



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

ESTRATIFICACIÓN DEL ESPACIO
DE CURVAS PLANAS DE GRADO 4

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

JUAN VÁSQUEZ AQUINO

Estratificación del espacio de curvas planas de grado 4

Juan Vásquez Aquino

Director: Dr. Homero Renato Gallegos Ruiz

Codirector: Dra. Claudia Estela Reynoso Alcántara

Junio de 2017

Índice general

Resumen	III
Introducción	IV
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de Invariantes Geométricos	1
1.1.1. Acciones de grupos algebraicos	2
1.1.2. Grupos reductivos y Teorema de Nagata	9
1.1.3. Cocientes	12
1.1.4. Cocientes en variedades proyectivas	18
1.1.5. Criterio de Hilbert-Mumford	22
1.2. Teoría de representaciones de álgebras de Lie	25
1.2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$	27
1.3. Estratificación de una variedad proyectiva	31
1.4. Curvas planas y singularidades	34
1.4.1. Propiedades locales de una curva plana	34
1.4.2. Curvas planas proyectivas	36
2. Espacio de curvas planas de grado cuatro	38
2.1. Acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_4(2)$	38
2.2. Estabilidad de curvas en $Hip_4(2)$	39
2.3. Cálculo de curvas inestables usando S1P	41

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
3. Estratificación del cerrado de curvas inestables	44
3.1. Representación y diagrama de pesos de las cuárticas planas	44
3.2. Obtención de los estratos	48
3.3. Caracterización de curvas en cada estrato	62
Conclusiones y trabajo a futuro	73
Bibliografía	75

Resumen

En la presente tesis se construye una estratificación del espacio de curvas planas de grado 4 usando teoría de representaciones y teoría de invariantes geométricos. Usando la acción por cambio de coordenadas de $SL_3(\mathbb{C})$ en el espacio de cuárticas planas $Hip_4(2)$, estudiamos la estabilidad de las curvas y el cálculo de las curvas inestables usando el criterio de Hilbert-Mumford de subgrupos a 1-parámetro. Luego, a través de la representación del álgebra de Lie de $SL_3(\mathbb{C})$ y el diagrama de pesos asociado, construimos una estratificación por subvariedades suaves, localmente cerradas e irreducibles, del espacio de cuárticas inestables. Finalmente, se hace una caracterización de las curvas en cada estrato, de acuerdo al tipo de singularidades que tienen y la reducibilidad.

Introducción

Uno de los problemas principales en las matemáticas es clasificar objetos, ya sean topológicos, algebraicos, geométricos, etc. Y esto a lo largo de la historia de la matemática ha dado pie al desarrollo de nuevas teorías y áreas de investigación. Tal es el caso de la teoría de invariantes geométricos usada para clasificar objetos en geometría algebraica.

La Geometría Algebraica estudia básicamente ceros de polinomios, estos objetos son llamados “variedades algebraicas”, son las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales. Un caso particular de variedades algebraicas son las curvas planas. A través de la Teoría de Invariantes Algebraicos, fuertemente estudiada por David Hilbert y Emmy Noether a finales del siglo XIX, y de la Teoría de Invariantes Geométricos, desarrollada por David Mumford por el año 1960, podemos hacer una clasificación de variedades algebraicas.

Una de las ideas fundamentales para el problema de clasificación de objetos es construir espacios cocientes. Si nuestro espacio X de objetos a clasificar tiene estructura de variedad algebraica, consideramos una acción lineal de un grupo algebraico G en X con las propiedades con las que deseamos clasificar y buscamos un cociente bueno. Si X es una variedad afín y G es un grupo reductivo, siempre existe un cociente bueno. Si X es una variedad proyectiva, Mumford demuestra que eliminando ciertos puntos $X^{un} \subset X$, siempre existe un cociente bueno de $X^{ss} := X \setminus X^{un}$ por G . Ese conjunto X^{un} que eliminamos es un cerrado de Zariski y en algunos casos contiene información de la geometría del cociente bueno. De ahí surge la necesidad de hacer una partición de este espacio en subconjuntos disjuntos localmente cerrados, y caracterizar a los elementos en cada subconjunto de la partición, es decir, una estratificación del espacio X^{un} la cual nos da mucha información sobre el cociente bueno X^{ss}/G .

Nos interesa clasificar curvas planas de cierto grado fijo. Consideremos el espacio de curvas

planas $Hip_d(2)$ de grado $d \geq 3$, y la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_d(2)$ por cambio de coordenadas. Para las curvas de grado 3 se conoce muy bien la clasificación de curvas estables e inestables. El cociente geométrico de cúbicas estables es \mathbb{A}^1 y el cociente bueno de cúbicas semi-estables es \mathbb{P}^1 . Para curvas de grado $d \geq 4$ no se conoce completamente el cociente bueno.

En este trabajo construiremos una estratificación del espacio de cuárticas planas. Consideremos el espacio vectorial $V := \mathbb{C}[x, y, z]_4$ de polinomios homogéneos de grado 4. Los ceros de un elemento en V definen una curva plana de grado 4. Denotemos $Hip_4(2) := \mathbb{P}V \cong \mathbb{P}^{14}$ y consideremos la acción por cambio de coordenadas de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_4(2)$. Ésta es una acción lineal en un espacio proyectivo, así que podemos usar la teoría de invariantes geométricos.

Un problema muy difícil es encontrar los generadores del álgebra de invariantes de esta acción lineal en $Hip_4(2)$. Se puede demostrar que los generadores del álgebra de invariantes son de grado múltiplo de tres. Uno de los primeros resultados importantes de este problema se da en [Dixmier, 1987], donde se da una cota igual a 56 para el número de generadores del álgebra de invariantes de las cuárticas planas. Y recientemente en [Elsenhans, 2015] se muestra que el álgebra de cuárticas invariantes está generada por 13 elementos y se dan explícitamente tales generadores.

Por otro lado, se estudia la estabilidad de las cuárticas planas por la acción lineal de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_4(2)$. Se sabe que en general toda curva no singular es semi-estable, más aún, es estable. En [Mumford, 1977] y [Mumford et al., 1994, Cap. 4 §2] se muestra que las curvas singulares semi-estables no estables son aquellas con singularidad tipo tacnodal.

Siguiendo las ideas de [Kirwan, 1984] queremos hacer una estratificación de $Hip_4(2)$; en esta estratificación el abierto de curvas semi-estables es un estrato así que basta hacer la estratificación del espacio de inestables $Hip_4(2)^{un}$. Los resultados generales sobre esta estratificación se pueden leer en [Kirwan, 1984, Teoremas 12.26 y 13.5].

En [Popov, 2010] encontramos un algoritmo para identificar los estratos del cono nulo de un espacio vectorial bajo una acción lineal de un grupo reductivo, que será aplicable en nuestro caso. El objetivo de este trabajo es encontrar los estratos, calcular su dimensión y caracterizar las curvas en cada estrato de acuerdo al tipo de singularidad. Una de las aplicaciones más importantes de esta estratificación, además de parametrizar curvas con singularidades específicas, como se demostrará en este trabajo, es obtener información geo-

métrica del cociente bueno construido con los puntos semi-estables. Un objeto para trabajar a futuro es obtener esta información a través de los estratos y estudiar a detalle la relación del cociente bueno de curvas cuárticas planas y \mathcal{M}_3 , el espacio móduli de curvas de género 3.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se dan algunos resultados importantes de la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT) sobre variedades proyectivas. Se definen y se enuncian los resultados básicos sobre grupos algebraicos, acciones lineales, estabilidad en variedades proyectivas y el criterio de Hilbert-Mumford para encontrar puntos inestables de una acción en una variedad proyectiva. Se estudia un poco de la teoría de representaciones de álgebras de Lie, principalmente representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$. También se dan los resultados principales sobre la existencia y construcción de una estratificación de una variedad proyectiva. En el capítulo 2 se define una acción lineal de $SL_3(\mathbb{C})$ sobre el espacio de cuárticas planas, se muestran los primeros resultados que se sabe de la estabilidad de los elementos de este espacio proyectivo, y se hace el cálculo de los inestables usando subgrupos a 1-parámetro. Y finalmente, en el capítulo 3 se estudia la estratificación del espacio de cuárticas inestables siguiendo las ideas de [Kirwan, 1984, Popov, 2010] para construir los estratos, y se hace la caracterización de las curvas en cada estrato de acuerdo a su tipo de singularidad.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección daremos algunos resultados importantes de la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT) sobre variedades proyectivas. Definiremos y enunciaremos los resultados básicos sobre grupos algebraicos, acciones lineales, estabilidad en variedades proyectivas y el criterio de Hilbert-Mumford para encontrar puntos inestables de una acción en una variedad proyectiva. Estudiaremos la teoría básica de representaciones de álgebras de Lie, en particular representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$. Estudiaremos la teoría básica para la estratificación de una variedad proyectiva, enunciaremos el teorema de Kirwan, y por último estudiaremos singularidades en curvas planas.

1.1. Teoría de Invariantes Geométricos

La Teoría de Invariantes Geométricos es un método para construir cocientes por acciones de grupos en geometría algebraica. Fue desarrollada por David Mumford en 1960, usando ideas de la teoría clásica de invariantes (Hilbert 1893). La bibliografía estándar es [Mumford et al., 1994]. Una buena introducción y ejemplos de acciones de grupos algebraicos se puede encontrar en las notas [Reynoso, 2010, Brion, 2010].

Durante este trabajo vamos a considerar: k un campo algebraicamente cerrado, X una variedad algebraica sobre k , dotada con la topología de Zariski. Si $U \subset X$ es abierto, definimos

$$A(U) := \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ es una función regular}\}.$$

Vamos a considerar la dimensión de U como la dimensión de Krull de su anillo de funciones regulares $A(U)$. Si X es una variedad afín normalmente denotamos $A(X)$ como $k[X]$ y lo llamamos su anillo de coordenadas.

1.1.1. Acciones de grupos algebraicos

Vamos a definir acción de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica X , y estudiaremos algunas nociones de cocientes que se pueden obtener. La mayoría de las demostraciones de los resultados que se enuncian en esta sección son extensas y por tanto no será posible incluirlas todas.

Empezamos definiendo grupos algebraicos, algunos ejemplos de grupos algebraicos y acciones de estos en variedades algebraicas.

Grupos algebraicos

Definición 1.1.1. Un grupo G se dice *algebraico sobre un campo k* si es una variedad algebraica sobre k y las operaciones de multiplicación e inverso son morfismos algebraicos.

Ejemplo 1.1.2 (Grupos algebraicos). A continuación damos algunos ejemplos de grupos algebraicos, de los cuales haremos mención durante el resto del trabajo. Sabemos que estos son grupos y lo que vamos a mostrar aquí es que estos tienen estructura de variedad algebraica.

- $G \leq \text{GL}_n(k)$ grupo finito.

Podemos escribir $G = \{g_1, \dots, g_m\} \subset \text{GL}_n(k) \subset \text{M}_n(k) \cong k^{n^2}$, es un conjunto finito de puntos en k^{n^2} , a cada punto g_s corresponde un ideal maximal $\mathcal{M}_s = \langle x - g_s \rangle$ donde $x = (x_{ij})$, $s = 1, \dots, m$.

Entonces $g_s = \mathbb{V}(\mathcal{M}_s)$ y $G = \bigcup_{s=1}^m g_s = \mathbb{V}(\bigcap_{s=1}^m \mathcal{M}_s)$ por tanto el anillo de coordenadas de G es

$$k[G] = \frac{k[x_{ij}]}{\langle \bigcap_{s=1}^m \mathcal{M}_s \rangle}.$$

- El grupo general lineal $\text{GL}_n(k)$.

Consideramos el polinomio determinante $\det \in \mathbb{C}[x_{ij}]$, entonces

$$\text{GL}_n(k) = \{M \in \text{M}_n(k) \mid \det(M) \neq 0\} = \{(x_{ij}) \in k^{n^2} \mid \det(x_{ij}) \neq 0\} = k^{n^2} \setminus \mathbb{V}(\det).$$

Por tanto $\mathrm{GL}_n(k)$ es un abierto afín. Luego podemos verlo como una variedad afín en $\mathbb{A}_k^{n^2+1}$, donde $\det \in k[x_{ij}, y]$ y $\mathrm{GL}_n(k) = \mathbb{V}(y \cdot \det(x_{ij}) - 1)$. Entonces podemos escribir su anillo de coordenadas como

$$k[\mathrm{GL}_n(k)] = \frac{k[x_{ij}, y]}{\langle y \cdot \det(x_{ij}) - 1 \rangle}.$$

- *El grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(k)$.*

Como $\mathrm{SL}_n(k) = \{M \in \mathrm{M}_n(k) : \det(M) = 1\} = \{M \in k^{n^2} : \det(M) = 1\} = \mathbb{V}(\det - 1)$, podemos escribir su anillo de coordenadas como

$$k[\mathrm{SL}_n] = \frac{k[x_{ij}]}{\langle \det(x_{ij}) - 1 \rangle}.$$

- *El grupo proyectivo general lineal $\mathrm{PGL}_n(k)$.*

$\mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_n/k^*$, donde $A \sim B$ si $A = tB$ para algún $t \in k^*$. Entonces $k[\mathrm{PGL}_n]$ es la subálgebra de $k[\mathrm{GL}_n]$ invariante bajo la acción de k^* , dado por $t \cdot p(x_{ij}) = p(tx_{ij})$, y notemos que como $1/\det \in k[\mathrm{GL}_n]$ y el \det es un polinomio homogéneo de grado n , se tiene bajo esta acción $t \cdot \frac{1}{\det} = \frac{1}{t^n \det}$. Como $\mathrm{PGL}_n = \mathbb{P}^{n^2-1} \setminus \mathbb{V}(\det)$ y las funciones regulares de PGL_n deben ser cocientes de polinomios del mismo grado, entonces podemos escribir

$$k[\mathrm{PGL}_n(k)] = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \frac{k[x_{ij}]_{rn}}{\det^r},$$

donde $k[x_{ij}]_{rn}$ es el subespacio vectorial de los polinomios homogéneos de $k[x_{ij}]$ de grado rn .

□

Se puede consultar [Santos y Rittatore, 2005, Cap. 3] para más ejemplos de grupos algebraicos.

Definición 1.1.3. Una función entre grupos algebraicos $\varphi : G \rightarrow G'$ se dice *morfismo de grupos algebraicos* si es un morfismo de variedades que también es un morfismo de grupos.

Un grupo algebraico isomorfo como grupo algebraico a un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(k)$ se dice *grupo algebraico lineal*. Por ejemplo, hemos probado que $\mathrm{SL}_n(k)$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(k)$.

Definición 1.1.4. Un morfismo de grupos algebraicos $\varphi : G \rightarrow G'$ se dice una *isogenia* si su kernel es un conjunto finito. Dos grupos algebraicos se dicen *isógenos* si existe una isogenia entre ellos.

Ejemplo 1.1.5. Consideremos la función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto [g].\end{aligned}$$

Se puede verificar que este es un morfismo de grupos algebraicos. Además, como los grupos son multiplicativos, el kernel de φ consta de las matrices múltiplos de la identidad por las raíces n -ésimas de la unidad, es decir, es un conjunto finito. Entonces φ es una isogenia, es decir, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ son isógenos. Esto nos permite, en el contexto de teoría de invariantes, trabajar indistintamente con cualquiera de ellos. En este trabajo lo haremos con el grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ que, como veremos, es más fácil manejar.

□

Definición 1.1.6. Un grupo algebraico lineal que es isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ se denomina *toro algebraico*.

Si G es grupo algebraico lineal, entonces contiene algún toro algebraico. La familia de toros algebraicos se considera parcialmente ordenada respecto a la inclusión. Por lo tanto existe algún toro maximal [Borel, 2012, §8].

Ejemplo 1.1.7. El grupo de matrices diagonales

$$T = \{\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \mid a_{11} \cdots a_{nn} = 1\} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}),$$

es un toro maximal isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^n$.

□

Definición 1.1.8. Un *subgrupo parabólico* de un grupo algebraico G es un subgrupo cerrado P tal que G/P es una variedad proyectiva.

Más adelante hablaremos de estos grupos.

Acciones de grupos algebraicos

Ahora empezaremos a definir acciones de grupos algebraicos en variedades y daremos algunas de las propiedades más importantes de estas.

Definición 1.1.9. Una *acción de un grupo algebraico* G en una variedad X es un morfismo

$$\sigma : G \times X \rightarrow X$$

tal que, para todo $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$,

$$\sigma(g_1, \sigma(g_2, x)) = \sigma(g_1 g_2, x) \quad \text{y} \quad \sigma(e, x) = x,$$

donde e es el elemento identidad de G . Para simplificar la notación escribiremos gx para referirnos a $\sigma(g, x)$, así que las condiciones anteriores se escriben:

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x, \quad ex = x.$$

Sea $x \in X$. Definimos el *estabilizador* de x y la *órbita* de x como

$$\text{Est}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \quad \text{y} \quad O(x) = \{gx \in X \mid g \in G\},$$

respectivamente. Denotamos al conjunto de órbitas de la acción como $X/G = \{O(x) : x \in X\}$.

Diremos que el conjunto $W \subset X$ es *invariante por la acción de G* si el conjunto $gW = \{gw \mid w \in W\} \subset W$ para todo $g \in G$.

Algunos hechos importantes que podemos encontrar en [Newstead, 1978, Cap. 3] sobre las órbitas de la acción de G en X son los siguientes:

Proposición 1.1.10. *Sea G un grupo algebraico lineal actuando en una variedad X . Entonces*

1. $\text{Est}(x)$ es un subgrupo algebraico de G para todo $x \in X$.
2. $O(x)$ es un abierto en $\overline{O(x)}$ para todo $x \in X$.
3. $\dim O(x) = \dim G - \dim \text{Est}(x)$.
4. $\overline{O(x)}$ es la unión de $O(x)$ con órbitas de dimensión estrictamente menor a $\dim O(x)$.

5. $\overline{O(x)}$ contiene una órbita cerrada.

Demostración. Bosquejo

1. Sabemos que $\text{Est}(x)$ es un subgrupo de G . Consideremos la siguiente función $\phi_x : G \rightarrow X$, $g \mapsto g \cdot x$, este es un morfismo algebraico porque la acción es algebraica. Luego $\phi_x^{-1}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = \text{Est}(x)$ es cerrado en G .
2. Notemos que $O(x) = \phi_x(x)$ contiene un abierto denso U de $\overline{O(x)}$, es decir, $U \subset O(x) \subset \overline{O(x)}$, pero $O(x) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$, así que $O(x)$ es abierto, por tanto $O(x) = U$ ó $O(x) = \overline{O(x)}$.
3. Con el morfismo algebraico que definimos $\phi_x(x) = O(x)$ implica que $\dim O(x) + \dim \phi_x^{-1}(x) = \dim G$, donde ya habíamos visto que $\phi_x^{-1}(x) = \text{Est}(x)$.
4. Sea $A = \overline{O(x)} \setminus O(x)$. Este es un cerrado propio de $\overline{O(x)}$ por 2. Luego $y \in A$ implica que $O(y) \in A$ y $\dim O(y) < \dim O(x)$.
5. Se puede verificar que la órbita de menor dimensión en $\overline{O(x)}$ es cerrada.

□

Acción lineal

Estamos interesados en la acción de un grupo algebraico lineal G sobre una variedad afín en \mathbb{A}_k^{n+1} o proyectiva en \mathbb{P}_k^n .

Definición 1.1.11. Sea X una variedad afín en \mathbb{A}^{n+1} o proyectiva en \mathbb{P}^n , y G un grupo algebraico lineal. La acción $G \times X \rightarrow X$ ($(g, x) \mapsto gx$) se dice *lineal* o que G *actúa linealmente sobre X* si existe un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}_{n+1}(k)$$

tal que la acción de G en X es la inducida por

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, (x_0, \dots, x_n)) &\mapsto \rho(g)(x_0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde $\rho(g)(x_0, \dots, x_n)$ es simplemente aplicar la transformación lineal $\rho(g)$ en el punto $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$.

