

El enfoque de su investigación fue de corte cualitativo. La información recopilada la dividieron en tres vertientes: Definición del signo igual, resolución de ecuaciones algebraicas y expresión-interpretación algebraica. El instrumento de recolección que aplicaron fue un cuestionario con diferentes ítems de acuerdo con cada categoría. Los participantes fueron 189 estudiantes universitarios con promedio de edad de 26 años.

Los resultados con respecto a la definición del signo igual señalaron, que el 65% tiene una comprensión relacional, el 17% operativos y el 18% muestran otros significados distintos a los dos anteriores. Ahora bien, en cuanto con la resolución de ecuaciones algebraicas, indicaron que aquellos estudiantes que proporcionaron una definición operativa tuvieron menores puntajes en comparación con otros estudiantes. Y, a lo que corresponde a la expresión-interpretación algebraica, aludieron, que el 65% de los alumnos interpretaron las variables de manera correcta.

Finalmente, concluyeron que el conocimiento del signo igual importa porque los estudiantes que suministraron un sentido operativo tienen menos probabilidades de resolver ecuaciones algebraicas e interpretar una expresión algebraica de manera correcta que aquellos discentes quienes presentaron una comprensión relacional.

Por otra parte, expresaron que las ecuaciones lineales de una variable tienen un interés notable en temas algebraicos y que son el fundamento para edificar varios conceptos matemáticos en el transcurso de la Educación Secundaria. Realzaron que la mayoría de los estudios con relación al tema son de carácter descriptivo donde llevan a cabo una observación empírica de los errores y los organizan en diferentes categorías.

Retomando lo antes mencionado, Pérez, Diego, Polo & González (2019) distinguieron pertinente complementar, mediante la investigación con fundamentos teóricos, una clasificación descriptiva, la más exhaustiva posible, de los errores relacionados con la resolución de ecuaciones lineales para de esta manera conocer las causas de los errores identificados que cometen los estudiantes.

En vista de lo anterior, el objetivo que formularon fue “Completar y refinar la primera clasificación descriptiva de errores identificada en la literatura” (Pérez et al., 2019, p.90) y “Atribuir causas a estos errores, utilizando el referente de Socas (1997), a partir de la indagación en los conocimientos de los estudiantes” (Pérez et al., 2019, p. 90).

Las características metodológicas de su estudio fueron de tipo mixto realizada en dos fases. En la primera, utilizaron un cuestionario para identificar los errores que cometen los estudiantes. En la segunda, llevaron a cabo entrevistas cognitivas para profundizar sobre las causas de los errores. Su muestra fue de 266 estudiantes de cuatro grados diferentes. Las edades se distribuían de la siguiente manera: “64 de 13 años, 67 de 14 años, 70 de 15 años y 65 de 16 años” (Pérez et al., 2019, p. 90). Cabe mencionar, aludieron, que el propósito de que fueran de diferentes grados fue porque este rango de edades comprende cuando se inicia y culmina el estudio de las ecuaciones lineales.

En los resultados reportaron dos categorías principales: “errores relacionados con operaciones aritméticas y errores algebraicos propios de las ecuaciones” (Pérez et al., 2019, p. 92). Además, mostraron dos tipos de errores procedimentales que tienen relación con el signo igual, los cuales son: Error de igualdad entre los miembros y error en las “reglas del pasa”. Este último, en palabras de los autores significa “lo que está sumando pasa restando y lo que está multiplicando pasa dividiendo” (Pérez et al., 2019, p. 89), es decir, se refiere a la transposición de términos o bien la aplicación de la propiedad de la existencia del inverso aditivo y multiplicativo.

Relacionado con el error de igualdad entre los miembros de la ecuación, presentaron, que ocurre en mayor medida con alumnos de 15 años (12.9%), mientras que en el resto fue del 7%. Éste se evidenció, por ejemplo, en sentencias del tipo $-ax = b$, donde mencionaron “Consistió en una aplicación errónea del método de la balanza, al realizar la operación en uno solo de los miembros de la igualdad” (Pérez et al., 2019, p. 97).

Para el error en las “reglas del pasa”, exhibieron la distribución siguiente: “29.7% entre los estudiantes de 13 años, con un 23.9% entre los de 14, con un 42.9% entre los de 15 y con un 21.5% entre los de 16” (Pérez et al., 2019, p.97). El error se manifestó cuando los discentes realizaron de manera equivocada la transposición de términos, es decir, “trasponen los términos al segundo miembro de la igualdad realizando la misma operación que había en el primer miembro” (Pérez et al., 2019, p. 98). La causa de este error, indicaron, se debe a “una aplicación inapropiada de reglas de procedimiento asociada a una ausencia de sentido” (Pérez et al., 2019, p. 98).

### *1.2.4. Conclusión de la revisión de antecedentes*

Desde la revisión de antecedentes descritos en el apartado anterior, es posible contemplar el marco común que siguen las investigaciones con respecto al objeto de estudio, que, en este caso, se refiere al sentido bidireccional del signo igual de ecuaciones lineales de una variable. De la misma manera, resulta viable distinguir los aspectos que hacen falta indagar.

Luego del análisis de la literatura recabada, se percibe que existen pocos estudios sobre este tema llevados a cabo en el contexto mexicano. Algunos de los trabajos fueron realizados en Colombia (Chica y Soto, 2015; Erazo, 2011; García-Fajardo, 2014; Medellín, 2014), otros más en España (Molina, 2006; Pérez et al., 2019; Ramírez, 2010) y en Estados Unidos de América (Fyfe, Matthews y Amsel, 2017; Knuth et al., 2006). Así, los resultados que evidencian sirven como sustento teórico, pero no son especializados en el ámbito nacional.

Otro aspecto, es el énfasis que existe con el tema de ecuaciones lineales de una variable en el nivel escolar de la población de estudio. Investigaciones como las de Chavarría-Arroyo (2014), Medellín (2014), García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas (2016), García-Fajardo (2014), Navia (2019), Pérez et al., (2019) y Erazo (2011) centran sus esfuerzos en estudiantes entre 12 y 15 años que comprende el nivel Secundaria. Ahora bien, en lo que corresponde al signo igual se encaminan en individuos o materiales didácticos de Primaria (Chica y Soto, 2015; Corona y Díaz-Menchaca, 2018; Ramírez, 2010; Molina, 2006). Y, respecto a los que se enfocan en el Nivel Medio Superior (Maffey, 2006; Mejía, 2012; Knuth et al., 2006), realizan un análisis descriptivo sobre el desempeño de los discentes cuando resuelven ecuaciones lineales de una variable para aportar fundamentos para futuras propuestas.

En este sentido, en la literatura se detectan propuestas didácticas en secundaria debido a la transición abrupta de la aritmética al álgebra y en el siguiente nivel educativo los trabajos se enfocan en el análisis del desempeño de los estudiantes donde se evidencia que presentan dificultades en el estudio del tema, tales como: arraigada visión operacional, débil comprensión relacional y dificultad para asociar diferentes significados al signo igual, sin embargo, no se vislumbran diseños para solventar esas problemáticas.

Por otra parte, una característica que se percibe de las propuestas sobre el aprendizaje de ecuaciones lineales de una variable es que no han contemplado la comprensión del signo igual como factor que vertebre los diseños didácticos. Hasta al momento, desde la revisión de los trabajos, éstas se realizan desde la comprensión del concepto de ecuación por medio de diferentes representaciones semióticas (Erazo, 2011; García-Mendívil, Díaz-Gómez y Vargas, 2016; García-Fajardo, 2014; Navia, 2019).

A su vez, un distintivo que se puede identificar, de acuerdo con los resultados de las investigaciones y en los diferentes grados escolares donde se han recopilado datos, es que en Primaria los contextos en los que se expone el signo igual promueven un sentido operacional del mismo, por lo que, en el siguiente nivel, poseen esta comprensión y es cuando se presentan las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, peculiarmente, en la resolución de ecuaciones. De tal manera que acarrean estos obstáculos didácticos hasta la etapa universitaria pasando por el nivel Medio Superior, los cuales, son los grados donde hay menos propuestas didácticas.

En este aspecto, parece que la comprensión del signo igual se complejiza de manera en la que se avanza en los grados escolares. Dado que en Primaria el uso de este signo es de manera operacional y posteriormente en los siguientes niveles aparecen otros usos de forma repentina en donde, tanto los profesores como los planes de estudio, suponen que sucederá la comprensión adecuada. Por tanto, se intuye que todo el sistema educativo está obviando cómo es el proceso de comprensión de este signo.

Por tanto, en el marco del vacío en la literatura consultada, y de acuerdo con lo que señalan Fyfe, Matthews & Amsel (2017), es necesario centrar la investigación en la relevancia del signo igual en los grados precedentes al Universitario, por ejemplo, en el Medio Superior para tratar de responder a las preguntas ¿cómo intervenir?, ¿qué ideas funcionan?, ¿cómo afecta el sentido operativo en la resolución de ecuaciones?, ¿cómo se visualiza su aprendizaje en la resolución? y ¿qué debe contener un diseño didáctico? Así, desde esta revisión se origina este trabajo.

## 1.3. Planteamiento del problema de investigación

### *1.3.1. Problemática*

Las matemáticas están escritas con signos para evocar conceptos abstractos y facilitar la manipulación de la teoría con el propósito de generalizar un lenguaje a escala universal donde cada símbolo tiene la misma representación en cualquier civilización. Sin embargo, existen algunos símbolos que su uso se ha diversificado y resulta complejo definirlos, por ejemplo, el signo igual, ya que al momento de comprender su utilización puede ocasionar interpretaciones ambiguas en cada individuo.

Es así como el signo igual es uno de los primeros símbolos matemáticos que el alumno conoce, en el que, sin explicación previa, aparece en las operaciones básicas, en específico, suma, resta y multiplicación. Por lo tanto, su uso y comprensión se desarrolla de manera empírica a través de ejemplos donde se observa que “construimos y reconstruimos los significados de manera idiosincrásica cada vez que aprendemos o manejamos ideas” (Arcavi, 2006, p. 29).

En definitiva, la comprensión del signo igual es uno de los principales cambios en la transición de la aritmética al álgebra y, al mismo tiempo, es un elemento que las relaciona estrechamente. Cuando los estudiantes se enfrentan a este cambio, surgen los errores en el aprendizaje por obstáculos didácticos creados anteriormente.

Esta transición abrupta entre ambas ramas de las matemáticas es uno de los principales elementos del fracaso escolar en el álgebra, que representa uno de los problemas reportados y estudiados en la matemática educativa, además de la poca atención en la generalización y razonamiento y la ausencia de respuestas a las cuestiones de para qué y para quién es de utilidad el álgebra (Kindt, 1980, citado en Castro y Molina, 2007).

Considerando lo anterior, la problemática reside, precisamente, en que no hay una forma concreta de cómo comprender este signo, inclusive, se comienza a utilizar en la aritmética sin antes saber qué representa, por lo que, de acuerdo con su uso, se va construyendo su concepto conforme se va mostrando en la trayectoria escolar. Es así que, en Primaria el signo igual está presente en las operaciones básicas pero el papel que desempeña es secundario, es decir, lo importante en ese contexto es determinar correctamente el resultado de esa operación y este signo se emplea para distinguir la respuesta del resto de la sentencia numérica establecida.

Ahora bien, en el álgebra este signo dirige cómo se debe proceder para calcular el valor de una incógnita de una ecuación, por tanto, todo el proceso se focaliza en el signo, lo que significa que debe interpretarse de manera distinta a como se hacía anteriormente y esto implica una reconceptualización en la que muchos discentes presentan dificultades.

### *1.3.2. Problema*

Luego de la revisión de la literatura, se perciben pocos diseños orientados a promover en los estudiantes la eficacia en la resolución de ecuaciones lineales de una variable enfocados en el Nivel Medio Superior. La mayoría se centran en alumnos de Secundaria. Sin embargo, otros trabajos han analizado el desempeño de los discentes de otros niveles y reportan que también presentan deficiencias tanto en Bachillerato como en Universidad (Medellín, 2014, Maffey, 2016 y Fyfe, Matthews & Amsel, 2017).

Además, se ha evidenciado que las concepciones que se tengan del signo igual en los diferentes contextos matemáticos determinarán el aprendizaje del álgebra formal. En concreto, para la resolución de ecuaciones lineales de una variable, estudios como Fyfe, Matthews & Amsel (2017) y Knuth et al. (2006) han reportado que los alumnos que tienen una comprensión relacional de dicho signo tienen mayores probabilidades de resolver correctamente ecuaciones lineales que quienes solo lo comprenden de manera operacional, sin embargo, este aspecto no se ha utilizado para guiar propuestas didácticas.

Finalmente, el problema consiste en que las propuestas se enfocan en promover la comprensión de ecuación lineal desde el álgebra y no contemplan la utilización del signo igual, visto desde la aritmética, como el factor clave en dicha comprensión para así establecer relaciones entre ambas ramas de la matemática, por tanto, escasean los diseños didácticos orientados con esta idea.

### *1.3.3. Pregunta*

Respecto a la situación que se ha planteado, es conveniente enfatizar en la importancia del signo igual en la resolución de ecuaciones lineales, es por ello que es de interés investigar sobre:

¿Cuál es la repercusión que tiene en el aprendizaje incorporar el sentido bidireccional del signo igual en una situación didáctica para la resolución de ecuaciones lineales de una variable en estudiantes de Nivel Medio Superior?

### *1.3.4. Objetivos*

#### 1.3.4.1. Objetivo general

Luego de establecer la pregunta de investigación, se plantea el siguiente objetivo general:

OG. Proponer una situación didáctica diseñada desde el sentido bidireccional del signo igual para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales de una variable con estudiantes de segundo semestre de bachillerato en un escenario virtual.

#### 1.3.4.2. Objetivos específicos

Con el propósito de cumplir el objetivo general a continuación se define los siguientes objetivos específicos:

OE1. Distinguir aspectos que coadyuven a la construcción de una situación didáctica mediante un análisis preliminar utilizando el signo igual como punto de referencia.

OE2. Diseñar una situación didáctica donde vertebre el sentido bidireccional del signo igual en sentencias aritméticas y algebraicas.

OE3. Implementar la situación didáctica en un escenario virtual de enseñanza con alumnos de segundo semestre de bachillerato.

OE4. Describir los momentos de la aplicación y reconocer elementos satisfactorios en términos de las respuestas de los estudiantes de bachillerato.

#### *1.3.5. Justificación*

En sintonía con la presente investigación, varios estudios (Knuth et al., 2006; Fyfe, Matthews & Amsel, 2017; Pérez et al., 2019) indican que la comprensión del signo igual importa en la efectividad de resolución de ecuaciones lineales de una variable, es decir, aquellos estudiantes que lo observan como una relación de equivalencia tiene mayores probabilidades de resolver exitosamente las ecuaciones que quienes solo lo visualizan de manera operacional, por lo que se ha tomado la decisión de construir una situación didáctica considerando este precedente teórico.

Con relación a lo antes mencionado, se describe la pertinencia de la investigación con respecto a los siguientes aspectos:

- *Social*: La finalidad de aportar a disminuir la deserción escolar en el Nivel Medio Superior a causa del estudio del álgebra y para sustentar las bases del aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Lo cual tiene relación con el propósito puro (Ciencia Básica) de la Educación Matemática, al que Schoenfeld (2000) alude como "Comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje" (p. 2).
- *Contenido*: Por reducir las dificultades que presentan los estudiantes cuando estudian el tema de ecuaciones lineales de una variable y la trascendencia que tiene la comprensión de dicho contenido con los temas consecutivos. Vinculado al propósito aplicado que alude Schoenfeld (2000), el cual, reside en "usar esa comprensión para mejorar la instrucción matemática" (p. 2).
- *Didáctica*: Contribuir al conjunto de estrategias de enseñanza y aprendizaje para abordar el estudio del tema ya descrito desde una perspectiva diferente. Asimismo, como herramienta alternativa para los docentes cuando deban impartir tal contenido. Los profesores deben de conducir la enseñanza y el aprendizaje mediante el diseño de estrategias que "propicien el aprendizaje mediante la actividad intelectual de orden superior en el estudiante" (Nieto, Viramontes y López-Hernández, 2009, p. 18).

Con la elaboración de este trabajo, se pretende aportar al conjunto de propuestas didácticas en el Nivel Medio Superior y beneficiar a los estudiantes para solventar las dificultades que tienen cuando estudian el tema de ecuaciones lineales de una variable. También, otro grupo que podrá beneficiarse con esta investigación es el de los docentes debido a que se les proporciona una opción más para abordar dicho tema desde otra perspectiva fundamentada en la teoría.

En resumen, la motivación que originó el desarrollo de este trabajo fueron los resultados obtenidos en la tesis de licenciatura y la manera en la que puede influir en alumnos del nivel medio superior. También, los antecedentes abordan líneas de análisis en dificultades asociadas con igualdades aritméticas y algebraicas desde el nivel primaria hasta bachillerato, sin embargo, la mayoría de las propuestas solo se orientan en estudiantes de secundaria, lo cual, permite investigar más acerca de otros niveles educativos.

Además, el signo igual es un símbolo utilizado de manera arbitraria en diferentes temas matemáticos que diversifica la cantidad de usos y significados que se le otorga, lo cual, incrementa su complejidad de comprensión. Por tanto, se contempla que mediante una propuesta didáctica que se enfoque en la bidireccionalidad de este signo permitirá que el estudiante integre sus funcionalidades tanto de la aritmética como del álgebra.

# CAPÍTULO II. FUNDAMENTO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que orientan el análisis y comprensión del trabajo. La teoría que se describe es la de Situaciones Didácticas de Brousseau. Asimismo, se detalla el concepto mismo de ésta y algunos términos relevantes como situación didáctica, situación a-didáctica y los tipos de situaciones. También, la clasificación de significados asociados al signo igual y el fundamento matemático acerca de las ecuaciones lineales de una variable y las propiedades de la igualdad.

## 2.1. Teoría de Situaciones Didácticas

El objetivo inicial de investigadores de la Didáctica de las Matemáticas fue constituirla en una disciplina científica. En este proceso se han constituido grupos de trabajo en diferentes partes del mundo, por ejemplo, en Francia. Es de relieve mencionar que *Didactique des Mathématiques* ha sido impulsado por diferentes Matemáticos Educativos en el que sus aportes han sido reconocidos internacionalmente para consolidar la escuela francesa (Ruíz, Chavarría y Alpízar, 2006).

En este sentido, los fundadores de la escuela francesa han desarrollado nociones, términos, conceptos y métodos consolidados en teorías, como la Transposición Didáctica, Ingeniería Didáctica y la Teoría de Situaciones Didácticas. Esta última, formulada por Guy Brousseau donde "la idea es definir conocimiento matemático mediante una situación que se llama fundamental" (Ruíz, Chavarría y Alpízar, 2006, párr. 15).

La Teoría de Situaciones Didácticas es un cuerpo de conceptos articulados entre sí de la Matemática Educativa que explicita cómo debe ser el estudio de las matemáticas escolares en los discentes y orienta el proceso de enseñanza para ofrecer estrategias a los docentes en su práctica. Según Chavarría (2006) esta teoría se compone de:

> Tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico. (párr. 6)

De acuerdo con Nieto, Viramontes y López-Hernández (2009) tal teoría reside en que:

> El estudiante aprende matemáticas mediante la conducción de actividades diseñadas en un medio en el que se propone resolver una situación problemática para la que de inicio se tiene una estrategia base de solución que generalmente falla y de preferencia se pretende que el mismo medio comunique al estudiante que es necesario cambiarla lo que genera en él una nueva estrategia que lo adapta al medio. (p. 18)

Así, el creador de esta teoría, Brousseau (1986) la conceptualiza como:

> El alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de

> dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p. 14)

Entonces, el medio consiste en las transformaciones que realiza el docente respecto al saber científico para convertirlo en un saber enseñado. Lo diseña de cierta manera que aísla las variables que entorpecen la construcción del aprendizaje deseado. Por tanto, representa el espacio donde se desarrollan los elementos, seleccionados por el docente, que interactúan con el alumno para ocasionar una apropiación y motivación a adaptarse a la situación. Es así, que incentiva el trabajo individual como el de equipo y los orienta, por sí mismo, a distinguir la respuesta al problema.

Una situación que puede ejemplificar, de manera concreta, a lo que se refiere cuando se habla del medio didáctico es la que indica Nieto, Viramontes y López-Hernández (2009). El problema fue construido para el tema de proporcionalidad y consiste en que los estudiantes reunidos en equipos de seis integrantes deben de replicar un rompecabezas de seis piezas que les fue proporcionado con la condición de que un lado de una pieza del nuevo rompecabezas mida 7 cm en comparación con su pieza homóloga del original que mide 4 cm considerando que debe mantenerse la forma en el rompecabezas completo.

En este medio didáctico hay varios puntos a destacar:

El primero, reside en que el saber científico es la proporcionalidad y el docente lo transforma en un saber enseñado mediante réplicas a escala con un juego conocido por los estudiantes.

El segundo, es que las variables que el docente aísla tienen la finalidad de que los discentes no deben de preocuparse por armar el rompecabezas sino en buscar estrategias para realizar la nueva construcción que es el objetivo de la situación.

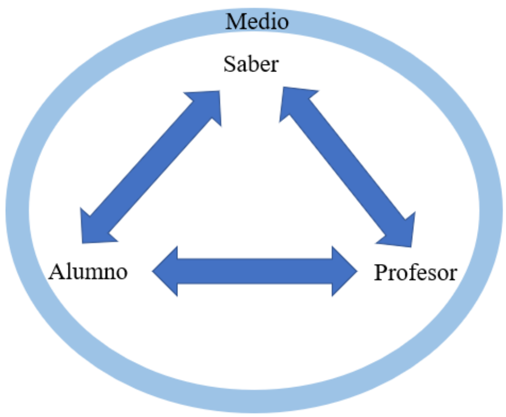
El tercero, consiste en que cada alumno debe diseñar una pieza del rompecabezas, por tanto, los elementos que el docente seleccionó están en constante interacción con el equipo para que se interesen y se motiven a dar solución al problema.

Y finalmente, el trabajo se realiza de manera individual y en equipo. Después de debatir sobre la mejor estrategia que consideran que puede llegar a funcionar, la ponen a prueba llevándola a la práctica y es el propio medio que los orienta a distinguir la respuesta al problema. Esto sucede cuando unen todas las piezas cumpliendo con las condiciones que fueron establecidas en la situación.

De tal manera, retomando aspectos relevantes de cada interpretación, así como la conceptualización del autor de la teoría; la Teoría de Situaciones Didácticas es la conexión entre los protagonistas de la clase: profesor, alumno y saber, también conocido como triángulo didáctico (Figura 1), a través de un medio que diseña el docente donde le proporciona, al estudiante, las herramientas adecuadas para su desarrollo. Además, el medio debe ser desafiante para el alumno, el cual, debe crear e implementar estrategias que le ayuden a resolver la problemática.

**Figura 1**

*Representación del triángulo didáctico*




Por otra parte, diversos psicólogos han mostrado que las personas tienden de manera natural a la adaptación, tales como: "Skinner (papel de los estímulos), como Piaget (papel de las experiencias personales en el desarrollo espontáneo de los esquemas fundamentales), o Vigotski [*sic*] (papel del medio sociocultural)" (Brousseau, 2000. p. 7). Por tanto, la TSD, se fundamenta en la adaptación de los individuos a un medio, de tal manera, que, durante el proceso, el resultado obtenido es el aprendizaje.

Para ejemplificar la adaptación de un individuo a un medio se retoma la situación propuesta por Douady (1995), la cual, se describe a continuación:

En el tema de factorización y desarrollo de expresiones algebraicas habitualmente se enseña desde la simbología, es decir, operar una serie de expresiones algebraicas mediante un conjunto de reglas a aplicar. En este sentido, no se promueve la construcción del significado de las nociones matemáticas en los estudiantes, la cual, es muy necesaria para los discentes cuando se enfrenten a problemas relacionados con este tema. Es así, que, el modelaje algebraico promueve el desarrollo de los componentes semántico (conceptual) y sintáctico (operativo).

De tal manera que, los aspectos mencionados se unen para la creación del medio para alumnos que recién han terminado la educación secundaria e ingresan al primer semestre de Educación Media Superior. A continuación, se presenta la situación de Douady (1995):

> En un plano formado por dos ejes graduados, ortogonales, A. Interesan los puntos del plano cuyas coordenadas $(x, y)$ están definidas por la relación: $y = (x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$.
> Se denomina $E$ al conjunto formado por estos puntos:
> Proponer 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos de $E$, y 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos que no pertenezcan a $E$.

Representar gráficamente la mayor cantidad posible de puntos de $E$.

[*sic*] Hay puntos de $E$ sobre el eje de las abscisas? ¿Y sobre el eje de las ordenadas? Si es así, dar las coordenadas de esos puntos. Si no, decir por qué.

¿Hay puntos de E que tengan la misma abscisa? ¿Y otros que tengan la misma ordenada? Si sí, dar ejemplos; si no, decir por qué.

B. Interesa ahora el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas $(x, y)$ estén definidas por la relación: $y = x^2 - 9$. Se denomina $F$ al conjunto formado por estos puntos (Responder a las mismas preguntas que se formularon al punto A).

C. ¿Hay puntos comunes entre $E$ y $F$? Si sí, dar las posibles coordenadas de estos puntos. (pp. 81-82)

Las características del medio que diseña el docente se convierten en condiciones esenciales para provocar el entusiasmo y aprendizaje que se desea lograr en los alumnos. Enseguida se aluden algunas condiciones:

1) "Con la ayuda de sus conocimientos anteriores, el estudiante no puede comprender el enunciado" (Douady, 1995, p. 90). Es decir, que el alumno no comprende completamente el problema, sin embargo, puede extraer algunas ideas que le sirvan para comenzar a trabajarlas e iniciar con el proceso de solución. En la propuesta de Douady pudiera ser que el estudiante trazara los ejes ortogonales y los graduara, ubicar las coordenadas de los puntos, leer las coordenadas de tales puntos y sustituir algunos valores numéricos en la función, al menos con números enteros, por mencionar algunos.

2) "Con sus conocimientos, no puede solucionar completamente el problema" (Douady, 1995, pp. 90-91). Lo cual se refiere a que el problema no solicita la aplicación inmediata de procedimientos o algoritmos ampliamente conocidos. Es decir, en el ejemplo la función $y = (x + 3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$ está escrita como el producto de dos factores para facilitar la búsqueda de los valores de $x$ de tal forma que $y = 0$, sin embargo, presentar de esta manera la función no es algo común para los discentes por lo que algunos procederán a desarrollar el producto de los factores y como aún no saben cómo resolver los trinomios de segundo grado tendrán dificultades en calcular los valores de $x$ que cumplan con la condición.

3) "Los objetos de enseñanza, aquello que el profesor quiere que los estudiantes aprendan y retengan, son herramientas adaptadas a la resolución de un problema" (Douady, 1995, p. 91). Para el caso del problema mencionado, la factorización es la herramienta para la función $y = x^2 - 9$ y también la propiedad, para que un producto sea nulo o cero es suficiente con que uno de los factores sea cero.

4) "El problema se expresa en al menos dos cuadros" (Douady, 1995, p. 91). Así, de esta manera, cada cuadro aporta información relevante que se puede complementar para proceder con la resolución de la situación. Para este ejemplo, las preguntas fueron planteadas en el cuadro gráfico mientras que los datos y los puntos se explicitaron a través de una función algebraica.

Entonces, la adaptación al medio propuesto surgirá con la interacción de los discentes con el problema y mediante la participación tanto individual como en conjunto, lograrán establecer productos que serán reconocidos por el profesor como evidencias del aprendizaje. En este sentido, Douady (1995) indica que la adaptación puede surgir a través de la siguiente idea.

Para la actividad A, la primera pregunta es algo con lo que los alumnos pueden trabajar inicialmente y se refiere a la ubicación de puntos mediante coordenadas en el plano, de tal manera que localicen 5 puntos que verifiquen la relación y 5 que no. Además, así establecerán un significado gráfico de la función algebraica. La segunda indicación, se refiere a tener mayor conocimiento sobre el comportamiento de la gráfica a través de una serie de puntos mediante la tabulación. Para esto se puede utilizar herramientas tecnológicas que faciliten el proceso. Conceptualizar los dos conjuntos $E$ y $F$ de forma geométrica ayuda a visualizarlo como la intersección de dos curvas.

Para la tercera actividad, tiene como propósito que los discentes relacionen que el punto en el eje de las abscisas tiene la coordenada en $y = 0$ y de manera similar con el eje de las ordenadas donde $x = 0$ para que después deduzcan una estrategia para determinar los puntos de $E$ sobre el eje $x$. Los coeficientes fueron elegidos a propósito de que una raíz fuera un entero "pequeño" para que sea calculado por algunos ensayos en $x$ y la otra sea un valor "grande" para inducir a cambiar la estrategia de ensayos por la resolución de una ecuación de primer grado.

En cuanto a la cuarta instrucción, la expectativa de la transformación del método es que pasen de elegir un valor arbitrario de $x$, sustituirlo en la función para así determinar $y$ a una propiedad como característica del conjunto $E$ donde a cada valor de $x$ corresponde uno y solo un valor de $y$.

Por otra parte, en la B el objetivo de las preguntas es el mismo solo cambia la relación algebraica en cuestión $y = x^2 - 9$ con la finalidad de que los estudiantes pongan a prueba lo realizado en la actividad A y que comprendan mejor las preguntas. Asimismo, que con las tareas A y B sirven para orientar la C.

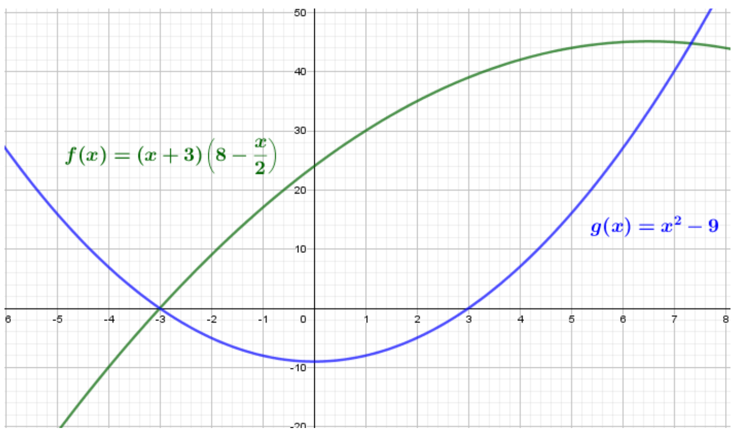
Ahora bien, la parte C representa la situación problemática a resolver donde los discentes deben de calcular los puntos en común de los conjuntos $E$ y $F$. Con las actividades realizadas en las anteriores secciones se espera que conduzcan a los alumnos a una traducción algebraica de la pregunta a responder. La idea que orienta la resolución reside en que el punto en común representa un valor diferente de cada conjunto y que para la misma coordenada en $x$ hay dos valores de $y$, es decir, una de cada función.

Por consiguiente, se deduce que al igualar el valor de $y$ para cada conjunto ($y_E = y_F$) se determina la cantidad de puntos en común de cada función de tal manera que habrá tantos puntos como valores en $x$ que satisfagan tal igualdad. Desde un lenguaje algebraico, la igualdad sería $(x + 3)\left(8 - \frac{x}{2}\right) = x^2 - 9$. En primera instancia, parecería una ecuación de segundo grado, sin embargo, con los cálculos correctos se reduce a una lineal.

El tratamiento algebraico puede resultar complejo para los estudiantes al tener términos cuadráticos y lineales en ambos lados. Una manera que facilita el proceso de solución consiste en apoyarse en el registro gráfico (Figura 2). Un punto en común es sencillo de localizar en la intersección del comportamiento de las gráficas $(-3, 0)$ y para el otro se obtiene la posición relativa de sus coordenadas.

**Figura 2**

*Comportamiento de las gráficas y la intersección de los puntos*




Del otro punto resulta complicado determinar su ubicación a través de estrategias de ensayo y error, por lo que el procedimiento algebraico resulta necesario. El planteamiento de la ecuación $(x+3)\left(8-\frac{x}{2}\right) = x^2 - 9$ y su posible desarrollo $8x - \frac{x^2}{2} + 24 - \frac{3x}{2} = x^2 - 9$ y reagrupación de términos ocasionaría una paralización del procedimiento del que no se podría llegar a un resultado, por tanto, la factorización se vuelve la herramienta para despejar la incógnita. Al factorizar el miembro derecho hace manipulable la ecuación de la siguiente manera: $\left(8-\frac{x}{2}\right) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)}$; $8 - \frac{x}{2} = x - 3$. Por último, la coordenada de las abscisas $x = \frac{22}{3}$ es un valor que no se puede determinar de otra manera que no sea mediante un procedimiento algebraico.

En resumen, cada ejercicio propuesto coadyuva a la resolución de la pregunta de la parte C que representa la situación a resolver. La adaptación surgió, precisamente, en transitar en el registro gráfico, algebraico y numérico respecto al mismo objeto matemático. El trasfondo matemático de la situación es la intersección de dos funciones, aunque se expresa como un conjunto de puntos para que los estudiantes deduzcan esta característica. Cabe mencionar, que la factorización se vuelve un aspecto relevante para determinar un punto en común de las gráficas y que esta herramienta puede ser profundizada por el docente en la enseñanza formal del contenido.

### *2.1.1. Situación didáctica. Situación a-didáctica*

El enfoque que plantea Brousseau es mediante situaciones donde se interrelacionan el docente, los alumnos y el saber, conocidos en conjunto como triángulo didáctico, a través de un medio que es motivante y retador para los discentes. En este sentido, las conexiones pueden ser visualizadas de manera global y específica originando dos conceptos importantes en esta teoría: Situación didáctica y situación a-didáctica.

Según Brousseau (2000) la situación didáctica tiene dos significados. Uno se refiere "a la que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar (como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto" (Brousseau, 2000, p. 20). Y el otro, "es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no" (Brousseau, 2000, p. 21).

Estos dos significados tienen características particulares cada uno. El primer significado se identifica cuando el docente "debe de intervenir en todo momento a lo largo del desarrollo de la acción del alumno, para provocarla, orientarla, restringirla y controlarla según su propia estrategia didáctica" (Brousseau, 2000, p. 21).

El segundo, permite al alumno "tomar decisiones pertinentes, juzgar su adecuación, y adaptarse al medio mediante la construcción del conocimiento deseado. A estas situaciones subyace un modelo 'no didáctico', en el sentido de que no requieren de una intervención específicamente didáctica" (Brousseau, 2000, p. 21).

Entonces, en el primer significado, el docente tiene un papel activo para generar las acciones que espera del estudiante al interactuar con la problemática y orientarlo a la construcción de su aprendizaje. Mientras que, en el segundo, la situación, por sí misma, genera las mismas acciones del significado anterior, es decir, sin la intervención directa del profesor.

No obstante, el propósito de identificar dos significados de la situación didáctica funciona para matizar los momentos que la estructuran en el contexto real de enseñanza, pero, en esencia, cada componente puede que se desarrolle de manera simultánea o sucesiva durante el transcurso de las actividades (Brousseau, 2000).

Ahora bien, en lo que respecta a la situación a-didáctica se refiere a los problemas que el docente le propone al alumno para que los acepte y lo incentiven a actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por sí mismo, es por esto que el profesor se limita a intervenir y el alumno es consciente de que el problema que se le plantea tiene la intención de que aprenda un nuevo conocimiento, el cual, está fundamentado por la lógica interna de la situación y que debe construir respondiendo a tal sistema (Brousseau, 1986).

En las situaciones a-didácticas la participación del docente consiste en orientar el trabajo de los estudiantes durante la interacción con el medio didáctico diseñado. Al señalar que el alumno debe adaptarse por sí mismo al medio propuesto por el docente y generar su propio aprendizaje no significa que el profesor debe apartarse del escenario, sino que debe facilitar las herramientas que permitan el pleno desarrollo de la situación. Además, si el transcurso de las sesiones lo requiere, el docente, puede incitar a los discentes a reflexionar acerca de los procesos matemáticos de tal manera que se cumpla con el objetivo propuesto.

### *2.1.3. Variable didáctica*

El enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas es que el alumno aprende a través de la adaptación a un medio, propuesto y elaborado por el docente, que representa un problema con determinadas condiciones que promueven ciertos saberes a enseñar. Estas condiciones pueden ser modificadas con el propósito de cambiar el conocimiento necesario para resolver la situación. A esto se le conoce con el término de variable didáctica.

De acuerdo con Gálvez (1994) indica que en el análisis de una situación didáctica es importante la identificación y los efectos de la variable didáctica en el conocimiento como se muestra a continuación:

> Lo que interesa son los intervalos de valores de estas variables que resultan determinantes para la aparición del conocimiento que la situación didáctica pretende enseñar. Se trata de precisar las condiciones de las que depende que sea ése el conocimiento que interviene y no otro. (p. 44)

En cuanto a Bartolomé y Fregona (2009) señalan que algunas de las condiciones que componen la situación didáctica pueden variarse y al hacerlo, modifican las estrategias para su resolución y también, del conocimiento involucrado. Además, estas variables están a disposición del docente para ser cambiadas a voluntad para hacer evolucionar el aprendizaje de los estudiantes dependiendo del objetivo que se quiera lograr.

A su vez, Brousseau (1995), citado en Bartolomé y Fregona (2009), presenta su postura en cuanto a la versatilidad de problemas o conocimientos que puede ocasionar el modificar las variables:

> [El docente] puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes. (p. 156)

Por otra parte, Broitman (2010) describe algunas de las variables que se pueden comandar de manera intencional, las cuales, se deben de tener en consideración en cuanto a cómo se puede hacer evolucionar la complejidad del problema que se presente. Dichas variables son las siguientes: Los números en juego, los tipos de magnitudes, el orden de presentación de las informaciones, las formas de presentación, el tipo de realidad a que se hace referencia y la pertinencia de la información presentada para responder la pregunta.

Acerca de los números en juego, según Broitman (2010) se debe contemplar el rango de los números en el planteamiento de la situación. En particular, el tipo de números seleccionados puede provocar diferentes razonamientos. Si se utilizan cantidades pequeñas, se promueven procedimientos de conteo, cálculos mentales sencillos o de relaciones memorizadas.

Por lo que se refiere a los tipos de magnitudes están las discretas y continuas. Las primeras, son aquellas en las que es posible contar y las segundas, en las que es necesario medir. La decisión de saber cuál utilizar dependerá del objetivo de la situación; por ejemplo, las discretas "permiten una representación más inmediata de la situación" (Broitman, 2010, p. 26).

Otro aspecto por tomar en cuenta corresponde con el orden en el que se presenta la información. Según Broitman (2010) pueden mostrarse de diferentes formas: "en forma ordenada conforme al desarrollo temporal, en orden inverso a cómo se 'produjeron los hechos' o bien 'desordenadas'" (p. 27). El manejo de esta variable permite considerar elementos como dónde se encuentran las preguntas, si es una pregunta explícita o implícita, cómo está organizada la información, entre otros.

Por otro lado, están las formas de representación que se refiere a que un mismo problema puede estar simbolizado de diversas formas y que esto implica diferentes retos para el alumno. De acuerdo con Broitman (2010) "Algunas situaciones están representadas en lenguaje natural, otras en un diagrama o esquema, por medio de un dibujo, otras mediante una escritura algebraica" (p. 28).

Ahora bien, el tipo de realidad a que se hace referencia es relevante en la construcción de la situación didáctica pues si el contexto es desconocido por los alumnos, no lograrán percibir el trasfondo matemático que está implicado. Esta idea la describe a detalle Broitman (2010):

> Si el alumno lee el enunciado de un problema sobre un contexto desconocido, no podrá interpretar siquiera cuál es el problema matemático que debe resolver. Para poder construir una respuesta posible de un problema es necesario tener conocimientos que permitan estimar una respuesta como plausible. (p. 29)

Por último, la pertinencia de la información presentada para responder a la pregunta se refiere a que en los problemas puede incluir más datos que los necesarios para resolver el planteamiento. En este sentido, el propósito es que, además de determinar la solución, "la selección de los datos es parte de la tarea de resolver el problema" (Broitman, 2010, p. 30).

#### *2.1.4. Contrato didáctico en escenarios virtuales*

Otro punto importante en esta teoría es la regulación en las reglas entre el docente y los alumnos a través del conocimiento matemático implicado. El cual, puede evolucionar de acuerdo con las circunstancias y el transcurso de la clase. Este aspecto se denomina contrato didáctico.

Montiel (2005) define contrato didáctico de la siguiente manera: “como la relación entre profesor y estudiantes respecto de un conocimiento matemático específico. El contrato no tiene cláusulas escritas ni sanciones que describan su funcionalidad, sólo se puede mirar en el momento que se presenta una ruptura de éste. Este contrato evoluciona a medida que el proceso didáctico avanza” (p. 225).

A su vez, Brousseau (1986) señala que “es la regla y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena” (p. 15). De esta manera, el docente espera cierto comportamiento del alumno y viceversa con la finalidad de lograr el objetivo de la situación didáctica (Chavarría, 2006).

En este sentido, los precedentes conceptos están descritos para condiciones áulicas presenciales, sin embargo, Montiel (2005) realiza una caracterización del contrato didáctico para escenarios virtuales mediante diferentes episodios de interacción, los cuales son: Episodio ruptura de la tradición escolar, Episodio adhesión al discurso y Episodio ruptura del contrato didáctico.

A continuación, se detallan los diferentes episodios ya mencionados (Montiel, 2005, p. 227):

> *Episodio ruptura de la tradición escolar*: Esta ruptura obedece a la concepción que se tiene de enseñar y aprender matemáticas, es decir, de la tradición de actuar, formular y validar en contextos analíticos y buscar caracterizaciones en otros contextos de representación como el numérico y el gráfico, y no en el sentido contrario (actuar, formular y validar en el contexto gráfico y numérico) y caracterizar en el analítico.
> *Episodio adhesión al discurso*: Este episodio obedece a los efectos de los contratos pedagógico y escolar. El alumno está consciente de pertenecer a un sistema escolarizado, donde debe obtener evaluaciones aprobatorias para continuar con su formación y para lograrlo ha de responsabilizarse por las actividades de cada uno de sus seminarios, por lo que en ocasiones sus acciones obedezcan a cumplir ciertos requisitos.
> *Episodio ruptura del contrato didáctico:* El profesor hace la devolución de la situación abriendo un debate sobre los argumentos necesarios para demostrar o resolver el problema.

De acuerdo con el episodio de ruptura de la tradición escolar se refiere a romper la manera usual de trabajar en matemáticas, es decir, proponer actividades en contextos diferentes al analítico. Por ejemplo, de acuerdo con Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero (2012) señalan que para el tema de sistema de ecuaciones de 2x2 se abordan diferentes métodos de resolución analíticos como sustitución, reducción e igualación, sin embargo, al método gráfico se le dedica menor tiempo en comparación con los anteriores. Incluso, los ejercicios se proponen desde la representación algebraica y se puntualiza en las instrucciones qué procedimiento utilizar.

En este caso, para la virtualidad el uso de software geométrico dinámico puede ser útil para facilitar la elaboración de ítems en representación gráfica e interacción con los estudiantes como herramienta de aprendizaje en sesiones asíncronas que guíen el desarrollo de las actividades.

Para ilustrar el episodio adhesión al discurso, éste sencillamente consiste en cumplir con los elementos de los criterios de evaluación que, regularmente, se proporcionan a los estudiantes al inicio del curso académico. Para el escenario virtual, un ejemplo, podría ser implementar que una clase sea una sesión síncrona, es decir, que el grupo de alumnos se reúnan junto con el profesor a una hora específica a través de videollamada para abordar algún tema del plan de estudios. De esta manera, los discentes comprenden que deben de conectarse a la reunión que el profesor indica y además realizar las actividades que propone en la sesión. Por tanto, al participar, además de cumplir con aspectos institucionales, se logra que el alumno se responsabilice de su propio aprendizaje.

Por último, el episodio de ruptura del contrato didáctico sucede cuando las respuestas de los alumnos no son las esperadas por el profesor y tiene por objetivo generar cierto aprendizaje, por tanto, debe intervenir y reorientar las producciones de los estudiantes.

Por ejemplo, en la asignatura de cálculo integral cuando se le solicita que el estudiante determine la integral definida de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$, usualmente, aplican alguna fórmula que permita calcular el valor de la integral definida. Sin embargo, si el comportamiento de la función se grafica se observa una discontinuidad en 0, que está incluido en el intervalo $[-1,1]$ pero la representación algebraica resulta limitada para identificar esa característica. Por tanto, el docente debe intervenir recordando algunos temas precedentes como el de funciones y otro registro de representación, ya sea numérico o gráfico, de tal manera que puede orientar a los discentes a reflexionar acerca de sus propias respuestas.

### *2.1.2. Devolución*

Durante el desarrollo de la clase, tanto el profesor como el alumno deben desempeñar un rol en el proceso de comunicación. Es así, que cada participante espera ciertas acciones y responsabilidades del otro para que se cumpla la finalidad de la situación planteada. Esta expectativa de prácticas es una componente esencial del contrato didáctico, la cual, se le conoce como devolución.

De acuerdo con Brousseau (2007) la devolución es: “El acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia” (p. 87).

En otras palabras, cuando el docente delega la responsabilidad de aprendizaje al alumno, éste responde mediante ciertas acciones que permite visualizar al profesor que el estudiante se ha apropiado de la resolución de la situación, de tal manera que la devolución se produce en ambos sentidos (Ferrari, 2001).

Por consiguiente, Ferrari (2001) distingue dos tipos de devolución dependiendo de la dirección hacia dónde va dirigida, es decir, del profesor al alumno y del alumno al profesor. A continuación, se detallan ambas:

> La devolución del profesor al alumno consiste en:
>
> El acto por el cual el profesor le devuelve al alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje, le delega la exploración, la búsqueda, la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el [*sic*] mismo (Ferrari, 2001, p. 47).
>
> Y la devolución del alumno al profesor acontece:
>
> Cuando el alumno se involucra en el problema y confronta con sus pares en el proceso de acercarse al objeto de estudio, y consiste en el hecho que el estudiante devuelve al profesor el papel de mediador entre los saberes sociales y los producidos en el aula (Ferrari, 2001, p. 47).

El siguiente ejemplo es retomado del trabajo de Serafín (2019) en el que se ilustra la manera en la que se desarrolla la devolución en la Teoría de Situaciones Didácticas con el tema de suma y resta de polinomios. La devolución que se describe aconteció en la situación de acción-formulación en la que la docente debe delegar la responsabilidad del alumno de su propio aprendizaje.

De tal manera, en la resta de polinomios utiliza el material didáctico “el contenedor” que consiste en emplear fichas como monomios y colocarlos en las casillas correspondientes, entonces, mediante preguntas cuestiona a los estudiantes acerca de cómo proceder con algunos ejercicios planteados. Por tanto, al involucrar a los discentes y éstos participar y responder los planteamientos de la profesora se muestra cómo los alumnos comienzan a apropiarse de la resolución de la situación propuesta (Serafín, 2019).

### *2.1.5. Tipos de situaciones*

La teoría de Brousseau presenta una tipología de situaciones didácticas, donde cada una desencadena “en un proceso de confrontación del estudiante ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento” (Chavarría, 2006, párr. 17).

