UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Desarrollo Cognitivo del Estudiante sobre el Concepto de Imagen de un Homomorfismo entre Grupos

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Salvador Barrón Hernández

Directoras de tesis:

Ofelia Montelongo Aguilar

Lorena Jiménez Sandoval

Zacatecas, Zac., 31 Enero de 2021

Agradezco al Consejo Nacional de
Ciencia y Tecnología por el apoyo
brindado para la realización de mis
estudios de maestría.

Becario No. 716925

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre **"Desarrollo Cognitivo del Estudiante sobre le Concepto de Imagen de un homomorfismo entre grupos"** y que fue realizado bajo mi asesoría por el **C. Salvador Barrón Hernández** alumno de la **Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior**; cumple con los requisitos de calidad académica para ser sometido a su revisión. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 09 de Noviembre de 2020

Ofelia Montelongo A.

Dra. Ofelia Montelongo Aguilar

Asesora de Tesis

Dra. Lorena Jiménez Sandoval

Co-asesora de Tesis

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día del mes de enero del año 2021, el que suscribe, Salvador Barrón Hernández, egresado del Programa de Maestría en Matemática Educativa con número de matrícula MATRICULA, manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado ***"DESARROLLO COGNITIVO DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONCEPTO DE IMAGEN DE UN HOMOMORFISMO ENTRE GRUPOS"*** bajo la dirección de la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar y la Dra. Lorena Jiménez Sandoval.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Salvador Barrón Hernández

AGRADECIMIENTOS

En las siguientes líneas deseo expresar mi agradecimiento a mi madre a quien le debo la vida, a quien le debo todo y a quien en todo momento tantos buenos y malos ha estado siempre a mi lado para levantarme. A Lucia mi esposa quien sin importar en que circunstancia estuviese siempre me apoyo a seguir mejorando sin nunca abandonarme. A mis hermanos Mariana y Raúl ya que sin su ayuda no hubiese podido culminar esta maravillosa etapa de mi vida.

Me es grato brindar este trabajo a mis hijas Fernanda y Valentina, que son el motor de mi arranque cada día.

A mi padre que a la distancia me brinda sus palabras de aliento y me llena de consejos cuando no encuentro salida alguna. A él que cuando necesito que alguien me escuche y estoy confundido trata de alentarme y regresarme al camino, gracias papá.

A mi tutora y asesora de tesis a la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar, quien anteriormente ya había sido mi maestra de Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales, y que desde aquellos ayeres vi en ella el reflejo de un gran maestro de matemáticas. Aparte de ser una excelente maestra, la admiro por ser una gran persona y que ante los problemas de la vida asume los retos con gran valor, cosa de lo cual espero poder también aprenderle.

A la sabiduría de los maestros de la Maestría en Matemática Educativa, Caro, Lety, Darly, Eduardo, Judith… los cuales me apoyaron en todo momento, teniendo esa inmensa paciencia para guiarme y sobre todo tener ese espíritu de querer ayudarme.

A todos mis amigos y compañeros que entre sus bromas, risas, problemas y ayudas hicieron más ameno este camino. A cada miembro de la institución de la escuela de Matemáticas de la UAZ que me brindaron su ayuda, en especial a Mario por buscarme los libros que necesitaba y estar siempre ahí.

A ti que me acompañaste en los momentos de desvelo, de frustración y de cansancio; que me diste la seguridad y la confianza para seguir intentándolo, te digo gracias infinitamente.

Estoy muy agradecido con todos y con la vida y espero que este ciclo que se cierra permanezca por siempre a la eternidad de mis recuerdos.

Y como dicen por ahí NUNCA ES DEMASIADO EL AGRADECIMIENTO, A QUIEN NO TE ABANDONÓ EN TUS PEORES MOMENTOS…. GRACIAS A TODOS.

Su amigo XHAVA.

RESUMEN

El álgebra abstracta, una materia relativamente joven, es por naturaleza una materia compleja para los estudiantes, ya que no logran comprender del todo los conceptos acuñados a esta área. Dado a esto, se desea encontrar qué dificultades tienen los alumnos al momento de estudiar la imagen de un homomorfismo entre grupos. Por lo que en esta investigación se propone como objetivo analizar el desarrollo cognitivo de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas sobre el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos. Para atender el problema se usará la teoría APOE, que consta de un ciclo de investigación el cual se desarrolla a través de tres fases: la primera etapa, un análisis teórico, la segunda fase, el diseño e implementación de instrumentos y por último un análisis y observación de los datos obtenidos del diseño e implementación de los instrumentos. Del análisis teórico se propondrá una descomposición genética preliminar del concepto. En la segunda fase se realizará un cuestionario diagnóstico y posteriormente un cuestionario con audio, y en la tercera componente se observarán, analizarán y verificaran los datos recolectados de dichos cuestionarios, que son los instrumentos para validar o refinar la descomposición genética propuesta; y con ello determinar si los alumnos lograron o no evidenciar el camino cognitivo propuesto para poder comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos y establecer que las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética son las necesarias para comprender dicho concepto de estudio. En caso de no evidenciar la descomposición genética propuesta en los estudiantes proponer una refinación de la misma para un trabajo ulterior.

Palabras Clave: Desarrollo cognitivo, Teoría APOE, imagen de un homomorfismo entre grupos, descomposición genética.

ABSTRACT

Abstract algebra, a relatively young subject, is by nature a complex subject for students, as they fail to fully understand the concepts coined in this area. Given this, we want to find what difficulties the students have when studying the image of a homomorphism between groups. Therefore, this research aims to analyze the cognitive development of students of the Bachelor of Mathematics on the concept of the image of a homomorphism between groups. To address the problem, the APOE methodology will be used, which consists of a research cycle which is developed through three phases: the first, a theoretical analysis, and the second and third are the design and implementation of instruments and the analysis and data observation respectively. From the theoretical analysis, a preliminary genetic decomposition of the concept will be proposed. In the second and third components, the data collected will be observed, analyzed and verified by means of two questionnaires, one for diagnosis and the other for exploration, which are the instruments to validate or refine the proposed genetic decomposition; and with this determine if the students were able to demonstrate the proposed cognitive path in order to understand the image of a homomorphism between groups and establish that the mental structures proposed in the genetic decomposition are those necessary to understand said study concept.

Key Words: Cognitive development, APOE theory, image of a homomorphism between groups, genetic decomposition.

Tabla de contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

El Álgebra Abstracta es una materia que presenta serios problemas educativos. Los estudiantes la consideran una de las más difíciles en la Licenciatura de Matemáticas, pues no logran comprender del todo el contenido de la materia (Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R., 1994).

Aunque es una ciencia relativamente joven y existen distintos enfoques de investigaciones hechas sobre este campo, las investigaciones realizadas bajo la lente de la Matemática Educativa son pobres en comparación con investigaciones hechas en otras materias de nivel superior, como lo es el cálculo (Findell, 2001).

Oktaç (2016) menciona que todavía queda mucho trabajo por hacer, se requiere encontrar caminos pedagógicos que ayuden a minimizar las dificultades de la enseñanza y del aprendizaje sobre el Álgebra Abstracta.

Autores como Dubinsky y Leron (1995) afirman que los estudiantes no están preparados en conocimientos para tomar la materia y que sus actitudes hacia el Álgebra Moderna son débiles; más aún los alumnos son reacios a querer estudiar esta área. Los científicos describen que existe una conciencia mínima en el profesor sobre este problema.

Las dificultades de no comprender al Álgebra Abstracta en la mente de los individuos testifican el hecho que entender o incluso estudiar en un principio el Álgebra Moderna, está orientado a un evento en el desarrollo cognitivo de un estudiante de matemáticas, ya que éste requiere de una construcción de conocimientos previos al concepto de estudio que desea alcanzar Dubinsky et al. (1994).

Por tales motivos encontramos que la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) desarrollada por Ed Dubinsky en 1983 puede ayudar a comprender el desarrollo cognitivo de un estudiante al percibir nuevos conceptos.

La teoría APOE considera los conceptos previos que un alumno requiere para construir un nuevo concepto, esto se logra mediante el análisis de cinco tipos de mecanismos mentales, que bien son cinco tipos de abstracción reflexiva, Dubinsky (1991), para crear las estructuras mentales que el individuo requiere para comprender un nuevo concepto.

La mayoría de las investigaciones realizadas bajo el lente de la teoría APOE están hechas sobre el nivel superior, algunas de estas investigaciones son: Dubinsky et al. (1994); Leron & Dubinsky (1995); Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D., & Thomas K. (1996); Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. and Thomas, K. (1997); Breidenbach, D. Dubinsky, E. Hawks, J., & Nichols, D. (1992). En estas investigaciones el resultado de aplicar la teoría APOE resultó favorable ya que los estudiantes pudieron construir las estructuras mentales necesarias para construir algunos conceptos de la teoría elemental de grupos, como grupo, subgrupo y operación binaria; conceptos propios del Álgebra Abstracta, haciendo de esta teoría una herramienta sumamente poderosa para el análisis del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en nivel superior; por tales motivos se consideró este marco teórico como teoría pertinente para la presente investigación.

El interés de la investigación es el estudio del desarrollo cognitvo del estudiante sobre la imagen de un homomorfismo entre grupos. Es un tema en el cual la mayoría de los estudiantes presenta serias dificultades en su comprensión. Actualmente hace falta más investigación en el área Oktaç (2016) por ello es importante analizar que es lo que ocurre o está ocurriendo con los estudiantes cuando estudian los conceptos del álgebra abstracta.

Para la secuencia investigativa como primer capítulo se establecerá cuáles son las dificultades que han presentado y presentan los estudiantes con el estudio del álgebra abstracta. Se hará un análisis de la problemática mediante antecedentes relacionados al álgebra abstracta y la metodología utilizada para el proyecto de investigación. Una vez reflexionado los antecedentes, se establecerá el problema de investigación, que es el desarrollo cognitivo de los estudiantes sobre la imagen de un homomorfismo entre grupos proponiendo los objetivos generales, particulares y una pertinente justificación.

En el segundo capítulo se establecerá el marco teórico a utilizar. Se describirá qué es, en qué consiste y cómo se relaciona con el tema propuesto para la investigación.

Definido el marco teórico, se definirá la metodología utilizada para alcanzar los objetivos del proyecto. Se describirá el ciclo de la investigación que comprende el marco teórico metodológico de la teoría APOE, el cual consta de tres partes: la primera fase es proponer el camino conginito que el estudiante debe seguir para comprender el tema de investigación, la segunda etapa es diseñar e implementar los instrumentos y la tercera y ultima etapa que es el cuarto capítulo de del trabajo el cual hace mención al análisis de datos con el objetivo de responder ¿cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante de la Licenciatura en Matemáticas desarrolla en la comprensión del concepto de imagen de un homomorfismo de grupos?

Finalmente, en la etapa final se hará mención sobre sobre los objetivos alcanzados, se describirá si el camino cognitivo propuesto en la primera etapa de la metodología APOE fue el indicado para que los estudiantes pudiesen lograr comprender el concepto de investigación; en caso contrario mencionar que falló y por qué. Así mismo se explicarán los alcances y aportaciones de la investigación a la matemática educativa, mencionando la relación de este proyecto a futuras investigaciones y una conclusión particular del trabajo realizado.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema

1.1 Motivación

Durante años, pensé que la matemática era una materia hecha sólo para aquellos estudiantes con una capacidad intelectual superior a la media. La frustración de no entender las matemáticas llevó a mi persona a buscar ayuda más allá de las enseñanzas del aula. Constantemente tenía problemas de aprendizaje, y mi desempeño matemático no era por supuesto el que yo anhelaba.

Con el tiempo, me di cuenta de la gran cantidad de problemas que involucra el aprendizaje de las matemáticas, en general. Conforme avanzaba en mis estudios, pude comparar los conflictos de aprendizaje de mis compañeros con los míos y observé que eran similares; y aún más sorprendente fue ver que alumnos ajenos a nuestra institución presentaran dificultades semejantes a las nuestras

En mi desarrollo profesional pude sortear estos baches de aprendizaje gracias a los *buenos* y *malos* maestros de matemáticas que tuve durante mis estudios. Entendiendo que esta "categorización" es hecha desde un punto de vista personal, ya que las características que percibí podrían ser interpretadas de manera diferente por otro estudiante. Sin embargo, creo que el estudiante debe aprender a reconocer lo bueno y lo malo para poder usarlo en su evolución de aprendizaje.

Y es que precisamente, hablando en términos de evolución, la matemática es así, es una ciencia en constante cambio, siempre dinámica. Conforme avanzas y profundizas en su aprendizaje, comienzan a emerger conceptos más abstractos, que algunas veces ni siquiera pueden presentarse mediante un esquema o un simple dibujo.

Los primeros conceptos abstractos que vi fueron en la clase de Álgebra Lineal de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el Tecnológico de Monterrey Campus Zacatecas, una materia compuesta por definiciones seguidas inmediatamente por teoremas. Es una cascada descomunal de conocimiento nuevo para cualquier estudiante de un primer curso sobre Álgebra Lineal.

Debido a la gran cantidad de conceptos nuevos que debe aprender un estudiante en Álgebra Lineal y relacionarlos con otros, estos procesos requieren mayor esfuerzo para ser comprendidos, son más complejos, esto fue lo que llamó mi atención hacia el estudio de esta asignatura. El estudiante emprende un desarrollo de abstracción reflexiva para comprender los conceptos de Álgebra Lineal.

Además, el Álgebra Lineal está relacionada a muchas ramas de las matemáticas y surge desde ella misma; es decir, no emerge de fenómenos de la vida cotidiana. Está relacionada con otros campos de la ciencia, tales como ingenierías, economía, química, entre otras. Y es precisamente la conexión que tiene con el Álgebra Abstracta el motivo por el cual planteo esta investigación.

El Álgebra Abstracta, como su nombre lo indica, es una materia llena de conceptos abstractos, que ha causado grandes dificultades de enseñanza – aprendizaje en docentes y estudiantes. Mi objetivo es, por tanto, comprender cómo el estudiante lleva a cabo la construcción en su mente de los conceptos y por qué tienen dificultades para comprenderlos.

1.2 Antecedentes

Los siguientes antecedentes son una exploración de las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del Álgebra Moderna, la secuencia de estos antecedentes está en forma cronológica con el objetivo de mostrar que desde las primeras investigaciones realizadas en el Álgebra Abstracta hasta las contemporáneas estas dificultades siguen persistiendo en los alumnos. Otro objetivo de colocar los antecedentes así fue para analizar cómo han evolucionado las dificultades de la enseñanza y aprendizaje en Álgebra Abstracta.

El Álgebra Abstracta es relativamente una ciencia joven. Fue hasta principios del siglo XIX que evolucionó al estudio de sistemas axiomáticos. Este enfoque axiomático muy pronto sería llamado *moderno* o *álgebra abstracta* (Kleiner, 1995, p. 1).

Dentro de la matemática educativa, las formas para encontrar nuevas instrucciones o caminos pedagógicos para la enseñanza y entendimiento del Álgebra Abstracta se han reducido a *la teoría elemental de grupos*. Tan es así que en la literatura se han revelado 15 artículos en la enseñanza del Álgebra Abstracta. Once de ellos han sido publicados desde 1994, de los cuales nueve han nacido del trabajo de Dubinsky, Leron y sus colaboradores (Findell, 2001, p. 6).

Ed Dubinsky, creador de la teoría APOE, ha sido uno de los científicos matemáticos que más ha trabajado en tratar de encontrar soluciones o caminos que promuevan la enseñanza del Álgebra Abstracta. Dubinsky comenzó a trabajar la abstracción reflexiva de Piaget en 1983. Dos años después de 1985 a 1995 Dubinsky, y varios colaboradores desarrollaron métodos pedagógicos para aprender varios conceptos matemáticos. Baxter et al. (1988) (citado en Arnon et al., 2014) afirmó que este trabajo permitió la primera publicación del primer libro basado completamente en la teoría APOE.

Después de cuatro años, de 1989 a 1995, Dubinsky trabajó con varios colaboradores para desarrollar el marco teórico que eventualmente se convertiría en la teoría APOE. Estos colaboradores formaron el grupo RUMEC (Research Undergraduate Mathematics Education Community) por sus siglas en inglés, un grupo de científicos que colaboraron en las investigaciones hechas por Dubinsky hacia el Álgebra Abstracta y otras áreas de las matemáticas a nivel superior.

Las ideas e investigaciones hechas por el grupo RUMEC han permitido futuras investigaciones sobre este campo. Ellos han sido en cierta forma los pioneros en tratar de entender cómo ayudar a los alumnos en comprender el Álgebra Moderna.

Como parte del trabajo en esta investigación, se mostrarán en su mayoría los trabajos hechos por Dubinsky y el grupo RUMEC enfocados al Álgebra Abstracta, así como trabajos ulteriores que surgieron a partir del grupo RUMEC a fin de comprender el problema que atiene a esta investigación, que es tratar de comprender las dificultades que tienen los estudiantes en comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos.

Dado que el tema de investigación que pretendemos abordar está relacionado a la imagen de un homomorfismo entre grupos, es de vital importancia comprender los elementos previos que un estudiante debe poseer para construir el concepto del tema de investigación propuesto. Primero analizaremos el concepto de función, concepto base para comprender el concepto de imagen, después se revisarán los conceptos de grupo, operación binaria, conjunto y cuantificadores a través de las distintas investigaciones que se han llevado a cabo en estos conceptos.

Estas investigaciones que presentamos a continuación tienen un orden cronológico, algunos proyectos se enlazan con otros y otros surgen en base en las investigaciones iniciadas por Dubinsky en el año de 1983 (Arnon**,** I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller**,** K., 2014).

La primera investigación relacionada con nuestra investigación es la de Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) en la cual realizaron una investigación acorde a dos objetivos, el primero indagar la falta de comprensión sobre el concepto de función y el segundo, mostrar el desarrollo del tratamiento de la instrucción mediante el uso de un lenguaje de programación llamado ISETL.

Para poder comprender mejor los resultados de la investigación realizada por Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) es necesario mencionar que la diferencia entre acción y proceso es la necesidad de formar un procedimiento y desarrollar una fórmula que describa una transformación. En la acción el estudiante tiende a pensar la transformación paso a paso, es decir la manera en cómo se relacionan y se efectúan los pasos para trabajar con una función, es un proceso puramente mecánico, dejando de lado alguna relación existente en su mente sobre el concepto de función.

Finalmente, un proceso representa una transición que no representa un camino mecánico, es una forma explícita de describir el concepto función; solo es necesario que la transformación pueda ser imaginada en la mente del estudiante para que la pueda manipular sin seguir pasos estructurados. Dicho sea, los conceptos de acción y procesos son conceptos elementales que se utilizan en la teoría APOE para describir el alcance que un estudiante evidencia al tratar de comprender un concepto nuevo

Como objetivo general se aplicó la teoría APOE, enfocándose en la estructura mental de concepción proceso al tema de función. Los autores remarcan la idea de concepción función como una transformación, es decir, aplicar transformaciones a un objeto dado para producir ese objeto transformado.

La metodología fue el ciclo de investigación APOE, utilizando las tres componentes: *análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza mediante ISETL,* y *observación, análisis y verificación de datos.*

Para el análisis teórico se realizó un análisis epistemológico del concepto en cuestión, y se hizo una breve mención de la concepción objeto función en tres términos del marco teórico APOE, es decir una descomposición genética.

Antes de implementar la segunda componente de la metodología, se aplicaron dos instrumentos a 62 estudiantes en matemáticas de nivel básico de licenciatura los cuales se respondieron al momento en hojas y lápiz. El primer instrumento fue responder ¿Qué es una función? y el segundo dar ejemplos de funciones. Las respuestas se agruparon en cuatro categorías: pre-acción, acción, proceso y respuesta desconocida.

Después se aplicó el diseño e implementación de la enseñanza mediante ISETL, lenguaje de programación, al concepto de función con actividades reflexivas e implícitas sobre el aprendizaje de función.

Se trabajó con grupos pequeños de 4 a 5 personas en actividades específicas, después se discutieron dichas actividades por todo el grupo guiados por el maestro y se dejaron tareas. Cabe mencionar que el tratamiento instruccional se llevó a cabo antes de que los alumnos tomaran el tema de funciones.

Los estudiantes trabajaron dos meses con ISETL. Posterior a ello se establecieron nuevamente tres instrumentos: el primero ¿qué es una función?, el segundo fue inmediatamente dar tres ejemplos de función y, por último, pasado un tiempo después de haber contestado los primeros dos instrumentos, se les pidió que analizaran ciertas situaciones para determinar si eran o no funciones, y si lo eran decir porqué. Nuevamente se reagruparon las respuestas en las cuatro categorías antes mencionadas para comparar los resultados de un antes y un después de haber usado ISETL.

Se encontró que después de haber utilizado dicho lenguaje de programación surgieron varios obstáculos en la construcción concepción proceso de una función; por ejemplo, muchos estudiantes insistían en que debe haber una expresión o al menos la presencia de variables que indiquen entrada y salida.

Otros resultados de haber implementado un lenguaje de programación en el tratamiento instruccional fueron: establecer el concepto función como un proceso mental que involucra objetos de entrada para transformarlos y convertirlos en nuevos objetos, adquirir nuevos conceptos relacionados a función usando una concepción proceso de función, coordinar dos o más procesos de función y ser capaz de hacer reversiones en procesos de funciones para crear nuevas concepciones proceso de función.

Una vez terminado el tratamiento de instrucción se implementaron tres instrumentos nuevos: un pre-examen de funciones, una entrevista y un examen final; siguiendo la mecánica de organizar las repuestas en las cuatro categorías descritas en párrafos anteriores. Esto con el objetivo de obtener una nueva imagen sobre la concepción proceso función en los estudiantes y poder comparar resultados con los instrumentos anteriormente planteados.

El primer instrumento fue un pre-examen de forma voluntaria sin valor curricular aplicado a 56 alumnos de 62, se aplicaron 4 preguntas relacionadas con ISETL y la habilidad del estudiante para construir una función para poder recolectar y organizar información en una situación dada.

El segundo instrumento fueron 19 entrevistas, a los demás alumnos no se les entrevistó donde se analizó las respuestas a los dos primeros instrumentos que se implementaron durante la investigación descritos previamente. Las entrevistas fueron recopiladas y transcritas. Con el objetivo de detectar si los estudiantes tenían concepción de procesos antes de evaluar el tratamiento instruccional.

Y el tercer instrumento fue un examen final dirigido únicamente a procesos matemáticos sin ningún uso de computadora, se estructuró bajo 5 preguntas, y las principales intenciones eran observar si los estudiantes eran capaces de hacer reversión en el proceso para crear otro proceso nuevo, analizar la concepción proceso con problemas sencillos pero difíciles, estudiar los conceptos de inyectividad y sobreyectividad, conceptos que aún no veían los estudiantes y por último estudiar el dominio de la función como objeto; se pretendía analizar que el estudiante coordinara una concepción proceso con la concepción objeto y al mismo tiempo pudiera hacer reversiones.

A manera de conclusiones generales se destacó que los estudiantes muestran una mejor concepción proceso de función al describir qué es una función que al dar ejemplos, y por el lado contrario los estudiantes muestran una concepción de acción más elevada al dar ejemplos que al evidenciar lo que es una función.

La mayoría de los estudiantes se restringen a ver una función casi necesariamente como una expresión algebraica o trigonométrica y no como una transformación a través de una construcción mental.

Este documento de Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) es de suma importancia para nuestra investigación debido a que involucra las estructuras mentales del concepto función que un estudiante debería concebir para construir dicho concepto.

Seguida de esta investigación viene Dubinsky en 1994 ha indagar los conceptos elementales de la teoría de grupos de álgebra abstracta, esta investigación sirve de apoyo en nuestro proyecto ya que involucra el concepto de grupo y conjunto.

Dubinsky *et al.* (1994) establecen como objetivo dos preguntas, y el análisis de estrategias pedagógicas para incrementar el éxito del estudiante en el aprendizaje en álgebra abstracta. La primera pregunta ¿Cómo un individuo aprende ciertos conceptos en la teoría elemental de grupos?, y la segunda ¿qué relación tiene este aprendizaje en matemáticas y la abstracción en general?

Dentro de la teoría APOE la metodología que utilizaron fue el ciclo de investigación APOE, ya que el diseño instruccional se basó en estrategias que involucran actividades por medio de computadoras en un curso; trabajando también con hojas de trabajo y debatiendo en grupo algunas ideas principales de algunos ejercicios.

Dicho curso constó con un grupo de 24 maestros de licenciatura durante un verano de seis semanas de Álgebra Abstracta. Se tomaron maestros de nivel básico, medio y alto para analizar las respuestas.

Casi al final del taller, se realizó una evaluación de dos horas con los participantes. Terminada la evaluación escrita, se eligieron 10 individuos para ser entrevistados y grabar sus respuestas. Se tomaron respuestas correctas e incorrectas para poder potencializar un acceso de rango de comprensión sobre los conceptos de grupo y subgrupo.

En los resultados de las entrevistas, se pudo notar que algunos individuos perciben al conjunto como el aspecto predominante de grupo y la operación binaria como un aspecto secundario.

Superficialmente el concepto de grupo en un estudiante está basado completamente en la concepción de conjunto desde un principio. A medida que el individuo gana experiencia incluye propiedades que el conjunto puede tener. La operación binaria suele ser una de estas propiedades, aunque en un principio no haya diferenciación entre las propiedades. Este desarrollo es la unión de dos objetos, conjunto y función (operación binaria) coordinada en un par, la cual puede ser la primera concepción real de grupo.

Por otro lado, la concepción de subgrupo por parte del estudiante puede estar sólidamente basado en la noción de restricción de función al subconjunto del dominio. Infiriendo propiamente que uno de los principales errores que el estudiante comete es que si todos los elementos de un subgrupo están contenidos en otro grupo más grande entonces concluye que es subgrupo de ese grupo.

Así, Dubinsky *et al.* (1994), describen que el enlace de conexión entre grupo y subgrupo es el concepto de función, vista como operación binaria, concepto que parece ser de suma importancia para el desarrollo de grupo y subgrupo.

De la transcripción de las encuestas que realizaron Dubinsky *et al.* (1994) se puede apreciar la gran complejidad de comprensión por parte de los alumnos en conceptos elementales ligados al concepto de grupo. Los estudiantes entienden que la construcción en la comprensión en los inicios sobre el álgebra abstracta es un evento sumamente importante de desarrollo cognitivo en el estudiante.

Debido a que los alumnos habían estado mecanizados a resolver problemas mediante fórmulas y algoritmos, el paso al álgebra abstracta es abrupto ya que el estudiante debe comprender y entender la complejidad en general del curso sobre esta materia y que su forma de enseñar no es tan tradicional como lo ha sido para el estudiante. Selden & Selden (1987), apoyan la dificultad sobre el manejo en los contenidos y desarrollo en las actitudes hacia una mejor comprensión en álgebra abstracta.

Dubinsky et al. (1994) creen firmemente que las concepciones de conjuntos y funciones juegan un papel muy importante en el aprendizaje de grupo. Los estudiantes deben entender conjuntos no solo como procesos sino como objetos que pueden ser en sí mismos elementos de conjuntos y pueden ser operados por funciones. Los estudiantes deben entender las funciones como procesos - en particular, la restricción del proceso función al subconjunto de su dominio – a manera de ser capaz de construir la idea de la operación inducida por un grupo en un subconjunto.

Finalmente, el estudiante debe construir la comprensión de inyectividad y sobreyectividad de funciones de tal manera que pueda trabajar con permutaciones. A saber, si es necesario el individuo debe tratar de encapsular el proceso de función a manera de verlo como objeto. El no tener estructuras cimentadas sobre conjunto y función conducirán inevitablemente al estudiante a tener un gran problema sobre el manejo en el concepto de grupo.

Un año posterior a la investigación realizada por Dubinsky et al. (1994), Leron, otro miembro de la RUMEC junto con Dubinsky realizaron una nueva investigación sobre las dificultades de enseñanza – aprendizaje presentadas en la teoría elemental de grupos. Proporcionando evidencia de las dificultades en la enseñanza – aprendizaje del álgebra abstracta.

Leron & Dubinsky (1995), describen que:

> Existe una conciencia mínima en el profesor de matemáticas sobre lo que pueden hacer sobre este desastre. La materia es simplemente muy difícil para los estudiantes. Los estudiantes no están bien preparados y son reacios para hacer los esfuerzos necesarios para aprender este dificultoso material (p. 1).

Afirman que un estudiante debe remplazar su método de lectura por un método constructivo, el cual debe involucrar métodos interactivos con actividades en computadora, un aprendizaje colaborativo, que pueda cambiar radicalmente la cantidad de significado del aprendizaje logrado por un promedio de estudiantes (Leron & Dubinsky, 1995).

Los investigadores en su trabajo describen cuatro escenarios, en los cuales tratan de incluir al lector como si estuviese en la clase de forma presencial, tratando de simular la sesión de clases en la mayor medida de sus limitaciones de cómo sería una clase compuesta con actividades computacionales y hojas de trabajo en grupos resaltando como objetivo la interacción que tienen los estudiantes con éstas.

Para el primer escenario se involucra al estudiante con la teoría de grupos y las propiedades de sistemas aritméticos modulares. La importancia de la investigación radica en la forma de trabajo mediante un laboratorio de computadora y en equipos de 2 a 4 personas.

Leron & Dubinsky (1995) acuerdan que el aprendizaje de las matemáticas es siempre sobre procesos en la construcción matemática, los objetos y las relaciones entre ellos. Los ingredientes para estas construcciones son siempre conjuntos, funciones, expresiones lógicas (como cuantificadores) y el resultado de construcciones previas.

Cuando los estudiantes trabajaron en un ambiente computacional se les proporcionó un software llamado Interactive Set Language, ISETL, por sus siglas en inglés, el cual fue diseñado especialmente para expresar y clarificar este tipo de construcciones.

Se afirma que las actividades computacionales son solo para proporcionar una base experimental para los otros modelos de aprendizaje.

Las ideas principales de las actividades computacionales es hacer que el estudiante tenga una base experimental que pueda relacionarse con afirmaciones formales y abstractas, y no llegar de momento a una respuesta correcta. Más allá de descubrir conceptos matemáticos, los investigadores piensan que los estudiantes pueden construir estos conceptos matemáticos en sus mentes.

Sin embargo, Leron & Dubinsky (1995) observaron que trabajar mediante lápiz y papel no es en sí una forma incorrecta de trabajo, sino que muchas de las veces se estancan en los procedimientos, mientras que el entorno computarizado les permite analizar más ejemplos que les ayuden a eliminar estos estancamientos.

Pese a tratar de eliminar estos estancamientos, el grupo RUMEC continúo trabajando sobre las dificultades emergentes tanto en estudiantes, profesores e institutos sobre el aprendizaje del álgebra abstracta. Brown junto con otros colaboradores del equipo RUMEC analizaron trabajos anteriores sobre la teoría de grupos realizados por Dubinsky con la finalidad de encontrar nuevos tratamientos pedagógicos para resolver las dificultades de enseñanza del álgebra abstracta.

Entre los años de 1992 a 1997 Dubinsky trabajó fuertemente en el concepto función y los conceptos fundamentales de la teoría de grupos. La siguiente investigación se realiza dos años después de la investigación de Leron & Dubinsky (1995), esto es, en 1997; cabe informar que esta investigación es pertinente en nuestro trabajo, ya que la investigación de Dubinsky et al. (1994) se relaciona con ésta de 1997 y con la de Breidenbach et al. (1992) y más aún, en este proyecto de investigación se trata al concepto de operación binaria, el cual es fundamental para nuestro tema de investigación.

Brown et al. (1997) Establecen tres objetivos primordiales: (a) Determinar mediante APOE las estructuras mentales hechas por los estudiantes para comprender los conceptos de operación binaria, grupos y subgrupo, (b) evaluar en qué grado la metodología permite al estudiante alcanzar el éxito en la comprensión de dichos conceptos y (c) crear una base de información que permita tener una visión en la epistemología y pedagogía asociada con estos temas.

Para contestar a estos tres objetivos los investigadores utilizaron el marco teórico APOE y el ciclo de investigación, que es la metodología de la teoría APOE.

Una de las finalidades de esta investigación fue hacer una comparación del análisis epistemológico del trabajo de Dubinsky et al. (1994) y Brown et al. (1997). Así los resultados reflejan que los análisis preliminares de este estudio son muy cercanos a los de Dubinsky et al. (1994).

Esta investigación se centró en estudiantes de licenciatura quienes ya habían tomado un curso de Álgebra Abstracta por lo menos una vez. El grupo principal de participantes constó de 31 estudiantes en un curso de otoño de 1991. La mayoría de ellos fueron maestros que estaban en pre-servicio.

El tratamiento instruccional se basó en el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, discusión en clase y ejercicios). La implementación instructiva fue tanto la computadora como el trabajo en equipo. Se dividió en dos sesiones el curso, la primera en sesiones de dos horas por semana en el laboratorio de computadoras y la otra sección en sesiones de una hora por semana sin el uso de la computadora, así mismo dejando tareas para la casa que después se debatían en clase.

Para la primera sección se usó el lenguaje de programación ISETL el cual contiene comandos muy similares al lenguaje matemático al momento de programar. Lo cual permite al estudiante una reflexión sobre los conceptos matemáticos. Se utilizaron libros de texto que fueron escritos explícitamente para apoyar el enfoque pedagógico, *Aprendiendo Álgebra Abstracta con ISETL* por Dubinsky & Leron (1994).

Se utilizaron cinco instrumentos para recolectar la información: tres examinaciones escritas en el curso y dos conjuntos de entrevistas. Las primeras dos examinaciones fueron dadas durante el semestre como una parte del grupo, que fueron dos exámenes uno de forma individual y otro grupal donde cada estudiante recibió una calificación individual y una grupal de acuerdo con el grupo que trabajó. La tercera examinación consistió en otro examen individual, pero éste fue uno final que consistía en tres partes: definiciones, preguntas de falso y verdadero, y un conjunto de 11 proposiciones de las cuales el estudiante debía tomar por lo menos dos y probarlas.

Los dos conjuntos de entrevistas cubrían temas de Álgebra Abstracta. El primer conjunto de entrevistas se realizó mediante audio con 24 estudiantes de 31 en la última semana del semestre de otoño de 1991. Las segundas entrevistas también fueron grabadas con 17 estudiantes de los 31 en total, junto con otros 20 estudiantes quienes ya habían tomado un curso estándar de Álgebra Abstracta.

Las transcripciones fueron cuidadosamente leídas y analizadas a manera de producir una lista de situaciones matemáticas que emergieron durante las entrevistas. Centrándose en estas situaciones, se obtuvieron los resultados sobre las construcciones mentales que los estudiantes parecían tener.