Conversamente, dado un morfismo de grupos algebraicos $\phi : G \rightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(k)$, tenemos una acción de G en k^{n+1} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G \times k^{n+1} &\rightarrow k^{n+1} \\ (g, x) &\mapsto \phi(g)x. \end{aligned}$$

Tal homomorfismo se dice una *representación* de G , y la acción correspondiente una *acción lineal de G en k^{n+1}* . Este concepto se extiende de manera natural para acciones de G en cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

Si G es un grupo algebraico lineal actuando en una variedad afín X , ésta acción induce una acción de G en el álgebra de funciones regulares de X , es decir, una acción en $A(X)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(X) \times G &\rightarrow A(X) \\ (F, g) &\mapsto F^g : X \rightarrow k \\ &x \mapsto F(g^{-1}x). \end{aligned}$$

Notemos que esta es una acción derecha.

Definición 1.1.12. Un elemento $F \in A(X)$ es *invariante por la acción de G* si $F^g(x) = F(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$. Si U es un subconjunto abierto de X , definimos el conjunto

$$A(U)^G := \{F \in A(U) \mid F^g(x) = F(x) \forall x \in U, \forall g \in G\} \subset A(X).$$

$A(X)^G$ es llamada *álgebra de invariantes* de la acción de G en X .

Lema 1.1.13. Sea G un grupo algebraico lineal actuando linealmente en una variedad X , y sea W un subespacio de dimensión finita de $A(X)$ (considerado como k -espacio vectorial). Entonces

1. si W es invariante, la acción de G en W es lineal ;
2. W está contenido en un subespacio vectorial G -invariante de dimensión finita de $A(X)$.

Demostración. 1. Sea $W = \langle f_1, \dots, f_l \rangle_k$ G -invariante. Sea $g \in G$, y definamos $f_i^g = \sum_{j=1}^l \rho_{ij}(g) f_j$ donde $\rho_{ij} : G \rightarrow k$ y $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_l(k)$ es una función tal que $g \mapsto \rho(g)$. Vamos a ver que esto define una representación, es decir, que ρ es un morfismo de grupos algebraicos.

- ρ es un homomorfismo de grupos:

$\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$, pues

$$f_i^{g_1g_2} = \sum \rho_{ij}(g_1g_2)f_j$$

$$(f_i^{g_1})^{g_2} = \sum_j \rho_{ij}(g_2) \sum_s \rho_{ij}(g_1)f_s = \sum_j \sum_s \rho_{ij}(g_2)\rho_{ij}(g_1)f_s.$$

- ρ es morfismo algebraico:

Como f_1, \dots, f_l son l.i. entonces existen $x_1, \dots, x_t \in X$ tal que $\det(f_j(x_t)) \neq 0$. Sea

$A = (f_j(x_t))$ es $l \times l$, luego

$$(\rho_{i1}(g), \dots, \rho_{in}(g)) = (f_i(gx_1), \dots, f_i(gx_l)) \cdot A^{-1}.$$

Así que $\rho : G \rightarrow \text{GL}_l(k)$ es algebraico.

2. Sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ una k -base de W . Sea $W_1 = \langle f_i^g \mid g \in G \rangle_k$. Queremos demostrar que $\dim_k W_1 < \infty$.

Sea $F_i \in A(G \times X) = A(G) \otimes_k A(X)$ tal que $F_i(g, x) = f_i(gx)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Escribimos $F_i = \sum_j G_{ij} \otimes H_{ij}$ donde $G_{ij} \in A(G)$, $H_{ij} \in A(X)$.

Sea $W_2 = \langle H_{ij} \rangle_k$, es de dimensión finita, y podemos ver que

$$f_i(gx) = f_i^g(x) = F_i(g, x) = \sum G_{ij}(g)H_{ij} \in W_2 \quad \forall i, \forall g \in G,$$

así que $W \subset W_1 \subset W_2$

□

Definición 1.1.14. Sea G un grupo algebraico y R una k -álgebra. Una acción racional de G en R es una aplicación

$$G \times R \rightarrow R$$

$$(g, f) \mapsto f^g,$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo $f \in R$ y $g_1, g_2 \in G$, se tiene $f^{g_1g_2} = (f^{g_1})^{g_2}$ y $f^e = f$.
2. Dado $g \in G$, la aplicación $f \mapsto f^g$ es un automorfismo de k -álgebras de R .

3. Para cada elemento $f \in R$ existe un subespacio vectorial de R de dimensión finita n , el cual contiene a f , es invariante bajo G y sobre el cuál G actúa mediante un morfismo de grupos algebraicos $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$.

El lema anterior nos garantiza de que toda acción lineal de un grupo algebraico G en una variedad X induce una acción racional de G en $A(X)$.

1.1.2. Grupos reductivos y Teorema de Nagata

Dada una acción racional de un grupo algebraico G en un álgebra R finitamente generada, nos interesa encontrar el álgebra de funciones invariantes R^G y determinar si ésta es finitamente generada.

En uno de los famosos problemas propuestos por Hilbert, el problema 14 plantea, entre otras cosas, que si siempre se obtiene R^G finitamente generada. Hilbert demostró para algunos casos particulares que sí [Fogarty, 1969, Cap. 5].

En 1958 Masayoshi Nagata presentó el primer contraejemplo al problema 14 de Hilbert. Construyó un álgebra finitamente generada y un grupo actuando en él, de tal manera que el álgebra de invariantes resultó no ser finitamente generada. Y en 1963 demostró que para *grupos geoméricamente reductivos* si se obtiene un álgebra de invariantes finitamente generada. Más aún, lo demostró para grupos reductivos.

Definición 1.1.15. Un grupo algebraico lineal G es *geoméricamente reductivo* si para toda acción lineal

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v, \end{aligned}$$

y todo $v \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ G -invariante, existe $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ homogéneo, invariante de grado ≥ 1 tal que $f(v) \neq 0$.

Para poder definir grupo reductivo necesitamos

Definición 1.1.16. Sea G un grupo algebraico lineal. Un elemento $u \in G$ se llama *unipotente* si existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $(u - Id)^r = 0$ (\iff los valores propios de u son 1).

Un grupo G se llama unipotente si todos sus elementos son unipotentes.

Dado G , vamos a denotar por G_u el subgrupo normal, unipotente maximal de G . El *radical unipotente* $\mathcal{R}(G)$ de G es la componente conexa de la identidad en G_u .

Definición 1.1.17. El grupo G es *reductivo* si $\mathcal{R}(G) = \{Id\}$.

En 1963 Nagata demuestra que Reductivo implica Geométricamente reductivo.

Ahora enunciamos el teorema de Nagata:

Teorema 1.1.18 (Nagata). *Sea G un grupo reductivo actuando racionalmente en una k -álgebra finitamente generada R . Entonces $R^G = \{f \in R : f^g = f \ \forall g \in G\}$ es finitamente generada como k -álgebra.*

La demostración de este teorema requiere de muchos resultados de álgebra conmutativa. Se puede encontrar una demostración de este teorema en [Fogarty, 1969, Teorema 5.9] y [Newstead, 1978, Teorema 3.4].

Ejemplo 1.1.19 (Grupos reductivos). Vamos a mostrar que $GL_n(\mathbb{C})$ y $SL_n(\mathbb{C})$ son grupos reductivos.

Demostración. ■ El grupo general lineal $GL_n(k)$ es reductivo.

Para $n = 1$, $GL_1 = k^* = \mathbb{G}_m$ es reductivo.

Supongamos que $n > 1$ y sea $R_u = R_u(GL_n)$ el radical unipotente. Sea $x \in R_u \setminus \{Id\}$, es decir, $(x - Id)^r = 0$ p.a $r \in \mathbb{N}$. Entonces podemos escribirlo en términos de sus bloques de Jordan, que se ve de la siguiente manera:

$$x_J = \begin{pmatrix} x_{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_{J_k} \end{pmatrix} \quad \text{donde } x_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{m_1 \times m_1} \quad \text{con } m_1 > 1 \text{ pues } x_J \neq Id.$$

Como R_u es un subgrupo normal, se sigue que $x_J \in R_u$, y como sabemos, la transpuesta de x_J es conjugada a ella ($x_J = gx_J^t g^{-1}$ p.a $g \in GL_n$) entonces $x_J^t \in R_u$. Luego el producto

$y := x_J(x_J^t) \in R_u$. Entonces

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y_k \end{pmatrix} \text{ donde } y_j = x_{J_j}(x_{J_j}^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq k.$$

Notemos que y no es unipotente,

$$y - Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y notemos } (y - Id)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & 2 \\ 0 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \dots, (y - Id)^r \neq Id \forall r \in \mathbb{N}.$$

Entonces y no es unipotente, lo cual es una contradicción porque $y \in R_u$. Por lo tanto $R_u = \{Id\}$ y $GL_n(k)$ es reductivo.

- El grupo especial lineal $SL_n(k)$ es reductivo.

Para mostrar eso usaremos la reductividad de $GL_n(k)$, con la observación de que un subgrupo normal de $SL_n(k)$ es un subgrupo normal de $GL_n(k)$ y todo conjugado en $GL_n(k)$ también es conjugado en $SL_n(k)$:

Si $x, y \in SL_n(k)$ son conjugados en GL_n , entonces $x = gxg^{-1}$ para algún $g \in GL_n$, luego, recordemos que el polinomio determinante es homogéneo de grado n , podemos definir $h := g/\sqrt[n]{\det(g)}$, podemos ver que $h \in SL_N(k)$ y tenemos $x = hyh^{-1}$.

Sea $H \subset SL_n$ un subgrupo normal conexo y unipotente en $SL_n(k)$. Entonces también es normal conexo y unipotente en $GL_n(k)$ (esto por tener la topología de subespacio). Como $GL_n(k)$ es reductivo y $H \subset R(GL_n) = \{Id\}$ entonces $H = \{Id\}$. Por tanto $SL_n(k)$ también es reductivo.

□

Para $PGL_n(k)$ y otros grupos clásicos se puede consultar [Santos y Rittatore, 2005, Cap. 5 §9].

Ejemplo 1.1.20 (Un grupo no reductivo). El siguiente subgrupo G de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ no es reductivo:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$$

Demostración. Vamos a probar que $R(G) \neq \{Id\}$. Para eso consideremos el subgrupo algebraico lineal H de G que consiste de aquellos elementos con $\alpha = 1$. Podemos notar que H es abeliano y conexo por la conexidad de $\mathrm{GL}_4(k)$ y la topología de subespacio que hereda H . Veamos que además es normal: Sean

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in G, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & b & c & bc \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

entonces podemos ver que

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b & \alpha^{-1}c & \alpha^{-1}bc \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^{-1}c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Tenemos entonces que H es normal, y observemos que para cada $h \in H$, $(h - Id)^4 = 0$. Entonces H es unipotente y además $\{Id\} \subsetneq H \subset R(G)$. Por lo tanto G no es reductivo. \square

1.1.3. Cocientes

Como ya habíamos mencionado, para clasificar objetos en geometría algebraica, uno está interesado en una variedad afín o proyectiva que se pueda identificar con el conjunto X/G que cumpla cierta propiedad universal y con las propiedades con las que se desea clasificar los objetos en X . Para buscar tal variedad tiene sentido considerar la acción inducida en $A(X)$. Con el teorema de Nagata sabemos que si nuestro grupo es reductivo, el álgebra de invariantes

$A(X)^G$ será finitamente generada y con esto podemos tener una variedad algebraica que se puede identificar con X/G . Ahora vamos a ver las nociones de cociente que se pueden obtener.

Definición 1.1.21. Un *cociente categórico de X por G* es un par (Y, φ) , donde Y es una variedad y $\varphi : X \rightarrow Y$ es un morfismo sobreyectivo tal que:

1. φ es constante en las órbitas de la acción.
2. Para cada variedad Y_1 y morfismo $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ constante en órbitas, existe un único morfismo $\chi : Y \rightarrow Y_1$ tal que $\chi \circ \varphi = \varphi_1$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \varphi_1 \downarrow & \swarrow \exists! \chi & \\ Y_1 & & \end{array}$$

conmuta.

Si, además, $\varphi^{-1}(y)$ consiste de sólo una órbita para todo $y \in Y$ entonces (Y, φ) se llama *espacio de órbitas*.

Podemos pedir condiciones más fuertes.

Definición 1.1.22. Un *cociente bueno de X por G* es una pareja (Y, φ) donde Y es una variedad y $\varphi : X \rightarrow Y$ es un morfismo afín que satisface las siguientes condiciones:

1. φ es G -invariante (constante en las órbitas de G).
2. φ es sobreyectivo.
3. Si U es un abierto de Y , entonces

$$\varphi^* : A(U) \rightarrow A(\varphi^{-1}(U))$$

es un isomorfismo de $A(U)$ sobre $A(\varphi^{-1}(U))^G$

4. Si W es un subconjunto invariante y cerrado de X , entonces $\varphi(W)$ es cerrado.
5. Si W_1, W_2 son subconjuntos de X , cerrados, invariantes y disjuntos, entonces $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = \emptyset$.

Definición 1.1.23. Un *cociente geométrico* es un cociente bueno que es, además, un espacio de órbitas.

La siguiente proposición nos dice que todo cociente bueno es cociente categórico y nos da las condiciones para determinar si tenemos un cociente geométrico.

Proposición 1.1.24. *Sea (Y, φ) un cociente bueno de X por G . Entonces*

1. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ si y sólo si $\overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$;
2. (Y, φ) es un cociente categórico de X por G ;
3. Si la acción de G en X es cerrada, es decir, si todas las órbitas son conjuntos cerrados, entonces (Y, φ) es un cociente geométrico.

Demostración. 1. Si $x \in \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)}$ entonces $\varphi(x_1) = \varphi(x) = \varphi(x_2)$ por continuidad.

Conversamente, supongamos que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = y$. Los cerrados $\overline{O(x_1)}$ y $\overline{O(x_2)}$ son invariantes. Luego, si $\overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} = \emptyset$ entonces $\varphi(\overline{O(x_1)}) \cap \varphi(\overline{O(x_2)}) = \emptyset$, pero $y \in \varphi(\overline{O(x_1)}) \cap \varphi(\overline{O(x_2)})$ implica que $\overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$.

2. Supongamos Y_1 es una variedad afín y $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ es morfismo de variedades constante en órbitas de la acción.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \varphi_1 \downarrow & \swarrow \psi & \\ Y_1 & & \end{array}$$

Como φ es invariante, i.e, constante en órbitas, y es sobreyectiva, para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y = \varphi(x)$, y si $O(x_1) = O(x_2)$ entonces $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Entonces definamos $\psi : Y \rightarrow Y_1$ de modo que $\psi(y) = \varphi_1(x)$. Esta aplicación está bien definida pues φ y φ_1 son constantes en órbitas y es un morfismo de variedades algebraicas, luego notamos que $\psi \circ \varphi = \varphi_1$. Por lo tanto tenemos que (Y, φ) es un cociente categórico.

3. Es la definición de cociente categórico.

□

Teorema 1.1.25 (Existencia de cociente bueno). *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad afín X , entonces existe una variedad afín Y y un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que (Y, φ) es un cociente bueno de X por G .*

Demostración. (Idea)

Consideremos la acción racional inducida de G en $A(X)$, el teorema de Nagata nos garantiza que $A(X)^G$ es finitamente generada, es decir, existen $f_1, \dots, f_s \in A(X)^G$ tales que $A(X)^G = k[f_1, \dots, f_s]$. Sea $J = \{F \in k[y_1, \dots, y_s] \mid F(f_1, \dots, f_s) = 0\}$ este es el ideal de relaciones de los generadores de $A(X)^G$. Sea $Y = \mathbb{V}(J) \subset \mathbb{A}^s$, y definamos el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_s(x)). \end{aligned}$$

Claramente φ es G -invariante y es sobreyectiva porque $A(X)^G \hookrightarrow A(X)$.

Lo que sigue es probar que el par (Y, φ) define un cociente bueno de X por G . □

Se puede encontrar la demostración en [Newstead, 1978, Teorema 3.5].

A continuación veremos un ejemplo muy ilustrativo.

Ejemplo 1.1.26 (Conjugación de matrices, caso afín). Sea X el espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{C} y sea $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Consideramos la acción de G en X por conjugación. Encontraremos la variedad cociente que parametriza las órbitas de esta acción y describiremos cómo está dado el morfismo cociente. Finalmente, encontraremos las matrices cuya órbita es: cerrada, de dimensión máxima, ambas. *La acción.*

Consideremos la acción de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sobre $M_n(\mathbb{C})$ dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ (P, A) &\mapsto PAP^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se conoce como *Conjugación de matrices*.

Podemos ver a $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$. En el resto del ejemplo vamos a denotar elementos de $M_n(\mathbb{C})$ tanto como matrices, como puntos de \mathbb{C}^{n^2} , es decir, una matriz $A = (x_{ij})$.

Las funciones regulares $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ corresponden a elementos $\varphi \in \mathbb{C}[x_{ij}]$. Sabemos que la acción (1.1) induce una acción en el anillo de coordenadas de $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$, de la

siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[x_{ij}] &\rightarrow \mathbb{C}[x_{ij}] \\ (P, f) &\mapsto f^P : \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C} \\ A &\mapsto f(P^{-1}AP). \end{aligned} \tag{1.2}$$

El álgebra de invariantes. Vamos a estudiar las funciones invariantes bajo la acción de este grupo algebraico. Sin entrar en detalles se pueden verificar los siguientes:

1. Lo primero que podemos ver es que si $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una función invariante, entonces los valores de φ están determinados por sus valores en las formas canónicas de Jordan.
2. Sea $\mathfrak{D} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ es diagonalizable}\}$. Se puede probar que \mathfrak{D} es denso en $M_n(\mathbb{C})$ en la topología de Zariski. Este conjunto nos permitirá deducir información de las funciones invariantes.
3. Por la densidad de \mathfrak{D} en $M_n(\mathbb{C})$ se puede mostrar que una función invariante está determinada de manera única por sus valores en las matrices diagonales. Es decir, que si $f, g \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ y para toda $D \in \mathfrak{D}$ se tiene que $f(D) = g(D)$ entonces $f = g$.
4. Notemos que $\mathcal{D} \cong \mathbb{C}^n$. Denotemos por $\mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ su anillo de coordenadas. Definamos el morfismo

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} &\rightarrow \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \\ f &\mapsto f|_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Con el punto anterior se puede verificar que este morfismo es inyectivo.

5. Otra característica de las funciones invariantes es que restringidas a las diagonales son simétricas. Es decir, si $f \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, entonces f es una función simétrica en $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
6. Entonces la imagen de $\mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ en $\mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ está contenida en la subálgebra $\mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, donde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son los polinomios simétricos elementales en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pero más es cierto, la imagen del álgebra de invariantes $\mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ es isomorfa a toda el álgebra $\mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

El morfismo cociente. Como $\mathbb{C}[x_{ij}]^{\text{GL}_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[x_{ij}]$, podemos considerar el morfismo inclusión $i : \mathbb{C}[x_{ij}]^{\text{GL}_n(\mathbb{C})} \hookrightarrow \mathbb{C}[x_{ij}]$. El morfismo inducido

$$\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \frac{M_n(\mathbb{C})}{\text{GL}_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \quad \text{está dado por} \quad \varphi(A) = (a_1(A), \dots, a_n(A)) \in \mathbb{A}^n,$$

donde los $a_i(A)$ son los coeficientes del polinomio característico $P_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. Sabemos que $(-1)^i a_i = \sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y por tanto $a_1(A) = \pm \text{traza}(A)$ y $a_n(A) = \det(A)$.

Es decir, que a cada matriz A lo manda a los coeficientes de su polinomio característico. Y claramente φ es invariante y sobreyectiva, pues para un punto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ podemos dar explícitamente una matriz cuyo polinomio característico tenga esos coeficientes. Consideremos

$$M_{(a_1, \dots, a_n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-2} a_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

esta matriz cumple que $P_{M_{(a_1, \dots, a_n)}}(t) = t^n + \sum_{j=1}^n (-1)^j a_j t^{n-j}$.

Por el teorema de existencia de cocientes buenos, sabemos que el par (\mathbb{A}^n, φ) que definimos, es un cociente bueno.

Órbitas. Queremos identificar las matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = O(A)$, en otras palabras, puntos en el cociente cuya fibra sea una sola órbita.