Según Gálvez (1994) las situaciones a-didácticas son: Acción, Formulación y Validación. Mientras que la situación de institucionalización es considerada exclusivamente como didáctica y está dirigida al docente para la socialización del aprendizaje. Los tipos de situaciones en la TSD se detallan a continuación:

> 1. Las situaciones de *acción*, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben de tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
> 2. Las situaciones de *formulación*, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben de modificar el lenguaje que utilizan

> habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
>
> 3. Las situaciones de *validación*, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.
>
> 4. Las situaciones de *institucionalización*, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, formulación y validación. (pp. 43-44)

Los anteriores conceptos se esclarecerán mediante ejemplos al retomar los tipos de situaciones de la propuesta de Serafín (2019), que aborda el aprendizaje de la suma y resta de polinomios mediante un material didáctico que lo denomina como “el contenedor”. Tal diseño fue elaborado para alumnos de primer semestre de bachillerato. Los momentos de la situación didáctica se describen enseguida:

La situación de acción acontece cuando los estudiantes se apropian de la responsabilidad de su aprendizaje mediante la resolución del problema propuesto. Para ello se retoman los conocimientos previos de los alumnos que les permita trabajar, inicialmente, con el medio proporcionado. Así, para lograrlo, la docente orienta la interacción mediante preguntas detonadoras como ¿qué se entiende por polinomio?, ¿qué elementos conforman un polinomio?, ¿cómo se realiza la suma y resta de un polinomio? Luego, se explica la funcionalidad del material didáctico a través de ciertos lineamientos y el desarrollo de un ejemplo.

Aunque, la TSD presenta diferentes tipos de situaciones de manera aislada, no significa que su desarrollo en las sesiones sea de manera lineal y progresiva, sino que puede haber interconexiones entre situaciones a-didácticas y un continuo devenir entre los momentos de la situación didáctica. Esto fue algo que caracterizó la propuesta de Serafín (2019) en un vínculo de la Situación Acción-Formulación.

La Situación Acción-Formulación puede ser presenciada cuando la docente explica el uso del material didáctico con dos ejemplos de suma y resta de polinomios y, a su vez, utiliza el pizarrón para registrar el procedimiento. Durante el proceso, frecuentemente, realiza preguntas a los discentes para la construcción del conocimiento. Además, es importante la participación de los alumnos para dar solución a los ejemplos que se plantean.

La Situación de Formulación sucede después de la explicación de los ejemplos anteriores. En la que reunidos en parejas deben de resolver las tareas propuestas por la docente utilizando el material didáctico como herramienta de apoyo. En este momento, es importante las estrategias que utilizan los estudiantes en sus producciones escritas para el análisis *a posteriori* en el marco de la Ingeniería didáctica.

En lo que respecta a la Situación de Validación se origina cuando la docente solicita los trabajos de dos equipos. Elige uno, donde los resultados sean correctos y el otro donde haya errores. Cada pareja explica al resto de sus compañeros las estrategias que utilizaron para determinar la respuesta de cada tarea. En el desarrollo se espera que cada equipo reconozca por su propia cuenta sus errores o que otros se los señalen de manera puntual.

Finalmente, la Situación de Institucionalización se contempla cuando la docente retoma los aspectos que considera importantes y evidencia los temas que preceden a la suma y resta de polinomios. Después, socializa la definición de cada una de las operaciones elegidas y concluye con ejercicios diferentes, pero ahora sin el apoyo del material didáctico.

### 2.2. El término comprensión en este trabajo

Una de las maneras de describir la apropiación del sentido bidireccional del signo igual en los alumnos es mediante la comprensión, sin embargo, es un término cuya caracterización puede resultar ambigua. Por tanto, a continuación, se presentan algunas definiciones de esta palabra con el propósito de precisar su uso en esta investigación.

De acuerdo con el Diccionario de la Real Academia Española (RAE, n.d.) define comprensión como: “Conjunto de propiedades que permiten definir un concepto, por oposición a extensión” (Definición 4).

Según Font (2007) considera que hay dos maneras de definir la comprensión como proceso mental o como competencia. La primera, significa:

> Un objeto matemático se ha comprendido en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas, que permiten producir representaciones externas adecuadas para la resolución de las tareas propuestas en las que dicho objeto sea determinante. (p. 428)

Y la segunda, cuando se entiende como competencia se refiere a:

> El saber un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula. (p. 430)

Por otra parte, desde un punto de vista psicológico,

> La comprensión es un término empleado para designar la adecuación funcional del comportamiento a los criterios estructurantes de su circunstancia, adecuación que solo puede ser concebida como función en la que se integran tanto las actividades, habilidades y competencias del individuo como los objetos de la comprensión, los criterios de logro impuestos y las características de la situación en que su integración funcional tiene lugar. (Caripo, Pacheco, Flores y Canales, 2000, p. 10)

En las definiciones seleccionadas se observa que la comprensión se describe de tres maneras: como proceso mental o fenómeno, competencia o acto y función. En este trabajo se emplea el segundo de tales significados y, por tanto, se entiende la palabra comprensión como:

La capacidad de reconocer características del signo igual desde sus axiomas de la igualdad y en diferentes contextos matemáticos en los que se representa, relacionarlo con otros objetos matemáticos como las ecuaciones y emplear tal símbolo en las diferentes situaciones problemáticas utilizando sus propiedades.

### 2.3. Significados asociados al Signo Igual (=)

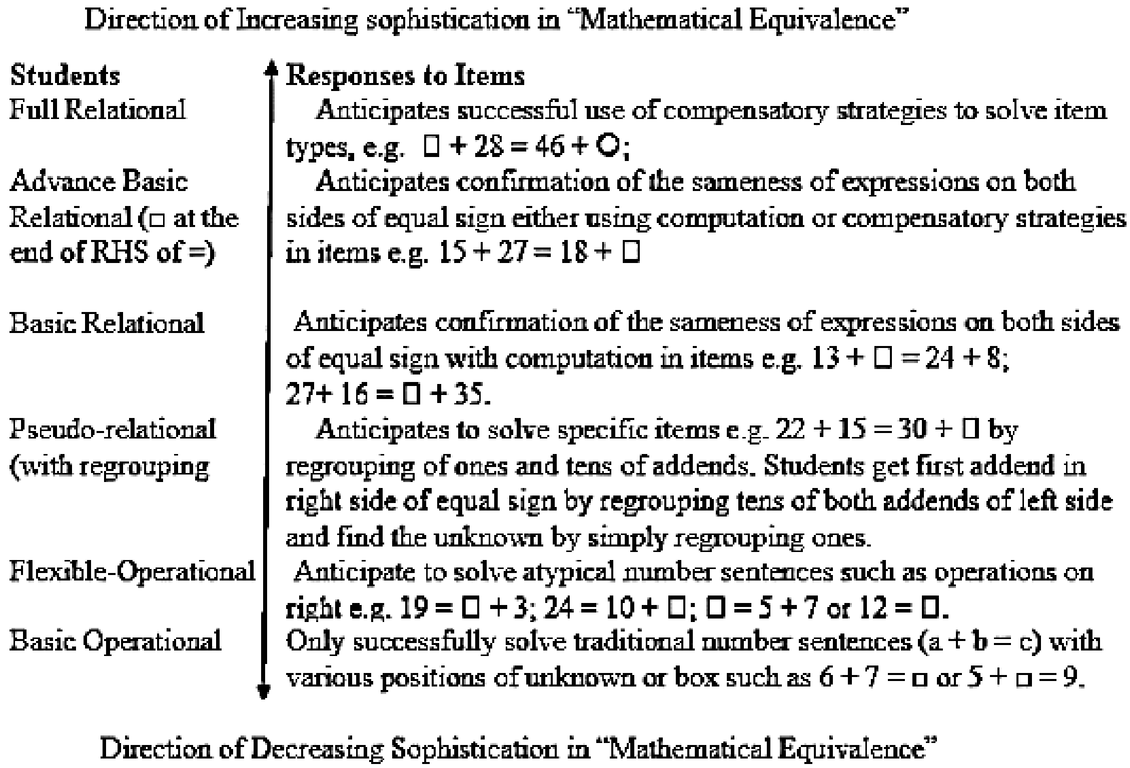
En los apartados anteriores se ha abordado brevemente los significados más reportados en la literatura (el operativo y el relacional) no obstante, resulta imprescindible describir más acerca de ello porque establecen la orientación de la propuesta didáctica. Asimismo, al tener la sensibilidad teórica pertinente se tiene mayor consciencia para hacer distinciones entre los significados del signo igual, lo cual, permite seleccionar aquellos que se desean promover en los estudiantes (Corona y Díaz-Menchaca, 2018).

Una de las clasificaciones que ha sido comúnmente utilizada por diversos estudios es la que propone Molina (2006) por ser la que describe significados de manera extensa y completa, sin embargo, Singh & Kosko (2017) también plantean otras categorías relacionadas con este signo. En este apartado se describen las características de ambas con la finalidad de retomar elementos de cada una para complementar el análisis de este trabajo.

En la clasificación de Singh & Kosko (2017) proponen seis significados que están relacionados con la estructura de las sentencias que los estudiantes pueden resolver, así como las estrategias que utilizan.

**Figura 3**

*Clasificación por niveles de significados del signo igual de Singh & Kosko (2017)*




En la Figura 3 se muestra el esquema de las categorías ordenado por niveles donde el *Basic Operational* es el menos sofisticado y el *Full Relational* el más sofisticado en la equivalencia matemática. También, estos niveles están organizados de manera jerárquica y la transición entre éstos indica el nivel de sofisticación, es decir, si se avanza de manera ascendente implica un incremento y si se hace de forma descendente, un decremento.

En el esquema se indica la descripción de cada nivel, por ejemplo, en el *Basic Operational* indica cuándo los estudiantes pueden comprender exitosamente sentencias numéricas tradicionales (e.g. $a + b = c$) o con elementos desconocidos como $6 + 7 = \square$ o $5 + \square = 9$, mientras que el *Flexible-Operational* puntualiza en las sentencias numéricas del tipo (e.g. $19 = \square + 3$; $24 = 10 + \square$; $\square = 5 + 7$). Ahora bien, ambos niveles incluyen estrategias que se basan en una visión operativa (Singh & Kosko, 2017).

El *Pseudo-relational* indica que los estudiantes comprenden sentencias del tipo $a + b = c + d$ de manera efectiva, pero solo en los casos donde la justificación es posible mediante la reagrupación de unidades y decenas. En estos casos el cambio está en que la estructura tiene elementos en ambos miembros de la igualdad y también en que las estrategias para validarla residen en estrategias de agrupación.

**Figura 4**

*Ejemplo de estrategia del nivel Pseudo-relational*

$$22 + 15 = 30 + \square$$

$$20 + 2 + 10 + 5 = 30 + \square$$

$$20 + 10 + 5 + 2 = 30 + \square$$

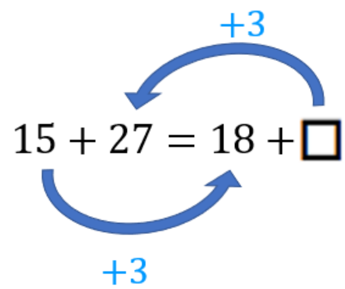
Para ejemplificar el nivel anterior está la siguiente igualdad: $22 + 15 = 30 + \square$ donde el estudiante ubica los elementos del miembro que tiene más información y los descomponen en unidades y decenas, es decir, el $22$ como $20 + 2$ y el $15$ como $10 + 5$. En este momento, el alumno relaciona de manera mental, a través de su estrategia de reagrupamiento, las decenas $20$ y $10$ y las unidades $2$ y $5$, de tal manera que la suma de las decenas es igual al elemento del miembro derecho y que el número que verifica la igualdad es el que corresponde con el de las unidades del miembro izquierdo (Figura 4).

Por otra parte, en el *Basic Relational* los discentes comprenden sentencias de la forma $a + b = c + d$ donde el elemento desconocido está directamente después o antes del signo igual (e.g. $13 + \square = 24 + 8$; $27 + 16 = \square + 35$) y confirman la igualdad de las expresiones mediante estrategias de cómputo. Otra característica que lo distingue del anterior, además de la estructura, es que debido a la configuración ésta no ayuda a utilizar la reagrupación por unidades y decenas.

El *Advance Basic Relational* se caracteriza porque los estudiantes comprenden sentencias de la estructura $a + b = c + d$ ya sea usando estrategias de cómputo o compensatorias. La primera, consiste en que cuando se suman los elementos de cada miembro de la igualdad y al final comparan ambos “resultados” para validarla. La segunda se refiere a la relación entre elementos de cada miembro de la igualdad.

**Figura 5**

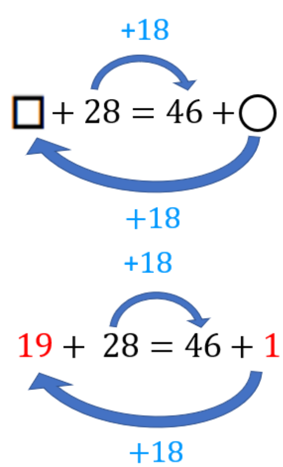
*Ejemplo del nivel Advance Basic Relational*




Por ejemplo, en la siguiente sentencia (Figura 5) $15 + 27 = 18 + \square$, se compara el 15 con el 18 y se determina que es 3 unidades menor, entonces, el espacio en blanco debe tener esa diferencia al 27, de tal manera, sin la necesidad de hacer cálculos, se determina que la sentencia que cumple con la equivalencia es la siguiente $15 + 27 = 18 + 24$. Es así, que esta manera de proceder se sustenta en las propiedades de la igualdad en la que se mantiene la equivalencia en cada miembro sin recurrir a los cálculos para comprobar la veracidad de la sentencia.

**Figura 6**

*Ejemplo del nivel Full Relational*




Finalmente, el *Full Relational* comprende sentencias de la forma $a + b = c + d$ y con dos elementos desconocidos ya sean en el mismo miembro de la igualdad o uno en cada uno donde justifican empleando estrategias de compensación. Para esclarecer mejor, está el siguiente ejemplo (Figura 6). En la sentencia $\square + 28 = 46 + \bigcirc$ se establecen relaciones entre los elementos de los miembros de la igualdad, en este caso, el 46 es mayor al 28 por 18 unidades, entonces, al tener esa información plantean la relación con los dos espacios en blanco, es decir, el valor que se coloque en ○ condiciona el valor en □ de tal forma que debe ser mayor, por ejemplo, si en el primero escriben 1 el otro debe ser 19 para que se mantenga la equivalencia. Cabe mencionar que en este tipo de sentencias no hay una igualdad única.

En cuanto a la clasificación de Molina (2006), como ya se ha mencionado en la descripción de los antecedentes, establece los significados que se asocian a este signo tanto en la aritmética como en el álgebra, los cuales son: Propuesta de actividad de cálculo, Operador, Separador, Expresión de una acción, Expresión de una equivalencia condicional (ecuación), expresión de una equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o de dependencia, indicador de cierta conexión o correspondencia y aproximación y Asignación de un valor numérico. Además, el de expresión de una equivalencia tiene cuatros subclasificaciones lo que hacen en 14 significados en total.

En este trabajo se aluden dos significados de Molina (2006): *Operador* y *Expresión de una equivalencia* para complementar la clasificación de Singh & Kosko (2017). Esto con la finalidad de enriquecer la descripción de las respuestas de los estudiantes y así identificar estrategias o formas de solución afines al pensamiento relacional que exceden al significado *Full Relational* en las que no están definidas de manera específica. También, con las respuestas que muestran un sentido operativo y que el significado *Basic Relational* no corresponde a tal nivel.

En este sentido, de acuerdo con Molina (2006) el significado *Operador* se define:

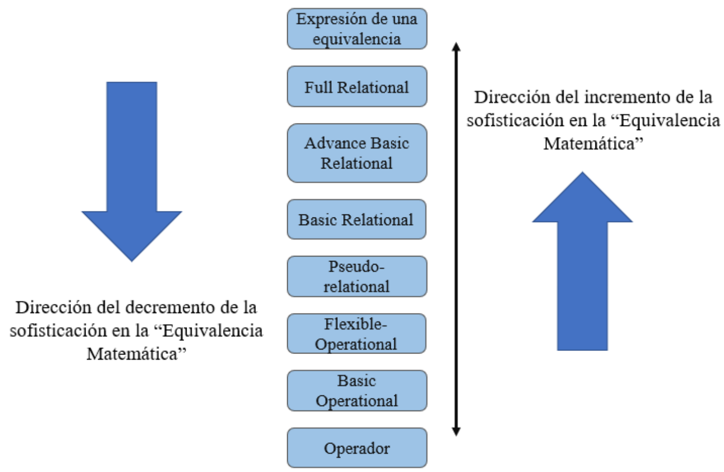
> Significado del signo igual en igualdades o sentencias de acción, unidireccionales, compuestas por una cadena de operaciones, dispuesta a su izquierda, y su resultado, dispuesto a la derecha. En este uso del signo igual, la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha. (p. 149)

Ahora bien, el significado *Expresión de una equivalencia* se entiende como el "uso de este signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático" (Molina, 2006, p. 150).

Por tanto, al incorporar estos significados a la jerarquización que propone Singh & Kosko (2017) el orden de acuerdo con la sofisticación en equivalencia matemática es la siguiente: *Expresión de una equivalencia*, *Full Relational*, *Advance Basic Relational*, *Pseudo-relational*, *Flexible Operational*, *Basic Operational* y *Operador*. En la siguiente Figura 7 se presenta la organización de los significados.

**Figura 7**

*Significados de Singh & Kosko (2017) y Molina (2006)*




A manera de conclusión se puede observar que la clasificación de Molina (2006) aborda de manera general los significados del signo igual, mientras que Singh & Kosko (2017) especifican los niveles del proceso hacia el desarrollo de un pensamiento relacional del signo, así como las estrategias que se utilizan en cada categoría.

En consecuencia, se toman en cuanta ambas propuestas para ubicar y describir de mejor manera las respuestas de los estudiantes de la dimensión cognitiva y de las actividades de la situación didáctica. Pues la transición del sentido operativo al pensamiento relacional es gradual y, posiblemente, algunos alumnos se ubicarán en los niveles intermedios de sofisticación en equivalencia.

## 2.4. Fundamento Matemático

En este apartado se presentan las definiciones matemáticas del signo igual y ecuación lineal, así como, algunos axiomas y propiedades correspondientes para esclarecer los conceptos a los que se está haciendo referencia en el desarrollo de este trabajo.

El término igual en álgebra hace alusión al concepto de que “dos números o expresiones algebraicas son iguales cuando tienen el mismo valor” (Soto, 2011, p. 79). Mientras que la igualdad es aquella “relación definida para dos números que indican que los dos tienen el mismo valor. La relación de identidad se denota con el símbolo $=$” (Soto, 2011, p. 79). En otras palabras, los términos igual e igualdad tienen particularidades diferentes que las distinguen. El concepto igual se refiere al mismo valor que tienen diferentes elementos en común (e.g. $4,\ 2+2,\ \frac{8}{2},\ \sqrt{16}$ considerando únicamente el valor positivo) sin establecer alguna relación entre éstos. En cambio, la igualdad es cuando ya establecen relaciones entre estos elementos mediante el signo igual.

Enseguida se indican algunos axiomas de la igualdad que se utilizan en el álgebra moderna. Es preciso señalar que los axiomas IV y V se refieren a las operaciones de adición y de multiplicación (Vance, 1986). Cabe mencionar que este autor fue seleccionado por decisión propia debido a la manera en la que aborda tales conceptos.

El Axioma I se enuncia como "Reflexividad de la igualdad. Para todo $a$ en $\mathbb{R}$, $a = a$" (Vance, 1986, p. 19). Esto quiere decir que todo elemento matemático es igual a sí mismo (e.g. $5 = 5$). También, el elemento $a$ puede estar compuesto por diferentes términos, por ejemplo $11 - 9 = 11 - 9$. En este caso sucede porque si se cambia el orden de los términos de algún miembro de la igualdad modifica la veracidad de la equivalencia.

El Axioma II consiste en la "Simetría de la igualdad. Para todo $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$, entonces $b = a$" (Vance, 1986, p. 19). En otras palabras, significa que no importa el orden que se presenten los elementos si se cumple la primera condición, entonces, también cumple para la segunda (e.g. $5 + 3 = 8 \therefore 8 = 5 + 3$).

El Axioma III se refiere a la "Transitividad de la igualdad. Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$" (Vance, 1986, p. 19). El cual indica que deben de cumplirse las dos primeras condiciones (i.e. $a = b$ y $b = c$) para después deducir la tercera sentencia ($a = c$). Un ejemplo donde se ve reflejada esta propiedad es el siguiente: $3(2 + 4) + 5 = 3(6) + 5 = 18 + 5 = 23$. En este ejercicio se utiliza para separar los pasos para resolver la operación $3(2 + 4) + 5$ que en términos del axioma conforma el elemento $a$. Ahora los cálculos que se efectúan desarrollan el elemento $b$, es decir, $3(6) + 5$ y éste a su vez el $c$, $18 + 5$ y así sucesivamente. De tal manera que se puede establecer una equivalencia del primer elemento con el último mediante una secuencia lógica del procedimiento utilizado.

El Axioma IV alude a la operación de sumar en una igualdad y se describe como la "Propiedad de adición para la igualdad. Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$" (Vance, 1986, p. 19). Esto es, si se suma el mismo elemento en una igualdad la equivalencia se mantiene. Para ilustrar mejor, sea $a = 4$, $b = 3 + 1$ y $c = 2$ se tiene que cumplir que $a = b$, la cual, queda expresada como $4 = 3 + 1$. Ahora al sumar el elemento $c$, la igualdad cambia de la siguiente manera: $4 + 2 = (3 + 1) + 2$. Esta sentencia se puede comprobar que mantiene la equivalencia sumando los términos de cada miembro de la igualdad, donde $4 + 2 = 6$ y $(3 + 1) + 2 = 6$. Así, la igualdad queda como $6 = 6$, la cual, está sustentada por la propiedad reflexiva.

Y el Axioma V que establece la "Propiedad de multiplicación para la igualdad. Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$" (Vance, 1986, p. 19). En concreto, se expone lo del axioma anterior solo que para el caso de la multiplicación. Por tanto, se pueden retomar los mismos valores para los elementos $a$, $b$ y $c$ estableciendo la igualdad correspondiente $4 = 3 + 1$ y al multiplicar por el mismo valor cambia la configuración a $(4)2 = (3 + 1)2$. Al proceder con la comprobación mediante el cálculo de cada miembro se obtiene que $(4)2 = 8$ y $(3 + 1)2 = 8$, por tanto, se verifica la equivalencia ya que $8 = 8$ por la propiedad reflexiva.

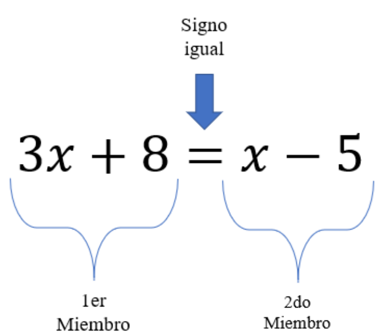
En cuanto a la palabra ecuación se define como "una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras" (Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón y Reyes, 2009, p. 132). Por ejemplo, la fórmula para calcular el perímetro de un círculo $P = \pi D$. También, hay ecuaciones con expresiones algebraicas como $x + 3 = 2x + 7$.

Además, el grado de una ecuación "se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s)" (Aguilar et al., 2009, p. 132). Es decir, del exponente con mayor valor en los términos algebraicos. Cabe mencionar que las ecuaciones de primer grado también se les denomina ecuaciones lineales.

La estructura de una ecuación es: 1er miembro $=$ 2do miembro. En la Figura 8 se observa los elementos que componen a la ecuación, donde la expresión $3x + 8$ se refiere al primer miembro y $x - 5$ al segundo miembro, relacionados a través del signo igual.

**Figura 8**

*Elementos de una ecuación*




Resolver una ecuación quiere decir que "la solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla" (p. 132). Para el caso de las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita son aquellas que "se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita" (Aguilar et al., 2009, p. 132).

En este orden de ideas, para explicar cómo se obtiene el valor de la incógnita de una ecuación lineal mediante los axiomas de la igualdad, se muestra a continuación un ejemplo (Figura 9):

**Figura 9**

*Resolución de una ecuación lineal*

$$3x + 8 = x - 5$$

$$3x + 8 + 5 = x - 5 + 5 \qquad \text{Se suma } +5 \text{ por Axioma IV}$$

$$3x + 13 = x$$

$$3x + 13 - 13 = x - 13 \qquad \text{Se suma } -13 \text{ por Axioma IV}$$

$$3x = x - 13$$

$$3x - x = x - x - 13 \qquad \text{Se suma } -x \text{ por Axioma IV}$$

$$2x = -13$$

$$2x\left(\frac{1}{2}\right) = -13\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Se multiplica } \tfrac{1}{2} \text{ por Axioma V}$$

$$x = -\frac{13}{2}$$

Los pasos para determinar el valor de la incógnita de la ecuación $3x + 8 = x - 5$ que hace que la igualdad se cumpla son los siguientes:

1. Sumar $+5$ en ambos miembros de la ecuación por el axioma IV Propiedad de la adición para la igualdad para eliminar $-5$ y simplificar términos semejantes.
2. Sumar $-13$ en ambos miembros de la ecuación por el axioma IV Propiedad de la adición para la igualdad para eliminar $+13$ y simplificar términos semejantes.
3. Sumar $-x$ en ambos miembros de la igualdad por el axioma IV Propiedad de la adición para la igualdad para eliminar $x$ y simplificar términos semejantes.
4. Multiplicar $\frac{1}{2}$ en ambos miembros de la igualdad por el axioma V Propiedad de la multiplicación para la igualdad para cancelar $2$.

En síntesis, el sustento teórico para el desarrollo de la propuesta didáctica se compone en tres pilares: la teoría de situaciones didácticas, los significados asociados al signo igual y el fundamento matemático. El primero, coadyuva a ser la perspectiva con la que se observa la complejidad del estudio de las matemáticas y los aspectos inmersos en la misma.

El segundo, para tener la sensibilidad teórica acerca de los significados del signo igual. Así, contemplar la diversidad de usos acerca de este símbolo y reconocer la manera en la que se puede implementar para la mejora del desempeño en ciertos temas matemáticas. Y el tercero, se enfoca en esclarecer con términos matemáticos cuando se hace referencia a las ecuaciones lineales de una variable y el signo igual para focalizar el punto central de la propuesta.

# CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología que se ha seleccionado para lograr los objetivos planteados en el trabajo de investigación, la cual consiste en la Ingeniería Didáctica de Artigue. De igual manera, se mencionan el concepto y las cuatro fases que conforman el proceso de ejecución.

## 3.1. Ingeniería didáctica

En el capítulo anterior se ha mencionado el aporte científico de la escuela francesa respecto a la didáctica de las matemáticas como lo es la Ingeniería Didáctica. En detalle, ésta surge a comienzos de los años 80's como una metodología que brinda técnicas para la puesta en marcha de proyectos que se basan en la Teoría de Situaciones Didácticas y la Transposición Didáctica (De Faria, 2006).

En este sentido, para Ferrari (2001) la Ingeniería Didáctica es "un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje en situación escolar" (p. 61).

Por otra parte, Douady (1995) la considera como "un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos" (p. 61).

Los anteriores conceptos son interpretaciones de la metodología en cuestión por diferentes autores, aunque no es la definición de la creadora, sirven para complementar y explicitar desde otra perspectiva la visión de Artigue (1995), la cual indica que la Ingeniería Didáctica es:

> Una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (pp. 33-34)

Respecto a los conceptos antes mencionados, es posible destacar que la Ingeniería Didáctica es denominada de esa manera por la analogía del trabajo que hace un ingeniero. Pues se requiere de los aspectos teóricos y científicos, así como la toma de las decisiones en la práctica y el control en el proceso de construcción.

De acuerdo con lo mencionado en supra líneas, la presente investigación se orienta a utilizar la Ingeniería didáctica como metodología de investigación para proponer situaciones de enseñanza y aprendizaje, es decir, se construye una situación didáctica desde una perspectiva diferente para aportar a la literatura sobre propuestas para abordar el tema de ecuaciones lineales de una variable siguiendo el método científico con su respectiva difusión.

### *3.1.1. Fases de la Ingeniería Didáctica*

La ID se organiza en cuatro fases que establecen una distinción temporal del proceso experimental (Artigue, 1995), las cuales son: Fase 1 análisis preliminar, Fase 2 concepción y análisis *a priori*, Fase 3 experimentación y Fase 4 análisis *a posteriori* y validación.

#### 3.1.1.1. Fase 1. Análisis preliminar

Para lograr la concepción de la situación didáctica es necesario realizar un análisis preliminar referente "al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema" (Artigue, 1998, citado en De Faria, 2006, párr. 14).

Este análisis se efectúa de manera sistemática desde tres dimensiones (Ferrari, 2001, p. 62):

La *dimensión epistemológica* relacionada al conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela, así como su devenir en saber.

La *dimensión cognitiva* asociada a las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada.

La *dimensión didáctica* que se vincula con la enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela.

Para fines de esta investigación, se aborda, en el siguiente capítulo, la dimensión epistemológica con el desarrollo de las ecuaciones lineales y el uso del signo igual a través de la historia para vislumbrar si existe un precedente histórico de lo que sucede en las aulas. En la dimensión cognitiva se realiza un cuestionario sobre el aspecto bidireccional del signo igual para conocer las necesidades de los estudiantes con los que se implementa la experimentación cuando trabajan con ecuaciones lineales. Y, para la dimensión didáctica se realiza un cuestionario para el profesor acerca de los momentos didácticos y del libro base que utiliza para el tema.

Otra componente que se añade a los que alude Ferrari (2001) consiste en las dinámicas que están llevando a cabo los estudiantes y el profesor para el aprendizaje, la cual, se denomina el *Análisis de campo de restricciones* que se refiere a "donde se va a situar la realización didáctica efectiva" (Artigue, 1995, p. 38). De acuerdo con el contexto, la aplicación de la situación se desarrollará en un escenario virtual con reuniones síncronas y actividades asíncronas mediante plataformas tecnológicas como *Google Meet*, *Google Classroom* y *Jamboard.* La interacción con la situación planteada, en este campo, propone mayor trabajo autónomo por parte de los estudiantes con la orientación del docente en todo momento.

#### 3.1.1.2. Fase 2. Concepción y análisis *a priori*

La fase 2 reside en que "el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado" (Artigue, 1995, p. 42).

Hay dos tipos de variables de comando (Artigue. 1995, p. 42):

> Las *variables macro-didácticas* o *globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería.
> Las *variables micro-didácticas* o *locales*, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Para ilustrar de mejor manera cada tipo de variable, se retomará la situación de Douady (1995) descrita en el capítulo II de este trabajo. Entonces, las macro-didácticas son aquellas variables como el número de sesiones para llevar a cabo la aplicación, la organización del grupo, el número de integrantes para cada equipo, el uso de recursos materiales o tecnológicos para la representación numérica y gráfica, por indicar algunas.

Mientras que, las micro-didácticas son variables que consisten en delimitar aspectos tales como que las funciones son cuadráticas y lineales. Además, la forma en la que están escritas, es decir, desarrollada y factorizada. También, los coeficientes numéricos como enteros y racionales, positivos y negativos. La representación gráfica: la cantidad de puntos a ubicar, el plano ortogonal bidimensional cartesiano, la posición de las coordenadas de los puntos de intersección, es decir, sobre el eje $x$ dentro de límites razonables en el trazado, entre otras.

En cuanto al análisis *a priori*, según Artigue (1995) el objetivo es:

> Determinar en qué [*sic*] las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. (p. 45)

El análisis *a priori* está compuesto por dos partes, descriptiva y predictiva, en las cuales se debe cumplir lo siguiente según Artigue (1995, p. 45):

> Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
> Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

> Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Esta fase está condicionada por la información recabada en los análisis preliminares, es así, que, en el apartado correspondiente del siguiente capítulo, la realización del diseño y del análisis *a priori* depende de la fase 1 de tal manera que se logre el aprendizaje en los estudiantes.

#### 3.1.1.3. Fase 3. Experimentación

De Faria (2006) explica esta fase como: "la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación" (párr. 31).

En la experimentación se ponen en marcha las consideraciones que se enlistan a continuación (De Faria, 2006, párr. 32):

> La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
> El establecimiento del contrato didáctico;
> La aplicación de los instrumentos de investigación;
> El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Esta fase consiste en la aplicación de la situación didáctica con el grupo de estudiantes en el aula, para el objetivo de este trabajo se realiza con alumnos que cursan el 2° semestre de bachillerato porque es cuando se aborda el tema de ecuaciones lineales. Los instrumentos por utilizar consisten en la videograbación de las sesiones, así como las respuestas y evidencias de los estudiantes durante el transcurso de la situación didáctica.

#### 3.1.1.4. Fase 4. Análisis *a posteriori* y validación

Finalmente, está la fase 4, donde el análisis *a posteriori* "se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella" (De Faria, 2006, párr. 35).

En cuanto a la validación, de acuerdo con Artigue (1995) consiste en "la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación" (p. 48).

Asimismo, el proceso de validación es un término relativo con la ID debido a lo que menciona Artigue (1995):

> En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas

> están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación. (p. 49)

Con esto quiere decir que las hipótesis que se formulan en los trabajos de ingeniería son relativamente globales porque siempre se genera aprendizaje y propuestas de mejora de la situación.

En lo que concierne a esta investigación, en la última fase de la ID se cotejan los aspectos que se plantearon en la fase del análisis *a priori* con los del análisis *a posteriori* para comparar qué cosas funcionaron y cuáles se podrían modificar para que logren los resultados esperados. Además, como ya se mencionó en este apartado, las validaciones expuestas se realizan desde el contexto donde se realizó la experimentación y proporcionan herramientas a los docentes que pueden funcionar para generar aprendizaje a largo plazo con sus estudiantes. Cabe mencionar, que la validación de la Ingeniería Didáctica es interna porque se basa en la confrontación de los dos análisis, *a priori* y *a posteriori* (Artigue, 1995).

En resumen, la decisión de elegir la Ingeniería didáctica como metodología se debe al propósito de la investigación, que es diseñar una situación, pues brinda las herramientas para su creación y puesta en marcha. A través del desarrollo de las diferentes etapas permite la obtención de información y análisis antes, durante y después de la aplicación de la propuesta. Por tanto, estas características empatan con el objetivo de este trabajo y junto con los significados asociados al signo igual facilita abordar desde una visión diferente el estudio de ecuaciones lineales de una variable en alumno de bachillerato.

# CAPÍTULO IV. DESARROLLO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

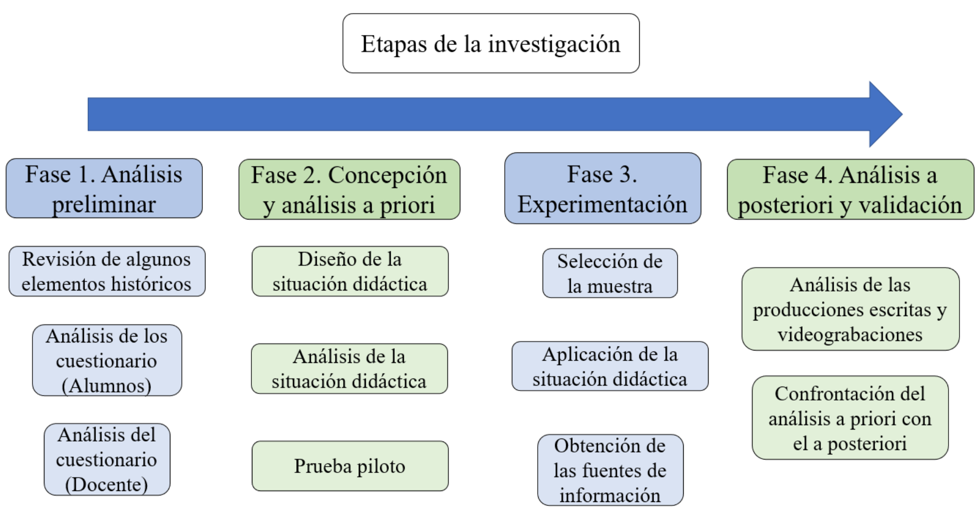
En este capítulo se presenta la aplicación de la metodología seleccionada para el tema de ecuaciones lineales de una variable y el signo igual. Se integra por cuatros apartados que corresponden a las fases de la Ingeniería didáctica. Los cuales se indican con mayor detalle a continuación y en el esquema presentado en la Figura 10:

El primero, consiste en el análisis preliminar desde tres dimensiones la epistemológica, cognitiva y didáctica en la que se realizó la revisión de elementos históricos, análisis de la aplicación de los cuestionarios hacia los alumnos y al docente. El segundo, aborda la concepción y análisis a priori donde se describen los elementos retomados de la fase 1, variables didácticas, el diseño y análisis de la situación didáctica y la aplicación preliminar como prueba piloto.

El tercero, es la experimentación de la situación con la muestra de estudiantes seleccionada en la que se explican las características de los participantes, el contexto de la investigación y las fuentes de información. Y, por último, el cuarto que se refiere al análisis a posteriori y validación en la que se coteja lo sucedido en la experimentación con el análisis a priori y después la confrontación del análisis a priori y el a posteriori para identificar los aspectos que validan la situación didáctica.

**Figura 10**

*Etapas de la investigación*




## 4.1. Fase 1. Análisis preliminar

En este apartado se aborda la Fase 1 de la Ingeniería didáctica que reside en el análisis preliminar. Este consiste en realizar de manera sistemática la revisión de conocimientos relacionados con el contenido matemático. En este caso, mediante tres dimensiones: La epistemológica en la que se hizo la revisión de algunos elementos históricos sobre las ecuaciones lineales de una variable y el signo igual, la cognitiva para conocer las dificultades, obstáculos y errores que tiene o enfrentan los alumnos al momento de estudiar el tema en cuestión y la didáctica, para determinar cómo se desarrolla la enseñanza del tema de manera usual desde el aula de clases y los efectos que provoca.

#### *4.1.1. Dimensión epistemológica*

En este apartado se exhiben algunos elementos epistemológicos relacionados con la creación del signo igual y su posicionamiento para simbolizar la igualdad.

El primer registro de símbolo que se tiene para representar la igualdad corresponde a una raya horizontal (—) que algunas veces utilizaba en sus obras el matemático Johann Müller Regiomontano, también este símbolo ya había sido empleado por Pacioli (Gutiérrez, 2008).

Es probable que el uso que se le daba anteriormente persista en la enseñanza actual en operaciones como la suma y resta de números enteros cuando se realiza de manera vertical o en algunas técnicas para el producto de polinomios.

No obstante, algunos matemáticos en lugar de utilizar signos para la equivalencia preferían emplear palabras como "*aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck*, o *gleich*, y a veces por la forma abreviada *aeq*" (Gutiérrez, 2008, p. 90).

Posteriormente, existieron diversas propuestas de símbolos en el transcurso del tiempo. Algunas de esas opciones son las siguientes:

En la obra de Robert Recorde de 1557, focalizada en el álgebra, *The Whetstone of Witte* aparece por primera vez el signo ═══ para designar la igualdad (Gutiérrez, 2008). Además, Recorde lo justifica de la siguiente manera:

> And to avoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a pair of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. (Gutiérrez, 2008, p. 90)

Esto quiere decir, que para evitar la repetición de las palabras "es igual a" Recorde diseñó ese signo en forma de dos rectas paralelas de la misma magnitud porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales (Gutiérrez, 2008).

Después, en 1559 J. Buteo utilizaba el signo [ para la igualdad de tal manera que la ecuación $x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 14$ se representaba como $1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C[14$ (Gutiérrez, 2008). Luego, en 1571 aparece, en una obra de Wilhelm Holzmann, el símbolo de dos paralelas verticales $\parallel$ como otra sugerencia para representar la igualdad. Se desconoce cuál fue la razón para tal significado, sin embargo, fue utilizado por los siguientes cien años por algunos matemáticos (Gutiérrez, 2008). Más tarde, Hérigone usaba el símbolo $\sqcup$ con los mismos fines que los anteriores matemáticos.

Las precedentes alternativas no fueron gran competencia para el símbolo de Recorde, hasta 1637 cuando Descartes introduce su propuesta, la cual, tenía la siguiente forma: $\propto$. Descartes conocía el símbolo de Recorde a través de la obra *Praxis* de Harriot. No obstante, se resistió a adoptar ese símbolo por dos razones: Una, porque varios matemáticos le daban una connotación diferente a la igualdad. Y la segunda, porque en la obra, en la que aparecía ese símbolo, fue reconocida por varios matemáticos ya que había perfeccionado la notación exponencial, por tanto, significaba un aporte importante al álgebra simbólica (Gutiérrez, 2008).

En este sentido, algunos de los significados diferentes del signo de Recorde, que diversos matemáticos le otorgaron, se indican enseguida:

> Francisco Vieta, en 1591, en su *In artem analyticen isagoge* utiliza el signo ===== para designar la diferencia aritmética. Descartes, en 1638, utiliza el signo ===== para designar el doble signo, más o menos, ±. Johann Caramuel lo empleaba para indicar la separación entre la parte entera y la parte decimal de un número; por ejemplo, la expresión 102 ===== 857 significaba lo mismo que nuestro 102,857. La cosa empeoró cuando Dulaurens y Reyher lo utilizaron para indicar el paralelismo de dos rectas. (Gutiérrez, 2008, p. 91)

Entonces, los símbolos de Recorde y de Descartes, a través del tiempo, ganaban terreno en diferentes países cada uno y por diferentes matemáticos, incluso, había algunos que dependiendo del contenido de sus obras preferían usar un signo u otro (Gutiérrez, 2008). No obstante, existió una cadena de sucesos que marcó la supremacía para simbolizar la igualdad.

La adopción de un símbolo universal para representar la igualdad tiene su comienzo en el siglo XVIII debido a la invención del cálculo diferencial e integral. Los principales precursores (Newton y Leibniz) utilizaron el signo de Recorde. Además, Leibniz tuvo mucha influencia en el período crítico de la aprobación de un signo a finales del siglo XVII (Gutiérrez, 2008).

Por otra parte, en cuanto a las ecuaciones lineales, Dalcín y Olave (2007) realizaron una reseña donde describen los problemas que enfrentaban diferentes culturas antiguas relacionados con este concepto matemático. A continuación, se hace la descripción de tales problemas de las culturas babilónica, egipcia y griega.

Con respecto a la cultura babilónica, la información se obtiene a través de 180 tablas de arcilla, las cuales, albergan problemas relacionados con el comercio, herencias, división de propiedades, entre otras. Además, hay algunos problemas geométricos que implicaban ecuaciones de primer grado como el cálculo de áreas de figuras como cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, por mencionar algunas (Dalcín y Olave, 2007).

A su vez, con respecto a los problemas que resolvían los egipcios se obtuvo del Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes, donde si se traducen al lenguaje actual del álgebra residen en resolver ecuaciones lineales del tipo $x + ax = b$ o $ax + bx = c$, donde $a$, $b$ y $c$ corresponden a números conocidos y $x$ a las incógnitas.

Por último, los griegos utilizaban métodos geométricos para dar solución a problemas que actualmente implican la resolución de una ecuación de primer grado (Dalcín y Olave, 2007). Algunos ejemplos se muestran en seguida:

> Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas, el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números, el producto de tres segmentos es un volumen, la suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro, la resta es recortar de un segmento la longitud del segundo, la división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan. (Morris, 1995, citado en Saenz, 2014, p. 28)

En síntesis, para la elaboración de la situación didáctica se retomaron algunos aspectos que han sido detallados en esta sección. Un punto para considerar es la diversidad de significados que se le adjudicaron a la propuesta de signo de Recorde por diferentes matemáticos.

También, en algunas áreas de la matemática se encuentra segmentado el uso del signo igual en la trayectoria escolar. Esto puede deberse a que la aprobación del signo fue en el Cálculo diferencial e integral por lo que es comprensible que en otras ramas se tenga confusión o diversificación de usos. Esta idea, fue retomada para clarificar los vínculos en entre la aritmética y el álgebra a través de sentencias.

Otro aspecto, es el relacionado con las características de los problemas de las antiguas culturas que involucran ecuaciones de primer grado. El contexto de tales planteamientos era en torno a términos geométricos y de igual manera su resolución. Esta estructura podría utilizarse, pero en este trabajo se optó por no realizarlo hasta en etapas posteriores, es decir, para futuros desarrollos de investigación.

A continuación, se intenta describir los elementos de la epistemológica que pueden relacionarse con los significados del signo igual. Comenzando con el significado *Operador* de Molina (2006) puede tener características similares en cuanto a la forma de utilizar el símbolo — de Johann Müller Regiomontano pues en las operaciones de adición y multiplicación con orientación vertical sirve para separar los sumandos o productos del resultado y además indica una dirección unidireccional para leer los ejercicios.

En cuanto al *Basic Relational* tiene relación con los usos del símbolo — pues la visión unidireccional persiste y se mantiene la distinción en las operaciones de adición y multiplicación de los sumandos o productos con el resultado, pero la modificación en las operaciones reside en que las sentencias se orientan de manera horizontal y no en vertical.

Acerca del *Flexible Operational* se relacionan con el uso del símbolo de Descartes con la notación exponencial pues el contexto matemático es diferente en comparación con

Recorde. Así, las sentencias en este significado se caracterizan por ser atípicas a los que los estudiantes están acostumbrados, pero mantienen las mismas propiedades.

El *Pseudo-Relational* tiene su relación de manera general con la variedad de usos que diferentes matemáticos le otorgaron al símbolo de Recorde y depende del contexto de la sintaxis matemática para comprender su uso. De la misma manera que la estrategia de descomposición que es una característica que solo se puede aplicar para sentencias con configuración especifica.

Por lo que se refiere al *Basic Relational* puede relacionar con el contexto en donde utilizaba el signo de Buteo, es decir, en sentencias en numéricas o algebraicas en la que las variables se encuentran en uno de los miembros. Puesto que las sentencias en este significado la estructura es que el espacio vacío se encuentre inmediatamente antes o después del signo igual.

El *Advance Basic Relational* se relaciona con el uso que le dieron Newton y Leibinz al signo igual en el cálculo diferencial e integral porque establecen una visión bidireccional entre ambos miembros de la sentencia donde generalmente la manipulación de los ejercicios recae en solo un lado. Además, en este significado el espacio ya no se encuentra inmediatamente antes o después del signo igual, pero, generalmente, solo en un miembro.

Por otra parte, el *Full Relational* se puede relacionar con la estructura de las ecuaciones que resolvían los egipcios pues son sentencias con dos términos desconocidos de la misma variable. De la misma manera que en este nivel en la que la configuración utiliza dos espacios en blanco.

Y, el significado *Expresión de una equivalencia* es el de mayor nivel y expresa la bidireccionalidad en los dos miembros de la misma manera de los usos del signo igual de Recorde en la que utiliza las propiedades del signo para establecer relaciones entres los elementos de cada lado de la sentencia.

#### *4.1.2. Dimensión cognitiva*

Esta dimensión versa en indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes y así determinar sus errores que enfrentan para construir el nuevo aprendizaje. Tal información fue considerada para el diseño de la situación didáctica.