Se presentan dos resultados respecto a los cinco instrumentos utilizados en el tratamiento de la instrucción para operación binaria, grupo y subgrupo. Primero, se consideró la naturaleza de sus respuestas en términos de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. Esto es, se utilizó la información para observar si los estudiantes parecían crear estas estructuras mentales o bien ver si otras construcciones mentales podrían crearse.

El segundo resultado es simplemente un resumen del desarrollo de los estudiantes en el sentido matemático. Esto es, ¿respondieron las preguntas y resolvieron los problemas razonablemente bien, qué errores típicos cometieron y qué conceptos matemáticos demostraron su conocimiento?

Se discutió cada tipo de resultados por separado para los conceptos de la investigación. Se hace énfasis que debido a que se trabajó en equipos, se trató analizar las respuestas de una forma individual para evitar generalizaciones, es decir por ejemplo que cuando los investigadores se refieren al esquema construido por un equipo, ellos reconocen que es posible que no todos los individuos del equipo tengan los mismos componentes y conexiones con sus esquemas.

Una de las principales contribuciones que se pueden decir de la investigación son las construcciones mentales que vienen de las entrevistas. Por último, se debaten las tres examinaciones, incluyendo el examen grupal, nunca dejando de vista los conceptos de operación binaria, grupo y subgrupo.

Este tipo de investigaciones realizadas por Dubinsky y el grupo RUMEC dieron pauta a futuras investigaciones en el aprendizaje y enseñanza del álgebra abstracta en la matemática educativa. Ejemplo de proyectos de investigación posteriores fueron los de Weber & Larsen (2008), trabajo el cual se basó en las investigaciones realizadas por Dubinsky entre los años de 1992 a 1997. La importancia de esta investigación nos permite analizar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del algebra abstracta actuales mediante otro marco teórico y otra metodología, diferentes a la teoría APOE, que está en proceso de diseño.

Weber & Larsen (2008) presentan cuatro episodios que muestran las dificultades que tienen los estudiantes sobre la comprensión y razonamiento sobre conceptos en la teoría de grupos. Para el episodio 1 hablan sobre la comprensión de clase lateral y normalidad, que para efectos de nuestra investigación lo dejaremos a un lado sin demeritar su importancia, enfocándonos más a los conceptos base que involucran a la imagen de un homomorfismo ente grupos.

Para el episodio 2 los científicos analizaron el proceso de evaluación de los estudiantes y para el episodio 3 verificaron los métodos de pregrado para reducir la abstracción.

Seldan & Seldan (1987) (como se citó en Weber & Larsen, 2008) encontró que los estudiantes tienden a razonar en sistemas de abstracción algebraica como si ellos estuvieran trabajando con sistemas de número familiares.

Hazzan (2001) (como se citó en Weber & Larsen, 2008) describe otras técnicas para reducir la abstracción. Por ejemplo, ella encontró que cuando a los estudiantes se les presentan tareas en Álgebra Abstracta ellos tienden a evitar usar el conocimiento conceptual de objetos matemáticos relevantes por procedimientos canónicos que ya conocen.

Por otro lado, Findell (2002) (como se citó en Weber & Larsen, 2008) encontró que los estudiantes de Álgebra Abstracta usan tablas de operación para mediar con la abstracción.

Para el último episodio de Weber & Larsen (2008) se describe la comprensión y razonamiento de los estudiantes sobre grupos isomorfos. Se verifica un análisis general de como los estudiantes vuelven a recurrir en procedimientos ya conocidos cuando se trata de un conocimiento conceptual matemático abstracto.

En la última sección se hace referencia a una innovación de enfoques para enseñar Álgebra Abstracta. Debido a las numerosas dificultades de aprendizaje y de demostración que hay en los estudiantes sobre esta materia, un gran número de investigadores ha diseñado y evaluado una pedagogía innovadora que ayude a superar estas dificultades (Leron and Dubinsky, 1995; Hannah, 2000; Larsen, 2004; Weber, in press). Weber & Larsen (2008) presentaron dos enfoques para la enseñanza del Álgebra Abstracta, proporcionando al lector las ideas teóricas detrás de los enfoques de enseñanza, como se implementa cada enfoque y sugerir evidencias de su efectividad.

El primero es Aprendiendo Álgebra Abstracta mediante ISETL para programar conceptos teóricos de grupo.

Como ya vimos anteriormente, Leron & Dubinsky (1995) mencionan que el método de lectura no es del todo eficiente, por tal motivo ellos proponen un enfoque de instrucción que está basado en la teoría APOE, alternativa que se desarrolla a través de dos ciclos de experimentación, análisis y modificación. El primer ciclo fue descrito y reportado en Dubinsky et.- al. (1994) y el segundo descrito en Dubinsky (1997).

Leron & Dubinsky (1995), creen que la teoría de grupos puede ser entendida en términos de acción y procesos que pueden ser aplicados a objetos matemáticos.

El enfoque instruccional que fue descrito por Leron & Dubinsky (1995) se basa en actividades de programación en computadora para promover el desarrollo conceptual en los estudiantes. El lenguaje de programación fue el ISETL, programa que tiene una sintaxis de código muy similar a la matemática familiar, alentando al estudiante a familiarizarse a la vez con la formalidad matemática.

Leron & Dubinsky (1995) listaron cuatro beneficios de su enfoque instruccional:

- La programación. Los estudiantes al desarrollar un concepto matemático en el programa están repasando, discutiendo y reflexionando los pasos necesarios para desarrollar el concepto deseado. Esto les brinda una gran oportunidad para construir el proceso de comprensión del concepto que está estudiando.
- Cuando se le pide al estudiante anticiparse a la salida de un comando de computadora, esto les permite evaluar y si es necesario, refinar su comprensión de las ideas de teoría de grupos y discutir estos resultados no anticipados con sus compañeros.
- Mediante la programación los estudiantes desarrollan una base experimental para entender más la abstracción y el tratamiento formal de esos conceptos que enfrentarán después en el curso.
- ISETL facilita la transición de entender los conceptos de grupo y clase lateral como objetos matemáticos, conceptos que son esenciales para la teoría de grupos.

El segundo enfoque es aprendiendo teoría de grupos mediante la reinvención de conceptos propuesto por Larsen (2002, 2004), sus esfuerzos se enfocan en desarrollar un diseño instruccional para el Álgebra Abstracta en el cual los estudiantes desarrollan en un principio conceptos matemáticos con estrategias y conocimientos informales para luego desplegar dichos conceptos mediante la reflexión en los procesos informales a conceptos formales. La meta es producir una teoría local instruccional.

Los objetivos de esta teoría local instruccional son brindar una justificación para las actividades instruccionales, proporcionar que el maestro pueda adoptar el enfoque instruccional para su situación específica. Para mayor información se puede ver que esta instrucción local se basa en la perspectiva teórica de la Educación Matemática Realista. Finalmente, podemos ver que en la primera sección de este artículo se describen las investigaciones recomendadas que reflejan las dificultades que han tenido los estudiantes con la comprensión y el razonamiento sobre conceptos teóricos de grupo y cómo varias investigaciones han argumentado que muchos cursos de Álgebra Abstracta basados en la lectura han contribuido con las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

En la segunda sección se describen dos enfoques instruccionales innovadores que se han utilizado para comprometer a los estudiantes a desarrollar actividades y que éstas les permitan generar una comprensión más significativa de la teoría de grupos. El primer enfoque es mediante el uso del lenguaje de programación ISETL, que es mucho más que un lenguaje formal de las matemáticas; y el segundo enfoque está basado en el desarrollo de ideas importantes de manera informal por parte de los estudiantes para después formalizar estas ideas y métodos para reinventar la teoría formal.

Larsen un investigador en la matemática educativa se está enfocando nuevamente en el estudio del álgebra abstracta, mediante una nueva teoría y metodología, que si bien no puede aplicarse a todos los conceptos del álgebra abstracta por lo menos brinda un nuevo camino para comprender algunos conceptos del álgebra abstracta (Larsen, 2009).

1.2.1 Reflexión

Las investigaciones expuestas en los antecedentes están relacionadas ampliamente con nuestro tema de investigación, (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Dubinsky et al., 1994; Leron & Dubinsky, 1995; Brown et al., 1997), estas investigaciones se relacionan con los conceptos básicos de la teoría elemental de grupos (Dubinsky et al., 1994; Brown et al., 1997) para poder comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos, mientras que Weber & Larsen (2008) dan evidencia actual de que los estudiantes aún tienen dificultades con el aprendizaje del Álgebra Abstracta en particular con la teoría elemental de grupos.

Cabe mencionar que el análisis que se hizo en cada uno de estos antecedentes menciona o detallan algunos de los conceptos previos como función, conjunto, grupo y operación binaria que se requieren para nuestro concepto de investigación, el cual es la imagen de un homomorfismo de grupos.

Por ello estos trabajos son de suma importancia, ya que al analizarlos nos brindan la información que se requiere para iniciar nuestra investigación a fin de validar nuestro objetivo general.

1.3 Planteamiento del problema de investigación

1.3.1 Problemática

De acuerdo a CAPEM (Comité de Acreditación de los Programas Educativos en Matemáticas) un estudiante de licenciatura en matemáticas debe cursar por lo menos una materia con contenido de Álgebra Abstracta durante sus estudios. Debe de ver temas como teoría de grupos, teoría de anillos y campos.

Los estudiantes antes de tomar la materia de Álgebra Moderna estudian materias que son base para poder comprenderla, ejemplo de estas materias son Álgebra Superior conjuntos, lógica matemática, historia y filosofía de las matemáticas.

Pese a tomar cursos previos al de Álgebra Abstracta, tanto estudiantes como profesores admiten que su enseñanza y aprendizaje resulta difícil; los estudiantes muestran serias dificultades en el transcurso de su enseñanza, provocando en la mayoría de los estudiantes una ausencia de aprendizaje.

Dubinsky et al. (1994) afirman que:

> El Álgebra abstracta y la teoría de grupos en general presentan serios problemas educativos. La facultad de matemáticas y los estudiantes en general la consideran una de las materias más difíciles, pues parece dar a los estudiantes grandes dificultades para tratar con el contenido y el desarrollo de actitudes dirigidas hacia las matemáticas abstractas (p. 2)

Dubinsky et al. (1994) señalan que en un curso de Álgebra Abstracta los estudiantes deben de ir "más allá de comportamientos imitativos" para resolver un problema, en tales cursos deben enfrentarse con conceptos abstractos, trabajar con principios matemáticos y aprender a desarrollar demostraciones.

Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis (1994) señalan que la variedad de interpretaciones, los errores, falta de comprensión en los conceptos, las dificultades de pasar de un grupo modular a permutaciones de grupo, la no linealidad y el desarrollo de todos estos conceptos en la mente del estudiante – todas estas reacciones testifican el hecho que la construcción en la comprensión, o incluso en un principio al estudiar Álgebra Abstracta, está orientado a un evento principal en el desarrollo cognitivo de un estudiante de matemáticas

Leron & Dubinsky (1995) describieron al Álgebra Abstracta como una materia simplemente difícil para los estudiantes. Señalan que los estudiantes no van más allá por hacer esfuerzos necesarios y son reacios para tratar de comprender la materia. Mencionan que existe una conciencia mínima en el profesor de matemáticas sobre esta situación.

Por otra parte Siu, M-K (1998) menciona que la pertinencia y la abstracción, son puntos que requieren atención en la enseñanza de un curso de Álgebra Abstracta. El investigador cree que la ausencia de enseñanza en el Álgebra Abstracta está relacionada con la ausencia de estos dos puntos.

Selden & Selden (1987), describen la dificultad sobre el manejo en los contenidos y desarrollo en las actitudes hacia una mejor comprensión en Álgebra Abstracta. Por tal motivo se debe estar desarrollando estrategias pedagógicas que mejoren la enseñanza sobre álgebra abstracta.

Konyalioglu (2006) menciona que el Álgebra Abstracta se ha pensado tradicionalmente como uno de los cursos más difíciles debido a su naturaleza y particularmente muchos estudiantes tienen un primer encuentro de suma dificultad con la teoría de grupos. El concepto de grupo es un ejemplo de un nuevo objeto mental cuya construcción causa dificultades fundamentales en la transición a las matemáticas de la universidad.

Robert & Schwarzenberger (1991) señalan que una raíz de estas dificultades es histórica y epistemológica: "los problemas a partir de los cuales surgieron estos conceptos de manera esencial no son accesibles para los estudiantes que comienzan a estudiar.

Dubinsky et al. (1994) creen firmemente que las concepciones de conjuntos y funciones juegan un papel muy importante en el aprendizaje de grupo. Los estudiantes deben entender conjuntos no solo como procesos sino como objetos que pueden ser en sí mismos elementos de conjuntos y pueden ser operados por funciones. Los estudiantes deben entender las funciones como procesos - en particular, la restricción del proceso función al subconjunto de su dominio – a manera de ser capaz de construir la idea de la operación inducida por un grupo en un subconjunto.

Brown, A., Dubinsky, E., Devries, D. J., & Thomas, K. (1997) afirman que un análisis teórico de operación binaria se puede decir que en esencia es una función (de dos variables) y por lo tanto la descomposición genética será muy parecida a la descomposición genética del concepto función (Ver Breidenbach et al. 1992).

(Halford, 1982; Leskow and Smock, 1970; Bum, 1996), explican la comprensión de conceptos avanzados como operación binaria, grupo o subgrupo. Sin embargo, el Álgebra Moderna no tiene aún los enfoques instruccionales necesarios que permitan un camino certero de enseñanza. Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis (1994).

Por lo tanto la problemática es que la mayoría de los nuevos estudiantes en la Licenciatura de matemáticas tienen serias dificultades para comprender la materia de Álgebra Abstracta, al punto de repetir la materia y en casos extremos abandonar la escuela. Dicha materia está cargada de demostraciones matemáticas y conceptos abstractos los cuales son difíciles de comprender para los alumnos.

1.3.2 Problema

A través del análisis de la literatura anterior podemos ver que la gran parte de las investigaciones en Álgebra Abstracta se centran en la teoría elemental de grupos, donde se analizan los conceptos de grupo, subgrupo, clases laterales, grupo cociente, normalidad operación binaria, y en limitadas ocasiones hacen mención del concepto de homomorfismo como en Dubinsky (1996).

Findell (2001) en su tesis doctoral afirma que las investigaciones hechas sobre las dificultades en el aprendizaje y enseñanza en el Álgebra Moderna son pobres en relación con otras materias de matemáticas de nivel superior como lo son cálculo o análisis.

En palabras de Oktaç (2016) afirma que aún falta mucho por investigar en la materia del Álgebra Abstracta que ayuden a encontrar caminos pedagógicos o didácticos que ayuden a minimizar las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del Álgebra Moderna.

Al momento no se encontró literatura que haya trabajado o que se relacione con el tema de investigación propuesto en este trabajo, con ello no se asegura que como tal no haya investigaciones relacionadas, sin embargo después de una revisión minuciosa a revistas científicas no se encontró trabajos relacionados con la imagen de un homomorfismo entre grupos.

Una investigación que da principal sustento a nuestro problema es la de Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis (1994) quienes brindan un panorama general de las dificultades que tienen los estudiantes al momento de estudiar la teoría elemental de grupos de la materia de Álgebra Moderna; ésta permitió a nuestra investigación plantear el problema de indagar si los estudiantes tendrían dificultades o no en comprender otros temas distintos a la teoría elemental de grupos, como es el caso de la imagen de un homomorfismo entre grupos, ellos consideran que hay una falta de comprensión en los conceptos del Álgebra Abstracta, que incluso en un principio al estudiar Álgebra Moderna, está orientado a un evento principal en el desarrollo cognitivo de un estudiante de matemáticas.

1.3.3 Pregunta

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante de Álgebra Abstracta de Licenciatura en Matemáticas puede desarrollar para comprender el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos?

1.3.4 Objetivo general

Describir las estructuras y mecanismos mentales necesarios para que un alumno de la Licenciatura en Matemáticas pueda construir el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos.

1.3.5 Objetivos particulares

Dado que la pregunta de investigación involucra el estudio de las estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes para construir el concepto de imagen homomorfismo de grupos; los objetivos particulares que se desarrollarán serán los siguientes.

- Describir preliminarmente las estructuras y mecanismos mentales que se requieran para construir el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos.
- Caracterizar las construcciones de las estructuras y mecanismos mentales requeridos en la construcción del concepto de investigación.
- Validar o refinar la descomposición genética preliminar.

1.3.6 Justificación

Titova, S. (2007) menciona que:

> La importancia del Álgebra Abstracta y la teoría de grupos en particular, son temas ampliamente reconocidos. Dicha materia es de suma importancia para otras ciencias como la física, la computación o la química. Recientemente su importancia se ha acrecentado con investigaciones dirigidas hacia la enseñanza y aprendizaje del Algebra Abstracta (p. 19).

Se desea estudiar la problemática que presentan los estudiantes al tratar comprender la imagen de un homomorfismo de grupos debido a que los alumnos presentan serias dificultades al momento de estudiarlo. Se pudo observar que la mayoría de las investigaciones realizadas en álgebra abstracta se han enfocado a la teoría elemental de grupos o isomorfismos, pero muy poco a otros temas como la imagen de un homomorfismo, concepto que también está ligado a la teoría de grupos.

Así, la imagen de un homomorfismo entre grupos es un tema propio del Álgebra Abstracta, fue por ello que investigamos artículos, revistas, tesis, memorias y todo aquel documento de carácter científico que nos brindara información sobre este tema. Sin embargo, son casi nulas las investigaciones sobre este tema, la mayoría de las investigaciones en temas de Álgebra Abstracta están orientadas a otros conceptos de la teoría elemental de grupos e isomorfismos.

De tres décadas al momento podemos citar trabajos relacionados a la teoría elemental de grupos como: La enseñanza sobre los conceptos de grupo y subgrupo Konyalıoğlu, S. (2006), Brown, Devries, Dubinsky & Thomas (1997) en el Aprendizaje de operaciones binarias, grupos y subgrupos, y aprendizaje fundamental de conceptos en la teoría de grupos (Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994).

Desde finales del siglo XX hasta al momento todavía se tiene una gran dificultad en el aprendizaje-enseñanza del Álgebra Abstracta, que uno de los temas base de esta materia, la teoría de grupos, es muy difícil y que en muchas ocasiones los estudiantes solo desean pasar el curso para no volverlo a tocar.

En relación a isomorfismos podemos encontrar a Larsen, Sean P. (2013) en una teoría local instruccional para la reinvención guiada de los conceptos de grupo e isomorfismo, y Reinventando los conceptos de grupo e isomorfismo: el Caso de Jessica y Sandra (Larsen, Sean P. 2009).

Otros artículos científicos nos hablan sobre la historia del Álgebra Abstracta, los cuales ya nos datan las dificultades sobre el aprendizaje-enseñanza del Álgebra Abstracta; ejemplo de ello es Una historia del Álgebra Abstracta "La enseñanza del Álgebra Abstracta sigue difícil de enseñar, y esta gran verdad permanece independientemente de la calidad de las instrucciones empleadas" (Leron & Dubinsky., 1995).

Por ello, pese a la falta de investigación sobre la imagen de un homomorfismo entre grupos, las imágenes mostradas en la sección 1.2.2 que son las observaciones de las dificultades de estudiantes con el concepto de estudio del análisis teórico brindan evidencian de los problemas que tienen los estudiantes, y es por este motivo que deseamos analizar los mecanismos y estructuras mentales que deben desarrollar los estudiantes para construir tal concepto mediante la teoría APOE basada en la abstracción reflexiva de Jean Piaget, deseando que este trabajo abra las puertas a futuras investigaciones en la rama del Álgebra Abstracta.

Esperamos que al desarrollar esta investigación podamos detectar mediante los mecanismos mentales aquellas estructuras mentales que necesitan desarrollar los estudiantes para comprender el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos. El beneficio esperado es poder detectar las dificultades que tienen los alumnos al momento de comprender este concepto, con la finalidad de brindar en un futuro sugerencias pedagógicas, material instruccional o dar hincapié a nuevas investigaciones que brinden soluciones para estas dificultades de aprendizaje en el tema y en el Álgebra Abstracta en general.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se detallan los elementos teóricos de la investigación. Se describe cómo es que surgió la teoría, qué es la teoría APOE, cuáles son las estructuras mentales de acción, proceso, esquema y objeto que conforman la teoría APOE; así como los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, encapsulación, reversión, des-encapsulación, y tematización que permiten el desarrollo de estas estructuras mentales.

La elección de haber tomado esta teoría surge por dos razones principales. La primera se enfoca en que nuestro estudio es de corte cognitivo y la segunda es que estamos trabajando con un concepto matemático que se enseñan en el nivel superior y la teoría APOE atiende ambas razones (Dubinsky, 1994), aclarando que dicha teoría puede aplicarse a cualquier nivel académico matemático.

2.1 ¿Cómo surge la teoría APOE?

Una de las principales ideas de Piaget (como se citó en Arnon et al., 2014), fue la *abstracción reflexiva*, la cual se consideró como el mecanismo principal para el desarrollo del pensamiento y el mecanismo mental por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas son desarrolladas en la mente del individuo.

Según Piaget (1973), la abstracción reflexiva está conformada por dos partes, la primera involucra la ***reflexión,*** en el sentido de la conciencia y el pensamiento contemplativo, de reflejar contenidos y operaciones desde un nivel cognitivo inferior a uno superior. La segunda parte consiste en la ***reconstrucción y reorganización*** del contenido y de las operaciones en esta etapa superior, la cual da lugar a que las operaciones mismas se conviertan en contenido a las que se puedan aplicar nuevas operaciones.

Esta segunda parte le pareció a Dubinsky muy ligada a ciertas ideas matemáticas, pese a esto, no fue hasta 1982 que Dubinsky cambió su investigación en matemáticas (análisis funcional) a la investigación dentro de las actividades mentales involucradas en el aprendizaje de las matemáticas; lo cual detonaría como la teoría APOE.

Dubinsky interpretaría las fases del desarrollo cognitivo propuesto por Piaget en el tema de funciones como pasajes de un desarrollo cognitivo que comienza con Acciones (aplicaciones elementales) que son interiorizadas en procesos (covariaciones cuantificables operativamente) que después son encapsulados en objetos a los cuales se les pueden aplicar nuevas acciones (variación de variaciones). No sería hasta 1995 que esta colección de estructuras y mecanismos mentales serían introducidos, desarrollados, y comprendidos como los conocemos hasta el día de hoy.

Finalmente, la teoría APOE sería introducida y desarrollada por Dubinsky y su grupo de colaboradores llamado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1996), durante el periodo 1995-2003.

2.2 La teoría APOE

La Teoría APOE es principalmente un modelo para describir cómo los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos, es un marco de referencia utilizado para explicar cómo los individuos construyen mentalmente su comprensión de los conceptos matemáticos.

Piaget y García (como se citó en Arnon et al., 2014) mencionan que los sujetos dan sentido a los conceptos matemáticos al construir y usar ciertas *estructuras* mentales (o *construcciones*) las cuales son consideradas en la teoría APOE como *etapas* en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Estas estructuras emergen a través de la abstracción reflexiva la cual en la teoría APOE son los *mecanismos* mentales de: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, des-encapsulación, y tematización. Esta teoría emerge en ese intento de comprender la abstracción reflexiva introducida por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico y extender esta idea a conceptos matemáticos avanzados (Dubinsky, 1991a). Este tipo de abstracción es muy importante porque conduce al individuo a un tipo de generalización diferente, y da como resultado una nueva síntesis en medio de leyes particulares que adquieren nuevos sentidos (Dubinsky, 1991).

Por tanto, estos sentidos son acciones interiorizadas que se coordinan para formar nuevas acciones, y en última instancia formar nuevos procesos. Estas fases de desarrollo cognitivo llevaron a Dubinsky a pensar que la abstracción reflexiva podría ser una herramienta muy poderosa para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, al enfrentarlo a situaciones matemáticas que promuevan su reflexión.

En APOE a menudo encontraremos definiciones particulares de la teoría en sí misma. Un ejemplo de esto son los términos concepción y concepto; McDonald et al. (2000) (Como se citó en Arnon et al., 2014), hacen una distinción entre estos dos, aclarando que existe una relación entre ellos: Distinguimos concepción y concepto, el primero como algo intrapersonal (es decir, la idea o la comprensión que tiene el individuo de cierto conocimiento) y el último es algo comunitario (es decir, es un concepto acordado entre la comunidad de matemáticos).

Para una parte específica de un contenido matemático, la concepción se desarrolla como resultado de una actividad reflexiva. Por otro lado, el término concepto se refiere al entendimiento colectivo de ese término por la comunidad de matemáticos. El desarrollo de las concepciones que se alinean con un concepto es descrita en un modelo cognitivo al cual la teoría APOE llama descomposición genética del concepto.

Así en la descomposición genética podemos ver las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante requiere para construir el o los conceptos que desea comprender y que permiten al individuo enfrentar ciertas situaciones problemáticas matemáticas. Estas estructuras y su forma de ser construidas se describen a continuación y se ilustran con algunos ejemplos.

2.2.1 Estructuras y mecanismos mentales

Stenger et. al. (2008) (como se citó en Arnon et. al., 2014) describen los términos de estructura y mecanismo y la relación entre estos como:

> Una *estructura mental* es cualquier estructura relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) (es decir algo construido en la mente de una persona) que un individuo utiliza para darle sentido a una situación matemática. Una fuente para una estructura mental es una descripción de donde surge dicha estructura mental. Un *mecanismo mental* es el medio por el cual esa estructura podría desarrollarse en la mente(s) de un individuo o un grupo de individuos. (p. 98)

Dubinsky (1991) describió seis tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales – interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, desencapsulación y tematización que permiten la construcción de las estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema; los cuales describiremos a continuación y daremos algunos ejemplos.

2.2.1.1Estructura Acción de la teoría APOE

Una acción es una transformación dirigida externamente sobre un objeto u objetos previamente construidos. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación necesita ser desarrollado explícitamente y guiado por instrucciones externas; adicionalmente cada paso solicita el siguiente, esto es, los pasos de la acción no pueden ser imaginados y ninguno puede ser omitido.

Pese a que las acciones son las estructuras mentales más elementales, éstas son fundamentales para la teoría APOE. Una concepción acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras de nivel superior. En particular, los Procesos son acciones interiorizadas, y los objetos mentales emergen debido de las aplicaciones de las Acciones. Las nuevas acciones permiten el desarrollo de estructuras más complejas como los procesos y los objetos.

2.2.1.2 Estructura Proceso de la teoría APOE

Trigueros (2005) detalla *proceso* como:

> El proceso es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. El individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos, es decir, tiene más control sobre la transformación. Si una persona resuelve problemas y da muestras de utilizar transformaciones de tipo proceso, cuando el problema por tratar lo requiere, decimos que tiene una concepción proceso del objeto estudiado. (p. 9)

Aunque la Acción y el Proceso dado pueden involucrar la misma transformación, la diferencia entre el uno y el otro es: en la Acción, el individuo solo puede llevar a cabo la transformación (ya sea física o mentalmente) si cuenta con el estímulo externo; para un Proceso el estudiante puede llevar a cabo la transformación sin la necesidad de pasar por cada paso.

2.2.1.3 Estructura de Objeto de la teoría APOE

Cuando un individuo reflexiona en las operaciones aplicadas a un proceso particular, se da cuenta del proceso como un todo, puede observar que las transformaciones (ya sean acciones o proceso) pueden actuar sobre él, y es capaz de construir tales transformaciones, entonces el individuo está pensando este proceso como un objeto. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

Un individuo puede construir los objetos de dos maneras: el primero es encapsulando un proceso para que el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él; y la otra ocurre cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema (Trigueros, 2005) en cuyo caso se dice que el esquema es tematizado en un objeto.

2.2.1.4 Estructura de Esquema de la teoría APOE

Siguiendo la investigación de Trigueros (2005) podemos encontrar que el autor define a la estructura mental de Esquema de la siguiente manera:

> En la teoría APOE, un Esquema significa una construcción cognitiva que nos permite enfrentar un problema de Matemáticas. Se define un Esquema para una parte de las Matemáticas, como la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas de un individuo que están ligadas, consciente o inconscientemente, en un marco coherente en la mente del individuo y se pueden utilizar en una situación problemática que tiene relación con esa área de las Matemáticas. (p. 10)

Por lo tanto, los Esquemas son aquellas estructuras que contienen las descripciones, la organización, y las ejemplificaciones de las estructuras mentales que un individuo ha construido respecto a un determinado concepto matemático (Arnon, et al., 2014).

Trigueros (2005) considera importante definir que un esquema es una herramienta conceptual, una herramienta de análisis que permite distinguir e identificar ciertas características cuando los individuos resuelven problemas de matemáticas.

Piaget y García (1984) (como se citó en Trigueros, 2005) proponen que los esquemas evolucionan y para ello establecen tres fases en la construcción de las relaciones entre los elementos constitutivos del esquema. Ejemplifican estas etapas para las construcciones algebraicas, algunas geométricas y otras para la mecánica Newtoniana. En la etapa *Intra* se construyen las relaciones internas del objeto o fenómeno; en la etapa *Inter* el individuo constituye relaciones entre los objetos o fenómenos de conocimiento; y por último la etapa *Trans* el individuo puede trabajar con el esquema de una manera mucho más estructurada que cuando el esquema está en otras fases constitutivas, lo cual no quiere decir que el esquema permanece ya inmóvil, pues los esquemas siguen construyéndose y enriqueciéndose mediante la construcción de nuevas relaciones con otros objetos u otros esquemas.

Es importante aclarar que existen muchas maneras de concebir un esquema, ya que varios investigadores han utilizado en sus estudios la noción de esquema tomada de la obra de Piaget (Trigueros, 2005).

Cabe mencionar que la idea de esquema no ha progresado como otros tantos aspectos de la teoría APOE. Sin embargo, están convencidos de que el esquema es una parte importante de la imagen total de la teoría y se espera que sea mejor entendido a medida que avanza el trabajo de investigación en esta teoría (Dubinsky, 1991).

Al ir describiendo las estructuras mentales pudimos ir distinguiendo algunos mecanismos mentales, los cuales eran necesarios para ir construyendo una estructura mental superior; a continuación, se describirán los mecanismos mentales de la teoría APOE.

2.2.1.5 Mecanismo de Interiorización de la teoría APOE

Los procesos son construidos usando uno de los tres mecanismos mentales: la interiorización, la reversión y la coordinación. Cada uno de estos da origen a nuevos procesos. En Arnon et al. (2014) define interiorización de la siguiente forma:

> A medida que las acciones se repiten y se reflejan, el individuo deja de confiar en las señales externas para tener control sobre las acciones. Esto se caracteriza por la capacidad de llevar a cabo los pasos sin tener que realizar necesariamente cada uno explícitamente o poder saltarse movimientos, así como revertirlos. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental. (p. 20).

Se puede observar que los procesos son acciones interiorizadas, donde el estudiante puede sortear pasos de un algoritmo después de haber construido una acción, repetirla y reflexionarla.

2.2.1.6 Mecanismo de Coordinación de la teoría APOE

La coordinación al igual que la interiorización es otro mecanismo mediante el cual podemos crear un nuevo proceso, por ejemplo, dos procesos distintos que fueron construidos previamente P_A y P_B pueden ser coordinados para generar un nuevo proceso. Dentro de la teoría APOE este mecanismo está actualmente bajo investigación y se analiza cómo es que se lleva a cabo la coordinación dentro de la mente de un individuo. Se parte de la hipótesis que la coordinación de dos procesos, P_A y P_B, pueden considerarse como la aplicación de P_A a P_B; para ello es necesario que el individuo encapsule P_B en un objeto de tal manera que pueda ser aplicable a P_A, es decir que una vez hecho esto, la coordinación puede darse en dos distintas formas: en la primera que el objeto O_B sea asimilado mediante el proceso P_A o bien que el proceso P_A se acomode para que se ajuste el objeto O_B (ver figura 2.1) (Arnon, et al., 2014)

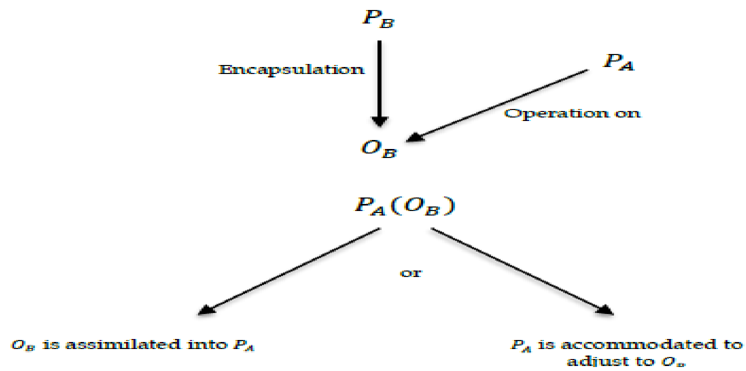


Figura 2.1. Coordinación de dos procesos P_A y P_B (Arnon, et al., 2014, p. 24).

2.2.1.7 Mecanismo de Reversión de la teoría APOE

Al igual que la interiorización y coordinación, la reversión es un mecanismo que permite crear un nuevo proceso. Se puede mencionar un gran número de actividades matemáticas que parecen involucrar la reversión de un problema: sustracción y división, la solución de una ecuación, invirtiendo una función o probando una desigualdad; muchas veces se puede pensar que la reversión puede ser revertir los pasos involucrados en el proceso, sin embargo esta reversión no es necesariamente seguir los pasos de un procedimiento del último al primero si no de construir una nueva serie de pasos de tal manera que te regrese al objeto original.

Para poder apreciar mejor este mecanismo Dubinsky (1991) presenta el surgimiento de un nuevo proceso mediante el mecanismo de reversión relacionado a la integración:

> Un estudiante puede haber interiorizado la acción de tomar la derivada de una función y puede ser capaz de realizar esto exitosamente mediante un gran número de ejemplos, utilizando varas técnicas que a menudo son enseñadas y ocasionalmente aprendidas en los cursos de cálculo. Si el proceso es interiorizado, el estudiante podría ser capaz de regresar a la solución del problema en el cual se da una función y se desea encontrar una nueva función cuya derivada sea la función original. (p. 107).

En aras de proporcionar una definición del mecanismo de reversión Dubinsky (1991) presentó varios ejemplos de este mecanismo, pues actualmente dentro de la teoría APOE se está trabajando en analizar cómo es que la reversión actúa en la mente de los individuos para crear nuevos procesos.

2.2.1.8 Mecanismo de Encapsulación de la teoría APOE

En Dubinsky et al. (2005a) (como se citó en Arnon et. al., 2014) la encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una acción a un proceso, es decir, ve a una estructura dinámica (un proceso) como una estructura estática, a la cual acciones y otros procesos pueden ser aplicados. Ellos ofrecieron la siguiente explicación:

> Si uno se da cuenta del proceso como una totalidad, sabrá que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y que puede construir tales transformaciones (explícitamente o en su imaginación) entonces decimos que un estudiante a encapsulado el proceso en un *objeto* cognitivo. Por ejemplo, para el concepto función, la encapsulación permite aplicar transformaciones a las funciones como la formación de conjunto de funciones, definir operaciones aritméticas en tales conjuntos, equipararlo con alguna topología, etc. (p. 339).