Como φ es invariante, constante en órbitas, se tiene que si $O(A) = O(B)$ entonces $\varphi(A) = \varphi(B)$. Pero no necesariamente $\varphi(A) = \varphi(B)$ implica $O(A) = O(B)$, pues dos matrices pueden tener los mismos valores propios pero diferente forma canónica de Jordán, es decir, órbitas diferentes. Entonces podemos decir que $\varphi(A) = \varphi(B)$ si y sólo si tienen los mismos valores propios.

Vamos a mostrar que las matrices cuya órbita es cerrada y de dimensión máxima son precisamente aquellas con los valores propios distintos.

Consideremos al conjunto

$$\mathcal{B} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ todos sus valores propios son distintos}\} = M_n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{V}(\Delta),$$

donde $\Delta \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ polinomio discriminante del polinomio característico definido como $P(t) = t^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(x_{ij}) t^k \in \mathbb{C}[x_{ij}]$. Este conjunto es un abierto de Zariski, y para cada matriz

$A \in \mathcal{B}$ tenemos que A es diagonalizable y además $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = O(A)$, pues toda matriz con los mismos valores propios que A tiene que ser un conjugado de A , por ser todos distintos. Con esto tenemos que si A tiene todos sus valores propios distintos, entonces $O(A)$ es cerrada.

Para una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se satisface $\dim O(A) = \dim \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) - \dim \mathrm{Est}(A) = n^2 - \dim \mathrm{Est}(A)$. Si $\mathrm{Est}(A)$ fuera finito para alguna matriz A , tendríamos una órbita de dimensión $\dim O(A) = \dim \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pero sabemos que eso no pasa en el caso de conjugación de matrices.

Sea $A \in \mathcal{B}$. Podemos asumir que A es el representante de su órbita, es decir A es diagonal. Entonces el $\mathrm{Est}(A)$ consta de todas las matrices diagonales. Este subgrupo tiene dimensión n , y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tiene dimensión n^2 . Luego tenemos $\dim O(A) = n^2 - n$ para todo A diagonalizable, y en particular para todo $A \in \mathcal{B}$. Y esta es la dimensión máxima que puede tener una órbita.

Ahora, queremos probar el converso, si A es diagonalizable, supongamos que $O(A)$ no es cerrada en $M_n(\mathbb{C})$. Entonces podemos tomar $B \in \overline{O(A)} \setminus O(A)$, luego $O(B) \subset \overline{O(A)} \setminus O(A)$, por lo que vimos anteriormente B y A tienen los mismos valores propios pero B tiene parte nilpotente, luego $\overline{O(B)} \cap \overline{O(A)} \neq \emptyset$, es decir, A se acumula en la cerradura de la órbita de B , así que $\dim O(B) > \dim O(A)$ lo cual no puede ser (por [Newstead, 1978, lema 3.7]). Por lo tanto, $O(A) = \overline{O(A)}$.

Entonces *el conjunto donde se obtienen órbitas cerradas y de dimensión máxima es*

$$\mathcal{B} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ todos sus valores propios son distintos}\} = M_n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{V}(\Delta).$$

□

1.1.4. Cocientes en variedades proyectivas

En general, no siempre se puede construir un cociente bueno de una acción de un grupo algebraico lineal G sobre una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}_k^n$. David Mumford demostró que, después de eliminar ciertos puntos de la variedad, sí existe un cociente bueno para la acción.

Si G es un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$. Al contrario del caso afín, no se tiene de manera natural una acción inducida en $A(X)$, pero como la acción es lineal, podemos considerar la acción inducida de G en $k[x_0, \dots, x_n]$, esto tiene sentido por la siguiente definición

Definición 1.1.27. Una *linealización* de una acción de un grupo algebraico G en una variedad proyectiva X en \mathbb{P}^n es una acción lineal de G en k^{n+1} la cuál induce la acción dada en X . Una *acción lineal* de G en X es una acción de G junto con una linealización de esta acción.

Entonces tiene sentido consideremos la acción inducida en el anillo de polinomios

$$k[x_0, \dots, x_n] \times G \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]$$

$$(f, g) \mapsto f^g(x_0, \dots, x_n) = f(g^{-1}(x_0, \dots, x_n)).$$

Ahora, de acuerdo a lo que dice Mumford. ¿Qué puntos de la variedad debemos eliminar para poder construir un cociente bueno?

Como queremos identificar las funciones del cociente con el álgebra de invariantes, llegamos a tener problemas con los puntos $x \in X$ que se anulan en todos los polinomios invariantes, es decir, $f(x) = 0$ para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]^G$ homogéneo de $\text{grado}(f) \geq 1$, pues el cero no es un punto en el proyectivo. Entonces la respuesta a la pregunta son esos puntos, el conjunto de tales puntos forman un cerrado de Zariski. Si quitamos esos puntos, tenemos un abierto de X donde, como veremos más adelante, se puede construir un cociente bueno.

Con esto en mente llegamos a la siguiente definición.

Definición 1.1.28. Diremos que $x \in X$ es:

1. *semi-estable* si existe f , polinomio invariante, homogéneo de grado positivo tal que $f(x) \neq 0$. Denotamos el conjunto de punto semi-estables de X como X^{ss} .
2. *estable* si es semi-estable, $\dim O(x) = \dim G$, y $O(x)$ es cerrado en X^{ss} . El conjunto de puntos estables de X lo denotamos por X^s .
3. *inestable* si no es semi-estable.

Los puntos inestables forman un cerrado de Zariski de X , denominado *cono nulo* y denotado por $X^{un} := X \setminus X^{ss}$. Notemos entonces que $X^{ss} \subset X$ es un abierto de Zariski.

Teorema 1.1.29. *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad proyectiva X , entonces*

1. *Existe un cociente bueno (Y, φ) de X^{ss} por G donde Y es variedad proyectiva.*

2. Existe $Y^s \subset Y$ abierto tal que $\varphi^{-1}(Y^s) = X^s$ y (Y^s, φ) es un cociente geométrico de X^s por G .
3. Si $x_1, x_2 \in X^{ss}$ entonces

$$O(x_1) = O(x_2) \Leftrightarrow \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$$

Este teorema nos dice que con los semi-estables podemos construir un cociente bueno, con los estables podemos construir un cociente geométrico. La notación Y^s es simplemente para denotar el abierto de Y que determina el cociente geométrico de los estables X^s por G . La idea es cubrir el abierto X^{ss} por abiertos X_f afines invariantes, donde f es un polinomio invariante homogéneo de grado positivo, considerar la acción lineal de G en X_f y construir el cociente bueno (Y_f, φ_f) para cada X_f como en el caso afín, después pegarlas de manera adecuada para construir una variedad proyectiva Y y un morfismo $\varphi : X^{ss} \rightarrow Y$ que será el cociente bueno de X^{ss} por G . La demostración es muy extensa y requiere de enunciar más resultados, por lo que no la incluimos en este trabajo. Podemos encontrar una demostración de este teorema en [Newstead, 1978, Cap. 3.4].

Ejemplo 1.1.30 (Conjugación de matrices, caso proyectivo). Sea X la proyectivización del espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{C} y sea $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Considera la acción de G en X por conjugación. Encuentra los puntos semi-estables y el cociente bueno de la acción.

Consideremos la acción por conjugación en X .

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times X &\rightarrow X \\ (g, A) &\mapsto gAg^{-1} \end{aligned}$$

Estudiando la acción inducida de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}[x_{ij}]$ podemos ver que todo polinomio invariante es un polinomio en los simétricos elementales, lo cuales todos son homogéneos, entonces $\mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, donde σ_i es el simétrico elemental de grado i , luego podemos escribir $c_i = (-1)^i \sigma_i \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ que son los coeficientes del polinomio característico de una matriz $A \in X$, y así podemos escribir el álgebra de invariantes como $\mathbb{C}[x_{ij}] = \mathbb{C}[c_1, \dots, c_n]$.

Entonces los puntos inestables serán las matrices en X que se anulan en los generadores del álgebra de invariantes

$$X^{un} = \{A \in X \mid c_i(A) = 0, i = 1, \dots, n\} = \{A \in X \mid P_A(t) = t^n\} = \{A \in X \mid A \text{ es nilpotente}\}.$$

Como $0 \notin X$, podemos decir que los puntos inestables son las matrices cuya forma canónica de Jordán tiene ceros en la diagonal y al menos un bloque de Jordán de tamaño 2.

El conjunto de puntos semi-estables será entonces $X^{ss} = X \setminus X^{un} = \{A \in X \mid A \text{ no es nilpotente}\}$. Notemos que si $n \geq 2$ se tiene $X^s = \emptyset$, es decir, no hay puntos estables pues como en el caso afín, la dimensión máxima de una órbita es $n^2 - n$, y la dimensión del $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ es $n^2 - 1$. Entonces podemos decir que para $n \geq 2$ no hay puntos estables.

Sabemos que existe un cociente bueno. Notemos que, como cada generador de $\mathbb{C}[x_{ij}]^{\mathrm{SL}_n}$ es un polinomio homogéneo, sucede que para $A \in X$ y una constante $l \in \mathbb{C}^*$ se tiene $lA \in [A]$ pero $c_i(lA) = l^i c_i(A)$. Visto con el polinomio característico $P_{lA}(t) = t^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i c_i(lA) t^{n-i} = t^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i l^i c_i(A) t^{n-i}$.

Quisiéramos una variedad proyectiva Y y un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que la imagen de un elemento de la clase de $A \in X$ caiga en la misma clase de $\varphi(A)$ en Y .

Entonces introducimos el siguiente espacio:

Definición 1.1.31. Sean $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Definimos en espacio proyectivo con pesos (k_1, \dots, k_n) como el conjunto de órbitas de la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \\ (l, (x_1, \dots, x_n)) &\mapsto (l^{k_1} x_1, \dots, l^{k_n} x_n) \end{aligned}$$

A este espacio lo denotaremos por $\mathbb{P}(\mathbb{C})_{(k_1, \dots, k_n)}$.

Definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : X^{ss} &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C})_{(1, \dots, n)} \\ A &\mapsto (c_1(A), \dots, c_n(A)). \end{aligned}$$

Este morfismo está bien definido, pues cumple que $\varphi(A) = \varphi(lA)$ para todo $l \in \mathbb{C}^*$, $A \in X$. Es invariante porque el polinomio característico es invariante bajo conjugación, y por el mismo argumento que en el caso afín φ es sobreyectivo.

Entonces $(\mathbb{P}(\mathbb{C})_{(1, \dots, n)}, \varphi)$ es el cociente bueno de X^{ss} por $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Notemos que para $n \geq 2$ no existe un cociente geométrico porque $X^s = \emptyset$.

□

1.1.5. Criterio de Hilbert-Mumford

En esta sección describiremos un criterio muy útil para encontrar los puntos inestables y estables de una acción.

Consideremos la acción lineal de un grupo reductivo G en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx, \end{aligned}$$

y sea \widehat{X} el cono afín de X . Como ya habíamos visto, hay una acción inducida de G en $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces tenemos de manera natural una acción lineal de G en \widehat{X} .

Proposición 1.1.32. *Sea $x \in X$ y $\hat{x} \in \widehat{X}$ en la clase de x , entonces:*

1. x es semi-estable si y sólo si $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$.
2. x es estable si y sólo si $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$, la órbita de x es cerrada en X^{ss} y $\dim O(x) = \dim G$.

Demostración. Sea $x \in X$ y $\bar{x} \in \widehat{X}$ en la clase de x .

1. Supongamos que x es semi-estable, entonces existe f polinomio invariante homogéneo de grado positivo tal que $f(x) \neq 0$. Entonces para $\hat{x} \in x$ se tiene $f(\hat{x}) = a \neq 0$. Como f es invariante, para todo $\hat{y} \in O(\hat{x})$ se tiene $f(\hat{y}) = a \neq 0$, luego $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$.

Supongamos ahora que $0 \in \overline{O(\hat{x})}$, como $\overline{O(\hat{x})}$ es cerrado en \widehat{X} , sabemos que existe f invariante de grado positivo tal que $f(0) = 0$ y $f(\overline{O(\hat{x})}) = 1$. Escribimos $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_d$ su descomposición en homogéneos, los cuales son invariantes, entonces, como $f(\hat{x}) = 1$, existe i tal que $f_i(\hat{x}) = 1$. Por lo tanto $x \in X^{ss}$.

2. Se da por la definición de punto estable.

□

Estamos interesados entonces en saber cuándo el 0 es un punto de acumulación de una órbita $O(\hat{x})$, es decir, cuándo $0 \in \overline{O(\hat{x})}$. Para eso introducimos la siguiente definición:

Definición 1.1.33. *Un subgrupo a 1-parámetro de G es un homomorfismo no trivial*

$$\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$$

de grupos algebraicos. Denotamos al conjunto de subgrupos a 1-parámetro de G como

$$\Gamma(G) = \{\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G \mid \lambda \text{ es subgrupo a 1-parámetro}\}.$$

Si λ es un subgrupo a un parámetro y G actúa linealmente en una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$, entonces λ define una representación de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \lambda(t) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ &v \mapsto \lambda(t)v. \end{aligned}$$

Proposición 1.1.34. *La representación anterior es diagonalizable, es decir, existe $\{e_0, \dots, e_n\}$ base de k^{n+1} tal que $\lambda(t)e_i = t^{r_i}e_i$ para algunos enteros r_i .*

Demostración. Dado que k^* es un grupo conmutativo, entonces $\{\lambda(t)\}_{t \in k^*}$ es una familia conmutativa de endomorfismos de k^{n+1} . Sea $t_0 \in k^*$ una raíz m -ésima de la unidad, entonces $\lambda(t_0)^m$ es la matriz identidad, por lo tanto $\lambda(t)$ es diagonalizable. Sea $k^{n+1} = \ker(\lambda(t_0) - a_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(\lambda(t_0) - a_{n+1} I)$ la descomposición en subespacios propios lineales invariantes que define la diagonalización de $\lambda(t_0)$.

Sea $E \in \{\lambda(t)\}_{t \in k^*}$ y sea j un entero positivo menor o igual que $n+1$ y $v \in \ker(\lambda(t_0) - a_j I)$, entonces

$$(\lambda(t_0) - a_j I)Ev = E\lambda(t_0)v - a_j Ev = E(a_j v) - a_j Ev = 0,$$

por lo tanto el subgrupo unidimensional $\ker(\lambda(t_0) - a_j I)$ es invariante por E , entonces E es diagonalizable con la misma base que $\lambda(t_0)$. Sea $\{e_0, \dots, e_n\}$ la base que diagonaliza estos endomorfismos, puesto que k^* es un grupo multiplicativo, entonces $\lambda(t)e_i = t^{r_i}e_i$ donde $r_i \in \mathbb{Z}$. □

Entonces podemos escribir un punto en el cono afín de nuestra variedad como $\hat{x} = \sum \hat{x}_i e_i$ tal que $\lambda(t)\hat{x} = \sum t^{r_i} \hat{x}_i e_i$.

En este trabajo usaremos el grupo reductivo $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, el cuál nos ofrece algunas ventajas, una de ellas es que sus subgrupos a 1-parámetro son diagonalizables. En general tenemos

Proposición 1.1.35. *Los subgrupos a 1-parámetro de $\mathrm{SL}_n(k)$ son de la forma*

$$\begin{aligned} \lambda : k^* &\rightarrow \mathrm{SL}_n(k) \\ t &\mapsto g \mathrm{diag}(t^{r_1}, \dots, t^{r_n}) g^{-1} \end{aligned}$$

donde $g \in \mathrm{SL}_n(k)$, $r_i \in \mathbb{Z}$ con la relación $r_1 \geq \dots \geq r_n$ tal que $r_1 + \dots + r_n = 0$.

Podemos encontrar la demostración en [Newstead, 1978, Cap. 4.2].

Sea T el toro maximal diagonal de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, los subgrupos a 1-parámetro de T son de la forma $\lambda(t) = \mathrm{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) \in \Gamma(T)$ con las mismas condiciones de la proposición anterior sobre los enteros r_1 , r_2 y r_3 . A estos se les llama *subgrupos a 1-parámetro diagonales* de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, y los podemos identificar con $(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}^2$, es decir $\Gamma(T) \cong \mathbb{Z}^2$.

Definición 1.1.36. Si G es un grupo algebraico lineal, sea $\Gamma(G)$ el conjunto de subgrupos a 1-parámetro de G . Definimos el *conjunto de subgrupos a 1-parámetro virtuales* de G como $M(G) = \Gamma(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

En el caso particular del toro maximal de SL_3 , tenemos $M(T) := \Gamma(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ a los que se les llama *subgrupos a 1-parámetro virtuales* de T .

La idea de Mumford fue usar subgrupos a 1-parámetro para definir estabilidad de los elementos de X por la acción lineal de G . Para eso se introduce la siguiente función llamada *función de Mumford*.

Definición 1.1.37. Sea $x \in X$ y λ un subgrupo a 1-parámetro de G , definimos la siguiente función

$$\mu(x, \lambda) := \min\{r_i : \hat{x}_i \neq 0\},$$

donde $\hat{x} = \sum \hat{x}_i e_i$ tal que $\lambda(t)\hat{x} = \sum t^{r_i} \hat{x}_i e_i$.

De esta definición se sigue el siguiente resultado:

Proposición 1.1.38. Sea $x \in X$. Tomemos $\hat{x} \in \widehat{X}$ tal que $\hat{x} \in x$. Sea $g \in G$ y λ un subgrupo a 1-parámetro de G , entonces:

1. $\mu(x, \lambda) < 0$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x}$ no existe.
2. $\mu(x, \lambda) > 0$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x} = 0$.
3. $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$.

Demostración. Escribimos $\hat{x} = \sum \hat{x}_i e_i$, $\lambda(t)\hat{x} = \sum \hat{x}_i t^{r_i} e_i$. Entonces

1. $\mu(x, \lambda) > 0$ si y solo si $\min\{r_i \mid \hat{x}_i \neq 0\} > 0$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x} = 0$.
2. $\mu(x, \lambda) < 0$ si y solo si $\min\{r_i \mid \hat{x}_i \neq 0\} < 0$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x}$ no existe.
3. Sea $g \in G$ y $\{ge_0, \dots, ge_n\}$ una k -base de k^{n+1} que diagonaliza la representación de λ , es decir, $\lambda(t)ge_i = t^{r_i}ge_i$, entonces $g^{-1}\lambda(t)ge_i = g^{-1}(t^{r_i}ge_i) = t^{r_i}e_i$. Esto significa que $\{e_0, \dots, e_n\}$ es una base que diagonaliza a $g^{-1}\lambda(t)g$. Entonces $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$.

□

Si existe un subgrupo a 1-parámetro λ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x} = 0$, entonces x es un punto inestable, pues el límite pertenece a $\overline{O(\hat{x})}$.

Y un resultado más general que podemos encontrar en [Mumford, 1977] y [Mumford et al., 1994, Teorema 2.1] es el *Criterio de Hilbert-Mumford*:

Teorema 1.1.39. *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva X , entonces $x \in X$ es:*

1. *semi-estable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) \leq 0$ para todo λ , subgrupo a 1-parámetro de G . (inestable si, y sólo si, existe un subgrupo a 1-parámetro λ de G tal que $\mu(x, \lambda) > 0$.)*
2. *estable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) < 0$ para todo λ , subgrupo a 1-parámetro de G .*

También se puede encontrar una buena demostración para $k = \mathbb{C}$ de este teorema en [Birkes, 1971].

1.2. Teoría de representaciones de álgebras de Lie

En esta sección vamos dar algunas definiciones y resultados básicos de representaciones de álgebras de Lie, enfocándonos en representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$, pues usaremos una de ellas en el desarrollo de la tesis. La teoría general de representaciones de álgebras de Lie es muy extensa, por eso en esta sección solo daremos las ideas generales y detallaremos un poco mediante el ejemplo particular de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$.

Definición 1.2.1. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial \mathfrak{g} equipado con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ llamada *corchete de Lie* que satisface las siguientes propiedades:

1. la antisimetría $[X, Y] = -[Y, X]$ y
2. la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Un *morfismo entre álgebras de Lie* \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' es una transformación lineal $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ que además satisface $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$.

Ejemplo 1.2.2. El espacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ con $[\cdot, \cdot]$ igual al producto cruz $[u, v] = u \times v$, $u, v \in \mathbb{R}^3$ es un álgebra de Lie.

□

En general, la operación $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ no es ni asociativa ni conmutativa. Como se puede ver en el ejemplo del producto cruz.