La obtención de la información en esta dimensión fue mediante un cuestionario aplicado a un grupo de 31 estudiantes de primer semestre de bachillerato de la Universidad de Colima. Los datos de la población de estudiantes se indican en el apartado 4.3.1. de este trabajo.

A través de una sesión virtual síncrona se les indicó el objetivo de la reunión y se les proporcionaron las preguntas. Las respuestas fueron entregadas en tres formatos: plasmadas en el documento impreso, en su cuaderno o editando el archivo con los ítems.

En este sentido, la descripción se realizó mediante el cuestionario que fue aplicado a dichos discentes con el propósito de recabar datos con respecto a los significados que ponen en evidencia sobre el signo igual y las ecuaciones lineales de una variable.

El cuestionario consta de cuatro apartados donde, a su vez, cada uno tiene diferentes preguntas codificadas en incisos (Anexo 1). En el primer apartado, se retomó parte del instrumento utilizado en Knut et al. (2006) para conocer la interpretación que le otorga el discente al signo igual. Esta sección contiene tres preguntas. El a) es para que el alumno nombre el símbolo del signo igual de acuerdo con su experiencia y conocimientos. El b) se le solicita que exprese el significado que le asocia a ese símbolo. Y el c) que en dado caso que sea posible, manifieste un significado alternativo que le pueda adjudicar al signo igual.

En cuanto al segundo, solo contiene un inciso, el cual, fue elaborado considerando el significado *Operador* descrito en Molina (2006). Este ejercicio consiste en una sentencia numérica $(3 + 5)$ donde se le cuestiona si le hace falta algo. Si el alumno responde que sí y además agrega el signo igual y el "resultado" de la "suma", es un indicio del sentido operativo. Mientras que, si la respuesta es no, entonces, según, la justificación que proporcione puede distinguirse como *Expresión de una equivalencia* (Molina, 2006) pues no siente la necesidad de "completar" la sentencia mostrada agregando el "resultado".

Por lo que se refiere al tercer apartado se exhibe una tabla con dos columnas. La primera, contiene ciertas igualdades con espacios vacíos donde de acuerdo con su criterio deben colocar el valor que verifique la igualdad. En la otra columna, es con el propósito que describa la estrategia que utilizó para determinar el número en la sentencia. Las configuraciones de las igualdades están basadas en las categorías de Singh & Kosko (2017) y la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa), por tanto, también la estrategia que utilicen permite conocer los usos que le dan al signo igual.

El último apartado, se compone de tres ítems contemplando los significados *Operador* y *Expresión de una equivalencia* de la clasificación de Molina (2006). Las sentencias utilizadas son de carácter algebraico, esto, con el propósito de identificar tales significados en un contexto diferente al aritmético.

Los incisos a) y b) pretenden evidenciar tal situación si en dado caso, en el primero, agrega el signo igual para formar una ecuación y en el segundo, debido al espacio que hay entre la expresión $4$ y $=$ el alumno crea conveniente agregar $x$ porque se refiere a una suma de término semejantes. De igual manera, dependerá de la justificación que describa cada estudiante. Finalmente, el inciso c) pretende conocer la visualización global de ecuación con el valor de las variables.

En la siguiente Tabla 1 se muestra, de manera general, la lógica del diseño del cuestionario que relaciona cada ítem con los elementos teóricos correspondientes indicados anteriormente.

**Tabla 1**

*Mapeo del cuestionario hacia los estudiantes*

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Ítems</th><th colspan="3">Elementos teóricos</th></tr>
<tr><th>Autor</th><th>Significado</th><th>Estrategias o propiedades</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>a</td><td rowspan="3">Knut et al. (2006)</td><td rowspan="3">No aplica</td><td rowspan="3">No aplica</td></tr>
<tr><td>b</td></tr>
<tr><td>c</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>Molina (2006)</td><td>Operador</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>a</td><td>Singh & Kosko (2018)</td><td>Basic Relational</td><td>Compensatorias</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Singh & Kosko (2018)</td><td>Advance Basic Relational</td><td>Compensatorias</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Singh & Kosko (2018)</td><td>Advance Basic Relational</td><td>Compensatorias</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Molina (2006)</td><td>Expresión de una equivalencia</td><td>Propiedad conmutativa en la igualdad</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>a</td><td>Molina (2006)</td><td>Operador</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Molina (2006)</td><td>Operador</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Molina (2006)</td><td>Expresión de una equivalencia</td><td>Propiedades de la igualdad (Reflexiva, simetría, transitiva, adición y multiplicación en la igualdad)</td></tr>
</table>

Por lo que se refiere a las respuestas del primer apartado de preguntas se puede detectar que, en el primer cuestionamiento, pedía el nombre del símbolo = todos los estudiantes indican que se refería al signo igual (Figura 11) y algunas otras denominaciones como signo de igualdad, signo de igualación e igual. También, se presentaron otras respuestas como la del estudiante 15 donde escribe dos nombres para este signo. Una que se refiere a la igualdad y la otra al resultado de una operación. En este sentido, se perciben características de los posibles usos que le otorga a este signo e incluso orientado al significado *Operador* (Figura 12).

**Figura 11**

*Respuesta del 1a de la estudiante 22*

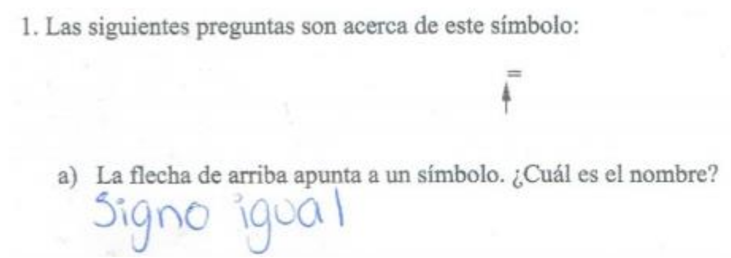
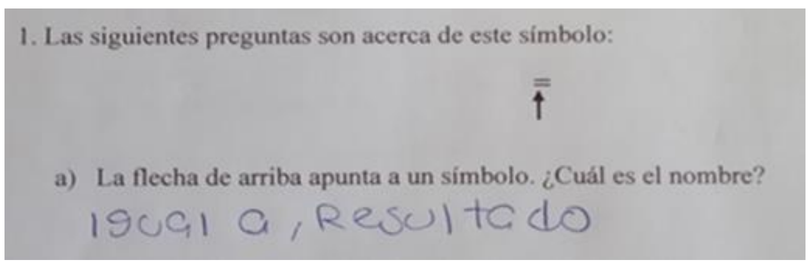



**Figura 12**

*Respuesta del 1a del estudiante 15*




En cuanto al planteamiento 1b, se identificaron tres tipos de respuestas acerca del significado que le otorgaban a este signo. En la Figura 13 el 40% de los discentes lo manifiesta como el de igualdad en un contexto aritmético. También, en la Figura 14 emplea el mismo contexto y agrega un ejemplo del cómo se puede presenciar tal uso.

**Figura 13**

*Respuesta del 1b de la estudiante 9*

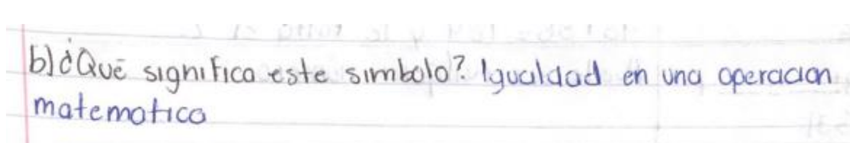
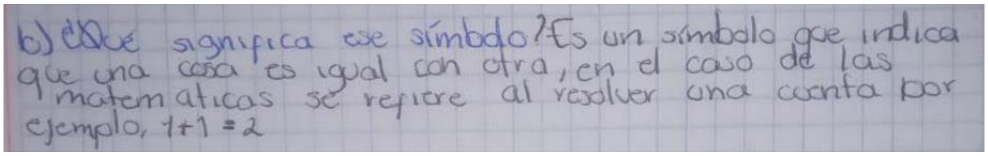


**Figura 14**

*Respuesta del 1b de la estudiante 19*


b) ¿Qué significa ese símbolo? Es un símbolo que indica que una cosa es igual con otra, en el caso de las matematicas se refiere al resolver una cuenta por ejemplo, 1+1 = 2

Por lo que se refiere al mismo inciso, el 43% brinda significados orientados a la equivalencia (Figura 15) y el 13% en contextos algebraicos (Figura 16). En el primero porque lo expresa de manera literal y en el segundo aludiendo a las expresiones entre ambos miembros de la igualdad.

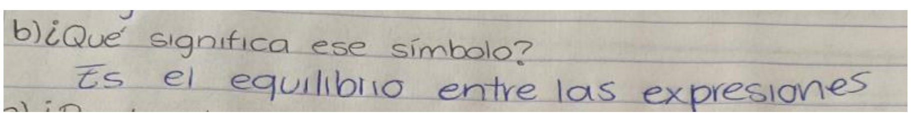
**Figura 15**

*Respuesta del 1b de la estudiante 29*


b) ¿Qué significa ese símbolo? Significa equivalencia

**Figura 16**

*Respuesta del 1b de la estudiante 30*


b) ¿Qué significa ese símbolo?
Es el equilibrio entre las expresiones

En la última pregunta de este apartado, solicitaba significados alternativos que proporcionaran al respecto, donde se obtuvo diversas respuestas. En este sentido, el 20% describe usos como para indicar la respuesta ya sea de algún ejercicio o problema, entendido como el significado *Operador* de Molina (2006) (Figura 17 y Figura 18). Y el 3% incluye contextos diferentes al aritmético y al algebraico como es el caso que se muestra en la Figura 19.

**Figura 17**

*Respuesta del 1c de la estudiante 24*

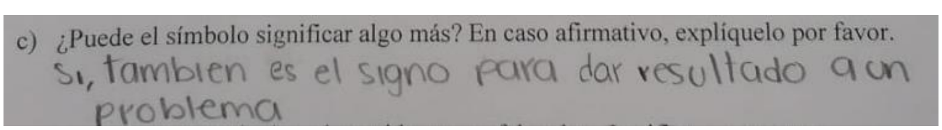

c) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, expliquelo por favor.
Si, tambien es el signo para dar resultado a un problema

**Figura 18**

*Respuesta del 1c de la estudiante 12*

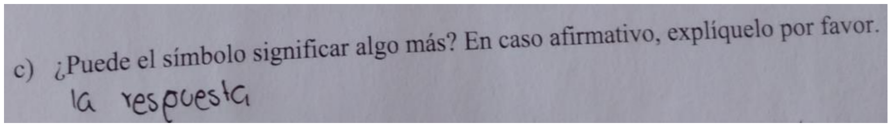
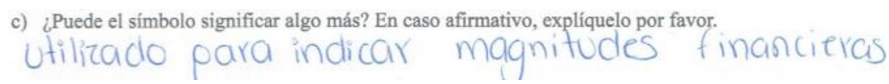

c) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, explíquelo por favor.
la respuesta

**Figura 19**

*Respuesta del 1c de la estudiante 22*

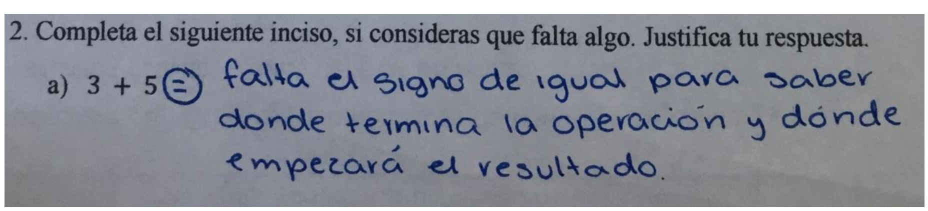

c) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, explíquelo por favor.
utilizado para indicar magnitudes financieras

Cabe mencionar, que los contextos de las respuestas de los incisos 1b y 1c corresponden al aritmético y algebraico, respectivamente. Es interesante esta situación porque coincide con el acercamiento que tienen los estudiantes con el signo, es decir, en el orden en el que se presenta a los discentes. En el nivel primaria lo utilizan para cuestiones de operaciones como suma, resta y multiplicación e indicar resultados y en secundaria lo emplean para las ecuaciones.

En cuanto al segundo apartado, el planteamiento 2a propone una expresión aritmética en la que se cuestiona si hace falta agregarle algo o no. Las respuestas de los estudiantes residen en agregar el signo = y en algunos más, el resultado de la "operación". Asimismo, la justificación muestra aspectos del sentido operativo. Por ejemplo, en la Figura 20 señala que la utilización del signo es para distinguir la "operación" del "resultado" por lo que exhibe una visión unidireccional de izquierda a derecha.

**Figura 20**

*Respuesta del 2a de la estudiante 27*

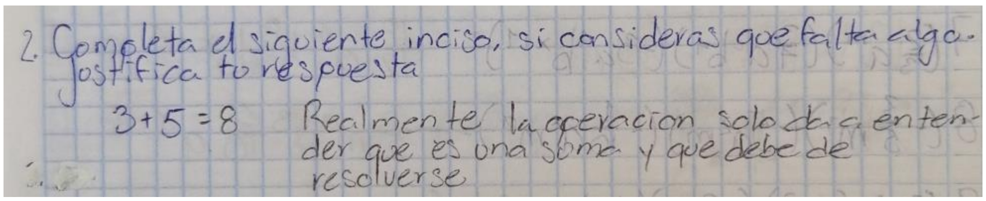

2. Completa el siguiente inciso, si consideras que falta algo. Justifica tu respuesta.
a) 3 + 5 = falta el signo de igual para saber donde termina la operación y dónde empezará el resultado.

La Figura 20 podría ser evidencia de un efecto Topaze, en el que la respuesta del estudiante pudo haber sido inducida por el trabajo previo con preguntas relacionadas con el signo igual, sin embargo, esto no es un hecho generalizable, ya que solo el 33% de estudiantes agregan el signo igual como lo que hace falta en el inciso. Los demás continúan operando hasta calcular un resultado.

Ahora bien, en la Figura 21 la alumna concibe que la expresión numérica le indica que debe realizar una acción sobre la misma (sumar) colocando el signo igual y el "resultado" para que sea una sentencia de las que comúnmente ha sido expuesto en su trayectoria escolar.

**Figura 21**

*Respuesta del 2a del estudiante 1*


2. Completa el siguiente inciso, si consideras que falta algo. Justifica tu respuesta

3+5=8 Realmente la operacion solo da a entender que es una suma y que debe de resolverse

Por lo que se refiere al apartado 3, se compone de 4 sentencias de diferente configuración donde el alumno debe determinar el valor del espacio en blanco para verificar la igualdad y justificar la elección en cada una. Con relación a la sentencia $9 - 5 = \_\_ + 3$ se obtuvieron diferentes respuestas.

El 26% de los alumnos expresaron respuestas que residen en el significado *Operador* como es el caso que se muestra en la Figura 22. La estudiante determina que el valor que cumple la igualdad es 4 ya que no contempla la sentencia de forma global y considera que el resultado debe estar inmediatamente después del signo igual sin importar los demás elementos que contenga la igualdad, incluso, nombra al primer miembro la "operación" (Figura 23).

**Figura 22**

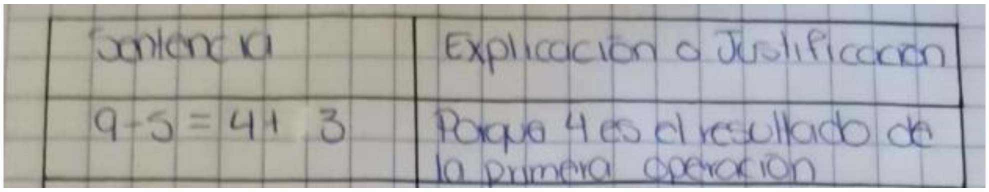
*Respuesta del 3a de la estudiante 20*

3. Completa las siguientes sentencias de acuerdo con tu criterio y justifica tu respuesta

| Sentencia | Explicación o justificación |
|---|---|
| 9 – 5 = _4_ + 3 | Porque nueve menos cinco es cuatro |

**Figura 23**

*Respuesta del 3a de la estudiante 23*

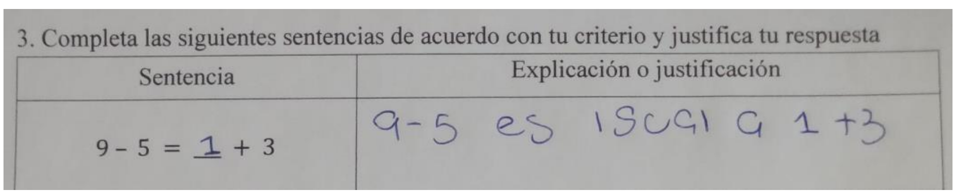


| Sentencia | Explicación o Justificación |
|---|---|
| 9-5 = 4+ 3 | Porque 4 es el resultado de la primera operación |

Por otra parte, el 70% de los estudiantes indicaron un valor diferente que muestra indicios de un pensamiento relacional o niveles inferiores según la clasificación de Singh & Kosko (2017), puesto que observan la igualdad de forma global desde los elementos del miembro izquierdo con los del miembro derecho (Figura 24) y dividen la sentencia mostrada en subsentencias más sencillas y comunes para ellos mismos (Figura 25).

**Figura 24**

*Respuesta del 3a del estudiante 15*

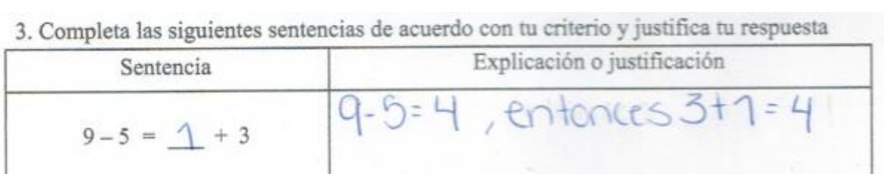


3. Completa las siguientes sentencias de acuerdo con tu criterio y justifica tu respuesta

| Sentencia | Explicación o justificación |
|---|---|
| 9 – 5 = 1 + 3 | 9-5 es igual a 1+3 |

**Figura 25**

*Respuesta del 3a de la estudiante 22*



3. Completa las siguientes sentencias de acuerdo con tu criterio y justifica tu respuesta

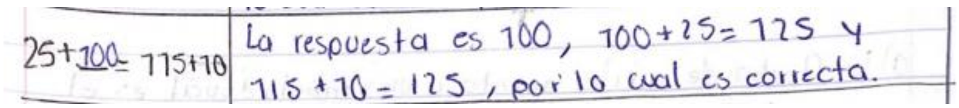
| Sentencia | Explicación o justificación |
|---|---|
| 9 – 5 = 1 + 3 | 9-5=4 , entonces 3+1=4 |

A su vez, en la igualdad $25\ +\ \_\_\ =\ 115\ + 10$ se presentaron de igual manera tipos de respuestas similares a las del inciso anterior. El objetivo de esta sentencia era determinar el tipo de estrategias que empleaban los estudiantes para calcular el valor faltante ya sea mediante estrategias de cómputo o compensatorias.

La siguiente Figura 26 evidencia un ejemplo de las respuestas del 73% de los alumnos que indican el valor que cumple con la igualdad propuesta. El significado que muestra de acuerdo con Singh & Kosko (2017) se refiere a un *Basic Relational* pues, como en el inciso precedente, la divide en sentencias menos complejas y habituales, pero de forma global al considerar ambos miembros.

**Figura 26**

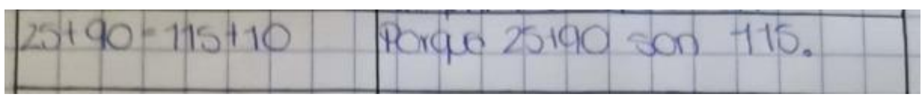
*Respuesta del 3b de la estudiante 9*




Por otra parte, el 23% de los estudiantes segmentan la igualdad para establecer el valor en el espacio en blanco. Este tipo de respuestas corresponde al significado *Operador* de Molina (2006) como la que se muestra en la Figura 27 que solo contempla el número que está inmediatamente después del signo =.

**Figura 27**

*Respuesta del 3b de la estudiante 23*

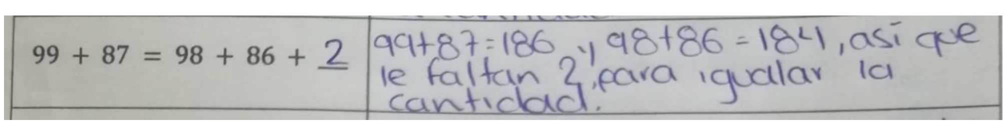



Acerca de la sentencia $99 + 87 = 98 + 86 + \_\_$ el utilizar una estrategia compensatoria para determinar el valor faltante radica en un significado *Advance Basic Relational* de Singh & Kosko (2017).

En la Figura 28, es un ejemplo del 80% de los alumnos que utilizaron este procedimiento que consiste, como en otros incisos, en dividir la sentencia y realizar cálculos para exteriorizar el número que valida la igualdad.

**Figura 28**

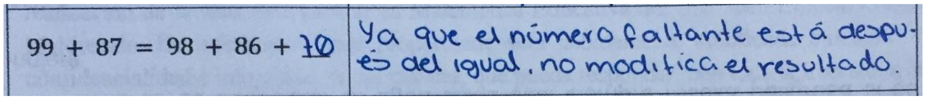
*Respuesta del 3c de la estudiante 25*




No obstante, en otras respuestas (3%) no visualizaron la igualdad de manera completa y la interpretaron desde una sola dirección. Por ejemplo, en la Figura 29 el número que señalaron lo consideraron sin importancia con lo que pudiera afectar a la sentencia, pues el miembro derecho lo contemplan como perteneciente a otra “operación” en la que se le debe agregar el “resultado”.

**Figura 29**

*Respuesta del 3c de la estudiante 27*



| | |
|---|---|
| 99 + 87 = 98 + 86 + 10 | Ya que el número faltante está despu-és del igual, no modifica el resultado. |

Por lo que respecta al último ítem del tercer apartado, se obtuvieron cuatro tipos de respuestas: uso de la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa), estrategias computacionales, compensatorias y visión unidireccional. Lo cual era algo que se esperaba por la configuración de la sentencia.

En este sentido, el 7% de los alumnos utilizan la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa) para colocar los valores faltantes, como fue el caso en la respuesta de la alumna 29 (Figura 30). Esta respuesta muestra un significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 30**

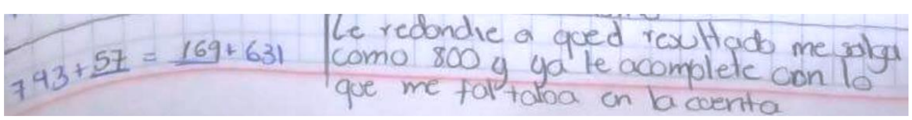
*Respuesta del 3d de la estudiante 29*

| | |
|---|---|
| 743 + _631___ = _743___ + 631 | Tenemos los mismos términos de un lado y del otro por ende sabemos que obtendremos un resultado equivalente |

Por otro lado, el 50% usa estrategias computacionales que residen en establecer un número igual o mayor que los que proporcionaba la sentencia para con ello determinar cuánto se le tenía que agregar en cada miembro de tal manera que se mantuviera la igualdad. Por ejemplo, la Figura 31 establece como número base el 743 y en la Figura 32 es 843.

**Figura 31**

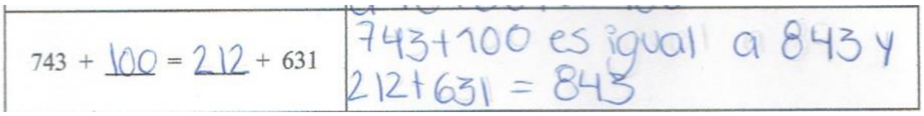
*Respuesta del 3d de la estudiante 19*



| | |
|---|---|
| 743+57 = 169+631 | Le redondie a qued resultado me salga como 800 y ya le acomplete con lo que me faltaba en la cuenta |

**Figura 32**

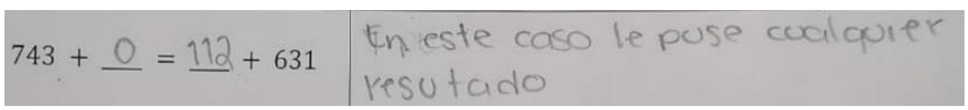
*Respuesta del 3d de la estudiante 22*




Por lo que se refiere a las estrategias compensatorias se observaron en el 10% de las producciones de los estudiantes. La justificación de la respuesta reside en establecer relaciones entre los elementos de cada miembro para contemplarlas con los números a agregar. Por ejemplo, la Figura 33 muestra la diferencia entre ambos elementos y lo considera para seleccionar los números, aunque la explicación no brinda la suficiente información.

**Figura 33**

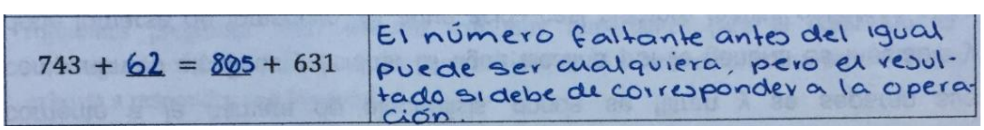
*Respuesta del ítem 3d de la alumna 24*




En otras respuestas, el 3% mantuvo de manera arraigada sentido operativo de comprender hacia una sola dirección la sentencia (Figura 34). En este caso, la alumna consideró que puede agregar de manera indistinta un valor en el espacio del miembro izquierdo y que estos elementos condicionan el valor del otro espacio, en el miembro derecho. Las elecciones hechas son establecidas sin contemplar de manera bidireccional la igualdad.

**Figura 34**

*Respuesta del 3d de la estudiante 27*




En el siguiente apartado 4, se estructura con tres incisos que contienen sentencias algebraicas con diferente configuración. La indicación es que el alumno complete si considera necesario en cada ejercicio. Además, debe incluir la justificación de su respuesta.

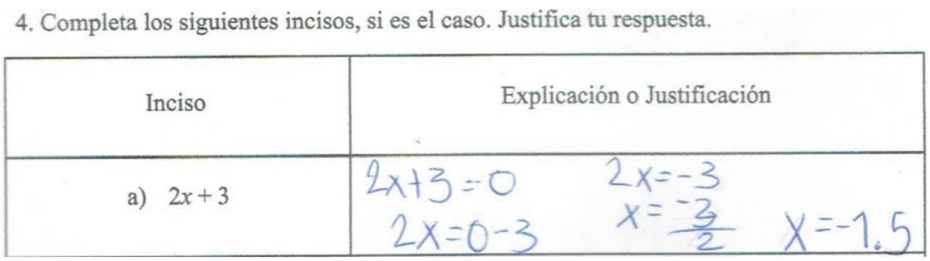
El inciso 4a consiste en una expresión algebraica que fue incluida con el objetivo de cómo reaccionaría el discente al proponerle esta situación, lo cual, generó diferentes respuestas.

El 60% de los discentes exhiben características de sentido operativo como en la Figura 35 pues la estudiante considera que le hace falta igualar la expresión a cero para que sea una ecuación y además determinar el valor de la incógnita. Esto, como antes se ha descrito, recae en esta comprensión porque incentiva al estudiante a realizar una acción que le sea lógica de acuerdo con los ejercicios que comúnmente resuelve en el aula.

Otro caso similar fue en la Figura 36 pues asigna un valor a la incógnita y después comienza a sustituirlo en la sentencia para obtener un resultado, aunque la parte operativa es incorrecta, se entiende lo que quiso expresar.

**Figura 35**

*Respuesta del 4a de la estudiante 22*

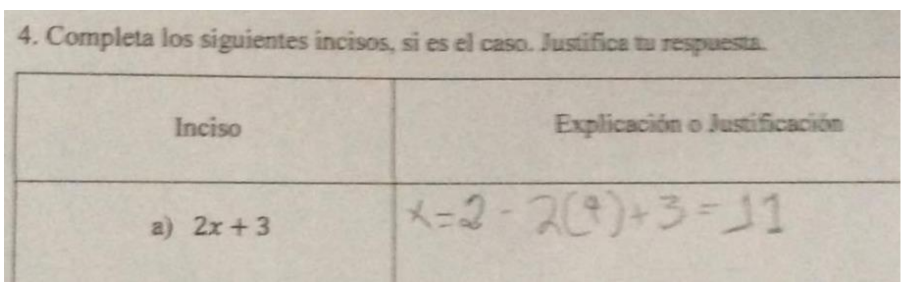


4. Completa los siguientes incisos, si es el caso. Justifica tu respuesta.

| Inciso | Explicación o Justificación |
|---|---|
| a) $2x + 3$ | $2x+3=0$ $2x=0-3$ $2x=-3$ $x=\frac{-3}{2}$ $x=-1.5$ |

**Figura 36**

*Respuesta del 4a de la estudiante 2*



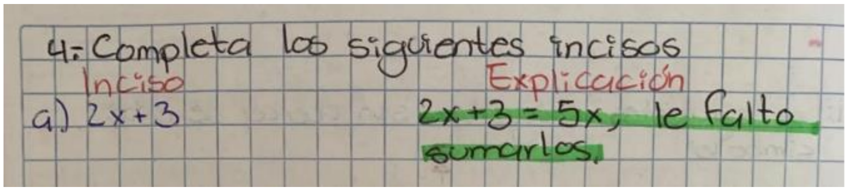
4. Completa los siguientes incisos, si es el caso. Justifica tu respuesta.

| Inciso | Explicación o Justificación |
|---|---|
| a) $2x + 3$ | $x=2$ - $2(4)+3=11$ |

Asimismo, otro tipo de respuesta que muestra un sentido operativo es el caso de la Figura 37. Tal resolución presenta una visión unidireccional de la sentencia de izquierda a derecha y la falta de clausura que se ha puntualizado en el análisis de otros apartados de este cuestionario. En este ejemplo, realiza una “suma” incorrecta de términos con la finalizad de simplificar la expresión y une a través del signo igual ambos elementos.

**Figura 37**

*Respuesta del 4a de la estudiante 4*

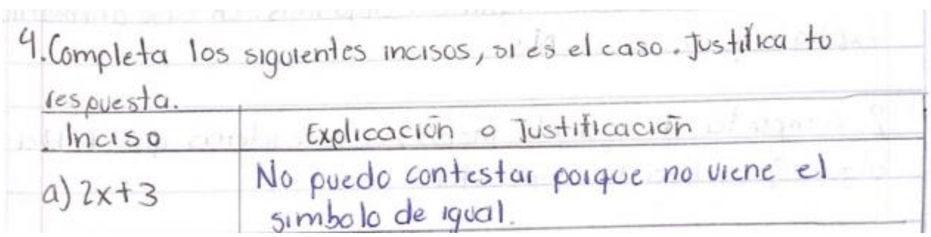

4: Completa los siguientes incisos

| Inciso | Explicación |
| --- | --- |
| a) 2x+3 | 2x+3 = 5x, le falto sumarlos. |

Por otra parte, el 30% de los alumnos exponen respuestas donde no está arraigado el sentido operativo en el contexto algebraico y, además, que el concepto de expresión algebraica forma parte de los conocimientos adquiridos. Para ejemplificar, están las respuestas de estos alumnos (Figura 38 y Figura 39) que no le agregan algo a la sentencia y la justificación emplea aspectos de sintaxis pero que, de igual manera, es válida.

**Figura 38**

*Respuesta del 4a de la estudiante 9*


4. Completa los siguientes incisos, si es el caso. Justifica tu respuesta.

| Inciso | Explicación o Justificación |
| --- | --- |
| a) 2x+3 | No puedo contestar porque no viene el simbolo de igual. |

**Figura 39**

*Respuesta del 4a de la estudiante 20*

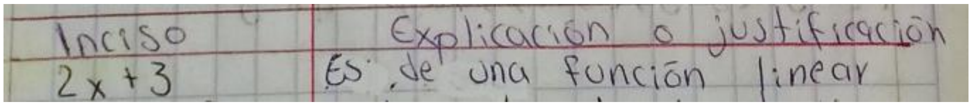
4. Completa los siguientes incisos, si es el caso. Justifica tu respuesta.

| Inciso | Explicación o Justificación |
| --- | --- |
| a) $2x + 3$ | Se queda igual porque solo se suman o restan números con literal y exponente igual |

En este mismo inciso, otra respuesta interesante es la de la Figura 40 debido a que utiliza un contexto gráfico para explicar la expresión pues considera que se refiere a una función lineal, aunque para que sea denominada como tal es necesario agregar $f(x)$ o en dado caso $y$, para que se convierta en $y = 2x + 3$, pero la intención es la de mostrar la relación algebraica con la gráfica.

**Figura 40**

*Respuesta del 4a de la estudiante 5*




En cuanto al inciso 4b el tipo de respuestas tiene puntos en común con las que se refirieron en el inciso anterior, pues también, se distingue simplificación de expresiones, resolución de una ecuación y la inacción a agregar algo en la sentencia.

El 70% de los alumnos muestran el significado *Operador* de Molina (2006). Por ejemplo, en la Figura 41 se puede observar que la discente considera que hace falta agregar $x$ para completar la sentencia y en la Figura 42 procede a determinar el valor de la incógnita mediante la transposición de términos.

**Figura 41**

*Respuesta del 4b de la estudiante 28*

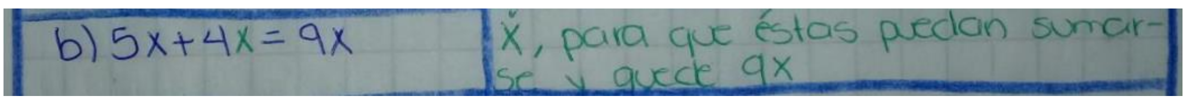
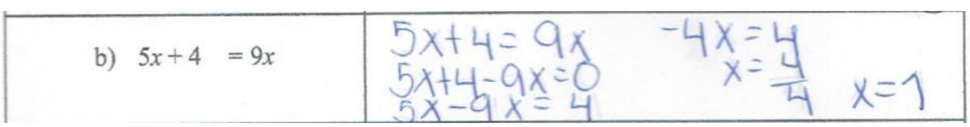



**Figura 42**

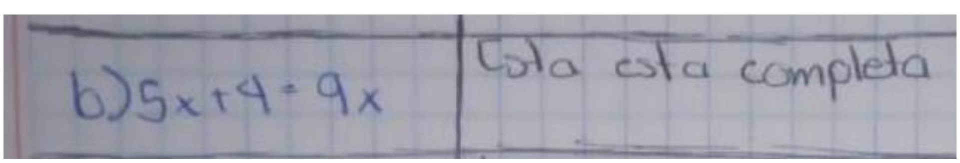
*Respuesta del 4b de la estudiante 22*




Otra respuesta formulada por el 20% de los discentes, constituyó la de no realizar una acción específica relacionada con la forma habitual de enseñar a responder cuando se les presenta una sentencia de este tipo. En la Figura 43 la alumna considera que no es necesario agregar o proceder de cierta manera para completar la sentencia.

**Figura 43**

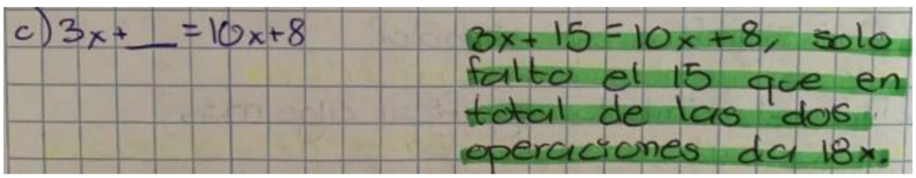
*Respuesta del 4b de la estudiante 19*



Finalmente, en la sentencia 4c se obtuvo diferentes respuestas que es algo que se tenía previsto debido a la configuración planteada. El 63% de los alumnos presenta justificaciones relacionadas con el significado de *Expresión de una equivalencia* de Molina (2006). Por ejemplo, la Figura 44 muestra una justificación que reside en la igualdad entre expresiones, no obstante, la forma de simplificar expresiones en un solo término es incorrecta se entiende el mensaje que desea transmitir. Otro caso similar fue en la Figura 45 pero en esta establece un valor arbitrario a $x$ para después determinar el valor faltante para que se cumpla la igualdad.

**Figura 44**

*Respuesta del 4c de la estudiante 4*

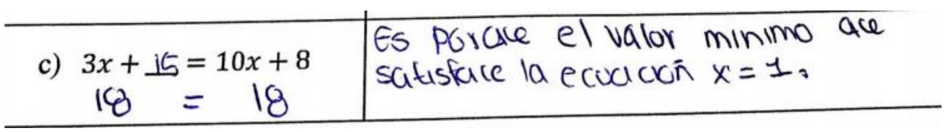


c) $3x + \_\_ = 10x+8$

$3x+15=10x+8$, solo falto el 15 que en total de las dos operaciones da 18x.

**Figura 45**

*Respuesta del 4c de la estudiante 3*



c) $3x + \underline{15} = 10x + 8$

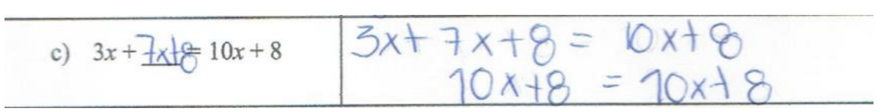
$18 = 18$

Es porque el valor minimo que satisface la ecuacion $x = 1$.

La respuesta de la Figura 46 tiene aspectos similares que las anteriores, pero en ésta expresa una igualdad entre expresiones, de tal manera que agrega dos términos en el espacio en blanco para que al sumar términos semejantes se obtenga la misma expresión en ambos miembros de la igualdad. Esta justificación muestra que el miembro izquierdo debe responder a la operación a realizar y el miembro derecho al resultado, es así como, el estudiante considera qué términos indicar para que coincida con los datos de la sentencia.

**Figura 46**

*Respuesta del 4c de la estudiante 22*



c) $3x + \underline{7x+8} = 10x + 8$

$3x+7x+8 = 10x+8$

$10x+8 = 10x+8$

Finalmente, en las siguientes dos respuestas se evidencia un sentido operativo presente en el 30% de los alumnos, pues, contemplan la sentencia de manera segmentada. En la Figura 47 visualiza que el miembro derecho representa el "resultado", de tal manera que lo que hace falta por agregar consiste en la "operación" que se indica en el espacio. El proceso para puntualizar qué términos colocar lo razona desde la factorización de una expresión, por tanto, sus factores son $2(5x+4)$ que al multiplicarse se obtiene $10x+8$ lo que ignora el término $3x$ en la igualdad.

Algo similar ocurre en la Figura 48, donde ahora el "resultado" es el término que está inmediatamente después del signo $=$ de tal manera que considera que el miembro izquierdo debe proporcionar, mediante la suma de términos semejantes, $10x$ sin incluir el $+8$ de forma completa en la sentencia.

**Figura 47**

*Respuesta del 4c de la estudiante 5*

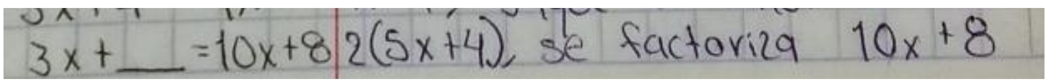
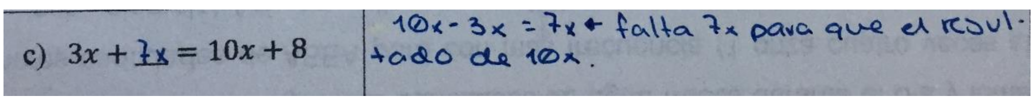



**Figura 48**

*Respuesta del 4c de la estudiante 27*



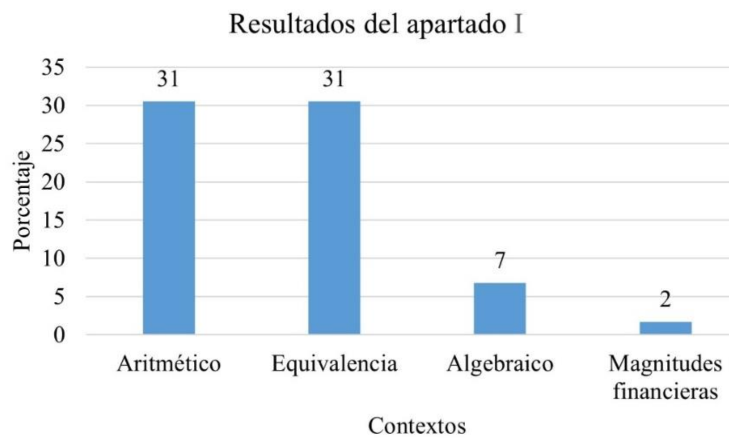

A manera de conclusión acerca de la dimensión cognitiva se percibe que en el apartado I el 31% de las respuestas de los estudiantes describen el signo igual en un contexto aritmético a través de usos del significado O*perador* (Molina, 2006). Es decir, indican que se utiliza para separar el resultado de la operación.

También, otras respuestas (31%) explican el signo igual a través de contextos de igualdad sin especificar alguna rama de las matemáticas. Por ejemplo, que dicho signo se utiliza para representar igualdades y que muestra la equivalencia entre dos objetos matemáticos.

Además, el 7% de las respuestas desarrollan explicaciones en contextos algebraicos con usos de equivalencia. Por ejemplo, que dicho signo señala la igualdad entre expresiones. Y, 2% lo utiliza para describir magnitudes financieras. En la Figura 49 se muestra de forma gráfica los resultados del apartado I.

**Figura 49**

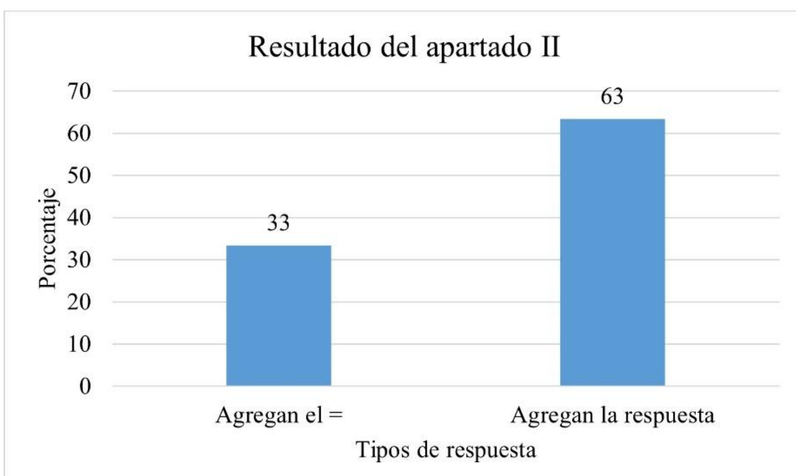
*Resultados del apartado I*




En cuanto al apartado II todos los estudiantes expresan un significado O*perador* al responder al ítem presentado. El 33% de los alumnos solo agregan el signo igual como lo que hace falta en el inciso. Y, el 63% además de escribir el signo, suman los números y colocan el resultado. En la Figura 50 se observa mediante una gráfica tal distribución de este apartado.

**Figura 50**

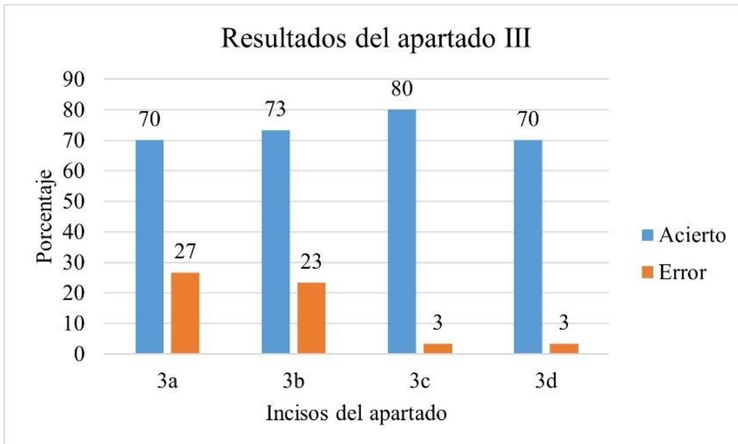
*Resultados del apartado II*




Acerca del apartado III, el 27%, 23%, 3% y 3% de los estudiantes respondió de manera equivocada los incisos 3a, 3b, 3c y 3d, respectivamente. Mientras que, el 70%, 73%, 80% y 70%, con relación al orden establecido de las sentencias, obtuvo la respuesta correcta independientemente del significado y estrategias utilizadas. En la Figura 51 se presenta la distribución de las respuestas acertadas y erróneas de los incisos del apartado.

**Figura 51**

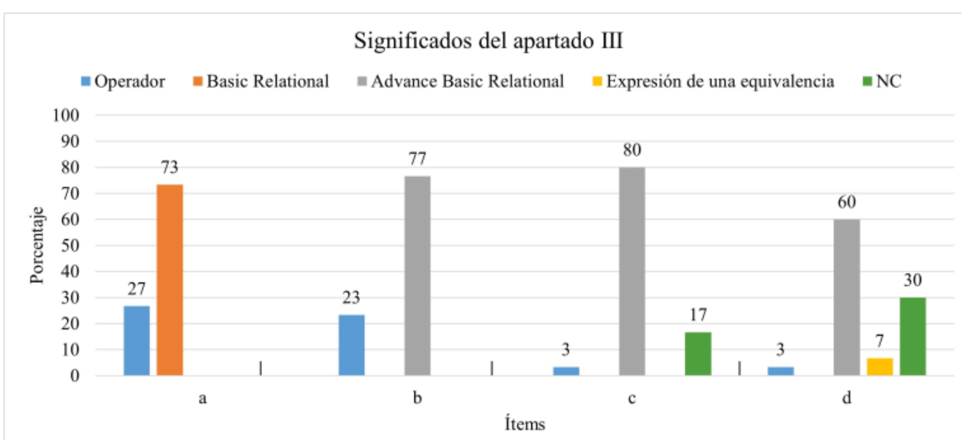
*Resultados del apartado III*




Además, los significados observados en los ítems de este apartado se presentan en la Figura 52. En el ítem a) el 27% mostró un significado *Operador* y el 73% *Basic Relational*. En el ítem b), el 23% evidenció *Operador* y el 77% *Advance Basic Relational*. En el ítem c) 3% expresó *Operador*, el 80% *Advance Basic Relational* y el 17% no contestó el ítem. Y, en el ítem d) 3% manifestó *Operador*, el 60% *Advance Basic Relational*, el 7% *Expresión de una equivalencia* y el 30% no respondió este ejercicio. observar

**Figura 52**

*Distribución de los significados de los ítems del apartado III*

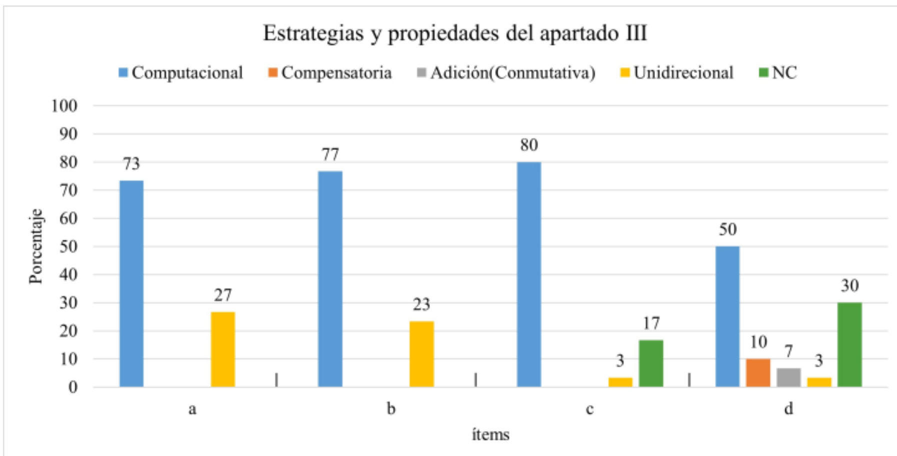


Asimismo, la distribución de las estrategias y propiedades utilizadas en cada ítem es la siguiente (Figura 53): en el ítem a) el 73% y en el ítem b) el 77% mostró estrategias computacionales y el 27% y 23% una visión unidireccional de la sentencia en cada ítem, respectivamente.