En general, el mecanismo de encapsulación para generar objetos es la que causa mayor dificultad, y hasta la fecha no hay muchas estrategias pedagógicas que sean efectivas para ayudar a los estudiantes a desarrollar este mecanismo mental. Una parte de esta ineficiencia es que hay muy poca experiencia (y en su caso cuando lo hay) en que el individuo realiza acciones sobre lo que se interpreta como procesos. (Dubinsky, 1991, p. 8).

Estudios realizados dentro de la teoría APOE como el de Clark et al. (2007) (como se citó en Arnon et al., 2014), dan evidencia de la idea que Dubinsky menciona en el párrafo anterior, cuando estudian la concepción de los estudiantes del teorema fundamental de la estadística, ellos no podían ir más allá de una concepción proceso de la media. Aunque los estudiantes podían realizar las acciones necesarias, describir los procesos y en algunos casos hasta revertir los procesos, los estudiantes parecían no poder concebir la media de un conjunto de datos con una entidad por sí misma.

2.2.1.9 Mecanismo de Des-encapsulación de la teoría APOE

Una vez que un proceso ha sido encapsulado en un objeto mental, éste puede ser des-encapsulado, cuando sea necesario para volver a su proceso de origen. En otras palabras, mediante el mecanismo de des-encapsulación un individuo puede regresar al proceso que dio origen al objeto (Arnon, et al., 2014).

2.2.1.10 Mecanismo de Tematización de la teoría APOE

Los esquemas por sí mismo pueden ser tratados como objetos y ser incluidos en la organización de un esquema de “un nivel más alto”. Cuando esto sucede, decimos que el esquema ha sido tematizado a un objeto (Asiala, et al., 1996).

La construcción de un esquema como un objeto mental es alcanzada a través del mecanismo de tematización. Este mecanismo permite al individuo aplicar transformaciones ya sean acciones o procesos a la estructura de esquema (Arnon, et al., 2014).

Solo hay un estudio en la teoría APOE relacionado en la Tematización de un esquema el de (Coley et al., 2007) (como se citó en Arnon et al., 2014). En este estudio se analizó el éxito de los estudiantes de cálculo al graficar una función y construir algunas relaciones de las funciones con la primera y la segunda derivada, límites y continuidad. Los estudiantes fueron entrevistados para ver si habían podido tematizar el esquema de gráfica en Cálculo. El análisis de la información se centró en la coordinación de las diferentes propiedades e intervalos dados a los individuos para determinar las posibles agrupaciones mentales dentro de sus esquemas y la habilidad para acceder a las partes del esquema cuando era requerido.

De 28 estudiantes entrevistados, solo una dio evidencia de haber tematizado el esquema de gráfica. Ella pudo describir qué propiedades de la función permanecieron sin cambios cuando se introdujeron cambios al problema. Y explicó en detalle los efectos sobre el gráfico resultante, es decir, ella mostró que el esquema era un objeto para ella.

2.2.1.11 Estructura de Totalidad de la teoría APOE

Actualmente hay una discusión sobre una posible nueva estructura mental llamada *totalidad*, la cual podría estar entre las estructuras proceso y objeto. En este punto la etapa totalidad es solo una cuestión tentativa. Aun así, si la totalidad llegase a determinarse falta descubrir el mecanismo mental que la generaría. Recientemente se han llevado a cabo investigaciones donde se sugiere que esta estructura mental podría aparecer, (Weller, et al. 2009, 2011; Dubinsky, et al. 2013) (como se citó en Arnon et al., 2014) sin embargo hasta la fecha los investigadores creen que aún falta evidencia para poder incluir esta estructura y su mecanismo dentro de la teoría APOE. En la figura 2.2 se puede apreciar la teoría APOE con esta nueva estructura; enfatizando el hecho de que el mecanismo aún no aparece, pues no se sabe con exactitud cuál sería el mecanismo que la generaría.

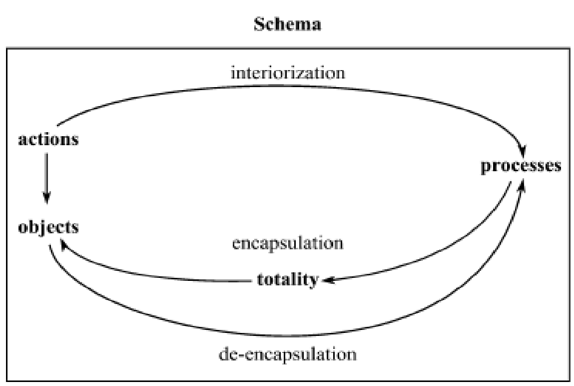


Figura 2.2. La teoría APOE con la estructura mental de Totalidad (Arnon, et. al., 2014, p. 141).

2.2.2 Relación entre las estructuras y mecanismos mentales

Dubinsky (1991) describió seis tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales – interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, desencapsulación y tematización - que permiten la construcción de las estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La figura 2.3 ilustra la relación entre estas estructuras y estos mecanismos, la etapa esquema es omitida porque se entiende como todo el cuadro, es decir, como el conjunto de todas las estructuras y mecanismo mentales relacionados con un contenido matemático específico.

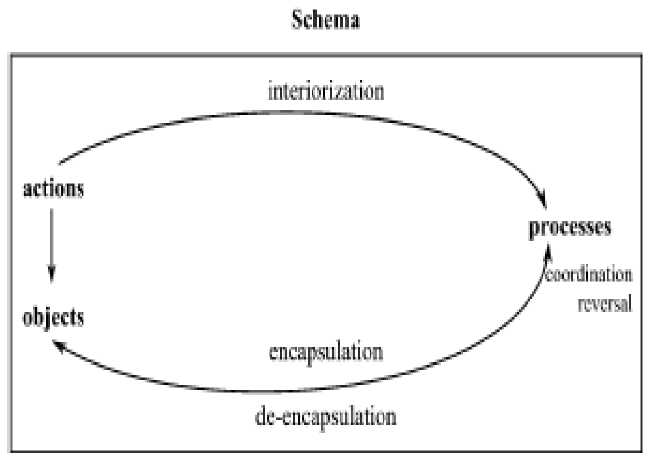


Figura 2.3. Mecanismos y Estructuras mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon, et. al., 2014, p. 18).

En Asiala et al. (1996) (Como se citó en Arnon et. al., 2014) se describe esta interacción de la siguiente manera:

> Consideramos que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físico o mentalmente previamente construidos para formar acciones; así las acciones son interiorizadas en procesos los cuales después son encapsulados en objetos. Estos objetos pueden ser des-encapsulados para regresar a los procesos mediante los cuales se originaron. Finalmente, las acciones, procesos, objetos y otros esquemas pueden ser organizados en un esquema. (p. 9).

La profundidad y la complejidad en la comprensión de un concepto por parte de un individuo dependen de su habilidad para establecer conexiones entre las estructuras que lo constituyen.

De acuerdo a la teoría APOE, los individuos tratan con situaciones problemática en matemáticas mediante la construcción y la aplicación de estructuras mentales en su esfuerzo por entender los conceptos matemáticos. Esto involucra la transformación (vía acciones o procesos) estableciendo previamente estructuras, y así estas transformaciones se convierten en objetos por el mecanismo de encapsulación.

La teoría APOE está basada en la premisa que un individuo puede llegar a entender algún concepto matemático si ha sido capaz de construir las estructuras previas que se requieren para comprender dicho concepto (Dubinsky, 1991).

Cada una de las estructuras mentales que constituyen la teoría APOE se construye mediante un mecanismo mental: una acción es *interiorizada* en un proceso, un proceso es *encapsulado* en un objeto cognitivo, un proceso puede ser *revertido* para construir otro proceso, dos procesos pueden ser *coordinados* para formar un nuevo proceso, y un esquema puede ser *tematizado* en un objeto cognitivo.

Las construcciones del conocimiento matemático descritas mediante estas estructuras y mecanismos ilustran como las formas más básicas de construir son fundamentales para construir estructuras más complejas. Las estructuras y los mecanismos mentales por los cuales están construidos los conceptos implican un enfoque en espiral donde las nuevas estructuras son construidas mediante la transformación de las antiguas estructuras a las cuales se les aplicaron las acciones. Según Dubinsky (1991) la relación general entre estos elementos se consideró como un sistema de retroalimentación circular.

Así mismo Dubinsky (1997) refiriéndose a las ideas de Piaget escribió que:

> Los objetos, una vez construidos, se pueden transformar para realizar acciones de niveles superior, y luego llevar a cabo procesos, etc. Esto puede continuar indefinidamente. Además, cualquier acción, proceso, u objeto puede ser reconstruido, como resultado de la experiencia en una nueva situación problemática en un plano elevado, es decir, interiorizar acciones más sofisticadas y encapsular procesos más ricos. La construcción de un nivel inferior que se realizó no se deja de lado, sino que permanece como parte de la concepción enriquecida. (p. 98).

En la figura 2.4 Se ilustra el esquema que permite ver cómo es que la construcción del nuevo conocimiento enriquece al conocimiento con el que se comenzó:

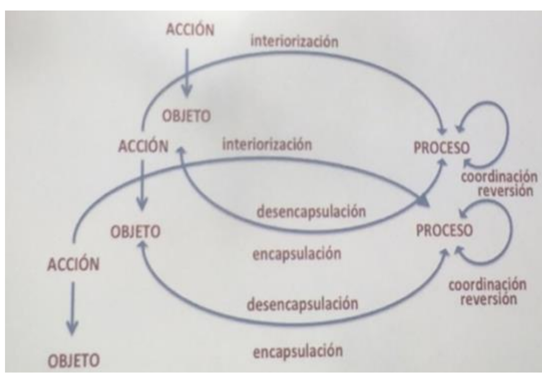


Figura 2.4. Esquema en espiral de las estructuras y mecanismos mentales (Montelongo, 2016).

El marco teórico de la teoría APOE propone un desarrollo cognitivo mediante estructuras y mecanismos mentales que permiten a un estudiante comprender un nuevo tema. Esta teoría se basa en la abstracción reflexiva propuesta por Piaget (1975/1985), quien afirma que la abstracción reflexiva es la base para la construcción de todas las estructuras lógico matemático. Este conocimiento no es observable y es el individuo quien lo construye en su mente a través de las relaciones con los objetos, aclarando que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, ya que la experiencia no proviene de los objetos sino de la acción sobre los mismos.

La teoría APOE servirá para entender en qué consisten las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante requiere para comprender un concepto. El marco teórico será una guía de cómo es que se relacionan dichas estructuras y mecanismos mentales en el desarrollo cognitivo del alumno y proporcionará la información de que estructuras y mecanismos mentales requerirá el estudiante para comprender el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos.

Capítulo 3. Metodología

Según Arnon et al. (2014):

> La posición de investigación general vinculada a la teoría APOE se conoce como paradigma, ya que (1) difiere de la mayoría de las investigaciones en educación matemática en su enfoque teórico, metodología y tipos de resultados ofrecidos; (2) contiene componentes teóricos, metodológicos y pedagógicos que están estrechamente vinculados entre sí; (3) continúa atrayendo a investigadores que consideran útil responder preguntas relacionadas con el aprendizaje de numerosos conceptos matemáticos, y (4) continúa proporcionando preguntas abiertas que la comunidad investigadora debe resolver (p. 94).

Esta investigación es de corte cualitativo, y en palabras de Dubinsky (1996), los estudios en APOE son principalmente de este corte donde se incluyen entrevistas de los estudiantes sobre cómo están pensando, conforme se esfuerzan para describir un problema o situación matemática.

Un proyecto de investigación y/o desarrollo curricular basado en APOE involucra tres componentes: *análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción y la colección y análisis de la información.* Estas tres componentes conforman el ciclo de investigación de la teoría APOE (ver figura 3.1).

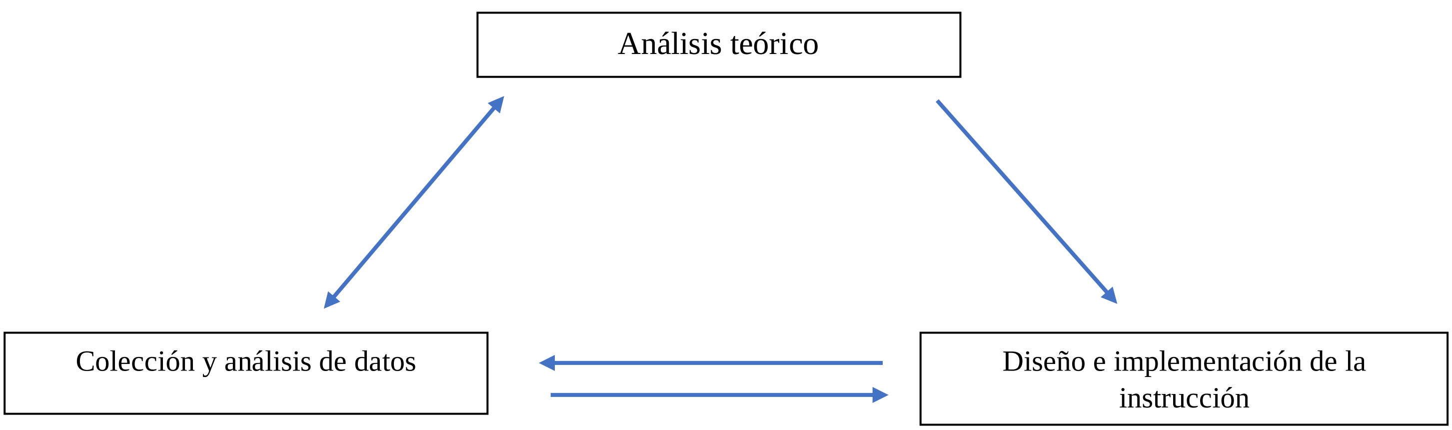


Figura 3.1. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2004, p. 94).

Como se observa en las flechas del ciclo las tres componentes del ciclo de investigación se influyen mutuamente. El análisis teórico impulsa el diseño y la implementación de la instrucción a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlos en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos. Una variedad de estrategias pedagógicas como el aprendizaje cooperativo, la resolución de problemas en grupos pequeños e incluso algunas conferencias pueden ser muy efectivas para ayudar a los estudiantes a aprender las matemáticas en cuestión. La implementación de la instrucción brinda una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos, que se lleva a cabo utilizando la lente teórica de la teoría APOE.

Sin embargo debe saberse que no todos los estudios que se adaptan a la teoría APOE como marco teórico usan todos los elementos del paradigma mencionados anteriormente. Dependiendo del proyecto en particular, las razones pueden ser metodológicas o prácticas y sería impráctico considerar todas las variaciones en que se puede usar el paradigma APOE en la investigación de la educación matemática. Lo que estamos describiendo como metodología del marco de referencia en este capítulo puede ser considerado como una organización "ideal" de un estudio de investigación basado en APOE.

De acuerdo a nuestra investigación tendremos que prescindir del ciclo de investigación de la teoría APOE como tal, como se menciona en el párrafo anterior, nuestros instrumentos para evaluar nuestra descomposición preliminar serán modificados.

Estos instrumentos serán modificados debido a variables como el tiempo, ya que el diseñar e implementar una instrucción en la segunda componente mediante El Ciclo de Enseñanza Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios por sus siglas en inglés ACE suele consumir demasiado tiempo en su desarrollo y esto podría impedir que se pueda llevar a cabo el trabajo de investigación en tiempo y forma. Por lo tanto nuestra metodología estará basada en el *ciclo de investigación modificado* de la teoría APOE (ver figura 3.2).

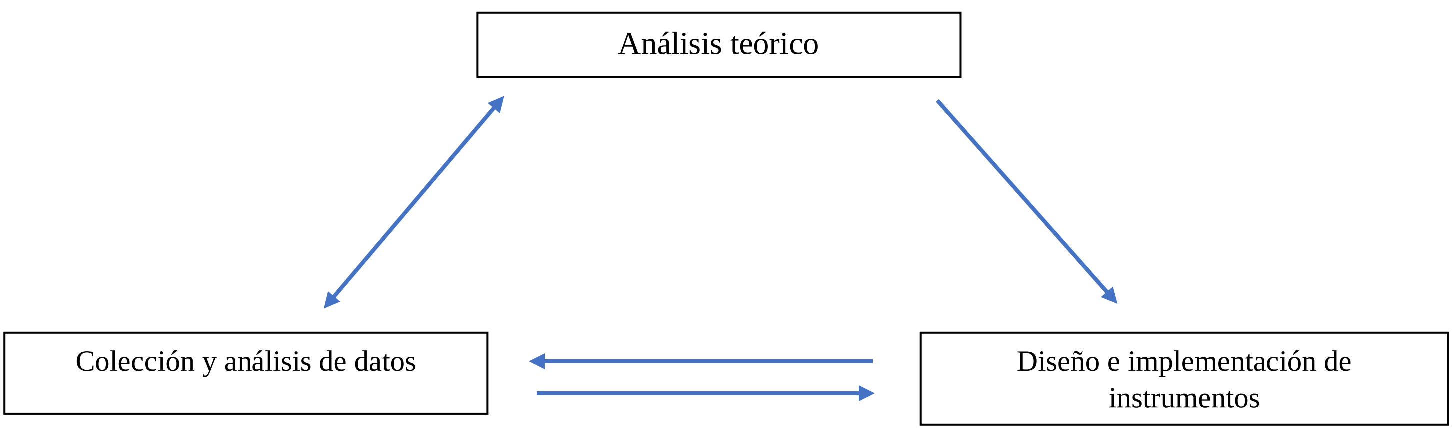


Figura 3.2. Ciclo de Investigación Modificado (Arnon et al. 2014).

Obsérvese que el ciclo de investigación de la figura 3.1 cambió respecto al ciclo de investigación de la figura 3.2 previamente ilustrada sobre la segunda componente, es decir sobre el diseño e implementación de la instrucción a instrumentos.

Según este paradigma, la investigación comienza con un **análisis teórico** de la cognición del concepto matemático en consideración. Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto. Una descomposición genética es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que un individuo puede hacer para construir su propio entendimiento del concepto matemático.

3.1 Fase 1. Análisis Teórico

A continuación, se describirá el análisis teórico de la investigación bajo la teoría APOE. Se explicarán los elementos que se consideraron para el diseño del análisis teórico del concepto de imagen de un homomorfismo de grupos con el fin de construir una descomposición genética preliminar dejando ver la primera componente del ciclo de investigación de la teoría.

¿Qué es una descomposición Genética preliminar?

De acuerdo con Arnon et al. (2014) una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico. Típicamente comienza como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigaciones publicadas previamente sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto. Hasta que se pruebe experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se le conoce como *descomposición genética preliminar*.

Una descomposición genética no es única

Una descomposición genética preliminar puede surgir de varias maneras, para un concepto particular se basa en la comprensión matemática del concepto por parte de los investigadores, sus experiencias como docentes, investigaciones previas sobre el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto, perspectivas históricas sobre el desarrollo del concepto y / o un análisis de textos o materiales de instrucción relacionados con el concepto. Otras son diseñadas a partir de datos de investigaciones anteriores sobre educación matemática, no necesariamente realizados utilizando la teoría APOE, sobre las dificultades de los estudiantes para aprender un concepto en particular (Arnon et al., 2014).

Hay descomposiciones genéticas basadas en datos de observaciones de estudiantes que están aprendiendo un concepto matemático, otras pueden basarse en el desarrollo histórico del concepto.

Los materiales de texto también pueden informar el diseño de una descomposición genética preliminar. Específicamente, para un concepto dado, el enfoque didáctico utilizado en el texto puede ayudar a los investigadores a determinar cómo los estudiantes pueden llegar a comprender el concepto

Uso de la descomposición genética

Cuando se utiliza una descomposición genética, diferentes investigadores pueden analizar los mismos datos y obtener resultados comparables. Trabajando en equipo, pueden interpretar sus resultados en términos del modelo. Sin un modelo, podrían tener dificultades para acordar o negociar sus interpretaciones. Por lo tanto, el análisis de los datos se vuelve más confiable cuando se basa en un modelo teórico como la descomposición genética. En seguida se muestra la descomposición genética preliminar realizada para obtener la imagen de homomorfismo entre grupos.

3.1.1 Elementos para el análisis teórico

En nuestra investigación decidimos analizar las estructuras y mecanismos mentales que muestran los alumnos al estudiar el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos. Con el objetivo de diseñar una descomposición genética preliminar que responda a las preguntas *¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales necesarios para que un alumno pueda comprender el concepto?, ¿y cuáles son los elementos previos que un alumno necesita poseer para enfrentar de manera exitosa el concepto función de imagen de un homomorfismo de grupos?*

En esta investigación describimos cada uno de los elementos considerados para la descomposición genética preliminar que conforman parte de la primera componente del ciclo de investigación. Estos elementos son la forma de detallar cómo es que se llevó a cabo la descomposición genética preliminar para responder a nuestras preguntas de investigación.

A continuación, se describen cada uno de los elementos que tomamos en cuenta para nuestro análisis teórico.

3.1.1.1 Revisión de los libros de Álgebra Abstracta

Nuestro análisis de libros de textos está basado en las fuentes documentales del plan analítico de la Unidad Didáctica de Álgebra Abstracta I que se imparte en la Unidad Académica de Matemáticas dependiente de la Universidad Autónoma de Zacatecas “Francisco García Salinas”. Los libros utilizados por la institución son Herstein (1986) y Fraleigh (1987) de álgebra moderna y álgebra abstracta respectivamente.

Nos guiamos en este plan didáctico porque nuestra investigación se realizó sobre las dificultades de aprendizaje que han mostrado los estudiantes en la imagen de un homomorfismo de grupos de dicha Universidad en el ciclo escolar agosto diciembre de 2018, además es la manera en como el docente aborda el tema.

Una característica importante de la teoría APOE, es que como instrumento, tanto de investigación como de enseñanza, es necesario pensar en los conceptos desde la propia matemática (Trigueros, 2005). Por tal motivo, es importante analizar las definiciones que deben tener los estudiantes e investigar el conocimiento matemático que logran construir.

Enseguida mostraremos las definiciones del concepto de imagen de un homomorfismo de grupos y la definición de homomorfismo de grupos de los libros utilizados por los estudiantes que harán parte de la experimentación.

Fraleigh (1987) en el capítulo 13 sesión 13.1 llamada definición y propiedades elementales comienza dando la definición de homomorfismo de la siguiente manera:

(Fraleigh, 1987). Una transformación $\emptyset$ de un grupo *G* en un grupo *G´* es un ***homomorfismo*** si

$$(ab)\,\emptyset = (a\emptyset)(b\emptyset)$$

Para todos los elementos *a* y *b* en *G*.

Inmediatamente después de dar la definición hace la siguiente aclaración:

> Examinemos la idea que está detrás de la condición $(ab)\,\emptyset = (a\emptyset)(b\emptyset)$ para que $\emptyset$: *G* ---> *G´* sea homomorfismo. Esta condición es lo único que distingue a un homomorfismo de una simple transformación de *G* en *G´*. Asegura que $\emptyset$ es *una transformación que relaciona estructuras.* La estructura algebraica de *G* está por completo determinada por la operación binaria en *G*, y la de *G´* está por completo determinada por la operación binaria *G´*. En la condición $(ab)\,\emptyset = (a\emptyset)(b\emptyset)$, la operación de *a* con *b* en el lado izquierdo ocurre en *G*, mientras que la operación de $(a\emptyset)$ con $(b\emptyset)$ del lado derecho, ocurre en *G´*. Así, la condición para ser homomorfismo relaciona la estructura de *G* con la de *G´* (Fraleigh, 1987, p. 130).

Aunque el propósito del autor es hacer notar que las operaciones a cada lado de la igualdad son diferentes, esto por lo general se convierte en una dificultad en los estudiantes; ya que no pueden diferenciar que son operaciones diferentes, es decir la notación confunde al estudiante.

Por lo general el docente tiene que cambiar la notación a la que está acostumbrada el estudiante para que sea accesible la definición de homomorfismo de grupos, un ejemplo de ello es el que nos proporcionó la Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos maestra que impartió la materia de Álgebra Abstracta durante el semestre agosto – diciembre 2019.

La Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos utiliza la definición de homomorfismo presentada en la figura 3.3:

HOMOMORFISMO DE GRUPOS

Sean $\langle G,*\rangle$ y $\langle H,\ \cdot\rangle$ dos grupos, un **homomorfismo** ϕ de G a H es un aplicación que satisface

$$\phi: G \to H$$

$$\phi(x * y) = \phi(x)\cdot\phi(y)$$

Figura 3.3. Definición de homomorfismo de las notas Jiménez (s.f.).

Véase que la Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos a diferencia de Fraleigh (1987), manifiesta a cado lado de la igualdad $\emptyset(x * y) = \emptyset(x)\cdot\emptyset(y)$ una notación diferente para hacer notar que la operación al lado izquierdo de la igualdad es diferente de la operación al lado derecho.

No obstante en Fraleigh (1987) el concepto de *“transformación”* el autor lo entiende igual que función; pusimos cuidadosa atención en aclarar que el autor entiende los dos conceptos por igual en el libro, ya que en ocasiones el estudiante se confunde al leer transformación y no función.

Esta afirmación la podemos encontrar en el capítulo 4 sobre permutaciones en la sección 4.1 de funciones y permutaciones, donde el autor define función como en la figura 3.4:

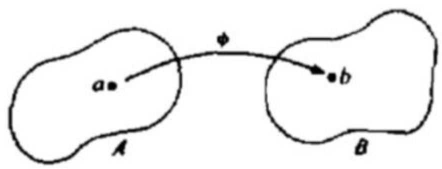


Figura 3.4. Representación de una función o transformación (Fraleigh, 1987).

> Una ***función*** o ***transformación*** $\emptyset$ ***de un conjunto*** A $\boldsymbol{en\ un\ conjunto\ de}$ B es una regla que asigna a cada elemento a de A exactamente un elemento b de B. *Se dice que* $\emptyset$ ***transforma*** *a* ***en*** *b (o que* $\emptyset$ **lleva** *a* **en** *b) y que* $\emptyset$ ***transforma*** *o* ***lleva*** *A en B* (Fraleigh, 1987, p. 38).

Comúnmente los estudiantes hacen notar una dificultad con esta definición, ya ellos están acostumbrados a usar la notación clásica de función f(x), g(x), h(x) (que se lee f de x, h de x, g de x), en cambio el autor usa la notación x(f), x(h), x(g). Esta mención se hace en la página 38 del capítulo 4 sección 4.2 como se muestra a continuación.

La notación clásica para denotar $\emptyset$ lleva a en b es

$$\emptyset(a) = b$$

Sin embargo, con frecuencia usaremos la notación

$$a\emptyset = b$$

También se encuentra en la literatura la notación $a^{\emptyset} = b$. El elemento de b es la **imagen de** a **bajo** $\emptyset$. El hecho de que $\emptyset$ lleva A en B se representará simbólicamente por

$$\emptyset: A \ \rightarrow B$$

Será útil para el estudiante considerar una función en términos de la figura 3.4. De las tres notaciones posibles dadas después de la definición que expresan que $\emptyset$ lleva a en b, el estudiante conoce la notación $\emptyset(a) = b$ por cursos anteriores.

Por último, señalemos que para $\emptyset: A \ \rightarrow B$, el conjunto de A es el **dominio de** $\emptyset$; el conjunto de B es el **codominio de** $\emptyset$ y el conjunto de $A\emptyset = \ \{a\emptyset \mid a \in A\}$ es la **imagen de** A **bajo**$\emptyset$**.**

Para el caso del concepto concerniente a esta investigación (Fraleigh, 1987, p. 132) define imagen de un homomorfismo de grupos como:

Sea $\emptyset$ una transformación de un conjunto X en un conjunto Y y sea $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. La **imagen** $A\phi$ ***de A en*** Y ***bajo*** ϕ es $\{a\phi \mid a \in A\}$. La ***imagen inversa*** $B\phi^{-1}$ ***de*** B ***en*** Y es $\{x \in X \mid x\emptyset \in B\}$.

Después de dar la definición inmediatamente se proporciona un teorema con algunas características estructurales preservadas bajo un homomorfismo aun así no se da ningún ejemplo de la imagen de un homomorfismo de grupos.

Al hacer un análisis de la definición podemos ver que el autor menciona que $\emptyset$ es una transformación de un conjunto X en un conjunto Y. El decir que $\emptyset$ es una transformación de un conjunto el estudiante puede confundirse con que $\emptyset$ no es una función.

La Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos[1] en sus clases, gracias a su amplia experiencia, da una definición de imagen de un homomorfismo de grupos la cual parece ser más accesible didácticamente a los estudiantes (ver figura 3.5).

Sea e el neutro de G y e' el neutro de H, entonces

$$Ker(\phi) = \{ g \in G \mid \phi(g) = e' \}$$

$$Im(\phi) = \{ h \in H \mid h = \phi(g) \text{ para algún } g \in G \}$$

Figura 3.5. Definición de imagen de homomorfismo de las notas de Jiménez (s.f.).

A primera vista la definición de la Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos difiere a la de Fraleigh (1987) sin embargo ambas definiciones derivan en el mismo resultado, no obstante la Doctora ha detectado un aprendizaje efectivo en sus estudiantes al usar esta definición que da el libro.

Parte fundamental del análisis de este proyecto es la definición de grupo, la cual dice Un grupo $< G,* >$ es un conjunto G junto con una operación binaria $*$ en G, tal que se satisface los siguientes axiomas (Fraleigh, 1987, p. 19):

1. La operación binaria $*$ es asociativa.
2. Existe un elemento e en G tal que $e * x = x * e = x$ para todas las $x \in G$.
   Para cada a en G existe un elemento a' en G con la propiedad de que $a' * a = a * a' = e$. (El elemento a' es un ***inverso de*** a ***respecto a*** $*$.

No obstante al mostrar otras notas distintas al libro debemos dejar en claro que no es nuestro deseo afirmar que el estudiante debe dejar del lado el libro de Fraleigh (1987), por el contrario, nuestra pretensión es que se acerque más a la literatura establecida por la institución, pues

[1] Las notas de la doctora Patricia Eugenia Jiménez Gallegos son usabas bajo su consentimiento.

recordemos que esto es solo un análisis de la bibliografía que se utiliza en dicha institución mencionada anteriormente en la materia de Álgebra Abstracta I.

Por su parte Herstein (1986) define homomorfismo en el capítulo 2 en la sección 7 como una aplicación ∅ de un grupo *G* en un grupo *G´* se dice que es *homomorfismo* si para *a, b* que pertenecen a *G* cualesquiera siempre se tiene ∅ (*ab*) = ∅ (*a*) ∅ (b).

Seguida de esta definición al igual que Fraleigh (1987), se menciona la diferencia de la operación que existe a cada lado de la igualdad ∅ (*ab*) = ∅ (*a*) ∅ (b). Esto lo podemos ver en el siguiente párrafo.

Nótese que en el primer miembro de esta relación, es decir, en el término ∅ (*ab*), el producto *ab* se calcula en *G* usando el producto de elementos de *G*, mientras que en el segundo miembro de la relación, es decir, en el término ∅ (*a*) ∅ (b), el producto es el de elementos de *G´* (Herstein, 1986).

Revisando esta advertencia podemos destacar que Herstein (1986) hace notar la palabra *producto* la cual puede llegar a confundir al estudiante con la operación de multiplicación. Otro aspecto relevante es que el autor no hace mención explícitamente de que la operación del lado izquierdo de la igualdad ∅ (*ab*) = ∅ (*a*) ∅ (b) es diferente de la operación del lado derecho, aunque lo mencione no puede llegar a ser muy claro para el estudiante como es en el caso de las notas de la Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos la cual utiliza caracteres diferentes para denotar la diferencia de operaciones a cada lado de la igualdad.

Inmediatamente después de la aclaración del autor sobre la relación ∅ (*ab*) = ∅ (*a*) ∅ (b) y antes de proseguir con otra definición se dan una serie de seis ejemplos, comenzando con el ejemplo cero hasta llegar al ejemplo 5, y al final solo se da un lema relacionado con homomorfismo con su respectiva demostración.

Continuando con el análisis de Herstein (1986) a diferencia de Fraleigh (1987) no se da como tal una definición de lo que es la imagen de un homomorfismo de grupos. Este aspecto es de suma importancia para nuestra investigación ya que de entrada los alumnos tienen dificultades en el aprendizaje de este concepto, y más aún podemos ver que en una de las fuentes bibliográficas que llevan las estudiantes propuestas por la institución no se describe de manera clara la definición de imagen de un homomorfismo de grupos.

Pese a ello Herstein (1986) mención de la imagen de un homomorfismo de grupos implícitamente mediante el Lema 2.15 descrito en el capítulo 2 sección 7 de homomorfismo de grupos de la página 63 que dice:

Lema 2.15 *Si ∅ es un homomorfismo de G en G´ de núcleo K, entonces K es un subgrupo normal de G.*

Después de dar este lema y proporcionar su demostración, se brinda otro lema ligado a homomorfismo de grupos sin dar ningún ejemplo del núcleo o imagen de este concepto. Posteriormente se da otra definición y ya.

A diferencia del libro de Fraleigh (1987) en lo que respecta a la definición de homomorfismo de Herstein (1986), el autor da 5 ejemplos mientras que Fraleigh (1987) solo da uno, ambos libros tratan de mencionar la diferencia de las operaciones que existen entre los grupos que involucran al homomorfismo, sin embargo Fraleigh (1987) brinda una definición explicita de imagen de un homomorfismo de grupos careciendo de ejemplo pero Herstein (1986) ni siquiera describe ninguna definición y mucho menos menciona algún ejemplo.

De manera sustancial la diferencia entre las definiciones de Fraleigh (1987) y Herstein (1986) es que este último da menos ejemplos y su definición parece ser más compleja.

En el libro de Fraleigh (1987), el objetivo del autor es proporcionar un texto a partir del cual el estudiante medio de matemáticas adquiera en un primer curso la mayor exhaustividad y profundidad posibles en el estudio del álgebra abstracta, excluyendo al álgebra lineal.

El autor menciona que el estudiante de nivel medio tiene dificultad para entender la razón de iniciar el estudio formal de resultados que ya conoce hace años. En vista de ello, Fraleigh (1987) propone dos maneras de adquirir el conocimiento de las aplicaciones de la teoría de conjuntos: estudiarla *per se* o sumergirse en ella y usarla según sea necesario. Ya que desde el punto de vista del autor los alumnos se desalientan con el estudio de los <<prerrequisitos de teoría de conjuntos>> al inicio de un curso de álgebra.

La estructura pedagógica de los temas está dada por una sección introductoria acerca del papel de las definiciones en matemáticas, al inicio de cada tema el autor da una definición del concepto a tratar, seguida de la definición se describe un teorema que se relacione con el concepto cuando esto es posible y al final se da uno o varios ejemplos del tema en cuestión.