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , consideremos $End(V)$, este es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con la multiplicación escalar sobre \mathbb{R} , más aún, podemos darle estructura de \mathbb{C} -álgebra con la composición de transformaciones lineales. Y podemos definir $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$, $X, Y \in End(V)$, se puede verificar que con esta operación $End(V)$ es un álgebra de Lie, y se denota como $\mathfrak{gl}(V)$. De manera general tenemos [Zubiaga et al., , p. 38].

Teorema 1.2.3. *Para cada álgebra de Lie \mathfrak{g} existe un espacio vectorial V y un morfismo inyectivo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.*

Representaciones de álgebras de Lie; la representación adjunta ad

Definición 1.2.4. Una representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} en un espacio vectorial V es un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} viene equipada con una representación natural en sí misma; llamada *la representación adjunta*:

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$X \mapsto ad(X) \quad ad(X)(Z) := [X, Z].$$

ad es una representación significa que, $ad([X, Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X)$ y esto es una consecuencia de la identidad de Jacobi.

Representaciones de grupos; la representación adjunta Ad

La acción natural de $GL(V)$ en $End(V) = \mathfrak{gl}(V)$ dada por

$$GL(V) \times \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \quad (g, X) \mapsto g \circ X \circ g^{-1},$$

define una representación de $GL(V)$ en el espacio vectorial $\mathfrak{gl}(V)$, denotada por Ad y llamada *la representación adjunta de $GL(V)$* :

$$Ad : GL(V) \rightarrow GL(\mathfrak{gl}(V)).$$

En general: sea G un grupo y V un espacio vectorial. Una *representación* de G en V es un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow GL(V)$; es decir, una función que satisface $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$. En otras palabras, una representación de G en V es exactamente una acción de G en V por transformaciones lineales como ya se había definido antes $(g, v) \mapsto \rho(g)(v)$.

Una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es *irreducible* si los únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y V . Decimos que $W \subset V$ es un espacio invariante si $\rho(g)W \subset W$ para todo $g \in G$. Una *subrepresentación* de una representación V es un subespacio vectorial W de V que es invariante por G .

Un resultado que usaremos en la representación de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ es [Fulton y Harris, 2013, Prop. 1.6]

Proposición 1.2.5. *Toda representación es una suma directa de representaciones irreducibles.*

1.2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$

En la tesis vamos a considerar el álgebra de Lie de $SL_3(\mathbb{C})$ denotado como $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$, esto es porque $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} y, como veremos, estudiar las representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ nos da información sobre las representaciones de $SL_3(\mathbb{C})$.

Definición 1.2.6. El álgebra de Lie de $SL_3(\mathbb{C})$ se define como $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C} := T_e SL_3(\mathbb{C})$ el espacio tangente en e la identidad de $SL_3(\mathbb{C})$.

La relación entre $SL_3(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ está dada por la función exponencial [Fulton y Harris, 2013, Prop. 8.33]

Proposición 1.2.7. *La función exponencial es la única función de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ a $SL_3(\mathbb{C})$ que manda 0 a e cuya diferencial en el origen*

$$(exp_*)_0 : T_0 \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C} = \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C} \rightarrow T_e SL_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$$

es la identidad, y cuyas restricciones a líneas a través del origen en $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ son subgrupos a 1-parámetro de $SL_3(\mathbb{C})$.

Dado que vamos a estudiar las representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ y descomposiciones de estas por alguna subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$. Consideramos el siguiente resultado [Fulton y Harris, 2013, Prop. 8.41]

Proposición 1.2.8. *Si $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ es el álgebra de Lie de $SL_3(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ es una subálgebra de Lie. Entonces el subgrupo de $SL_3(\mathbb{C})$ generado por $exp(\mathfrak{h})$ es un subgrupo H inmerso con el espacio tangente $T_e H = \mathfrak{h}$.*

Para más propiedades de la función exponencial con las álgebras de Lie se puede consultar [Fulton y Harris, 2013, Capítulo 8].

Consideremos el espacio de matrices diagonales $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$. Sabemos que las matrices diagonalizables que conmutan, son simultáneamente diagonalizables. Con esto tenemos : Toda representación finita V de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ tiene una descomposición $V = \oplus V_\alpha$ donde todo vector $v \in V_\alpha$ es un “eigenvector” para cada elemento $H \in \mathfrak{t}$. Vamos a fijar las nociones de “eigenvector, eigenvalor y eigenspacio” en esta ambiente.

Un *eigenvector* de \mathfrak{t} significa, un vector $v \in V$ que es un eigenvector para todo $H \in \mathfrak{t}$. Para tal vector podemos escribir

$$H(v) = \alpha(H) \cdot v \tag{1.3}$$

donde $\alpha(H)$ es un escalar que depende linealmente en H , es decir, $\alpha \in \mathfrak{t}^*$. Esto nos da la segunda noción: Un *eigenvalor* para la acción de \mathfrak{t} significa un elemento $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ tal que existe un elemento no cero $v \in V$ que satisface 1.3. Y la tercera noción: Un *eigenspacio* asociado al eigenvalor α es el subespacio de todos los vectores $v \in V$ que satisfacen 1.3.

Lema 1.2.9. *Toda representación de dimensión finita V de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ tiene una descomposición*

$$V = \oplus V_\alpha,$$

donde V_α es un eigenspacio para \mathfrak{t} y α corre sobre un subconjunto finito de \mathfrak{t}^ .*

Aplicamos este lema a la representación adjunta de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ para obtener una descomposición

$$\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C} = \mathfrak{t} \oplus (\oplus \mathfrak{g}_\alpha) \quad (1.4)$$

donde α corre sobre un conjunto finito de \mathfrak{t}^* y \mathfrak{t} actúa en cada \mathfrak{g}_α por multiplicación escalar, es decir, para cualquier $H \in \mathfrak{t}$, $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ se tiene

$$[H, Y] = ad(H)(Y) = \alpha(H) \cdot Y.$$

Sean E_{ij} la matriz 3×3 cuya entrada (i, j) -ésima entrada es 1 y todas las demás entradas 0. Los $E_{i,j}$ generan los espacios para la acción adjunta (conjugación) de \mathfrak{t} en \mathfrak{g} .

Explícitamente tenemos

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} : a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$$

y por tanto podemos escribir

$$\mathfrak{t}^* = \mathbb{C}\{L_1, L_2, L_3\}/(L_1 + L_2 + L_3 = 0),$$

donde

$$L_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_i.$$

Los funcionales lineales $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ que aparecen en la suma directa de la descomposición 1.4 son pues, los seis funcionales $L_i - L_j$, $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$; el espacio $\mathfrak{g}_{L_i - L_j}$ será generado por el elemento $E_{i,j}$.

La virtud de esta descomposición y su correspondiente diagrama es que en esta podemos leer casi toda la estructura del álgebra de Lie. La acción de \mathfrak{t} en \mathfrak{g} es clara en el diagrama: \mathfrak{t} manda cada uno de los subespacios \mathfrak{g}_α en sí mismos, actuando en cada \mathfrak{g}_α por multiplicación escalar por el funcional lineal representado por su punto correspondiente.

Nota 1.2.10. Los eigenvalores que aparecen en una representación irreducible de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ difieren uno de otro por combinaciones lineales enteras de los vectores $L_i - L_j$.

donde Tr es la función *traza*. Y como antes, para T el toro maximal diagonal de $SL_3(\mathbb{C})$ tenemos $V = \oplus \alpha_\rho V_{\alpha_\rho}$. De aquí la correspondencia entre los caracteres α_ρ y los pesos $\alpha \in \mathfrak{t}^*$. Se puede estudiar más sobre la teoría de caracteres en [Fulton y Harris, 2013, Cap. 2].

Para más detalles sobre las representaciones de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ se puede consultar [Fulton y Harris, 2013, Cap. 12 y 13].

1.3. Estratificación de una variedad proyectiva

Estamos interesados en construir una estratificación del espacio de curvas planas de grado 4, esta estratificación además de parametrizar curvas con singularidades específicas, como se demostrará, nos puede dar información del cociente bueno formado por los puntos semi-estables.

En esta sección vamos dar algunas definiciones y resultados principales para la estratificación de una variedad proyectiva. Todos los resultados enunciados en esta sección son de [Kirwan, 1984, Parte II]. A partir de ahora vamos a trabajar sobre el campo $k = \mathbb{C}$.

Definición 1.3.1. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Una colección finita $\{S_\beta : \beta \in B\}$ de subconjuntos de X forman una *estratificación de X* si X es la unión disjunta de los estratos $\{S_\beta : \beta \in B\}$, y existe un orden parcial $>$ en el conjunto de índices B tal que:

$$\overline{S_\beta} \subset \bigcup_{\gamma \geq \beta} S_\gamma,$$

para todo $\beta \in B$.

El objetivo de esta sección es enunciar el teorema de Kirwan. Para eso primero vamos a enunciar una serie de definiciones y resultados que nos ayudarán a entender todos los elementos del teorema de Kirwan.

Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en X . Fijamos una norma q en $M(G)$ que se restringe a $M(T)$, donde T es un toro maximal de G . Recordemos que cuando $k = \mathbb{C}$ cualquier producto interno en un subgrupo de Lie maximal compacto induce una norma q en $M(T)$.

Sea T un toro maximal de G . Consideremos la representación en k^{n+1} , sabemos que se expresa como una suma de representaciones escalares dados por los caracteres $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Cada caracter α_j es un elemento del dual de $M(T)$ y se identifican con elementos de $M(T)$ usando el producto interno de $M(T)$.

Un elemento $\beta \in M(T)$ se dice *una mínima combinación de pesos* si es el punto más cercano al origen en un convexo generado por algún subconjunto no vacío de pesos en $M(T)$.

Definición 1.3.2. Sea $B = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ el conjunto de todas las mínimas combinaciones de pesos en una cámara de Weyl fija (i.e. algún dominio fundamental convexo para la acción del grupo de Weyl), B será el *conjunto de índices para la estratificación*.

La finitud del conjunto de índices es porque la representación es de dimensión finita. Con la norma q en $M(T)$ tenemos un orden parcial $>$ en B .

Definición 1.3.3. Si $\lambda \in M(G)$, sea

$$P_\lambda = \{g \in G \mid \mu(g, \lambda) \geq 0\} = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ existe en } G\}.$$

Lema 1.3.4. P_λ es un subgrupo parabólico de G para cada $\lambda \in M(G)$.

Considerando los caracteres de la representación de T en k^{n+1} definimos:

Definición 1.3.5. Sea $\beta \in M(T)$, definimos

$$Z_\beta = \{(x_0 : \dots : x_n) \in X \mid x_j = 0 \text{ si } \alpha_j \cdot \beta \neq q(\beta)\},$$

$$Y_\beta = \{(x_0 : \dots : x_n) \in X \mid x_j = 0 \text{ si } \alpha_j \cdot \beta < q(\beta), x_j \neq 0 \text{ p.a } j \text{ con } \alpha_j \cdot \beta = q(\beta)\}$$

Z_β es una subvariedad cerrada de X , Y_β es una subvariedad localmente cerrada de X .

Definamos la siguiente función $\rho_\beta : Y_\beta \rightarrow Z_\beta$ por $\rho_\beta(x_0 : \dots : x_n) = (x'_0 : \dots : x'_n)$ donde $x'_j = x_j$ si $\alpha_j \cdot \beta = q(\beta)$ y $x'_j = 0$ en caso contrario.

Esta función $Y_\beta \rightarrow Z_\beta$ está bien definida ya que si $y \in Y_\beta$ entonces $\rho_\beta(y) \in \overline{O(y)}$ y en particular en X .

Sea $\text{Est}(\beta)$ el estabilizador de β por la acción adjunta (conjugación) de G en $M(G)$. Tenemos que $\text{Est}(\beta)$ es un grupo reductivo que actúa en Z_β .

Definición 1.3.6. Sean

$$Z_\beta^{ss} = \{x \in Z_\beta \mid \mu(x, \lambda) \leq \lambda \cdot \beta \ \forall \lambda \in M(\text{Est}(\beta))\},$$

$$Y_\beta^{ss} = \rho_\beta^{-1}(Z_\beta^{ss}).$$

Estos conjuntos Z_β^{ss} y Y_β^{ss} se pueden definir en términos de semi-estabilidad como sigue:

Nota 1.3.7. Existe un único G_β subgrupo reductivo conexo de $\text{Est}(\beta)$ tal que

$$M(G_\beta) = \{\lambda \in M(\text{Est}(\beta)) \mid \lambda \cdot \beta = 0\},$$

y

$$Z_\beta^{ss} = \{x \text{ semi-estable por la acción de } G_\beta \text{ en } Z_\beta\}.$$

De aquí tenemos $x \in Z_\beta^{ss}$ si y sólo si x es semi-estable por la acción de $\text{Est}(\beta)$ en Z_β .

Nota 1.3.8. Se puede probar que el abierto Z_β^{ss} es invariante por $\text{Est}(\beta)$, los conjuntos Y_β y Y_β^{ss} son invariantes por P_β .

Si X es una variedad no singular, se tiene el siguiente resultado

Lema 1.3.9. *Para cada $\beta \in B$ las subvariedades Y_β y Z_β son no singulares. El morfismo $\rho_\beta : Y_\beta \rightarrow Z_\beta$ es localmente una fibración algebraica trivial (una proyección), cuya fibra en cada punto es un espacio afín. Lo mismo se cumple para la restricción $\rho_\beta : Y_\beta^{ss} \rightarrow Z_\beta^{ss}$ a los subconjuntos abiertos Y_β^{ss} de Y_β .*

Lema 1.3.10. *Supongamos que G es un subgrupo de $\text{GL}_{n+1}(k)$. Si $x \in Y_\beta^{ss}$ entonces*

$$\{g \in G \mid g \cdot x \in Y_\beta^{ss}\} = P_\beta,$$

es decir, $g \cdot x \in Y_\beta^{ss}$ si y sólo si $g \in P_\beta$.

Con todos estos lemas y observaciones se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.3.11. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva no singular sobre \mathbb{C} y G un grupo reductivo sobre \mathbb{C} . Sea q una norma en el espacio $M(G)$ de subgrupos a 1-parámetro virtuales de G . Entonces para cualquier acción lineal de G en X existe una estratificación asociada*

$$\{S_\beta \mid \beta \in B\}$$

de X por subvariedades suaves localmente cerradas como sigue: Si T es un toro maximal de G , los índices $\beta \in B$ son combinaciones mínimas de pesos en una cámara de Weyl fija de $M(T)$, el único estrato abierto es $S_0 = X^{ss}$ y para cada $\beta \in B$ el estrato

$$S_\beta \cong G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss},$$

donde Y_β^{ss} es una subvariedad no singular localmente cerrada de X y P_β es un subgrupo parabólico de G .

La demostración de este teorema usa fuertemente la representación del álgebra de Lie del grupo reductivo G y el diagrama de pesos de la representación adjunta del toro maximal del álgebra de Lie de G , junto con los lemas enunciados arriba. Se puede encontrar la demostración en [Kirwan, 1984, Teorema 13.5].

Corolario 1.3.12. *La dimensión proyectiva de S_β está dada por*

$$\dim S_\beta = \dim G + \dim Y_\beta^{ss} - \dim P_\beta - 1.$$

1.4. Curvas planas y singularidades

Para hablar de curvas planas proyectivas y sus singularidades primero estudiaremos algo sobre curvas planas afines pues, como veremos, la multiplicidad de una curva en un punto depende sólo de las propiedades locales de la curva en ese punto, es decir, en un abierto afín. Los siguiente se puede encontrar en [Fulton y Weiss, 1989, Capítulos 3 y 5].

1.4.1. Propiedades locales de una curva plana

Puntos múltiples y líneas tangentes

Una *curva plana afín* es el conjunto de ceros de un polinomio no constante $F \in k[x, y]$, es decir $\mathbb{V}(F)$ en \mathbb{A}^2 . Dos polinomios $F, G \in k[x, y]$ definen la misma curva si existe $\lambda \in k^*$ tal que $F = \lambda G$, y escribimos la curva F en vez de $\mathbb{V}(F)$. El grado de una curva es el grado del polinomio que la define.

Sea F una curva y $p = (a, b) \in F$. El punto p es *un punto simple* si alguna de las derivadas parciales $F_x(p) \neq 0$ o $F_y(p) \neq 0$, en este caso la *línea tangente de F en p* está dada por

$F_x(p)(x-a) + F_y(p)(y-b) = 0$. Un punto que no es simple se dice *punto múltiple o singular*. Una curva con sólo puntos simples se dice *curva no singular*.

Vamos a llamar *una forma de grado d* a un polinomio homogéneo $F_d \in k[x, y]$ de grado d .

Sea F una curva de grado n , y sea $p = (0, 0)$. Escribimos $F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n$, donde F_i es una forma en $k[x, y]$ de grado i , $F_m \neq 0$ es la forma de menor grado. Definimos a m como la *multiplicidad de F en $p = (0, 0)$* y escribimos $m = m_p(F)$. Una primera observación es que $p \in F$ si y sólo si $m_p(F) > 0$. Si $m_p(F) = 1$ entonces F_1 es la línea tangente a F en p . Si $m = 2$ decimos que p es *punto doble*, si $m = 3$ un punto triple, etc.

Como k es algebraicamente cerrado y F_m es una forma en dos variables, entonces podemos escribir $F_m = \prod L_i^{r_i}$ donde L_i son líneas distintas, y se llaman *líneas tangentes de F en $p = (0, 0)$* , r_i es la multiplicidad de la tangente. Si $r_i = 1$ diremos que la línea L_i es simple. Si F tiene m tangentes distintas en p , diremos que p es un *punto múltiple ordinario*.

Si $m_p(F) = 2$ y F tiene dos tangentes distintas en p diremos que p es un *nodo*. Si las dos tangentes son iguales diremos que p es una *cúspide*. Un punto doble donde dos ramas de la curva tienen tangencia ordinaria se le llama *tacnodo*, en otras palabras, un tacnodo es una cúspide doble, o un punto donde dos círculos osculantes de la curva son tangentes.

Sea $p = (a, b) \neq (0, 0)$ un punto en F . Con un cambio de coordenadas $T(x, y) = (x-a, y-b)$ tenemos $T(p) = (0, 0)$ y definimos $m_p(F) = m_{(0,0)}(T(F))$.

Número de intersección

Si F y G son dos curvas planas, decimos que F y G *intersecan propiamente* si no tienen componentes en común.

Sea $p \in \mathbb{A}^2$, se define el *número de intersección de F y G en p* como el único número $I(p, F \cap G)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $I(p, F \cap G)$ es un entero no negativo para todo F, G y p , $I(p, F \cap G) = \infty$ si F y G no intersecan propiamente.
2. $I(p, F \cap G) = 0$ si y sólo si $p \notin F \cap G$. El número $I(p, F \cap G)$ depende sólo de las componentes de F y G que pasan por p .

3. Si T es un cambio afín de coordenadas en \mathbb{A}^2 , y $T(p) = q$, entonces $I(p, F \cap G) = I(q, F^T \cap G^T)$.
4. $I(p, F \cap G) = I(p, G \cap F)$.
5. $I(p, F \cap G) \geq m_p(F)m_p(G)$, la igualdad se da si y sólo si F y G no tienen tangentes en común en p .
6. Si $F = \prod F_i^{r_i}$ y $G = \prod G_j^{s_j}$, entonces $I(p, F \cap G) = \sum_{ij} r_i s_j I(p, F_i \cap G_j)$
7. $I(p, F \cap G) = I(p, F \cap (G + AF))$ para cualquier $A \in k[x, y]$

La unicidad se da por el siguiente teorema

Teorema 1.4.1. *Existe un único número de intersección $I(p, F \cap G)$ definido para toda curva plana F, G , y puntos $p \in \mathbb{A}^2$, satisfaciendo las propiedades 1-7. Está dado por la fórmula*

$$I(p, F \cap G) = \dim_k(\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/\langle F, G \rangle).$$

1.4.2. Curvas planas proyectivas

Una *curva plana proyectiva* es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo $F \in k[x, y, z]$.