En el ítem c) el 80% utilizó estrategias computacionales, en el 3% se observó una visión unidireccional y el 17% no contestó la sentencia. Y, en el ítem d) el 50% manifestó estrategias computacionales, el 10% compensatorias, el 7% empleó la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa) y el 30% no respondió al ejercicio.

**Figura 53**

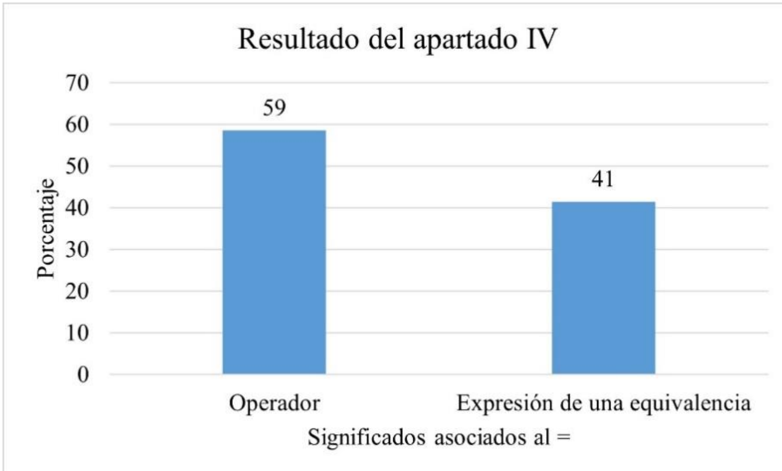
*Distribución de las estrategias y propiedades de los ítems del apartado III*




Por lo que se refiere al apartado IV, las respuestas obtenidas de los tres ítems manifiestan el significado *Operador* (Molina, 2006) en el 59% del total. Mientras que el de *Expresión de una equivalencia* (Molina, 2006) se observa en el 41% de las mismas. A continuación, la Figura 54 muestra el porcentaje de tales significados.

**Figura 54**

*Resultados del apartado IV*




Cabe mencionar que en la descripción de las respuestas se alude frecuentemente a estrategias computaciones y significados *Operador* y *Basic Operational*. También, se menciona de forma esporádica estrategias compensatorias y significados *Full Relational* y *Advance Basic Relational*. Además, no se indican respuestas con estrategias de reagrupación o que muestren significado *Pseudo-relational*. La causa se debe a que las producciones de los estudiantes sí fueron observadas a partir de los significados integrados de las clasificaciones de Singh & Kosko (2017) y Molina (2006), sin embargo, las encontradas fueron relativas a los significados con mayor predominancia antes mencionados.

Finalmente, de manera general se percibe que los estudiantes muestran significados relacionados con el sentido operativo y se evidencia cuando se enfrentan a sentencias atípicas, al intentar de establecer una comprensión unidireccional tratan de asimilar la estructura de alguna forma coherente. En este caso la configuración de las sentencias puede provocar que por sí mismos generen y reflexionen sobre los usos del signo igual que emplean.

### *4.1.3. Dimensión didáctica*

En esta dimensión se describen las características de la enseñanza y sus efectos, se refiere a la manera en la que se desarrolla el tema de ecuaciones lineales de una variable en el contexto escolar del Bachillerato No. 33 de la Universidad de Colima del municipio de Villa de Álvarez, Colima. Para la obtención de la información, se diseñó un cuestionario dirigido al docente titular para conocer aspectos didácticos y del contenido.

La dinámica de aplicación consistió en enviarle por medio de *WhatsApp* el cuestionario como plantilla de texto. El tiempo que el docente destinó para responder las preguntas fue de seis días. Luego, realizó el reenvío del documento ya con la información solicitada. En el Anexo 3 este trabajo se puede observar las respuestas del docente.

El cuestionario aplicado consta de tres secciones. Dicho instrumento se muestra en el Anexo 2 de esta investigación. El primer apartado, se constituye de ocho preguntas que permiten conocer aspectos del contenido, es decir, definición de ecuación lineal de una variable y didácticos, como momentos didácticos para la enseñanza, dificultades y errores en el aprendizaje, aprendizaje logrado, libro base para el tema y dinámica y dificultades en la enseñanza a distancia, virtual o en línea o una combinación entre éstas.

Luego, en el segundo apartado se retoman las mismas preguntas del primer apartado del cuestionario para los alumnos. La finalidad es para observar qué significados asocia el docente con el signo igual y determinar si dicha comprensión es más amplia, igual o limitada en comparación con la de los estudiantes.

Del mismo modo, sucede en el tercer apartado, en el que, se adjunta la segunda sección del cuestionario para la dimensión cognitiva. Cabe mencionar que las sentencias numéricas de la tabla se conservan y solamente, se agregan dos sentencias más con términos algebraicos para observar el concepto de ecuación y qué tan arraigado muestra el sentido operativo el docente en un contexto algebraico.

Ahora bien, luego de realizar la aplicación del cuestionario al docente se puede interpretar sus respuestas para analizar el contexto de la enseñanza del tema de ecuaciones lineales de una variable.

En cuanto al primer apartado, como se mencionó se compone por 8 preguntas. La primera, consiste en ¿Cuál es la definición que utiliza con sus alumnos para conceptualizar a la ecuación lineal de una variable? En primera instancia, el docente no respondió porque indicó que no entendía la pregunta. Luego de esclarecer su duda, envío un audio en la que indicó el libro de Jiménez (2008), cual definición es la siguiente “Una ecuación es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales” (p. 178).

Por lo que se refiere a la segunda pregunta, se plantea que describa, en términos generales, los momentos didácticos que frecuentemente emplea para la enseñanza de tal tópico matemático; a lo que indicó tres: Inicio, Desarrollo y Cierre donde emplea preguntas exploratorias, focalizar la atención de los alumnos con ejercicios y análisis de los resultados, respectivamente (Figura 55).

**Figura 55**

*Respuesta del docente al ítem 1b*

En términos generales, describa los momentos didácticos que frecuentemente emplea para la enseñanza de este tema. - Inicio: preguntas exploratorias – desarrollo: focalizar la atención de los alumnos con ejercicios – cierre: análisis de los resultados

Ahora bien, el tercer cuestionamiento consistió en indagar los aspectos que considera el docente, desde su perspectiva, más “difíciles” de aprender por los estudiantes. Desde su respuesta (Figura 56) se intuye que se refiere al proceso de transposición de términos para resolver ecuaciones y también que no contempla el concepto de equivalencia de la igualdad ni sus propiedades. En este sentido, la pregunta cuatro enfatiza en el error más recurrente de los discentes al estudiar tal tema por lo que alude, de igual manera, al “cambio de signos” (Figura 57).

**Figura 56**

*Respuesta del docente al ítem 1c*

¿Qué aspectos, de este tema, considera son más difíciles de aprender para los estudiantes?

El cambio de los signos cuando pasa sumando y cuando asa dividiendo se les complica mucho ese cambio porque en uno se cambia el signo (suma y resta ) y en el otro no(multiplicación y división).

**Figura 57**

*Respuesta del docente al ítem 1d*

Desde su experiencia, ¿cuál es el error más común que tiene los estudiantes cuando están aprendiendo el tema?

El cambio de los signos

Con respecto a la quinta pregunta se pide que describa el aprendizaje que obtienen los estudiantes luego de estudiar el tema mencionando conocimientos, habilidades y destrezas en su devenir por lo que el docente señala que depende sobre lo que se quiera profundizar pero que de manera común se prioriza en describir y aplicar diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales de una variable (Figura 58).

**Figura 58**

*Respuesta del docente del ítem 1e*

Describa el aprendizaje que obtienen los estudiantes luego de abordar el tema, es decir qué conocimientos, habilidades y/o destrezas adquieren los alumnos.

Dependiendo de donde profundicemos con esta tema, uno de los conocimientos que el alumno pueda adquirir “describir técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable” una habilidad “aplica diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable”

La pregunta seis interroga sobre el libro base que regularmente utiliza para enseñar este tema, por lo que hizo mención de tres fuentes bibliográficas (Figura 59): Baldor (2007), Jiménez (2008) y Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón y Reyes (2009a).

**Figura 59**

*Respuesta del docente del ítem 1f*

¿Cuál es el libro base que regularmente utiliza para enseñar el tema de ecuaciones lineales con una variable?

Grupo editorial patria “Algebra baldor”

Editorial Person “Matemáticas simplificada segunda edición”

Editorial Person “matemáticas 1 ” segunda edición autor Rene Jiménez

Con relación a las siguientes preguntas que abordan la idea sobre la situación del sistema educativo actual, es decir, continuar con la enseñanza desde espacios a distancia mediante los recursos tecnológicos disponibles, se plantean los cuestionamientos 7 y 8.

En este sentido, la pregunta siete averigua la dinámica de enseñanza actual con el grupo indicando las estrategias, plataformas recursos tecnológicos y formas de trabajo que utiliza con los alumnos. Es así, que el docente puntualizó que lleva a cabo la educación en línea en la que proporciona una actividad, algunos videos explicativos vinculados relacionados con el tema y luego, se reúnen mediante videoconferencia para el esclarecimiento de dudas. Además, los recursos que emplea son *Google Classroom* y aparatos electrónicos como tableta digital, *smartphone* y computadora (Figura 60).

**Figura 60**

*Respuesta del docente al ítem 1g*

Describa la dinámica de enseñanza que actualmente está llevando con el grupo durante la educación a distancia. Indique las estrategias, plataformas, recursos tecnológicos y formas de trabajo que utiliza con los alumnos.

Educación en línea, plataforma classroom, tableta, celular, computadora, pintarron, se deja actividad se mandan videos y tenemos una video conferencia para aclaración de dudas.

A su vez, la pregunta ocho indaga si en la transición del escenario presencial al virtual ha enfrentado dificultades ya sean tecnológicas, sociales, institucionales, didácticas, entre otras, a lo que especifica que un aspecto ha sido el servicio de internet tanto de él como el de sus estudiantes porque influye en el audio y el video de las videoconferencias, también que el trabajo en casa dificulta el tener un espacio designado donde no intervengan los ruidos del exterior cuando realiza las reuniones (Figura 61).

**Figura 61**

*Respuesta del docente al ítem 1h*

¿Cuáles han sido las principales dificultades que ha enfrentado durante la educación a distancia? Mencione aspectos tecnológicos, sociales, institucionales, didácticos, entre otros.

El internet limitado que hace que se vea mal la videoconferencia, no tener un espacio adecuado donde no se escuche los ruidos externos.

Acerca del segundo apartado de preguntas, como ya se ha descrito, consistieron en conocer cómo conceptualiza el signo igual, solicitándole que señale el nombre del símbolo = y el significado principal y alternativos que le puede asociar. Es así que, el docente aludió al símbolo como el signo de igualdad y solo proporcionó un significado (Figura 62).

**Figura 62**

*Respuestas del docente al ítem 2a y 2b*

Las siguientes preguntas son acerca de este símbolo:

$$\underset{\uparrow}{=}$$

a) La flecha de arriba apunta a un símbolo. ¿Cuál es el nombre?

Signo de igualdad

b) ¿Qué significa ese símbolo?
Que tanto lo que está en el primer miembro de la igualdad como lo que está en el segundo miembro de la igualdad es lo mismo o tienen el mismo valor.

En lo que respecta al tercer apartado de preguntas consistió en seis sentencias en la que cinco tienen al menos un espacio en blanco para establecer, de acuerdo con su criterio, el valor que verifique a las igualdades y que, además, explicite sus respuestas. Según con la primera sentencia planteada $9 - 5 = \_\_ + 3$ la elección del valor que cumple con la igualdad es determinado mediante estrategias de cómputo, es decir, calcula la resta del miembro izquierdo para con ello saber qué número agregar en el miembro derecho (Figura 63).

**Figura 63**

*Respuesta del docente al ítem 3a*

| | |
|---|---|
| $9 - 5 = \_\_ + 3$ | Uno porque cuatro seria el resultado de la resta de 9-5=4 por lo que 1+3=4 |

En sentido similar, sucede con la siguiente sentencia $25 + \_\_ = 115 + 10$ en la que se observa que comprende la igualdad presentada y justifica el valor a colocar de acuerdo con operaciones aritméticas que debe efectuar para validarla (Figura 64). Cabe mencionar, que ambas respuestas coinciden con lo que denota Singh & Kosko (2017) como una comprensión *Basic Relational* pues en ese tipo de estructuras las estrategias de cómputo son las que predominan.

**Figura 64**

*Respuesta del docente al ítem 3b*

| | |
|---|---|
| $25 + \_\_ = 115 + 10$ | 100 por lo que si sumamos 115+10=125 entonces 25+100=125 |

La siguiente igualdad presentada pretende inducir al docente para que haga uso de otras estrategias, como las compensatorias, para justificar su respuesta, pues al establecer relaciones entre los números de cada miembro de la igualdad podría notar esa característica. Sin embargo, continuando con los razonamientos precedentes, su respuesta (Figura 65) recae en una estrategia de cómputo pues suma todos los elementos del miembro izquierdo y después compara el "resultado" del miembro derecho para saber cuánto le hace falta para mantener la equivalencia.

**Figura 65**

*Respuesta del docente al ítem 3c*

| | |
|---|---|
| $99 + 87 = 98 + 86 + \_\_$ | 2 por que si sumas 99+87=186 entonces si sumo 98+86+2=186 |

En lo que respecta a la sentencia $743 + \_\_\_ = \_\_\_ + 631$ la respuesta que daría indicios de un pensamiento *Full Relational* es que utilice la propiedad de la conmutatividad para la suma para evidenciar la equivalencia, es decir, intercambiar los valores de cada miembro de la igualdad de la siguiente manera: $743 + 631 = 743 + 631$. No obstante, en su justificación (Figura 66) hace notar que la sentencia inicial la divide en otras sentencias más sencillas, por ejemplo $743 + 1 = 744$ y $631 + 113 = 744$ que se traduce a una configuración del tipo $a + \_\_ = c$ correspondiente a una comprensión *Basic Relational* porque establece un mismo número mayor a los elementos de la sentencia y solo agrega lo que hace falta para completar tal valor.

**Figura 66**

*Respuesta del docente al ítem 3d*

| | |
|---|---|
| $743 + \_\_\_ = \_\_\_ + 631$ | Los numero que falta puedes ser infinidad pero se puede poner un ejemplo 1 y 113 porque si a 743+1=744 y si a 631+113=744 |

Continuando con el análisis de las sentencias, las dos posteriores tienen la característica que emplean expresiones algebraicas. Una, es la que se muestra enseguida $3x + \_\_ = 10x + 8 - \_\_$ este tipo de configuración tiene dos espacios para responder y la finalidad es para determinar si el docente tiene una percepción global de la ecuación dependiendo de los términos que agregue para estructurarla. La respuesta del profesor versó en colocar $x$ y 2 para completar la ecuación (Figura 67), la cual, es una de las múltiples opciones que cumplen para este inciso.

**Figura 67**

*Respuesta del docente al ítem 3e*

| | |
|---|---|
| $3x + \_\_ = 10x + 8 - \_\_$ | X y 2 para que salga el ultimo resultado |

Finalmente, la última sentencia consiste en una expresión algebraica y se planteó de manera que, si el profesor agregara algún elemento a la igualdad, como el signo igual y otra expresión para completar una ecuación, es un indicio de un pensamiento operacional. Sin embargo, la respuesta del docente se limitó a modificar la expresión, aunque la visualiza como el resultado de algo sin contemplarla como un elemento por sí mismo (Figura 68).

**Figura 68**

*Respuesta del docente al ítem 3f*

| | |
|---|---|
| $8x + 6$ | Este sería el resultado de lo de arriba |

A manera de reflexión, el análisis realizado de la dimensión didáctica proporciona información relevante con respecto a la enseñanza y la manera en que se conceptualiza el tópico de ecuaciones lineales de una variable. Un aspecto para destacar se refiere al error más común que cometen los estudiantes que, de acuerdo con el profesor, lo señaló como el cambio de signos y que también causa mayor dificultad de aprendizaje en los estudiantes.

En este orden de ideas, la dificultad mencionada por el profesor radica en la estrategia que usualmente se utiliza que se describe desde un conjunto de reglas sin sentido que solamente se deben de memorizar cuando se quiere determinar el valor de la incógnita. Pues el decir que "si un término está sumando pasa restando" y que no cambia el signo cuando se trata de multiplicación y división de manera implícita no se utiliza adecuadamente el axioma de existencia de elementos inversos: aditivo y multiplicativo y de los elementos neutros, lo cual, causa mayor confusión que esclarecimiento.

Esto se puede relacionar, con lo que se ha reportado en la literatura referente a la transición abrupta de la aritmética al álgebra en la que el signo igual es el mismo símbolo, pero no se relaciona entre ambas ramas de la matemática, sino que se abordan de manera aislada. Además, el concepto de equivalencia no es vinculado con el de ecuación mediante las propiedades de la igualdad por lo que provoca un sentido unidireccional y no fomenta la comprensión de la parte procedimental del proceso para calcular el valor de las variables.

De tal manera, para la concepción se retomará el contexto aritmético y las estrategias de enseñanza de "lo que está sumando pasa restando" para ponerlo en evidencia con el contexto algebraico y las propiedades de la igualdad para provocar el diálogo con respecto a la equivalencia.

Otro punto es la dinámica para la enseñanza del sistema educativo que predomina actualmente, en la que se pueden utilizar las videoconferencias para llevar a cabo la institucionalización de la situación y la plataforma de *Google Classroom* para tener la comunicación y proporcionarles las actividades a los alumnos.

Por otra parte, en relación con los significados del signo igual, se detectó una disparidad en las respuestas del docente, es decir, expresó una comprensión en términos de un pensamiento relacional, mientras que en las sentencias manifestó usos operacionales o *Basic Relational*, por lo que acepta las igualdades presentadas, pero las justifica con estrategias computacionales. Esto puede incumbir con la manera en que enseña el tema de ecuaciones lineales de una variable a través de un conjunto de reglas que se deben de cumplir estrictamente.

Lo antes mencionado, servirá para tratar en la situación didáctica una uniformidad entre la comprensión y los usos que hacen del signo igual, teniendo en cuenta que el objetivo es que el estudiante mediante el desarrollo del pensamiento relacional será más proclive a disminuir sus errores al determinar el valor de la incógnita de ecuaciones de primer grado.

## 4.2. Fase 2. Concepción y análisis *a priori*

En este apartado se indica la Fase 2 de la Ingeniería didáctica nombrada como Concepción y análisis a priori. Se estructura por la descripción de la construcción de la situación didáctica y de los elementos considerados de acuerdo con la Fase 1 para su elaboración. También, se alude a las variables didácticas y análisis de lo que se espera que suceda en la siguiente fase y, por último, se detalla la puesta en marcha de forma preliminar con una muestra de estudiantes como la prueba piloto.

### *4.2.1. Concepción*

La situación didáctica fue elaborada retomando la información recabada de los análisis preliminares. En cuanto a la dimensión epistemológica se retoma la idea de las diferentes interpretaciones que le otorgaron diversos matemáticos al signo igual y que la adopción universal del signo se logró gracias a la invención del cálculo diferencial e integral refleja la cantidad de usos que tiene tal símbolo y la confusión que causa en los contextos donde se utiliza.

Por lo que se refiere a la dimensión cognitiva, se consideró la dificultad que presentaron los estudiantes para contemplar de manera global los miembros de sentencias numéricas, por lo que en la propuesta se trata de solventar tal deficiencia. También, en los usos que emplean de tal símbolo se observó escasa utilización de estrategias compensatorias, por tanto, se hace énfasis en fomentarlas porque están vinculadas con el pensamiento relacional propio del sentido bidireccional del signo igual.

A su vez, en la dimensión didáctica se dispuso de la comprensión que posee el docente titular acerca del signo igual, pues no vincula la equivalencia y las propiedades del signo igual con el concepto de ecuación, lo cual, es algo que podría transmitir a los estudiantes en el estudio del tema matemático en cuestión. Asimismo, de acuerdo con las condiciones de enseñanza virtual, se continuó con la dinámica que se utiliza con el grupo empleando la modalidad de las sesiones (síncrona y asíncrona) y de los recursos tecnológicos.

Por otra parte, la experimentación de la propuesta consiste en la transición de los tipos de situaciones de manera secuencial, sin embargo, también es posible que en la experimentación ocurra de forma regresiva. Por ejemplo, que de la situación de validación vuelvan a la de formulación. Por consiguiente, ese momento se caracterizará por incluir una formulación-validación.

El propósito de la situación didáctica es evidenciar el significado “Pensamiento relacional” del signo igual en la aritmética. De tal manera, que el alumno observe otros significados, además del operacional, en ese contexto. En este sentido, se espera que el estudiante pueda establecer relaciones entre la aritmética y el álgebra a través del signo igual y con ello utilice dicha comprensión para resolver de manera eficaz ecuaciones lineales de una variable.

En cuanto al desarrollo de la situación didáctica se planteó aplicarla a través de cuatro sesiones de manera asíncrona y síncrona (Tabla 2). Para la situación acción se estableció una sesión para reunión virtual de 30 o 45 minutos para establecer el contrato didáctico y la explicación de las actividades.

Por lo que se refiere a la situación de formulación, fue de forma asíncrona para que los alumnos se sintieran en confianza con sus compañeros y el docente al pendiente para las dudas que surjan en el equipo. Los equipos formados resolvieron las actividades mientras se videograbaron. Los productos obtenidos de esas interacciones los proporcionaron a través de una plataforma. Luego, en la situación de validación e institucionalización se dedicó una sesión síncrona para cada una.

**Tabla 2**

*Distribución de las sesiones*

| Número de sesión | Tipos de situación | Tiempo estimado | Modalidad |
|---|---|---|---|
| 1 | Acción | 50 min | Síncrona |
| 2 | Formulación | 90 min | Asíncrona |
| 3 | Validación | 50 min | Síncrona |
| 4 | Institucionalización | 50 min | Síncrona |

### *4.2.2. Variables didácticas*

A continuación, se presentan las variables para esta situación didáctica. De manera general, macro-didácticas y micro-didácticas:

Macro-didácticas, concernientes a la organización global de la experimentación.

- La situación didáctica se compone por 4 sesiones. Tres de manera síncrona y la restante, asíncrona.
- La conformación de los equipos se realizó en la primera sesión. Estuvieron compuestos por 3 integrantes. La elección de los compañeros fue decisión libre de los estudiantes. Quedaron registrados los participantes en sus respectivos subgrupos.
- La entrega de la hoja de trabajo se realizó por *Google Classroom* unos 10 minutos antes de iniciar la primera sesión síncrona.
- Se proporcionaron los espacios para la entrega de las actividades realizadas en *Google classroom* correspondientes a cada equipo.
- Las reuniones síncronas se realizaron a través de *Google Meet.*

Micro-didácticas, referentes a la organización de la situación didáctica.

- Significados del signo igual. Los significados a fomentar en los estudiantes son *Basic Operational*, *Flexible Operational*, *Pseudo-Relational*, *Basic Relational*, *Advance Basic Relational*, *Full Relational* y *Expresión de una equivalencia* de acuerdo con la configuración de las sentencias seleccionadas.

- El método de resolución de una ecuación lineal de una variable concierne al uso de las propiedades de la igualdad.
- Las sentencias numéricas incluyen espacios en blanco en forma de cuadrados, simbolizando incógnitas.
- En las sentencias se utilizan números enteros para focalizar la atención en las propiedades de la igualdad y no provocar errores derivados del empleo de otros números como los racionales.
- El problema del apartado III se seleccionó porque implica tener conocimiento del sentido bidireccional del signo igual para corregir la ecuación y determinar el valor de la incógnita.
- Se optó por un problema con forma de representación algebraica para que de esta manera los estudiantes comprendan qué es lo que se les solicita y averigüen la manera de resolverlo en el mismo contexto algebraico.

### *4.2.3. Análisis a priori*

En esta sección se describe la estructura de la propuesta en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Además, se incluyen los aspectos de logística relacionados con el escenario virtual y la manera en la que se trabajó en cada una de las situaciones que se presentan a continuación. En el Anexo 4 se incluye la hoja de trabajo que contiene las actividades a realizar.

**Situación acción**

La situación acción es el primer acercamiento del estudiante a la situación didáctica. Por tanto, es importante que se establezca el contrato didáctico como mediador del desarrollo de las sesiones. Además, en este momento, mediante la devolución, el alumno debe responsabilizarse de su aprendizaje y el docente debe proporcionar los recursos necesarios para tal propósito. De acuerdo con las características, esta sesión se programa de manera síncrona por medio de una reunión virtual en *Google Meet.*

El desarrollo de la sesión 1 se orienta con base en el apartado I que contiene 6 ítems de la hoja de trabajo (Anexo 4). Al principio, el docente les pide a los alumnos que proporcionen los datos generales que se les solicitan. De igual manera, les explica que el propósito de las sesiones siguientes es la aplicación de actividades que se derivan de este trabajo de tesis y que de igual manera tiene valor como las tareas semanales de la asignatura. Además, que la información que brinden es manipulada de forma confidencial.

Luego, el profesor lee las indicaciones y pide a los estudiantes que respondan de manera individual a la sentencia numérica que se presenta, misma que se caracteriza por ser poco habitual en la enseñanza escolarizada. Cabe mencionar, que en todo el desarrollo de la situación se evitan las palabras igualdad o ecuación para no inducir a ciertos procedimientos comunes en el contexto algebraico.

A continuación, por medio de preguntas planteadas por el docente como: ¿Qué diferencias tiene este ejercicio con los que usualmente conoces? ¿Es correcto escribir un ejercicio de en ese orden? ¿Por qué? ¿Qué valor va en □ para que la sentencia sea verdadera? Se pretende que el estudiante, de forma individual, plasme sus primeras ideas acerca de la estructura de la sentencia. Al terminar, algunos discentes por medio de participaciones comunican sus resultados.

Después, el profesor prosigue con el siguiente planteamiento hacia los alumnos: Si se cambia el orden de los elementos, es decir, $4 + 7 = \square$ ¿cambia el valor de □? ¿Por qué? Así, la verificación recae en la configuración de sentencias que conocen ampliamente y en dado caso que tengan dudas en el ejercicio anterior, se espera que con éste se logren disipar. A través de los cuestionamientos que realice el docente y las respuestas que ofrezcan los alumnos, mediante participaciones, se logra la devolución de la situación.

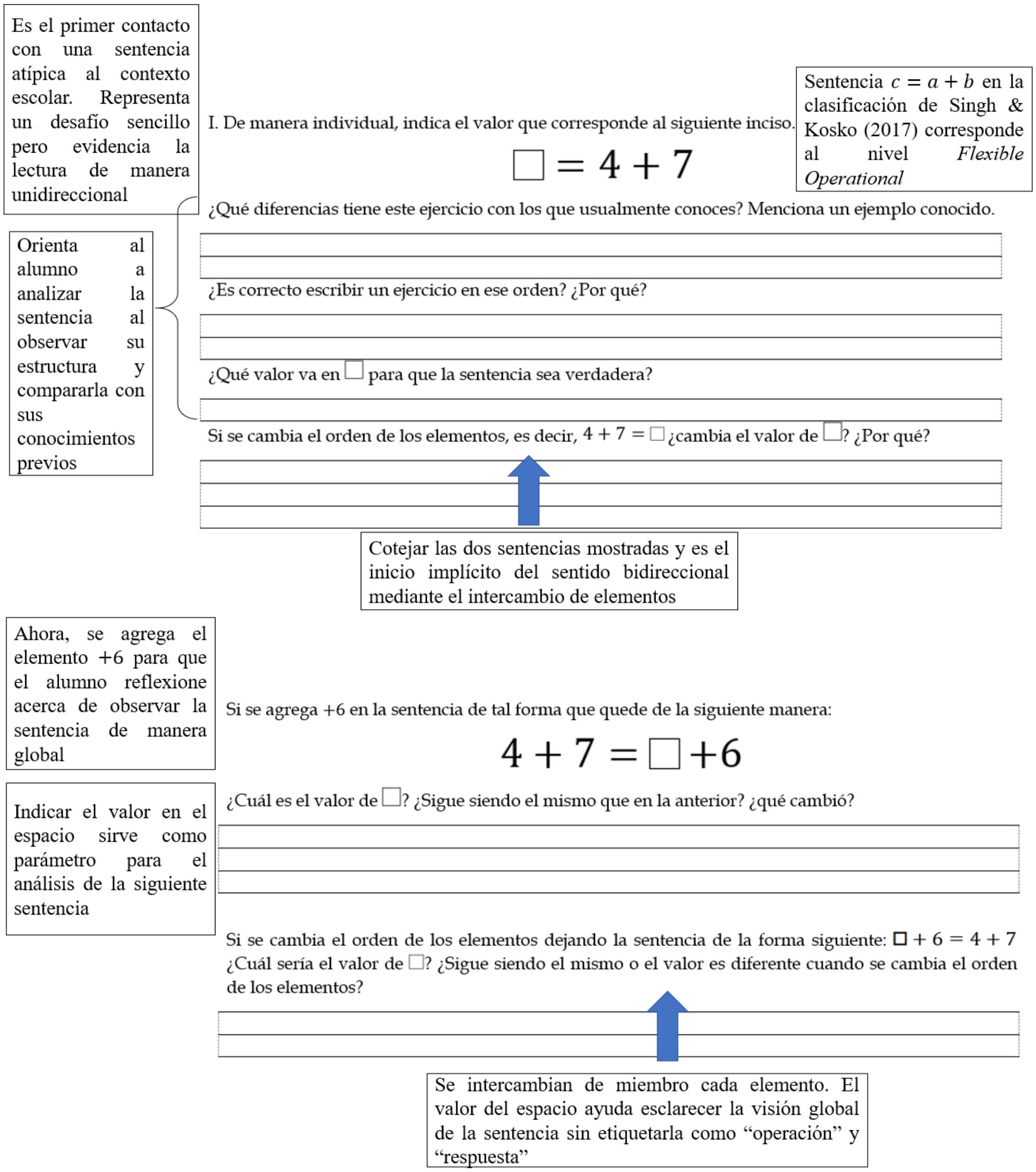
Enseguida, el docente realiza una modificación a la sentencia para mostrar un aspecto de equivalencia entre ambos miembros sin indicarlo de manera explícita. De esta forma, añade $+6$ después del espacio en blanco junto con algunas preguntas que dirige a los estudiantes que permitan evidenciar los significados que atribuyen al signo igual.

En el último ejercicio del primer apartado, el profesor plantea la sentencia cambiando los elementos del miembro en el que se encuentran, es decir, $6 + \square = 4 + 7$ para verificar si el sentido de equivalencia permanece en los discentes y si logran percibirla de manera global. Con la ayuda de algunas preguntas se incentiva a que den muestra de tal propósito.

A continuación, en el esquema de la Figura 69, se muestra la justificación que orienta la situación de acción en cada una de los cuestionamientos y ejercicios establecidos. A través de diferentes señalamientos se puntualiza el fundamento de los ítems y lo que se espera fomentar en los estudiantes.

**Figura 69**

*Esquema del trasfondo de la situación de acción*




En este apartado I, la configuración de las sentencias es $c = a + b$ y $a + b = c + d$. También, los significados que se promueven se muestran en la Tabla 3. El propósito de esta sesión 1 es que el alumno contemple de manera global los miembros de la igualdad sin importar que en el instante emplee estrategias de cómputo para verificar sus respuestas.

**Tabla 3**

*Significados utilizados en la situación de acción*

| Ítems | Significados | Estrategias |
|---|---|---|
| 1 | Operador | No aplica |
| 2 | Operador | No aplica |
| 3 | Basic Operational | Computacional |
| 4 | Basic Operational | Simetría de la igualdad |
| 5 | Basic Relational | Computacional |
| 6 | Advance Basic Relational | Simetría de la igualdad |

Para finalizar con la sesión 1, se conforman los equipos de trabajo. Se les indica que cuando resuelvan las actividades, se comuniquen en una sesión en *Google Meet* y que deben de grabar la reunión. Luego, cuando hayan finalizado, en *Google Classroom* debe estar habilitado un espacio donde cada equipo sube las evidencias, es decir, el video y las respuestas de la hoja de trabajo. Para realizar y entregar esta tarea disponen de un día. En la tercera sesión se retoman algunas de sus estrategias y comienza la dinámica de la situación de validación.

**Situación de formulación**

La situación de formulación consiste en el trabajo en equipo en la resolución del problema. En este momento la comunicación entre los integrantes es relevante para que se compartan ideas y se lleve a cabo el aprendizaje. La forma de trabajo es de manera asíncrona entre los alumnos y el docente. La evidencia se obtiene con las respuestas del apartado II y III de la hoja de trabajo y de la videograbación de los estudiantes cuando se reúnan para resolver las actividades.

Ahora bien, el apartado II se estructura con 7 ítems, cada uno contiene instrucciones y preguntas a resolver. Los ejercicios que se presentan tienen como propósito conducir a los discentes a visualizar un pensamiento relacional en ciertas sentencias.

En los ítems a), b), c), d) y e) se exhibe un tipo de sentencia en las que tienen mínimo un espacio en blanco para responder. De manera general se establece que los alumnos determinen el valor que corresponde en cada lugar asignado. Además, deben de formular tres procedimientos para cada ejercicio. La finalidad de solicitar tres maneras de llegar a la solución es con relación a las respuestas que ofrecieron en el cuestionario de la dimensión cognitiva.

A continuación, se describen tres posibles procedimientos que corresponde a tres estrategias diferentes: computacionales, reagrupación y compensatorias que pueden proponer los equipos para el ítem a). También, en el orden en el que se presentan es el esperado de observar en las hojas de trabajo de los estudiantes. Cabe mencionar, que las formas de solución aquí expuestas son aquellas que contemplan la sentencia de manera global; sin embargo, es probable que no comprendan completamente la estructura de la sentencia o indiquen un valor incorrecto en el espacio a completar. Esto puede deberse a que este razonamiento se muestra arraigado en algunos alumnos y consiste en la forma inmediata de comprender un ejercicio con estructura similar. En consecuencia, el significado que exterioricen se cataloga como sentido operativo.

En el ítem a) se esperan los siguientes procedimientos. El primero, consiste en dividir la sentencia original en sentencias más sencillas del tipo $a + b = c$. En este sentido, se hace uso de estrategias computacionales para calcular la suma de los elementos de cada miembro de la igualdad para después comparar ambos resultados (Figura 70). Este tipo de razonamiento se puede clasificar como *Advance Basic Relational* respecto a los significados de Singh & Kosko (2017).

**Figura 70**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias de cómputo*

$$\underbrace{89 + 77} = \underbrace{88 + 76} + \square$$

$$89 + 77 = 166$$

$$88 + 76 = 164$$

$$166 = 164 + \square$$

$$166 = 164 + 2$$

Luego, el segundo procedimiento puede ser que reagrupen los elementos de cada miembro de la sentencia en unidades y decenas (Figura 71). De tal manera que comparen las decenas en ambos miembros y la diferencia entre las unidades es el valor que indican en el espacio. Esta estrategia es denominada como reagrupación de unidades y decenas de acuerdo con Singh & Kosko (2017) y señala un significado *Pseudo-relational*.

**Figura 71**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias de reagrupación de unidades y decenas*

$$80 + 70 + 9 + 7 = 80 + 70 + 8 + 6 + \square$$

$$80 + 70 + 9 + 7 = 80 + 70 + 8 + 6 + 2$$

Y el tercero, es para incitar a la reflexión y que muestren una justificación que se pueda distinguir como *Advance Basic Relational*. Esta estrategia consiste en comparar cada elemento del miembro izquierdo con los del miembro derecho, observar su diferencia y compensar en el miembro respectivo. Por ejemplo, el 89 con el 88 y el 77 con el 76 (Figura

72). Uno es mayor al otro en una unidad, así para equiparar la sentencia se agrega +2 en el miembro donde se requiere. A este tipo de estrategias se les conoce como compensatorias.

**Figura 72**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias compensatorias*

$$+1$$

$$89 + 77 = 88 + 76 + \square$$

$$+1$$

En cuanto al ítem b), la primera forma esperada de solución consiste en sumar los elementos de cada miembro de la igualdad. Luego, comparar su diferencia y agregarla en el miembro derecho para mantener la equivalencia. Para establecer los elementos de los espacios restantes, establecen una relación de manera que se añada el mismo valor en ambos miembros. Una posible respuesta es la que se muestra en la Figura 73. A esta forma de solución expuesta manifiesta un nivel de significado *Basic Relational.*

**Figura 73**

*Procedimiento de resolución de significado Basic Relational*

$$\begin{array}{r} 63 \\ +\ 24 \\ \hline 87 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 42 \\ \hline 55 \\ +\ 32 \\ \hline 87 \end{array}$$

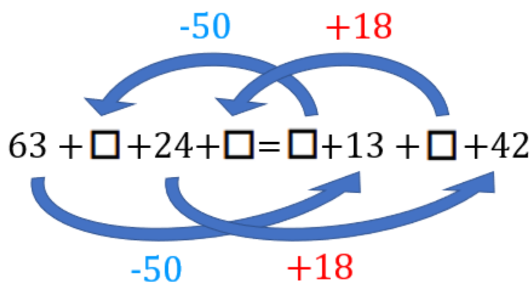
$$63 + \square + 24 + \square = \square + 13 + 32 + 42$$

$$63 + 16 + 24 + 4 = 20 + 13 + 32 + 42$$

El segundo procedimiento, reside en emplear estrategias compensatorias como ya se han descrito en las soluciones del ítem anterior. Para esta sentencia, se establecen relaciones entre los elementos conocidos de ambos miembros. La información que obtengan de esto se utiliza con los espacios en blanco para determinar el valor. Por ejemplo, al comparar el 63 se observa que es menor 50 unidades al 13, entonces, la siguiente relación que se compare debe tener una diferencia de 50 donde el valor mayor debe estar en el lado derecho para mantener la equivalencia (Figura 74). Esta deducción se utiliza para los elementos restantes. Esta estrategia corresponde a un significado *Full Relational*.

**Figura 74**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias compensatorias*




$$63 + 1 + 24 + 19 = 51 + 13 + 1 + 42$$

Respecto a la tercera forma de resolver la sentencia, radica en aplicar la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa). En esta sentencia, consiste en indicar los elementos conocidos del miembro derecho en el lado izquierdo y viceversa. Así, la justificación reside que en ambos lados se encuentran los mismos elementos sin la necesidad de realizar cálculos para verificar la sentencia (Figura 75). Esta forma de solución se distingue como *Expresión de una equivalencia* de Molina (2006) porque utiliza una propiedad de la igualdad.

**Figura 75**

*Procedimiento de resolución utilizando la propiedad de adición para la igualdad*

$$63 + 13 + 24 + 42 = 63 + 13 + 24 + 42$$

En el c) la estructura de la sentencia es del tipo $a + b = c + d$ donde $a$ y $d$ son valores desconocidos. Asimismo, se añade la condición que cada número a colocar en los espacios debe ser diferente de cero. La intención es provocar que los estudiantes empleen estrategias compensatorias en los dos miembros de la igualdad.

La primera manera de solución de este ítem evidencia un significado *Basic Relational*. Se refiere a dividir la sentencia en dos más sencillas con configuración $a + b = c$. Se establece un número mayor a los elementos que proporciona la sentencia de tal manera que solo agregan la diferencia para completar tal valor. Por ejemplo, sea $c = 47$, entonces los elementos en la sentencia serían 46 y 19 como se muestra a continuación: $19 + 28 = 46 + 1$ (Figura 76).

**Figura 76**

*Procedimiento de resolución de significado Basic Relational*

$$46+\boxed{1}=47 \qquad \begin{array}{r} 47 \\ -\ 28 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\boxed{19}+28=47$$

$$46+1=19+28$$

El segundo procedimiento, consiste en emplear la estrategia de reagrupación en decenas y unidades. En particular, el 28 como 20 + 8 y el 46 como 40 + 6 (Figura 77). Así, comparan decenas con decenas y unidades con unidades en cada miembro para agregar 20 en el lado izquierdo y 2 en el lado derecho como los elementos restantes. Esta estrategia se ubica en un significado *Pseudo-relational*.

**Figura 77**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias de reagrupación de unidades y decenas*

$$\square+28=46+\square$$
$$\square+20+8=40+6\ \square$$
$$20+\ 20+8=40+6+2$$

Y la tercera forma de solución, reside en aplicar estrategias compensatorias. Para este ejercicio, se relaciona los elementos de cada miembro. Se determina su diferencia y esta información es utilizada para aplicarla en los valores correspondientes de tal forma que uno sea mayor al otro en 18 unidades (Figura 78). Una posible respuesta es la que se muestra enseguida. Cabe mencionar que esta estrategia muestra un significado *Full Relational*.

**Figura 78**

*Procedimiento de resolución utilizando estrategias compensatorias*

$$\underset{+18}{\overset{+18}{19 + 28 = 46 + 1}}$$

El d) es el último ítem donde se incluye una sentencia numérica. La estructura es del tipo $ax + b = c$. Este ejercicio introduce a ecuaciones lineales de una variable sin utilizar letras como incógnitas. Los elementos conocidos son $a$, $b$ y $c$. Hasta este momento la variable $x$ se representa con $\square$.

El primer procedimiento, se considera que realicen una sustitución de diferentes valores en $\square$ y después aplicar los cálculos que indica la sentencia, es decir, multiplicar por 7 y al resultado sumarle 48 (Figura 79). La forma de solución utiliza la tabulación de valores y como el alumno observa la sentencia de manera unidireccional corresponde al significado *Basic Operational*.

**Figura 79**

*Procedimiento de resolución de significado Basic Operational*

$$\begin{aligned}
7 \cdot 9 + 48 &= 111 \\
7 \cdot 10 + 48 &= 118 \\
7 \cdot 11 + 48 &= 125 \\
7 \cdot 12 + 48 &= 132 \\
7 \cdot 13 + 48 &= 139
\end{aligned}$$

El siguiente procedimiento esperado reside en utilizar la transposición de términos para calcular el valor del espacio. En otras palabras, se refiere al conjunto de reglas que se emplean para despejar la incógnita en una ecuación lineal y con ello conocer el valor (Figura 80). Este tipo de respuesta muestra un significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 80**

*Procedimiento de resolución utilizando la transposición de términos*

$$7\cdot\square+48=139$$
$$7\cdot\square=139-48$$
$$7\cdot\square=91$$
$$\square=\frac{91}{7}$$
$$\square=13$$

En cuanto a la tercera forma de solución, radica en aplicar las propiedades de adición y multiplicación para la igualdad en los términos de la sentencia (Figura 81). Determinar qué realizar depende de deducir la manera de efectuar los pasos inversos del primer procedimiento. En este caso, el valor a determinar es inmediato sin la necesidad de realizar prueba y error. De acuerdo con las características de esta respuesta, hace alusión a un significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 81**

*Procedimiento de resolución utilizando las propiedades de la igualdad*

$$\begin{array}{r} 139 \\ -\ 48 \\ \hline 91 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 13 \\ \hline 7 & 91 \\ & 21 \\ & \ \ 0 \end{array}$$

$$7\cdot{\color{red}13}+48=139$$

El e) consiste en un conjunto de preguntas que recapitulan las formas de solución del ítem anterior. Tales cuestionamientos plantean que los alumnos comparen los procedimientos que utilizaron estableciendo cuál fue el más y menos de su agrado, que enlisten los pasos partiendo desde el miembro derecho y también del izquierdo y que determinen alguna relación entre los mismos.

En cuanto a estas preguntas, se espera que respondan que el tercer procedimiento es más de su agrado debido a que se establece de manera más sencilla el valor de □ en la sentencia en comparación que si se parte desde la izquierda. En este sentido, lo que se espera es que indiquen que el procedimiento de menor agrado fue el primero porque se debe intentar varias veces hasta conocer el valor que cumple con la sentencia.

Enseguida, se muestra una tabla que permite facilitar la comparación entre cada forma de proceder para determinar el valor de □ dependiendo del cuál lado se comience de la sentencia. Además, se agregan preguntas que permiten involucrar las variables como sustitución de □.

Para concluir con el apartado II, se cotejan dos maneras de representar la sentencia del e). Una, se asigna un □ para representar el valor desconocido y la otra, la letra $x$. También, se agregan preguntas para que justifiquen si es válido hacer tal sustitución.

Luego, se alude al procedimiento para determinar el valor desde el lado derecho, pero ahora desde una ecuación lineal, es decir, la igualdad con variables en lugar de □. Solo se ejemplifica el primer paso para que sea el detonador de la forma de comprender el ejercicio y a través de algunas preguntas se orienta al estudiante durante el proceso.

El f) es una pregunta tomada de Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil & Stephens (2007) con el propósito de fomentar las “letras” en las sentencias como variables. La estructura del cuestionamiento es presentar dos ecuaciones. La segunda ecuación tiene una transformación atípica al procedimiento usual para determinar el valor de la variable, de tal manera que es equivalente a la primera. La idea es desviar la atención del alumno en recordar los pasos para calcular el valor de la variable de una ecuación y que mediante otros recursos establezca que es la misma solución para ambas.

De acuerdo con Alibali et al., (2007) se esperan dos tipos de respuestas al respecto:

> we expected that students who viewed the equal sign as representing a relationship between quantities would recognize that the transformation performed on the second equation of each pair preserved the quantitative relationship expressed in the first equation of each pair, and thus conclude that the solution to each member of the pair of equations is the same. (p. 226)

Esto quiere decir que los alumnos que tienen un significado *Expresión de una equivalencia* distinguen que la transformación atípica de la segunda ecuación no afecta en el valor de la variable, incluso, determinan que es el mismo valor pues son ecuaciones equivalentes.

El segundo tipo de respuesta consiste en expresar que el valor de la variable de las dos ecuaciones no es el mismo indicando que la estructura es diferente y no contemplen que los elementos agregados en cada miembro. Por tanto, esta respuesta es evidencia del significado *Operador* pues no logran determinar la equivalencia entre las ecuaciones planteadas.

También, se incluye el g) para continuar fomentando las “letras” como variables. Este ejercicio muestra una sentencia algebraica empleando la propiedad reflexiva de la igualdad. Se cuestiona si es correcto escribir esa sentencia y la justificación de la respuesta. Se espera que aquellos estudiantes que tengan un significado *Expresión de una equivalencia* indiquen que es válido escribir una sentencia con esa estructura porque los elementos de cada miembro son los mismos. Mientras que los que poseen un significado *Operador*, tratan de despejar la variable para determinar el valor a través de diferentes métodos y concluyen que no es válido escribir una sentencia de esa forma.