Al finalizar la unidad, en el libro se proponen una serie de ejercicios en dos grupos separados por una horizontal, los que se encuentran en la parte superior se recomiendan para un grupo medio, el autor menciona que estos estudiantes medios son aquellos alumnos que aún no pueden resolver ejercicios con demostraciones o con un grado de dificultad mayor, es decir, los alumnos pueden resolver los ejercicios del primer grupo separados por la horizontal, que son los primeros ejercicios propuestos por el autor que significan relativamente fáciles y aquellos ejercicios que implican cálculos procedimentales.

Así, se puede afirmar que los ejercicios del primer grupo son sobre todo de cálculos, y los estudiantes medios están completamente perdidos frente a una serie de ejercicios que comienzan con las palabras *probar* o *demostrar*.

Los ejercicios del segundo grupo a menudo incluyen varios ejercicios que requieren demostración, así como algunos problemas adicionales de mayor complejidad donde se calcula.

Debido a que el autor desea promover una actitud matemática positiva, algunos ejercicios, en particular al principio del texto, son de naturaleza un tanto matemática. Al final del libro hay respuestas o comentarios acerca de casi todos los ejercicios que no requieren demostraciones.

Las demostraciones que se solicitan en los ejercicios no están dadas en las respuestas; no creo que sea pedagógicamente sensato tener a la mano dichas demostraciones (Fraleigh, 1987).

En el libro de Herstein (1986) el autor menciona que el origen del libro parte de un curso del año académico 1959 – 1960 en la Universidad de Cornell. Los asistentes al curso fueron en su mayoría estudiantes de segundo año y fueron los más dotados para las matemáticas de Cornell.

El deseo del autor fue, que el libro tuviera un grado de dificultad intermedio en base en los libros *A Survey of Modern Algebra* de Birkhoff y MacLane y *Modern Algebra* de Van der Waerden.

Herstein (1986) señala que cuando se trata con ideas abstractas puede ser peligroso introducirlas repentinamente y sin una base suficiente de ejemplos que las hagan verosímiles o naturales. Con el fin de mitigar esta circunstancia, el autor ha tratado de motivar los conceptos de antemano y de ilustrarlos con ejemplos concretos.

En cada capítulo el autor intenta hacer ver el significado de los resultados generales mediante su aplicación a problemas particulares.

En cuanto a la presentación de los problemas, el autor, presenta ejercicios para completar pruebas, de cálculo y otros que requieren práctica sobre los resultados obtenidos. Herstein (1986) menciona que el valor de un problema no está tanto en conseguir su solución como en las ideas y bosquejos de ideas que hace surgir en el presunto solucionador.

Los problemas que por alguna razón le parecen difíciles al autor tienen una estrella (y algunas veces dos), resaltando que en esto tampoco habrá acuerdo entre matemáticos; muchos pensarán que algunos problemas sin estrellas deberían tenerla y otros no.

La dificultad o facilidad de problemas y otra serie de aspectos las analizaremos en los siguientes párrafos, haremos una descripción de las diferencias y similitudes entre ambos libros y al final daremos un veredicto del libro que posiblemente sea mejor pedagógicamente sin demeritar al otro autor; siempre dejando claramente la opinión de cada lector de elegir al autor que más le convenga.

Un punto llamativo para nuestro análisis es que en Fraleigh (1987) al final del capítulo 13 de homomorfismos de los 17 problemas que contiene este tema para resolver, solo dos problemas involucran encontrar la imagen de un homomorfismo de grupos, uno de nivel fácil y el otro de dificultad difícil.

Mientras que en Herstein (1986) el autor propone solo 12 problemas de los cuales ninguno de ellos hace mención de la imagen de un homomorfismo de grupos.

3.1.1.2 Observación de las dificultades de los estudiantes con el concepto en estudio después de una aplicación de una tarea

Gracias a la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar docente del cuerpo académico de la Universidad Autónoma de Zacatecas Francisco García Salinas de la Unidad de Matemáticas pudo proporcionar evidencia al trabajo de las dificultades que presentan los estudiantes en la materia de Álgebra Lineal I a través de las respuestas de una tarea que asigno en el periodo educativo agosto – diciembre de 2018.

Cabe mencionar que no todos los estudiantes presentan estás dificultades de aprendizaje con el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos, sin embargo, de 17 estudiantes que realizaron la tarea 15 de ellos mostraron evidencia de no entender dicho concepto.

A continuación, se muestran ejemplos de dificultades mostradas por los estudiantes quienes realizaron esta tarea.

Se pudo observar que los estudiantes tienen dificultades para establecer las condiciones sobre un sistema de ecuaciones que resulta de la ecuación $f(x) = y$ para que tenga solución. La definición de imagen de un homomorfismo de grupos requiere en la mayoría de los casos (cuando los elementos del grupo se pueden representar explícitamente, como una n-ada, un polinomio de grado menor o igual a n, una matriz de $n \times n$, con n específico o no) determinar las condiciones para que un sistema de ecuaciones tenga solución.

Por ejemplo, a una estudiante se le pidió determinar la imagen del homomorfismo $f: (P_n(\mathbb{R}), +) \to (P_n(\mathbb{R}), +)$ definido por $f\big(p(x)\big) = p(x+1)$. Su proceder para tratar de resolver el problema se describe a continuación.

Ella aplica la definición de imagen en particular para el homomorfismo dado de manera correcta como se muestra en la figura 3.6:

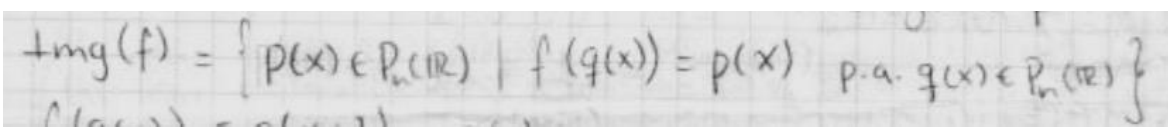


Figura 3.6. Aplicación de la definición de homomorfismo.

Después aplica el homomorfismo dado al polinomio $q(x)$ obteniendo la igualdad $f\big(q(x)\big) = q(x+1) = f(x)$ (ver figura 3.7)

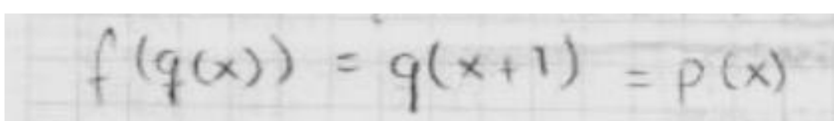
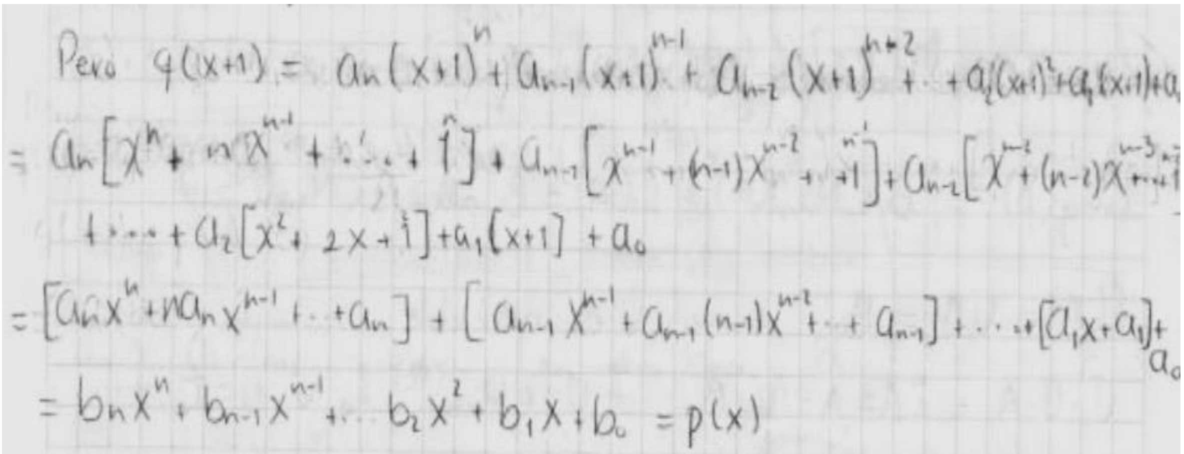


Figura 3.7. Aplicación de homomorfismo dado al polinomio.

En seguida calcula $q(x+1)$ elevando las potencias del factor $(x+1)$ y lo iguala al polinomio $p(x)$ usando la expresión que tiene un polinomio de grado menor o igual a n, $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, como se muestra en la figura 3.8:



Pero $q(x+1) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + a_{n-2}(x+1)^{n-2} + \cdots + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0$

$= a_n[x^n + nx^{n-1} + \cdots + 1] + a_{n-1}[x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1] + a_{n-2}[x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1]$

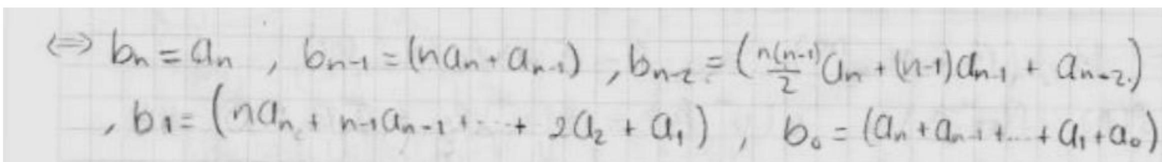
$+ \cdots + a_2[x^2 + 2x + 1] + a_1(x+1) + a_0$

$= [a_n x^n + na_n x^{n-1} + \cdots + a_n] + [a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}] + \cdots + [a_1 x + a_1] + a_0$

$= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = p(x)$

Figura 3.8. Desarrollo de un polinomio de grado menor o igual que n.

Usando la igualdad de polinomios establece el sistema de ecuaciones que se muestra en la figura 3.9:

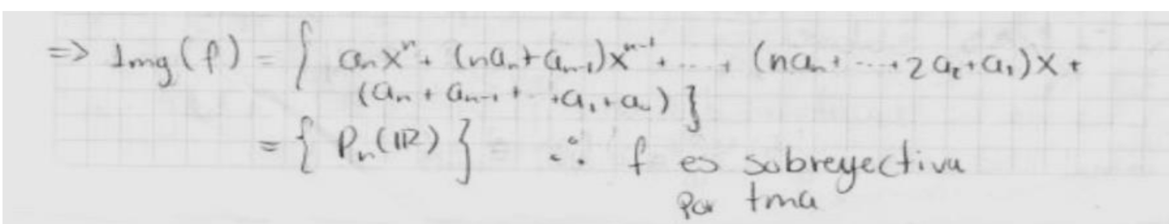


$\Leftrightarrow b_n = a_n, \; b_{n-1} = (na_n + a_{n-1}), \; b_{n-2} = \left(\frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1} + a_{n-2}\right)$

$, b_1 = (na_n + n-1a_{n-1} + \cdots + 2a_2 + a_1), \; b_0 = (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$

Figura 3.9. Estableciendo el sistema de ecuaciones con la igualdad de polinomios.

Inmediatamente después la estudiante da la imagen como se muestra en la figura 3.10:



$\Rightarrow Img(f) = \{a_n x^n + (na_n + a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (na_n + \cdots + 2a_2 + a_1)x + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)\}$

$= \{P_n(\mathbb{R})\}$ $\therefore$ f es sobreyectiva por tma

Figura 3.10. Representación de la imagen de (f).

Lo importante aquí es que la estudiante no tuvo problema para obtener el sistema de ecuaciones que resulta de la igualdad de polinomios, sino el identificar en el sistema quiénes eran las incógnitas y quiénes los valores determinados, pues de acuerdo a como se expresó la imagen, solo sustituyó los valores de $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ y b_0 por sus iguales, concluyendo que la imagen era mismo $P_n(\mathbb{R})$. Sin embargo, no tomó en cuenta si existían o no los coeficientes del polinomio $q(x)$ o determinar las condiciones sobre los coeficientes $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ y b_0 del polinomio $p(x)$ para que existan los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_0 del polinomio $q(x)$ de manera que se cumpla la igualdad $f(q(x)) = p(x)$.

Consideramos que el no éxito del calcular la imagen se debió al menos a tres aspectos importantes: el primero que la estudiante no toma en cuenta el cuantificador existencial ($\exists$) en la definición de imagen que va implícito en la frase “para algún”, esto nos lleva a buscar la estructura mental que requiere el estudiante de cuantificadores, mínimo el de existencia. Segundo la estudiante no identifica una vez que obtuvo el sistema de ecuaciones lineales quienes son las incógnitas y quienes los valores determinados, de manera que requerimos considerar los diferentes usos de la variable para que la estudiante pueda superar esta dificultad. Una vez identificadas las incógnitas y valores determinados, requerimos identificar la estructura mental de solución de un sistema de ecuaciones, con la cual el estudiante pueda determinar las condiciones sobre los coeficientes $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ y b_0 del polinomio $p(x)$ para que existan los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ y a_0 del polinomio $q(x)$ de manera que se cumpla la igualdad $f(q(x)) = p(x)$.

El estudiante es capaz de escribir la definición de imagen de un homomorfismo entre grupos de manera correcta para homomorfismos y grupos particulares.

Se le pidió al estudiante que determinara la imagen del homomorfismo $\mathrm{f}: (\mathrm{P_n}(\mathbb{R}), +) \rightarrow (\mathrm{P_n}(\mathbb{R}), +)$ dado por $\mathrm{f}\big(\mathrm{p}(\mathrm{x})\big) = \mathrm{p}(\mathrm{x}+1)$. En su hoja de respuesta el alumno expreso correctamente la definición de imagen de un homomorfismo como se muestra en la figura 3.11:

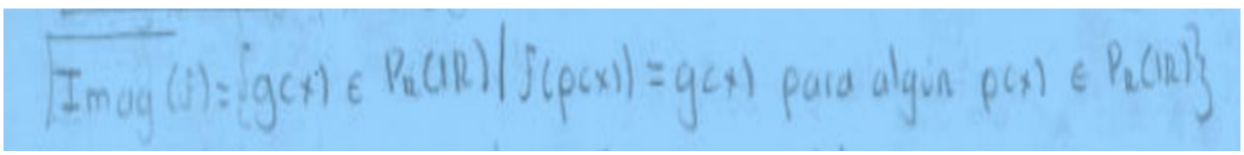
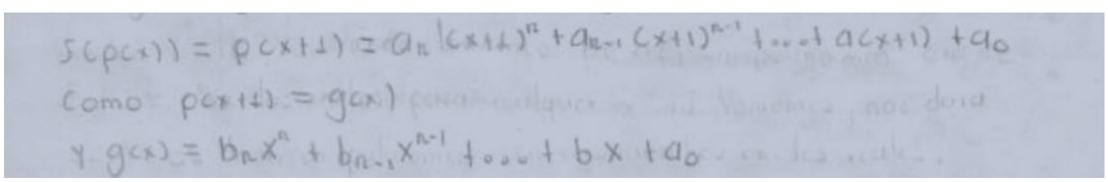

$\mathrm{Imag}(f) = \{g(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(p(x)) = g(x)$ para algún $p(x) \in P_n(\mathbb{R})\}$

Figura 3.11. Definición correcta de imagen de un homomorfismo.

Pese a dar una definición correcta este estudiante lo hace de manera mecánica pues no es capaz de determinar la imagen de manera correcta. Se puede ver a la estudiante que intenta resolver la ecuación f(p(x)) = g(x), que tomo de su definición de imagen de homomorfismo de grupos, tomando un polinomio p(x) en forma general y evaluándolo en el homomorfismo f e igualando a otro polinomio general g(x) como se observa en la figura 3.12:


$f(p(x)) = p(x+1) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a(x+1) + a_0$

Como $p(x+1) = g(x)$

y $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b x + a_0$

Figura 3.12. Procedimiento incorrecto.

3.1.1.3 Investigaciones previas de las construcciones mentales para la construcción del nuevo concepto.

Una vez realizado el análisis de las dificultades para entender la imagen de un homomorfismo de grupos se analizaron las estructuras previas que un individuo requiere para la construcción del concepto de estudio mediante una revisión de investigaciones realizadas en la literatura APOE de los conocimientos establecidos en la sesión 1.2.1.

Proceso de función estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

Uno de los conceptos más importantes dentro de la matemática es el elemento de función, y pese a que los alumnos han tomado distintos cursos de matemáticas no queda muy claro este concepto (Breidenbach et al., 1992).

Para nuestra investigación es necesario que un estudiante cuente por lo menos con una concepción proceso del concepto función, pues como se indica en Breidenbach et al. (1992), una función es una transformación que se aplica a un objeto dado para producir ese objeto transformado; es decir que una concepción proceso sobre este objeto matemático va permitir al estudiante pensar en función como transformación, donde las nociones de inyectividad y sobreyectividad se convierten en elementos más accesibles al estudiante.

Dado que el homomorfismo es un tipo de función especial que permite que se preserven las propiedades de los grupos entre sí, la concepción proceso será suficiente para que un individuo logre obtener la imagen de un homomorfismo de grupos, ya que esta concepción proceso según Breidenbach et al. (1992) va más allá de solo analizar la imagen de una función.

Objeto homomorfismo entre grupos estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

Al momento no se ha encontrado investigación que detalle las estructuras mentales previas que un alumno necesita para construir el concepto de homomorfismo entre grupos $f:(G,*) \rightarrow (G', \Delta)$. Sin embargo, consideramos que la descomposición genética de transformación lineal de Roa-Fuentes y Oktaç (2010) nos ayuda a proponer las estructuras mentales que un individuo requiere para construir dicho concepto. Esta investigación está enfocada en la imagen de un homomorfismo de grupos, ya que es un tema que ha presentado dificultades en los alumnos de Álgebra Lineal I en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas Francisco García Salinas Unidad de Matemáticas; investigación que se planteó con la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar después de analizar distintas propuestas de investigación relacionadas al campo del álgebra abstracta o álgebra lineal.

Mediante la asimilación del objeto grupo por el esquema de función, el estudiante podrá determinar que al aplicar la operación $(*)$ a dos elementos cualesquiera de G se obtiene un nuevo elemento de G y por tanto es posible determinar su imagen en G'. De manera similar podrá determinar que al aplicar la operación (Δ) a dos elementos cualesquiera en G' el nuevo elemento es un elemento de G'. Así establecerá en este momento de manera consciente que el dominio y el codominio de la función f son grupos y por ende son cerrados respecto a la operación binaria definida en cada uno de los grupos.

Con una concepción acción, el estudiante puede tomar dos elementos particulares de G y aplicarles la operación definida en ese grupo $(*)$, determinar su imagen bajo f como elemento de G', obtener un nuevo elemento de G' y comparar los elementos resultantes, bajo una concepción objeto de los nuevos elementos hallados. Cabe mencionar que con una concepción acción el estudiante sólo puede verificar el cumplimiento de la propiedad de homomorfismo para casos específicos de G, y no puede considerar que se compruebe sobre todos los elementos de G de manera general bajo la función f, esto da cuenta de una concepción acción de homomorfismo de grupos por parte del estudiante si comienza a pensar en la forma general de los elementos que incluye el grupo G y ya no considera casos específicos, sino elementos en general, diremos que esas acciones se han interiorizado y el estudiante posee una concepción proceso de homomorfismo entre grupos, que le permite determinar si una función f cumple o no con la propiedad para ser homomorfismo, sin actuar de manera directa sobre ella. Es decir, puede pensar en el cumplimiento o no de la propiedad de homomorfismo para todos los elementos en el grupo G y la manera como f actúa sobre ellos, sin tener que realizar los cálculos, lo cual origina la concepción proceso de homomorfismo entre grupos (ver figura 3.13).

Acción

Fijados un par de vectores u y v en G

$$f(u * v) = f(u)\Delta f(v)$$

$$\downarrow$$

Interiorización

$$\forall$$

$$\downarrow$$

Proceso

$\forall\, u, v \in G$ Se tiene que

$$f(u * v) = f(u)\Delta f(v)$$

Figura 3.13. Construcción del concepto de homomorfismo mediante la asimilación del objeto grupo por el esquema de función.

La encapsulación del proceso de homomorfismo entre grupos sucede cuando hay una necesidad de aplicar acciones sobre el proceso. Entonces, el estudiante puede pensar en un homomorfismo de grupos como un todo y lo modifica de manera consciente.

Construcción de nuevos objetos: Al definir dos homomorfismos de grupos $f_1: V \longrightarrow W$ y $f_2: U \longrightarrow V$ para definir $f_1 \circ f_2$ como un nuevo homomorfismo de grupos, o un nuevo objeto que resulta al componer dos objetos de la misma naturaleza, es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de homomorfismo entre grupos y mediante el uso de esquema de función determine el nuevo homomorfismo entre grupos $f_1 \circ f_2$. Al mismo tiempo por la desencapsulación del objeto de homomorfismo entre grupos, será capaz de determinar el proceso por el cual constituyó dicho objeto y usarlo para construir la composición, como en el caso de la composición de funciones (Ayers, Davis, Dubinsky & Lewin, 1988) (como se citó en Solange, Oktaç, 2010)

De esta manera, a través de un proceso de generalización el alumno podrá pensar en nuevos homomorfismos entre grupos como resultado de componer dos homomorfismos entre grupos bajo las condiciones requeridas sobre sus dominios y recorridos. Incluso puede considerar el conjunto $L(U,U) = \{f: U \longrightarrow U | f$ es un $homomorfismo\ entre\ grupos\}$ como un conjunto cerrado respecto a la operación de composición. Las operaciones definidas entre los grupos $(*, \Delta)$, le permite al estudiante realizar acciones sobre los homomorfismos como objetos de un conjunto que pueden operarse con elementos de otro conjunto o con los que contiene.

Propiedades o características del objeto: Una forma de caracterizar los homomorfismos entre grupos como objetos es concebirlos como elementos de un conjunto. Por ejemplo, bajo las operaciones $(*, \Delta)$ descritas arriba aplicadas a la propiedad de homomorfismo entre grupos, podríamos considerar al conjunto $L(U,U)$ como un grupo y a los homomorfismos entre grupos como elementos de dicho grupo. Esta caracterización de los homomorfismos entre grupos no es elemental para los estudiantes de un curso introductorio, pero puede que generen una concepción objeto de este concepto.

Con lo anterior, podemos concluir que la encapsulación del proceso homomorfismos entre grupos, tal como se ha descrito, implica que el estudiante analice situaciones que motiven su reflexión sobre las propiedades del objeto. En su momento puede llevarlo a establecer fuertes conexiones con los conceptos que se construyen de manera simultánea a él, como inicio para la construcción de un esquema. Como resultado de dichas conexiones podrá transformar el objeto homomorfismo entre grupos mediante la aplicación de nuevas acciones o procesos sobre él (ver figura 3.14):

Acción

Fijados un par de vectores u y $v\ en\ G$

$$f(u * v) = f(u)\Delta f(v)$$

$$\downarrow$$

Interiorización

$$\forall$$

$$\downarrow$$

Proceso

$\forall\ u, v\ \in G$ Se tiene que

$$f(u * v) = f(u)\Delta f(v)$$

$$\downarrow$$

Encapsulación

↓

Objeto

Homomorfismo entre grupos.

Figura 3.14. Construcción del Objeto del concepto de homomorfismo entre grupos.

Esquema de grupo estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

La noción de la imagen de un homomorfismo incluye el trabajo de grupos y subgrupos, por tal motivo el individuo debe tener una estructura mental mínima de objeto para poder comprender lo que es la imagen de un homomorfismo de grupos.

El desarrollo de los conceptos de grupo y subgrupo pueden ser sintetizados simultáneamente (Dubinsky et. al., 1994). Para que un individuo pueda crear el esquema grupo debe comprender tres esquemas; el de conjunto, el de operación binaria y los axiomas de grupo. Los esquemas de operación binaria y conjunto se tematizan para formar objetos y éstos son coordinados a través del esquema de los axiomas de grupo Brown et al. (1997); para nuestra investigación sin duda estos tres esquemas deben quedar claros en el estudiante.

Siguiendo a (Brown et al., 1997) el esquema de axioma incluye la noción general de que una operación binaria en un conjunto mayor puede o no satisfacer una propiedad, esto es, verificar el proceso de dicha operación. También incluye cuatro objetos específicos obtenidos por la encapsulación de cuatro procesos correspondientes a los cuatro axiomas de grupo. Revisar un axioma consiste en coordinar la idea general de satisfacer una propiedad con el proceso específico del axioma (desencapsularlo desde el objeto) y aplicarlo a una operación binaria y un conjunto en particular. Al hacer esto, se desencapsula la operación binaria y el conjunto en sus procesos y los tres procesos (axioma, operación binaria y conjunto) son coordinados para establecer que el axioma está realizado. Los cuatro momentos de esta operación son coordinados dentro de un proceso total de cumplir los axiomas.

El esquema de grupo es tematizado para formar un objeto al cual se le pueden aplicar acciones. Ejemplo de tales acciones incluyen determinar que un conjunto y una operación binaria en particular forman un grupo, también se pueden verificar varias propiedades que el grupo pudiera tener y considerar si dados dos grupos son isomorfos. Finalmente, una componente importante en el esquema de grupo es la habilidad para considerar a un grupo genérico, así como también considerar ejemplos particulares de grupos Brown et al. (1997).

Así podemos concluir que el alumno debe tener una concepción mental de esquema sobre grupo, ya que el individuo debe de ser capaz de diferenciar entre dos o más grupos, revisar las propiedades de grupos, considerar si dos grupos son isomorfos, conocer varios ejemplos de grupos y considerar cuando una operación binaria y un conjunto particular conforman un grupo, para que así, el estudiante pueda construir la imagen de un homomorfismo de grupos. Por tal motivo es necesario tratar de describir los esquemas de operación binaria, de conjunto y de axioma de grupos.

Esquema de subgrupo estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

El concepto de subgrupo puede ser entendido como la coordinación de tres esquemas: grupo, subconjunto y función. Los esquemas de función y subconjunto son coordinados para obtener el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio. Este proceso es entonces coordinado con la operación binaria en el esquema de grupo para obtener la restricción de la operación binaria a un subconjunto. Finalmente, el esquema de axioma de las propiedades de grupo es aplicado a la pareja que consiste del subconjunto y la restricción de la operación binaria a ese subconjunto.

Esquema de Operación Binaria (Brown et al., 1997) estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

En (Brown et al., 1997) podemos encontrar la estructura mental de esquema de operación binaria la cual dice que un individuo tiene un esquema de operación binaria cuando el alumno puede usar y desarrollar la operación binaria al tratar con situaciones en problemas matemáticos.

Esquema de conjunto (Brown et al., 1997) estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

Como requerimos el esquema de conjunto y de los cuatro axiomas de grupo, en la investigación realizada por Brown et al. (1997) se puede inferir que el estudiante que cuenta con una estructura mental de esquema de conjunto tiene el conocimiento de distintos tipos de conjuntos elementales y avanzados, y puede reconocer la diferencia de sus elementos entre dichos conjuntos. Para nuestra investigación esto es de suma importancia, ya que el alumno estará trabajando constantemente con cuatro tipos de conjuntos distintos, que son los conjuntos de polinomios, matrices, vectores y funciones.

Esquema de axioma de grupo (Brown et al., 1997)

Para el esquema de los cuatro axiomas de grupos basados nuevamente en la investigación de Brown et al. (1997), se puede inquirir que un estudiante que posee esta estructura mental en los axiomas de grupo si es capaza de verificar estas cuatro propiedades.

Objeto de Sistema de Ecuaciones Lineales estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

Una parte del procedimiento para la encontrar la imagen de un homomorfismo de grupos es el establecer un sistema de ecuaciones, encontrar su conjunto solución e interpretar este resultado.

Para ello es necesario que el alumno tenga que contar con un conocimiento previo de cómo establecer un sistema de ecuaciones lineales, que en la mayoría de los casos resulta al aplicar la definición de imagen de un homomorfismo. Para determinar dichos conocimientos previos nos basaremos en el trabajo de Borja (2015) quien afirma que la construcción de un sistema de ecuaciones se logra cuando los estudiantes consideran una lista de $\boldsymbol{m}$ ecuaciones como un conjunto de ecuaciones que tienen la característica de compartir un dominio común de solución, $\mathbb{R}^n$.

Dado que el estudiante necesita establecer un sistema de ecuaciones lineales, así como obtener el conjunto solución de éste, Borja (2015) afirma que un estudiante ha logrado una concepción objeto del sistema de ecuaciones lineales, cuando puede operar con y sobre el sistema de ecuaciones lineales equivalentes o encontrar la solución al sistema. Así mismo en este caso, los estudiantes pueden ejercer acciones sobre el sistema de ecuaciones para determinar sus propiedades.

Esta concepción objeto emerge de la encapsulación del proceso de reflexionar sobre el dominio necesario para que las distintas ecuaciones del sistema tengan solución común y se comparen los distintos dominios apropiados para cada ecuación, donde el alumno coordina el proceso de elegir un dominio apropiado a cada ecuación en el proceso de establecer un dominio común a todas las ecuaciones del sistema.

Al establecer el sistema de ecuaciones los estudiantes no alcanzan una comprensión aceptable de los usos de la variable que involucran a dicho sistema de ecuaciones; estos usos son: la incógnita específica, el número general y las variables en relación funcional

Ursini y Trigueros (2006) mencionan una caracterización específica para trabajar exitosamente problemas y ejercicios que involucran tanto a la incógnita, el número general y las variables en relación funcional sin embargo para el presente trabajo basta con mencionar que el alumno solo requiere de algunos aspectos del uso de la variable y del número en general, que son:

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucren *la incógnita* es necesario:

- Reconocer en identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucren *el número general* es necesario:

- Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.

Está caracterización es un marco teórico llamado *Modelo 3uv* (3 usos de la variable), el cual surge para analizar qué es lo que se requiere para poder resolver los ejercicios y problemas típicos que aparecen en los contextos escolares de álgebra (Trigueros y Ursini, 2006)

Según Ursini et al. (2005) (como se citó en Trigueros y Ursini, 2006) consideran que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que la caracterizan, pero como se mencionó para la investigación presente basta con saber por lo menos el uso de la variable y del número general ya mencionados.

Por ende, uno de los requerimientos que necesitan los alumnos para resolver o encontrar la imagen de un homomorfismo de grupos al establecer el sistema de ecuaciones es saber trabajar con parte en la caracterización de este modelo llamado 3*uv*.

La solución de este sistema de ecuaciones está relacionada con la definición de imagen de un homomorfismo de grupos. Según Jiménez (s.f.) esta definición menciona que $Im(\emptyset) = \{\, h \in H \mid h = \emptyset(g)\ para\ algún\ g \in G\}$. Los estudiantes tienen problemas constantemente en identificar que las palabras *para algún* relaciona al cuantificador existencial ($\in$), esto es, que existe un elemento g del dominio tal que al aplicarle la *trasformación de* $\emptyset$ encuentren una imagen h del codominio, que es en sí la solución del sistema de ecuaciones; por ello es necesario que los alumnos tengan una estructura mental previa sobre el cuantificador existencial para poder aprender el concepto de estudio.

Esquema de Cuantificador estructura mental requerida para comprender la imagen de un homomorfismo entre grupos

En Dubinsky, Elterman & Gong (1988) se hace una investigación que describe tres etapas en la construcción del esquema de dicho cuantificador. En la primera etapa el estudiante debe contar con un conjunto de conocimientos previos sobre afirmaciones proposicionales mediante las operaciones lógicas estándar (y/o, implica, etc.) y la introducción de variables cuyos valores pueden ser desconocido o cambiantes.

Para nuestra investigación nosotros requerimos que el estudiante tenga una estructura mental de Esquema de la segunda etapa, donde se sugiere que el individuo debe coordinar los dos desarrollos descritos en la primera etapa en relación con declaraciones simples. Esta coordinación es un proceso reflexivo del individuo de iterar a través de un conjunto de proposiciones que dependen de una o más variables y aplicar un cuantificador a una posición única cuyo valor es la verdad o la falsedad de cualquiera de ellas (cuantificador universal) o al menos uno de ellos (cuantificador existencial).

La representación de la segunda etapa de Esquema de cuantificador se describe en la figura 3.15 de la siguiente manera:

$$\forall x \in S, P(x) \qquad \exists x \in S \ni P(x)$$

Figura 3.15. Representación de la estructura mental de Esquema del concepto cuantificador en su segunda etapa.

Se puede ver que la definición de imagen de un homomorfismo de grupos según Jiménez (s.f.) es una representación de la estructura mental de Esquema del concepto cuantificador existencial en su segunda etapa, por ello se requiere que el estudiante desarrolle dicha estructura.

3.1.1.4 Descomposición genética preliminar

A continuación, se muestra la **descomposición genética preliminar** para el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos:

Acción

Como se mencionó anteriormente un homomorfismo es una función entre dos grupos, cada uno de ellos con una operación distinta, es decir, dados $\langle G,*\rangle$ y $\langle H,\cdot\rangle$ se cumple que:

$$\phi: G \longrightarrow H$$

$$\phi(x * y) = \phi(x) \cdot (y)$$

La construcción del concepto de imagen de homomorfismo entre grupos comienza con la acción de calcular la imagen para elementos específicos del grupo $G,$ esto es, un individuo comienza a tomar elementos específicos del grupo $G,$ a decir, $x_0 \in G.$ Cada elemento del grupo G es considerado como un objeto debido a su estructura previa de esquema de grupo, además con su concepción proceso de homomorfismo el cual le permite ver a la función ϕ como una aplicación entre ambos grupos, el estudiante es capaz de tomar un elemento del grupo G y aplicarle la función ϕ para obtener un nuevo objeto del grupo H, $f(x_0) = y_0 \in H.$ Si el estudiante es capaz de realizar esta acción diremos que cuenta con una concepción acción de imagen de un homomorfismo entre grupos.

Interiorización

La interiorización de esta acción emprende cuando un individuo la repite y reflexiona tomando diferentes elementos del grupo G, esto es, $x_0 \in G,\ x_1 \in G, \dots ,\ x_n \in G,$ y calcula sus imágenes en el grupo H, es decir, $f(x_0) = y_0 \in H$, $f(x_1) = y_1 \in H$, …, $f(x_n) = y_n \in H.$ Esta acción de calcular las imágenes de los elementos de un grupo G bajo una aplicación *f*, se debe realizar un gran número de veces a fin de ir reflexionando dicha acción y darse cuenta de que puede calcular la imagen de cualquier elemento del grupo $G.$ Además, el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos relaciona diferentes tipos de grupos que contienen distintos elementos, es decir, hay grupos como el de las matrices, vectores, polinomios, funciones, entre otros. De igual forma se pueden considerar distintas funciones entre ellos, ya sean dadas en forma algebraica, geométrica, matricial, etc.