Vamos a llamar *una forma de grado d* a un polinomio homogéneo $F_d \in k[x, y, z]$ de grado d , y diremos que dos formas $F_d, G_d \in k[x, y, z]$ son equivalentes si existe $\lambda \in k^*$ tal que $F_d = \lambda G_d$, es decir, definen la misma curva. Con esto podemos decir que una curva plana proyectiva es una clase de equivalencia de formas. Escribimos la curva F en vez de $\mathbb{V}(F)$.

El grado de una curva es el grado de la forma que lo define. Curvas de grado 1,2,3 y 4 se dicen líneas, cónicas, cúbicas y cuárticas respectivamente.

Definición 1.4.2. Sea F una curva plana proyectiva, decimos que un punto $p \in F$ es un *punto singular* de F si

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0.$$

F es una *curva singular* si tiene puntos singulares, en caso contrario diremos que es *no singular*.

Si p es un punto singular de una curva F , la multiplicidad de p sólo depende de la expresión local de F . Como $F \subset \mathbb{P}^2$, entonces $p \in U_i$ ($i = 1, 2$ o 3) para alguna carta afín U_i de \mathbb{P}^2 . Podemos des-homogeneizar F respecto a la carta afín, y definimos la multiplicidad de F en p como $m_p(F) := m_p(F_*)$ la multiplicidad de la curva plana afín que define la des-homogeneización de F . La multiplicidad es independiente de la carta afín U_i y es invariante bajo cambio de coordenadas.

Capítulo 2

Espacio de curvas planas de grado cuatro

Nos interesa clasificar curvas planas de grado cuatro salvo cambio de coordenadas. En este capítulo vamos a definir una acción lineal de $SL_3(\mathbb{C})$ sobre la proyectivización del espacio de cuárticas planas, y veremos los primeros resultados que se sabe de la estabilidad de los elementos de este espacio proyectivo.

2.1. Acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_4(2)$.

Consideremos el espacio vectorial

$$\mathbb{C}[x, y, z]_4 = \{f \in \mathbb{C}[x, y, z] : f \text{ es homogéneo de grado } 4\}.$$

El número de monomios mónicos de grado 4 es $N = \binom{2+4}{4} = 15$, es decir, $\dim \mathbb{C}[x, y, z]_4 = 15$ y entonces un polinomio general en $\mathbb{C}[x, y, z]_4$ es combinación lineal sobre \mathbb{C} de 15 monomios de grado 4, es decir, está determinado por 15 coeficientes. Un elemento $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ define salvo múltiplo escalar una curva $\mathbb{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^2 : f(p) = 0\}$ en \mathbb{P}^2 . Entonces la proyectivización de este espacio vectorial parametriza a las curvas de grado 4 en \mathbb{P}^2 . Vamos a denotar este espacio por $Hip_4(2)$ el cual es isomorfo a $\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}^{14}$ con la siguiente identificación

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathbb{C}[x, y, z]_4 =: Hip_4(2) &\longrightarrow \mathbb{P}^{14} \\ F = \sum_{i+j+k=4} a_I x^i y^j z^k &\longmapsto (a_I). \end{aligned}$$

Queremos clasificar las curvas planas de grado 4 salvo cambio de coordenadas. Es bien sabido que $Aut(\mathbb{P}^2) = PGL_3(\mathbb{C})$ ([Hartshorne, 2013, Ejemplo 7.1.1]). Como sabemos $PGL_3(\mathbb{C})$ y

$\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ son isógenos, entonces podemos trabajar con el grupo $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ y definimos la acción

$$\begin{aligned} \mathrm{Hip}_4(2) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hip}_4(2) \cong \mathbb{P}^{14} \\ (F(x, y, z), \varphi) &\longmapsto (F \circ \varphi^{-1})(x, y, z) = F(\varphi^{-1}(x, y, z)). \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que esta aplicación define una acción de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{P}^{14} y es lineal. Es decir, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{15} \rightarrow \mathbb{C}^{15}$ es una representación y existe un morfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_{15}(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto \phi(g) : \mathbb{C}^{15} \rightarrow \mathbb{C}^{15} \\ v &\mapsto \phi(g)v, \end{aligned}$$

tal que la acción está dada por $(g, v) \mapsto \phi(g)v$.

Notemos que esta representación es irreducible. Si $W \subset \mathbb{C}^{15}$ es un subespacio vectorial de $\dim W < 15$, para cualquier $w \in W$ siempre podemos encontrar un $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $gw \notin W$, pues g actúa como cambio de coordenadas.

2.2. Estabilidad de curvas en $\mathrm{Hip}_4(2)$

Sobre la estabilidad de curvas planas se puede encontrar en [Mumford et al., 1994, Prop. 4.2] y [Dolgachev, 2003, Teorema 10.1] el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1. *Toda curva no singular es un punto semi-estable para la acción de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ en $\mathrm{Hip}_4(2)$.*

Demostración. Sea $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_4$ tal que $\mathbb{V}(F)$ es no singular. Para mostrar que $F \in \mathrm{Hip}_4(2)$ es semi-estable basta encontrar un polinomio invariante en donde F no se anula. Para esto vamos a encontrar una hipersuperficie que parametrice a todas las curvas singulares.

Recordemos que F es singular en un punto $p \in \mathbb{P}^2$ si $F(p) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0$. Una técnica para determinar si un conjunto de polinomios tienen raíces comunes es vía resultantes. Recordemos que por la fórmula de Euler se tiene $4F = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}$ entonces basta considerar $\mathrm{Res}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) := \Delta$ que es el determinante de la matriz de Sylvester que se forma con los coeficientes de los polinomios. Por tanto tenemos un polinomio homogéneo $\Delta(y_i) \in \mathbb{C}[y_0, \dots, y_{14}]$ de grado 9 en los 15 coeficientes de F . Y entonces $F \leftrightarrow a_I \in \mathbb{P}^{14}$ será

singular si y sólo si $\Delta(F) = \Delta(a_I) = 0$. Por tanto $\mathbb{V}(\Delta)$ parametriza a todas las curvas singulares.

Como F es singular en p si y sólo si gF es singular en $g(p)$ pues la acción es por cambio de coordenadas. Entonces $\Delta(F) = \Delta(gF)$, así que Δ es un polinomio invariante. Y por tanto hemos encontrado un polinomio invariante homogéneo de grado positivo Δ tal que $\Delta(F) \neq 0$ si F es no singular, es decir, F es semi-estable. \square

Más aún, en [Mumford et al., 1994, Proposición 4.2] se prueba

Proposición 2.2.2. *Para $d \geq 3$, toda curva no singular es un punto estable para la acción de $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ en $Hip_d(n)$.*

No toda cuártica estable es no singular, en [Mumford, 1977, p. 51] se muestra que las curvas con nodos simples son estables. En [Mumford et al., 1994, Cap.4 §2] se estudia las cuárticas singulares semi-estables no estables y se muestra

Proposición 2.2.3. *Las cuárticas semi-estables no estables son aquellas con una singularidad tipo tacnodal (cúspide doble).*

Demostración. Escribimos una curva $F \in Hip_4(2)$ como

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z \\ + a_{03}y^3z + a_{20}x^2z^2 + a_{11}xyz^2 + a_{02}y^2z^2 + a_{10}xz^3 + a_{01}yz^3 + a_{00}z^4.$$

Usando el criterio de Hilbert-Mumford se tiene que si F es semi-estable no estable, entonces para algún λ subgrupo a 1-parámetro de $SL_3(\mathbb{C})$ se tiene $\mu(F, \lambda) \leq 0$.

Sabemos que los subgrupos a 1-parámetro de $SL_3(\mathbb{C})$ son diagonalizables, y por 3 de la proposición 1.1.38 basta considerar a los subgrupos a 1-parámetros diagonales para usar el criterio de Hilbert-Mumford, los cuales sabemos que son de la forma (proposición 1.1.35) $\lambda(t) = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})$ donde $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ son enteros tal que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, estas condiciones nos dicen que $r_3 \leq 0$. Luego $\lambda(t) \cdot x^i y^j z^k = t^{-r_1 i - r_2 j - r_3 k} x^i y^j z^k$, como $i + j + k = 4$ se tiene que

$$\mu(F, \lambda) = \min\{-r_1 i - r_2 j - r_3(4 - i - j) \mid \text{ todos los pares } i, j \text{ tales que } a_{ij} \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(F, \lambda) \leq 0$ implica que los coeficientes $a_{00} = a_{10} = a_{02} = a_{01} = a_{11} = 0$ y el polinomio está dado por

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z + a_{20}x^2z^2,$$

si deshomogeneizamos en z tenemos

$$F(x, y, 1) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2,$$

y podemos observar las formas

$$F_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \quad F_2(x, y) = a_{20}x^2.$$

De aquí podemos ver que $p = (0 : 0 : 1)$ es un punto singular, además podemos analizar

- Si $\mu(F, \lambda) \leq 0$ junto con $a_{03} \neq 0$ y $a_{20} \neq 0$, contradice la condición sobre $r_1 \geq r_2 \geq r_3$.
- Si $a_{20} = 0$ entonces $a_{03} \neq 0$ y F tiene un punto triple ordinario en $p = (0 : 0 : 1)$.
- Si $a_{03} = 0$ entonces $a_{20} \neq 0$ y F tiene un punto doble con tangente doble en $p = (0 : 0 : 1)$, es decir, p es un tacnodo.

Entonces la curva está dada por

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{20}x^2z^2.$$

Por otro lado, si $F \in \text{Hip}_4(2)$ es una curva con punto singular p , podemos suponer que $p = (0 : 0 : 1)$. Si p es un punto triple ordinario, entonces de la descomposición en formas $F(x, y, 1) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ se tiene que $a_{00} = a_{10} = a_{02} = a_{01} = a_{11} = 0$ y $a_{20} = 0$. Si p es un tacnodo, entonces $a_{20} \neq 0$, si además $a_{03} = 0$ tenemos que $\mu(F, \lambda) \leq 0$ para algún λ subgrupo a 1-parámetro de $\text{SL}_3(\mathbb{C})$. \square

2.3. Cálculo de curvas inestables usando S1P

Con el cálculo anterior obtenemos las curvas inestables, pero haremos a continuación los cálculos explícitos para obtener las coordenadas del espacio de inestables.

De acuerdo al criterio de Hilbert-Mumford, un elemento $F \in \text{Hip}_4(2)$ será inestable si existe $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{SL}_3(\mathbb{C})$ subgrupo a 1-parámetro y $g \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} g\lambda(t)g^{-1}F = 0$. Como ya habíamos mencionado, basta considerar a los subgrupos a 1-parámetros diagonales

Podemos ver que para el par $(0, 2)$ que corresponde al monomio x^2y^2 está indefinida la desigualdad porque $4 - i - 2j = 0$, pero podemos observar que para $n_2 \in \{\frac{-5}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ se cumple que $x^0y^2z^2$ es inestable para el subgrupo a un parámetro $\lambda(t) = \text{diag}(t, t^{r_2}, t^{-1-r_2})$.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos el monomio y^2z^2 y el subgrupo a 1-parámetro virtual diagonal $\lambda(t) = \text{diag}(t, t^{r_2}, t^{-1-r_2})$. Aplicamos λ al monomio y^2z^2 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot y^2z^2 = \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-1}x)^0 (t^{-r_2}y)^2 (t^{1+r_2}z)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2r_2+2+2r_2} y^2z^2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 y^2z^2 = 0,$$

entonces y^2z^2 es inestable respecto a λ para todo $r_2 \leq 1$. □

En la tabla podemos observar que el conjunto $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1)\} := V$ satisface la condición mencionada para todo $r_2 \in [-1/2, 1]$. Y de la tabla podemos observar los pares que se satisfacen para ciertos intervalos de r_2 , como tenemos a continuación

$$\{(0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3)\} \cup V \text{ satisfacen para } r_2 \in (-1/2, -1/3)$$

$$\{(0, 3), (0, 4), (1, 2)\} \text{ satisfacen para } r_2 \in (-1/3, 0)$$

$$\{(0, 3), (2, 0)\} \cup V \text{ satisfacen para } r_2 \in (0, 1/2)$$

$$\{(2, 0)\} \text{ satisfacen para } r_2 \in (1/2, 1)$$

Dado que cada par (i, j) corresponde a un monomio $x^i y^j z^{4-i-j}$, identificamos los pares (i, j) con su monomio correspondiente, con eso tenemos $V := \{xyz^2, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4\}$ y de las observaciones anteriores podemos ver dos conjuntos maximales de inestables:

$$CN_1 := \{xy^3, y^4, xy^2z, y^3z, xyz^2, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4\},$$

$$CN_2 := \{y^3z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4\}.$$

Donde $\langle CN_1 \rangle_{\mathbb{C}}$ y $\langle CN_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ tiene dimensión lineal 9 y 7, respectivamente.

Estos cálculos nos dan, salvo cambio de coordenadas, el espacio de inestables $Hip_4(2)^{un}$.

Capítulo 3

Estratificación del cerrado de curvas inestables

De la teoría básica de estratificación sabemos que el único estrato abierto es $Hip_4(2)^{ss}$ el cuál ya conocemos. Siguiendo las ideas de [Kirwan, 1984, Parte II] queremos hacer una estratificación de $Hip_4(2)^{un}$ el espacio de cuárticas inestables por $SL_3(\mathbb{C})$. La existencia de una estratificación suave de nuestro espacio de cuárticas planas está dada por el teorema 1.3.11 que se puede encontrar en [Kirwan, 1984, 13.5].

En [Popov, 2010] se da un algoritmo para identificar los estratos considerando la representación adjunta del álgebra de Lie de G y el diagrama de pesos de la representación dada por la acción lineal de G en X .

En este capítulo vamos a estudiar la estratificación del espacio de cuárticas inestables siguiendo estas ideas, y vamos a caracterizar las curvas en cada estrato de acuerdo a su tipo de singularidad.

3.1. Representación y diagrama de pesos de las cuárticas planas

Nos interesa estudiar los puntos de $Hip_4(2)$ inestables bajo la acción de $SL_3(\mathbb{C})$. Usando la representación dada por la acción lineal de $SL_3(\mathbb{C})$ en $Hip_4(2)$ vamos a definir los caracteres

de la representación de $T \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ en \mathbb{C}^{15} y luego de la representación de $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ en \mathbb{C}^{15} , describiremos los pesos de la representación de $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ en \mathbb{C}^{15} y construiremos el diagrama de pesos.

Consideremos el toro maximal $T = \{\mathrm{diag}(a, b, c) : abc = 1\} \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, y consideremos la acción $T \times \mathbb{C}^{15} \rightarrow \mathbb{C}^{15}$, entonces tenemos una acción inducida

$$\mathrm{Hip}_4(2) \times T \rightarrow \mathrm{Hip}_4(2)$$

$$(F(x, y, z), \mathrm{diag}(a, b, c)) \mapsto F(\mathrm{diag}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})(x, y, z)) = F(a^{-1}x, b^{-1}y, c^{-1}z).$$

Aplicando esta acción a los elementos de la base $\{x^i y^j z^k\}_{i+j+k=4}$ de $\mathbb{C}[x, y, z]_4$ tenemos

$$\mathrm{diag}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})x^i y^j z^k = a^i b^j c^k x^i y^j z^k, \text{ donde } i + j + k = 4.$$

De aquí podemos ver que si $W = \langle x^i y^j z^k \rangle_{\mathbb{C}}$ es el espacio vectorial generado por $x^i y^j z^k$ sobre \mathbb{C} , entonces W es T -invariante.

Definamos el *caracter asociado* a $x^i y^j z^k$ de la representación como

$$\alpha_{ij} : T \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\mathrm{diag}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}) \mapsto a^i b^j c^k = a^{i-k} b^{j-k}.$$

Y consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ y su toro maximal

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3) : r_1 + r_2 + r_3 = 0\} \xrightarrow{\exp} T = \{\mathrm{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) : t^{r_1+r_2+r_3} = 1\}.$$

Notemos que los elementos $\mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3) \in \mathfrak{t}$ corresponden a los subgrupos a 1-parámetro diagonales de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Sea $\lambda(t) = \mathrm{diag}(t^{-r_1}, t^{-r_2}, t^{-r_3})$ un subgrupo a 1-parámetro diagonal de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, aplicando a un elemento de la base de $\mathrm{Hip}_4(2)$ tenemos

$$\lambda(t)x^i y^j z^k = \mathrm{diag}(t^{-r_1}, t^{-r_2}, t^{-r_3})x^i y^j z^k = t^{ir_1+jr_2+kr_3}x^i y^j z^k.$$

Consideremos el espacio dual $\mathfrak{t}^* = \{L : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}\}$, un conjunto generador de este espacio vectorial es

$$\{L_l : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3) \mapsto r_l\}_{l=1,2,3}.$$

Podemos ver que estos generadores satisfacen $(L_1 + L_2 + L_3)(\mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3)) = 0$.

Entonces para el caracter $\alpha_{ij} : T \rightarrow \mathbb{C}$ asociado a $x^i y^j z^k$ aplicado a $\lambda(t)$ tenemos que $\alpha_{ij} \text{diag}(t^{-r_1}, t^{-r_2}, t^{-r_3}) = t^{ir_1 + jr_2 + kr_3}$, que corresponde a $iL_1 + jL_2 + kL_3$ en \mathfrak{t}^* , y con la relación $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ tenemos $\alpha_{ij}^* = (i - k)L_1 + (j - k)L_2$.

Para cada caracter α_{ij} tenemos $\alpha_{ij}^* = (i - k)L_1 + (j - k)L_2$ en \mathfrak{t}^* . A los α_{ij}^* se les llama *pesos de la representación*.

Como $\dim \mathfrak{t} = 2$, podemos dibujar en \mathbb{R}^2 el sistema de raíces de la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_3 \mathbb{C}$ como $\Lambda_R = \{\epsilon_l - \epsilon_s\}_{l \neq s}$, $l, s = 1, 2, 3$ donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbb{R}^2$ serán las raíces cúbicas de la unidad [Fulton y Harris, 2013, Cap. 12]. Tomemos $L_1 = \epsilon_1, L_2 = \epsilon_2$ y $L_3 = \epsilon_3$ en \mathbb{R}^2 , entonces para cada $x^i y^j z^k$ en la base de $Hip_4(2)$ tenemos $\alpha_{ij}^* = (i - k)L_1 + (j - k)L_2$ y obtenemos el diagrama de pesos de la representación como se muestra en la figura 3.1, donde cada punto es un *peso de la representación* que corresponde al monomio $x^i y^j z^k$ de grado 4. Con este diagrama de pesos vamos a construir la estratificación de $Hip_4(2)$ siguiendo las

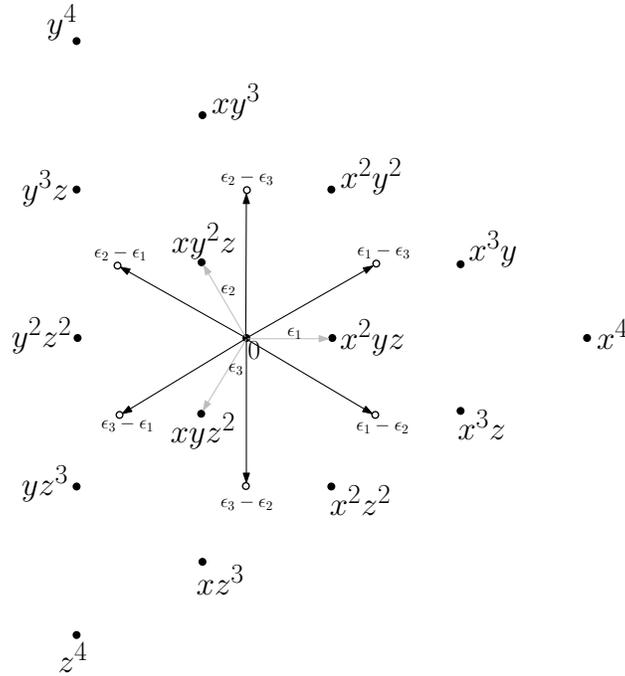


Figura 3.1: Diagrama de pesos de la representación

ideas de [Popov, 2010] para construir el conjunto de índices de la estratificación y las ideas de [Kirwan, 1984] para construir los estratos como se estudió en la sección 1.3.

Ejemplo 3.1.1. Para el monomio xy^3 , el peso asociado es $\alpha_{13}^* = (1-0)L_1 + (3-0)L_2 = L_1 + 3L_2$,

esto lo dibujamos como vectores en \mathbb{R}^2 donde $L_1 = \epsilon_1 = (1, 0)$ y $L_2 = \epsilon_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que son dos de las raíces cúbicas de la unidad.