En cuanto al apartado III, se constituye por un problema que plantea un procedimiento algebraico incompleto para determinar el valor de la variable. Además, incluye contexto en prosa para darle significado al problema. En el procedimiento se realiza una transformación atípica a la manera usual de resolver este tipo de ecuaciones y se hace un uso arbitrario de las propiedades de la igualdad. La finalidad es que el alumno interprete la lógica del procedimiento y, además, identifique el error cometido para que así continúe con el método establecido para determinar el valor de la variable.

En este sentido, se esperan dos posibles respuestas. Una, es que se adapten a los primeros pasos que se enuncian en el problema y que continúen con el procedimiento. Y la otra, consiste en que recuerden la transposición de términos que posiblemente fue enseñada en el nivel secundaria.

De la misma manera que en la situación anterior, se añade el esquema que representa la forma en la que se diseñó cada ítem y la idea acerca del sentido bidireccional que pretende abordar. El fundamento de la situación de formulación se estructura con la Figura 82, Figura 83 y Figura 84 que se indican a continuación:

**Figura 82**

*Esquema del trasfondo de la situación de formulación*

II. Reunidos en equipos determinen los números que van en los $\square$ de cada una de las sentencias que se muestran a continuación y describan tres procedimientos de solución. Los tres procedimientos de cada sentencia deben de ser diferentes entre sí. Expliquen lo más extensa y detalladamente posible.

a) $89 + 77 = 88 + 76 + \square$

Los números de la sentencias fueron seleccionados para fomentar la identificación de características entre los elementos de los miembros, es decir, observar que en el miembro izquierdo es mayor a 1 en comparación con los elementos del miembro derecho

La sentencia tiene configuración de Full relational de Singh & Kosko (2017) a+b=c+d en donde a y d son espacios en blanco. La modificación es orientada a elevar la complejidad de deducir la propiedad conmutativa de la suma al intercambiar los elementos de cada miembro

b) $63 + \square + 24 + \square = \square + 13 + \square + 42$

c) En esta sentencia se debe de cumplir la condición de que los valores en los espacios deben de ser diferentes a 0.

$$\square + 28 = 46 + \square$$

El diseño de esta sentencia está en fomentar estrategias compensatorias de la clasificación de Singh & Kosko (2017) al establecer relaciones entre los elementos

La estructura de esta sentencia es la más cercana a una ecuación lineal de una variable y desencadena la reflexión acerca del sentido bidireccional del signo igual con las preguntas del siguiente ítem

d) $7 \cdot \square + 48 = 139$

e) Utilicen los tres procedimientos que plantearon en el ejercicio d) para responder a las siguientes preguntas.

¿Cuál procedimiento les gustó más para determinar el valor de $\square$? ¿por qué?

¿Qué operaciones tuvieron que realizar para que el valor de $\square$ fuera el correcto para determinar el otro elemento de la sentencia, es decir, con 139?

¿Se puede conocer el valor de $\square$ si se parte desde 139?, es decir, ¿Qué operaciones se le debían de realizar a 139 para determinar el valor faltante?

¿Qué diferencia encuentran con los pasos para determinar el valor de $\square$ partiendo desde el lado izquierdo con los del lado derecho de la sentencia?

Estas preguntas ayudan a la reflexión de los procedimientos plasmados en el ítem anterior. Además, se enfatiza en los pasos partiendo desde el lado derecho en comparación con los del lado izquierdo de tal manera que puedan determinar algunas características

**Figura 83**

*Segunda parte del esquema del trasfondo de la situación de formulación*

A continuación, se presenta una tabla que organiza los pasos sugeridos para obtener el valor de □ en la sentencia del inciso d) considerando el lado que se comience a realizar los cálculos. La orientación de las flechas del centro indica el orden para proceder a calcular el elemento faltante en la sentencia con relación a su respectivo lado.

Se hace un resumen de los procedimientos planteados en las anteriores preguntas mediante la tabla para que sea más sencillo identificar las características de cada procedimiento

| Lado izquierdo | | Lado derecho |
|---|---|---|
| Multiplicar por siete el valor del espacio en blanco | ↓ ↑ | Comprobar que el valor del espacio en blanco cumpla con las condiciones de la sentencia |
| Luego, al resultado de esa multiplicación sumarle 48 | | El resultado de esa operación dividirlo entre 7 |
| Comprobar que sea igual a 139 | | Restar 48 a 139 |

¿Qué papel desempeña el □ en la sentencia?

¿De qué otra manera se podría representar? Es decir ¿Qué símbolo podría sustituir el □?

Conforman la transición del espacio en blanco a variables como $x$

Ahora, retomando la tabla de procedimientos con lo expresado en la pregunta anterior. Realizando una comparativa de diferentes maneras de representar las sentencias, una opción es la siguiente:

| | |
|---|---|
| $7 \cdot \square + 48 = 139$ | $7 \cdot x + 48 = 139$ |

¿Es válido sustituir el □ de la sentencia de la izquierda con la letra $x$? ¿Por qué?

Si por alguna razón al estudiante no se le ocurre de qué manera puede ser sustituido el espacio se le sugiere la alternativa esta alternativa

Se alude a los pasos del lado derecho para involucrar el sentido bidireccional en la ecuación lineal

Prosiguiendo con la aplicación de los pasos para determinar el valor indicado partiendo desde el lado derecho, el primer paso es restar 48 a 139, esto traducido en la sentencia quedaría de la siguiente manera:

$$7 \cdot x + 48 = 139 - 48$$

¿Cómo influye el agregar el -48 en el lado derecho con el resto de la sentencia? ¿El valor de $x$ sigue siendo el mismo?

Si también se agrega -48 en el lado izquierdo como se muestra a continuación:

Relacionado con los procedimientos formulados en los ítems anteriores, esta pregunta plantea la manera que repercute agregar elementos a la ecuación con el valor de $x$

$$7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$$

¿Cómo se restructura la sentencia? ¿El valor de $x$ es el mismo que en la sentencia $7 \cdot x + 48 = 139 - 48$?

¿Cuáles son los procedimientos siguientes para determinar el valor de $x$ de $7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$? Explica detalladamente

Luego, se añade -48 en el miembro izquierdo para que el estudiante observe el cambio que genera en la ecuación y en el valor de $x$

Por último, una vez presentada la idea del procedimiento se le solicita que el alumno continúe la solución con la lógica ya mostrada

**Figura 84**

*Tercera parte del trasfondo del esquema de la situación de formulación*

f) Respondan a la siguiente pregunta.

¿El valor de $w$ es el mismo en las siguiente dos ecuaciones?

| $2 \cdot w + 15 = 31$ | $2 \cdot w + 15 - 9 = 31 - 9$ |
|---|---|

Expliquen detalladamente su razonamiento.

> Este ítem es adaptado del trabajo de Alibali et al. (2007) en la que se utiliza ecuaciones equivalentes con una transformación atípica a la resolución para que los alumnos justifiquen mediante la visión global de las dos ecuaciones

g) Contesta las siguientes preguntas acerca de la sentencia que se muestra a continuación.

$$8x + 14 = 14 + 8x$$

¿Es correcto escribir esta sentencia? ¿Por qué? Explica detalladamente.

> Este ejercicio evidencia la propiedad reflexiva del signo igual, la cual, es relevante para fomentar el sentido bidireccional. La idea es que el estudiante recurra a otras estrategias que no sean computacionales para señalar que es correcto escribir este tipo de sentencias

III. Lean el problema y contesten lo que se les pide.

Carlos está resolviendo el siguiente ejercicio que le dejó su profesor de matemáticas de tarea:

$$6(6)(50)(3) = (3)(2(5) + 2x)$$

Cuando comenzó, notó que llegó a un punto en la resolución en el que ya no pudo continuar.

$$6(6)(50) + 10 = 2(5) + 2x$$

$$6(6)(50) + 10 - 10 = 2(5) + 2x - 10$$

Analiza detalladamente el procedimiento de Carlos y sugiérele una estrategia para determinar el valor de la variable desde el punto del procedimiento donde se quedó, es decir, continua el procedimiento de Carlos.

> El problema planteado consiste en comprender la lógica detrás del método de solución empleado para después indicar el error cometido, es decir, que se agregó un elemento a un solo miembro de la igualdad para después corregirlo y continuar el procedimiento hasta determinar el valor de $x$

Por último, en la Tabla 4 se presenta de manera sucinta los significados que se promueven, así como el tipo de estrategias y las propiedades de la igualdad que se favorecen en cada uno de los ítems de los apartados II y III. Posteriormente, en el análisis a posteriori se retoma los elementos de la tabla para expresar las producciones de los estudiantes.

**Tabla 4**

*Significados, estrategias, propiedades de la igualdad y formas de solución que se promueven en los apartados II y III*

| Apartados | Ítems | Significados | Estrategias, propiedades o formas de solución |
|---|---|---|---|
| II | a | Advance Basic Relational | Computacional |
| | | Pseudo-relational | Reagrupación |
| | | Advance Basic Relational | Compensatoria |
| | b | Basic Relational | Cálculos aritméticos |
| | | Full Relational | Estrategias compensatorias |
| | | Expresión de una equivalencia | Propiedad de adición para la igualdad (Conmutativa) |
| | c | Basic Relational | Cálculos aritméticos |
| | | Pseudo-relational | Reagrupación |
| | | Full Relational | Compensatorias |
| | d | Basic Operational | Tabulación |
| | | Expresión de una equivalencia | Transposición de términos |
| | | Expresión de una equivalencia | Propiedad de adición y multiplicación para la igualdad |
| | e | Expresión de una equivalencia | Propiedad de adición y multiplicación para la igualdad |
| | f | Expresión de una equivalencia | Propiedad de adición para la igualdad |
| | g | Expresión de una equivalencia | Propiedad reflexiva de la igualdad |
| III | Expresión de una equivalencia | | Propiedad de adición y multiplicación para la igualdad |

**Situación de validación**

La situación de validación se refiere a un momento de debate entre el grupo donde exteriorizan las estrategias que han implementado de forma individual y en equipos para la resolución de la situación. Durante cada explicación los alumnos deben de sustentar con argumentos sus ideas, que son evaluadas por sus compañeros con el propósito de aprobar tales razonamientos.

Esta sesión es de manera síncrona y se lleva a cabo después de que los estudiantes hayan subido a *Google Classroom* sus videos y documentos de la hoja de trabajo. El docente selecciona el trabajo de cuatro equipos. Dos que tengan respuestas orientadas al sentido operativo o que utilicen estrategias de cómputo y dos más, con características del pensamiento relacional.

A través de una reunión en *Google Meet*, en la que están presente tanto el grupo como el docente. Un integrante de cada equipo expone al resto de sus compañeros sus respuestas y mediante participaciones de los compañeros pueden cuestionar los procedimientos y resultados que se presente. El docente es el moderador de la sesión, y coordina y motiva las intervenciones.

El propósito es que con en el diálogo tanto los equipos participantes como el resto del grupo identifiquen sus errores, si es el caso, o los diferentes razonamientos de sus compañeros para establecer relaciones entre la aritmética y el álgebra mediante el signo igual.

**Situación de institucionalización**

La situación de institucionalización atañe únicamente al docente y acontece cuando los estudiantes ya han debatido sus estrategias con sus compañeros y, además, han construido algún aprendizaje al respecto. Entonces, el profesor retoma algunas ideas que han sido señaladas durante las sesiones anteriores, evidencia el trasfondo y objetivo de la situación didáctica y formaliza el saber preestablecido.

En este sentido, en una sesión posterior, de manera síncrona a través de *Google Meet,* se recapitulan algunas ideas que hayan mencionado los estudiantes durante la reunión previa. Se destacan aspectos importantes sobre el pensamiento relacional a manera de introducción de la clase.

Después, se institucionalizan los axiomas de la igualdad (Vance, 1986, p. 19) y se presentan algunos ejemplos en contextos aritméticos y algebraicos correspondientes, como se muestra a continuación:

Axioma I. Reflexividad de la igualdad.

Para todo $a$ en $\mathbb{R}$, $a = a$

Ejemplos

| Contexto aritmético | Contexto algebraico |
|---|---|
| $5 = 5$ | $x = x$ |
| $11 - 9 = 11 - 9$ | $x - 4 = x - 4$ |

Axioma II. Simetría de la igualdad.

Para todo $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$, entonces $b = a$

Ejemplos

| Contexto aritmético | Contexto algebraico |
|---|---|
| $5 + 3 = 8 \therefore 8 = 5 + 3$ | $11 + x = 25 \therefore 25 = x + 11$ |

Axioma III. Transitividad de la igualdad.

Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Ejemplos

| Contexto aritmético | Contexto algebraico |
| --- | --- |
| $3(2+4)+5=3(6)+5=18+5=23$ | $5(3x+1)+9=15x+5+9=15x+14$ |

Axioma IV. Propiedad de adición para la igualdad.

Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a=b$, entonces $a+c=b+c$

Ejemplos

| Contexto aritmético | Contexto algebraico |
| --- | --- |
| Sea $a=4$, $b=3+1$ y $c=2$ | Sea $a=x$, $b=13$ y $c=7$ |
| $4=3+1$ | $x-7=13$ |
| $4+2=3+1+2$ | $x-7+7=13+7$ |

Axioma V. Propiedad de multiplicación para la igualdad.

Para todo $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, si $a=b$, entonces $a\cdot c=b\cdot c$

Ejemplos

| Contexto aritmético | Contexto algebraico |
| --- | --- |
| Sea $a=4$, $b=3+1$ y $c=2$ | Sea $a=-2x$, $b=9$ y $c=\frac{1}{3}$ |
| $4=3+1$ | $-3x=9$ |
| $(4)2=(3+1)2$ | $(-3x)\frac{1}{3}=(9)\frac{1}{3}$ |

De la misma manera, se exterioriza el procedimiento para la resolución del problema del apartado III utilizando la herramienta de *Jamboard* para tener un pizarrón virtual donde se pueda explicar la solución. Asimismo, los estudiantes pueden señalar desde sus dispositivos los puntos donde tengan dudas.

Por último, se plantean algunas preguntas a los alumnos sobre qué significados tiene el signo igual, qué usos se le puede dar y cómo influyen en las ecuaciones lineales de una variable. La finalidad es cotejar con las respuestas de la dimensión cognitiva y observar la manera en que ha influido el desarrollo de la situación didáctica.

### *4.2.4. Prueba piloto*

Una vez que se realizó la concepción y el análisis a priori de la situación didáctica, se prosiguió a implementar una prueba piloto para observar el desempeño del instrumento en la práctica. Los aspectos para considerar son la claridad de las instrucciones, los tiempos estimados para cada actividad y el desarrollo de la parte tecnológica para las sesiones síncronas y asíncrona.

El pilotaje se llevó a cabo con cuatro estudiantes de segundo semestre del Bachillerato No. 33 de la Universidad de Colima. Estos alumnos tienen condiciones similares con los discentes con el que se realizó la experimentación porque pertenecen a otro grupo alterno del mismo docente titular.

La preparación previa para el desarrollo de la sesión 1 síncrona, consistió en enviar el apartado I de la situación didáctica por correo un día antes para que así ya tuvieran los estudiantes el material necesario. Luego, para el momento de la primera sesión se grabó la sesión mediante dos herramientas tecnologías: la que proporciona *Google Meet* y con una capturadora de pantalla para no tener fallas en la evidencia en video.

En cuanto a la sesión 1 corresponde a la aplicación de la situación acción que implica establecer el contrato didáctico y efectuar la devolución entre alumno y profesor. Antes de empezar, para facilitar el entendimiento entre todos se resolvieron algunos acertijos para entrar en confianza con la clase. Después, a través de participaciones se pudo involucrar a los estudiantes en las actividades. También, como se tenía previsto, el sentido bidireccional fue exhibido por los discentes en las sentencias, pero la estructura en la que se plantea la situación propició el razonamiento y la discusión sobre otras maneras de entender el signo igual.

Cabe mencionar, que hubo aspectos para mejorar cuando se realice la experimentación. Por ejemplo, en la pregunta que incluye la sentencia $6 + \square = 4 + 7$ los alumnos detectaron ciertas diferencias con respecto a la anterior $4 + 7 = \square + 6$ como que había un intercambio entre ambos elementos del signo igual, también, que el $\square + 6$ habían cambiado de orden. Esta última característica, desviaba la atención y complejizaba la idea del sentido bidireccional del signo igual a la que se quiere llegar, por tanto, la modificación versará en conservar el mismo orden cuando se realice el cambio de los elementos en la igualdad.

Además, fue necesario incluir la pizarra *Jamboard* para esta sesión porque resultó necesario transcribir las ideas que estaban aludiendo los alumnos y con ello tener más esclarecimiento al momento de compartir opiniones y debatir acerca de la actividad. Además, para que los alumnos se vayan familiarizando con la pizarra y puedan participar de manera activa en la situación de validación.

Por otra parte, la situación de formulación diseñada para trabajar de manera asíncrona tuvo diversas peculiaridades. En la sesión anterior se formaron los equipos, en este caso se trabajó en binas para así tener dos perspectivas de las respuestas para presentarlas en la situación de validación. Para tener evidencia del trabajo realizado por cada equipo, los participantes se reunieron de manera virtual en *Google Meet* y videograbaron la reunión en esta plataforma. De esta manera, los datos fueron obtenidos a través de los videos y las hojas de trabajo.

Un punto relevante que ayudó al análisis de las respuestas que proporcionaron los estudiantes, fue la capacidad de cotejar sus hojas de trabajo con el video. Esta forma permite comprender con mayor detalle el razonamiento y la estructura que hay de fondo de las ideas de cada equipo y la manera de cómo las formularon y comunicaron con los demás integrantes, sin embargo, requiere dedicarle más tiempo a cada evidencia.

El desarrollo del trabajo independiente se dio de la manera como se tenía planeado. Los estudiantes presentaron algunas dificultades para enviar la grabación de la reunión. A través del acompañamiento mediante correos se logró que compartieran sus videos.

Acerca de las instrucciones de las actividades, se observó que en las sentencias que solicitaban tres procedimientos sucedió que utilizaron la misma lógica de una solución y solo cambiaron los números y lo plantearon como procedimientos diferentes. Esto puede modificarse de tal manera que se especifique que también deben de tener un razonamiento diferente para cada procedimiento alternativo.

Asimismo, en el apartado III ninguno de los equipos contestó de manera acertada. Cada equipo indicó que el procedimiento les resultó confuso y al revisar sus respuestas se percibe que sus errores residen en la multiplicación de expresiones. Por tanto, la adecuación consistió en plantear una ecuación que no ocasione otras dificultades y que se puede focalizar solamente en las propiedades del signo igual.

Por lo que se refiere a la sesión 3, correspondiente a la situación de validación en la que es importante el debate y la argumentación. La preparación previa para esta clase consistió en seleccionar algunos procedimientos de los alumnos y agregarlos en un documento de *Jamboard*. En este sentido, a través de esta pizarra los estudiantes explicaron sus respuestas a los demás y la discusión versó en elegir entre todos el procedimiento que mostraba menores cálculos aritméticos y un razonamiento más simple en comparación con otros.

El desempeño en la clase de los estudiantes no fue muy productivo, por tanto, la participación de los alumnos fue guiada y en ocasiones, incentivada por el docente para que explicaran su razonamiento. La causa puede deberse a que los discentes no se sintieron cómodos al establecer un diálogo mediante un ambiente virtual. Además, no estaban familiarizados con el uso de la pizarra por lo que no la emplearon para complementar sus explicaciones y solo se limitaron al medio oral.

Una posible alternativa para evitar este comportamiento puede ser agregar una dinámica recreativa antes de comenzar con la discusión de los procedimientos que consista en utilizar algunas de las herramientas de la pizarra para que los alumnos tengan mayor interés en utilizarla sin que se sientan intimidados o con la expectativa que lo puedan hacer mal y que sean juzgados por todos.

Otro punto para destacar fue el desconocimiento del docente para guiar a los alumnos en el transcurso de las filminas cuando se realizaba el debate. El suceso consistió después de que los discentes entraron al *Jamboard* y el profesor procedió a preguntar acerca de los procedimientos que se planteaban en cada pizarra, se cambió de sección y no se percató que no se trasladaba automáticamente a todos los participantes que se encontraran en el archivo de *Jamboard*, de tal manera, que mientras el docente hablaba sobre cierta pantalla los alumnos seguían en la anterior. Por tanto, para que no ocurra esta situación será necesario avisar a los estudiantes que se está cambiando de filmina para que todos puedan seguir de manera visual el desarrollo de la sesión.

Por último, la situación de institucionalización reside en establecer relaciones entre las producciones de los alumnos con el saber socialmente instituido. Para lograrlo se recapitularon algunas respuestas de los alumnos que mostraban el conocimiento de la situación didáctica pero que se debía de exhibir para que fuera identificado de manera consciente por los alumnos.

El ambiente que sucedió en la sesión 4 fue que la clase se tornó expositiva por el docente al indicar el trasfondo de las actividades y del saber implícito de las producciones de los alumnos. Una estrategia consiste en involucrar al estudiante en la clase al tomar notas, resolver los ejercicios que causaron mayor dificultad en el grupo, preguntar algunos aspectos, entre otras cosas. De tal manera, que la situación de institucionalización sea un espacio de trabajo en conjunto con los discentes recapitulando lo realizado previamente en las sesiones anteriores.

## 4.3. Fase 3. Experimentación

En esta sección se presenta la Fase 3 de la Ingeniería didáctica denominada como Experimentación. Los aspectos que se abordan son las características de los participantes desde su edad, sexo e institución a la que pertenecen. También, se incluye el contexto de la investigación que describe la adaptación que tuvo que realizar el centro educativo para continuar con las clases virtuales. Y, por último, las fuentes de información que reside en la recopilación de datos y las evidencias de cada actividad.

### *4.3.1. Participantes*

La población elegida fue de 31 estudiantes de segundo semestre del Bachillerato 33 de la Universidad de Colima. El grupo seleccionado fue el mismo al que se le aplicó el cuestionario de la dimensión cognitiva en la Fase 1 de análisis preliminares que se ubica en el apartado 4.1.2. de este trabajo.

Por otra parte, los alumnos involucrados en la situación de acción fueron 12 y tanto en formulación, validación e institucionalización, 9. En la siguiente Tabla 5 se muestra los alumnos que participaron durante los diferentes momentos de la experimentación.

**Tabla 5**

*Total de estudiantes que participaron durante la experimentación*

| Alumnos | Situación de acción | Situación de formulación | Situación de validación | Situación de institucionalización |
|---|---|---|---|---|
| Alumna 5 | | | | |
| Alumna 4 | | | | |
| Alumna 9 | | | | |
| Alumna 11 | | | | |
| Alumna 14 | | | | |
| Alumno 17 | | | | |
| Alumna 19 | | | | |
| Alumna 22 | | | | |
| Alumna 23 | | | | |
| Alumna 24 | | | | |
| Alumna 27 | | | | |
| Alumna 29 | | | | |

Para efectos del análisis la muestra quedó reducida a 9 estudiantes, ya que son los que estuvieron presentes en todas las sesiones, los cuales fueron codificados para salvaguardar la confidencialidad de sus producciones como: Alumno 1, Alumna 2, Alumna 3 y así sucesivamente. La distribución en cuanto al sexo es que el 89% es femenino y el 11% masculino. Además, las edades corresponden al 80% los que tienen 15 años y el 20% de 16 años.

Cabe mencionar, que para el apartado de análisis a posteriori y validación se mantuvo el número asignado de cada discente desde el análisis a priori, para darle continuidad en este trabajo, es decir, que se presentan respuestas, por ejemplo, la Alumna 27 se refiere a la estudiante que estuvo presente tanto en el análisis preliminar y experimentación codificada con ese número.

### *4.3.2. Contexto de la investigación*

El grupo de estudiantes seleccionados cursan el Bachillerato general, el cual, es uno de los programas que oferta la institución. El plantel es de educación pública con duración de seis semestres. La modalidad es presencial escolarizada pero debido a la contingencia sanitaria del COVID-19 realizaron adecuaciones para continuar con la formación de sus alumnos.

En este sentido, las variaciones que implementaron para mantener el desarrollo de las clases son similares a las directrices que tomaron otros centros educativos en el país. Tanto personal administrativo como docente optaron por clases virtuales, entendidas como la comunicación entre profesores y alumnos mediante una plataforma en la que es necesaria una conexión a internet.

Esta modalidad se caracteriza por ser asíncrona, donde el profesor sube los materiales y asigna actividades en la plataforma relacionados con el tema del programa de estudios a tratar en la semana y los alumnos revisan y descargan los materiales proporcionados y suben las tareas una vez terminadas. El contacto se realiza mediante la plataforma seleccionada o mediante correo electrónico.

Cabe mencionar que dependiendo de las necesidades de los estudiantes y del desarrollo del tópico matemático, se organizan sesiones síncronas mediante videollamadas para esclarecer dudas o impartir una clase donde tanto profesor como discentes coincidan en el mismo horario.

Por otra parte, la Universidad de Colima brindó cursos y herramientas para que las clases virtuales fueran más productivas. Por ejemplo, tanto alumnos como maestros poseen una cuenta *G suite* que les permite obtener varios beneficios para el trabajo escolar como la posibilidad de grabar las reuniones en *Google Meet* y tener espacio ilimitado en *Drive*, entre otras. En cuanto a los cursos, solo fueron designados hacia los profesores y consistieron en edición de video, creación de contenido digital, entre otros.

#### *4.3.3. Fuentes de información*

Esta etapa del proceso de investigación reside en la recopilación de datos a través de diferentes fuentes de información seleccionadas para el contexto virtual de enseñanza. De esta manera, es posible obtener resultados que faculten la realización del análisis a posteriori y validación de la situación didáctica.

En consecuencia, las fuentes de información elegidas son la videograbación a través de dos herramientas tecnologías: *Google Meet* y una capturadora de pantalla. Además, las producciones escritas, de los estudiantes, recopiladas durante el desarrollo de las sesiones que elaboraron tanto individual como en equipo.

En cuanto a los dilemas éticos, radican en la recolección de datos, pues como ya se mencionó videograbar las sesiones y con ello los rostros y comportamientos de los estudiantes implica evidenciar aspectos personales que involucran la privacidad entre profesor y alumnos. Además, las respuestas que puedan expresar serán analizadas y evidenciadas de acuerdo con la eficiencia de cómo resuelven las ecuaciones lineales.

Por tanto, las estrategias que se implementaron para atender los dilemas éticos son las siguientes: salvaguardar la identidad de los participantes, asegurar la codificación de cada estudiante y profesor y editar las fotografías de manera que no se comprometa dicha identidad.

### 4.4. Fase 4. Análisis *a posteriori* y validación

En esta sección se presenta el desarrollo de la Fase 4 de la Ingeniería didáctica que corresponde al análisis *a posteriori* y validación aludiendo a las situaciones didácticas como punto de partida para la descripción. El análisis se realizó mediante el conjunto de datos recolectados en la Fase 3 y la validación acontece cuando se confronta el análisis *a priori* con el *a posteriori*.

### *4.4.1. Análisis a posteriori*

En este apartado se aborda el análisis *a posteriori* de la experimentación en términos de las situaciones didácticas: Acción, Formulación, Validación e Institucionalización. A partir de ello, se describen a detalle los momentos donde se produce la devolución y algunas respuestas de los estudiantes importantes a mencionar.

Las producciones y diálogos que se muestran en las siguientes secciones se obtuvieron de las hojas de trabajo y de las videograbaciones de las sesiones con los estudiantes. Además, en cada situación se describe el propósito que se estableció, así como la estructura general de las mismas.

El análisis se realizó siguiendo el orden en el que se presentan los ítems en las hojas de trabajo y si en dado caso, las respuestas de los discentes resultan ser limitadas e insuficientes para comprender el razonamiento empleado, se consultan las videograbaciones, por tanto, en los apartados siguientes se observan evidencias como imágenes de las producciones y fragmentos de diálogo donde interactúan los integrantes de los equipos para formular la solución a las actividades.

Cabe mencionar que el objetivo de la situación didáctica es propiciar el significado “Pensamiento relacional” del signo igual en la aritmética y en álgebra, para la resolución de ecuaciones lineales de una variable. De tal manera, que el alumno observe otros significados, además del operacional, en ese contexto. Por tanto, se espera que el estudiante pueda establecer relaciones entre la aritmética y el álgebra a través del signo igual y con ello utilice dicha comprensión para resolver de manera eficaz ecuaciones lineales de una variable.

#### 4.4.1.1. Situación de acción

La situación de acción se llevó a cabo de manera síncrona en *Google Meet* en una sesión de 50 minutos. Los discentes con anterioridad tenían la hoja de trabajo correspondiente a la primera reunión. Algunos imprimieron las actividades y otros más las transcribieron a sus cuadernos. Primeramente, se les indicó que llenaran la sección de datos personales para identificar sus respuestas.

Como se describió en el análisis a priori, el primer apartado de la hoja de trabajo se estructura con seis ítems donde se aborda la configuración de dos sentencias y la manera en la que influye el signo igual para determinar los espacios en blanco en cada ejercicio. El propósito es que el alumno contemple las sentencias de manera global, es decir, que establezca el miembro izquierdo y el derecho desde la justificación que considere necesaria sin ahondar, en este momento, en estrategias específicas para el desarrollo del sentido bidireccional del signo igual.

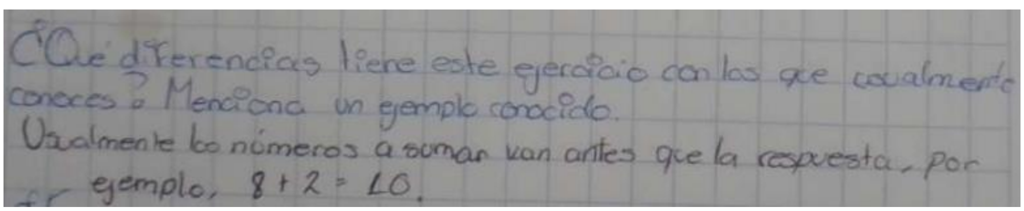
En este sentido, se prosigue con la resolución de la actividad y para ello se le pide a una alumna que lea las instrucciones de este apartado. Por lo que se refiere a la primera pregunta, consiste en que proporcionen el valor del espacio en la sentencia $\square = 4 + 7$ y que además identifiquen las diferencias de este ejercicio con los que usualmente conocen o han visto en su trayectoria escolar.

En este momento comienza a darse la devolución porque los alumnos adquieren la responsabilidad de responder al cuestionamiento planteado. Además, la sentencia presentada tiene cierto grado de complejidad que permite ser considerada como desafiante, pero sin excederse, pues de lo contrario, los discentes optarían no responder o permanecer inactivos ante la actividad.

En este ítem, los estudiantes respondieron de la forma que se tenía prevista, es decir, utilizando términos con respecto a la orientación que consideran que se debe leer una sentencia. Por ejemplo, la alumna 11 indica que la diferencia es que la "suma" va antes del signo igual y luego, la respuesta (Figura 85). También, escribe la operación $8 + 2 = 10$ como la sentencia que conoce ampliamente. Esta respuesta muestra un significado *Operador*.

**Figura 85**

*Respuesta de la alumna 11 al ítem 1 del apartado I*




Ahora bien, en la siguiente pregunta se tuvieron dos tipos de respuestas. El 78% de los estudiantes indica que el orden en el que se presentan los elementos no importa para dictaminar que la sentencia es correcta (Figura 86). Mientras que el 22%, describe que es incorrecta la forma en la que se muestran pues consideran que primero debe estar la "operación" y después el "resultado" (Figura 87). La primera respuesta se clasifica como *Basic Operational* y la segunda como *Operador*.

**Figura 86**

*Respuesta de la alumna 14 al ítem 2 del apartado I*

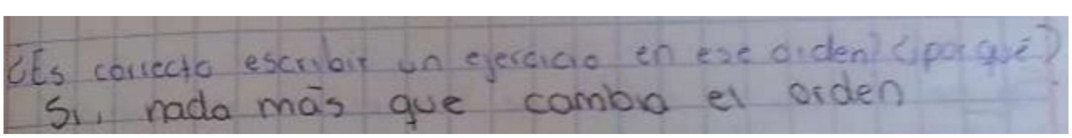
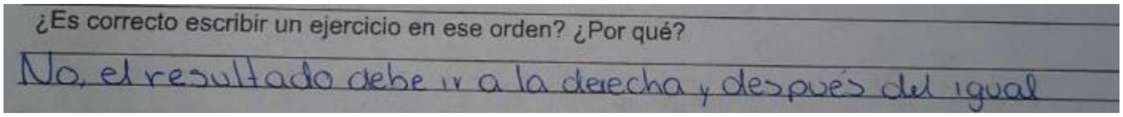


**Figura 87**

*Respuesta de la alumna 27 al ítem 2 del apartado I*


¿Es correcto escribir un ejercicio en ese orden? ¿Por qué?
No, el resultado debe ir a la derecha y después del igual

Continuando con la resolución de la actividad, se les cuestiona específicamente, cuál es el valor del espacio en blanco en la sentencia $\square = 4 + 7$. Se le pide a una discente que comunique su respuesta, a continuación, se muestra un fragmento de la conversación:

> *Profesor: ¿Cuál fue tu respuesta?*
> *Alumna 19: Podría ser 3…*
> *Profesor: ¿Por qué 3?*
> *Alumna 19: Perdón, es 11. Porque es la suma de los dos factores que nos mencionan en la suma 4 y 7.*
> *Profesor: Bien. Ahora, ¿Por qué inicialmente dijiste que la respuesta era 3?*
> *Alumna 19: Porque pensé que el 3 lo podría sumar con el 4 y daría 7 pero no porque la suma es 4+7.*

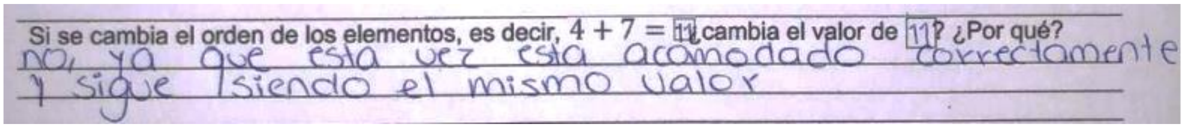
En este momento, se observa de manera predominante el significado *Operador* que se manifiesta cuando la alumna quiere leer la sentencia de izquierda a derecha tratando de dilucidar algún razonamiento lógico para que la respuesta sea 3 (Kieran, 1981). Sin embargo, la propia estructura induce a que replantee su respuesta con otra justificación que esté de acuerdo con la configuración que se le presenta. Cabe mencionar, que los demás discentes no tuvieron complicaciones con esta pregunta. Por tanto, todos los estudiantes mostraron un significado *Basic Operational*.

Después, se intercambian los elementos de la sentencia $\square = 4 + 7$ quedando como sigue $4 + 7 = \square$ y se cuestiona si este cambio influye en el valor de ésta y que justifiquen su respuesta. En este sentido, todos los estudiantes respondieron que este cambio no modificaba el valor y por tanto seguía siendo el mismo que en la sentencia anterior.

Sin embargo, el 33% de las justificaciones de los estudiantes, como la de la alumna 22 (Figura 88), da muestra que el orden en el que se presentaron los elementos los consideró como la manera correcta en la que se debe escribir una igualdad con estas características. Esta idea corresponde al significado *Operador* como señala Molina (2006) en la clasificación pues "la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha" (p. 149). Este tipo de significado del signo igual en los alumnos desencadena cierta resistencia a aceptar sentencias con configuraciones atípicas.

**Figura 88**

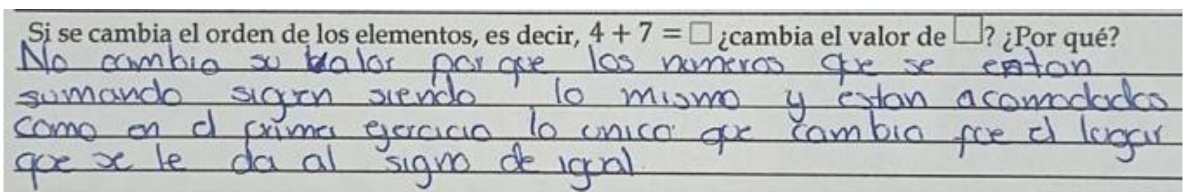
*Respuestas de la alumna 22 al ítem 4 del apartado I*


Si se cambia el orden de los elementos, es decir, $4 + 7 = \boxed{11}$ ¿cambia el valor de $\boxed{11}$? ¿Por qué?
no, ya que esta vez esta acomodado correctamente y sigue siendo el mismo valor

Por otra parte, el 67% de los discentes, como la alumna 19 (Figura 89), que respondieron que no cambiaba el valor de $\square$ aludieron que el intercambiar de miembro los elementos no es significativo para modificar tal valor de la sentencia. De tal manera, que los alumnos que mostraron este tipo de respuesta evidencian el uso de la simetría de la igualdad de manera inconsciente, lo cual, muestra un significado *Basic Operational* y es más probable que logren desarrollar explicaciones entorno al significado *Full Relational* o *Advance Basic Relational* de Singh & Kosko (2017) con otros tipos de sentencias.

**Figura 89**

*Respuesta de la alumna 19 al ítem 4 del apartado I*


Si se cambia el orden de los elementos, es decir, $4 + 7 = \square$ ¿cambia el valor de $\square$? ¿Por qué?
No cambia su ~~v~~valor porque los numeros que se estan sumando siguen siendo lo mismo y estan acomodados como en el primer ejercicio lo unico que cambia fue el lugar que se le da al signo de igual

Para los siguientes dos ítems, se realizó una modificación a la sentencia $4 + 7 = \square$ agregando $+6$ en el miembro derecho y cuestionando a los discentes sobre qué sucedía al respecto, es decir, cuál sería el valor del espacio en la sentencia.

El desarrollo de estos ítems muestra el momento más evidente donde se genera la devolución porque los alumnos expresan y confrontan sus respuestas mediante argumentos y el docente redirige sus opiniones en la búsqueda del conocimiento que desea promover en los estudiantes. Así el profesor promueve la responsabilidad de aprendizaje y observa la manera en la que el estudiante se apropia de la resolución de la actividad. En el siguiente fragmento se muestran varias ideas que acontecieron en la participación y discusión.

> *Profesor: ¿Quién tiene la respuesta a esta pregunta?*
> *Alumna 11 (Chat): El valor es 5, no es el mismo, sí cambia porque si no estaría mal y no sería igual.*
> *Alumna 19: (El valor) Sigue siendo el mismo solo que se le añadió un número para que junto con el 6 dé el mismo resultado que da la suma de 4+7.*
> *Profesor: La alumna 19 nos dice que el valor sigue siendo el mismo, pero ¿a qué número te refieres? ¿11?*

*Alumna 19: No, yo decía que el producto sigue siendo el mismo solo se le agregó un número para que junto con el 6 dé el mismo resultado que la anterior suma (4+7) 11 ¿no sé si me explique?*
*Profesor: Sí. Pero entonces, ¿cuál sería el valor del espacio?*
*Alumna 19: 5.*
*Alumna 17: ¿la respuesta correcta es 17?*
*Profesor: ¿Por qué 17?*
*Alumna 17: Porque sumé 4+7 que da 11 y más 6 da 17*
*Alumna 22: Pero el 6 está del lado del igual.*
*Alumna 4: Es 5.*
*Alumna 27: Yo digo que es 11 porque sigue siendo la misma suma de 4+7=11 solo que al resultado solo se le va a sumar un 6.*

En primer lugar, las alumnas 11 y 19 logran percibir la equivalencia en la configuración de la sentencia donde indican que el agregar $+6$ condiciona el valor del espacio en blanco. De tal manera que distinguen de manera global el miembro izquierdo y el derecho. Este tipo de respuesta se observó en el 67% de los estudiantes en la hoja de trabajo, lo cual, muestra un significado *Basic Relational*.

Por otra parte, el 33% de los alumnos mostraron respuestas con significado *Operador* como la alumna 17 proporciona con dudas si la respuesta es 17 colocando los elementos de izquierda a derecha y sumándolos entre sí para obtener un resultado con el que comúnmente considera pertinente. Esta justificación tiene réplica de la alumna 6 donde refuta la respuesta de su compañera aludiendo que el 6 está del lado derecho del igual y por tanto no es posible realizar el conjunto de cálculos aritméticos mencionados.

Y, también, la idea de la alumna 27 que radicó en el significado *Operador* pues segmenta la sentencia en dos partes sin contemplar el signo igual como punto de partida. Pues considera que inmediatamente después del signo debe estar el resultado, entonces, el agregar $+6$ lo interpreta como el indicio de continuar con otra operación, es decir, $11 + 6$ hasta obtener un resultado que pueda leerse de manera unidireccional.

Las diferentes respuestas establecidas en el ítem anterior no fueron esclarecidas en ese momento con la finalidad de retomarlas para que los propios alumnos, mediante la orientación del docente, puedan confrontar sus argumentos con la siguiente pregunta. Esta decisión está en el marco del contrato didáctico que se desea establecer en el que sean los alumnos quienes buscan las respuestas y el profesor solo actúa como guía para que los propios estudiantes puedan dilucidar el valor del espacio en la sentencia.

El ítem 6 cuestiona si al intercambiar los elementos de cada miembro al lado opuesto interfiere con el valor del espacio de la sentencia para después cotejarlo con la respuesta de la anterior pregunta. En este sentido, enseguida se muestra otro fragmento de la sesión donde algunos discentes participan y expresan sus opiniones.

*Profesor: ¿Cuál sería ahora el valor del espacio en blanco en la sentencia?*
*Alumna 19: Sigue siendo el mismo*
*Alumna 27: (El valor) Puede cambiar*
*Profesor: El "mismo" ¿a qué número se refiere?*
*Alumna 19: Al 5*
*Alumna 4: 5*
*Alumna 22: 5*
*Profesor: Alumna 27, tú habías dicho que el valor era 11 en la anterior. Ahora, si se cambian de lugar los elementos ¿sigue siendo 11 la respuesta o ya cambia el valor?*
*Alumna 27: No, puede cambiar. Puede agarrar cualquier valor y sumarle al 6. Solamente que, pienso que el igual debe representar un valor igualitario entre las dos sumas, entonces, entre 4+7 debería dar los mismo que 6 más algo.*
*Profesor: Está bien. Entonces de acuerdo con el razonamiento que mencionas, ¿cuál sería el valor en esta sentencia?*
*Alumna 27: 5+6=4+7*

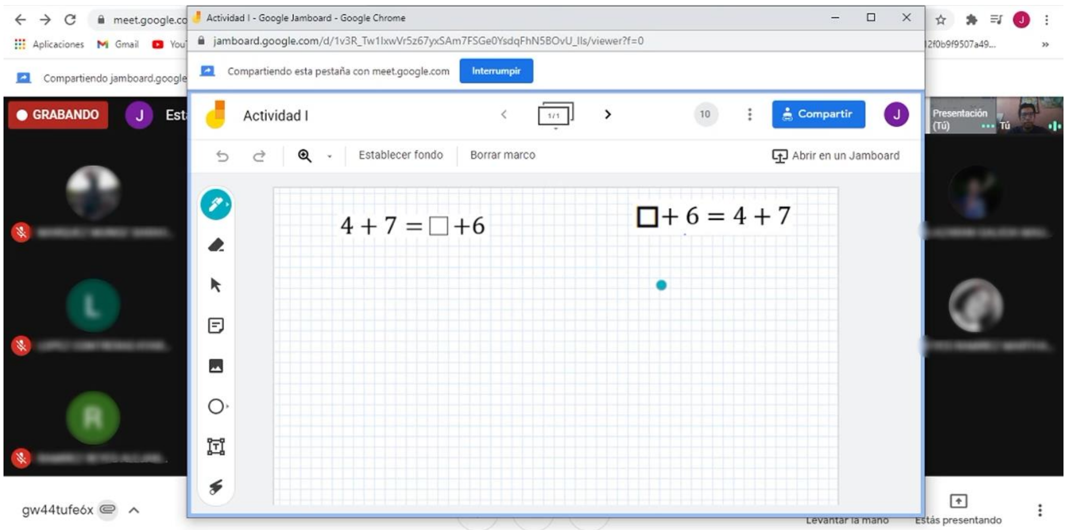
En este fragmento se hace hincapié a la respuesta de la alumna 27 pues en el último ítem muestra otra explicación diferente al ítem 6, de la misma manera que el 89% de los alumnos, al usar la simetría de la igualdad de manera inconsciente muestra un significado *Advance Basic Relational*. Además, resulta interesante analizar la evolución que tiene por sí misma al presentarle las últimas dos sentencias y cómo modifica su discurso apropiando un sentido bidireccional del signo igual. Cabe mencionar que el 11% de los estudiantes no persiste la idea de simetría de la igualdad ni de sentido bidireccional por lo que expresan que el valor de la sentencia es 11, lo cual, evidencia un significado *Operador*.

En primera instancia, menciona que el valor puede cambiar indicando que puede ser cualquier número, en este momento, puede percibirse que su primer acercamiento es sin realizar cálculos aritméticos en la sentencia, pero estableciendo relaciones entre los elementos de ambos miembros al señalar que debe ser lo "*mismo 4+7 que 6 más algo*". Luego, cuando se le pregunta sobre qué número en específico, ya proporciona la única opción posible para esa sentencia.

Por último, se optó por la decisión de socializar mediante la participación de los alumnos las diferentes ideas que plasmaron, específicamente en los dos últimos ítems, pues de la comprensión que se generara en esa sesión dependería el desarrollo de la situación de formulación. Por tanto, el docente compartió una pizarra en *Jamboard* con las dos sentencias para compararlas y que mediante esta plataforma incrementar, mediante medios visuales, la interacción con la clase (Figura 90).

**Figura 90**

*Interacción con la pizarra Jamboard con la comparación de dos sentencias*




El desarrollo consistió en recapitular los diferentes valores en los espacios en blanco que predominaron en cada ítem, es decir 11 y 5, respectivamente. Luego, se dirigieron preguntas a los estudiantes acerca de las similitudes y diferencias entre estas dos sentencias. Por último, quedó establecida la manera en la que se le debe interpretar estos ejercicios. A continuación, se muestra el fragmento del diálogo donde se alude a tal situación:

> *Profesor: Vamos a debatir sobre estas dos sentencias, las cuales, son las últimas con las que estábamos trabajando. Observen, ¿qué diferencias y similitudes hay entre estas dos sentencias? En las que algunas de sus respuestas destacaron por su frecuencia respecto a las demás. En la primera fue 11 y en la segunda 5.*
> *Alumna 4: Es la misma operación lo única que cambia es el acomodo.*
> *Profesor: Muy bien. Ahora, ¿creen que el orden afecta para que el valor del espacio de cada sentencia sea diferente?*
> *Alumna 4: No.*
> *Alumna 11: Creo que no.*
> *Profesor: ¿Por qué no?*
> *Alumna 4: Porque es la misma operación, solo cambia el orden y es la misma respuesta.*
> *Alumna 19: En mi opinión, ahí sería que el orden de los elementos no alteraba el producto. Se está sumando lo mismo.*

El cierre de la sesión aconteció con la comparación de las últimas dos sentencias en las que los estudiantes contemplaron que a pesar del orden en el que se presentan los elementos es diferente, esto no influye en el valor en el espacio indicado. Por tanto, la mayoría de los alumnos se apropian de la visualización global de las sentencias, lo cual, fue el propósito de esta sesión y un aspecto fundamental para el desarrollo de la situación de formulación.