Por tanto, un estudiante aparte de poder calcular la imagen homomorfismo entre cualquier par de grupos dados, el alumno será capaz de interiorizar esta acción mediante la repetición reflexionada de encontrar la imagen considerando distintos grupos y homomorfismos utilizando sus estructuras previas de proceso homomorfismo y esquema de grupo.

Proceso

El alumno mediante la interiorización de la acción descrita previamente construirá el proceso de imagen de un homomorfismo entre grupos que consiste primeramente en ser consciente de que la imagen es un subconjunto del grupo H, es decir que la imagen del grupo G bajo la función es un subconjunto del grupo H o bien $imag_f^{(G)} \subseteq H$. Luego deberá ser capaz de calcular dicho subconjunto. Describiremos a continuación con detalle cómo se llevaría a cabo.

Para calcular la imagen de cualquier homomorfismo sobre grupos, el estudiante a través de la concepción esquema de grupos puede tomar un elemento y del contradominio H y mediante el esquema de cuantificador existencial determinar si existe un $x_0 \in G$ tal que $\phi(x_0) = y$ donde $y \in H$, además para esto último el alumno requiere hacer uso de su estructura previa de proceso de homomorfismo sobre grupos para calcular $\phi(x_0)$. Finalmente realizará la acción de igualar los objetos $\phi(x_0)$ y y para determinar si y es o no elemento de la imagen.

Para lleva a cabo la acción de igualar los objetos $\phi(x_0)$ y y el estudiante requiere usar su estructura previa de objeto de sistema de ecuaciones lineales ya que esta acción de igualar dará un sistema de ecuaciones lineales en el cual el alumno deberá determinar bajo qué condiciones el sistema tiene solución. Esta concepción objeto de sistema de ecuaciones lineales le permitirá al alumno trabajar bajo la presencia de parámetros en el sistema y encontrar las condiciones necesarias para que el conjunto solución sea distinto del vacío.

El alumno entrará en contacto directo en la mayoría de los casos con un sistema de ecuaciones lineales, por ello el estudiante requerirá un dominio de la variable en sus diferentes usos de acuerdo al modelo 3UV de Ursini y Trigueros (2006) donde se relacionen problemas y ejercicios que involucren a la variable que en este caso aparece en su uso como incógnita al obtener $\phi(x_0)$. Los estudiantes al tener este conocimiento que involucren la incógnita será capaz de reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

Por otro lado, el alumno debe tener otro conocimiento general que relacione problemas y ejercicios que involucren a la variable como número general ya que esta aparece al ser dado el elemento y. El estudiante al tener este conocimiento podrá interpretar a los elementos de la derecha de las igualdades en el sistema de ecuaciones como un símbolo, es decir, la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor y a su vez la podrá manipular (simplificar, desarrollar).

Una vez encontradas las condiciones para que el sistema tenga solución el estudiante podrá dar el conjunto imagen del homomorfismo.

Encapsulación

Después de haber interiorizado la acción al proceso en el cual el o los alumnos son conscientes de que la imagen de un homomorfismo entre grupos es un subconjunto del grupo H o bien $imag_f^{(G)} \subseteq H$ y son capaces de determinarla. El mecanismo mental de encapsulación que permite la construcción de la estructura mental de objeto se puede desarrollar mediante la aplicación de acciones o procesos sobre el proceso construido, en este caso particular una acción que podría ser el establecer cualidades del objeto como el determinar que la imagen es un subgrupo del grupo H, pues el homomorfismo entre grupos es un tipo de función especial que preserva estructura, en este caso la de subgrupo o grupo. Así, mediante el esquema de subgrupo podrá determinar que la imagen es un subgrupo del grupo H a través de la coordinación de los tres esquemas: el de grupo, subconjunto y función, donde los esquemas de función y subconjunto son coordinados para obtener el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio. Este proceso es entonces coordinado con el esquema operación binaria en el esquema de grupo para obtener la restricción de la operación binaria a un subconjunto. Finalmente, el esquema de axioma de las propiedades de grupo es aplicado a la pareja que consiste del subconjunto y la restricción de la operación binaria a ese subconjunto. Otra acción podría consistir en que el estudiante puede comparar el conjunto imagen con el grupo codominio H para determinar si el homomorfismo es o no sobreyectivo, esta comparación implica que el estudiante considere a la imagen como un todo.

Objeto.

Con las acciones sobre el proceso imagen de un homomorfismo descrito anteriormente mediante el cual el alumno generará un cambio en su pensamiento que le permitirá ir de lo dinámico a lo estático. Considerando entonces que se pueden realizar acciones y otros procesos sobre la estructura mental de manera que esto lo llevará a contar con una estructura de objeto de imagen de un homomorfismo.

3.2 Fase 2. Diseño e Implementación de Instrumentos

Cuando se trabaja la teoría APOE un individuo puede apoyarse en el uso de diversos instrumentos para alcanzar los objetivos que la investigación pueda plantear. Entre estos instrumentos la teoría APOE cuenta con cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas, y/o exámenes. Para la investigación en curso, este trabajo hará uso de un cuestionario diagnóstico, un cuestionario con audio y una descomposición genética preliminar; que serán explicados en párrafos ulteriores.

En el diseño e implementación de la enseñanza se diseñan y aplican estrategias pedagógicas específicas, con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico. La implementación generalmente se lleva a cabo utilizando el Ciclo de Enseñanza ACE, un enfoque instructivo que apoya el desarrollo de las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética pero como se menciona en párrafos anteriores nuestra segunda componente será modificada a un diseño e implementación de instrumentos (Arnon et al., 2014).

Para nuestra investigación utilizaremos tres instrumentos con cierta intencionalidad informativa cognitivamente del individuo. El primero será un cuestionario con situaciones matemáticas, en cada situación se hará un análisis a priori para describir cada situación problemática del cuestionario, la finalidad del cuestionario será determinar las estructuras y mecanismos mentales previos. El segundo instrumento será una entrevista semiestructurada para determinar si las estructuras mentales que surgieron del cuestionario coinciden con las propuestas en la Descomposición Genética Preliminar que es nuestro tercer instrumento.

3.2.1 Cuestionario Diagnóstico

En la investigación basada en APOE, las preguntas escritas están cuidadosamente diseñadas para ayudar a reunir evidencia de la presencia de las construcciones mentales predichas por la descomposición genética preliminar y para sugerir modificaciones de las estrategias pedagógicas y/o la descomposición genética cuando estas construcciones no están presentes. Proporcionan información básica sobre el rendimiento matemático de los estudiantes y permite a los investigadores enfocar su atención en los aspectos de la construcción de conocimiento que se pretende enseñar Arnon et al. (2014).

Para nuestra investigación el cuestionario diagnóstico consta de 5 situaciones matemáticas que pretenden evidenciar las estructuras mentales previas que surgieron en el análisis teórico. Con la intención de seleccionar a los estudiantes que serán entrevistados, esto de acuerdo a las respuestas dadas a cada situación. Cabe señalar que cada una de las situaciones se acompaña de un análisis a priori, donde se menciona específicamente la estructura previa a evidenciar.

A continuación, se presenta el **<u>cuestionario diagnóstico:</u>**

Situación 1.

(a) Considere el conjunto $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ que consiste en el conjunto $\{0,1,2,3,4\}$ y la operación binaria de multiplicación módulo 5. Por favor de una o dos afirmaciones explicando sus respuestas a las siguientes preguntas:
¿Existe algún elemento que sea identidad en el grupo?
¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo? ¿Los demás elementos tienen inversos multiplicativo?
¿Es $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ un grupo? Si su respuesta es afirmativa justifique, en caso contrario modifique $\mathbb{Z}_5$ para que sea grupo.
¿Qué elementos componen a un grupo? ¿Puede proporcionar otros ejemplos de grupos?

(b) Considere el grupo $\mathbb{Z}_6$, con la suma módulo 6. De un ejemplo de las siguientes afirmaciones y explique su respuesta a cada una.

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos.
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga tres elementos.
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ el cual no es un subgrupo.

(c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$?

La pregunta 1 se tomó del apéndice I de la pregunta 1 del artículo de Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis (1994). Esta pregunta fue modificada de la original, adecuándola al estudio de las estructuras mentales previas hechas en la investigación presente, en particular se desea saber si el estudiante muestra una concepción esquema de grupo, ya que, en esta estructura, los conceptos de grupo y subgrupo pueden ser sintetizados simultáneamente (Dubinsky et. al., 1994). Si el estudiante cuenta con esta estructura podrá usar los tres esquemas; el de conjunto, el de operación binaria y el de axioma de grupo, los cuales se requieren para poder responder a las preguntas planteadas en el inciso a). Ya que los esquemas de operación binaria y conjunto se tematizan para formar objetos y éstos son coordinados a través del esquema de los axiomas de grupo Brown et al. (1997) lo que permite al estudiante determinar si estos últimos se cumplen o no. En particular para responder a la última pregunta del inciso a) el estudiante debe usar los cuatro objetos específicos obtenidos por la encapsulación de cuatro procesos correspondientes a los tres axiomas de grupo para poder responder que el conjunto $\mathbb{Z}_5$ no es grupo y modificar este para que si lo sea.

Se requiere además que el esquema de grupo esté tematizado por el estudiante para formar un objeto al cual se le puedan aplicar acciones. Ejemplo de tales acciones incluyen determinar que un conjunto y una operación binaria en particular forman un grupo; en nuestro caso se da el conjunto de los enteros módulo 5, $\mathbb{Z}_5$, y la operación multiplicación módulo, 5 y se le pide al estudiante que determine si el conjunto es o no grupo. Finalmente, una componente importante en el esquema de grupo es la habilidad para considerar a un grupo genérico así como también considerar ejemplos particulares de grupos Brown et al. (1997), aquí se eligió al conjunto de los enteros módulo 5 como ejemplo particular y la última pregunta del inciso a) tiene la intención de evidenciar si el estudiante muestra la habilidad para considerar al concepto de grupo en forma genérica y considerar otros ejemplos de grupos.

Para responder correctamente el inciso b) el estudiante debe usar su concepción esquema de subgrupo, ya que este le permite coordinar los esquemas de grupo, subconjunto y función, para aplicar el esquema de grupo a la pareja que consiste del subconjunto y la restricción de la operación binaria a este subconjunto y así encontrar los subconjuntos que sean grupos y aquellos que no lo sean.

Situación 2.

Considere el grupo cociente $G = \mathbb{Z}_{18}$, su subgrupo $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15\}$ y el grupo cociente G/H. Conteste las siguientes cuestiones:

(a) ¿Cuántos elementos tienen G/H? Por favor enlístelos todos.

(b) Construya la tabla de operaciones de G/H.

(c) ¿Cuál es el elemento identidad de G/H? ¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2?
(d) Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H.

Este problema se extrajo de la investigación de Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis (1994) del apéndice I pregunta número 3. De forma similar a la pregunta 1, en esta se desea analizar si el alumno muestra una concepción esquema de grupo al ser capaz de trabajar con el ejemplo particular del grupo cociente G/H y su operación binaria, construir su tabla de operación, identificar el elemento identidad y el inverso de cada elemento. Además se puede evidenciar si el esquema ha sido tematizado en un objeto al cual se le puedan aplicar acciones, una de las cuales puede ser el determinar si dados dos grupos estos son o no isomorfos, esto lo tienen que determinar en el inciso d) de la pregunta 2.

Es importante mencionar que para la pregunta 1 y 2 el esquema de operación binaria se da cuando el alumno puede usar y desarrollar la operación binaria al tratar con situaciones en problemas matemáticos. Que el esquema de conjunto se da cuando el estudiante tiene el conocimiento de distintos tipos de conjuntos elementales y avanzados, y puede reconocer la diferencia de sus elementos entre dichos conjuntos, esto es muy valioso ya que el estudiante constantemente estará trabajando con distintos elementos bajo distintos conjuntos en los homomorfismos entre grupos; y por último que el esquema de axioma de grupo se puede inquirir cuando un alumno es capaz de verificar los tres axiomas de grupo, los cuales son importantes para resolver preguntas planteadas.

Situación 3.

Dada la siguiente matriz aumentada de un sistema $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 3 & 1 & a & d \end{pmatrix}$

a) Qué condiciones deben cumplir *a*, *b*, *c* y *d* para que el sistema tenga:
i. Solución única.
ii. Infinitas soluciones.
iii. Ninguna solución.

Este problema fue modificado de la situación problemática del trabajo de Manzanero (2007, p 51).

Se le presenta al alumno una matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones con tres variables, la cual contiene cuatro parámetros. Entonces se le pide al estudiante determinar las condiciones que deben cumplir estos parámetros para que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y ninguna solución.

Con esta pregunta la autora tiene la intención de mostrar las dificultades que presenta el estudiante al momento de trabajar con la generalización de una matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Con ello se desea observar las etapas de las construcciones mentales que presentan los alumnos al trabajar con la matriz aumentada. Un dato importante es que el estudiante requiere de una concepción objeto de sistemas de ecuaciones lineales para dar una respuesta adecuada a esta pregunta, ya que la presencia de un parámetro y el hecho de pedir condiciones para que el sistema tenga ciertos tipos de conjunto solución requieren de esta estructura mental.

Esta situación permite evidenciar el uso que el estudiante le da a la variable, ya que de acuerdo a Ursini (2008) el estudiante debe considerar para esta situación a la variable como número general o parámetro, los cuales son a, b, c y d. Y manipularlos para obtener las condiciones que debe cumplir el conjunto solución del sistema, tener solo un elemento, una infinidad o ser vacío.

Situación 4.

Sean U, V y W grupos, dados $\phi_1: U \to V$ y $\phi_2: U \to W$ homomorfismos entre grupos. Se define $\phi: U \to V \times W$ como:

$$\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$$

Para todo $u \in U$.

a. Encuentre un caso particular del enunciado, es decir, determine ejemplos de homomorfismos entre grupos ϕ_1, ϕ_2 y obtenga ϕ. ¿Es ϕ un homomorfismo entre grupos?
b. ¿Es posible considerar en general, la aplicación ϕ como un homomorfismo entre grupos? Justifica tu respuesta. (Modificado de Roa-Fuentes, 2008, p. 65)

El problema fue tomado del trabajo de Roa-Fuentes (2008). Esta pregunta pese haber sido tomada de este trabajo fue modificada de la original, adecuándola al estudio previo de las estructuras mentales hechas en la actual investigación. Se desea evidenciar una concepción objeto de homomorfismo entre grupos.

Este problema presenta una forma de generar nuevos homomorfismos entre grupos a partir de homomorfismos dados. El estudiante debe encontrar un caso particular de esta generalización y determinar si la función ϕ es un homomorfismo entre grupos. Consideramos que en el momento en que está determinando ϕ_1 y ϕ_2 el estudiante está pensando en la condición que hace que una función sea un homomorfismo entre grupos. Por lo tanto, en ese momento estará dando muestras de poseer una concepción proceso de homomorfismo de grupos pero una vez dados los homomorfismos entre grupos al determinar la aplicación ϕ da evidencias de poseer una concepción objeto de homomorfismo de grupos ya que puede determinar un nuevo objeto de la misma naturaleza como resultado de aplicar ciertas acciones sobre los elementos presentados.

Una característica interesante de este problema es la forma general en que presenta los grupos U, V y W. En el inciso (a) el estudiante debe fijar dichos grupos y determinar los homomorfismos entre grupos sobre ellos. Este análisis puede ser generalizado en el inciso (b).

Situación 5.

$\phi(x): (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ Dada por $f\big(\phi(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$.

a) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ(p(x)) = A? Si su respuesta es afirmativa dé el polinomio, y si es negativa entonces justifique.

b) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ (p(x)) = A? Si su respuesta es afirmativa dé dicho polinomio, y si es negativa entonces justifique.

c) ¿Para qué matrices existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ(p(x)) = A?

La situación problemática número 5 se plantea de esta forma ya que se desea observar si el alumno cuenta con el cuantificador de un solo nivel según Dubinsky, Elterman & Gong (1988) ya que ellos hicieron una investigación en la cual se describe tres etapas en la construcción del esquema de dicho cuantificador. En la primera etapa el estudiante debe contar con un conjunto de conocimientos previos sobre afirmaciones proposicionales mediante las operaciones lógicas estándar (y, o, implica, etc.) y la introducción de variables cuyos valores pueden ser desconocido o cambiantes.

Para nuestra investigación se requiere que el estudiante tenga una estructura mental de esquema de la segunda etapa, donde se sugiere que el individuo debe coordinar los dos desarrollos descritos en la primera etapa en relación con declaraciones simples. Esta coordinación es un proceso reflexivo del individuo de iterar a través de un conjunto de proposiciones que dependen de una o más variables y aplicar un cuantificador a una proposición única cuyo valor es la verdad o la falsedad de cualquiera de ellas (cuantificador universal) o al menos uno de ellos (cuantificador existencial), ya que en la definición de imagen de un homomorfismo entre grupos se involucra la relación del cuantificador de existencia de al menos un elemento y un tal que para encontrar dicha imagen.

3.2.2 Cuestionario con Audio

En palabras de Arnon et al. (2014) las entrevistas son el medio más importante por el cual se recopilan datos en las investigaciones basadas en APOE. El objetivo principal es determinar si los estudiantes han realizado las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética utilizada en el estudio de un concepto en particular.

La selección de a quienes se les hace la entrevista puede hacerse en función de sus respuestas a un cuestionario estructurado o un examen administrado previamente, comentarios del instructor o una combinación de estos criterios, en este caso del examen diagnóstico. Según Arnon et al. (2014) la idea es acceder a los datos que muestren un rango de rendimiento matemático en diferentes tareas matemáticas para comparar el pensamiento de los estudiantes que tuvieron dificultades con el pensamiento de los estudiantes que tuvieron éxito. Estas diferencias permiten a los investigadores determinar si las construcciones mentales solicitadas por el análisis teórico explican las diferencias en el rendimiento o si se requieren otras construcciones mentales no explicadas por el análisis teórico.

Las entrevistas serán estructuradas ya que dependiendo de las respuestas el entrevistador puede hacer preguntas de seguimiento para buscar aclaraciones o para examinar el pensamiento del individuo. Si el entrevistador no obtiene suficientes respuestas entonces puede tomar una ruta más didáctica y dar una pista para ver, con un poco de insinuación, dónde está el estudiante en términos de su progreso en hacer una construcción mental particular (Arnon, et al., 2014). A continuación, se brinda el cuestionario estructurado para recolectar los datos que darán una parte de la evidencia de ver si los alumnos desarrollaron las estructuras mentales establecidas en la descomposición genética preliminar.

Situación 1. Considere los siguientes grupos $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^2$ bajo la operación de suma.

a) Calcula las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c) = (a+c, b+c)$. ¿Quién es la imagen de *f?*
b) Calcule las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c) = (a-b+2c, 2a-2b+4c)$. ¿Quién es la imagen de *f*?

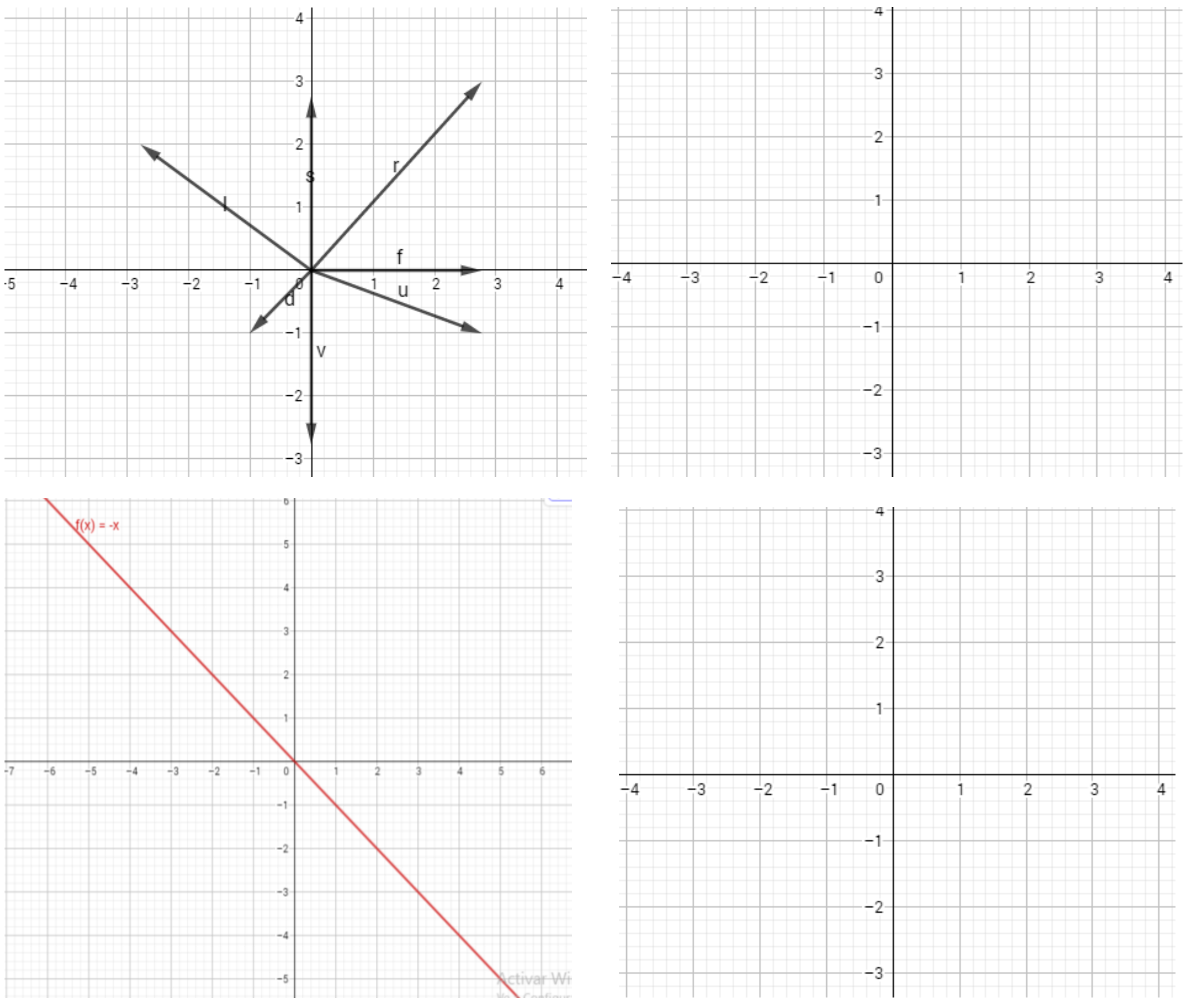
Con esta situación problemática se espera evidenciar si el estudiante tiene una concepción acción de imagen de un homomorfismo, porque de acuerdo con la descomposición genética preliminar, si el estudiante es capaz de obtener la imagen de vectores particulares del grupo dado bajo el homomorfismo se evidencia una concepción acción, aquí la intención es dar un grupo de orden finito para que el estudiante pueda tomar todos los elementos del grupo $\mathbb{Z}_2^3$ y calcalar paso a paso sus imágenes. Además, consideramos el grupo $\mathbb{Z}_2^3$ con el cual los estudiantes no están muy familiarizados y deben tener cuidado cuando apliquen el homomorfismo ya que en este caso particular deben usar la operación binaria de suma módulo 2. Consideramos que al hacer esto último el alumno podría tener dificultades si no cuenta con la estructura previa de **esquema de grupo** en particular el **esquema de operación binaria**, ya que si lo tuviese el alumno sería capaz de obtener exitosamente las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$. La intención de incluir dos incisos es que el estudiante pueda identificar que la imagen de $\mathbb{Z}_2^3$ en el inciso a) es todo el grupo de llegada $\mathbb{Z}_2^2$ mientras que en el inciso b) el objetivo es analizar si el alumno es capaz de asemejar si la imagen de $\mathbb{Z}_2^3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_2^2$. Las preguntas en ambos incisos tienen la intención de promover la reflexión sobre lo mencionado, al mismo tiempo promover la repetición como parte del mecanismo de interiorización.

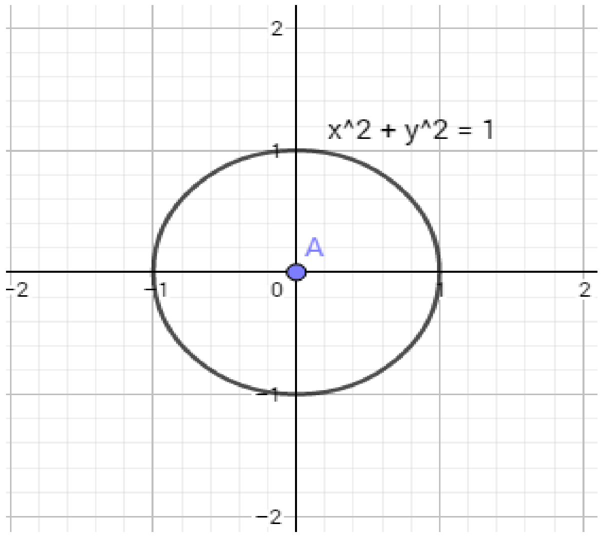
Situación 2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por $f(x,y) = (-y, x)$

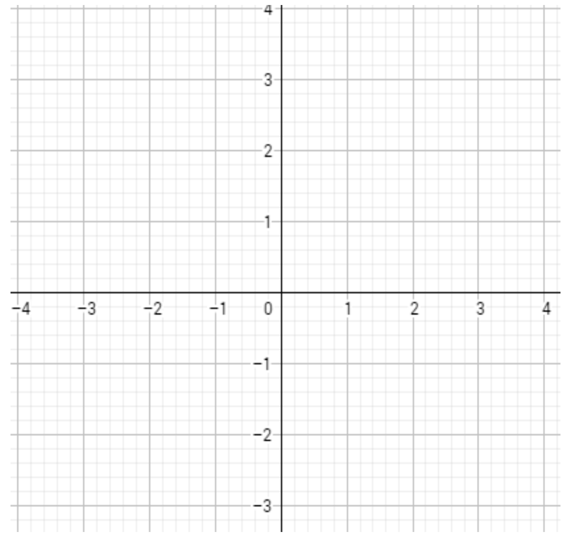
a) Grafique en el plano de la derecha la imagen de los siguientes vectores que se enlistan y se muestran en el plano de la izquierda bajo el homomorfismo *f*: $\boldsymbol{u}(a,1), \boldsymbol{v}(0,-a), \boldsymbol{f}(a,0), \boldsymbol{d}(-1,-1)$, $\boldsymbol{l}(-a,2), \boldsymbol{s}(0,a), \boldsymbol{r}(a,3)$. ¿Puede calcular la imagen de cualquier vector? ¿Cómo lo haría?

b) Grafica en el plano de la derecha la imagen de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, $G = \{(x, y)|y = -x\}$, $H = \{(x, y)|x^2+y^2 = 1\}$ que se muestran en el plano de la izquierda. ¿Puede calcular la imagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$? ¿Cómo lo haría?

c) ¿Puede obtener la imagen de todo $\mathbb{R}^2$? ¿Cómo lo haría? Represéntalo geométricamente y algebraicamente.







Esta situación matemática problemática está compuesta por tres incisos nombrados como a), b) y c). En el primero se desea analizar si el alumno es capaz de obtener las imágenes dadas mediante la repetición de ejecutar el mismo procedimiento bajo distintos elementos específicos del grupo $\mathbb{R}^2$, ya que con base en nuestra descomposición genética preliminar el estudiante comenzará a construir el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos cuando tome elementos específicos del grupo dominio y les calcule su imagen, cada elemento del grupo es considerado un objeto. Para los incisos b) y c) se desea escrudiñar esta senda, esto es, que el alumno después de haber calculado un número de imágenes interiorice esta acción y le permita reflexionar en quién sería su imagen sin tener que realizarla paso a paso, es decir, que el estudiante mediante el análisis cognitivo sin tener que describir el procedimiento repetitivo en su hoja de trabajo pueda calcular la imagen mentalmente. El inciso c) al igual que el inciso anterior lleva al alumno a pasar de una acción a una primera etapa de la interiorización al ser consciente de que la imagen es un subconjunto del codominio sin embargo este inciso es más complejo que el anterior ya que debe reflexionar en cómo debe ser la imagen de todo $\mathbb{R}^2$ y no solo de algunos vectores después de haber calculado un conglomerado de imágenes mecánicamente, el alumno debe pensar cómo calcular la imagen de todo el grupo dominio bajo el homomorfismo y no solo la de un elemento específico.

Situación 3. Sea $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{P_2}(\mathbb{R}), +) \to (\boldsymbol{M_{2\times 2}}(\mathbb{R}), +)$ **definida por** $\boldsymbol{f(p(x))} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p(1) - p(2)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{p(0)} \end{pmatrix}$

a) Calcule las imágenes de los siguientes polinomios bajo el homomorfismo f si: $i)\ x^2 + x + 1,\ ii) \frac{1}{3}x^2 - 6 = 0,\ iii)$ -5x^2-$\frac{1}{2}x - 1 = 0,\ iv)\ -2x^2 + 7x - 10 = 0,\ v)\ x - 8 = 0,\ vi)\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{4} = 0,\ vii)\ 2x^2 + 3x + \frac{1}{7} = 0.$

b) ¿Las imágenes encontradas tienen alguna característica en común? ¿Podría calcular la imagen de cualquier polinomio? ¿Cómo sería la imagen? ¿cómo determinaría la imagen de cualquier polinomio?
c) ¿Cuál será la imagen de este homomorfismo entre grupos? ¿Por qué?

Este ejercicio está encaminado para evidenciar tanto la acción como su interiorización por parte del estudiante, nótese que el inciso a) es una representación de la estructura acción donde se desea que el alumno calcule las imágenes de objetos específicos de manera repetitiva, la primera pregunta del inciso b) tiene la intención de que el alumno reflexione sobre la repetición de la acción. Así mismo el mecanismo mental de interiorización comienza a emerger ya que el estudiante inicia el cálculo de imágenes bajo grupos distintos que son el de las matrices y polinomios a diferencia de las situaciones 1 y 2, y finalmente con las respuestas a las preguntas planteadas en los incisos b) y c). En los incisos b) y c) se pretende que el estudiante logre concebir de manera mental la imagen dado cualquier polinomio bajo el homomorfismo f, al realizar esta reflexión se busca que el alumno vaya interiorizando la idea de que la imagen es un subgrupo de $G´$ o incluso ser el mismo grupo $G´$ pero con determinadas características. Es por ello que los incisos b) y c) piden al estudiante determinar si es posible que un alumno pueda calcular cualquier imagen de un vector dado o bien cuál será la imagen del homomorfismo entre grupos, para esto requerirá su estructura mental de proceso de imagen de un homomorfismo.

Situación 4. Sea $f: M_{n\times n}(F) \to f: M_{n\times n}(F)$ definida por $f(A) = A^T - A$.

a) Determine la imagen del homomorfismo *f* para el caso $n = 2$.
b) Determine la imagen del homomorfismo *f* para $n = 3$.
c) Después de calcular la imagen del homomorfismo f cuando $n = 2$ y $n = 3$ determine la imagen para el caso general n.
d) Pruebe que la imagen es un subgrupo de las matrices M_{nxn}. ¿Es siempre la imagen un subgrupo? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.
e) ¿Es el homomorfismo sobreyectivo? Justifique.

La situación número cuatro consta de cinco incisos. El motivo de tener estos incisos es para analizar si el alumno posee la mayoría de las estructuras y mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética preliminar desarrollada en esta investigación. Del inciso a) al b) se pide calcular la imagen para casos particulares de *n*, con ello se desea determinar si el alumno muestra la estructura mental de acción de imagen de un homomorfismo, además de que esto le permita abordar el caso general; con el inciso c) se desea observar si el estudiante cuenta la estructura mental de proceso de imagen de un homomorfismo para *n* es general, deberá en principio observar que la imagen es un subconjunto del grupo $M_{n\times n}$, y después ser capaz de calcular dicho subconjunto.

El inciso d) se propuso para examinar si el estudiante es capaz de determinar si la imagen es un subgrupo del grupo $M_{n\times n}$, pues el homomorfismo entre grupos es un tipo de función especial que preserva estructura, en este caso la de subgrupo o grupo. Así, mediante su estructura previa de esquema de subgrupo podrá determinar que la imagen es un subgrupo del grupo $M_{n\times n}$ a través de la coordinación de los tres esquemas: el de grupo, subconjunto y función, donde los esquemas de función y subconjunto son coordinados para obtener el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio. Para el inciso e) se espera que el alumno sea capaz de comparar el conjunto imagen con el grupo codominio $M_{n\times n}$ para determinar si el homomorfismo es o no sobreyectivo, esta comparación implica que el estudiante considere a la imagen como un todo. El llevar a cabo el inciso d) y e) dejaría ver que el estudiante muestra una concepción objeto de imagen de homomorfismo entre grupos.

Situación 5. a) Sea $h: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ la función definida entre grupos como $h:\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2$. Determine la imagen de h. ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.

b) Sea $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función definida como $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$. Determine la imagen de *f*. ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.

La situación 5 está establecida por dos encisos a) y b) para determinar si el alumno muestra el mecanismo mental de encapsulación de imagen de un homomorfismo de grupos, esto al determinar si la imagen es o no un subgrupo y comprobarlo en caso de que así lo sea o bien justificar su respuesta. Al encapsular el proceso podrá establecer propiedades sobre el objeto construido, en este caso el de que la imagen de un homomorfismo es un subgrupo. Cabe señalar que en ambos inciso la función dada entre grupos no es un homomorfismo, esto se hace con la intención de que el alumno reconozca la importancia de que la función sea homomorfismo, ya que de no serlo no se asegura que se preserve la estructura, en el inciso a) la imagen no es subgrupo pero en el inciso b) si lo es, de manera que con esto se espera que el alumno se dé cuenta de la importancia de trabajar con homomorfismos y que estos preservan estructura.

Capítulo 4. Análisis de datos

Análisis, Observación y Recolección de Datos

La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo simplemente una hipótesis (Arnon, et al., 2014).

Una vez que se implementan los instrumentos, los datos se organizan. En el caso de entrevistas, se transcriben las grabaciones de audio. Después de organizar la información se analizan las transcripciones por separado para luego discutir su análisis y llegar a un consenso. Este análisis es una forma de triangulación que ha demostrado ser efectiva en la investigación basada en APOE y es una de las principales razones por las cuales la mayoría de los artículos publicados que usan este paradigma tienen múltiples autores (Arnon et al., 2014).

El propósito de esta fase es responder a la siguiente pregunta. **¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética?** El ciclo de investigación modificado de la teoría APOE se repite hasta que esta pregunta sea respondida positivamente y el instructor / investigador esté satisfecho de que los estudiantes hayan evidenciado tener las mismas estructuras y mecanismos mentales mediante la evidencia empírica y el análisis teórico.

A continuación, se observarán y se analizarán los datos recolectados por los instrumentos implementados en la fase y el diseño de instrumentos pertinentes a la investigación, el primero de ellos en analizar será el cuestionario diagnóstico.