Para el monomio x^3z tenemos el peso $\alpha_{30} = (3 - 1)L_1 + (0 - 1)L_2 = 2L_1 - L_2$ dibujado de la misma manera en \mathbb{R}^2 . Y así para todos los elementos de la base de $Hip_4(2)$.

□

Podemos ubicar a los conjuntos maximales de inestables

$$CN_1 := \{xy^3, y^4, xy^2z, y^3z, xyz^2, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4\},$$

$$CN_2 := \{y^3z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4\}.$$

obtenidos en la sección 2.3, como podemos ver en la figura 3.2 donde tenemos representado, salvo cambio de coordenadas, el espacio de inestables $Hip_4(2)^{un}$.

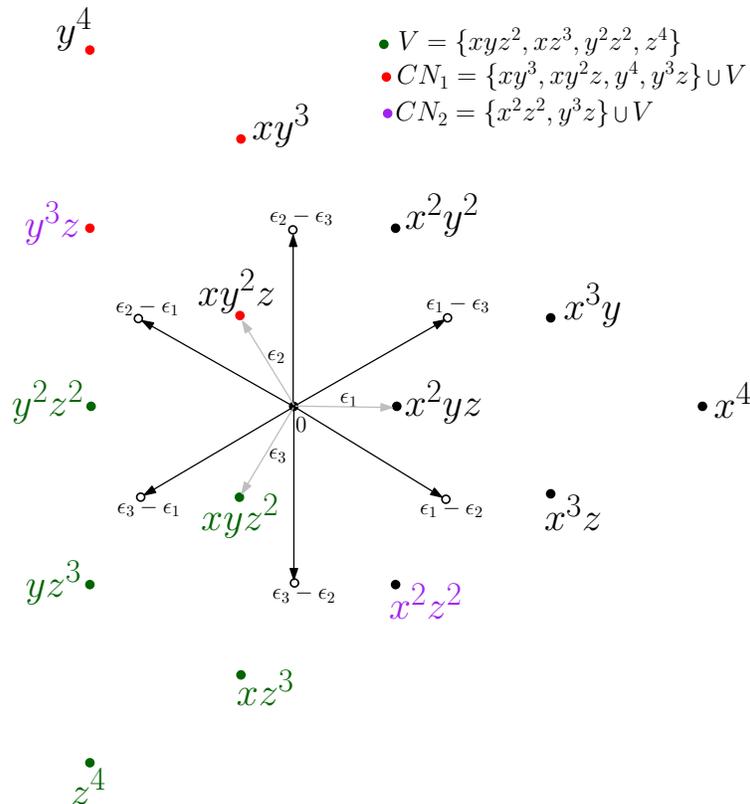


Figura 3.2: Conjuntos maximales de inestables

3.2. Obtención de los estratos

Siguiendo las ideas de [Kirwan, 1984, Parte II] queremos construir $\{S_\beta \mid \beta \in B\}$ tal que:

1. S_β es localmente cerrado para todo $\beta \in B$.
2. $\bigcup_{\beta \in B} S_\beta = \text{Hip}_4(2)^{un}$.
3. $S_\beta \cap S_\gamma = \emptyset$ si $\beta \neq \gamma$.
4. $\overline{S_\beta} \subset \bigcup_{\gamma \geq \beta} S_\gamma$.
5. S_β es no singular.
6. $\dim S_\beta = \dim \text{SL}_3(\mathbb{C}) + \dim Y_\beta^{ss} - \dim P_\beta - 1$.

Donde Y_β^{ss} es una subvariedad suave localmente cerrada de $\text{Hip}_4(2)^{un}$ y $\beta \in M(T)$ es un subgrupo a 1-parámetro virtual que, como veremos, corresponde a una $L_\beta \in \mathfrak{t}^*$, en donde definiremos una norma $\|\beta\| = \langle L_\beta, L_\beta \rangle$, que nos induce un orden $\beta < \gamma \leftrightarrow \|\beta\| < \|\gamma\|$.

Primero tenemos que fijar una cámara de Weyl. Observemos el diagrama de pesos de la representación (fig. 3.1), y consideremos el subconjunto de pesos que corresponden a $\{x^4, x^3y, x^2y^2, x^2yz\}$, notemos que mediante permutaciones de las variables podemos generar a toda la base de $\text{Hip}_4(2)$, es decir,

$$S_3 \cdot \{x^4, x^3y, x^2y^2, x^2yz\} = \{\text{base de } \text{Hip}_4(2)\},$$

donde S_3 es el grupo de permutaciones de tres letras. Vamos a llamar *cámara de Weyl* al convexo generado por los pesos que corresponden a este conjunto junto con el 0. Entonces tenemos 6 cámaras de Weyl en el diagrama de pesos, y por esta simetría basta estudiar una cámara.

En [Popov, 2010] encontramos un algoritmo para identificar los espacios lineales que denotaremos por Y_β y que nos servirán para construir los estratos, el algoritmo consiste en trazar líneas l en el diagrama de pesos de la representación que satisfagan lo siguiente:

1. l no pasa por cero,

2. l pasa por alguno de los pesos,
3. el punto de intersección de la perpendicular trazada desde 0 a l está contenido en la cámara de Weyl seleccionada.

Una vez que tenemos el conjunto de líneas, vamos a desechar las líneas que satisfacen lo siguiente:

1. pasa por dos pesos, y
2. es paralela a alguno de los ejes de las raíces.

Con eso tenemos 11 líneas en el diagrama de pesos de la representación que satisfacen el algoritmo de Popov. Estas 11 líneas nos van a servir para determinar el conjunto de índices para la estratificación y para definir los espacios Z_β 's y Y_β 's con los cuales usaremos la teoría vista en la sección 1.3 para construir la estratificación de acuerdo al teorema de Kirwan.

En la figura 3.3 podemos ver las 11 líneas en el diagrama de pesos donde hacemos de una vez un cambio de coordenadas ($x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x$) en los conjuntos maximales de inestables para ilustrar que todos los pesos en las líneas están contenidos en los conjuntos maximales de inestables que calculamos.

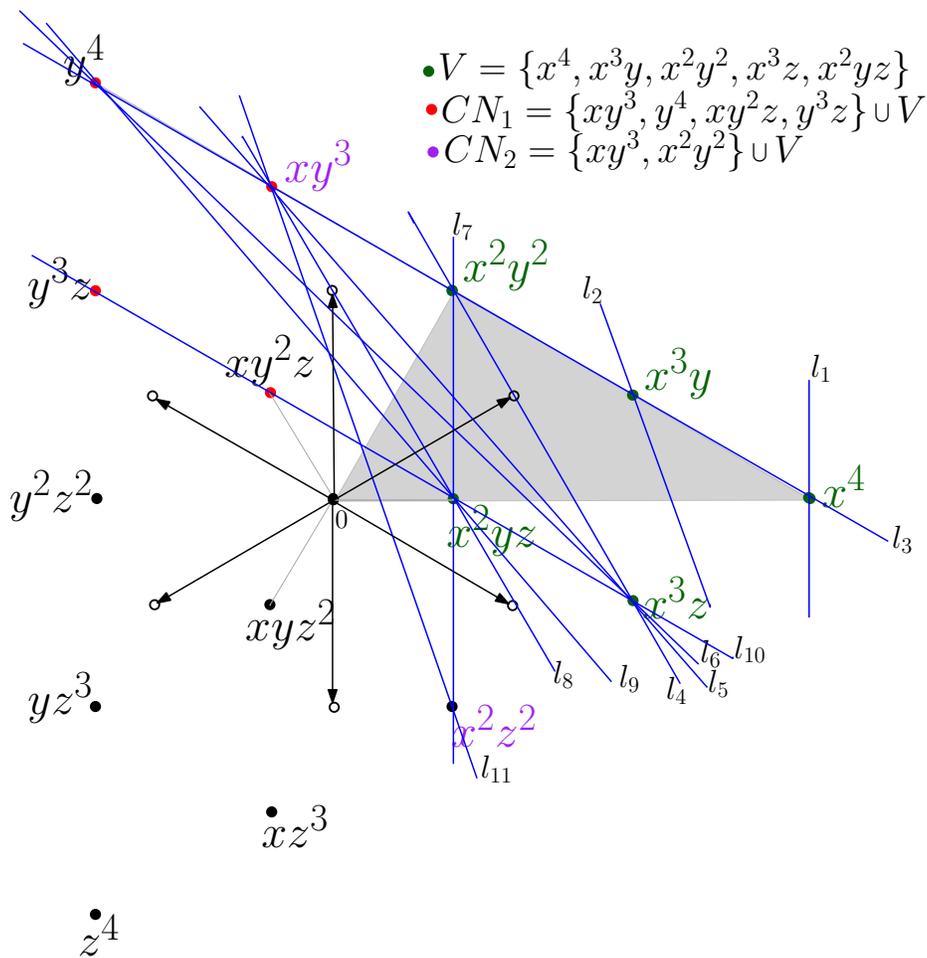


Figura 3.3: Líneas en la representación para definir los estratos

Correspondencia entre \mathfrak{t}^* y $M(T)$

Nos interesa buscar una correspondencia entre elementos $L \in \mathfrak{t}^*$ y subgrupos a 1-parámetro virtuales $\beta \in M(T)$.

Proposición 3.2.1. *Existe una correspondencia entre \mathfrak{t}^* el espacio dual de toro maximal del álgebra de $Sl_3\mathbb{C}$ y los subgrupos a 1-parámetro virtuales diagonales $M(T)$ de $SL_3(\mathbb{C})$.*

Demostración. Definimos la siguiente aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(L_i, L_j) \mapsto \delta_{ij} - \frac{1}{3}.$$

Se puede verificar que $\langle -, - \rangle$ define un producto interno en \mathfrak{t}^* . Con esto $\langle L_i, L_j \rangle = \delta_{ij} - \frac{1}{3}$ y

tenemos

$$\begin{aligned}\langle L_i, L_i \rangle &= \frac{2}{3}, \\ \langle L_i, L_1 + L_2 + L_3 \rangle &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0, \\ \langle aL_1 + bL_2 + cL_3, aL_1 + bL_2 + cL_3 \rangle &= 0 \text{ si y sólo si } aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0.\end{aligned}$$

Con este producto interno podemos dar un isomorfismo natural entre \mathfrak{t}^* y $\mathfrak{t}^{**} = \mathfrak{t}$, del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\theta : \mathfrak{t}^* &\rightarrow (\mathfrak{t}^*)^* = \mathfrak{t} \\ L &\mapsto \theta(L) : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ M &\mapsto \langle L, M \rangle\end{aligned}$$

Podemos verificar que θ es una transformación lineal biyectiva entre espacios vectoriales:

- Sean $a \in \mathbb{C}$, $L_1, L_2 \in \mathfrak{t}^*$ entonces

$$\begin{aligned}\theta(aL_1 + L_2)(M) &= \langle aL_1 + L_2, M \rangle = \langle aL_1, M \rangle + \langle L_2, M \rangle = a\langle L_1, M \rangle + \langle L_2, M \rangle \\ &= a\theta(L_1)(M) + \theta(L_2)(M).\end{aligned}$$

- Es inyectiva: $0 = \theta(L)(M) = \langle L, M \rangle$ para toda $M \in \mathfrak{t}^*$, en particular para L se tiene $\theta(L)(L) = \langle L, L \rangle = 0$ si y sólo si $L = 0$.
- Dado que $Im(\theta) \subset \mathfrak{t}^{**}$ y como espacios vectoriales $\dim \mathfrak{t}^{**} = \dim \mathfrak{t} = \dim \mathfrak{t}^*$, entonces θ es sobreyectiva, pues $\dim \mathfrak{t}^* = \dim Im(\theta) + \dim \ker(\theta) = \dim Im(\theta)$.

Entonces podemos identificar un elemento $\text{diag}(n_1, n_2, n_3) \in \mathfrak{t}$ con $\theta^{-1}(\text{diag}(n_1, n_2, n_3)) \in \mathfrak{t}^*$ de la siguiente manera:

$$L_1 \rightarrow \text{diag}\left(\frac{2}{3}n_1, \frac{-1}{3}n_2, \frac{-1}{3}n_3\right), L_2 \rightarrow \text{diag}\left(\frac{-1}{3}n_1, \frac{2}{3}n_2, \frac{-1}{3}n_3\right), L_3 \rightarrow \text{diag}\left(\frac{-1}{3}n_1, \frac{-1}{3}n_2, \frac{2}{3}n_3\right).$$

Y entonces tenemos

$$\begin{aligned}\text{diag}\left(\frac{2n_1-n_2-n_3}{3}, \frac{-n_1+2n_2-n_3}{3}, \frac{-n_1-n_2+2n_3}{3}\right) &\longleftrightarrow n_1L_1 + n_2L_2 + n_3L_3 \\ &\downarrow \text{exp} \\ \text{diag}\left(t^{\frac{2n_1-n_2-n_3}{3}}, t^{\frac{-n_1+2n_2-n_3}{3}}, t^{\frac{-n_1-n_2+2n_3}{3}}\right).\end{aligned}$$

Es decir, para cada elemento de $L \in \mathfrak{t}^*$ tenemos un subgrupo a 1-parámetro virtual $\beta \in M(T)$. □

Conjunto de índices para la estratificación

Proposición 3.2.2. *El conjunto de índices de la estratificación tiene 11 elementos, donde cada elemento es el punto más cercano al origen de las 11 líneas marcadas en el diagrama de pesos que satisfacen el algoritmo de Popov.*

Demostración. De acuerdo a [Popov, 2010] tal conjunto de puntos más cercanos al origen de cada línea (que satisface el algoritmo) define el conjunto de índices para la estratificación. Lo que haremos aquí es dar las ecuaciones explícitas de tales puntos.

Con la correspondencia entre \mathfrak{t}^* y $M(T)$, para cada línea trazada en el diagrama de pesos (fig:3.3) vamos a calcular el punto más cercano al origen, digamos $P = r_1L_1 + r_2L_2 \in \mathfrak{t}^*$, del cual podemos calcular su norma y calcular el subgrupo a un parámetro virtual correspondiente $\beta \in \mathfrak{t}$.

Para encontrar el punto más cercano al origen de cada línea: Consideremos la relación $u \rightsquigarrow L_1, v \rightsquigarrow L_2$. Como cada peso es de la forma $aL_1 + bL_2$. Escribimos al peso $aL_1 + bL_2 \rightsquigarrow (a, b)$.

Vamos a escribir la ecuación de la línea que pasa por dos pesos: consideremos dos pesos (u_1, v_1) , (u_2, v_2) y hagamos $\alpha_1 = u_2 - u_1$, $\alpha_2 = v_2 - v_1$, y entonces tenemos la ecuación de la línea que pasa por los pesos (u_1, v_1) y (u_2, v_2)

$$l: \alpha_2u - \alpha_1v + \alpha_1v_1 - \alpha_2u_2 = 0.$$

El punto más cercano al origen será el punto de intersección de la línea ortogonal a l y que pasa por el origen. Recordemos que aquí la ortogonalidad depende del producto interno que definimos en el espacio.

El procedimiento es el siguiente: Consideramos la línea $l': \alpha_2u - \alpha_1v = 0$ que pasa por el origen y es paralela a l . Vamos a tomar un punto p' en l' , que es un peso en \mathfrak{t}^* , calculamos un punto $q = aL_1 + bL_2$ ortogonal a p' con el producto interno definido. Con eso podemos escribir la ecuación de la línea γ que pasa por 0 y q , ésta es ortogonal a la línea l . Calculamos el punto de intersección de γ y l y obtenemos el punto de l más cercano a 0 dado por la ecuación

$$P = \left(\frac{(2\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2u_1 - \alpha_1v_1)}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2)}, \frac{(\alpha_2 - 2\alpha_1)(\alpha_2u_1 - \alpha_1v_1)}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2)} \right). \quad (3.1)$$

Escribiendo P como $P = r_1L_1 + r_2L_2 \in \mathfrak{t}^*$, y usando la correspondencia entre \mathfrak{t}^* y $M(T)$

tenemos un subgrupo a 1-parámetro virtual

$$\beta = \text{diag} \left(\frac{2r_1 - r_2 - r_3}{3}, \frac{-r_1 + 2r_2 - r_3}{3}, \frac{-r_1 - r_2 + 2r_3}{3} \right) \in \mathfrak{t}, \quad (3.2)$$

es decir, tal β nos determina un elemento de $M(T)$. Estas ecuaciones nos sirven para calcular el conjunto de índices para la estratificación. \square

Ejemplo 3.2.3 (línea 5). Consideremos la línea l_5 marcada en el diagrama de pesos. Esta línea pasa por los puntos xy^3 y x^3z que corresponden a los pesos $L_1 + 3L_2$ y $2L_1 - L_2$ respectivamente. Escribimos estos pesos como $(1, 3)$ y $(2, -1)$. Entonces la ecuación de la línea l_5 está dada por $l_5 : 4u + v - 7 = 0$. Consideremos la línea $l'_5 : 4u + v = 0$ que es paralela a l_5 y pasa por 0. Podemos ver que el punto $(1, -4) \in l'_5$, este punto es el peso $L_1 - 4L_2$. Ahora buscamos una vector $aL_1 + bL_2$ ortogonal a este, usando el producto interno definido en \mathfrak{t}^* , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L_1 - 4L_2, aL_1 + bL_2 \rangle = a\langle L_1, L_1 \rangle + b\langle L_1, L_2 \rangle - 4a\langle L_2, L_1 \rangle - 4\langle L_2, L_2 \rangle \\ &= \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{4}{3}a - \frac{8}{3}b = 2a - 3b, \end{aligned}$$

tenemos que $2a = 3b$, es decir, el peso $3L_1 + 2L_2$ que corresponde a $(3, 2)$ es ortogonal a $(1, -4)$. Ahora trazamos la línea que pasa por $(0, 0)$ y $(3, 2)$, ésta está dada por $2u - 3v = 0$, por los cálculos hechos esta línea es ortogonal a la línea l_5 . Ahora podemos ver que el punto de intersección de estas dos líneas, resolviendo las ecuaciones $2u - 3v = 0 = 4u + v - 7$ tenemos el punto $P = \left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{3}{2}L_1 + L_2$. Usando la correspondencia entre \mathfrak{t}^* y $M(T)$ tenemos

$$\beta_5 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6} \right).$$

\square

Más adelante expondremos los cálculos explícitos para todas las líneas.

Construcción de los estratos S_β

Para construir los estratos vamos a aplicar las definiciones y resultados de [Kirwan, 1984, Parte II] que definimos en la sección 1.3 a nuestro problema particular del espacio de cuárticas y la acción lineal de $SL_3(\mathbb{C})$.

Para cada línea marcada en el diagrama de pesos, definimos los siguientes espacio lineales (definición 1.3.5)

$$Z_{\beta_i} := \langle \text{pesos en la línea } l_i \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$Y_{\beta_i} := \langle \text{pesos en el convexo definido por } l_i \text{ que no contiene a } 0 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Tenemos un morfismo de proyección

$$\rho_{\beta} : Y_{\beta} \rightarrow Z_{\beta}.$$

Consideremos la acción por conjugación de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ en $M(T)$. Para cada $\beta \in M(T)$

$$\mathrm{Est}(\beta) = \{g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \mid g\beta g^{-1} = \beta\}$$

es un subgrupo reductivo de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

De la definición 1.3.3 y el lema 1.3.10, para cada $\beta \in M(T)$ sea

$$P_{\beta} := \{g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \mid \mu(g, \beta) \geq 0\},$$

P_{β} es un subgrupo parabólico de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ para cada $\beta \in M(T)$.

De la observación 1.3.7 existe un único subgrupo reductivo conexo G_{β} de $\mathrm{Est}(\beta)$ tal que

$$M(G_{\beta}) = \{\lambda \in \mathrm{Est}(\beta) \mid \lambda \cdot \beta = 0\}$$

y Z_{β}^{ss} son los semi-estables de la acción de G_{β} en Z_{β} , y definimos $Y_{\beta}^{ss} = \rho_{\beta}^{-1}(Z_{\beta}^{ss})$. De la observación 1.3.8 se tiene que Z_{β}^{ss} es invariante bajo $\mathrm{Est}(\beta)$, los conjuntos Y_{β} y Y_{β}^{ss} son invariantes bajo P_{β} .