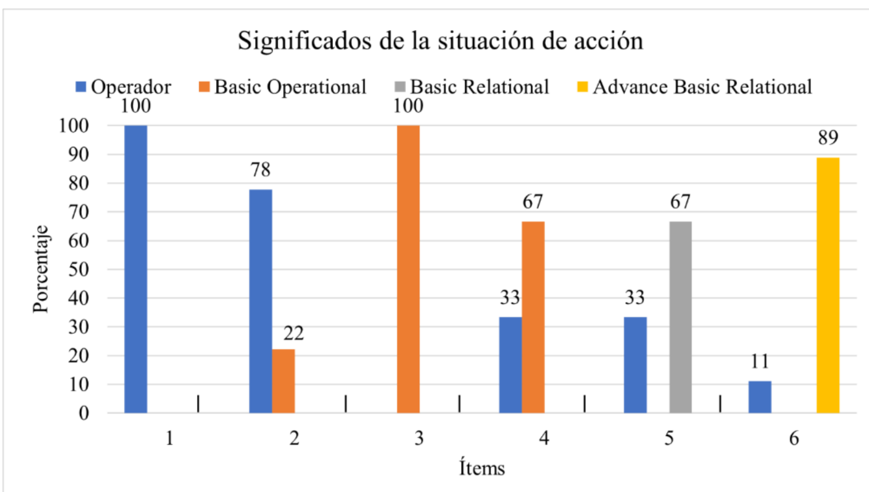
Por último, una vez que el profesor estuvo seguro de la existencia de la devolución, es decir, certificó de que se han comprendido las instrucciones y que los alumnos aceptaron su responsabilidad para resolver las situaciones propuestas, se plantean las indicaciones para trabajar de manera asíncrona con las hojas de trabajo, la manera de realizar las videograbaciones y la forma de compartir las evidencias de su trabajo en equipo. Además, de indicarle el correo del docente para que puedan contactarlo en caso de dudas.

De manera general, se concluye que la distribución de los significados involucrados en la situación de acción que se muestra en la Tabla 6 es la siguiente: Tanto *Operador* como *Basic Relational* en los ítems 1 y 3, respectivamente, fue mostrado por la totalidad de los participantes. Por otra parte, se observó en el ítem 2 el *Basic Operational* en el 22% y el *Operador* en el 78%.

En el ítem 4, el 33% fue *Operador* y el 67% *Basic Operational*. Los mismos porcentajes correspondieron en el ítem 5 pero con los significados *Operador* y *Basic Relational*. Y, en el ítem 6, se obtuvo el significado *Operador* en el 11% y *Advance Basic Relational* en el 89%.

**Tabla 6**

*Significado de la situación de acción*




En cuanto a las explicaciones que utilizaron propiedades, específicamente en el ítem 4, todos los estudiantes justifican sus respuestas mediante el uso de la simetría de la igualdad, aunque no de manera consciente. Por lo que se refiere a las estrategias, de acuerdo con la estructura de la situación de acción, en el ítem 5 se observa que el 100% de los alumnos utilizan estrategias computacionales para responder las preguntas planteadas.

#### 4.4.1.2. Situación de formulación

La situación de formulación se realizó de manera asíncrona mediante equipos de tres integrantes. Se optó por el trabajo en equipo para permitir que los estudiantes pudieran en efecto, tal como lo sugiere esta situación comunicar información por lo que deben de "modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar" Gálvez (1994). Esencialmente, es considerar como propósito el trabajo en equipo para promover que los discentes comuniquen información.

En este sentido, los estudiantes se reunieron mediante *Google Meet* para videograbar la interacción con la resolución del apartado II de la hoja de trabajo. La evidencia en esta sesión consistió en sus producciones escritas y el video de la reunión. También, se les indicó que podrían contactar al profesor mediante correo para cualquier aclaración o duda que se les presentara. Los equipos quedaron conformados como se muestra en la siguiente Tabla 7:

**Tabla 7**

*Organización de los equipos*

| **Equipo 1** | **Equipo 2** | **Equipo 3** |
|---|---|---|
| Alumna 11 | Alumna 4 | Alumna 19 |
| Alumna 24 | Alumna 22 | Alumna 14 |
| Alumna 9 | Alumno 17 | Alumna 27 |

El segundo apartado de la hoja de trabajo se estructura por 7 ítems con diferentes ejercicios a resolver. También, en este momento se incluye el apartado III de las actividades. El propósito es que los alumnos mediante diferentes configuraciones de diversas sentencias numéricas logren establecer estrategias compensatorias que les permitan comprender el signo igual de manera bidireccional.

La forma de trabajo que siguieron los equipos fue la de compartir pantalla en la reunión para que las actividades fueran visibles para todos los participantes, así de esa forma los demás compañeros lograron estar al tanto sobre qué ítems se resolvían. Y, un integrante se dedicó a transcribir en la hoja los procedimientos que acordaron previamente mediante el diálogo; es decir, sus formulaciones.

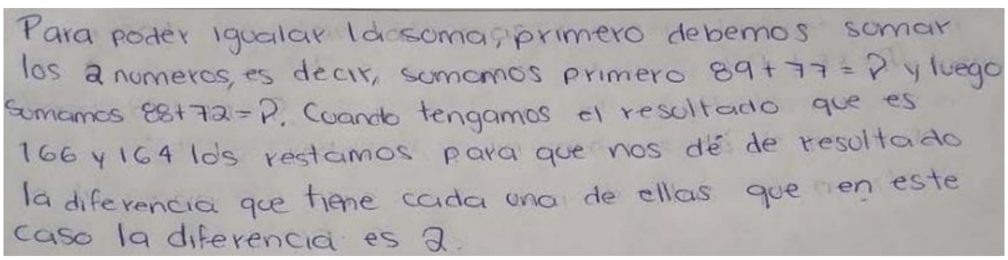
En cuanto al ítem a) del apartado II, está compuesto por una sentencia numérica con un espacio en blanco a determinar el valor correspondiente. La consigna consiste en formular tres procedimientos para resolver el ejercicio. Las tres formas de solución previamente descritas en el análisis a priori consisten, de manera general, en utilizar estrategias computacionales, de reagrupación en unidades y decenas y compensatorias, para cada una. En las producciones obtenidas por los equipos se distinguen solo dos tipos de procedimientos que a continuación se indican a detalle.

Los tres equipos formularon al menos una solución utilizando estrategias computacionales (Singh & Kosko 2017) que corresponden al 33% del total de respuestas formuladas en este ítem. Esta estrategia consiste en separar la sentencia $89 + 77 = 88 + 76 + \square$ en dos más simples: $89 + 77$ y $88 + 76$. Luego, suman los elementos de cada una y las comparan entre sí para determinar el valor faltante en el miembro derecho. De tal manera, que observan que la diferencia entre 166 y 164 es 2 y, por lo tanto, ése es el número del espacio en la sentencia.

En la Figura 91, Figura 92 y Figura 93 se puede observar las respuestas de los tres equipos que utilizaron tal estrategia que se ubican en el significado *Advance Basic Relational*. Esto porque aceptan la configuración de la sentencia mostrada y proceden desde sentencias más sencillas y con cálculos aritméticos para validarla.

**Figura 91**

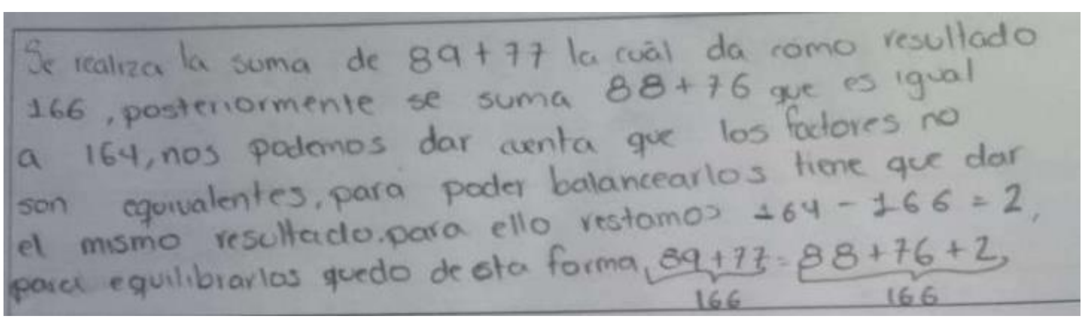
*Procedimiento del equipo 1 del ítem a) del apartado II*



Para poder igualar la suma, primero debemos sumar
los 2 numeros, es decir, sumamos primero 89+77=? y luego
sumamos 88+72=?. Cuando tengamos el resultado que es
166 y 164 los restamos para que nos dé de resultado
la diferencia que tiene cada una de ellas que en este
caso la diferencia es 2.

**Figura 92**

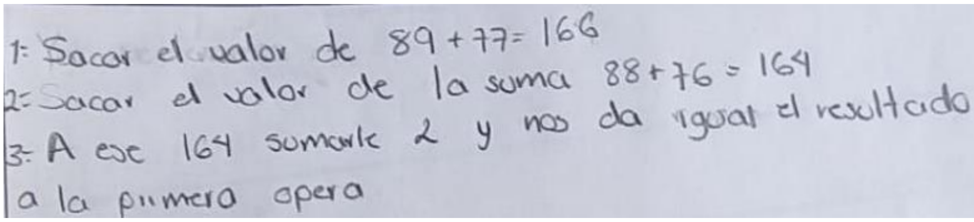
*Procedimiento del equipo 2 del ítem a) del apartado II*



Se realiza la suma de 89+77 la cuál da como resultado
166, posteriormente se suma 88+76 que es igual
a 164, nos podemos dar cuenta que los factores no
son equivalentes, para poder balancearlos tiene que dar
el mismo resultado. para ello restamos 164 − 166 = 2,
para equilibrarlos quedo de esta forma, $\underbrace{89+77}_{166} = \underbrace{88+76+2}_{166}$,

**Figura 93**

*Procedimiento del equipo 3 del ítem a) del apartado II*

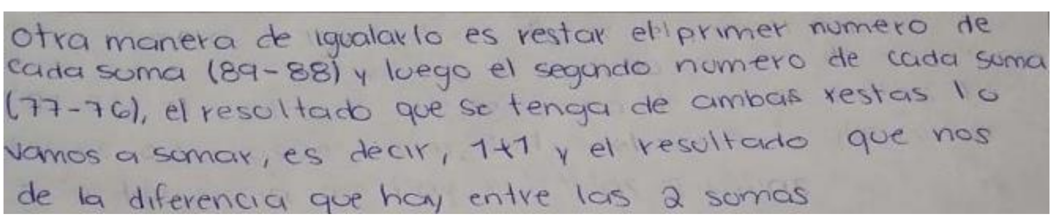

1: Sacar el valor de 89 + 77 = 166
2: Sacar el valor de la suma 88 + 76 = 164
3: A ese 164 sumarle 2 y nos da igual el resultado
a la primera opera

Otro procedimiento que evidenciaron los alumnos fue el del equipo 1 (Ver Figura 94), en el cual, utilizaron estrategias compensatorias como forma de solución alternativa que representa el 11% del total de respuestas obtenidas. Esta respuesta consiste en establecer relaciones entre los elementos de cada miembro de la sentencia y luego agregar elementos en el miembro que está desbalanceado.

En este sentido, este equipo indica que la comparación la hacen con el orden de los números en el que se presentan en la sentencia, es decir, 89 con 88 y 77 con 76. Luego, observan la diferencia de cada par y se la agregan al miembro derecho. Esta explicación se contempla como significado *Advance Basic Relational* por el tipo de estrategias que utilizan.

**Figura 94**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem a) del apartado II*


Otra manera de igualarlo es restar el primer numero de cada suma (89-88) y luego el segundo numero de cada suma (77-76), el resoltado que se tenga de ambas restas lo vamos a somar, es decir, 1+1 y el resultado que nos de la diferencia que hay entre las 2 somas

También, el equipo 1 desarrolló un procedimiento alternativo en el que empleó estrategias compensatorias y la descomposición de términos. Esta respuesta consiste en comparar los elementos de cada miembro y después descomponer el 88 en $87 + 1$ y el 76 en $75 + 1$. De tal manera que la sentencia se estructura de esta manera $89 + 77 = (87 + 1) + (76 + 1) + 2$ y al final suman los números $2 + 1 + 1$ para que la sentencia quede de la forma siguiente: $89 + 77 = 87 + 76 + 4$. Esta solución representa el 11% del total de respuestas e indica un significado *Full Relational*. Además, fue solamente expresada verbalmente por lo que a continuación se describe el fragmento donde se percibe la explicación.

*Alumna 11: El último procedimiento que tengo es a 88 restarle 1 y a 76 restarle 1, entonces ahí serían 2. Hmm… ¿Cómo les explico?... En este cuadrito que estoy señalando ¿sí lo ven?*
*Alumna 24: Sí.*
*Alumna 9: Sí.*
*Alumna 11: Para que sea igual nos faltarían 2 pero como a este le quitamos 1 (88-1) y a este también (76-1) entonces lo vamos a sumar acá (en el espacio) entonces sería 4 (2+1+1)*

Por lo que se refiere al ítem b), se compone por la siguiente sentencia: $63+\square+24+\square=\square+13+\square+42$ en comparación con la anterior, ésta contiene más espacios en blanco, lo cual, da la posibilidad de mayor diversidad de procedimientos. De acuerdo con las soluciones proporcionadas por los estudiantes se pueden se determinan tres categorías.

La primera corresponde a las soluciones que utilizaron como estrategia la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa) que fueron el 22%. En el análisis a priori, se ubica como un procedimiento que implica amplia comprensión del sentido bidireccional del signo igual. Tanto el equipo 1 (Figura 95) como el equipo 2 (Figura 96) perciben la relación con los elementos de ambos miembros de la igualdad y aluden que solo hace falta agregar los números del miembro izquierdo hacia el derecho y viceversa. A estas respuestas se le establece el significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 95**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem b) del apartado II*

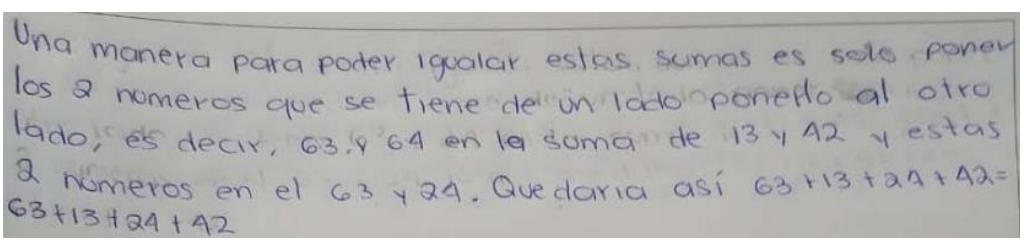
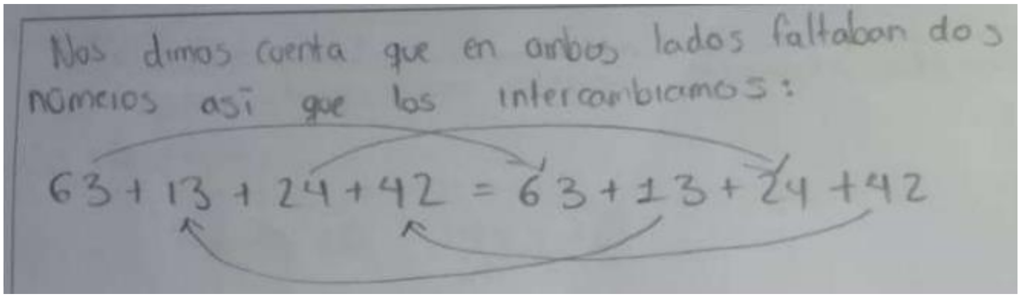

Una manera para poder igualar estas sumas es solo poner los 2 numeros que se tiene de un lado ponerlo al otro lado, es decir, 63 y 64 en la suma de 13 y 42 y estas 2 numeros en el 63 y 24. Quedaria así 63+13+24+42= 63+13+24+42

**Figura 96**

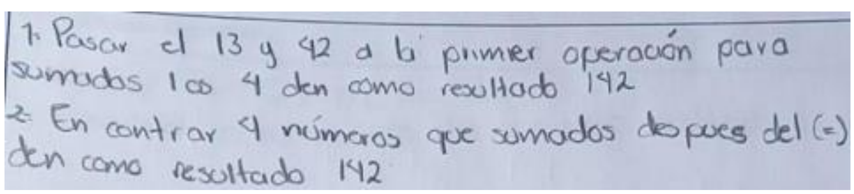
*Procedimiento del equipo 2 del ítem b) del apartado II*




La segunda categoría se la ha denominado como “conmutativa parcial” y muestra el 22% de respuestas. La explicación reside en que el equipo 3 (Figura 97) aplica agregar los elementos del miembro izquierdo en el derecho, sin embargo, para los espacios del lado izquierdo no contemplan que pueden ser los del lado derecho. Además, la justificación radica con el resultado que van a obtener después de sumar todos los números de cada lado por lo que persiste, de cierta manera el sentido operativo. De tal manera que el significado que evidencia es el *Advance Basic Relational*.

**Figura 97**

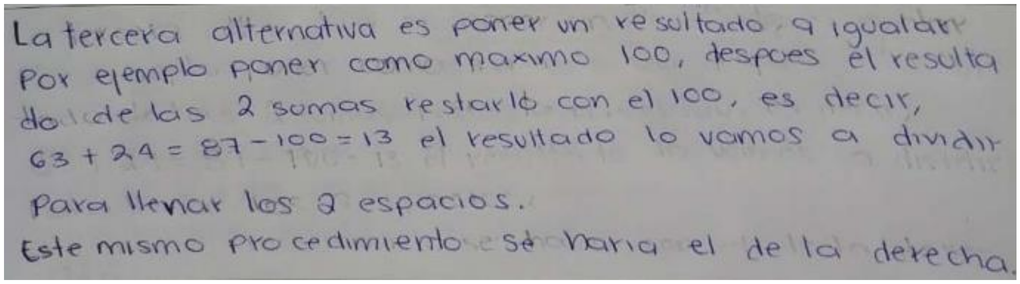
*Procedimiento del equipo 3 del ítem b) del apartado II*




Y la tercera categoría atañe a los procedimientos que utilizaron cálculos aritméticos. El 22% de las respuestas utilizaron esta manera de solución. El equipo 1 establece un número mayor que el valor de la suma de cada miembro de la sentencia por separado, en este caso 100 y realizan los ajustes necesarios (Figura 98). Y, el equipo 2 suma los elementos de cada miembro de la igualdad y calcular la diferencia para agregarla en el lado derecho para después compensar los espacios restantes (Figura 99). De acuerdo con los significados del signo igual esta manera de solución se identifica en el nivel *Basic Relational*.

**Figura 98**

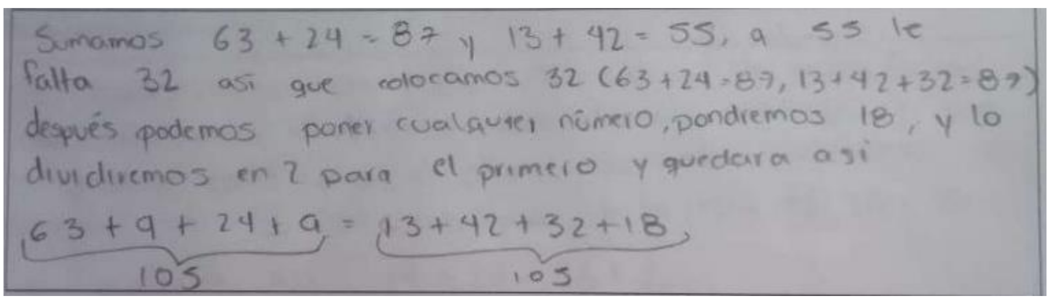
*Procedimiento del equipo 1 del ítem b) del apartado II*



La tercera alternativa es poner un resultado a igualar
Por ejemplo poner como maximo 100, despues el resulta
do de las 2 sumas restarlo con el 100, es decir,
63 + 24 = 87 − 100 = 13 el resultado lo vamos a dividir
para llenar los 2 espacios.
Este mismo procedimiento se haria el de la derecha.

**Figura 99**

*Procedimiento del equipo 2 del ítem b) del apartado II*



Sumamos 63 + 24 = 87 y 13 + 42 = 55, a 55 le
falta 32 así que colocamos 32 (63 + 24 = 87, 13 + 42 + 32 = 87)
después podemos poner cualquier número, pondremos 18, y lo
dividiremos en 2 para el primero y quedara así

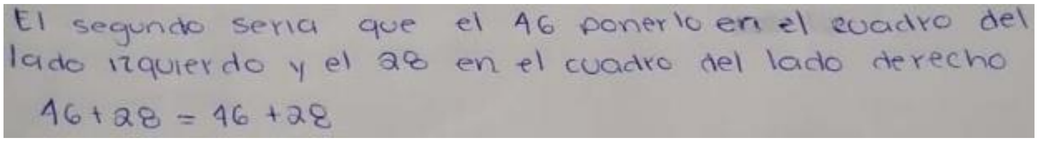
$$\underbrace{63 + 9 + 24 + 9}_{105} = \underbrace{13 + 42 + 32 + 18}_{105}$$

Respecto al ítem c), es una sentencia con la configuración $a + b = c + d$ donde $a$ y $d$ son los valores desconocidos. En las producciones escritas de los alumnos se observaron tres maneras de solución: el uso de la propiedad de adición en la igualdad (conmutativa), estrategias compensatorias y utilizando cálculos aritméticos. A continuación, se describen las respuestas planteadas por los equipos.

Respecto al uso de la propiedad de adición en la igualdad (conmutativa) los tres equipos la proporcionaron en el listado de procedimientos solicitados conformando el 33% del total. En la Figura 100, Figura 101 y Figura 102 se muestran las respuestas de los equipos 1, 2 y 3, respectivamente. Los alumnos determinan que solo es necesario agregar los elementos de cada miembro al lado opuesto para conservar la equivalencia en la sentencia sin necesidad de realizar la suma para verificar que es correcta. Estas explicaciones se consideran de significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 100**

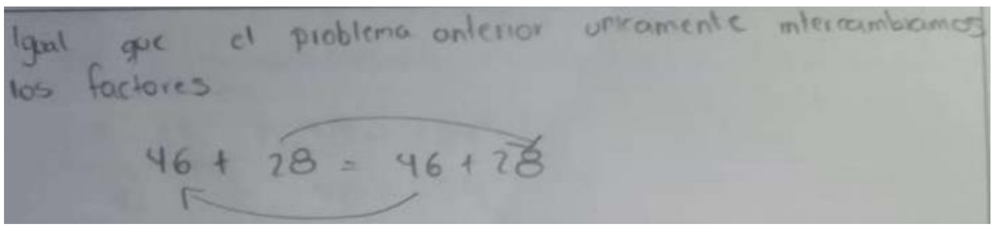
*Procedimiento del equipo 1 del ítem c) del apartado II*


El segundo seria que el 46 ponerlo en el cuadro del lado izquierdo y el 28 en el cuadro del lado derecho

$46+28=46+28$

**Figura 101**

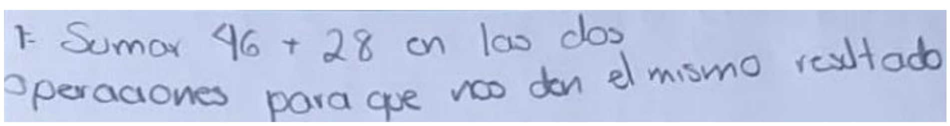
*Procedimiento del equipo 2 del ítem c) del apartado II*


Igual que el problema anterior unicamente intercambiamos los factores

$46 + 28 = 46 + 28$

**Figura 102**

*Procedimiento del equipo 3 del ítem c) del apartado II*


1.- Sumar 46 + 28 en las dos operaciones para que nos dan el mismo resultado

A su vez, en las formas de solución que implican cálculos aritméticos consistió el 22% del total de respuestas. Los equipos 1 y 3 describieron los procedimientos que se muestran en la Figura 103 y la Figura 104. La explicación consistió en fijar un número mayor en comparación con los de la sentencia. Así, solamente agregaron los números que sumados completaran tal valor. Estas producciones corresponden al significado *Basic Relational*.

**Figura 103**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem c) del apartado II*

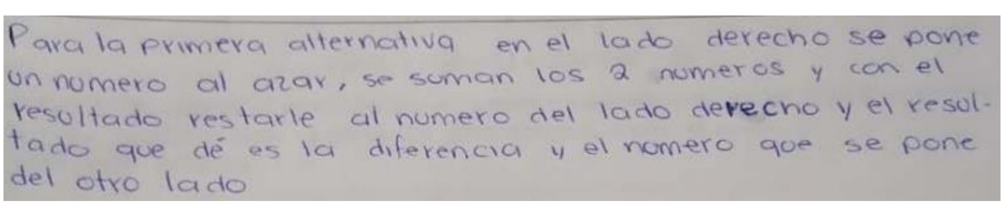
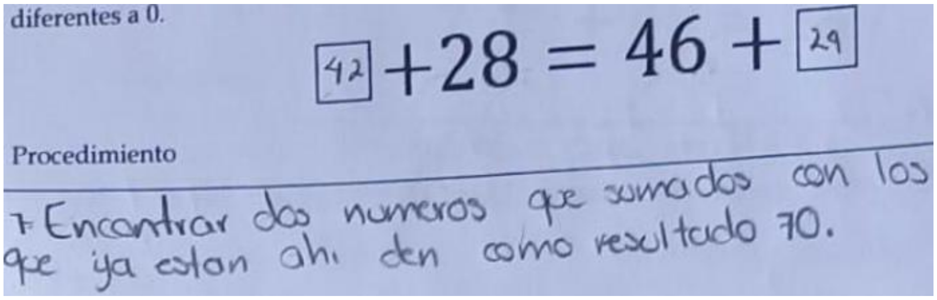

Para la primera alternativa en el lado derecho se pone un numero al azar, se suman los 2 numeros y con el resultado restarle al numero del lado derecho y el resultado que dé es la diferencia y el numero que se pone del otro lado

**Figura 104**

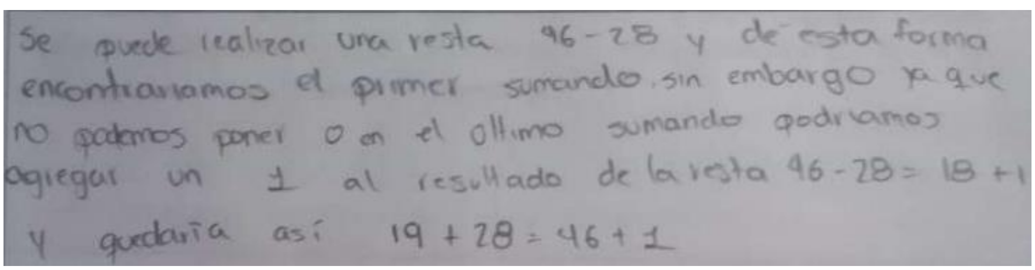
*Procedimiento del equipo 3 del ítem c) del apartado II*




Y, la tercera categoría consiste en utilizar estrategias compensatorias que representa el 11% del total de respuestas. En este sentido, compara los elementos 46 y 28 de cada miembro y determina la diferencia entre éstos, la cual, se debe mantener al agregar los otros dos números en los espacios. En la Figura 105 agrega 1 en el miembro derecho y del otro lado 19 para no alterar la validez de la sentencia. Esta solución se clasifica como *Full Relational*.

**Figura 105**

*Procedimiento del equipo 2 del ítem c) del apartado II*




El ítem d) es el último ejercicio en el que el estudiante debe plasmar tres maneras de solucionarlo. Esta sentencia tiene características de una ecuación lineal sin la formalidad de utilizar letras como variables. Los procedimientos previamente establecidos en el análisis a priori fueron proporcionados por los estudiantes.

La primera categoría consiste en sustituir números en el espacio de la sentencia y seguir las operaciones indicadas hasta determinar el valor que coincida con el miembro derecho. El procedimiento para llevar un orden en los números utilizados es la tabulación y se observó en el 33% del total de respuestas. Los tres equipos indicaron esta forma de solución. En la Figura 106, Figura 107 y Figura 108 se muestran sus respuestas. indica los mismos pasos para identificar el número que haga válida la sentencia, sin embargo, no específica el método para conocer tal valor. Estas soluciones se ubican en el significado *Basic Relational*.

**Figura 106**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem d) del apartado II*

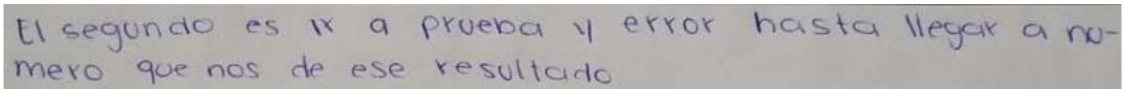



**Figura 107**

*Procedimiento del equipo 2 del ítem d) del apartado II*

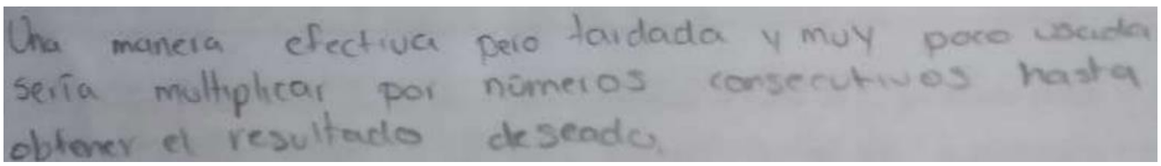
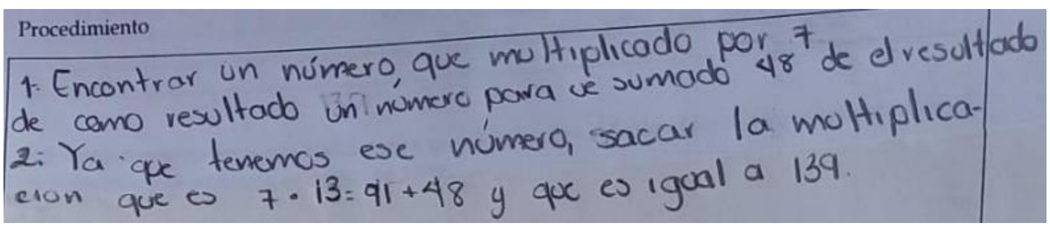



**Figura 108**

*Procedimiento del equipo 3 del ítem d) del apartado II*




La siguiente categoría reside en manipular el miembro derecho aplicando las operaciones inversas a las indicadas en el lado izquierdo. Esta forma de solución se mostró en el 22% del total de respuestas. Este procedimiento consiste en restar 48 a 139 y luego, a la diferencia dividirla entre 7. En la Figura 109 y Figura 110 se observa las explicaciones de los equipos 1 y 2, respectivamente. Esta solución se ubica en el significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 109**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem d) del apartado II*

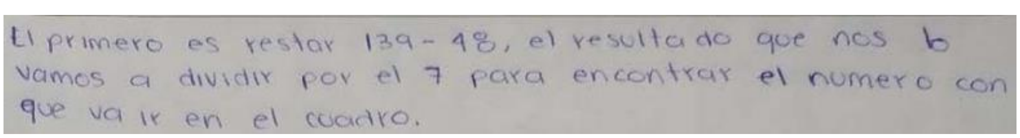
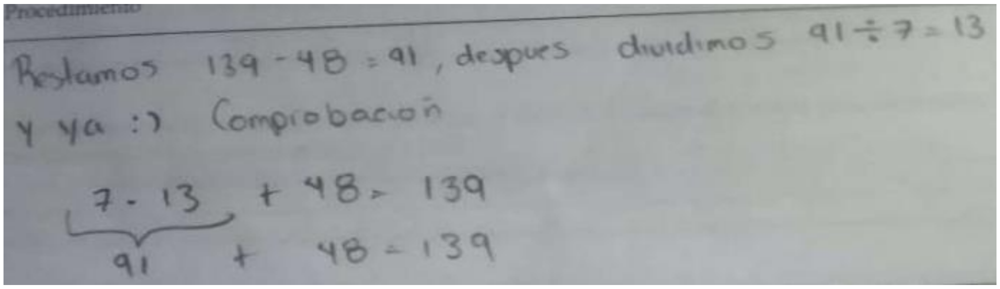


**Figura 110**

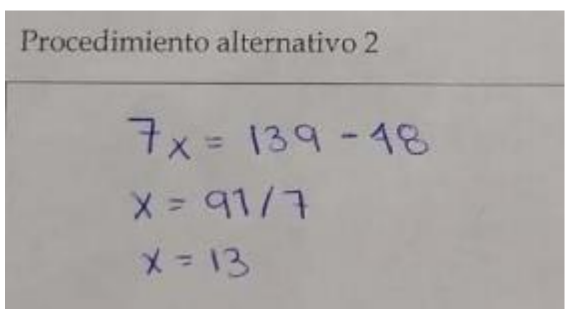
*Procedimiento del equipo 2 del ítem d) del apartado II*




La última categoría consistió en aplicar la transposición de términos, la cual, se evidenció en el 11% del total de respuestas. Esta forma de resolución implica aplicar ciertas reglas en las ecuaciones para despejar el valor desconocido. En la Figura 111 se observa el desarrollo del equipo 1. Además, cambiaron □ por $x$ entendido como la forma usual que conocen para resolver un ejercicio de esa índole. Esta forma de solución se clasifica como *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 111**

*Procedimiento del equipo 1 del ítem d) del apartado II*



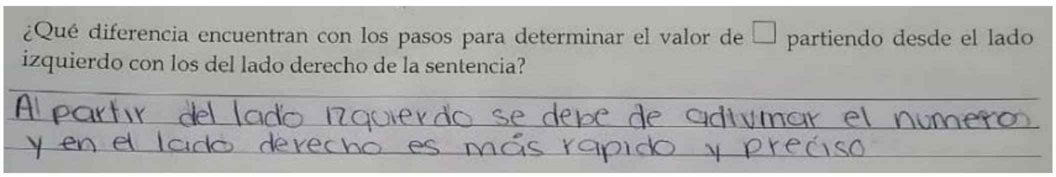

En el siguiente ítem e), consta en recapitular los procedimientos establecidos en la sentencia anterior a través de distinguir cuál les parece más de su agrado dependiendo de los factores que consideren necesarios y culminar esta parte, con la comparativa de pasos para determinar el valor del espacio en blanco en la sentencia si parte del lado derecho o desde el izquierdo.

De manera general, el optar por la deducción del valor partiendo desde el miembro izquierdo implica la estrategia de tabular valores hasta encontrar el que coincida con el miembro derecho. Mientras que, desde el lado derecho es mediante uso del signo igual y estableciendo relaciones inversas con las operaciones indicadas en el lado izquierdo.

En este sentido, el equipo 1 en la Figura 112 alude a la estrategia empleada pues considera que el sustituir valores en la sentencia lo realiza sin un orden y por tanto conjetura que implica un proceso de adivinar el valor mientras que, al establecer relaciones entre ambos miembros manipulando el miembro derecho resulta rápido y preciso. Ahora bien, el equipo 3 (Figura 113) señala la diferencia entre procedimientos describiendo que en uno debe multiplicar y sumar y en el otro restar, aunque le hizo falta agregar también dividir, pero esto muestra indicios del entendimiento del sentido bidireccional del signo igual.

**Figura 112**

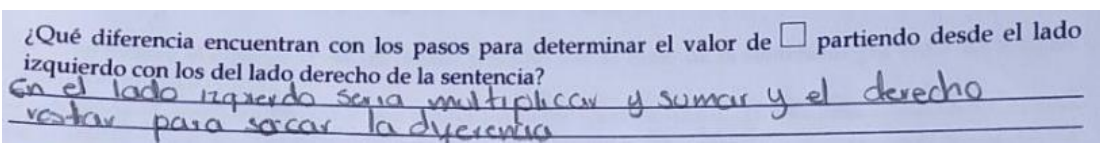
*Respuesta del equipo 1 al ítem e) del apartado II*


¿Qué diferencia encuentran con los pasos para determinar el valor de □ partiendo desde el lado izquierdo con los del lado derecho de la sentencia?

Al partir del lado izquierdo se debe de adivinar el numero y en el lado derecho es más rapido y preciso

**Figura 113**

*Respuesta del equipo 3 al ítem e) del apartado II*

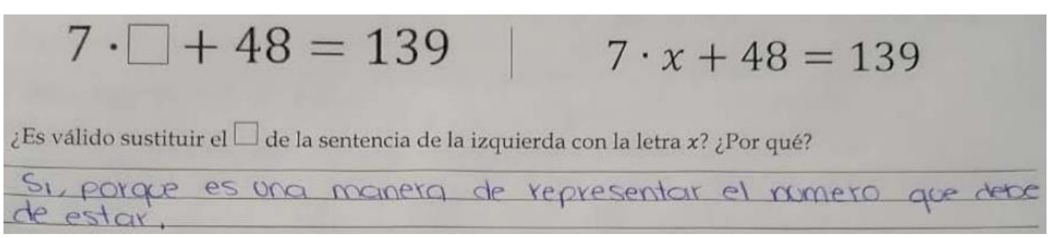

¿Qué diferencia encuentran con los pasos para determinar el valor de □ partiendo desde el lado izquierdo con los del lado derecho de la sentencia?

En el lado izquierdo seria multiplicar y sumar y el derecho restar para sacar la diferencia

En cuanto a las preguntas que conciernen a la transición de □ por $x$ no hubo mayor dificultad para los estudiantes pues identifican que el espacio en blanco en las sentencias representa un valor desconocido y que, por tanto, puede ser utilizado como variable (Ver Figura 114). Esto es un paso previo para el trabajo con ecuaciones lineales de una variable donde los aspectos del sentido bidireccional del signo igual se verán reflejados en las siguientes preguntas de este ítem.

**Figura 114**

*Respuesta del equipo 1 al ítem e) del apartado II*


$7 \cdot \square + 48 = 139$ | $7 \cdot x + 48 = 139$

¿Es válido sustituir el □ de la sentencia de la izquierda con la letra $x$? ¿Por qué?

Si, porque es una manera de representar el numero que debe de estar.

Luego, en este mismo ítem tiene otra sección donde se enfatiza en el procedimiento de manipular el miembro derecho y la manera que influye agregar elementos a un solo lado de la ecuación en el valor de la variable. Este ejercicio es similar al de la situación de acción solo que ahora en un contexto algebraico.

Este ejercicio se divide en dos partes. La primera consiste en agregar $-48$ en el lado derecho con la intención de comenzar a despejar la variable, sin embargo, se cuestiona qué sucede en ese momento con la estructura de la ecuación, es decir, para tratar de evidenciar el sentido bidireccional del signo igual con el valor de $x$. Inicialmente, la respuesta de $x$ en $7 \cdot x + 48 = 13$ es 13 pero en la ecuación $7 \cdot x + 48 = 139 - 48$ es $6\frac{1}{7}$. El equipo 1 debate sobre la respuesta a esta pregunta y a continuación se describe el fragmento de la conversación:

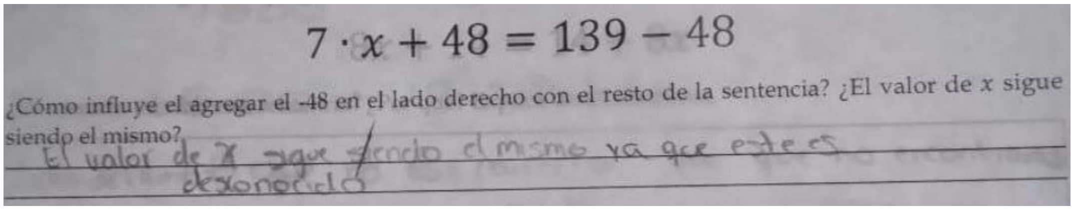
*Alumna 11: Sí, entonces, ¿el valor de $x$ sigue siendo el mismo?*
*Alumna 16: Sí.*
*Alumna 24: Yo digo que no.*
*Alumna 11: Yo también.*
*Alumna 16: ¿Por qué?*
*Alumna 24: Como te decía, ¿te acuerdas del problema de ayer (aludiendo a la sesión 1) del maestro? Decía que primero era una suma con el resultado y después le puso un número al lado del resultado y muchos pensaron que era, por ejemplo, sumar 7+6=13 y luego sumarle el +6 que te daría 17 perdón 11 y luego… Ah bueno ¿sí me entiendes? ¿sí te acordaste? ¿no?*
*Alumna 16: Sí.*
*Alumna 24: Entonces pasaría lo mismo con esto pues estás igualando básicamente.*
*Alumna 16: ¡Ah! Cierto.*

Durante este momento, la alumna 24 relaciona lo trabajado en la situación de acción con este ejercicio, aunque no lo explica a detalle, lo menciona para que sus demás compañeras lo puedan recordar. Este comentario sugiere que este equipo observa las sentencias numéricas de manera global y de la misma manera con las ecuaciones lineales de una variable, pues consideran, aunque no de forma consciente, que si modifica un miembro también aplica para el otro para conservar la equivalencia.

Por otra parte, el equipo 2 plasma que el valor de la ecuación permanece siendo el mismo en comparación con la anterior (Figura 115). El argumento versa en que hasta que no se comienza con el procedimiento para determinar la variable su valor es desconocido. De tal manera, que el sentido bidireccional del signo igual no es tomado en cuenta desde un aspecto abstracto, es decir, requieren de conocer un resultado para tener más información al respecto.

**Figura 115**

*Respuesta del equipo 2 al ítem e) del apartado II*



$$7 \cdot x + 48 = 139 - 48$$

¿Cómo influye el agregar el -48 en el lado derecho con el resto de la sentencia? ¿El valor de $x$ sigue siendo el mismo?

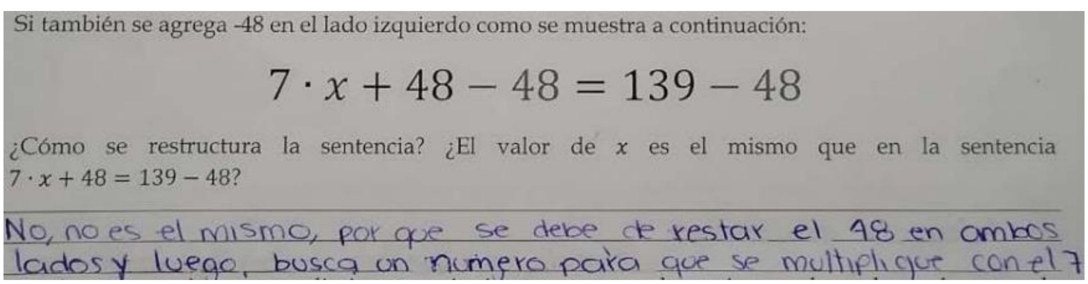
El valor de x sigue siendo el mismo ya que este es desconocido

La segunda parte de este ejercicio consiste en ahora agregar $-48$ en ambos lados de la ecuación y cuestionar el valor de $x$, en comparación con la ecuación anterior, de la primera parte del ejercicio. También, indagar sobre la justificación de los estudiantes respecto al balance de una ecuación correspondiente al sentido bidireccional del signo igual.

En este sentido, todos los equipos indican que no es el mismo valor en comparación con la ecuación anterior. No obstante, algunos discentes en la respuesta que describen no es lo suficiente clara para explicar el porqué es válido realizar esta modificación en cada lado de la ecuación, pero la comprensión está presente en cada uno (Figura 116).

**Figura 116**

*Respuesta del equipo 1 al ítem e) del apartado II*



Si también se agrega -48 en el lado izquierdo como se muestra a continuación:

$$7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$$

¿Cómo se restructura la sentencia? ¿El valor de $x$ es el mismo que en la sentencia $7 \cdot x + 48 = 139 - 48$?

No, no es el mismo, por que se debe de restar el 48 en ambos lados y luego, busca un numero para que se multiplique con el 7

La última consigna del ítem e) consiste en describir los pasos para determinar el valor de $x$ en la ecuación $7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$. En este sentido, se observaron dos categorías de acuerdo con las respuestas de los estudiantes.

La primera consiste en utilizar las propiedades de la adición y multiplicación para la igualdad para determinar el resultado. Esta manera de solución representó el 67% de las respuestas. Los equipos 1 y 3 desarrollaron en sus explicaciones tal procedimiento en las Figura 117 y Figura 118. Estas respuestas evidencian un significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 117**

*Procedimiento del equipo 1 al ítem e) del apartado II*

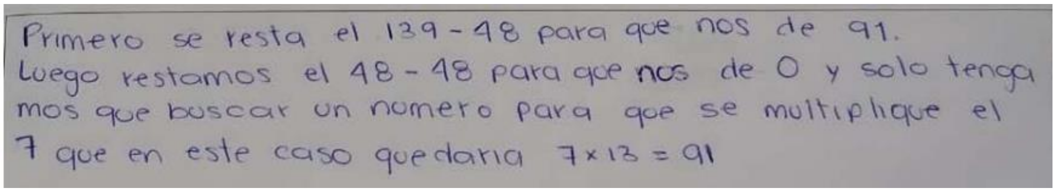
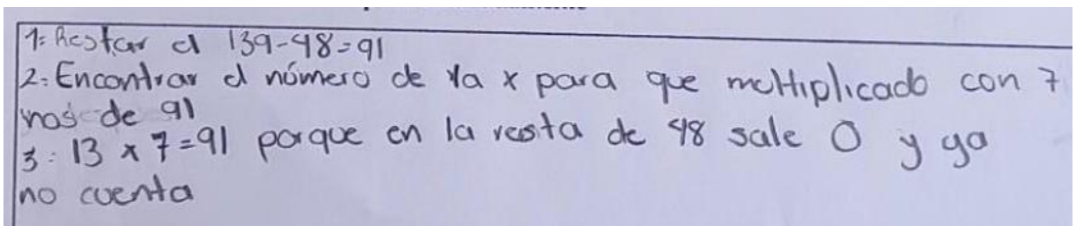

Primero se resta el 139 - 48 para que nos de 91.
Luego restamos el 48 - 48 para que nos de 0 y solo tenga
mos que buscar un nomero para que se multiplique el
7 que en este caso quedaria 7×13 = 91

**Figura 118**

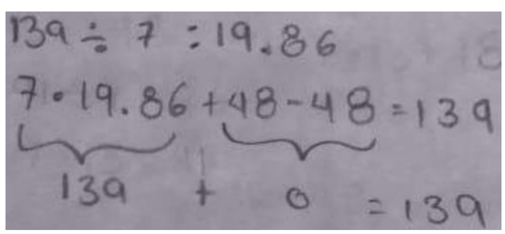
*Procedimiento del equipo 3 al ítem e) del apartado II*


1: Restar el 139-48=91
2: Encontrar el número de la x para que multiplicado con 7
nos de 91
3: 13 x 7 =91 porque en la resta de 48 sale 0 y ya
no cuenta

La segunda categoría residió en describir de manera errónea el procedimiento de resolución para la misma ecuación. Esta respuesta se observó en el 33% del total. Los alumnos no consideran todas las expresiones del miembro derecho y por tanto la resolución resulta incorrecta (Figura 119).