Este instrumento se analizará de entrada para verificar aquellos alumnos que evidenciaron tener la mayoría de las estructuras en relación al estudio hecho sobre las estructuras mentales previas para poderles aplicar el cuestionario estructurado y analizarlo para comparar los resultados obtenidos de éste, y así poder compararlos con la descomposición genética preliminar que es el tercer instrumento. Si los resultados obtenidos entre el cuestionario estructurado y la descomposición genética preliminar coinciden entonces podremos afirmar que **los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética preliminar propuesta y habremos concluido**, es decir, que los estudiantes requieren de esas estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar para poder aprender la imagen de un homomorfismo entre grupos**.**

4.1 Aplicación y Análisis del Cuestionario Diagnóstico

A continuación, se presenta el análisis del cuestionario diagnóstico que fue aplicado el 4 de marzo del 2020 con duración de dos horas. Se aplicó a 9 estudiantes que llevan la clase de Álgebra Lineal I en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas correspondiente al segundo semestre. El tema de imagen de un homomorfismo entre grupos se presenta en el curso de dicha materia durante el segundo examen parcial correspondiente a la Unidad Didáctica de Grupos Abelianos, este instrumento fue aplicado después de haber visto el tema de grupo, subgrupo, homomorfismo e imagen de éste. Por lo tanto los alumnos ya tenían conocimiento para poder contestar dicho cuestionario. Cabe mencionar que todos los estudiantes cursaban la materia por segunda ocasión.

Para llevar a cabo el análisis se designó a cada uno de los 9 alumnos como A1, A2, …, A9. El instrumento se aplicó por estudiante, con la intención de seleccionar a aquellos que evidencien todas o la mayoría de las estructuras mentales previas, ya que la teoría APOE señala que si algún individuo posee la mayoría de los conocimientos previos podrá construir uno nuevo.

Estudiante A1

Desglosando los procedimientos realizados en la situación problemática 1 se puede observar que el estudiante A1 solo resolvió parte del inciso a) dejando sin contestar los incisos b) y c). Es capaz de determinar el elemento identidad del grupo, aunque no menciona cómo lo hizo, en cambio no pudo responder si un elemento en particular del grupo $[\mathbb{Z}_5,\cdot]$ con la operación de multiplicación tiene inverso. Al no responder la pregunta del inverso se puede apreciar que A1 tienen dificultades con uno de los axiomas que conforman a un grupo, creando dificultades para responder correctamente al inciso a) y también a los demás.

La penúltima pregunta del inciso a) no la contestó la cual consistió en determinar si $[\mathbb{Z}_5,\cdot]$ es o no grupo, lo que evidencia que el estudiante no muestra una concepción esquema de grupo, esto se ratifica al no poder contestar la pregunta y mucho menos responder que debía modificarle a $[\mathbb{Z}_5,\cdot]$ para que sí fuese grupo. Esto se muestra en la figura 1.

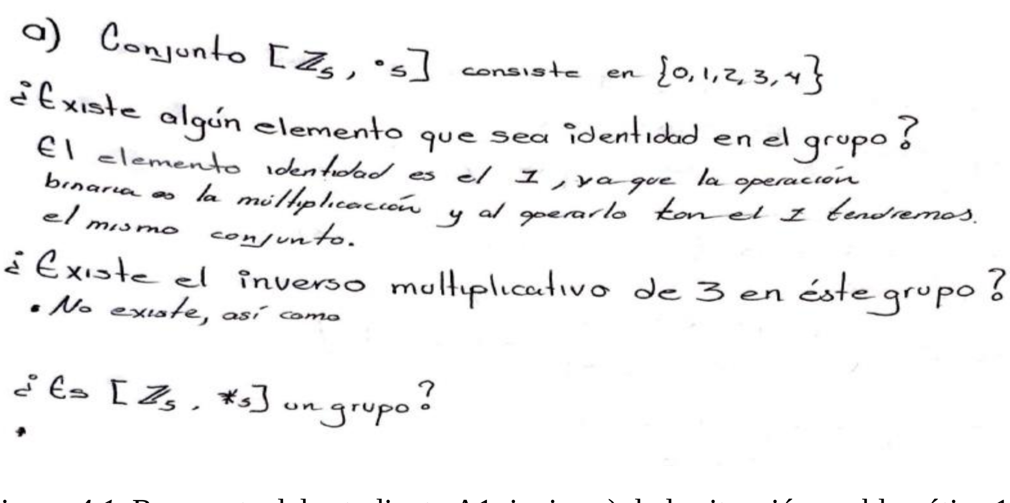

a) Conjunto $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ consiste en $\{0,1,2,3,4\}$
¿Existe algún elemento que sea identidad en el grupo?
El elemento identidad es el 1, ya que la operación binaria es la multiplicación y al operarlo con el 1 tendremos el mismo conjunto.
¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en éste grupo?
• No existe, así como
¿Es $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ un grupo?
•

Figura 4.1. Respuesta del estudiante A1, inciso a) de la situación problemática 1.

Finalmente, para la última pregunta del inciso a) su respuesta no es completa pues menciona algunos elementos que conforman un grupo los cuales a su vez resultan incompletos. Adicionalmente puede analizarse que el estudiante no muestra una tematización del esquema de grupo al cual le pueda aplicar acciones para darse cuenta de la existencia de un grupo genérico y de la existencia de otros ejemplos de grupos. Por ejemplo no enuncia el axioma de asociatividad y el correspondiente a los inversos no está dado correctamente, también se puede apreciar que el estudiante no usa el lenguaje formal de la matemática, en particular el relacionado con el álgebra, lo cual hace más difícil para el estudiante responder correctamente a la pregunta. En la figura 2 se puede apreciar lo mencionado.

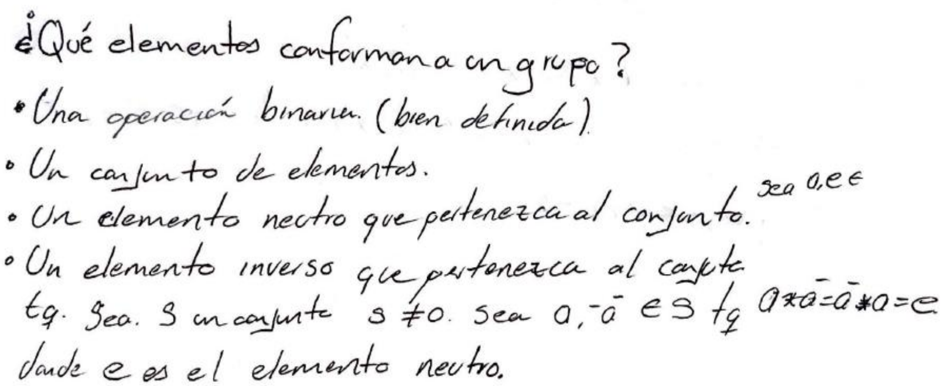
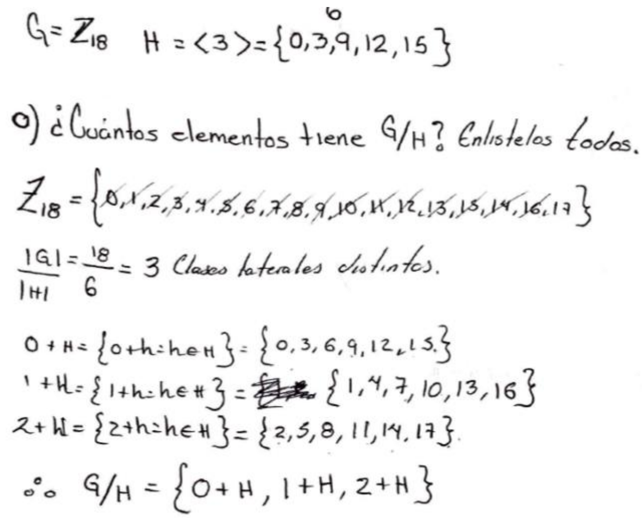

¿Qué elementos conforman a un grupo?
- Una operación binaria. (bien definida)
- Un conjunto de elementos.
- Un elemento neutro que pertenezca al conjunto. sea $a, e \in$
- Un elemento inverso que pertenezca al conjto. tq. Sea. S un conjunto $S \neq 0$. sea $a, \bar{a} \in S$ tq $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$ donde e es el elemento neutro.

Figura 4.2. Respuesta del estudiante A1, inciso a) de la situación problemática 1.

El estudiante no respondió los incisos b) y c) de la situación problemática 1 así que no evidencia una concepción esquema de subgrupo, pues no muestra la coordinación de los esquemas de grupo, subconjunto y función, para aplicar el esquema de grupo a la pareja que consiste del subconjunto y la restricción de la operación binaria a este subconjunto y así encontrar los subconjuntos que sean subgrupos y aquellos que no lo sean.

En la situación problemática número 2 el estudiante contesta correctamente tres de los cuatro incisos. Pareciera ser capaz de trabajar con el grupo cociente G/H y su operación binaria, construir su tabla, identificar el elemento identidad y el inverso de un elemento. Sin embargo, se requiere profundizar en el pensamiento del estudiante para poder determinar si es consciente de lo que está haciendo o solo lo hace de manera mecánica, la duda es porque en la situación 1 teniendo un grupo más sencillo no pudo determinar inversos para elementos particulares. Además, en clases se resolvieron muchos problemas de este tipo, en cambio no se trabajó con el conjunto $[\mathbb{Z}_5, \cdot]$. Es capaz de trabajar con problemas iguales a los vistos en clase o realizados en las tareas, pero presenta dificultades al tener que enfrentarse a conjuntos y operaciones nuevas. Esto se puede apreciar en las imágenes 3 y 4.



$G = \mathbb{Z}_{18}$ $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15\}$

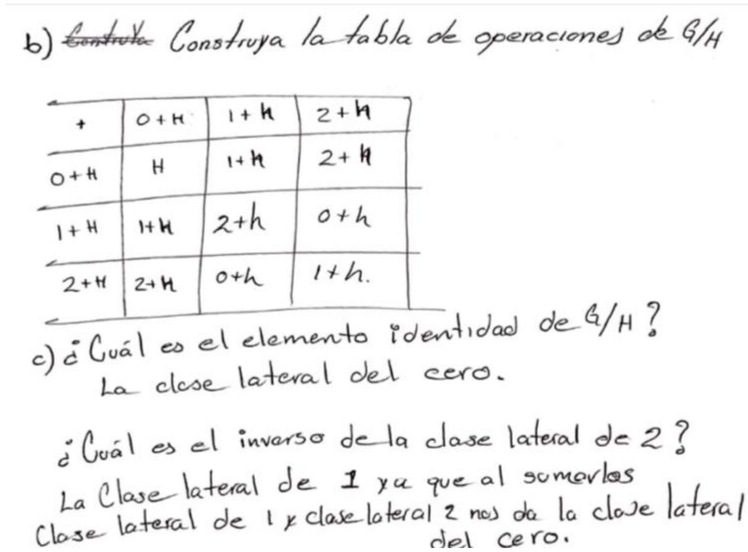
a) ¿Cuántos elementos tiene G/H? Enlístelos todos.

$\mathbb{Z}_{18} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,14,16,17\}$

$\frac{|G|}{|H|} = \frac{18}{6} = 3$ Clases laterales distintas.

$0+H = \{0+h : h \in H\} = \{0,3,6,9,12,15\}$
$1+H = \{1+h : h \in H\} = \{1,4,7,10,13,16\}$
$2+H = \{2+h : h \in H\} = \{2,5,8,11,14,17\}$
$\therefore\ G/H = \{0+H, 1+H, 2+H\}$

Figura 4.3. Respuesta del estudiante A1 al inciso a) situación problemática 2.



b) ~~Contruta~~ Construya la tabla de operaciones de G/H

+	0+H	1+H	2+H
0+H	H	1+H	2+H
1+H	1+H	2+h	0+h
2+H	2+H	0+h	1+h.

c) ¿Cuál es el elemento identidad de G/H?
La clase lateral del cero.

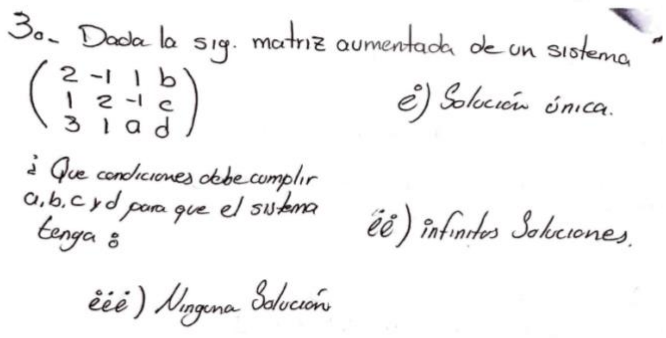
¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2?
La Clase lateral de 1 ya que al sumarlos
Clase lateral de 1 y clase lateral 2 nos da la clase lateral del cero.

Figura 4.4 Respuesta del estudiante A1 al inciso b) y c) situación problemática 2.

Sin embargo, no pudo contestar el inciso d) donde se le pedía determinar un grupo isomorfo al grupo cociente, con lo cual se demuestra que el estudiante no evidencia que el esquema de grupo se ha tematizado en un objeto al cual pueda aplicarle acciones, en este caso la acción de "isomorfo a" y con ello contestar si dos grupos son isomorfos o no, o determinar a qué otro grupo puede ser isomorfo el grupo dado.

De acuerdo a las respuestas dadas en las situaciones 1 y 2 el alumno no evidencia las estructuras mentales de esquema de grupo y subgrupo, y desde luego tampoco ha esquematizado el esquema de grupo en un objeto.

En la situación problemática 3 el estudiante no contestó ni un solo inciso de los tres en los que se pedía determinar condiciones para que el sistema tuviera solución única, una infinidad de soluciones o no existiera solución. No determinó las condiciones bajo los cuales los parámetros *a, b, c* y *d* determinan las respuestas a los tres incisos. Dado que la figura de un homomorfismo de grupos constantemente relaciona un sistema de ecuaciones lineales el alumno debe ser capaz de poder trabajar con estos sistemas. Al no responder a esta situación, no se tiene evidencia de que el alumno tenga la concepción previa de objeto de sistema de ecuaciones lineales (Ver figura 5).



3.- Dada la sig. matriz aumentada de un sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 3 & 1 & a & d \end{pmatrix}$$

¿Que condiciones debe cumplir a, b, c y d para que el sistema tenga:

i) Solución única.

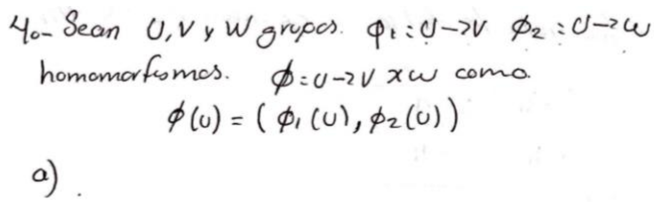
ii) infinitas Soluciones.

iii) Ninguna Solución

Figura 4.5. Respuesta del estudiante A1 a la situación problemática 3.

En la situación problemática 4 al igual que en la situación precedente, no optó por resolverlo. Al no tener una respuesta por parte del estudiante se puede decir que éste no evidencia la estructura objeto de homomorfismo entre grupos. Ya que responde al inciso a), es decir no encontró casos particulares de homomorfismos, ni siquiera fijar los grupos entre los homomorfismos y mucho menos demostrar que ϕ es homomorfismo.

Para el inciso b) le sería más difícil darse cuenta de que este proceso de dar ejemplos de grupos y determinar los homomorfismos entre ellos se puede llegar a generalizar. En la figura 6 se puede observar lo mencionado de los dos párrafos anteriores.



4.- Sean U, V y W grupos. $\phi_1 : U \to V$ $\phi_2 : U \to W$ homomorfismos. $\phi : U \to V \times W$ como

$$\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$$

a)

Figura 4.6. Respuesta del estudiante A1 a la situación problemática 4.

Como el estudiante no respondió la situación no se cuenta con evidencia para determinar si el alumno cuenta o no con la estructura previa de objeto de homomorfismo.

Por último en la situación problemática número 5 el alumno solo respondió el inciso a) pero de manera incorrecta, los incisos b) y c) los dejó sin resolver. Puede observarse que el estudiante no evidencia tener un esquema de cuantificador existencial pues no encontró un elemento $p(x)$ del grupo $P_2(\mathbb{R})$ que cumpla la condición pedida en los incisos a) y b). Se puede apreciar que el estudiante no entiende que está pasando con la aplicación ϕ y a su vez parece que no tiene idea de cómo se involucra el conjunto de las matrices cuadradas con el de los polinomios. Con lo que no evidencia la estructura mental de esquema de función y de conjunto y por tanto el de cuantificador existencial en un primer nivel. Véase en la figura 4.7.

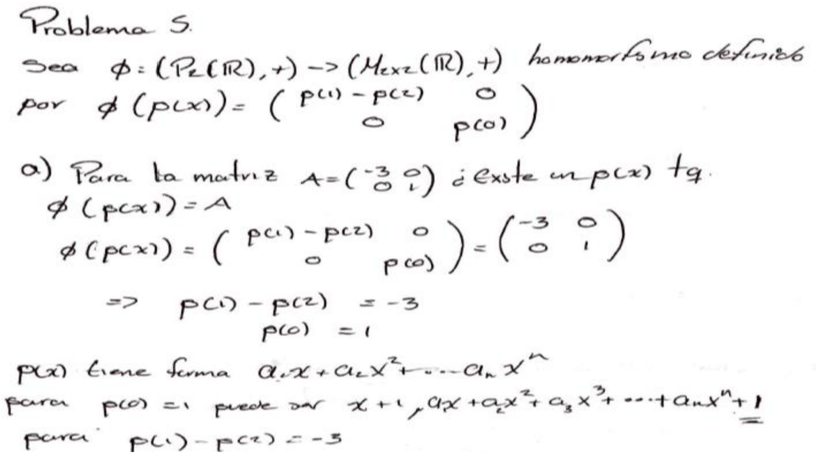
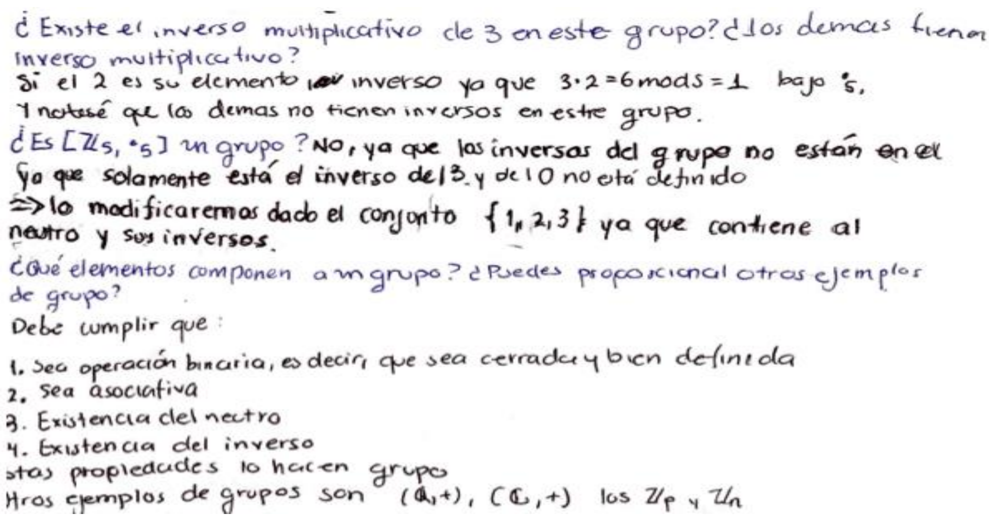

Problema 5.
Sea $\phi : (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ homomorfismo definido
por $\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$
a) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Exste un $p(x)$ tq.
$\phi(p(x)) = A$
$\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow p(1) - p(2) = -3$
$p(0) = 1$
$p(x)$ tiene forma $a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$
para $p(0) = 1$ puede ser $x + 1, a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + 1$
para $p(1) - p(2) = -3$

Figura 4.7. Respuesta del estudiante A1 al inciso a), situación problemática 5.

De igual manera que en la situación 5, al no responder esta situación no se tiene evidencia para poder determinar si el alumno cuenta o no con la estructura previa de esquema de cuantificador existencial en el primer nivel (inter).

Estudiante A2

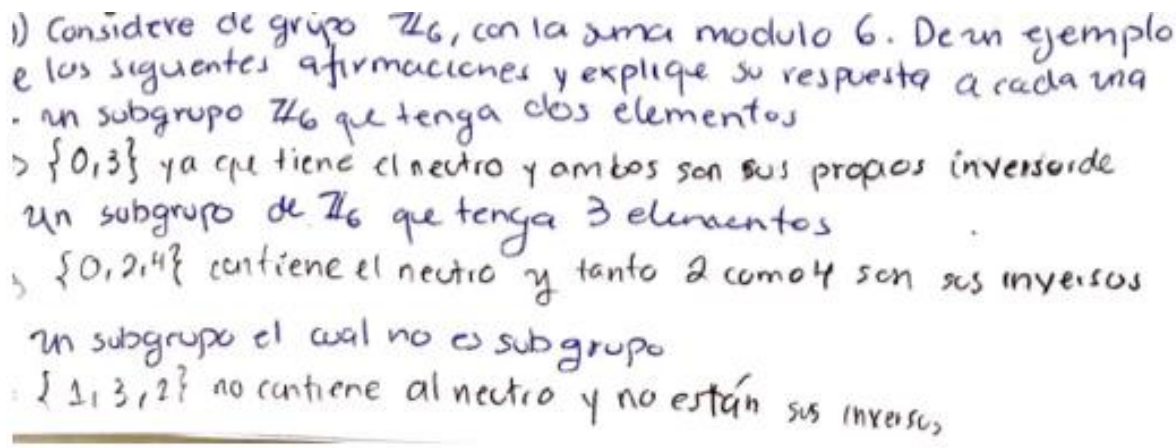
En la situación 1, en el inciso a) el alumno pudo responder las cuatro preguntas. En la primera respondió correctamente que la clase lateral $\bar{1}$ es la identidad del grupo $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$. Así mismo, la segunda pregunta del inciso a) dio correctamente la respuesta al afirmar que la clase lateral $\bar{2}$ es el inverso multiplicativo de la clase lateral $\bar{3}$ sin embargo contestó que los otros elementos del grupo $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ no tienen inversos cuando si lo tienen. La pregunta 3 tres la contesta de manera adecuada, y la última pregunta a la igual que la anterior la responde parcialmente bien no obstante le faltó afirmar que otro elemento que compone a un grupo es el de conjunto distinto del vacío, cabe señalar que igual no usa el lenguaje matemático para enunciar por ejemplo los axiomas, puede ser debido a que no se le pidió que los enunciara formalmente (Ver figura 4.8).



¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo? ¿Los demas tienen inverso multiplicativo?
Si el 2 es su elemento inverso ya que $3\cdot 2 = 6 \bmod 5 = 1$ bajo $\cdot_5$.
Y notesé que los demas no tienen inversos en estre grupo.
¿Es $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ un grupo? No, ya que los inversas del grupo no están en el
ya que solamente está el inverso del 3 y del 0 no está definido
$\Rightarrow$ lo modificaremos dado el conjunto $\{1, 2, 3\}$ ya que contiene al neutro y sus inversos.
¿Qué elementos componen a un grupo? ¿Puedes proporcional otros ejemplos de grupo?
Debe cumplir que:
1. Sea operación binaria, es decir, que sea cerrada y bien definida
2. Sea asociativa
3. Existencia del neutro
4. Existencia del inverso
stas propiedades lo hacen grupo
tros ejemplos de grupos son $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{C},+)$ los $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_n$

Figura 4.8. Respuesta del estudiante A2, al inciso a), situación 1.

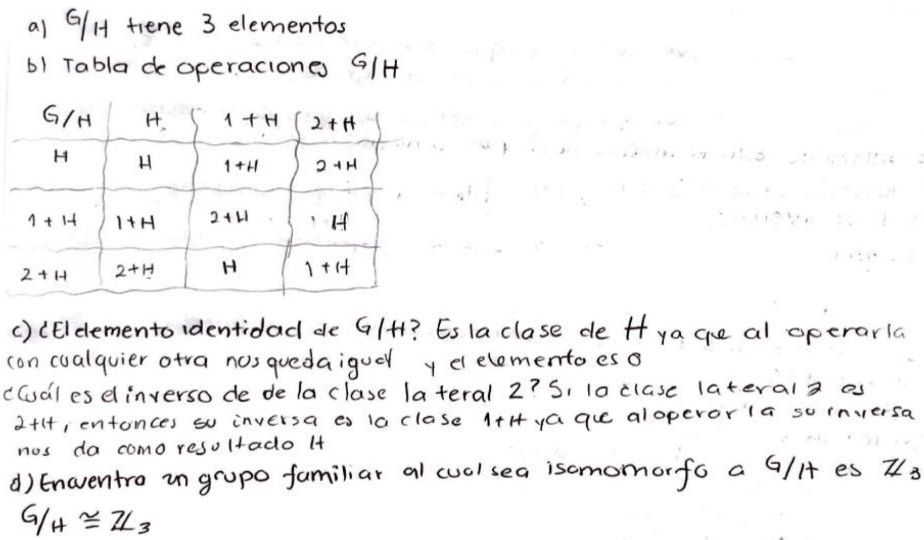
En el inciso b) de la situación 1 el estudiante lo respondió correctamente. Y el inciso c) que fue el último lo dejó vacío; pese a esto último no se puede inferir si no vio el ejercicio o si no supo cómo resolverlo o de plano se le olvidó ya que los dos incisos anteriores los resolvió de manera adecuada. Esto permite a diferencia del estudiante A1 mostrar que tiene más control sobre los elementos que componen el esquema de grupo, pareciera en principio que cuenta con una construcción más o menos estable de esquema de grupo. Véase figura 4.9.



1) Considere de grupo $\mathbb{Z}_6$, con la suma modulo 6. De un ejemplo
e los siguientes afirmaciones y explique su respuesta a cada una
. un subgrupo $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos
> $\{0,3\}$ ya que tiene el neutro y ambos son sus propios inversos de
un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga 3 elementos
> $\{0,2,4\}$ contiene el neutro y tanto 2 como 4 son sus inversos
un subgrupo el cual no es subgrupo
$\{1,3,2\}$ no contiene al neutro y no están sus inversos

Figura 4.9. Respuesta del estudiante A2, a los incisos b), c), y d), situación 1.

En la situación 2 el alumno A2 contestó correctamente los cuatro incisos que conforman dicha situación. Esto puedo verse en la Figura 4.10.


a) G/H tiene 3 elementos

b) Tabla de operaciones G/H

G/H	H	$1+H$	$2+H$
H	H	$1+H$	$2+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	H
$2+H$	$2+H$	H	$1+H$

c) ¿El elemento identidad de G/H? Es la clase de H ya que al operarla con cualquier otra nos queda igual y el elemento es 0

¿Cuál es el inverso de de la clase lateral 2? Si la clase lateral 2 es $2+H$, entonces su inversa es la clase $1+H$ ya que al operarla su inversa nos da como resultado H

d) Encuentra un grupo familiar al cual sea isomomorfo a G/H es $\mathbb{Z}_3$

$G/H \cong \mathbb{Z}_3$

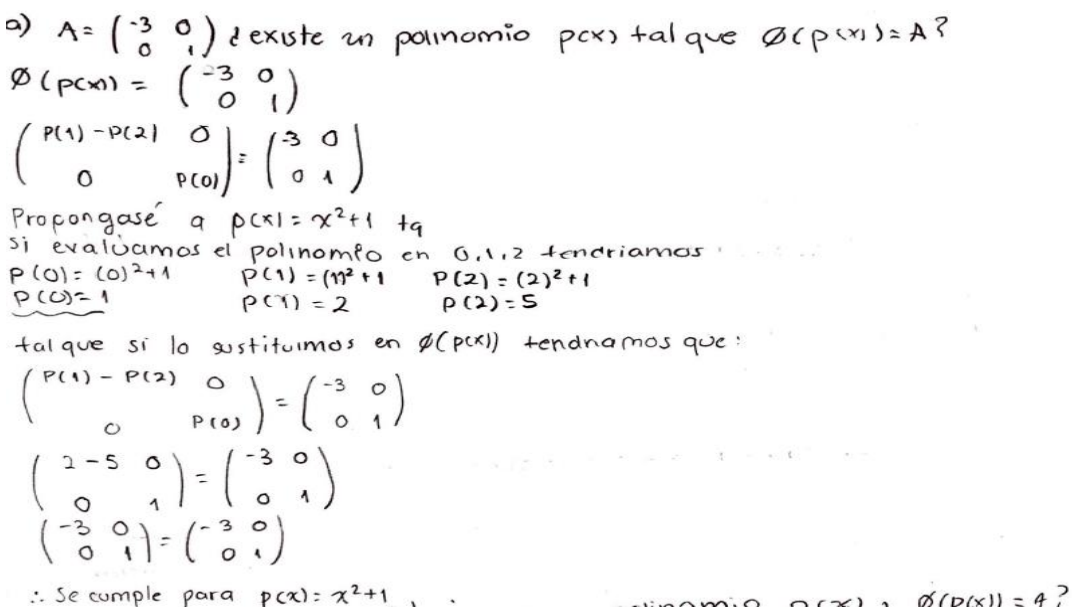
Figura 4.10. Respuesta del estudiante A2, incisos a), b), c), y d), situación 2.

Al haber contestado la situación 2 correctamente y la situación 1 en su mayoría de manera efectiva podemos pensar que el estudiante A2 cuenta con el esquema de grupo y subgrupo sin embargo requerimos de una entrevista para ahondar más en su pensamiento y poder determinar con toda seguridad si la estudiante cuenta o no con la estructura de esquema de grupo, pues puede ser que las respuestas que dio incorrectamente pudieran deberse a algún descuido.

El estudiante A2 contestó la situación número 1, 2 y 5, dejando de lado las situaciones 3 y 4. Puede ser que no haya contestado por falta de tiempo al tratar de resolver las otras tres situaciones, dado que no respondió la situación no se tiene evidencia de que el alumno cuente o no con la estructura previa de objeto de sistema de ecuaciones lineales que es la estructura que se quería evidenciar con la resolución de la situación 3.

Al igual que en la situación 3, la situación 4 la dejó en blanco, se podría inferir distintos panoramas por lo cual este estudiante no contestó, pese a ello no se puede asegurar que el estudiante cuente o no con la estructura previa de objeto de homomorfismo de grupos.

Como se mencionó anteriormente la situación 5 si la contestó, aunque no correctamente del todo ya que el inciso c) le falló. En el inciso a) se puede apreciar que encuentra un polinomio sin la rigurosidad matemática pues solo lo propone y no da detalles de cómo lo encontró, es decir, da un ejemplo que resulta para ese caso, pero no se puede encontrar un procedimiento por el cual encontró dicho polinomio, esto se muestra en la figura 4.11.


a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ tal que $\emptyset(p(x)) = A$?

$\emptyset(p(x)) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} P(1)-P(2) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propongasé a $p(x) = x^2+1$ tq

si evaluamos el polinomio en 0, 1, 2 tendriamos:

$P(0) = (0)^2+1$ $\quad P(1) = (1)^2+1$ $\quad P(2) = (2)^2+1$

$P(0) = 1$ $\quad P(1) = 2$ $\quad P(2) = 5$

tal que si lo sustituimos en $\emptyset(p(x))$ tendriamos que:

$\begin{pmatrix} P(1)-P(2) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

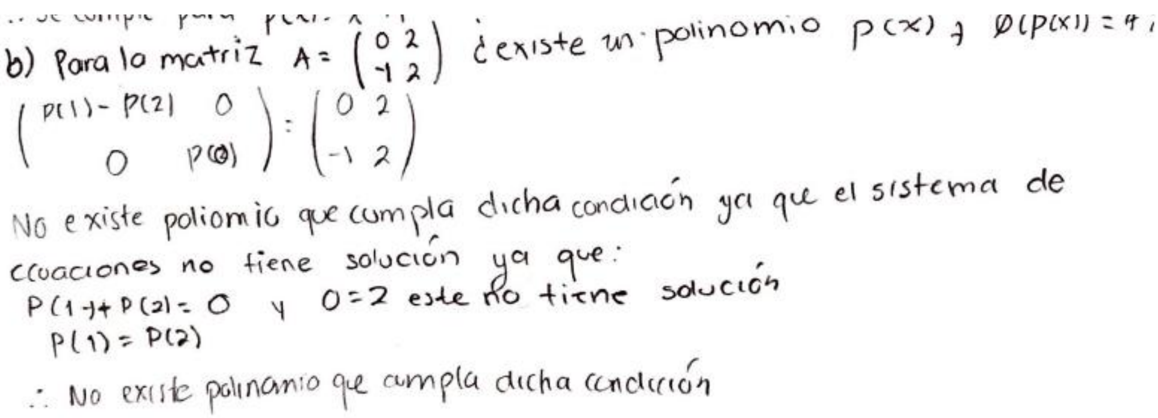
$\begin{pmatrix} 2-5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Se cumple para $p(x) = x^2+1$

Figura 4.11. Respuesta del estudiante A2, inciso a) situación 5.

En el inciso b) puede afirmar efectivamente que no existe como tal un polinomio que satisfaga la condición pedida, pero lo hace basándose en los procedimientos que realizó, sin embargo, está incorrecto porque no plantea el sistema de ecuaciones lineales que debe resolver para determinar si existe o no tal matriz. Esto se muestra en la figura 4.12.


b) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ $\ni$ $\emptyset(p(x)) = A$?