Por el lema 1.3.10 se tiene que si $F \in Y_{\beta}^{ss}$ y $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, entonces $gF \in Y_{\beta}^{ss}$ si y sólo si $g \in P_{\beta}$.

Los estratos son de la forma (teorema 1.3.11)

$$S_{\beta} \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta}} Y_{\beta}^{ss},$$

la cual es una subvariedad suave localmente cerrada y de dimensión proyectiva dada por (corolario 1.3.12)

$$\dim S_{\beta} = \dim Y_{\beta}^{ss} + \dim \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) - \dim P_{\beta} - 1.$$

Cálculo de los β_i y $M(G_{\beta_i})$

Queremos calcular explícitamente el conjunto de índices $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{11}\}$ para la estratificación de $Hip_4(2)^{un}$, y luego los subgrupos a un parámetro virtuales de G_{β_i} usando la nota 1.3.7.

Con la correspondencia entre \mathfrak{t}^* y $M(T)$, para cada línea l_i en el diagrama de pesos, calculamos el punto más cercano al origen $L \in \mathfrak{t}^*$ dado por la ecuación 3.1, y su correspondiente subgrupo a 1-parámetro virtual $\beta_i \in M(T)$ dado por la ecuación 3.2, con eso podemos calcular un generador de $M(G_{\beta_i})$. Si $\beta = (r_1, r_2, r_3)$, queremos $\lambda = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $\lambda \cdot \beta = 0$, con eso tenemos $n_2 = -\frac{2r_1+r_2}{r_1+2r_2}n_1$, $n_3 = -n_1 - n_2$, podemos tomar $n_1 = 1$ y tenemos

$$\lambda = \left(1, -\frac{2r_1 + r_2}{r_1 + 2r_2}, -1 + \frac{2r_1 + r_2}{r_1 + 2r_2}\right).$$

Ejemplo 3.2.4. Para el $\beta_5 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ que calculamos en el ejemplo 3.2.3. Sustituyendo los valores de β_5 en la ecuación anterior tenemos $\lambda = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in M(G_{\beta_5})$ el cual satisface que $\beta_5 \cdot \lambda = 0$.

□

En la tabla 3.1 se resumen los cálculos del conjunto de índices B de la estratificación y el cálculo de un generador de $M(G_\beta)$ para cada $\beta \in B$.

Línea	L	β	$\ L\ $	$M(G_\beta)$
1	$4L_1$	$(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$	$\frac{32}{3}$	$(0, 1, -1)$
2	$3L_1 + L_2$	$(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$\frac{14}{3}$	$(1, -3, 2)$
3	$2L_1 + 2L_2$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(1, -1, 0)$
4	$2L_1 + L_2$	$(1, 0, -1)$	2	$(1, -2, 1)$
5	$\frac{3}{2}L_1 + L_2$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6})$	$\frac{7}{6}$	$(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
6	$\frac{16}{13}L_1 + \frac{12}{13}L_2$	$(\frac{20}{39}, \frac{8}{39}, -\frac{28}{39})$	$\frac{32}{39}$	$(1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$
7	L_1	$(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(0, 1, -1)$
8	$L_1 + \frac{1}{2}L_2$	$(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(1, -2, 1)$
9	$\frac{6}{7}L_1 + \frac{4}{7}L_2$	$(\frac{8}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{10}{21})$	$\frac{8}{21}$	$(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
10	$\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$	$\frac{1}{6}$	$(1, -1, 0)$
11	$\frac{3}{7}L_1 + \frac{1}{7}L_2$	$(\frac{5}{21}, -\frac{1}{21}, -\frac{4}{21})$	$\frac{2}{21}$	$(1, -3, 2)$

Tabla 3.1: Cálculo del conjunto de índices $\{\beta\}$ y $M(G_\beta)$.

Cálculo de los espacios Z_β^{ss} y Y_β^{ss}

Construimos los espacios lineales Z_β y Y_β , como se muestra en la tabla 3.2.

$Z_{\beta_1} = \langle x^4 \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_1} = \langle x^4 \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_2} = \langle x^3y \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_2} = \langle x^4, x^3y \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_3} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_3} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_4} = \langle x^2y^2, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_4} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_5} = \langle xy^3, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_5} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_6} = \langle y^4, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_6} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3z \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_7} = \langle x^2y^2, x^2yz, x^2z^2 \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_7} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, x^3z, x^2yz, x^2z^2 \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_8} = \langle xy^3, x^2yz \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_8} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3z, x^2yz \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_9} = \langle y^4, x^2yz \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_9} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3z, x^2yz \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_{10}} = \langle x^3z, x^2yz, xy^2z, y^3z \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_{10}} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3z, x^2yz, xy^2z, y^3z \rangle_{\mathbb{C}}$
$Z_{\beta_{11}} = \langle xy^3, x^2z^2 \rangle_{\mathbb{C}}$	$Y_{\beta_{11}} = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3z, x^2yz, x^2z^2 \rangle_{\mathbb{C}}$

Tabla 3.2: Espacios lineales Z_β y Y_β .

Estos espacios lineales nos servirán para definir los estratos, pero primero necesitamos imponer condiciones abiertas en cada Z_β para que los estratos sean disjuntos. Para eso consideramos la acción inducida de G_β en Z_β , y nos interesa el abierto Z_β^{ss} de semi-estables por G_β . Vamos a usar el criterio de subgrupos a 1-parámetro para calcular Z_β^{ss} .

Dado que para cada β_i ya conocemos los subgrupos a 1-parámetro virtuales diagonales de G_{β_i} , tomamos $\lambda \in M(G_{\beta_i})$ y $F \in Z_{\beta_i}$, verificamos las condiciones para la cual $\mu(F, \lambda) \leq 0$, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)F$ no se hace cero (no existe o existe pero no es cero). Entonces analizamos para cada β_i como sigue:

1. Para β_1 es claro que $Z_{\beta_1}^{ss} = \{a_{40}x^4 \mid a_{40} \neq 0\}$.
2. Para β_2 es claro que $Z_{\beta_2}^{ss} = \{a_{31}x^3y \mid a_{31} \neq 0\}$.
3. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^r, t^{-r}, t^0) \in M(G_{\beta_3})$, $F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 \in Z_{\beta_3}$, y se tiene

$$\lambda(t)F = a_{40}t^{-4r}x^4 + a_{31}t^{-2r}x^3y + a_{22}t^0x^2y^2 + a_{13}t^{2r}xy^3 + a_{04}t^{4r}y^4,$$

entonces para obtener pesos positivos y negativos se debe cumplir $(a_{40}, a_{31}) \neq 0$ y $(a_{13}, a_{04}) \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_3}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 \mid (a_{40}, a_{31}, a_{22}) \neq 0 \text{ y } (a_{22}, a_{13}, a_{04}) \neq 0\}.$$

4. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^r, t^{-2r}, t^r) \in M(G_{\beta_4})$, $F = a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z \in Z_{\beta_4}$, y se tiene

$$\lambda(t)F = a_{22}t^{2r}x^2y^2 + a_{30}t^{-r}x^3z,$$

entonces $a_{22} \neq 0$ y $a_{30} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_4}^{ss} = \{a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z \mid a_{22}, a_{30} \neq 0\}$$

5. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^{2r}, t^{-3r}, t^r) \in M(G_{\beta_5})$, $F = a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z \in Z_{\beta_5}$ y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{13}t^{4r}xy^3 + a_{30}t^{-5r}x^3z,$$

entonces se debe cumplir $a_{13} \neq 0$ y $a_{30} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_5}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z \mid a_{13}, a_{30} \neq 0\}.$$

6. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^{3r}, t^{-4r}, t^r) \in M(G_{\beta_6})$, $F = a_{04}y^4 + a_{30}x^3z \in Z_{\beta_6}$ y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{04}t^{16r}y^4 + a_{30}t^{-10r}x^3z,$$

entonces $a_{04} \neq 0$ y $a_{30} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_6}^{ss} = \{a_{04}y^4 + a_{30}x^3z \mid a_{04}, a_{30} \neq 0\}.$$

7. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^0, t^r, t^{-r}) \in M(G_{\beta_7})$, $F = a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \in Z_{\beta_7}$ y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{22}t^{-2r}x^2y^2 + a_{21}t^0x^2yz + a_{20}t^{2r}x^2z^2,$$

entonces $a_{22} \neq 0$ y $a_{20} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_7}^{ss} = \{a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid (a_{22}, a_{21}, a_{20}) \text{ dos no } 0\}.$$

8. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^r, t^{-2r}, t^r) \in M(G_{\beta_8})$, $F = a_{13}xy^3 + a_{21}x^2yz \in Z_{\beta_8}$ y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{13}t^{5r}xy^3 + a_{21}t^{-r}x^2yz,$$

entonces $a_{13} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_8}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{21}x^2yz \mid a_{13}, a_{21} \neq 0\}.$$

9. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^{2r}, t^{-3r}, t^r) \in M(G_{\beta_9})$, $F = a_{04}y^4 + a_{21}x^2yz \in Z_{\beta_9}$ y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{04}t^{12r}y^4 + a_{21}t^{-2r}x^2yz,$$

entonces $a_{04} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_9}^{ss} = \{a_{04}y^4 + a_{21}x^2yz \mid a_{04}, a_{21} \neq 0\}.$$

10. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^r, t^{-r}, t^0) \in M(G_{\beta_{10}})$, $F = a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z \in Z_{\beta_{10}}$, y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{30}t^{-3r}x^3z + a_{21}t^{-r}x^2yz + a_{12}t^rxy^2z + a_{03}t^{3r}y^3z,$$

entonces $(a_{21}, a_{30}) \neq 0$ y $(a_{03}, a_{12}) \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_{10}}^{ss} = \{a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z \mid (a_{03}, a_{12}) \neq 0 \text{ y } (a_{21}, a_{30}) \neq 0\}.$$

11. Consideremos $\lambda(t) = \text{diag}(t^r, t^{-3r}, t^{2r}) \in M(G_{\beta_{11}})$, $F = a_{13}xy^3 + a_{20}x^2z^2 \in Z_{\beta_{11}}$, y tenemos

$$\lambda(t)F = a_{13}t^{8r}xy^3 + a_{20}t^{-6r}x^2z^2,$$

entonces $a_{13} \neq 0$ y $a_{20} \neq 0$. Por tanto

$$Z_{\beta_{11}}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{20}x^2z^2 \mid a_{13}, a_{20} \neq 0\}.$$

Con estas cuentas tenemos la lista de subconjuntos abiertos Z_{β}^{ss} semi-estables por la acción

de G_β en Z_β .

$$Z_{\beta_1}^{ss} = \{a_{40}x^4 \mid a_{40} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_2}^{ss} = \{a_{31}x^3y \mid a_{31} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_3}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{40}y^4 \mid (a_{40}, a_{31}, a_{22}) \neq 0 \text{ y } (a_{22}, a_{13}, a_{04}) \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_4}^{ss} = \{a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z \mid a_{22}, a_{30} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_5}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z \mid a_{13}, a_{30} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_6}^{ss} = \{a_{04}y^4 + a_{30}x^3z \mid a_{04}, a_{30} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_7}^{ss} = \{a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid (a_{22}, a_{21}, a_{20}) \text{ dos no } 0\}$$

$$Z_{\beta_8}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{21}x^2yz \mid a_{13}, a_{21} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_9}^{ss} = \{a_{04}y^4 + a_{21}x^2yz \mid a_{04}, a_{21} \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_{10}}^{ss} = \{a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z \mid (a_{03}, a_{12}) \neq 0 \text{ y } (a_{21}, a_{30}) \neq 0\}$$

$$Z_{\beta_{11}}^{ss} = \{a_{13}xy^3 + a_{20}x^2z^2 \mid a_{13}, a_{20} \neq 0\}$$

También obtenemos a los subconjuntos abiertos $Y_\beta^{ss} = \rho_\beta^{-1}(Z_\beta^{ss})$ como se muestra a continuación

$$Y_{\beta_1}^{ss} = \{a_{40}x^4 \mid a_{40} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_2}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y \mid a_{31} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_3}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 \mid (a_{40}, a_{31}, a_{22}) \neq 0 \text{ y } (a_{13}, a_{04}, a_{22}) \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_4}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{22} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_5}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{13} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_6}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{04} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_7}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid (a_{22}, a_{21}, a_{20}) \text{ dos no } 0\}$$

$$Y_{\beta_8}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz \mid a_{21}, a_{13} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_9}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz \mid a_{21}, a_{04} \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_{10}}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z \mid \\ (a_{03}, a_{12}) \neq 0 \text{ y } (a_{21}, a_{30}) \neq 0\}$$

$$Y_{\beta_{11}}^{ss} = \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid a_{20}, a_{13} \neq 0\}$$

Cada Y_β^{ss} es una subvariedad suave localmente cerrada e invariante por el subgrupo parabólico P_β .

Cálculo de P_β

Ahora queremos calcular el subgrupo parabólico asociado a cada $\beta \in B$. De la definición 1.3.3 tenemos

$$P_\beta = \{g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \mid \mu(g, \beta) \geq 0\} = \{g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\beta(t)^{-1} \text{ existe en } \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})\}.$$

Entonces para $\beta = (n_1, n_2, n_3) \in M(T)$ queremos $(b_{ij}) \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} t^{n_1} & & \\ & t^{n_2} & \\ & & t^{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-n_1} & & \\ & t^{-n_2} & \\ & & t^{-n_3} \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow 0} (t^{n_i - n_j} b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ existe.}$$

Podemos tener tres casos:

1. $n_1 > n_2 > n_3$, y tenemos

$$P_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \right\} \text{ subgrupo parabólico de } \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}),$$

entonces $\beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_8, \beta_9$ y β_{11} corresponden a este subgrupo parabólico de dimensión 5.

2. $n_1 = n_2$, y tenemos

$$P_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \right\} \text{ subgrupo parabólico de } \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}),$$

entonces β_3 y β_{10} corresponden a este subgrupo parabólico de dimensión 6.

3. $n_2 = n_3$, y tenemos

$$P_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \right\} \text{ subgrupo parabólico de } \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}),$$

entonces β_7 y β_1 corresponden a este subgrupo parabólico de dimensión 6.

Estratificación de $Hip_4(2)^{un}$

De acuerdo con el teorema 1.3.11 la estratificación de $Hip_4(2)^{un}$ está compuesta por los estratos

$$S_\beta = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_\beta) \cdot Y_\beta^{ss}, \quad \beta \in B,$$

donde $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{11}\}$ es el conjunto de índices de la estratificación obtenidos en la tabla 3.1.

Los estratos son disjuntos

$$S_\beta \cap S_\gamma = \emptyset \text{ si } \beta \neq \gamma.$$

Con la norma definida por el producto interno en \mathfrak{t}^* , para cada $\beta \in B$ se tiene

$$\overline{S_\beta} \subset \bigcup_{\beta \leq \gamma} S_\gamma.$$

De acuerdo a los cálculos obtenidos en la tabla 3.1 tenemos

$$\beta_{11} \leq \beta_{10} \leq \beta_9 \leq \beta_8 \leq \beta_7 \leq \beta_6 \leq \beta_5 \leq \beta_4 \leq \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Por el teorema 1.3.11 cada estrato S_β es una variedad algebraica localmente cerrada, irreducible, suave y de dimensión proyectiva

$$\dim S_\beta = \dim Y_\beta^{ss} + \dim \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) - \dim P_\beta - 1.$$

Con los espacios Y_β^{ss} y los subgrupos parabólicos P_β obtenidos para cada $\beta \in B$, calculamos la dimensión de cada estrato

Estrato	S_{β_1}	S_{β_2}	S_{β_3}	S_{β_4}	S_{β_5}	S_{β_6}	S_{β_7}	S_{β_8}	S_{β_9}	$S_{\beta_{10}}$	$S_{\beta_{11}}$
Dimensión	2	4	6	6	7	8	7	8	9	10	9

3.3. Caracterización de curvas en cada estrato

En esta sección vamos a caracterizar las curvas en cada estrato de acuerdo a su tipo de singularidad.

Estrato 1

El estrato asociado a $\beta_1 = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ está dado por $S_{\beta_1} = \text{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_1}} Y_{\beta_1}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_1} \cong (\text{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_1}) \cdot \{a_{40}x^4 \mid a_{40} \neq 0\}.$$

Una curva $F \in S_{\beta_1}$ es $F = a_{40}x^4$, es decir, F es el producto de una línea cuatro veces.

Dado $L^4 \in \text{Hip}_4(2)$ donde L es una línea. Entonces existe $g \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $g \cdot L = x$, es decir, $L^4 \in S_{\beta_1}$.

Proposición 3.3.1. S_{β_1} es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 2 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de una línea cuatro veces.

$$F \in S_{\beta_1} \Leftrightarrow F \sim x^4.$$

Estrato 2

El estrato asociado a $\beta_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ está dado por $S_{\beta_2} = \text{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_2}} Y_{\beta_2}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_2} \cong (\text{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_2}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y \mid a_{31} \neq 0\}.$$

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_2}$, entonces $F = x^3(a_{40}x + a_{31}y)$, la condición $a_{31} \neq 0$ nos dice que la línea $a_{40}x + a_{31}y$ es distinta de x , es decir, F es el producto de una línea triple x^3 y otra línea $a_{40}x + a_{31}y$.

Sea $C \in \text{Hip}_4(2)$ tal que $C = L^3 \cdot L_1$ donde L y L_1 son líneas distintas. Por el ejercicio 2.15 en [Fulton y Weiss, 1989] sabemos que existe $g \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $g \cdot L = x$ y $g \cdot L_1 = a_{40}x + a_{31}y$, es decir $C \sim F$ y por tanto $C \in S_{\beta_2}$.

Proposición 3.3.2. S_{β_2} es localmente cerrado, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 4 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de una línea triple y otra línea.

$$F \in S_{\beta_2} \Leftrightarrow F \sim l_1^3 l_2.$$

Estrato 3

El estrato asociado a $\beta_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ está dado por $S_{\beta_3} = \text{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_3}} Y_{\beta_3}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_3} \cong (\text{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_3}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 \mid (a_{40}, a_{31}, a_{22}) \neq 0 \text{ y } (a_{22}, a_{13}, a_{04}) \neq 0\}.$$

Notemos que este espacio es precisamente el espacio de formas binarias de grado 4, denotado como $Hip_4(1) \cong \mathbb{P}^4$ que consiste en subconjuntos cerrados $V(F)$ de cuatro puntos en \mathbb{P}^1 contando multiplicidades. Por [Dolgachev, 2003, Teorema 10.2] se tiene $S_{\beta_3} = Hip_4(1)^{ss}$ que consiste en subconjuntos $V(F)$ con a lo más puntos de multiplicidad 2. Entonces F se puede factorizar como $F = L_1L_2L_3L_4$, $F = L_1^2L_2L_3$ o $F = L_1^2L_2^2$ y donde todas las líneas intersectan en $(0 : 0 : 1)$, es decir, son líneas concurrentes.

Sea $C \in Hip_4(2)$ producto de cuatro líneas concurrentes, con a lo más líneas dobles. Sabemos que existe un cambio de coordenadas en la que podemos escribir a C como producto de líneas en dos variables y esto lo podemos identificar con una forma binaria, la multiplicidad de las líneas se preserva bajo cambio de coordenadas, por tanto $C \in S_{\beta_3}$.

Proposición 3.3.3. S_{β_3} es localmente cerrado, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 6 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de cuatro líneas concurrentes con a lo más líneas dobles.

$$F \in S_{\beta_3} \Leftrightarrow F \text{ producto de líneas concurrentes } l_1l_2l_3l_4, l_1^2l_2l_3, l_1^2l_2^2$$

Estrato 4

El estrato asociado a $\beta_4 = (1, 0, -1)$ está dado por $S_{\beta_4} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_4}} Y_{\beta_4}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_4} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_4}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{22} \neq 0\}.$$

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_4}$, entonces podemos escribir

$$F = x^2(a_{40}x^2 + a_{31}xy + a_{22}y^2 + a_{30}xz), \text{ con } a_{30}, a_{22} \neq 0,$$

es decir, F es producto de una línea doble determinada por x^2 y una cónica F' . Se puede verificar que con las condiciones estrictas $a_{30} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$ la cónica F' no se puede factorizar como producto de dos líneas, es decir, la cónica F' es irreducible. Podemos observar que la línea x y F' intersectan en $p = (0 : 0 : 1)$ y el número de intersección $I(p, x \cap F') = 2$, por la propiedad 5 de número de intersección, la línea x es tangente a la cónica F' en p . Por tanto F es producto de una cónica irreducible y una línea doble tangente.