**Figura 119**

*Procedimiento del equipo 2 al ítem e) del apartado II*


$139 \div 7 = 19.86$

$\underbrace{7\cdot 19.86}_{139} + \underbrace{48-48}_{0} = 139$

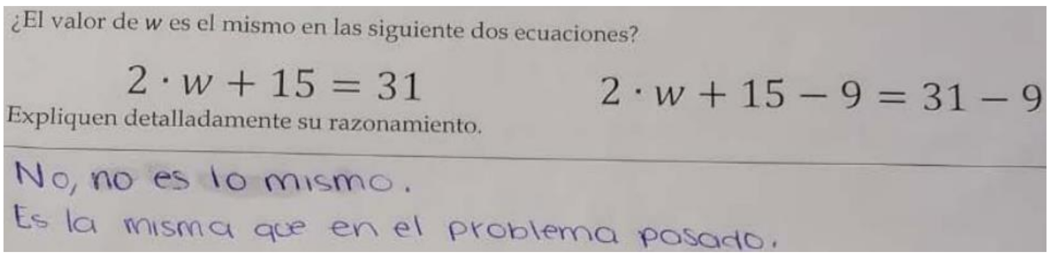
$139 + 0 = 139$

A su vez, el ítem f) presenta la adaptación de un ejercicio retomado de Alibali et al., (2007) que consiste en dos ecuaciones equivalentes donde una de ellas tiene una modificación atípica para iniciar el proceso de determinar el valor de la variable. El objetivo es que el alumno justifique que el valor de *w* es el mismo en ambas.

De acuerdo con Alibali et al., (2007) son posibles dos tipos de respuestas, pero la justificación que utilicen los equipos puede tener diferentes características. Como se indicó en el análisis a priori, un resultado esperado consiste en no observar la similitud en las dos ecuaciones como se muestra en la Figura 120 del equipo 1. Estos alumnos consideraron que el valor de la variable no es el mismo en las dos ecuaciones y argumentan porque tiene las características que el ejercicio anterior. En este sentido, esta respuesta representa el 33% del total y se ubica en un significado *Operador*. Además, los discentes confunden cuando es incorrecto agregar elementos de la ecuación de tal manera que interfiera en el valor de $w$.

**Figura 120**

*Respuesta del equipo 1 al ítem f) del apartado II*



¿El valor de $w$ es el mismo en las siguiente dos ecuaciones?

$2 \cdot w + 15 = 31$ $\quad$ $2 \cdot w + 15 - 9 = 31 - 9$

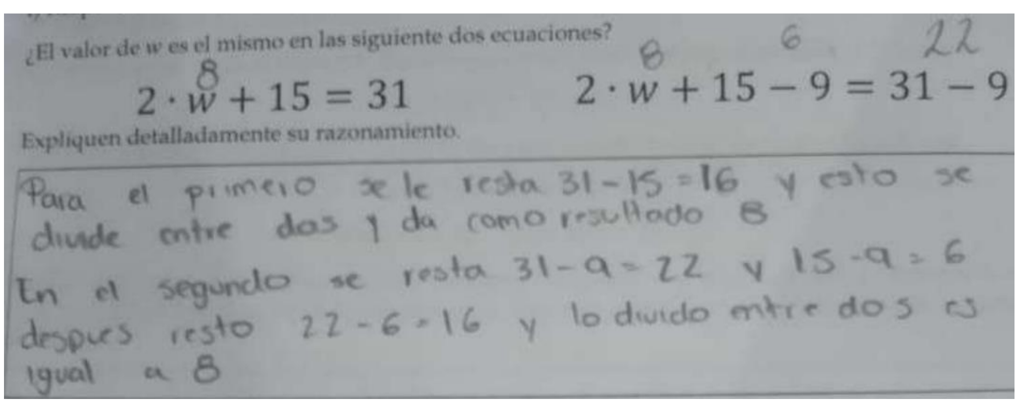
Expliquen detalladamente su razonamiento.

No, no es lo mismo.
Es la misma que en el problema pasado.

El otro tipo de respuesta fue la que describieron los equipos restantes (67% del total de respuestas) y consiste en observar que ambas ecuaciones son equivalentes mediante la propiedad de adición para la igualdad. De acuerdo con Alibali et al. (2007) estos estudiantes pueden distinguir que la ecuación de la derecha conserva la relación cuantitativa con respecto a la de la izquierda (Figura 121 del equipo 2 y Figura 122 del equipo 3) y su respuesta se clasifica como significado *Expresión de una equivalencia*. Sin embargo, es posible que la justificación pueda mejorar en términos de utilizar el sentido bidireccional del signo igual, es decir, que no recurran a aplicar procedimientos aritméticos para verificar la equivalencia entre ecuaciones.

**Figura 121**

*Respuesta del equipo 2 al ítem f) del apartado II*



¿El valor de $w$ es el mismo en las siguiente dos ecuaciones?

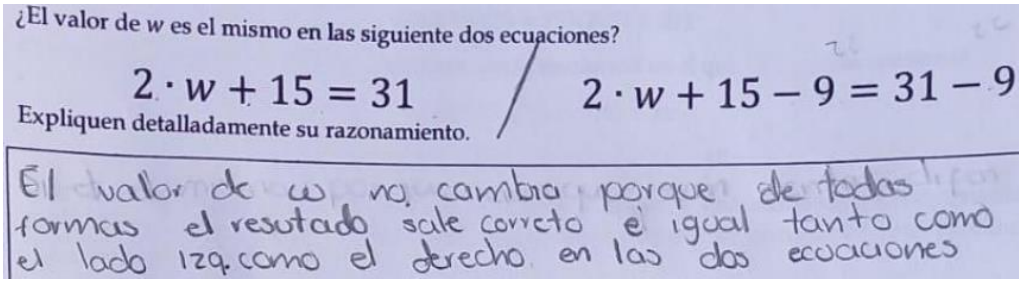
$2 \cdot \overset{8}{w} + 15 = 31$ $\quad$ $2 \cdot \overset{8}{w} + \overset{6}{15 - 9} = \overset{22}{31 - 9}$

Expliquen detalladamente su razonamiento.

Para el primero se le resta 31-15=16 y esto se divide entre dos y da como resultado 8
En el segundo se resta 31-9=22 y 15-9=6 despues resto 22-6=16 y lo divido entre dos es igual a 8

**Figura 122**

*Respuesta del equipo 3 al ítem f) del apartado II*



¿El valor de $w$ es el mismo en las siguiente dos ecuaciones?

$2 \cdot w + 15 = 31$ / $2 \cdot w + 15 - 9 = 31 - 9$

Expliquen detalladamente su razonamiento.

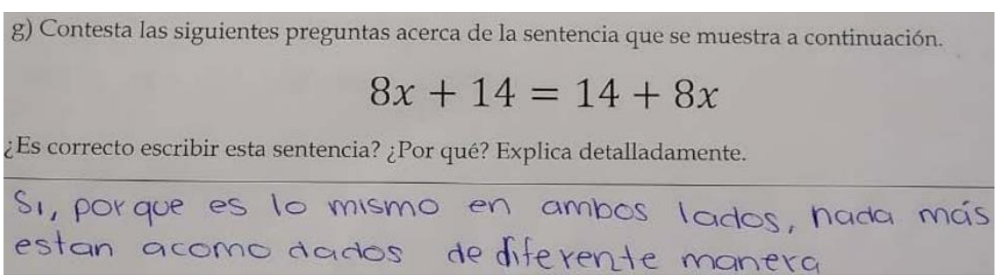
El valor de w no cambia porque de todas formas el resutado sale correcto e igual tanto como el lado izq. como el derecho en las dos ecuaciones

En cuanto al ítem g), se diseñaron dos posibles respuestas. Este ítem consiste en validar la sentencia en la que su principal característica es la propiedad reflexiva, es decir, que tiene los mismos elementos tanto en el miembro derecho como en el izquierdo. Aunque, este ejercicio no contiene a una ecuación, permite al alumno enfocarse en otros aspectos, como el sentido bidireccional del signo igual, para validarla.

En este orden de ideas, el equipo 1 en la Figura 123 y el equipo 3 en la Figura 124 indican que es válida la sentencia porque se encuentran los mismos elementos en ambos lados de la igualdad y que el orden en el que se presentan no altera la igualdad de expresiones algebraicas. Además de mostrar la propiedad reflexiva de manera implícita también aplican la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa). Esta forma de solución se observó en el 67% de total de respuestas e indica un significado *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 123**

*Respuesta del equipo 1 al ítem g) del apartado II*



g) Contesta las siguientes preguntas acerca de la sentencia que se muestra a continuación.

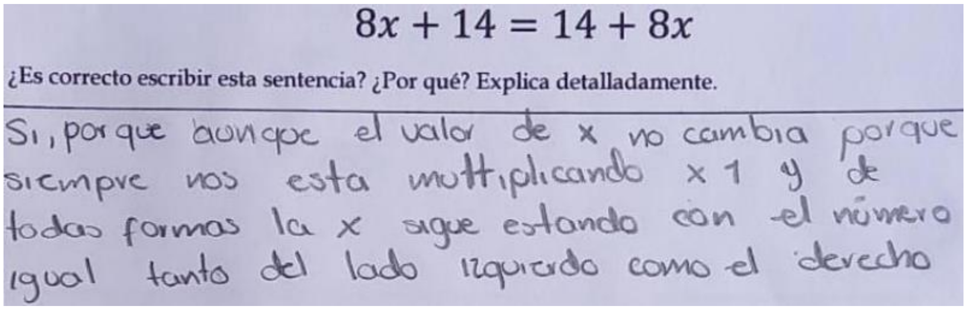
$$8x + 14 = 14 + 8x$$

¿Es correcto escribir esta sentencia? ¿Por qué? Explica detalladamente.

Si, porque es lo mismo en ambos lados, nada más estan acomodados de diferente manera

**Figura 124**

*Procedimiento del equipo 3 al ítem g) del apartado II*



$$8x + 14 = 14 + 8x$$

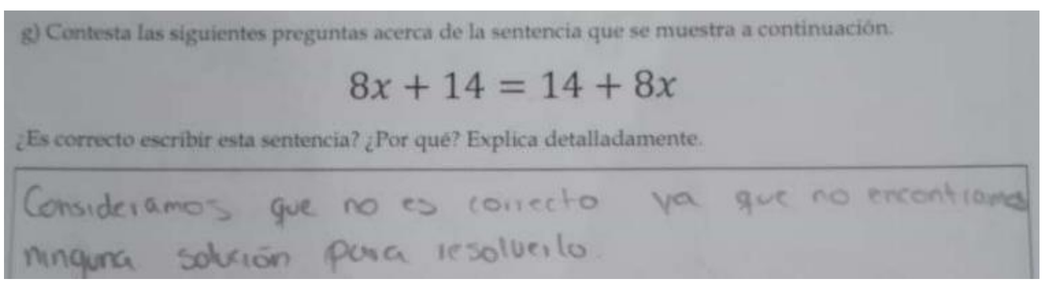
¿Es correcto escribir esta sentencia? ¿Por qué? Explica detalladamente.

Si, porque aunque el valor de x no cambia porque siempre nos esta multiplicando x 1 y de todas formas la x sigue estando con el número igual tanto del lado izquierdo como el derecho

Por otra parte, también se contempló la respuesta en la que algunos estudiantes no lograran percibir la validez de la sentencia como es el caso del equipo 2, el cual, en la Figura 125 proporciona en su justificación que no les fue posible determinar el valor de $x$ que representó el 33% del total de respuestas. Este argumento los hace concluir que esta sentencia es incorrecta por lo que no lograron mediante procedimientos aritméticos calcular un número específico para la variable, por tanto, esta respuesta se clasifica como *Operador*.

**Figura 125**

*Respuesta del equipo 2 al ítem g) del apartado II*



g) Contesta las siguientes preguntas acerca de la sentencia que se muestra a continuación.

$$8x + 14 = 14 + 8x$$

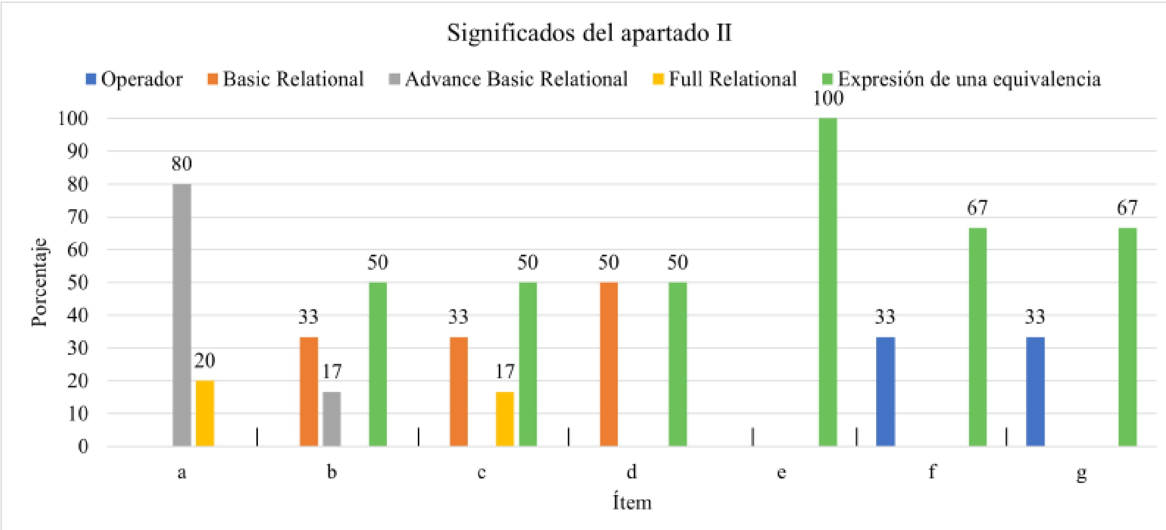
¿Es correcto escribir esta sentencia? ¿Por qué? Explica detalladamente.

Consideramos que no es correcto ya que no encontramos ninguna solución para resolverlo.

De manera general, la distribución de los significados en los ítems del apartado II se presenta en la Figura 126. En el ítem a) se observó el significado *Advance Basic Relational* en el 80% de las respuestas y en el 20% *Full Relational*. El ítem b) se observó el 33% *Basic Relational*, 17% *Full Relational* y 50% *Expresión de una equivalencia*. El ítem c), se mostraron 50% tanto en los significados *Basic Relational* como *Expresión de una equivalencia*. El ítem d) el 100% fue evidenciado el significado *Expresión de una equivalencia*. Y en los ítems f) y g) el 33% fue el significado *Operador* y el 67% *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 126**

*Distribución de los significados de los ítems del apartado II*



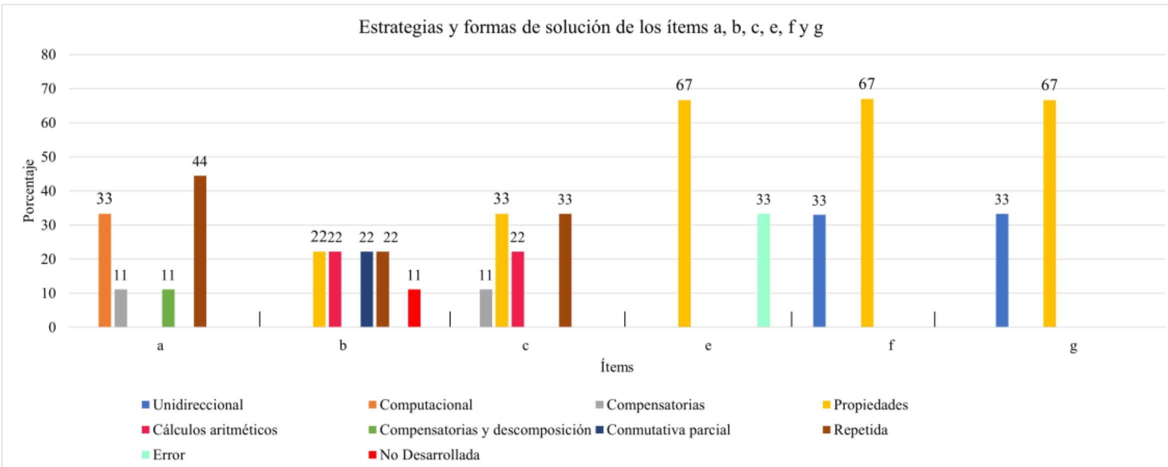

Por lo que se refiere a las estrategias y formas de solución, en la Figura 127 se observa la distribución de los ítems a, b, c, e, f y g. Se excluye el ítem d) en esta distribución por la cantidad de formas de solución que muestra tal inciso, pero también se aborda en este trabajo.

En este sentido, el ítem a) se identificaron estrategias computacionales en el 33% de las respuestas, 11% fueron compensatorias también el mismo porcentaje correspondió al uso de compensatorias y descomposición. Y el 44% fueron procedimientos con elementos no distintivos a los anteriores. En el ítem b) tanto la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa), el uso de cálculos aritméticos, conmutativa parcial y respuestas repetidas mostraron el 22% en cada una de las indicadas. Y el 11% en formas de solución no desarrolladas. En el ítem c) la distribución fue la siguiente: 11% estrategias compensatorias, 22% uso de cálculos aritméticos y tanto propiedades de la adición para igualdad (conmutativa) como respuestas repetidas 33% cada una.

En el ítem e) el 67% corresponde a propiedades de la adición y multiplicación para la igualdad y el 33% a respuestas erróneas. En el ítem f) el 33% presentó visión unidireccional y el 67% utilizó la propiedad de adición para la igualdad. Y en el ítem g) el 33% a visión unidireccional y el 67% a propiedad reflexiva de la igualdad.

**Figura 127**

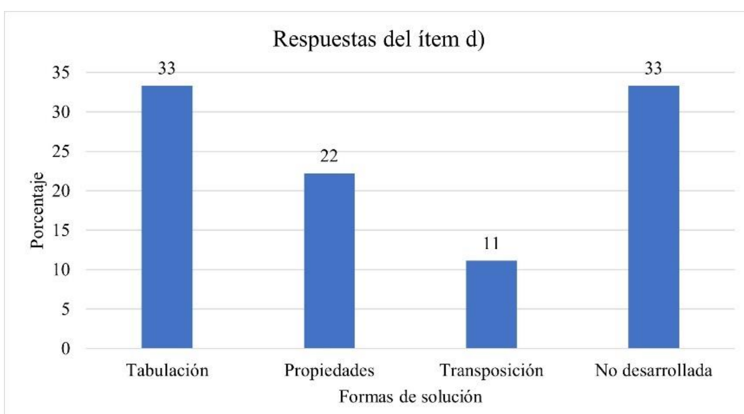
*Distribución de las estrategias y formas de solución de los ítems a, b, c, e y g del apartado II*




En cuanto al ítem d), la distribución de las formas de solución se muestra en la Figura 128. Se puede observar que el 33% corresponde al uso de la tabulación, el 22% a las propiedades de la adición y multiplicación para la igualdad, el 11% la transposición de términos y, por último, el 33% de respuestas no fueron desarrolladas.

**Figura 128**

*Respuestas del ítem d) del apartado II*



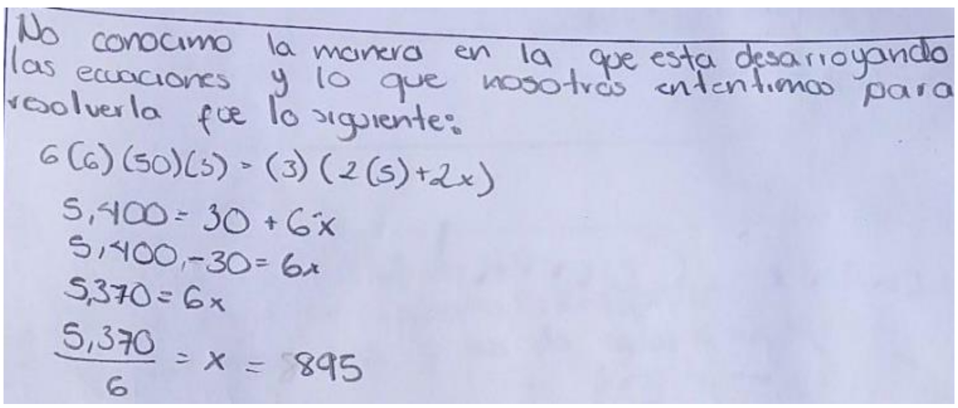

Por último, el apartado III consiste en interpretar un procedimiento para resolver una ecuación lineal de una variable. La característica de la consigna es que se muestra un conjunto de pasos para calcular el valor de $x$ en la ecuación $6(6)(50)(3) = (3)(2(5) +$

$2x$) y los discentes deben de continuar la lógica de la resolución y proporcionar la respuesta final.

Así, que el equipo 3 y el equipo 1 indican en las Figura 129 y Figura 130, respectivamente que no lograron discernir el procedimiento planteado en la estructura del problema por lo que recurrieron a un conocimiento previo para calcular el valor de la variable. La forma de solución que utilizaron fue la transposición de términos. Otro punto que llama la atención es en la respuesta del equipo 3 en la necesidad de representar el resultado pues, a pesar de que el procedimiento los orienta a que el número este en el lado izquierdo persiste la necesidad de observar la respuesta de manera unidireccional, es decir, de izquierda a derecha. Estas repuestas se catalogan como *Expresión de una equivalencia*.

**Figura 129**

*Respuesta del equipo 3 del apartado III*


No conocimo la manera en la que esta desarroyando las ecuaciones y lo que nosotros ententimos para resolverla fue lo siguiente:

$6(6)(50)(5) = (3)(2(5)+2x)$

$5{,}400 = 30 + 6x$

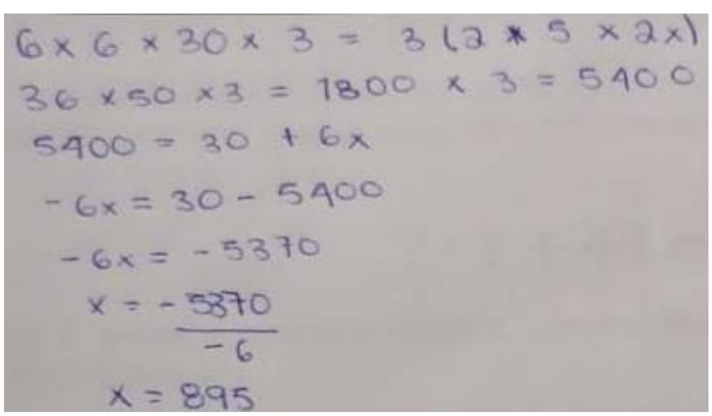
$5{,}400 - 30 = 6x$

$5{,}370 = 6x$

$\frac{5{,}370}{6} = x = 895$

**Figura 130**

*Respuesta del equipo 1 del apartado III*


$6 \times 6 \times 30 \times 3 = 3(2 * 5 \times 2x)$

$36 \times 50 \times 3 = 1800 \times 3 = 5400$

$5400 = 30 + 6x$

$-6x = 30 - 5400$

$-6x = -5370$

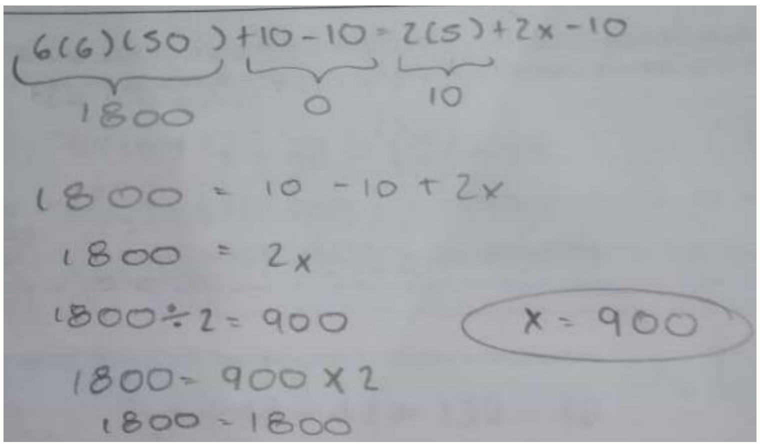
$x = \frac{-5370}{-6}$

$x = 895$

También, hubo otra forma de solución peculiar por parte del equipo 2. El ejercicio del apartado III pretendía que el alumno comprendiera la lógica del procedimiento parcialmente establecido y ello implicaba deducir la lógica de los pasos y además identificar los errores que se habían cometido en el desarrollo de la solución. Es así, que lo que sucedió fue que estos estudiantes partieron desde el último paso planteado, es decir, $6(6)(50) + 10 - 10 = 2(5) + 2x - 10$ y desde ahí desglosaron los pasos restantes. En la Figura 131 se logra percibir esta idea que se desencadena de no comprender totalmente el procedimiento que proporciona el problema. Esta respuesta por incluir la transposición de términos, pero al no reconocer el error planteado se clasifica como *Basic Relational*.

**Figura 131**

*Respuesta del equipo 2 del apartado III*




### 4.4.1.3. Situación de validación

La situación de validación se realizó de manera síncrona en *Google Meet* en una sesión posterior al trabajo y el envío de las evidencias de la situación de formulación. Además, se empleó el recurso digital *Jamboard* para complementar de manera visual las participaciones de los estudiantes.

En este orden de ideas, el profesor preparó las respuestas más significativas de tal manera que las organizó en diferentes pizarras de *Jamboard* para que los estudiantes las reconocieran y lograran explicar a sus demás compañeros sus diferentes respuestas utilizando las herramientas disponibles.

El propósito de esta situación es que se origine un ambiente de diálogo y debate acerca de los ítems proporcionados estableciendo el razonamiento que caracteriza sus respuestas para que por sí mismos identifiquen las estrategias que implican mayor comprensión del signo igual en contextos aritméticos y algebraicos.

Cabe mencionar, que la limitada participación de los alumnos fue un aspecto que destacó en el desarrollo de esta sesión. Por tanto, en el siguiente análisis se muestra una organización diferente en comparación con la sección de la situación de formulación del análisis *a posteriori*. Esto significa que se abordan ciertos conjuntos de ítems para describir las participaciones relevantes durante el proceso.

El inicio de la sesión se dio con la participación de dos equipos con sus respectivas respuestas del ítem a). La comparación se realizó con un procedimiento que evidenció estrategias computacionales y el otro un indicio de estrategias compensatorias. En específico, se hace referencia a las producciones de los equipos 1 y 2, respectivamente.

Luego, el ítem b) donde se retoman los trabajos de los tres equipos y se muestran estrategias computacionales para que los estudiantes reflexionen la justificación que permite que todas las respuestas incluidas a debatir sean correctas. En el ítem c), se consideran las estrategias de los equipos 1 y 3 que involucra elementos computacionales y de la propiedad conmutativa respectiva en cada participación. Y el ítem d), el cual, se discute sobre los resultados de los equipos de la sentencia anterior aludiendo a la transposición de términos y la tabulación como estrategias de resolución.

En la siguiente Tabla 8 se muestra la organización de las participaciones de los equipos en cada ítem. Además, se incluye el tipo de estrategia a discutir en los estudiantes participantes. Las casillas vacías, indican que sus respuestas no fueron consideradas para el debate en cierto ítem pero no significa que no proporcionaron algún resultado en las hojas de trabajo de la situación de formulación.

**Tabla 8**

*Organización de las respuestas para el debate de los ítems a), b), c) y d)*

| | | Ítems | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | a) | b) | c) | d) |
| Equipos | 1 | Computacional | Computacional | Computacional | Transposición de términos |
| | 2 | Compensatoria | Computacional | | |
| | 3 | | Computacional | Propiedad conmutativa | Tabulación |

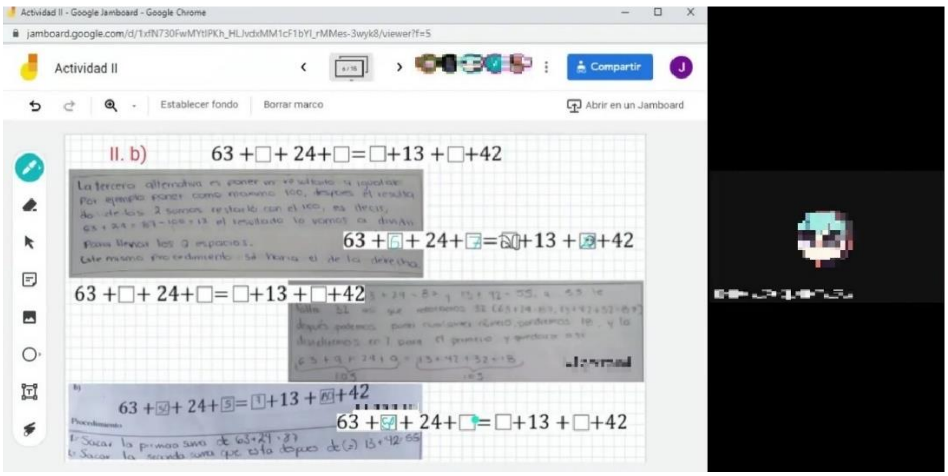
En cuanto al ítem a), el debate surgió en explicar por parte del equipo 2 el procedimiento que implica estrategias compensatorias, mientras que el entendimiento de la solución con estrategias computacionales no presentó problema para los discentes. Luego, el profesor les cuestionó sobre cuál resolución optaban como más “sencilla” a lo que los alumnos señalaron la computacional, incluso el equipo 2 quien fue el que proporcionó como procedimiento alternativo el establecer relaciones compensatorias entre ambos miembros.

Ahora bien, en el ítem b) se incluyeron solo estrategias computacionales para que los estudiantes observaran las características de cada resultado y lograran determinar similitudes que permitieran generar conjeturas sobre la equivalencia en las sentencias. En este sentido, un integrante del equipo 1 explicó el procedimiento seleccionado a los demás compañeros. En el siguiente fragmento se muestra la explicación de la alumna 11 y en la Figura 132 su participación en la sesión.

> *Profesor: ¿Algún integrante del equipo 1 que explique su procedimiento?*
> *Alumna 11: Yo, si tomamos en base el 100, en el primer cuadrito sería 6 y en el segundo 7 para así hacer 13 y si le sumamos 13 +63+24 nos da 100.*

**Figura 132**

Participación de la alumna 11 explicando el procedimiento de su equipo



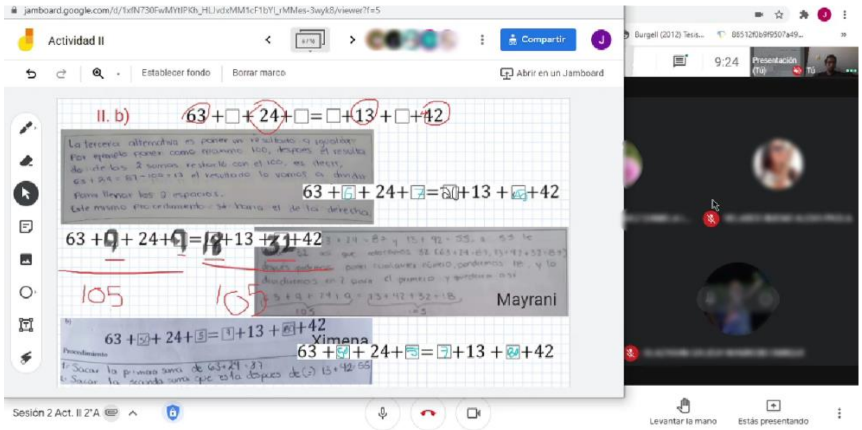

De la misma manera, los demás equipos utilizaron el *Jamboard* para escribir su respuesta en los espacios indicados en la pizarra. Después, el profesor les planteó el cuestionamiento acerca de la diversidad de resultados obtenidos en este ítem, en la que se desarrolló la conversación que se muestra a continuación:

> *Profesor: ¿Por qué creen que hay diversidad en resultados?*
> *Alumna 16 (chat): Porque se hizo sumas, restas y multiplicaciones y da diferentes resultados.*
> *Alumna 11 (chat): Porque no tomamos el mismo término como resultado, es decir, nosotras elegimos el 100, otros el 105, etcétera.*

En la Figura 133 se observan los resultados de los tres equipos y la manera en la que concluyen que dependiendo el número a completar en cada miembro serán los valores establecidos en cada espacio en las sentencias. Además, que para determinar qué números son los correctos, lo deducen de manera que se mantenga la equivalencia durante todo el proceso.

**Figura 133**

*Pizarra con los tres procedimientos de los equipos en el ítem b)*




Por lo que se refiere al ítem c), los alumnos le dedicaron un momento a reflexionar acerca de la solución que utiliza la propiedad de adición para la igualdad (conmutativa), en la que orientados por el docente determinaron que no es necesario realizar la operación de cada miembro como medida de comprobación. La conversación a la que se alude se detalla en el siguiente fragmento:

> *Profesor: (En una de las respuestas con estrategias computacionales del equipo 3) El procedimiento dice que les tiene que dar el mismo resultado. Esta pregunta es para todos. ¿Es necesario realizar la suma de éste (indicando los elementos del miembro izquierdo) y de éste (indicando los elementos del miembro derecho) para saber que es lo mismo? Es decir, que hay los mismos de un lado que en el otro.*
> *Alumna 14: No.*
> *Profesor: ¿Por qué no? ¿qué hay en esta sentencia que nos permite decir que no es necesario hacer la suma?*
> *Alumna 14: Que son los mismos valores.*

Por otra parte, en el ítem d) que consiste en la introducción de ecuaciones lineales de una variable. Se compararon los procedimientos de manipular el miembro derecho y el de tabular valores en el espacio en blanco en la sentencia. Un punto para destacar fue que los alumnos consideraron que la resolución del equipo 1, es decir, la de aplicar las propiedades de la igualdad, es más sencilla que el de sustituir diferentes números. En el fragmento presentado se observa que la alumna interrumpe la explicación de la estrategia de tabular para indicar que considera más sencilla la segunda opción.

*Profesor: (Explicando el procedimiento de tabular valores en la sentencia) En el procedimiento dice un número al azar, pero podría irnos intentando números y jamás nos podría dar el valor. Si intentamos con 1…*
*Alumna 4: Es más fácil restarle el 48 al 139*

En el ítem e), la reflexión se centró en los ejercicios donde se muestra la comparación de dos ecuaciones, en específico, $7 \cdot x + 48 = 139 - 48$ y $7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$. Uno de los puntos mencionados fue el valor de $x$ en cada ecuación, los estudiantes determinaron que al modificar solo un miembro se altera el resultado de la variable. Mientras que, cuando se agregan los mismos elementos en cada lado de la igualdad permite hacer la ecuación más sencilla sin interferir en el resultado.

A su vez, el ítem f) donde la prioridad en este ejercicio es identificar que las dos ecuaciones son equivalentes. En las respuestas obtenidas se tenía diversidad en considerar que el valor de $w$ es diferente en cada ecuación, por tanto, en este momento se le cuestionó a un alumno acerca de esta idea y el diálogo se desarrolló de la siguiente manera:

*Profesor: Alumno 17, ¿crees que el valor de w cambie en cada una de las ecuaciones?*
*Alumno 17: Yo digo que sí.*
*Profesor: ¿Por qué?*
*Alumno 17: Porque tiene $-9$… ¡ah no!, ya vi bien, no afecta (el valor de $w$). El resultado será el mismo porque el -9 está en los dos… en el producto y en el resultado.*

Cabe mencionar, que este estudiante junto con sus compañeros en el trabajo en equipo señaló que el valor no cambia en ambas ecuaciones, sin embargo, durante su participación dudó de su respuesta, pero la justificación fue enriquecida con las ideas discutidas en el anterior ítem.

Además, el equipo 1 en las hojas de trabajo indicó que el valor de $w$ no es el mismo en ambas ecuaciones y con el desarrollo de esta sesión cambiaron de opinión argumentado que no notaron que el $-9$ se encontraba en ambos lados de la ecuación y que por tanto no cambia el número de la variable.

El siguiente ítem g) se refiere a la propiedad reflexiva de la igualdad en la sentencia $8x + 14 = 14 + 8x$, la cual tiene por característica que al aplicar técnicas para despejar el valor de la variable no se obtiene un resultado concreto. En este sentido, la primera opinión de los alumnos fue que sí hay una respuesta específica para tal igualdad. Luego, el profesor le pidió a cada uno que trataran de determinar el valor, entonces, mediante la explicación de sus procedimientos comprendieron que no es posible determinar una sola respuesta, sin embargo, esto no implicó que se estableciera que la configuración de la sentencia algebraica fuera incorrecta, sino que el argumento consistió que es válido porque se tienen los mismos elementos tanto en el lado izquierdo como en el derecho.

Por último, el apartado III no tuvo mayor discusión porque la mayoría de los estudiantes determinó que el conjunto de pasos que proporcionaba el problema les causó confusión para comprenderlo de tal manera que recurrieron al procedimiento de solución desde la ecuación que se presentó al inicio sin contemplar la lógica desarrollada.

De manera general, los avances que presentaron los estudiantes durante la aplicación de la situación didáctica en cuanto al ítem a) consisten en que comprenden, pero no aplican estrategias compensatorias en sentencias con un espacio vacío del tipo $a + b = c + d + \square$. Esto indica que contemplan tanto estrategias computacionales como compensatorias en un significado *Advance Basic Relational*.

Por lo que se refiere al ítem b), en formas de solución donde aplican cálculos aritméticos contemplan ambos miembros para determinar los números a agregar. Asimismo, comprenden que esta situación genera diferentes respuestas. De tal manera, que el significado *Basic Relational* permite establecer el sentido bidireccional para progresar en argumentos relacionados con los significados *Advance Basic Relational* y *Expresión de una equivalencia*.

Acerca del ítem c) en producciones de los discentes donde utilizaban de manera inconsciente la propiedad de adición para la igualdad (Conmutativa) persistía en los alumnos realizar operaciones para comprobar la respuesta. Después de analizar la configuración de la sentencia esta idea ya no fue necesaria y cambió la manera de argumentar sus respuestas de acuerdo con el significado *Expresión de una equivalencia*.

En el ítem d) los estudiantes conjeturaron luego de comparar la tabulación como forma de solución y las propiedades de adición y multiplicación que el emplear propiedades de la igualdad resulta más sencillo, pues los estudiantes no la consideran óptima para este tipo de sentencias. Por tanto, comprenden explicaciones relacionadas con el significado *Expresión de una equivalencia*.

Por otra parte, en el ítem e) cuando se emplean las propiedades de adición y multiplicación para la igualdad en sentencias del tipo $ax + b = c$ persiste el sentido bidireccional al contemplar ambos miembros para mantener la igualdad. Lo cual muestra la permanencia del significado *Expresión de una equivalencia*.

En cuanto al ítem f) los estudiantes, en primera instancia, al observar la estructura de las dos ecuaciones contemplan que son diferentes y que por tanto el valor de $x$ es distinto en cada una. Sin embargo, la discusión de los ítems anteriores favoreció para que reformulara su respuesta ya que consideró ambos miembros de la igualdad. Esto muestra un avance en su discurso hacia el significado Expresión de una equivalencia.

Y en el ítem g) cuando se les presenta a los estudiantes sentencias en las que se le solicita verificar la igualdad, la primera manera de justificar sus respuestas reside en utilizar procedimientos algebraicos como la transposición de términos. Sin embargo, en ejercicios donde no es posible mediante esta forma de solución emplean otras maneras, en este ítem la propiedad reflexiva, pues los alumnos observan que se tienen los mismos elementos en cada miembro de la sentencia. Lo cual evidencia un avance en el significado *Expresión de una equivalencia*.

Y, en el apartado III cuando los alumnos tratan de comprender el procedimiento que utiliza la propiedad de adición para la igualdad e identificar los errores que contiene, optan por omitir tal proceso y recurren a formas de solución que conocen como la transposición de términos. Relacionado con los significados esta situación muestra un estado fijo en cuanto a la Expresión de una equivalencia, pero con limitaciones en ciertas formas de solución.

### 4.4.1.4. Situación de institucionalización

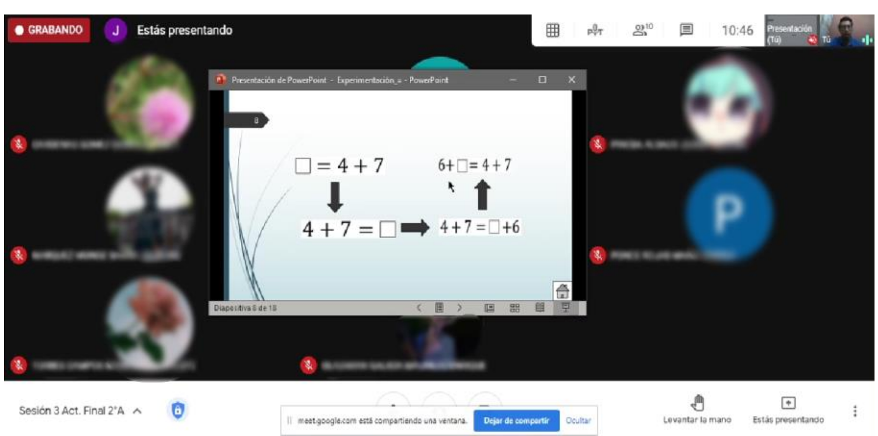
La situación de institucionalización corresponde a la sesión 4 de la organización para la experimentación con la modalidad síncrona. De la misma manera que en las anteriores sesiones, el recurso utilizado fue *Google Meet* para llevar a cabo la reunión. Se inició con la recapitulación del problema del apartado III y las evidencias de esta situación son las notas de los estudiantes en sus cuadernos.

Primero, se compartió una presentación con la finalidad de que lograran seguir el desarrollo de la sesión a través de la recapitulación de algunas de sus respuestas. De esta manera, se formalizó el trasfondo de las sentencias de la situación de acción, es decir, la manera en la que se configuró cada ítem y las respuestas obtenidas.

En la Figura 134 se muestra el momento donde se explica mediante flechas como fue el seguimiento desde la sentencia $\square = 4 + 7$ hasta $\square + 6 = 4 + 7$ y la manera en la que a través de sus propias respuestas reflexionaban sobre la estructura de los ejercicios considerando de manera implícita la equivalencia y el signo igual.

**Figura 134**

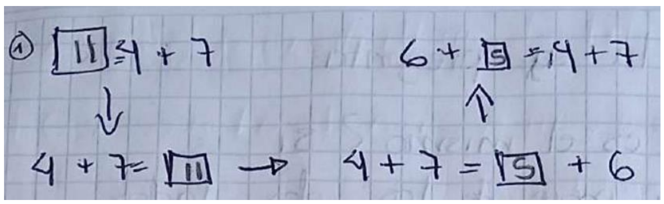
*Diapositiva con el conjunto de sentencias de la situación de acción*



En este sentido, en las notas de la Alumna 19 de la Figura 135 se observa cómo transcribe el esquema mostrado en la presentación y además agrega los valores correspondientes para cada sentencia. Cabe mencionar, que los números solamente se mencionaron durante la explicación, pero no se incluyeron de manera visual en la presentación, por lo que parece indicar que esta estudiante sintetiza el proceso que conllevó el desarrollo del apartado I de la hoja de trabajo.

**Figura 135**

*Apuntes de la alumna 19 de las sentencias de la situación de acción*



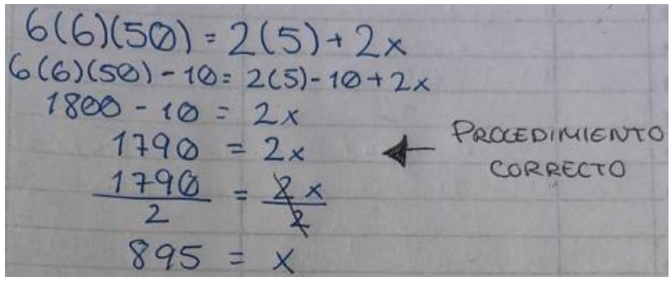

Luego, se procedió a formalizar el procedimiento que utiliza estrategias compensatorias como la manera de visualizar el sentido bidireccional del signo igual en las sentencias numéricas. Así, se retomó el ítem d) con la sentencia $\square + 28 = 46 + \square$ donde se abordó la manera en la que se establecen relaciones entre los elementos de cada miembro y cómo se utiliza la información obtenida para determinar los valores en los espacios indicados a través de justificar que en ambos lados se mantiene la equivalencia sin la necesidad de comprobar con cálculos aritméticos.

De la misma manera, se procedió con el apartado III en el cual se mostraron algunas dificultades, específicamente, en comprender los pasos que proporcionaba el problema planteado. Así, en primer lugar, se explica la lógica y el error en los pasos descritos en el proceso de resolución. Luego, continuando con el razonamiento establecido se comienza con la solución del ejercicio empleando las propiedades del signo igual.

En la Figura 136 se muestran los apuntes de la alumna 27 en los que desarrolla el procedimiento para resolver la ecuación planteada utilizando las propiedades del signo igual. En esta ocasión, ningún alumno tiene la necesidad de intercambiar los elementos para indicar la respuesta, es decir, como $x = 985$ por lo que parece indicar que no persiste la misma resistencia a observar las ecuaciones de una variable de manera unidireccional.

**Figura 136**

*Apuntes de la alumna 27 acerca del apartado III*




Después, se institucionaliza el ítem f) del segundo apartado en el que, también, se tuvieron diferentes respuestas tanto en la situación de formulación como en la discusión realizada en la situación de validación. Por tanto, este ejercicio se caracteriza por comparar dos ecuaciones equivalentes y cuestionar si el valor de la variable es el mismo en ambas. Así, mediante el apoyo del problema del apartado III fue fundamental para expresar por qué el valor de $w$ es el mismo utilizando términos del pensamiento relacional propio del sentido bidireccional del signo igual.

Por otra parte, se continuó con los axiomas de la igualdad y los ejemplos seleccionados como se describe en el análisis a priori. Durante el desarrollo de las actividades, ciertos estudiantes aplicaron algunas de las propiedades del signo igual, sin embargo, no lo hacían de manera consciente. Así, que en este momento se abordó de manera formal la reflexividad, simetría, transitividad, adición y multiplicación para la igualdad.

### *4.4.2. Validación*

Esta sección versa en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori distinguiendo entre los aprendizajes esperados con los obtenidos. Además, proporciona los aspectos a considerar para la mejora de la situación didáctica como herramienta para que los docentes generen aprendizaje a largo plazo con los estudiantes. También, dadas las características de este trabajo se contempla el escenario virtual donde se llevó a cabo la experimentación puesto que influye en los resultados de la aplicación. A continuación, se realiza el cotejo de ambos análisis mediante los tipos de situaciones.

En la situación de acción, el objetivo fue que el discente contemple de manera global las sentencias utilizadas en el apartado I de la hoja de trabajo sin enfatizar en la estrategia para lograrlo, es decir, que comprenda que las sentencias tienen dos miembros y que se pueden leer de izquierda a derecha y viceversa.

En este orden de ideas, el comportamiento esperado fue la persistencia del sentido operativo en las sentencias como distinguir que el lado izquierdo representa la operación y el derecho el resultado, es decir, interpretándolas de manera unidireccional. Aunque, mediante el desarrollo y conducción de las actividades los estudiantes reflexionaron sobre las configuraciones presentadas y que mediante sus propias respuestas modificaron la manera de observar las sentencias. Esta situación a comparación de las siguientes, se considera que fue la que menor brecha tuvo entre el aprendizaje que se esperaba con los que se obtuvo.