$\begin{pmatrix} P(1)-P(2) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

No existe poliomio que cumpla dicha condición ya que el sistema de ecuaciones no tiene solución ya que:

$P(1)+P(2) = 0$ y $0 = 2$ este no tiene solución

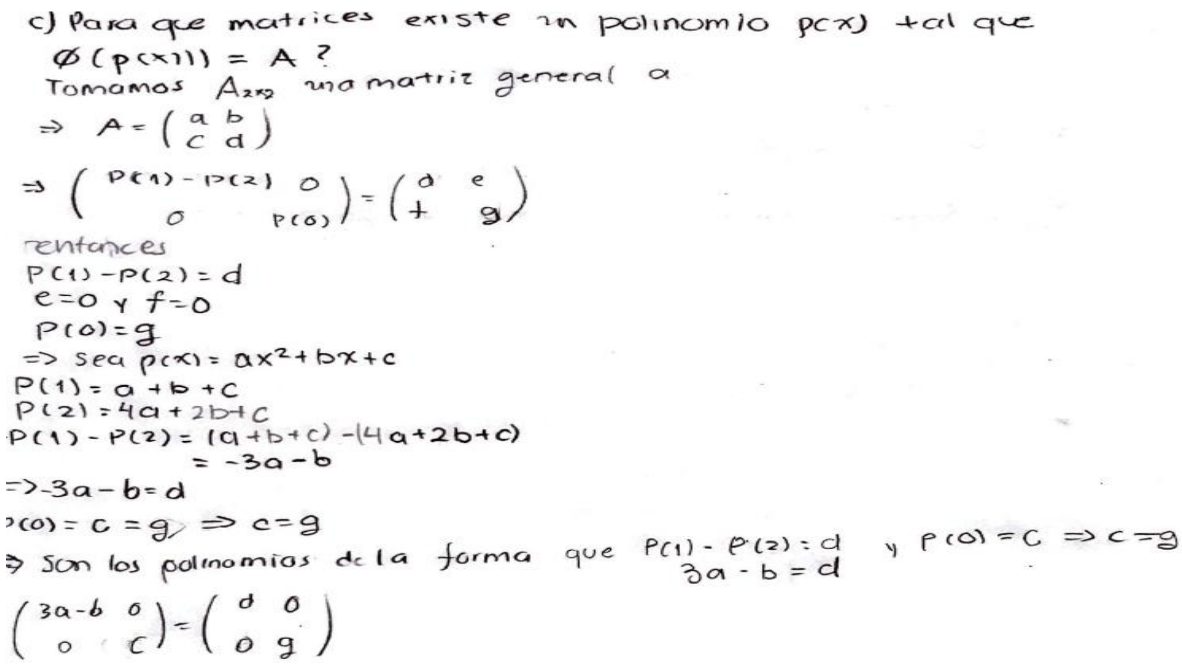
$P(1) = P(2)$

$\therefore$ No existe polinomio que cumpla dicha condición

Figura 4.12. Respuesta del estudiante A2, inciso b) situación 5.

Para el caso general en el cual se pide para qué polinomios existe un matriz A llega casi a establecer para qué polinomios se cumple ϕ(p(x)) = A, sin embargo cuando construye el sistema de ecuaciones no lo resuelve de manera correcta, pierde de vista cuales son las variables y cuales los números en general, de manera que al parecer tiene dificultades con la existencia de las soluciones de un sistema de ecuaciones, esto podría ser la razón por la cual no resolvió la situación 3 y creemos que también es una de las dificultades por las cuales la mayoría de los estudiantes no pueden determinar la figura de un homomorfismo entre grupos. Ver figura 4.13.

Al contestar solo el primer inciso de forma correcta no puede afirmarse si el estudiante posee o no una estructura previa de lo que es el esquema de cuantificador existencial en primer nivel, pues en ninguno de los tres incisos menciona la existencia del polinomio $p(x)$.



c) Para que matrices existe un polinomio $p(x)$ tal que

$\phi(p(x)) = A$?

Tomamos $A_{2\times 2}$ una matriz general a

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$

entonces

$p(1) - p(2) = d$

$e=0$ y $f=0$

$p(0) = g$

$\Rightarrow$ sea $p(x) = ax^2+bx+c$

$P(1) = a+b+c$

$P(2) = 4a+2b+c$

$P(1)-P(2) = (a+b+c)-(4a+2b+c)$

$= -3a-b$

$\Rightarrow -3a-b = d$

$p(0) = c = g \Rightarrow c = g$

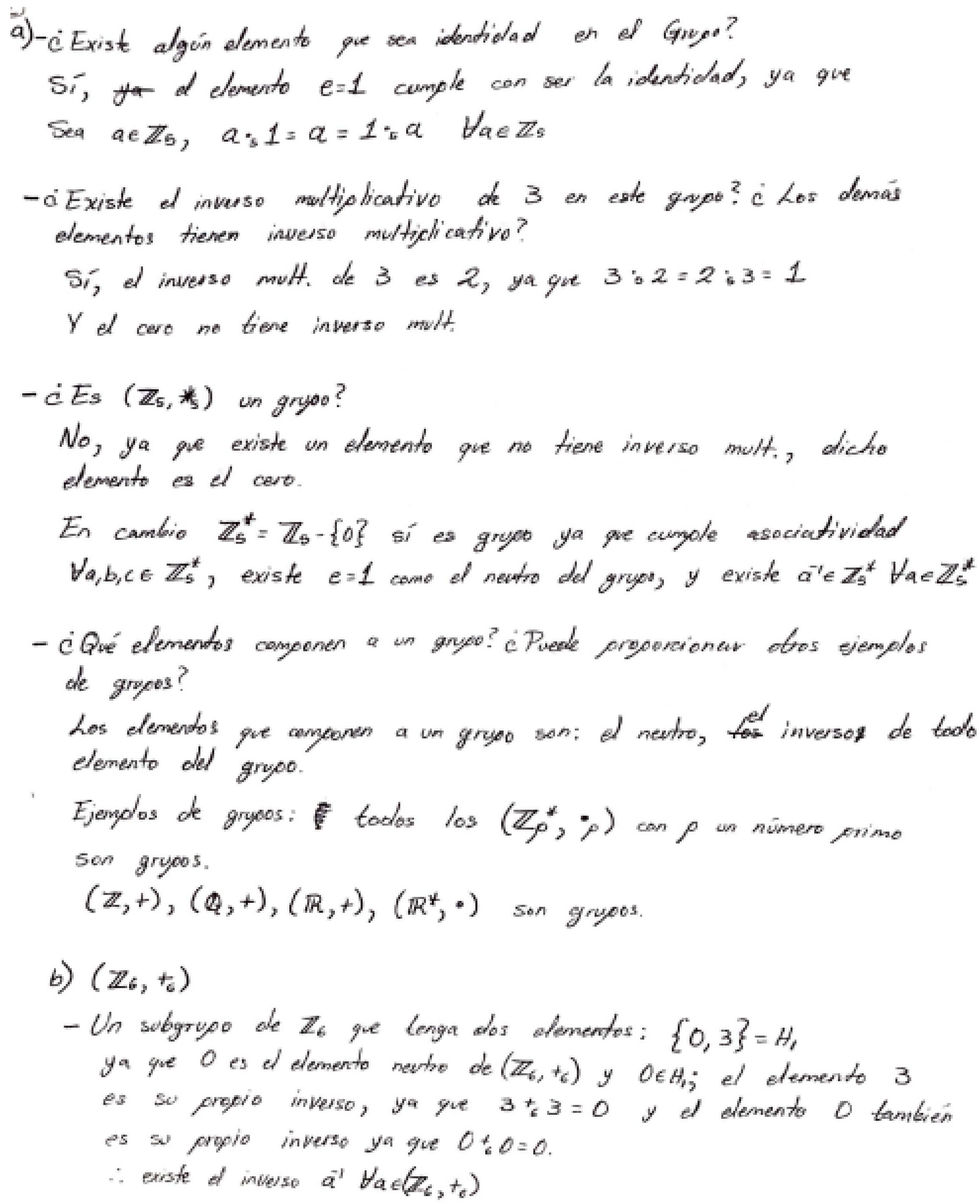
$\Rightarrow$ Son los polinomios de la forma que $P(1)-P(2) = d$, $3a-b=d$ y $P(0)=C \Rightarrow c=g$

$\begin{pmatrix} 3a-b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$

Figura 4.13. Respuesta del estudiante A2, inciso c) situación 5.

Estudiante A3

En la situación 1 el estudiante A3 contesta de manera correcta los incisos a) y b). Puede observarse en las respuestas del estudiante el control sobre los elementos del esquema de grupo y subgrupo; es capaz de determinar neutro e inversos y modificar $[\mathbb{Z}_5,\cdot]$ para que fuese grupo, excluyendo al cero por ser el único elemento sin inverso bajo la operación de producto módulo 5. Es interesante analizar la respuesta al inciso c) ya que considera que $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$, su justificación lo hace mediante la definición de subgrupo, en la cual no se percató de que para que un conjunto sea subgrupo de un grupo debe ser en principio subconjunto del grupo, esto lo dio por hecho y fue la razón de su error. Habría que analizar con más detalle el razonamiento del estudiante para verificar si esta condición es obvia para él o si no le puso atención en la definición. Véase imágenes 4.14 y 4.15.



a) - ¿Exist algún elemento que sea identidad en el Grupo?

Sí, ~~ya~~ el elemento $e=1$ cumple con ser la identidad, ya que

Sea $a \in \mathbb{Z}_5$, $a \cdot_5 1 = a = 1 \cdot_5 a \quad \forall a \in \mathbb{Z}_5$

- ¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo? ¿Los demás elementos tienen inverso multiplicativo?

Sí, el inverso mult. de 3 es 2, ya que $3 \cdot_5 2 = 2 \cdot_5 3 = 1$

Y el cero no tiene inverso mult.

- ¿Es $(\mathbb{Z}_5, *_5)$ un grupo?

No, ya que existe un elemento que no tiene inverso mult., dicho elemento es el cero.

En cambio $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 - \{0\}$ sí es grupo ya que cumple asociatividad $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_5^*$, existe $e=1$ como el neutro del grupo, y existe $a^{-1} \in \mathbb{Z}_5^*$ $\forall a \in \mathbb{Z}_5^*$

- ¿Qué elementos componen a un grupo? ¿Puede proporcionar otros ejemplos de grupos?

Los elementos que componen a un grupo son: el neutro, ~~los~~ el inversos de todo elemento del grupo.

Ejemplos de grupos: todos los $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ con p un número primo son grupos.

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ son grupos.

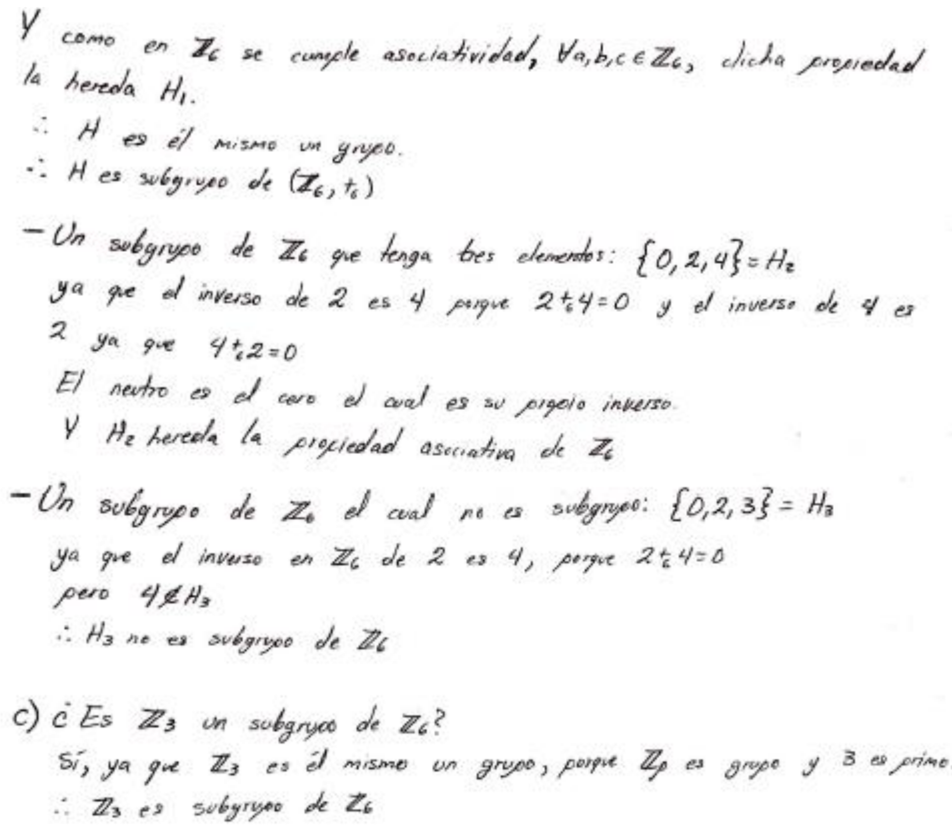
b) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos: $\{0,3\} = H_1$

ya que 0 es el elemento neutro de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ y $0 \in H_1$; el elemento 3 es su propio inverso, ya que $3 +_6 3 = 0$ y el elemento 0 también es su propio inverso ya que $0 +_6 0 = 0$.

$\therefore$ existe el inverso a^{-1} $\forall a \in (\mathbb{Z}_6, +_6)$

Figura 4.14. Respuesta del estudiante A3, incisos a), b) y c) situación 1.


Y como en $\mathbb{Z}_6$ se cumple asociatividad, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_6$, dicha propiedad la hereda H_1.
$\therefore$ H es él mismo un grupo.
$\therefore$ H es subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

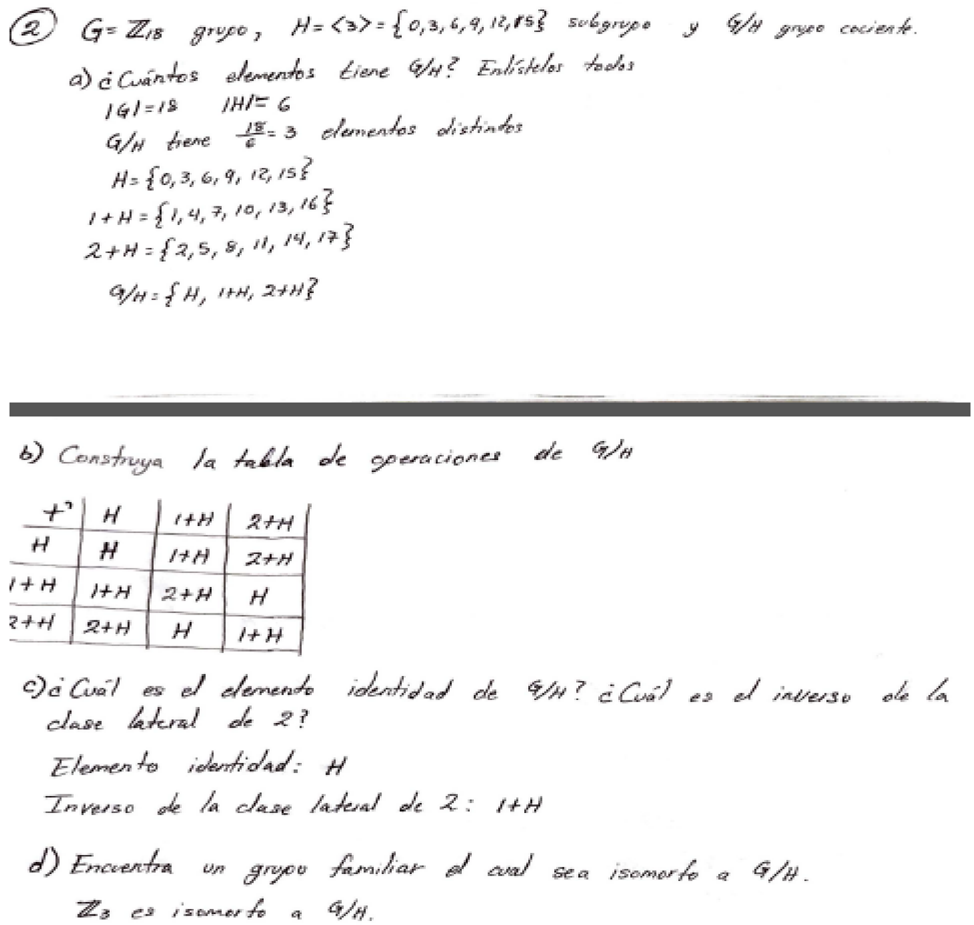
— Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga tres elementos: $\{0, 2, 4\} = H_2$
ya que el inverso de 2 es 4 porque $2 +_6 4 = 0$ y el inverso de 4 es 2 ya que $4 +_6 2 = 0$
El neutro es el cero el cual es su propio inverso.
Y H_2 hereda la propiedad asociativa de $\mathbb{Z}_6$

— Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ el cual no es subgrupo: $\{0, 2, 3\} = H_3$
ya que el inverso en $\mathbb{Z}_6$ de 2 es 4, porque $2 +_6 4 = 0$
pero $4 \notin H_3$
$\therefore$ H_3 no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$?
Sí, ya que $\mathbb{Z}_3$ es él mismo un grupo, porque $\mathbb{Z}_p$ es grupo y 3 es primo.
$\therefore$ $\mathbb{Z}_3$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

Figura 4.15. Respuesta del estudiante A3, parte del inciso b) e inciso c) situación 1.

La situación problemática 2 la respondió de manera correcta, en cada inciso puede determinar la respuesta sin problemas. Puede verse que maneja con soltura al grupo cociente, el neutro e inversos en este grupo en particular y aunque no justifica la respuesta que da al inciso d) a diferencia de los demás estudiantes menciona el grupo al cual es isomorfo el grupo cociente, esto de acuerdo a las estructuras previas da evidencia de contar con la estructura de grupo y la tematización de este en un objeto el cual puede comparar con el grupo $\mathbb{Z}_3$ bajo la relación de equivalencia “es isomorfo a”. Esto puede observarse en la figura 416.



② $G = \mathbb{Z}_{18}$ grupo, $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15\}$ subgrupo y G/H grupo cociente.

a) ¿Cuántos elementos tiene G/H? Enlístelos todos

$|G| = 18$ $|H| = 6$

G/H tiene $\frac{18}{6} = 3$ elementos distintos

$H = \{0,3,6,9,12,15\}$

$1+H = \{1,4,7,10,13,16\}$

$2+H = \{2,5,8,11,14,17\}$

$G/H = \{H, 1+H, 2+H\}$

b) Construya la tabla de operaciones de G/H

+	H	$1+H$	$2+H$
H	H	$1+H$	$2+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	H
$2+H$	$2+H$	H	$1+H$

c) ¿Cuál es el elemento identidad de G/H? ¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2?

Elemento identidad: H

Inverso de la clase lateral de 2: $1+H$

d) Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H.

$\mathbb{Z}_3$ es isomorfo a G/H.

Figura 4.16. Respuesta del estudiante A3, incisos a), b), c) y d) situación 2.

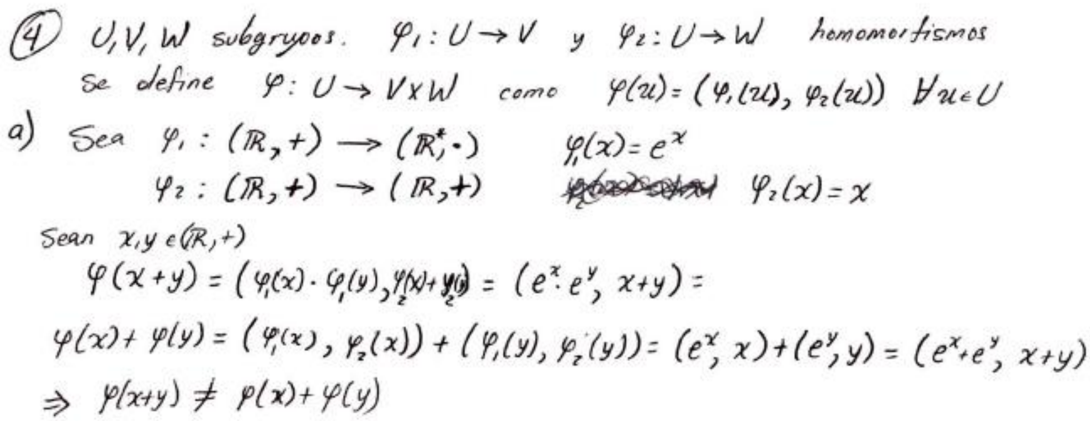
Al responder adecuadamente las situaciones 1 y 2 se puede afirmar que el estudiante A3 aparentemente cuenta con una concepción de las estructuras de esquema de grupo y subgrupo, el haberle fallado el inciso c) de la situación 1 no necesariamente indica que no posea estas estructuras pues tal vez se descuidó o se apresuró en contestar.

La situación 3 la dejó en blanco, pero nuevamente afirmamos que esto no indica que el alumno A3 no tenga como tal la estructura de objeto de ecuaciones lineales. Este problema por lo regular suele presentar demasiado tiempo en su realización y quizás el alumno no alcanzó de tiempo para contestarlo y se enfocó en las otras situaciones.

En la situación 4 solo responde al inciso a) dando ejemplos particulares de homomorfismos de grupos y determinado si $\phi: U \rightarrow V \times W$ es un homomorfismo entre grupos. Construye ϕ y llega a la conclusión de que ϕ no es homomorfismo, el estudiante comete un error al calcular $\phi(x) + \phi(y)$ ya que en la última igualdad realiza la operación de suma para ambos grupos, sin fijarse que la operación en el primer grupo es el producto.

El inciso b) no está resuelto tal vez el alumno A3 no haya sabido como iniciar la demostración de un caso general para este ejercicio, o no lo intentó debido a la respuesta que dio en el inciso a), pues al concluir que no era homomorfismo pensó que no tenía sentido demostrar el inciso b) si no se cumplía el a).

Al analizar esta información puede verse que el alumno no evidencia tener como tal una concepción objeto de homomorfismo al no poder ejemplos de homomorfismos pero puede afirmarse que tiene un conocimiento sobre homomorfismos entre grupos, podría ser que con otro ejemplo pueda evidenciar si efectivamente cuenta o no con dicha estructura mental de homomorfismo entre grupos. Véase figura 4.17.



4 U, V, W subgrupos. $\varphi_1 : U \to V$ y $\varphi_2 : U \to W$ homomorfismos

se define $\varphi : U \to V \times W$ como $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$ $\forall u \in U$

a) Sea $\varphi_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\quad \varphi_1(x) = e^x$

$\varphi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ $\quad \varphi_2(x) = x$

Sean $x, y \in (\mathbb{R}, +)$

$\varphi(x+y) = (\varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y), \varphi_2(x) + \varphi_2(y)) = (e^x \cdot e^y, x+y) =$

$\varphi(x) + \varphi(y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) + (\varphi_1(y), \varphi_2(y)) = (e^x, x) + (e^y, y) = (e^x + e^y, x+y)$

$\Rightarrow \varphi(x+y) \neq p(x) + \varphi(y)$

Figura 4.17. Respuesta del estudiante A3, inciso a) situación 4.

En la situación 5 solo respondió parte del inciso a), los procedimientos hechos son correctos, pero no concluye nada. Esto puedo deberse a la falta de tiempo ya que comienza resolviendo bien el inciso a) el cual le podría darle una idea general de cómo resolver el inciso b) pues ambos son casos particulares

Al observar los pocos procedimientos realizados en la situación 5 puede apreciarse que el alumno A3 tiene claro que debe resolver la igualdad $\phi\big(p(x)\big) = A$, con éxito obtiene el lado izquierdo de la igualdad, pero una vez que iguala resuelve el sistema, como solo eso escribió no sabemos si pudo haberle faltado tiempo, ya estaba cansado o no supo qué más hacer, por lo que no puede decirse si este estudiante cuenta o no con una concepción esquema de cuantificador existencial en primer nivel; una alternativa para analizar si cuenta o no con esta estructura sería entrevistarlo y preguntarle sobre la resolución de la situación 5 para determinar si puede o no responderla. Obsérvese la figura 4.18.

⑤ $\varphi : (P_2(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ homomorfismo

$$\varphi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

a) Para $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Existe un polinomio $p(x)$ tal que $\varphi(p(x)) = A$?

$$\begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(1) - p(2) = -3$$
$$p(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_2(1)^2 + a_1(1) + 1 - a_2(2)^2 - a_1(2) - 1 = -3$$
$$a_2 + a_1 + 1 - 4a_2 - 2a_1 - 1 = -3$$
$$-3a_2 - a_1 = -3$$
$$-a_1 = -3 + 3a_2$$
$$a_1 = 3 - 3a_2$$

Figura 4.18. Respuesta del estudiante A3, inciso a) situación 5.

Estudiante A4

A primera vista el estudiante 4 en la situación 1 confunde la operación del producto módulo 5 en el grupo $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ con la de suma módulo 5, ya que en la primera respuesta de la pregunta del inciso a) menciona que el elemento identidad es el cero en lugar de la clase del 1. Estos se muestran en la figura 4.19.

¿Existe elem. identidad en el grupo?

Si es grupo entonces $\exists$ el elemento neutro o identidad el cual que es el 0

Figura 4.19. Respuesta del estudiante A4, inciso a) situación 1.

Suponiendo que el alumno se confundió con la operación en el grupo $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ es de esperar que las siguientes preguntas del inciso a) estén incorrectas. Ahora bien en la pregunta a la existencia del inverso multiplicativo del 3, el alumno A4 contestó que podría ser el 5 o múltiplos del 5 y que al operarse con dicho número o múltiplos daría como resultado la identidad que en este caso el estudiante escribió nuevamente el cero con lo cual puede inferirse que se confundió con la operación empero 5 no es el inverso multiplicativo de 3 lo cual evidencia que el alumno A4 efectivamente no consideró la operación la operación como la del producto módulo 5, no podríamos asegurar si no se fijó en ésta o si solo puede trabajar con la operación de módulo 5, que fue con la que más se trabajó en clase. Sin embargo, es importante señalar que de no haber tomado en cuenta la operación nos permite asegurar que no ha coordinado el esquema de conjunto, operación binaria y axioma, como lo pide la estructura de esquema de grupo. A continuación, se puede apreciar la información anterior en la figura 4.20.

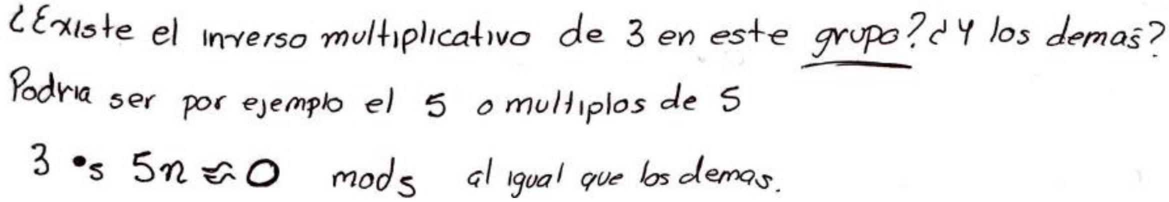

¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo? ¿Y los demas?
Podria ser por ejemplo el 5 o multiplos de 5
$3 \bullet_5 5n \cong 0$ mod5 al igual que los demas.

Figura 4.20. Respuesta del estudiante A4, inciso a) situación 1.

En la penúltima pregunta del inciso a) situación 1, el alumno A4 no contestó correctamente a la pregunta de si $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ es o no un grupo. Esta respuesta da evidencia de que el alumno A4 no es capaz de verificar los tres axiomas de grupo, aunque mencione dos de ellos y diga que con esto se cumple con ser grupo. No se percata de que $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ puede ser grupo si al conjunto $\{0,1,2,3,4\}$ se le excluye el cero para que pueda ser grupo, pues haciendo esto se cumplen los tres axiomas para poder ser grupo. Véase la figura 4.21.

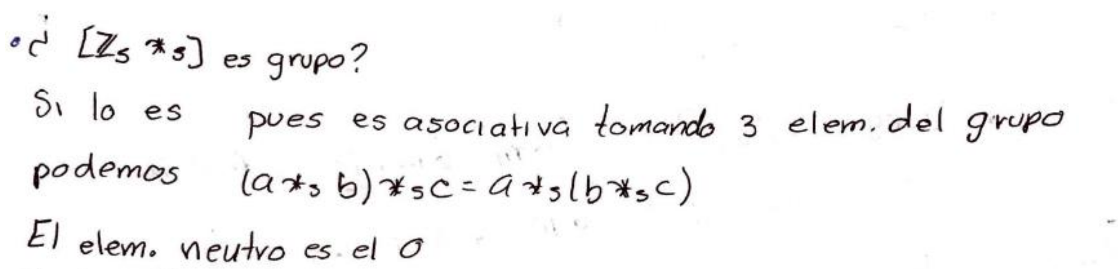

• ¿$[\mathbb{Z}_5 *_5]$ es grupo?
Si lo es pues es asociativa tomando 3 elem. del grupo
podemos $(a *_5 b) *_5 c = a *_5 (b *_5 c)$
El elem. neutro es el 0

Figura 4.21. Respuesta del estudiante A4, inciso a) situación 1.

Para la última pregunta del inciso a) el estudiante contesta correctamente. Es interesante observar como puede describir los tres axiomas que se deben cumplir para que un conjunto y una operación binaria sea grupo, ya que en la pregunta precedente a ésta solo enuncia un axioma. Tal vez el alumno piense que con que se cumple un axioma de los tres que conforman a un grupo sea suficiente para que un conjunto con una operación binaria sea grupo, esto nos indicaría que no ha construido el esquema de axiomas de grupo y por lo tanto no cuenta con el esquema de grupo.

(1997) mencionan que para que un individuo pueda tener un esquema de grupo debe comprender los tres esquemas: el de conjunto, el de operación binaria y el de los axiomas de grupo. Como puede leerse en los párrafos anteriores el estudiante A4 no da evidencia de ser capaz de verificar los tres axiomas de grupo ya que solo los menciona pero al momento de determinar si $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ es o no un grupo solo considera un axioma y no puede probar la existencia del neutro ni de los inversos correctamente que son los dos axiomas faltantes, en resumidas cuentas si el alumno A4 hubiese evidenciado tener el esquema de grupo se hubiese percatado de que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ menos el cero es un grupo pues el cero es el único elemento que no tiene inverso bajo la operación de producto.

En el inciso b) de la situación 1 el estudiante tiene dificultades para dar los subgrupos de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos y tres elementos respectivamente. No es capaz de dar un ejemplo de un subconjunto que no sea subgrupo de $\mathbb{Z}_6$, los ejemplos que intenta dar de subgrupos, parecieran dar evidencia de que aunque expresa al conjunto $\mathbb{Z}_6$ de manera correcta, no relaciona a los subgrupos con el grupo, de manera que debía contener algunos elementos de $\mathbb{Z}_6$, Véase figura 4.22.

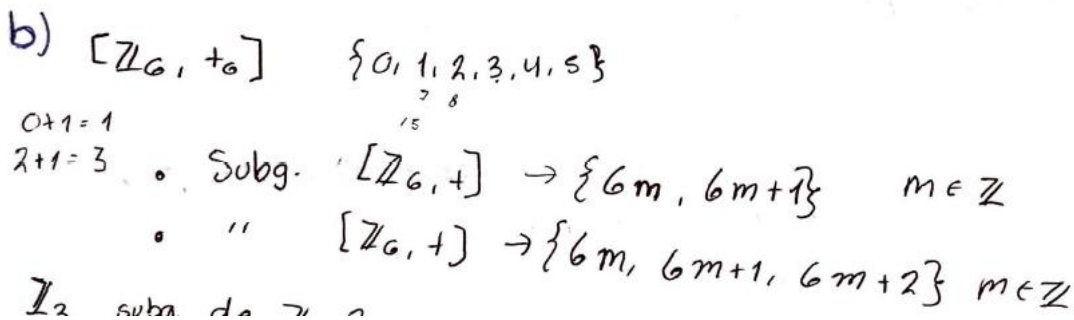


Figura 4.22. Respuesta del estudiante A4, inciso b) situación 1.

En palabras de Brown et al. (1997) un individuo puede entender el concepto de subgrupo mediante la coordinación de tres esquemas: grupo, función y subconjunto. Se observó que el alumno A4 no pudo evidenciar tener una estructura de grupo con lo cual difícilmente podría mostrar tener un esquema de subgrupo.

Para el inciso c) el alumno A4 describe que $\mathbb{Z}_3$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ lo cual es incorrecto; en repetidas ocasiones los alumnos piensan que un subconjunto es un subgrupo y esto no siempre sucede. El estudiante contesta que $\mathbb{Z}_3$ es cerrado con la operación de suma y al enunciar el axioma de inversos deja ver que el elemento neutro es el cero, el alumno no contesta más, pese a ello parece creer que como ambos conjuntos son cerrados bajo la operación de adición entonces $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ sin tomar en cuenta que para que $\mathbb{Z}_3$ sea subgrupo debe ser primero subconjunto de $\mathbb{Z}_6$. Es importante mencionar que la respuesta a esta pregunta no es trivial, pues si se comparan los conjuntos a simple vista se podría pensar que $\mathbb{Z}_3$ si está contenido en $\mathbb{Z}_6$ pues $\mathbb{Z}_3$ contiene a la clases laterales 0,1 y 2 y $\mathbb{Z}_6$ a las clases laterales, 0, 1, 2, 3, 4,5, pero los elementos de $\mathbb{Z}_3$ no son los mismos que las clases laterales 0,1 y 2 de $\mathbb{Z}_6$, aunque se denote igual pues son diferentes módulos. Véase figura 4.23.

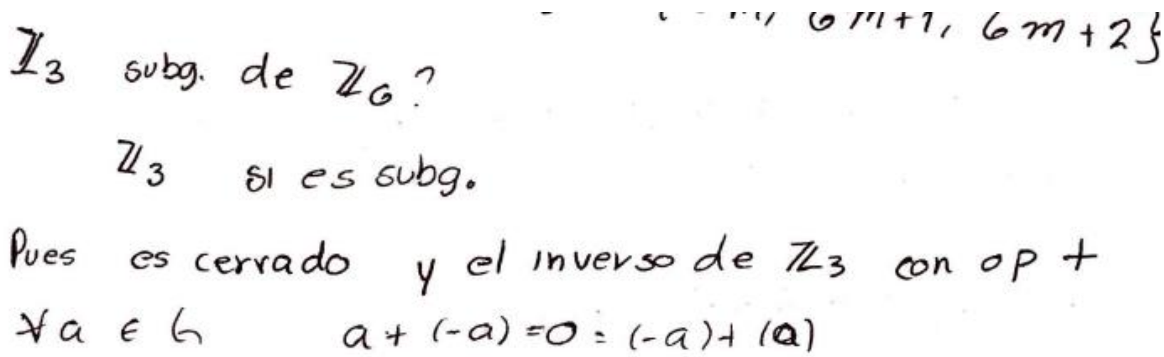


Figura 4.23. Respuesta del estudiante A4, inciso c) situación 1.

Esta respuesta da como evidencia que el alumno no puede coordinar el esquema de función y subconjunto para obtener el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio. De hecho, en ningún momento verifica si el conjunto $\mathbb{Z}_3$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_6$ condicional inicial para que un subconjunto sea subgrupo. Además, se observa que el esquema de los axiomas de grupo no se encuentra construido del todo en el alumno con lo cual se evidencia que no se cuenta con el esquema de subgrupo.

Durante la situación 2 en el inciso a) el estudiante A4 pudo enlistar sin problema los elementos de $\mathbb{Z}_{18}$, describe los elementos de las clases laterales de $1 + H$ y $2 +$ H, y sabe que la clase $0 + H$ es la generada por el 3 es decir el subgrupo H. Al final no escribe formalmente a G/H suponiéndose de igual manera que tal vez se le pudo haber olvidado anotar la respuesta pues en su respuesta se ve evidencia de saber cuáles son los elementos que forman a $\mathbb{Z}_{18}$ y G/H. Véase figura 4.24.