Sea $C \in Hip_4(2)$ producto de una cónica irreducible y una línea doble tangente a la cónica en un punto p , digamos $C = l_1^2G$. Podemos suponer que el punto es $p = (0 : 0 : 1)$, por tanto

la cónica irreducible G es proyectivamente equivalente a $y^2 + xz$, es decir, existe $g_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tal que $g_1 \cdot C = l_2^2(y^2 + xz)$ y l_2 es tangente a $y^2 + xz$, por tanto $l_2 = x$ o $l_2 = z$. Si $l' = z$ podemos considerar el cambio de coordenada dado por $g_2 = (x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x)$ con lo cual $g_2 \cdot g_1 \cdot C = x^2(y^2 + xz)$, es decir, $C \in S_{\beta_4}$.

Proposición 3.3.4. S_{β_4} es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 6 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de una cónica irreducible y una línea doble tangente.

Estrato 5

El estrato asociado a $\beta_5 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6})$ está dado por $S_{\beta_5} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_5}} Y_{\beta_5}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_5} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_5}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{13} \neq 0\}.$$

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_5}$, entonces podemos escribir

$$F = x(a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^2z),$$

es decir, es producto de una línea y una cúbica F' . De las condiciones estrictas $a_{13} \neq 0$ y $a_{30} \neq 0$ se puede verificar que la cúbica F' tiene una única singularidad en $p = (0 : 0 : 1)$ y $F'(x, y, 1) = a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^2$ nos dice que el punto $p = (0 : 0 : 1)$ es una singularidad tipo cúspide y su tangente está dada por la línea x . De esas condiciones se puede verificar que F' no se puede factorizar como producto de una cónica con una línea tangente ni menos como producto de tres líneas. Entonces F es producto de una cúbica cuspidal y su tangente.

Sea $C \in \mathrm{Hip}_4(2)$ producto de una cúbica cuspidal y su tangente, digamos $C = lG$, podemos suponer que la cúspide está en $p = (0 : 0 : 1)$, entonces también podemos suponer que $G \sim y^3 + x^2z$, es decir, existe $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $g \cdot C = l'(y^3 + x^2z)$, luego l' debe ser la línea tangente en p , por lo tanto $l' = x$. Por tanto $C = x(y^3 + x^2z) \in S_{\beta_5}$.

Proposición 3.3.5. S_{β_5} es localmente cerrado, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 7 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de una cúbica cuspidal y su tangente.

Estrato 6

El estrato asociado a $\beta_6 = \left(\frac{20}{39}, \frac{8}{39}, -\frac{28}{39}\right)$ está dado por $S_{\beta_6} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_6}} Y_{\beta_6}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_6} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_6}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z \mid a_{30}, a_{04} \neq 0\}.$$

Una curva $F \in S_{\beta_6}$ es de la forma

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z.$$

Las condiciones estrictas $a_{30}, a_{04} \neq 0$ nos dicen que F tiene una única singularidad en $p = (0 : 0 : 1)$ y

$$F(x, y, 1) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3,$$

de donde tenemos $m_p(F) = 3$ con una tangente triple en p . Además se puede verificar que posibles factorizaciones de F preservando $m_p(F)$ no se tienen las condiciones estrictas $a_{30} \neq 0$ y $a_{04} \neq 0$, por lo tanto F es irreducible.

Sea $C \in \mathrm{Hip}_4(2)$ una curva irreducible con un único punto singular triple con tangente triple sin otra más. Podemos suponer que la singularidad es $p = (0 : 0 : 1)$ y que la tangente triple está dada por x^3 .

Entonces, de la descomposición en formas $C(x, y, 1) = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ tenemos que $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ y $C_3 = x^3$. De aquí se tiene que los coeficientes $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$ y la curva C tiene como polinomio

$$C = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z,$$

y si $(0 : 0 : 1)$ es la única singularidad de C entonces $a_{30} \neq 0$ y $a_{04} \neq 0$. Por lo tanto $C \in S_{\beta_6}$.

Proposición 3.3.6. *S_{β_6} es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 8 y parametriza cuárticas irreducibles con una única singularidad de multiplicidad 3 con una tangente triple.*

Estrato 7

El estrato asociado a $\beta_7 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ está dado por $S_{\beta_7} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_7}} Y_{\beta_7}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_7} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_7}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid (a_{22}, a_{21}, a_{20}) \text{ dos no } 0\}.$$

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_7}$, podemos escribir

$$F = x^2(a_{40}x^2 + a_{31}xy + a_{22}y^2 + a_{30}xz + a_{21}yz + a_{20}z^2),$$

es decir, F es producto de una línea doble x^2 y una cónica F' . Luego, por las condiciones estrictas de que dos de los coeficientes a_{22} , a_{21} , a_{20} son no cero, se tiene que F' es una cónica no degenerada [Chan, 2010, Teorema 2]. Por teorema de Bezout la línea x y la cónica F' intersectan en al menos un punto. Si x fuera tangente a F' , entonces $a_{21}, a_{20} = 0$, lo cual no puede ser, por lo tanto la línea x y la cónica F' intersectan en dos puntos.

Sea $C \in Hip_4(2)$ producto de una línea doble y una cónica no degenerada con intersección en dos puntos distintos, digamos $C = l_1^2 G$, podemos suponer que la cónica pasa por los puntos $p_1 = (0 : i : 1)$ y $p_2 = (0 : 1 : i)$ y por tanto G es proyectivamente equivalente a $x^2 + y^2 + z^2$, es decir, existe $g \in SL_3(\mathbb{C})$ tal que $g \cdot C = l_2^2(x^2 + y^2 + z^2)$, luego la línea pasa por p_1 y p_2 implica que $l_2^2 = x$. Por lo tanto tanto $C \in S_{\beta_7}$.

Proposición 3.3.7. *S_{β_7} es localmente cerrado, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 7 y parametriza a las cuárticas planas que son producto de una línea doble y una cónica no degenerada con intersección en dos puntos distintos.*

Estrato 8

El estrato asociado a $\beta_8 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ está dado por $S_{\beta_8} = SL_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_8}} Y_{\beta_8}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_8} \cong (SL_3(\mathbb{C})/P_{\beta_8}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz \mid a_{21}, a_{13} \neq 0\}$$

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_8}$, entonces podemos escribir

$$F = x(a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^2z + a_{21}xyz),$$

es decir, F es producto de una línea dada por x y una cúbica F' . Con las condiciones estrictas $a_{13} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ se puede verificar que la cúbica F' tiene un único punto singular en $p = (0 : 0 : 1)$ de donde $F(x, y, 1) = a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^3 + a_{21}xy$ nos dice que p es un nodo y justamente uno de sus tangentes es la línea x . Con esas condiciones se puede verificar que posibles factorizaciones de F' no preservan los coeficientes $a_{13}, a_{21} \neq 0$ ni

$m_p(F') = 2$, es decir, la cúbica F' es irreducible. Entonces F es producto de una cúbica nodal y una de sus tangentes en el nodo.

Sea $C \in \text{Hip}_4(2)$ producto una cúbica nodal y una de sus tangentes en el nodo, digamos $C = lG$. Podemos suponer que el nodo es $p = (0 : 0 : 1)$ y con eso también podemos suponer que la cúbica G es proyectivamente equivalente a $x^3 + y^3 + xyz$, es decir, existe $g \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$ tal que $g \cdot C = l'(x^3 + y^3 + xyz)$, luego l' tangente a $x^3 + y^3 + xyz$ en p implica que $l' = x$ o $l' = y$. Si fuera que $l = y$, podemos considerar el cambio de coordenada $g_1 = (x \mapsto y, y \mapsto x, z \mapsto z)$ y con eso tenemos $g_1 \cdot g \cdot C = x(x^3 + y^3 + xyz)$. Por tanto $C \in S_{\beta_8}$.

Proposición 3.3.8. S_{β_8} es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 8 y parametriza a las cuárticas planas que son producto de una cúbica nodal y una de sus tangentes.

Estrato 9

El estrato asociado a $\beta_9 = \left(\frac{8}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{10}{21}\right)$ está dado por $S_{\beta_9} = \text{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_9}} Y_{\beta_9}^{ss}$, es decir, $S_{\beta_9} \cong (\text{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_9}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz \mid a_{21}, a_{04} \neq 0\}$.

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_9}$,

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz.$$

Las condiciones estrictas $a_{21} \neq 0$ y $a_{04} \neq 0$ nos dicen que el punto $p = (0 : 0 : 1)$ es el único punto singular de F , pues

$$F(x, y, 1) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y,$$

donde la forma de menor grado es $F_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y = x^2(a_{30}x + a_{21}y)$, entonces $m_p(F) = 3$ con dos tangentes. Por tanto F es una cuártica irreducible con una singularidad de multiplicidad 3 con dos tangentes.

Sea $C \in \text{Hip}_4(2)$ una curva irreducible con una singularidad p triple con dos tangentes, podemos suponer la singularidad es $p = (0 : 0 : 1)$. Entonces la descomposición en formas $C(x, y, 1) = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ nos dice que $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ y $C_3 = l_1^2 l_2$ con $l_1 \neq l_2$, y de aquí tenemos que la curva C está dada por el polinomio

$$C = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z,$$

y la forma $C_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = l_1^2l_2$ implica que $a_{12} = a_{03} = 0$ con la condición estricta $a_{21} \neq 0$ para que C_3 se pueda factorizar como queremos. Luego tenemos que

$$C = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz,$$

y notemos que si $a_{04} = 0$ la curva C es reducible, por lo tanto $a_{04} \neq 0$ es una condición estricta. Por lo tanto $C \in S_{\beta_9}$.

Proposición 3.3.9. *S_{β_9} es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 9 y parametriza a las cuárticas irreducibles con una singularidad de multiplicidad 3 con dos tangentes.*

Estrato 10

El estrato asociado a $\beta_{10} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ está dado por $S_{\beta_{10}} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_{10}}} Y_{\beta_{10}}^{ss}$, es decir,

$$S_{\beta_{10}} \cong (\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_{10}}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z \mid (a_{03}, a_{12}) \neq 0 \text{ y } (a_{21}, a_{30}) \neq 0\}.$$

Tomamos una curva $F \in S_{\beta_{10}}$,

$$F = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z.$$

Notemos que F tiene un punto singular en $p = (0 : 0 : 1)$ de donde

$$F(x, y, 1) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

tenemos que la forma de menor grado es $F_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$, entonces $m_p(F) = 3$. Si analizamos la condición $(a_{30}, a_{21}) \neq 0$ y $(a_{12}, a_{03}) \neq 0$ podemos ver que $F_3(x, y) = L_1L_2L_3$ es producto de tres líneas distintas, es decir, el punto $p = (0 : 0 : 1)$ es una singularidad de multiplicidad 3 con tres tangentes distintas.

Se puede verificar que si $(a_{30}, a_{12} \neq 0$ y $a_{21} = a_{03} = 0)$ o $(a_{03}, a_{21} \neq 0$ y $a_{12} = a_{30} = 0)$ F será irreducible. De lo contrario F es reducible y será producto de una cúbica nodal y una línea que pasa por el nodo $p = (0 : 0 : 1)$ pero no es tangente (pues se debe preservar el tipo de

singularidad), y se puede escribir como

$$\begin{aligned} F &= (b_1x + b_2y)(a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2z + a_{11}xyz + a_{02}y^2z) \\ &= b_1a_{30}x^4 + (b_1a_{21} + b_2a_{30})x^3y + (b_1a_{12} + b_2a_{21})x^2y^2 + (b_1a_{03} + b_2a_{12})xy^3 \\ &\quad + b_2a_{03}y^4 + b_1a_{20}x^3z + b_1a_{11}x^2yz + b_2a_{11}xy^2z + b_2a_{02}y^3z, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $b_1, b_2 \neq 0$ y en la cúbica $(a_{20}, a_{11}) \neq 0$ y $(a_{11}, a_{02}) \neq 0$ para tener un nodo.

Sea $C \in \text{Hip}_4(2)$ una curva una singularidad de multiplicidad 3 con tangentes distintas, podemos suponer que es en $p = (0 : 0 : 1)$ y que en la descomposición de $C(x, y, 1) = C_0 + C_1 + C_3 + C_4$ en formas, $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ y $C_3 = L'_1L'_2L'_3$ producto de tres líneas distintas. Entonces los coeficientes $a_{20} = a_{11} = a_{02} = a_{10} = a_{01} = a_{00} = 0$ y la curva C está dada por el polinomio

$$C = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{12}xy^2z + a_{03}y^3z,$$

y $C_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ donde analizando las condiciones para factorizar C_3 en producto de tres líneas distintas llegamos a que $(a_{30}, a_{21}) \neq 0$ y $(a_{12}, a_{03}) \neq 0$. Por tanto $C \in S_{\beta_{10}}$.

Proposición 3.3.10. $S_{\beta_{10}}$ es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 10 y parametriza a las cuárticas planas con una singularidad de multiplicidad 3 con tangentes distintas.

Estrato 11

El estrato asociado a $\beta_{11} = \left(\frac{5}{21}, -\frac{1}{21}, -\frac{4}{21}\right)$ está dado por $S_{\beta_{11}} = \text{SL}_3(\mathbb{C}) \times_{P_{\beta_{11}}} Y_{\beta_{11}}^{ss}$, es decir, $S_{\beta_{11}} \cong (\text{SL}_3(\mathbb{C})/P_{\beta_{11}}) \cdot \{a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3z + a_{21}x^2yz + a_{20}x^2z^2 \mid a_{20}, a_{13} \neq 0\}$.

Tomemos una curva $F \in S_{\beta_{11}}$, entonces podemos escribir

$$F = x(a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^2z + a_{21}xyz + a_{20}xz^2),$$

es decir, F es producto de una línea x y una cúbica F' .

Con las condiciones estrictas $a_{13} \neq 0$ y $a_{20} \neq 0$ se tiene que la cúbica $F' = a_{40}x^3 + a_{31}x^2y + a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + a_{30}x^2z + a_{21}xyz + a_{20}xz^2$ es irreducible y tiene un punto de inflexión en $p = (0 : 0 : 1)$ con tangente en $x = 0$ (eje y) [Bix, 2006, Teorema 8.1]. Entonces F es producto de una cúbica irreducible con punto de inflexión y su línea tangente.

Si $C \in \text{Hip}_4(2)$ es producto de una cúbica irreducible con punto de inflexión y su tangente, digamos $C = lG$. Podemos suponer que el punto de inflexión es $p = (0 : 0 : 1)$, luego por [Bix, 2006, Teorema 8.1] la cúbica G es irreducible y tiene un punto de inflexión en p si y solo si tiene la forma

$$G = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2z + a_{11}xyz + a_{10}xz^2,$$

con las condiciones estrictas $a_{03} \neq 0$ y $a_{10} \neq 0$ y su tangente está dada por la línea $x = 0$. Entonces $l = x$ y por lo tanto $C = xG \in S_{\beta_{11}}$.

Proposición 3.3.11. *$S_{\beta_{11}}$ es localmente cerrada, irreducible, suave, de dimensión proyectiva 9 y parametriza a las cuárticas planas que son el producto de una cúbica irreducible con punto de inflexión y su línea tangente.*

Resumimos la descripción de los estratos en la siguiente tabla

Estrato	Dimensión	Caracterización
S_{β_1}	2	l^4
S_{β_2}	4	$l_1^3 l_2$
S_{β_3}	6	$l_1 l_2 l_3 l_4, l_1^2 l_2 l_3, l_1^2 l_2^2$ concurrentes
S_{β_4}	6	cónica irreducible y una línea tangente
S_{β_5}	7	cúbica cuspidal y su línea tangente
S_{β_6}	8	cuártica irreducible con un punto de inflexión
S_{β_7}	7	cónica irreducible y una línea no tangente
S_{β_8}	8	cúbica nodal y una de sus tangentes
S_{β_9}	9	cuártica irreducible con punto triple y dos tangentes
$S_{\beta_{10}}$	10	cuártica irreducible con punto triple ordinario, cúbica nodal y una línea que pasa por el nodo pero no es tangente
$S_{\beta_{11}}$	9	cúbica irreducible con punto de inflexión y su línea tangente

Tabla 3.3: Caracterización de los estratos

Conclusiones y trabajo a futuro

En esta tesis se ha conseguido el objetivo propuesto: Se construyó una estratificación del espacio de curvas planas de grado 4 usando teoría de representaciones y teoría de invariantes geométricos, donde el primer estrato es el abierto $Hip_4(2)^{ss}$ y la estratificación de $Hip_4(2)^{un}$ está formada por subvariedades suaves, localmente cerradas e irreducibles. Se calculó la dimensión de cada estrato y se realizó la caracterización de las curvas en cada estrato de acuerdo a su tipo de singularidad y reducibilidad.

Una de las aplicaciones más importantes de esta estratificación, además de parametrizar curvas con singularidades específicas, como se demostró, es obtener información geométrica del cociente bueno construido con los puntos semi-estables. Algunos objetos para trabajar a futuro son:

- Calcular la cerradura de cada estrato y obtener las componentes irreducibles de $Hip_4(2)^{un}$.
- Obtener información geométrica del cociente bueno construido con los puntos semi-estables a través de los estratos y estudiar a detalle la relación del cociente bueno de curvas cuárticas planas y \mathcal{M}_3 , el espacio móduli de curvas de género 3.

Bibliografía

- [Birkes, 1971] Birkes, D. (1971). Orbits of linear algebraic groups. *Annals of Mathematics*, páginas 459–475.
- [Bix, 2006] Bix, R. (2006). *Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves*. Springer Science & Business Media.
- [Borel, 2012] Borel, A. (2012). *Linear algebraic groups*, volume 126. Springer Science & Business Media.
- [Brion, 2010] Brion, M. (2010). Introduction to actions of algebraic groups. *Les cours du CIRM*, 1(1):1–22.
- [Chan, 2010] Chan, C. (2010). Conics on the projective plane.
- [Dixmier, 1987] Dixmier, J. (1987). On the projective invariants of quartic plane curves. *Advances in Mathematics*, 64(3):279–304.
- [Dolgachev, 2003] Dolgachev, I. (2003). *Lectures on invariant theory*. Number 296. Cambridge University Press.
- [Elsenhans, 2015] Elsenhans, A.-S. (2015). Explicit computations of invariants of plane quartic curves. *Journal of Symbolic Computation*, 68:109–115.
- [Fogarty, 1969] Fogarty, J. (1969). *Invariant theory*. Number 29. WA Benjamin.
- [Fulton y Harris, 2013] Fulton, W. y Harris, J. (2013). *Representation theory: a first course*, volume 129. Springer Science & Business Media.

- [Fulton y Weiss, 1989] Fulton, W. y Weiss, R. (1989). *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, volume 3. Addison-Wesley Redwood City California.
- [Hartshorne, 2013] Hartshorne, R. (2013). *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media.
- [Kirwan, 1984] Kirwan, F. C. (1984). *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, volume 31. Princeton University Press.
- [Mumford, 1977] Mumford, D. (1977). *Stability of projective varieties*. L'Enseignement mathématique.
- [Mumford et al., 1994] Mumford, D., Kirwan, F., y Fogarty, J. (1994). *Geometric invariant theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Newstead, 1978] Newstead, P. E. (1978). *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.
- [Popov, 2010] Popov, V. L. (2010). The cone of Hilbert Nullforms. *arXiv preprint arXiv:1009.6107*.
- [Reynoso, 2010] Reynoso, C. (2010). Introducción a la Teoría de Invariantes Geométricos. Notas.
- [Santos y Rittatore, 2005] Santos, W. F. y Rittatore, A. (2005). *Actions and invariants of algebraic groups*. CRC Press.
- [Zubiaga et al.,] Zubiaga, R. B., Lamonedá, L. H., y Valenzuela, A. S. Introducción a la geometría de los grupos de Lie.