En cuanto a la devolución, en las situaciones de acción y formulación se desarrolló de la forma esperada, es decir, a través de las actividades proporcionadas los alumnos adquirieron su responsabilidad de aprendizaje al involucrarse con la resolución de las sentencias tratando de establecer argumentos con las configuraciones presentadas e intercambiar sus ideas con sus demás compañeros y el profesor orientando la adaptación a la situación didáctica.

Por otra parte, en la situación de validación el desarrollo de la devolución del profesor hacia el alumno no fue la esperada. En el sentido que los estudiantes se involucraron de manera esporádica en la discusión de sus respuestas, por tanto, el docente constantemente alentó a los alumnos a responsabilizarse de su aprendizaje a través de fomentar las participaciones para que el propósito de la actividad se lograra.

Por lo que se refiere a la situación de formulación, el propósito fue que los alumnos reunidos en equipos desarrollen estrategias compensatorias a través de diferentes estructuras de sentencias en la que permitiera comprender el signo igual de manera bidireccional. En cuanto a las sentencias que solicitaban tres procedimientos de solución, predominaron el uso de estrategias computacionales, sin embargo, las respuestas que hacían uso de estrategias compensatorias mostraban fuertes indicios del pensamiento relacional, es decir, la manera de establecer relaciones entre ambos miembros de la sentencia. Cabe mencionar que ningún equipo mostró que no comprendía los ejercicios planteados, esto puede ser por la manera en la que se desarrolló la situación de acción.

En este sentido la devolución en la situación de formulación fue efectiva porque los estudiantes mostraron diferentes estrategias para solucionar los aspectos de las actividades. Por ejemplo, la manera de organizar los elementos tecnológicos para que cada integrante del equipo lograra participar de manera activa en la resolución de las sentencias. Además, de la constante comunicación para fundamentar y comprender las estructuras de cada ítem.

El escenario virtual durante esta situación influyó en el uso de recursos para la comunicación, pues, de manera general, los estudiantes optaron por transmitir información auditiva como el habla y visual la presentación de las actividades, sin embargo, al momento de compartir sus ideas no lograban comunicar de la mejor manera con sus demás compañeros.

Por otra parte, el videograbar el trabajo de los discentes permitió conocer a detalle el proceso cognitivo que conllevó a cada equipo la formulación de sus procedimientos. De esta manera, fue posible distinguir los significados, estrategias, propiedades y formas de solución del signo igual y complementar las reducidas justificaciones en sus respuestas escritas en las hojas de trabajo.

Acerca de la situación de validación, se esperaba que a través de la participación se generara el diálogo de acuerdo con la elección de algunas de sus respuestas proporcionadas en las hojas de trabajo. Así, mediante la discusión propiciaría la reflexión y por cuenta propia modificar la manera de resolver algunos ejercicios. Para enriquecer las participaciones se utilizó como recurso la pizarra *Jamboard* para que de manera visual sea auxiliar de la explicación de los estudiantes. Durante la sesión hubo poca participación de los alumnos, incluso, parecían cohibidos a opinar, puede ser que el uso como la pizarra fuera el causante de este comportamiento.

Con respecto al contrato didáctico establecido en la situación de validación implicaba que los estudiantes debían de participar explicando a sus demás compañeros sus respuestas utilizando las herramientas de la pizarra digital y así plasmar sus ideas de manera visual. Conforme se fue desarrollando la sesión, el contrato fue modificado para lograr incrementar las acciones de los alumnos, de tal manera, que mediante preguntas dirigidas por el docente fomentó el intercambio de argumentos y la manipulación de la pizarra. Esta modificación podría realizarse desde el inicio cuando se introduce la dinámica de la sesión para que los estudiantes sea conscientes de su responsabilidad y que tengan un estímulo interno fortalecido por elementos externos como la valoración de sus intervenciones.

Finalmente, la situación de institucionalización donde se recapitulan algunas producciones de los alumnos que presentaron dificultades tanto en la situación de formulación y validación donde se revela el trasfondo de cada ejercicio. El propósito de esta situación fue formalizar los conocimientos empleados en las anteriores situaciones de manera inconsciente. De tal manera, se institucionalizaron los axiomas de la igualdad y se mostraron ejemplos en contextos aritméticos y algebraicos tal y como se planteó en el análisis a priori.

# CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En este capítulo se describen las conclusiones del trabajo con relación a la pregunta de investigación y los objetivos. A partir de ello, se indican las aportaciones y limitaciones derivado del análisis realizado en el capítulo anterior. Se sugieren las recomendaciones para futuras investigaciones. Por último, se plasma la reflexión acerca del desarrollo profesional causada de la experiencia en realizar esta investigación y del estudio en la Maestría en Matemática Educativa.

## 5.1. Respecto a la pregunta de investigación y los objetivos

Este apartado versa en responder a la pregunta de investigación y la manera en la que se cumplieron los objetivos planteados en el capítulo I. En este sentido, a continuación, se describe de manera literal cada elemento y se justifica mediante los resultados obtenidos el porqué de cada afirmación

Respecto a la pregunta de investigación, la cual fue: ¿Cuál es la repercusión que tiene en el aprendizaje incorporar el sentido bidireccional del signo igual en una situación didáctica para la resolución de ecuaciones lineales de una variable en estudiantes de Nivel Medio Superior?

Considerando los resultados obtenidos y la reflexión derivada de las cuatro fases de la Ingeniería didáctica se concluye que la comprensión del signo igual es un elemento inherente a las ecuaciones lineales de una variable pues dependiendo del tipo de estrategias utilizadas ya sea en el contexto aritmético o algebraico refleja la versatilidad de este signo. Por tanto, a través de las sentencias es posible conocer qué significados le atribuyen los alumnos a este signo y las ecuaciones son un tipo de sentencias con variables.

En este sentido, aludiendo a los significados del signo igual, como indican otros autores (Kieran, 1981; Fyfe, Matthews & Amsel, 2017;) el sentido operativo persiste en el nivel medio superior y se evidencia en sentencias atípicas a las que los alumnos están comúnmente expuestos en su trayectoria escolar. De tal manera, que en algunas configuraciones observan de manera unidireccional, es decir, de izquierda a derecha y de forma segmentada las sentencias lo que provoca que continúen operando para determinar un número concreto.

Acerca del sentido bidireccional del signo igual, a través de la revelación de la naturaleza de este signo en el contexto aritmético fue posible lograr que los alumnos visualizaran las sentencias mostradas de manera global, es decir, identificando cada miembro y estableciendo relaciones entre ellos, como sucedió en la situación de acción. En la mayoría de los ítems diseñados en las hojas de trabajo permeó el uso de estrategias computacionales, sin embargo, los procedimientos con estrategias compensatorias mostraron amplio dominio del pensamiento relacional propio del sentido bidireccional del signo igual.

En cuanto a las situaciones didácticas, la organización de la situación de acción tiene aspectos sobresalientes a destacar relacionados con la confrontación del sentido operativo y el pensamiento relacional. En esta situación el propósito fue que el discente contemple las sentencias de manera global, es decir, que establezca el miembro izquierdo y el derecho sin ahondar en la justificación para lograr tal comprensión. A través del contrato didáctico establecido y la devolución realizada los estudiantes reflexionaron para que, de manera general, lograran visualizar las sentencias de la forma prevista. Cabe mencionar que esto fue posible por la estructura de las actividades y las configuraciones de las sentencias, lo cual coincide con Corona y Díaz-Menchaca (2018) en la que señalan que debido a los contextos matemáticos utilizados en el diseño de sus tareas fomentaron la reflexión sobre el signo igual, y la consecuente nueva forma de comprenderlo.

De tal manera, la repercusión de incorporar el sentido bidireccional del signo igual en una situación didáctica consistió en que los estudiantes adecuaron sus discursos para responder a las sentencias presentadas donde mostraron significados, estrategias y formas de solución acerca del signo igual de manera inconsciente e informal en las hojas de trabajo con los conocimientos aritméticos y algebraicos adquiridos. Por tanto, a través implementar sentencias con configuración atípica permitió que los estudiantes reflexionaran de manera implícita sobre los usos del signo igual y la forma en la que se relacionan con operaciones aritméticas y ecuaciones lineales de una variable.

El incitar la reflexión acerca de la comprensión y usos del signo igual es el comienzo en reducir la brecha entre la aritmética y el álgebra y contribuir en la disminución de dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de ecuaciones lineales de una variable puesto que enlaza ambas ramas de las matemáticas de forma heurística.

En lo que respecta al objetivo general de la investigación, que establecía proponer una situación didáctica diseñada desde el sentido bidireccional del signo igual para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales de una variable con estudiantes de segundo semestre de bachillerato, se considera logrado a partir de los siguientes aspectos:

- Revisión de propuestas didácticas

Ya que permitió tener un panorama acerca de las propuestas publicadas en la literatura y con ello establecer las características utilizadas como la secuencia de actividades, recursos didácticos, teorías, entre otros. De tal manera, que fue posible reconocer la perspectiva en la que ha sido abordado el aprendizaje de las ecuaciones lineales de una variable y proponer una visión alternativa.

- Diseñar actividades secuenciadas

Puesto que la construcción de diversas actividades fue el detonador para obtener los razonamientos de los estudiantes y lograr percibir el logro del aprendizaje con respecto al tema en cuestión. Además, mediante las producciones de los alumnos se logró analizar las estrategias utilizadas en cada configuración de sentencias.

- Establecer el contrato didáctico y promover la devolución

Pues mediante el contrato didáctico se establecieron los roles tanto del profesor como del alumno para lograr la aplicación de las actividades y la comunicación en el medio didáctico. También, lograr la devolución implicó trasladar la responsabilidad del aprendizaje al alumno y así el profesor orientar su adaptación en el transcurso de las sesiones. Estos aspectos en el escenario virtual conllevaron tanto a los estudiantes como al profesor a utilizar recursos tecnológicos para el desarrollo de las actividades y la manera de colaborar en las sesiones.

En comparación con un ambiente presencial el cambio fue que no se puede distinguir en sesiones síncronas la reacción inmediata hacia el abordaje del contenido mientras que, en trabajos independientes asíncronos, entendido como la no comunicación directa entre profesor y alumnos, se obtiene mayor evidencia acerca del desarrollo que conlleva la resolución de las actividades a través de registrar su participación mediante la videograbación.

- Seleccionar posturas teóricas sobre los significados del signo igual

Puesto que se debía de tener conocimiento de la variedad de significados del signo igual para seleccionar aquellos que se desean promover en los estudiantes. Por tanto, se optó por la clasificación de Singh & Kosko (2017) y de Molina (2006) como referencia para analizar las explicaciones de los estudiantes y describir a detalle las estrategias utilizadas de acuerdo con el tipo de comprensión mostrado. En este sentido, las respuestas de los alumnos mostraron significados *Operador, Basic Operational, Flexible Operational, Basic Relational*, *Advance Basic Relational*, *Full Relational* y *Expresión de una equivalencia* y estrategias compensatorias y computacionales.

En cuanto al objetivo específico OE1. Distinguir aspectos que coadyuven a la construcción de una situación didáctica mediante un análisis preliminar utilizando el signo igual como punto de referencia. Para cumplir este objetivo se consideró la fase de análisis preliminares de la Ingeniería didáctica desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica.

Se concluye que las estrategias computacionales es la primera opción de los estudiantes para resolver las sentencias presentadas en el cuestionario de la dimensión cognitiva. De acuerdo con los resultados de los ítems del apartado III el porcentaje de las respuestas que utilizaron esta estrategia es la siguiente: a) el 73%, b) el 77%, c) el 80% y d) el 50%.

Por otra parte, algunos alumnos muestran sentido operativo del signo igual. En los resultados de la dimensión cognitiva en los ítems a), b), c) y d) del apartado III se observa el 27%, 23%, 3% y 3% este significado, respectivamente. Esto concuerda con lo mencionado con Knuth et al. (2006) y Fyfe, Matthews & Amsel (2017) que en niveles posteriores a la

Educación Secundaria persiste el sentido operativo en sentencias atípicas.

Otro punto es que las sentencias que tiene complejidad para explicar su respuesta mediante estrategias computacionales no son resultas o evocan una respuesta diferente. En este sentido, configuraciones de sentencias de significados *Advance Basic Relational*, *Full Relational* y *Expresión de una equivalencia* fueron las que causaron mayor porcentaje en ítems no contestados y también fueron las que evidenciaron explicaciones con estrategias compensatorias por lo que el tipo de estructura de las sentencias influyó en los argumentos utilizados para responder sus respuestas.

A su vez, en el cuestionario aplicado al docente se concluye que el docente presenta una desvinculación entre las propiedades del signo igual con la transposición de términos. Esto se determina cuando se le cuestiona acerca de la manera en la que enseña la resolución de ecuaciones lineales de una variable y alude a esta técnica como un conjunto de reglas sin aludir al trasfondo de ésta, lo cual, puede ser transmitido a los estudiantes.

Acerca de la virtualidad fue una condición que surgió del análisis del campo de restricciones que determinó la construcción de la propuesta. Perteneciente al análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica está el reconocer el escenario donde se desarrolla el proceso de aprendizaje, entonces, al ser virtual los tipos de situaciones tuvieron que ser adaptadas a tal contexto.

Por lo que se refiere a la epistemología del sino igual, la adopción universal de un símbolo para representar la igualdad destacó la lucha por la supremacía las propuestas de Recorde y Descartes. Puntualizando la influencia en las obras de Cálculo de Newton y Leibniz para ser partidarias del signo de Recorde. Además, que la diversidad de significados asociados a cada propuesta es un indicador de la complejidad de este signo.

Correspondiente al segundo objetivo específico OE2. Diseñar una situación didáctica donde vertebre el sentido bidireccional del signo igual en sentencias aritméticas y algebraicas. Este objetivo se logró a partir de la revisión de las clasificaciones de Singh & Kosko (2017) y la de Molina (2006) y la Fase 2 Concepción y análisis a priori.

Se concluye que algunos significados de Molina (2006) complementan la clasificación de Singh & Kosko (2017). Estos son *Operador* y *Expresión de una equivalencia*. El primero se ubica al inicio de los niveles antes del *Basic Operational* porque indica la comprensión arraigada del sentido operativo en cuanto al tipo de sentencias que el estudiante acepta. El segundo significado se localiza al final de la jerarquía después del *Full Relational* porque representa al pensamiento relacional que implica el uso de propiedades del signo igual que muestran el sentido bidireccional.

A su vez, la situación didáctica fue diseñada considerando los conocimientos y herramientas tecnológicas disponibles mediante el análisis del campo de restricciones. Este análisis se refiere a las características del escenario en donde se va a aplicar la propuesta, por tanto, se consideró la virtualidad como espacio donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje y los aspectos que involucra.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la dimensión cognitiva, la estrategia de mayor predominancia fueron las computacionales y en menor proporción las compensatorias y propiedades de la igualdad. Entonces, en la construcción de la situación la idea consistió en que el alumno exprese de alguna manera más de un procedimiento. En este caso fue solicitar tres procedimientos para resolver cada sentencia, así fue posible observar diferentes significados del signo igual que manifiestan los estudiantes.

En este orden de ideas, al realizar el análisis a priori de cada posible respuesta se detectó que evocan significados, estrategias, propiedades y formas de solución del signo igual. Los primeros tres proporcionados por la literatura y el último del uso que se le da al signo. De tal manera, que a través de los procedimientos puede observar la manera en la que comprenden el signo igual y cómo podría afectar a otros temas matemáticos.

Por lo que se refiere al tercer objetivo específico, OE3. Implementar la situación didáctica en un escenario virtual de enseñanza con alumnos de segundo semestre de bachillerato corresponde con la Fase 3 Experimentación. Se concluye que el alumno se adaptó al medio propuesto a través de utilizar sus conocimientos aritméticos y su comprensión del signo igual. El medio que se diseñó para los estudiantes empleaba el contexto aritmético, el cual, es conocido por los mismos y la parte desafiante consistió en la configuración de las sentencias presentadas, por tanto, los alumnos se apropiaron de la resolución y cuestionaban al docente como a sus propios compañeros de las respuestas emitidas durante la experimentación.

Por otra parte, el escenario virtual no afectó la evidencia de significados, estrategias, y propiedades del signo igual en las producciones de los discentes. Tanto en las respuestas emitidas de manera escrita como verbalmente se observó que los alumnos explicaban, desde sus discursos, elementos de la bidireccionalidad de este signo. Aunque no empleaban la formalidad de cada aspecto se presenció como aludían a los mismos por lo que la virtualidad fue una condición a la que se adaptó la propuesta.

En cuanto a la virtualidad se concluye que afectó los resultados obtenidos en la manera en la que se desarrolló la interacción entre alumnos. A través de las sesiones síncronas parece que la comunicación entre los alumnos solo se lleva a cabo cuando realizan participaciones en la clase, sin embargo, no es observable la manera en la que se comunican si no es mediante la reunión.

Por último, el cuarto objetivo específico OE4. Describir los momentos de la aplicación y reconocer elementos satisfactorios en términos de las respuestas de los estudiantes de bachillerato está en correspondencia con la Fase 4 análisis a posteriori y validación.

De acuerdo con los resultados obtenidos se determina que la estrategia de reagrupación del significado *Pseudo-Relational* no fue expresada en las producciones de los estudiantes. Sin embargo, se observaron respuestas no descritas en el análisis a priori: “conmutativa parcial” y “compensatoria y descomposición” que aluden a la interpretación de las sentencias en significados *Full Relational* y *Advance Basic Relational* respectivamente. Estas formas de solución muestran avances en cuanto al sentido bidireccional del signo igual y la estructura de los términos de las sentencias.

Por otra parte, se tiene presente el significado *Operador* en sentencias de los ítems f) y g) del apartado II de la situación didáctica con el 33% del total de respuestas. Estos ítems abordan la propiedad de adición en la igualdad y la propiedad reflexiva en los que muestran cierta resistencia a aceptar tales configuraciones.

Acerca del desarrollo de la situación didáctica, se determina que a través de evidenciar la naturaleza del signo igual provocó la reflexión acerca de sus usos y comprensión. Esto quiere decir que mediante la configuración de sentencias no habituales en la trayectoria escolar es posible fomentar en los estudiantes explicaciones que involucran aspectos del sentido bidireccional del signo igual.

Asimismo, mediante las respuestas de los alumnos se determina que utilizan estrategias y propiedades de los significados del signo igual sin estar completamente consciente de ello. Es decir, en las producciones se observaron elementos del signo igual, aunque no estrictamente con la formalidad que implica. Por tanto, los estudiantes explican y responden aludiendo a estos aspectos y que con la institucionalización necesaria puede influir en la manera de aprender las ecuaciones lineales de una variable.

En este sentido, se establecen tres aspectos fundamentales que influyeron en los discursos y producciones de los estudiantes en la estructura de la situación didáctica. El primero es que los alumnos deben de iniciar contemplando de manera global las sentencias sin hacer énfasis en las estrategias que utilizan. Segundo, las sentencias deben de ser atípicas de acuerdo con la trayectoria escolar, por ejemplo, las expuestas en la clasificación de Singh & Kosko (2017). Y, tercero solicitar al estudiante diferentes maneras de solución, de tal manera, que establezcan relaciones en ambos miembros de la igualdad que no surgen en primera instancia.

En cuanto al escenario virtual, se obtuvo menor información en la situación de validación esto porque existen algunas condiciones tecnológicas como el internet y de privacidad en los espacios donde los alumnos ingresan a las sesiones que no están visibles en el aula por lo que puede modificar la dinámica de interacción en comparación con el escenario presencial.

### 5.2. Aportaciones y limitaciones

En lo que respecta a las aportaciones que proporciona este trabajo, se pueden indicar las siguientes: En primer lugar, de acuerdo con el objetivo de este trabajo, fue el de brindar una propuesta didáctica para el aprendizaje de ecuaciones lineales de una variable. La construcción se realizó considerando una postura diferente a las consultadas en la literatura, por lo que la idea que orientó su diseño fue mediante el sentido bidireccional del signo igual.

Además, dadas las características de la enseñanza ocasionadas por la contingencia sanitaria por el Covid-19, las actividades se desarrollaron a través de escenario virtual que fue una variante en cuanto a la interacción entre profesor y alumno con el medio didáctico en comparación con un ambiente presencial, por lo que se indicaron algunas estrategias que pueden ser útiles para desarrollar el aprendizaje utilizando recursos tecnológicos.

También, se establece una ruta para lograr que los estudiantes visualicen de otra manera las sentencias aritméticas propuestas que consisten en: evidenciar la naturaleza del signo igual, es decir, conocer que no solo se puede leer de izquierda a derecha con configuraciones atípicas sin ahondar en la justificación para promover la comprensión global. Luego, incluir estructuras como las que se indican en Singh & Kosko (2017) para promover diferentes significados solicitando varios procedimientos de resolución, algunas otras donde permee la propiedad reflexiva de la igualdad y ecuaciones equivalentes.

Después, realizar una discusión de las producciones proporcionadas por los estudiantes donde se trate de explicar los aspectos inmersos en las respuestas y generando algunas conclusiones por ellos mismos. Y, formalizar lo pretendido a través del desarrollo de las sesiones, incluyendo algunas respuestas de los alumnos interesantes a destacar el proceso que se llevó en la discusión e incluir algunos elementos matemáticos como las propiedades de la igualdad.

En cuanto a las limitaciones del estudio residen en el escenario virtual porque fue una condición a la que se tuvo que adaptar la propuesta que influyó tanto en la implementación como en los resultados obtenidos. Se considera que la situación didáctica de este trabajo puede ser aplicada en contextos presenciales e híbridos con modificaciones necesarias.

También, otra limitante fue la cantidad de estudiantes que participaron pues con más alumnos cambiaría la organización de los equipos, el desarrollo de la situación de validación y se tendría más información que analizar de las respuestas emitidas.

Por lo que se refiere a las ecuaciones lineales de una variable se consideró solamente como método de resolución las propiedades de la igualdad y se aludió brevemente a otros aspectos como el concepto de variable, términos algebraicos y ecuación que podrían sugerir otros elementos a contemplar para el diseño de la propuesta, su implementación y los resultados obtenidos.

Y, en los aspectos contemplados del *Early algebra*, que tienen alguna relación con el tema de ecuaciones lineales de una variable, fue únicamente el sentido bidireccional del signo igual por lo que enfoques como la generalización y la perspectiva de estructura quedaron descartados.

### 5.3. Recomendaciones para futuras investigaciones

Para futuros trabajos se sugiere lo siguiente:

- Respecto al objeto matemático se pueden construir actividades con ecuaciones de una variable de mayor grado teniendo precaución de otros tipos de errores que se pueden presentar y que en cierto momento pueden obstaculizar el objetivo de las actividades.
- El escenario no solamente debe ser virtual, sino considerar el presencial como se utiliza de manera usual o mixto de acuerdo como se considere necesario dependiendo de los tipos de situación y la manera en la que mejor se pueda desarrollar.
- Si se opta por un escenario meramente virtual, se debe contemplar el dominio de los estudiantes y docente de las herramientas tecnológicas que serán necesarias, por lo que se puede dedicar cierto tiempo a la instrucción, pero teniendo en consideración que se mantenga en segundo plano.
- En cuanto al cuestionario de la dimensión didáctica hacia el profesor titular puede cambiar el formato a entrevista con la finalidad de obtener más información acerca de las estrategias que utiliza el docente para abordar el tema.

### 5.4. Reflexión docente

En este apartado se aborda la reflexión durante el transcurso de la maestría en matemática educativa y de la elaboración de este trabajo de investigación. De tal manera que se alude a los elementos que intervinieron en el proceso de formación como profesor de nivel bachillerato indicando aspectos teóricos y prácticos.

Por lo que se refiere a la trayectoria de la maestría un aspecto a destacar consiste en el acercamiento de algunas teorías de la matemática educativa que permitieron poseer la sensibilización para modelizar el proceso de enseñanza y aprendizaje a través de proponer una perspectiva científica que brinda la posibilidad de diseñar mejores estrategias didácticas.

Otro punto, consiste en el incremento de la introspección mediante el desarrollo profesional. Pues a través de realizar reflexiones acerca del desempeño didáctico y los conocimientos necesarios para la docencia fue posible realizar un diagnóstico de las áreas de oportunidad y en el futuro próximo efectuar las acciones pertinentes para solventarlas mediante la formación continua.

En cuanto al trabajo realizado contribuyó a la formación como profesor en la manera de estar involucrado en un proceso de investigación, el cual, permite entablar conexiones entre la teoría y la práctica relacionada a la docencia. También, se logró ahondar en los conocimientos y resultados de la tesis de licenciatura en donde se abordó la comprensión del signo igual en alumnos de primaria.

Por otra parte, la realización de este trabajo permitió concientizar en las matemáticas que se enseñan en las instituciones educativas, es decir, dentro del bagaje de conocimientos matemáticos que se han desarrollado a lo largo del tiempo se han seleccionado algunos tópicos que en su conjunto conforman las matemáticas escolares, de las cuales, su aprendizaje faculta u obstaculiza la adquisición de conocimientos posteriores. Por tanto, el caso del signo igual se considera un factor que desencadena la reinterpretación que se les dan a las matemáticas escolares porque influye de manera radical en las probabilidades de éxito de resolver una ecuación lineal de una variable. De tal manera, que se considera que es un elemento para tener en cuenta durante la trayectoria escolar del estudiante.

En este sentido, en esta investigación se aludió principalmente a dos maneras de comprender el signo igual: El pensamiento relacional y el sentido operativo, es decir, el sentido bidireccional y unidireccional, respectivamente. La primera comprensión tiene beneficios en temas de álgebra y la segunda utilizada ampliamente en aritmética, ha ocasionado problemas en grados posteriores por su uso excesivo, sin embargo, ambas maneras de comprender el signo igual son importantes.

Por último, el propósito por el cual estudiar la maestría en matemática educativa fue profesionalizar mi práctica mediante conocimientos específicos de esta disciplina científica. Considero, que mis expectativas fueron cumplidas y contemplo que he complementado mi formación universitaria de tal manera que pueda plantear estrategias para solventar los problemas que se presenten en la futura práctica.

## REFERENCIAS


Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009). *Álgebra*. México: Prentice-Hall.

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009a). *Matemáticas Simplificadas* (2da ed.). México: Pearson Educación.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A Longitudinal Examination of Middle School Students' Understanding of the Equal Sign and Equivalent Equations. *Mathematical thinking and learning*, *9*(3), 221–247.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 29–48). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33–60). Grupo Editorial Iberoamérica.

Baldor, A. (2007). *Álgebra*. México: Grupo Patria Cultural.

Bartolomé, O. y Fregona, D. (2009). El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales. En M. Panizza (Comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y propuestas* (pp. 131–161). Paidós.

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, A. A., Torres, Y. F., y Romero, I. M. (2012). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes.

Broitman, C. (2010). *Las operaciones en el primer ciclo: aportes para el trabajo en el aula*. Buenos aires: Ediciones novedades educativas.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, *12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Carpio, C. Pacheco, V., Flores, C., y Canales, C. (2000). La naturaleza conductual de la comprensión. *Revista Sonorense de Psicología*, *14*(1). 1–10.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM.

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación matemática*, *19*(2), 67–94. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262007000200067&script=sci_arttext

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*, *2*(1), 1–10. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6885

Chavarría-Arroyo, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15–44. Recuperado de https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6009

Chica, Y. J., & Soto, Y. (2015). *Análisis de concepciones sobre signo igual y concepto de equivalencia desarrolladas en estudiantes de educación básica primaria, grado quinto de la institución educativa san simón sede Montealegre* [Tesis de especialidad no publicada]. Universidad de Tolima. Recuperado de http://repository.ut.edu.co/handle/001/1566

Corona, J. E., & Díaz-Menchaca, M. J. (2018). *Comprensión y usos del signo igual en alumnos de educación primaria: un estudio desde el álgebra temprana* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad de Colima.

Dalcín, M., & Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: su historia. En C. R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 20* (pp. 156–161). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*, *2*(1), 1–9. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6887

Douady, R. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61–96). Grupo Editorial Iberoamérica.

Erazo, J. D. (2011). Estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales con una incógnita y su aplicación en situaciones problema. En G. García (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 83–91). Gaia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2599/

Fernández-Verdú, C. y Ivars, P. (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*, (73), 14–22. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/65269/1/2016_Fernandez_Ivars_UNO.pdf

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* [Tesis de maestría no publicada] Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la sociedad de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemáticas Española*, *10*(2). 427–442.

Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*, (73), 38–44.

Fyfe, E. R., Matthews, P. G., & Amsel, E. (2017). College Students' Knowledge of the Equal Sign and its Relation to Solving Equations. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 279–282). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra & I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (pp. 39–50). Paidós.

García-Fajardo, V. A. (2014). *Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52692

García-Mendívil, P. T., Díaz-Gómez, J. L., & Vargas, J. R. (2016). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *Epistemus, Ciencia Tecnología y Salud*, (20), 55–61. Recuperado de http://sahuarus.mat.uson.mx/index.php/epistemus/article/view/51

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. En J. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 766–826). Granada: GAMI.

Gutiérrez, S. (2008). Robert Recorde: el creador del signo igual. *Suma*, *57*, 89–95. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/41554125.pdf

Jiménez, R. (2008). *Álgebra*. México: Pearson Educación.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. Recuperado de https://link.springer.com/article/10.1007/BF00311062

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(3), 229–240.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297–312.

Maffey, S. G. (2006). *Estudio sobre la meta cognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de https://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11573

Medellín, J. V. (2014). *Igualdad y equivalencia: una propuesta didáctica que enriquece la interpretación de ecuaciones y su solución* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52116

Medina, L. (2016). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay? Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros* [Tesis de diplomado no publicada]. Universidad de la República Uruguay. Recuperado de http://repositorio.cfe.edu.uy/handle/123456789/252

Mejía, F. J. (2012). *Los esquemas de acción de los estudiantes de bachillerato en problemas relativos a las ecuaciones lineales de una variable* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Autónoma de Zacatecas.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada. Recuperado de https://hera.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156. Recuperado de https://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2887578

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *8*(2), 219–325. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33580207

Navia, L. (2019). Representaciones Semióticas del Concepto de Ecuación Lineal con una Variable a partir de la implementación de un juego didáctico. *Revista Amazonia Investiga*, *6*(11), 38–52. Recuperado de https://amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/598

Nieto, N., Viramontes, J. de D., & López-Hernández, F. (2009). ¿Qué es matemática educativa?. *Cultura Científica y Tecnología*, *35*(6), 16–21. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3238296

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números*, *40*, 3–28.

Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I., & González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA*, *13*(2), 84–103. Recuperado de https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/v13i2.7613/7339

Ramírez, M. (2010). *Interpretaciones del Signo Igual. Un Estudio de Libros de Texto.* [Trabajo de curso] (No publicado). Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de https://eprints.ucm.es/25468/

Real Academia Española. (n.d.). Comprensión. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 21 de septiembre de 2021 de https://dle.rae.es/comprensi%C3%B3n

Rojano, T. (2018). La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 247–261). Alta resolución.

Ruíz, A., Chavarría, J., & Alpízar, M. (2006). La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*, *2*(1), 1–17. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6885

Saenz, J. C. (2014). *Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia.

Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática. *Notice of the AMS*, *47*(6), 1–19. Recuperado de http://2633518-0.web-hosting.es/blog/didact_mate/3.Prop%C3%B3sitos y m%C3%A9todos de investigaci%C3%B3n.pdf

Serafín, M. G. (2019). *Suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, una propuesta con material didáctico* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Zacatecas.

Singh, R., & Kosko, K. W. (2017). Exploring the structure of equivalence items in an assessment of elementary grades. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 211–218). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Soto, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos* (3ra ed.). México: Sin editorial.

Trigueros, M., y Ursini, S. (2018). La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 247–261). Alta resolución.

Vance, E. P. (1986). *Álgebra y Trigonometría* (2da ed.). Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana.

# Anexos

## Anexo 1
**Cuestionario de la dimensión cognitiva**

Universidad Autónoma de Zacatecas

“Francisco García Salinas”

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa

**ACTIVIDAD 0**

**Presentación:** Esta actividad se realiza con el propósito de recabar información para la realización de la tesis de Maestría en Matemática Educativa del Lic. Juan Ernesto Corona Maldonado. La información que proporcione será debidamente codificada cuidando su confidencialidad e integridad, de tal manera, que pueda responder, con toda la libertad, a las siguientes preguntas. Sus repuestas son muy importantes para el desarrollo de la investigación del aprendizaje de las matemáticas en el nivel bachillerato, por lo que se le exhorta a responder con honestidad.

**Instrucciones:** Escriba su nombre sin apellidos en el espacio indicado, solo para cuestiones de identificación. Si le es posible, imprima este cuestionario y responda con pluma. En caso contrario, transcriba las preguntas a su cuaderno y respóndalas con una pluma de diferente color. Cuando finalice, escanee o tome una foto legible del cuestionario contestado y suba el archivo a la carpeta que le proporcionará el facilitador. El nombre del archivo tendrá el formato que se muestra a continuación: *nombre.cuestionariocog*, por ejemplo, *juanernesto.cuestionariocog.*

Nombre: ______________________________________________________________

1. Las siguientes preguntas son acerca de este símbolo:

$$=$$

a) La flecha de arriba apunta a un símbolo. ¿Cuál es el nombre?

b) ¿Qué significa ese símbolo?

c) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, explíquelo por favor.

2. Completa el siguiente inciso, si consideras que falta algo. Justifica tu respuesta.

a) $3 + 5$

3. Completa las siguientes sentencias de acuerdo con tu criterio y justifica tu respuesta

| Sentencia | Explicación o justificación |
|---|---|
| $9 - 5 = \_\_ + 3$ | |
| $25 + \_\_ = 115 + 10$ | |
| $99 + 87 = 98 + 86 + \_\_$ | |
| $743 + \_\_\_ = \_\_\_ + 631$ | |

4. Completa los siguientes incisos, si es el caso. Justifica tu respuesta.

| Inciso | Explicación o Justificación |
|---|---|
| a) $2x + 3$ | |
| b) $5x + 4 \quad = 9x$ | |
| c) $3x + \_\_ = 10x + 8$ | |

**¡¡¡Muchas gracias por tu valiosa participación!!!**

**Anexo 2**
**Cuestionario de la dimensión didáctica**

Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”
Unidad Académica de Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa

**Presentación:** Esta actividad se realiza con el propósito de recabar información para la realización de la tesis de Maestría en Matemática Educativa del Lic. Juan Ernesto Corona Maldonado. La información que proporcione será debidamente codificada cuidando su confidencialidad e integridad, de tal manera, que pueda responder, con toda la libertad, a las siguientes preguntas.

**Instrucciones:**

1. Responda a las siguientes preguntas e incisos que se muestran a continuación.

  1. ¿Cuál es la definición que utiliza con sus alumnos para conceptualizar a la ecuación lineal de una variable?

  2. En términos generales, describa los momentos didácticos que frecuentemente emplea para la enseñanza de este tema.

  3. ¿Qué aspectos, de este tema, considera son más difíciles de aprender para los estudiantes?

  4. Desde su experiencia, ¿cuál es el error más común que tiene los estudiantes cuando están aprendiendo el tema?

5. Describa el aprendizaje que obtienen los estudiantes luego de abordar el tema, es decir qué conocimientos, habilidades y/o destrezas adquieren los alumnos.

6. ¿Cuál es el libro base que regularmente utiliza para enseñar el tema de ecuaciones lineales con una variable?
7. Describa la dinámica de enseñanza que actualmente está llevando con el grupo durante la educación a distancia. Indique las estrategias, plataformas, recursos tecnológicos y formas de trabajo que utiliza con los alumnos.

8. ¿Cuáles han sido las principales dificultades que ha enfrentado durante la educación a distancia? Mencione aspectos tecnológicos, sociales, institucionales, didácticos, entre otros.

2.

Las siguientes preguntas son acerca de este símbolo:

$$\underset{\uparrow}{=}$$

d) La flecha de arriba apunta a un símbolo. ¿Cuál es el nombre?

e) ¿Qué significa ese símbolo?

f) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, explíquelo por favor.

3. Complete las siguientes sentencias, si es el caso, de acuerdo con su criterio y justifique su repuesta.

| Sentencia | Justificación |
|---|---|
| $9 - 5 = \_\_ + 3$ | |
| $25 + \_\_ = 115 + 10$ | |
| $99 + 87 = 98 + 86 + \_\_$ | |
| $743 + \_\_\_ = \_\_\_ + 631$ | |
| $3x + \_\_ = 10x + 8 - \_\_$ | |
| $8x + 6$ | |

**¡¡¡Muchas gracias por tu valiosa participación!!!**

**Anexo 3**

**Respuestas del docente del cuestionario de la dimensión didáctica**

Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa

**Presentación:** Esta actividad se realiza con el propósito de recabar información para la realización de la tesis de Maestría en Matemática Educativa del Lic. Juan Ernesto Corona Maldonado. La información que proporcione será debidamente codificada cuidando su confidencialidad e integridad, de tal manera, que pueda responder, con toda la libertad, a las siguientes preguntas.

**Instrucciones:**

9. ¿Cuál es la definición que utiliza con sus alumnos para conceptualizar a la ecuación lineal de una variable?

La de Rene Jiménez del libro de matemáticas 1

10. En términos generales, describa los momentos didácticos que frecuentemente emplea para la enseñanza de este tema.

- Inicio: preguntas exploratorias – desarrollo: focalizar la atención de los alumnos con ejercicios – cierre: análisis de los resultados

11. ¿Qué aspectos, de este tema, considera son más difíciles de aprender para los estudiantes?

El cambio de los signos cuando pasa sumando y cuando asa dividiendo se les complica mucho ese cambio porque en uno se cambia el signo (suma y resta ) y en el otro no(multiplicación y división).

12. Desde su experiencia, ¿cuál es el error más común que tiene los estudiantes cuando están aprendiendo el tema?

El cambio de los signos

13. Describa el aprendizaje que obtienen los estudiantes luego de abordar el tema, es decir qué conocimientos, habilidades y/o destrezas adquieren los alumnos.

Dependiendo de donde profundicemos con esta tema, uno de los conocimientos que el alumno pueda adquirir “describir técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable” una habilidad “aplica diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable”

14. ¿Cuál es el libro base que regularmente utiliza para enseñar el tema de ecuaciones lineales con una variable?
    Grupo editorial patria “Algebra baldor”
    Editorial Person “Matemáticas simplificada segunda edición”
    Editorial Person “matemáticas 1 ” segunda edición autor Rene Jiménez

15. Describa la dinámica de enseñanza que actualmente está llevando con el grupo durante la educación a distancia. Indique las estrategias, plataformas, recursos tecnológicos y formas de trabajo que utiliza con los alumnos.

Educación en línea, plataforma classroom, tableta, celular, computadora, pintarron, se deja actividad se mandan videos y tenemos una video conferencia para aclaración de dudas.

16. ¿Cuáles han sido las principales dificultades que ha enfrentado durante la educación a distancia? Mencione aspectos tecnológicos, sociales, institucionales, didácticos, entre otros.

El internet limitado que hace que se vea mal la videoconferencia, no tener un espacio adecuado donde no se escuche los ruidos externos.

II.

1. Las siguientes preguntas son acerca de este símbolo:

$\uparrow$

$=$

g) La flecha de arriba apunta a un símbolo. ¿Cuál es el nombre?

Signo de igualdad

h) ¿Qué significa ese símbolo?
Que tanto lo que está en el primer miembro de la igualdad como lo que está en el segundo miembro de la igualdad es lo mismo o tienen el mismo valor.

i) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, explíquelo por favor.

No

2. Complete las siguientes sentencias, si es el caso, de acuerdo con su criterio y justifique su repuesta.

| Sentencia | Justificación |
|---|---|
| $9 - 5 = \_\_ + 3$ | Uno porque cuatro seria el resultado de la resta de 9-5=4 por lo que 1+3=4 |
| $25 + \_\_ = 115 + 10$ | 100 por lo que si sumamos 115+10=125 entonces 25+100=125 |
| $99 + 87 = 98 + 86 + \_\_$ | 2 por que si sumas 99+87=186 entoces si sumo 98+86+2=186 |
| $743 + \_\_\_ = \_\_\_ + 631$ | Los numero que falta puedes ser infinidad pero se puede pner un ejemplo 1 y 113 porque si a 743+1=744 y si a 631+113=744 |
| $3x + \_\_ = 10x + 8 - \_\_$ | X y 2 para que salga el ultimo resultado |
| $8x + 6$ | Este sería el resultado de lo de arriba |

**¡¡¡Muchas gracias por tu valiosa participación!!!**

**Anexo 4**
**Hojas de trabajo de la situación didáctica**

Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa

Nombre: ____________________________________________

Edad: ______________ Sexo: ______________ Fecha: ______________

Nombre de la institución: ______________________________

Semestre: Número de equipo:

**Indicaciones:** Imprime esta hoja de trabajo. Lee y sigue las instrucciones de cada ejercicio. Escribe las respuestas con pluma y escucha las indicaciones del profesor.

I. De manera individual, indica el valor que corresponde al siguiente inciso.

$$\square = 4 + 7$$

¿Qué diferencias tiene este ejercicio con los que usualmente conoces? Menciona un ejemplo conocido.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

¿Es correcto escribir un ejercicio en ese orden? ¿Por qué?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

¿Qué valor va en $\square$ para que la sentencia sea verdadera?

______________________________________________

______________________________________________

Si se cambia el orden de los elementos, es decir, $4 + 7 = \square$ ¿cambia el valor de $\square$? ¿Por qué?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

Si se agrega +6 en la sentencia de tal forma que quede de la siguiente manera:

$$4 + 7 = \square + 6$$

¿Cuál es el valor de $\square$? ¿Sigue siendo el mismo que en la anterior? ¿qué cambió?

Si se cambia el orden de los elementos dejando la sentencia de la forma siguiente: $\square + 6 = 4 + 7$ ¿Cuál sería el valor de $\square$? ¿Sigue siendo el mismo o el valor es diferente cuando se cambia el orden de los elementos?

II. Reunidos en equipos determinen los números que van en los $\square$ de cada una de las sentencias que se muestran a continuación y describan tres procedimientos de solución. Los tres procedimientos de cada sentencia deben de ser diferentes entre sí. Expliquen lo más extensa y detalladamente posible.

a)

$$89 + 77 = 88 + 76 + \square$$

Procedimiento

Procedimiento alternativo 1

Procedimiento alternativo 2

b)

$$63 + \square + 24 + \square = \square + 13 + \square + 42$$

Procedimiento

Procedimiento alternativo 1

Procedimiento alternativo 2

c) En esta sentencia se debe de cumplir la condición de que los valores en los espacios deben de ser diferentes a 0.

$$\square + 28 = 46 + \square$$

Procedimiento

Procedimiento alternativo 1

Procedimiento alternativo 2

d)

$$7 \cdot \square + 48 = 139$$

Procedimiento

Procedimiento alternativo 1

Procedimiento alternativo 2

e) Utilicen los tres procedimientos que plantearon en el ejercicio d) para responder a las siguientes preguntas.

¿Cuál procedimiento les gustó más para determinar el valor de $\square$? ¿por qué?

---

---

---

¿Qué operaciones tuvieron que realizar para que el valor de $\square$ fuera el correcto para determinar el otro elemento de la sentencia, es decir, con 139?

---

---

---

¿Se puede conocer el valor de $\square$ si se parte desde 139?, es decir, ¿Qué operaciones se le debían de realizar a 139 para determinar el valor faltante?

---

---

---

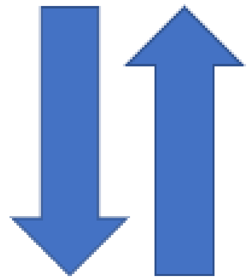
¿Qué diferencia encuentran con los pasos para determinar el valor de $\square$ partiendo desde el lado izquierdo con los del lado derecho de la sentencia?

---

---

---

A continuación, se presenta una tabla que organiza los pasos sugeridos para obtener el valor de $\square$ en la sentencia del inciso d) considerando el lado que se comience a realizar los cálculos. La orientación de las flechas del centro indica el orden para proceder a calcular el elemento faltante en la sentencia con relación a su respectivo lado.

| Lado izquierdo | | Lado derecho |
|---|---|---|
| Multiplicar por siete el valor del espacio en blanco |  | Comprobar que el valor del espacio en blanco cumpla con las condiciones de la sentencia |
| Luego, al resultado de esa multiplicación sumarle 48 | | El resultado de esa operación dividirlo entre 7 |
| Comprobar que sea igual a 139 | | Restar 48 a 139 |

¿Qué papel desempeña el $\square$ en la sentencia?

¿De qué otra manera se podría representar? Es decir ¿Qué símbolo podría sustituir el $\square$?

Ahora, retomando la tabla de procedimientos con lo expresado en la pregunta anterior. Realizando una comparativa de diferentes maneras de representar las sentencias, una opción es la siguiente:

$$7 \cdot \square + 48 = 139 \quad \Big| \quad 7 \cdot x + 48 = 139$$

¿Es válido sustituir el $\square$ de la sentencia de la izquierda con la letra $x$? ¿Por qué?

Prosiguiendo con la aplicación de los pasos para determinar el valor indicado partiendo desde el lado derecho, el primer paso es restar 48 a 139, esto traducido en la sentencia quedaría de la siguiente manera:

$$7 \cdot x + 48 = 139 - 48$$

¿Cómo influye el agregar el -48 en el lado derecho con el resto de la sentencia? ¿El valor de $x$ sigue siendo el mismo?

Si también se agrega -48 en el lado izquierdo como se muestra a continuación:

$$7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$$

¿Cómo se restructura la sentencia? ¿El valor de $x$ es el mismo que en la sentencia $7 \cdot x + 48 = 139 - 48$?

¿Cuáles son los procedimientos siguientes para determinar el valor de $x$ de $7 \cdot x + 48 - 48 = 139 - 48$? Explica detalladamente

f) Respondan a la siguiente pregunta.

¿El valor de $w$ es el mismo en las siguiente dos ecuaciones?

$$2 \cdot w + 15 = 31 \qquad 2 \cdot w + 15 - 9 = 31 - 9$$

Expliquen detalladamente su razonamiento.

g) Contesta las siguientes preguntas acerca de la sentencia que se muestra a continuación.

$$8x + 14 = 14 + 8x$$

¿Es correcto escribir esta sentencia? ¿Por qué? Explica detalladamente.

III. Lean el problema y contesten lo que se les pide.

Carlos está resolviendo el siguiente ejercicio que le dejó su profesor de matemáticas de tarea:

$$6(6)(50)(3) = (3)(2(5) + 2x)$$

Cuando comenzó, notó que llegó a un punto en la resolución en el que ya no pudo continuar.

$$6(6)(50) + 10 = 2(5) + 2x$$

$$6(6)(50) + 10 - 10 = 2(5) + 2x - 10$$

Analiza detalladamente el procedimiento de Carlos y sugiérele una estrategia para determinar el valor de la variable desde el punto del procedimiento donde se quedó, es decir, continua el procedimiento de Carlos.