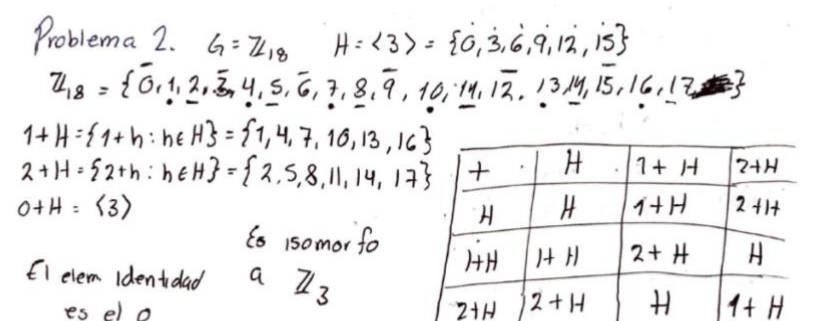


Figura 4.24. Respuesta del estudiante A4, inciso a) e inciso b) situación 2.

Para el inciso c) se tiene la evidencia que el alumno puede identificar sin problema cual es el inverso de la clase lateral de 2 al mencionar que es 1.Es interesante notar que en este ejercicio sí pudo encontrar el inverso de la clase lateral mientras que en el inciso a) de la situación 1 no pudo evidenciarlo, y tal vez esto se deba a que en este ejercicio mediante la tabla pudo identificarlo fácilmente, con lo cual pude suponerse que tal vez hubiese podido encontrar los inversos si hubiese hecho una tabla en el ejercicio anterior como en éste. O deben trabajarse más ejercicios como los del inciso a) en clases. Véase la figura 4.24. En esta misma figura se puede ver que los alumnos consideran que $\mathbb{Z}_3$ es isomorfo al grupo cociente pero no da ningún tipo de justificación.

En las situaciones 4 y 5, el estudiante A4 dejó en blanco las hojas de respuesta, posiblemente por falta de tiempo no se dio a la tarea de responderlas con lo cual por el momento no se puede evidenciar si el alumno A4 cuenta o no con la concepción objeto de ecuaciones lineales ni con la de objeto de homomorfismo entre grupos.

En la última situación del cuestionario, el alumno A4 respondió correctamente el inciso a), sin embargo, no muestra ningún procedimiento por el cual llegó a esa respuesta. Puede verse que el estudiante A4 encuentra al tanteo la respuesta lo que si bien no es del todo correcto nos da evidencia de que A4 comprende lo que está sucediendo en la aplicación del homomorfismo. Véase figura 4.25.

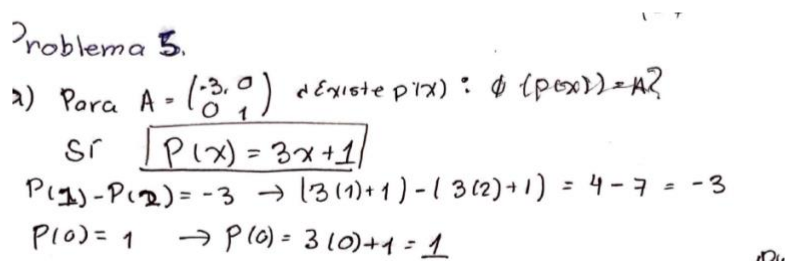


Figura 4.25. Respuesta del estudiante A4, inciso a) situación 5.

Como mencionamos el alumno A4 aunque se da cuenta de lo que ocurre mediante la aplicación del homomorfismo lo cual le permite contestar correctamente el inciso b) al darse cuenta que no hay un polinomio $p(x)$ que al aplicarle ϕ me dé una matriz A con entradas $a_{12} = 2$ y $a_{21} = -1$. Ver figura 4.26.

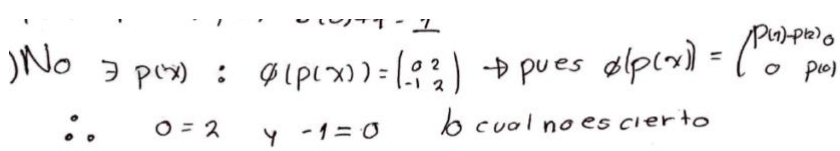


Figura 4.26. Respuesta del estudiante A4, inciso b) situación 5.

Por último, en el inciso c) en su respuesta puede verse que intenta resolver de manera general para que casos existe un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$, sin embargo, parece ser que el estudiante no está tomando en cuenta que la aplicación $\phi(x)$ considera los polinomios de grado dos. El alumno al no considerar los polinomios de grado dos, aunque describa correctamente un polinomio de grado n le va resultar difícil poder encontrar dicha matriz A para el caso general de $\phi(x)$. A primera vista no se puede decir si el alumno pudo contestar la situación 5, pero con esta respuesta se puede tener evidencia que el alumno difícilmente cuenta con una concepción esquema de cuantificador existencial de primer nivel. Véase figura 4.27

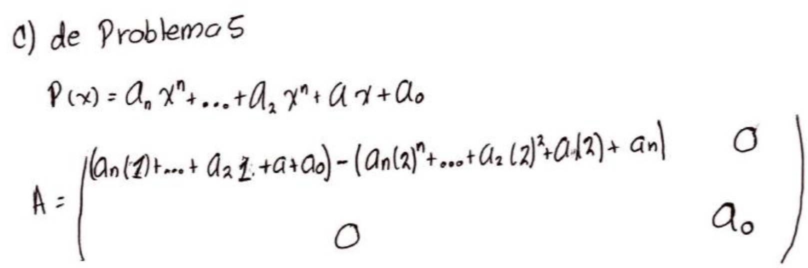


Figura 4.27. Respuesta del estudiante A4, inciso c) situación 5.

Estudiante A5

Realizando el análisis a las primeras respuestas de la situación 1 del alumno 5 puede observarse que la primera pregunta del inciso a) la contesta correctamente al decir que el elemento identidad de $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ es 1. Con esta respuesta puede verificarse que uno de los axiomas de grupo lo comprende, pero no es evidencia necesaria para determinar que cuenta con una concepción esquema de grupo. Ahora bien en la respuesta a la siguiente pregunta del mismo inciso a) el alumno contestó que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ no es grupo, y en eso tiene razón, pero su argumento es falso ya que no se percató que todos los elementos del conjunto que forman a $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ tienen inversos a excepción del cero, de hecho contesta al revés, asegura que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ no es grupo y que por tanto sus elementos no tienen inverso multiplicativo. Al contestar esto último sería casi inmediato ver que en la respuesta a la siguiente pregunta del inciso a) el alumno 5 no respondiera del todo bien al decir si $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ es grupo o no, ya que solo menciona que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ es grupo únicamente con la operación de suma. Es interesante ver esta respuesta, porque parece ser que el alumno comprende que se deben cumplir los axiomas de grupo sin embargo nunca los verifica para probar que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ sea grupo.

Finalmente es curioso ver como el alumno 5 puede citar ejemplos de grupos, en particular el grupo $[\mathbb{R} - \{0\}, \cdot]$ al ver que el conjunto de los números reales menos el cero con la operación producto es grupo, y si pudo citar este ejemplo tal vez debió darse cuenta que $[\mathbb{Z}_5,\ \cdot_5]$ era un grupo eliminando el cero, lo que indica que estos ejemplos son algunos que se dieron en clase y que recuerda el estudiante. Lo descrito en los dos párrafos anteriores puede verse en la figura 4.28.

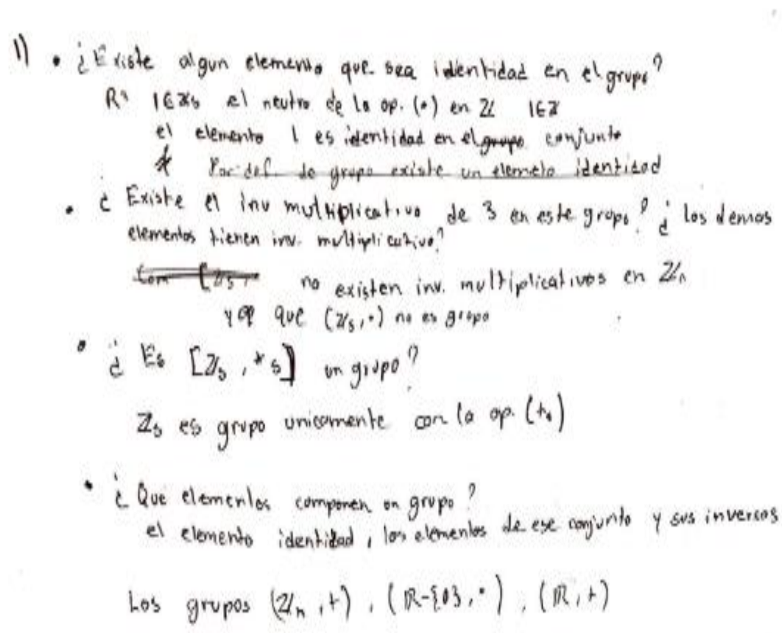
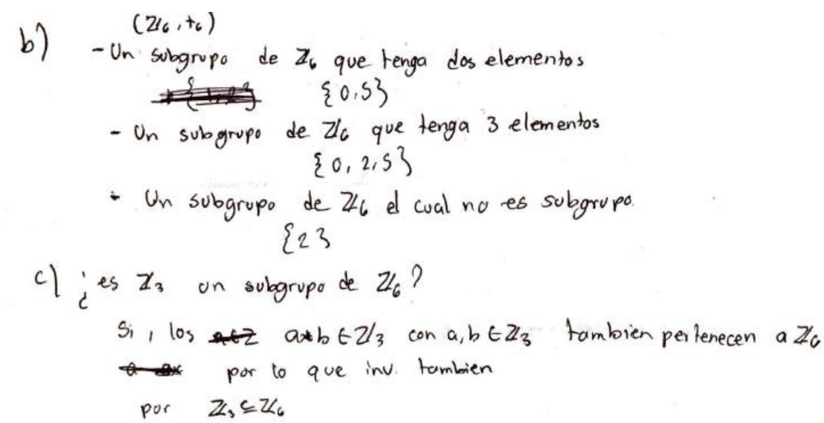

1) • ¿Existe algun elemento que sea identidad en el grupo?
R: $1 \in \mathbb{Z}_6$ el neutro de la op. $(\cdot)$ en $\mathbb{Z}$ $1 \in \mathbb{Z}$
el elemento 1 es identidad en el ~~grupo~~ conjunto
~~Por def. de grupo existe un elemento identidad~~
• ¿Existe el inv multiplicativo de 3 en este grupo? ¿los demas elementos tienen inv. multiplicativo?
~~Con $[\mathbb{Z}_5$~~ no existen inv. multiplicativos en $\mathbb{Z}_n$ ya que $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ no es grupo
• ¿Es $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ un grupo?
$\mathbb{Z}_5$ es grupo unicamente con la op. $(+_5)$
• ¿Que elementos componen un grupo?
el elemento identidad, los elementos de ese conjunto y sus inversos
Los grupos $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$

Figura 4.28. Respuestas del alumno A5, inciso a) situación 1

En el inciso b) de la situación 1, el estudiante A5 solo contesta correctamente el ejemplo de dar un subgrupo de dos elementos cuando se tiene como grupo a $\mathbb{Z}_6$, con la suma módulo 6. Sin embargo, el ejemplo de un subgrupo de tres elementos es incorrecto. Si determinar un subconjunto que no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$. Dado que no justifica cada ejemplo que da, es difícil determinar si cuenta o no con la estructura de subgrupo, se tendría que profundizar más en sus estructuras mentales mediante una entrevista para ver el tipo de argumentación que pudiera permitirnos identificar o no la estructura mental de subgrupo.

Al preguntarle si $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ con la suma módulo 6, que es el inciso c), el alumno A5 responde que sí, menciona que al operar los elementos que pertenecen a $\mathbb{Z}_3$ bajo dicha operación también pertenecen a $\mathbb{Z}_6$ y que por tanto los inversos también. Al revisar esta respuesta puede observarse que el alumno relaciona las propiedades de conjuntos con las propiedades de subgrupo, someramente puede apreciarse una confusión en las propiedades entre ambos conceptos, pero habría que realizar más ejercicios con el alumno para poder determinar con certeza absoluta esta confusión. Sin embargo, esta repuesta parece indicar una ausencia en la concepción del esquema de grupo y de conjunto, pues el alumno al tomar un par de elementos que sería el subconjunto y mediante la restricción de la operación suma el cual es el caso no puede determinar los subconjuntos que son o no subgrupos de $\mathbb{Z}_6$. Véase figura 4.29.



b) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos

~~$\{1,2\}$~~ $\{0,5\}$

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga 3 elementos

$\{0,2,5\}$

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ el cual no es subgrupo

$\{2\}$

c) ¿es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$?

Si, los ~~a+Z~~ $a*b \in \mathbb{Z}_3$ con $a,b \in \mathbb{Z}_3$ tambien pertenecen a $\mathbb{Z}_6$

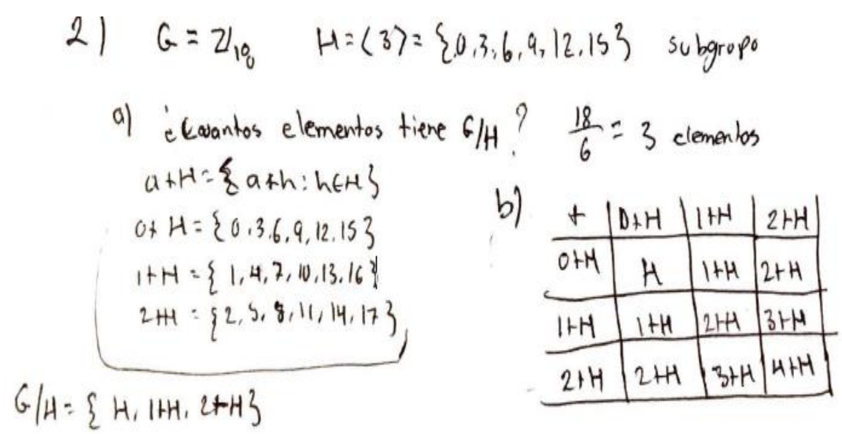
~~a ax~~ por lo que inv. tambien

por $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6$

Figura 4.29. Respuestas del alumno A5, inciso b) y c) situación 1.

Si bien el alumno A5 contestó correctamente algunas preguntas de la situación 1, las restantes intentó contestarlas de igual manera, pese a ello, con la poca información acertada es difícil mencionar que el estudiante A5 cuente con una concepción esquema de grupo y subgrupo de acuerdo a los conocimientos previos descritos en esta investigación.

Respecto a la situación 2 el alumno A5 pudo responder correctamente el inciso a) enumerando los elementos de G/H y comentando cuántos elementos tiene; pero el inciso b) que era ilustrar la tabla de operaciones de G/H no lo hizo correctamente pues al momento de realizar la operación suma de $2+H$ con $1+H\ y\ 2+H$ se equivocó, ya que en lugar de obtener $3+H\ y\ y\ 4+H$ se obtiene $0+H\ y\ 1+H$. Obsérvese figura 4.30.



2) $G = \mathbb{Z}_{18}$ $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15\}$ subgrupo

a) ¿cuantos elementos tiene G/H? $\frac{18}{6} = 3$ elementos

$a+H = \{a+h : h \in H\}$

$0+H = \{0,3,6,9,12,15\}$

$1+H = \{1,4,7,10,13,16\}$

$2+H = \{2,5,8,11,14,17\}$

$G/H = \{H, 1+H, 2+H\}$

b)

+	0+H	1+H	2+H
0+H	H	1+H	2+H
1+H	1+H	2+H	3+H
2+H	2+H	3+H	4+H

Figura 4.30. Respuestas del alumno A5, inciso a) situación 2.

Siguiendo con el inciso c) el alumno contestó correctamente el primer inciso al identificar que la identidad de G/H es la clase de $0+H$, sin embargo al pedirle que escribiera cuál es el elemento inverso de $2+H$ respondió que es $16+H$, no se sabe cómo es que llegó a ella ya que no aparece en ninguno de sus procedimientos, se esperaba que usara la tabla para mencionar que el inverso es $1+H$. Otro punto a destacar es que el alumno pudo identificar sin problemas la identidad del grupo pero el inverso no, con esta respuesta podemos afirmar que el alumno A5 no posee una concepción de esquema de grupo. Véase figura 4.31.

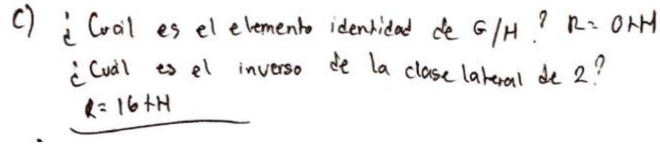

c) ¿Cual es el elemento identidad de G/H? R= $0+H$
¿Cual es el inverso de la clase lateral de 2?
R= $16+H$

Figura 4.31. Respuestas del alumno A5, inciso c) situación 2.

Finalmente para el inciso d) el alumno respondió que un grupo isomorfo a G/H es $\mathbb{Z}_5$. Nuevamente no se sabe si el alumno se esté percatando que para que $\mathbb{Z}_5$ sea isomorfo a G/H, ϕ debe existir una biyección entre los grupos, y al darse cuenta de ello se supondría que el alumno debería tener esquematizado el concepto de grupo en un objeto al cual le pueda aplicar acciones para poder contestar este tipo de preguntas. Obsérvese figura 4.32.

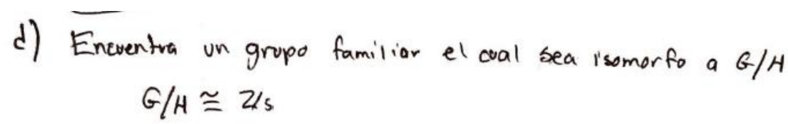
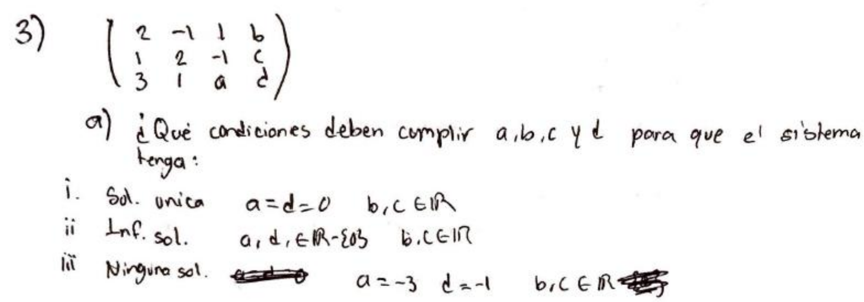

d) Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H
$G/H \cong \mathbb{Z}_5$

Figura 4.32. Respuestas del alumno A5, inciso d) situación 2.

Al revisar las respuestas de las situaciones 1 y 2 se puede observar que el alumno A5 por momentos responde bien a uno u otro axioma de grupo. No hay suficiente evidencia para atestiguar si el alumno tiene bien definida la operación binaria ya que en el inciso b) de la situación dos al construir la tabla tuvo algunos errores. Otro punto para resaltar es que el manejo de subgrupos no está del todo definido, si bien parece que las propiedades de conjunto las entrelaza con las propiedades de subgrupos impidiendo aun obtener un esquema de subgrupo en el alumno A5. Con estas respuestas se puede evidenciar que el alumno por el momento no muestra una concepción de esquema de grupo y subgrupo.

Para la situación 3 el estudiante A5 respondió erróneamente cada cuestión. Se puede observar que respondió sin justificar ninguna de sus repuestas, a simple vista no puede inferirse ni determinarse como es que llegó a esas respuestas, parece indicar que solo contestó por contestar. Véase figura 4.33.


3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 3 & 1 & a & d \end{pmatrix}$

a) ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c y d para que el sistema tenga:
i. Sol. unica $a=d=0$ $b,c \in \mathbb{R}$
ii Inf. sol. $a,d \in \mathbb{R}-\{0\}$ $b,c \in \mathbb{R}$
iii Ninguna sol. $a=-3$ $d=-1$ $b,c \in \mathbb{R}$

Figura 4.33. Respuestas del alumno A5, situación 3.

Dado que no respondió con fundamentos a esta situación no se tiene evidencia de que el estudiante A5 tenga una concepción objeto de sistema de ecuaciones la cual es fundamental en la mayoría de los casos para encontrar las restricciones en un sistema de ecuaciones lineales que determinan las condiciones para que exista la solución del sistema, esto es fundamental para que el alumno pueda lograr determinar la imagen de un homomorfismo entre grupos.

En la situación número cuatro cuando se pide al alumno dar ejemplos entre grupos con ϕ_1, ϕ_2 y al final obtener ϕ, el alumno no pudo determinar ejemplos ni considerar un caso general para ϕ. En su respuesta solo anuncia que no existen grupos con la operación $(\cdot)$ que cumpla la condición. A primera vista se intuye que el estudiante A5 parece no estar comprendiendo la relación $\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$ ya que intenta describir el producto vectorial pero pese a esto solo se queda en intentar en describir el producto sin mencionar un ejemplo o describir un caso general para ϕ. Al igual que en la situación número 3 el alumno A5 parece indicar que solo contesta por tratar de no dejar la situación sin respuesta, sin embargo habría que revisar si el factor del tiempo fue influyente en sus respuestas. Obsérvese la figura 4.34.

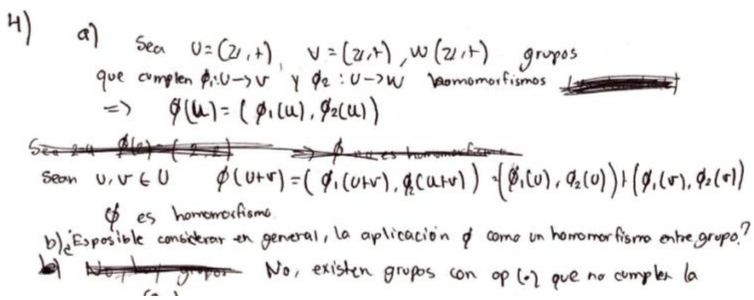
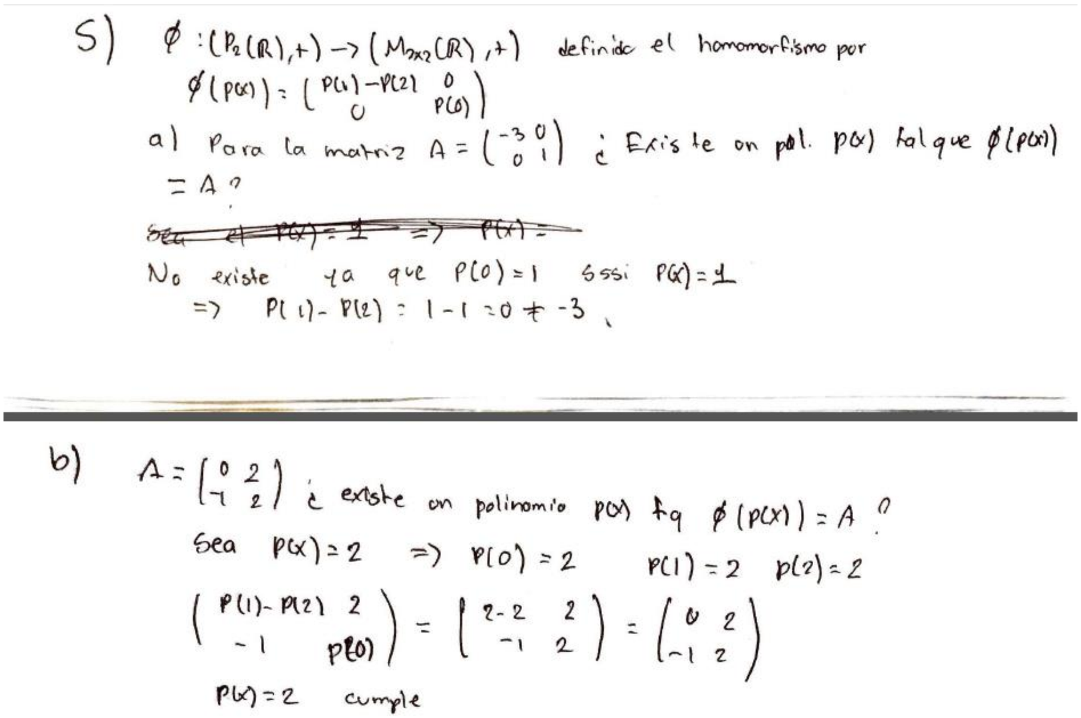


Figura 4.34. Respuestas del alumno A5, situación 4.

Dado que no fue capaz de dar ejemplos de homomorfismos ni construir un nuevo homomorfismo se puede concluir que el alumno no mostró una concepción previa de objeto de homomorfismo.

Para la última situación, el estudiante contestó los incisos a) y b), dejando vacío el inciso c). Para el inciso a) el estudiante no realiza ninguna operación y solo contesta que no existe un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$, cuando $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Afirmando que no existe ya que $p(0) = 1$ si y sólo si $p(x) = 1$ entonces afirma que $p(1) - p(2) = 1 - 1 = 0$, y que $0 \neq -3$ y por tanto no existe dicho polinomio. Primeramente, el alumno está confundido al no saber qué es lo que hace $\phi(x)$ en la situación 5; y al no saber esto, le resulta difícil encontrar un polinomio para la matriz A. Por sus respuestas el alumno intenta empatar tomando los valores dados por la aplicación $\phi\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$ con un polinomio desconocido y los valores de la matriz A para justificar que efectivamente no son iguales y por tanto asumir que no existe dicho polinomio. Al final desde un inicio al no saber exactamente qué es lo que hace $\phi(x)$ le será muy difícil resolver el problema. Véase figura 28.

Para el inciso b) que es un problema análogo al inciso a), se le pidió al alumno encontrar un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$, cuando $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y solo contestó $p(x) = 2$ esto a partir de la condición $p(0) = 2$. Sin embargo incidimos de nuevo que el alumno no estaba concentrado en la función $\phi(p(x)): (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times2}(\mathbb{R}), +)$ cuando $\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$, ya que no se percató de que no puede existir un polinomio para el cual $\phi\big(p(x)\big)$ ya que esto lleva a las ecuaciones inconsistentes $0 = 2\ y\ 0 = -1$. Véase Figura 4.35.



5) $\phi : (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2x2}(\mathbb{R}), +)$ definido el homomorfismo por

$\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$

a) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿ Exis te on pol. $p(x)$ tal que $\phi(p(x)) = A$?

~~Sea el $p(x) = 1$ => $p(x) =$~~

No existe ya que $p(0) = 1$ ssi $p(x) = 1$

=> $p(1) - p(2) = 1 - 1 = 0 \neq -3$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿ existe un polinomio $p(x)$ tq $\phi(p(x)) = A$?

Sea $p(x) = 2$ => $p(0) = 2$ $p(1) = 2$ $p(2) = 2$

$\begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 2 \\ -1 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

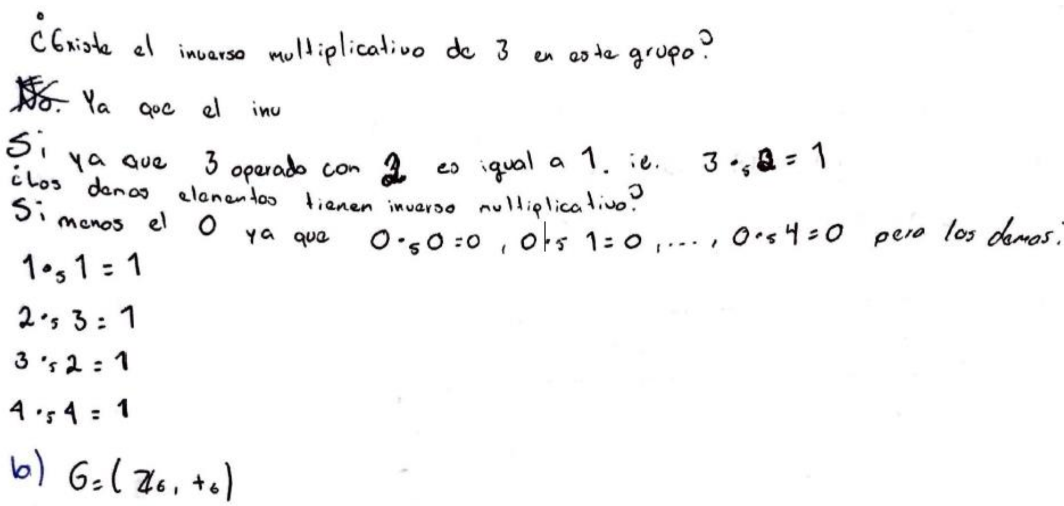
$p(x) = 2$ cumple

Figura 4.35. Respuestas del alumno A5, inciso a) y b) situación 5.

El estudiante se confundió con la acción que conllevaba la aplicación del homomorfismo, sin embargo con esta información no es posible decir que el alumno cuente con una concepción de esquema de cuantificador existencial de primer nivel donde el individuo itera a través de un conjunto de proposiciones que dependen de una o más variables y aplique dicho cuantificador a una proposición única cuyo valor es la verdad o la falsedad de cualquiera de ellas o al menos una de ellas, ya que la imagen de un homomorfismo entre grupos se involucra la relación del cuantificador de existencia de al menos un elemento y un “tal que” para encontrar dicha imagen, no muestra la relación entre el cuantificador existencial y la solución de las ecuaciones que resultan de igualar $\phi\big(p(x)\big)$ con la matriz *A*.

Estudiante A6

El alumno A6 comienza contestando correctamente la pregunta de saber cuál es el inverso multiplicativo de 3 y afirmando apropiadamente que todos los demás elementos de $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ tienen inversos menos el cero. Obsérvese figura 4.36.



¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo?

~~No.~~ Ya que el inv

Si ya que 3 operado con 2 es igual a 1. i.e. $3 \cdot_5 2 = 1$

¿Los demas elementos tienen inverso multiplicativo?

Si menos el 0 ya que $0 \cdot_5 0 = 0$, $0 \cdot_5 1 = 0, \ldots, 0 \cdot_5 4 = 0$ pero los demas:

$1 \cdot_5 1 = 1$

$2 \cdot_5 3 = 1$

$3 \cdot_5 2 = 1$

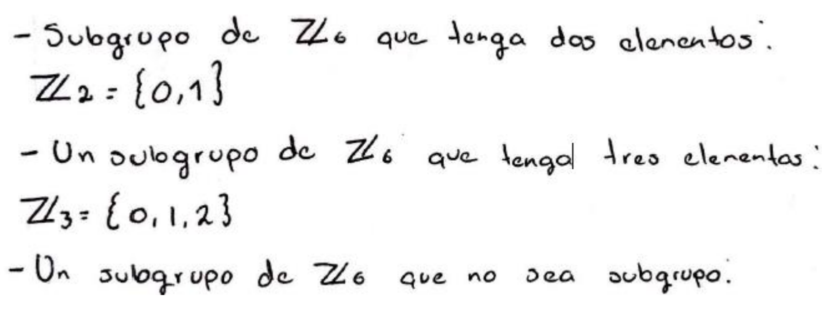
$4 \cdot_5 4 = 1$

b) $G = (\mathbb{Z}_6, +_6)$

Figura 4.36. Respuestas del alumno A6, inciso a) y situación 1.

Por la respuesta parece indicar que el estudiante A6 conoce el axioma de inversos de grupo y puede aplicarlo en casos particulares. Sin embargo, el alumno no contestó la pregunta de indicar si $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ tiene elemento identidad, y de saber si $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es grupo o no. necesariamente el que no haya contestado no da evidencia suficiente para determinar si el estudiante 6 tiene una concepción de esquema de grupo, ya que la respuesta que brinda a la situación de los inversos es correcta, lo cual podría indicar que dichas preguntas se le pasaron o por razones de tiempo no alcanzó a contestarlas. La última pregunta al inciso a) tampoco la contestó, la cual era mencionar que elementos conforman un grupo y sugerir algunos ejemplos.

Para el inciso b) de la situación 1 donde se pide que se brinden ejemplos de subgrupos, el alumno A6 se equivoca en sus respuestas, pese a que da ejemplos de subgrupos, dos respuestas las tiene erróneas y la tercera la dejó vacía. Véase figura 4.37.



- Subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos.

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

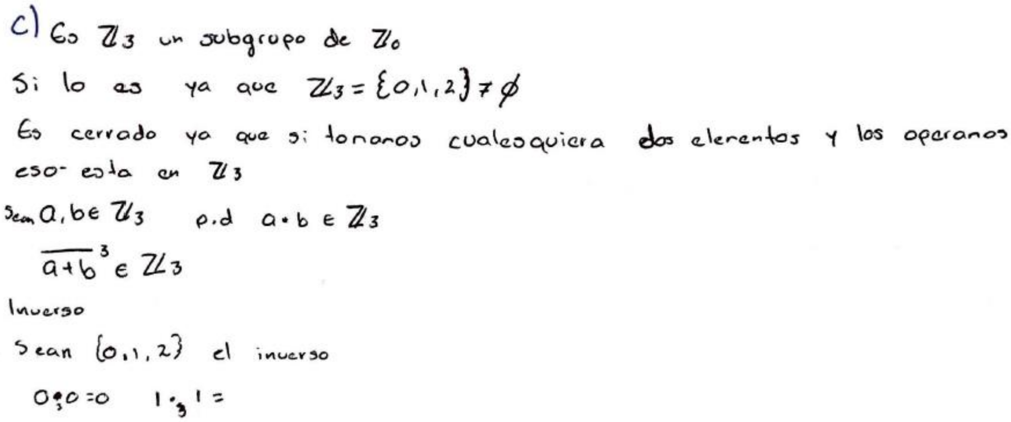
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga tres elementos:

$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que no sea subgrupo.

Figura 4.37. Respuestas del alumno A6, inciso B) y situación 1.

Finalmente en el inciso c) de esta primer situación, el estudiante responde que $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ lo cual es incorrecto. Debe aclararse que a primera vista parece ser que $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$, ya los elementos de $\mathbb{Z}_3$ parecen coincidir con algunos elementos de $\mathbb{Z}_6$, lo que parece confundir al estudiante al responder esta pregunta. El estudiante contestó que $\mathbb{Z}_3$ es diferente del conjunto vacío, que es cerrado, y que, al tomar cualesquiera dos elementos y los operas siguen estando en $\mathbb{Z}_3$. Al final trata de mencionar unos inversos, pero es todo… no menciona más. Someramente puede verse que el alumno A6 trata de describir las propiedades que se deben cumplir para que un conjunto sea subgrupo de un grupo sin embargo con ello no demuestra que $\mathbb{Z}_3$ sea un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$. Obsérvese figura 4.38.


c) Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

Si lo es ya que $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\} \neq \emptyset$

Es cerrado ya que si tomamos cualesquiera dos elementos y los operamos eso esta en $\mathbb{Z}_3$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}_3$ p.d $a \cdot b \in \mathbb{Z}_3$

$\overline{a+b}^{3} \in \mathbb{Z}_3$

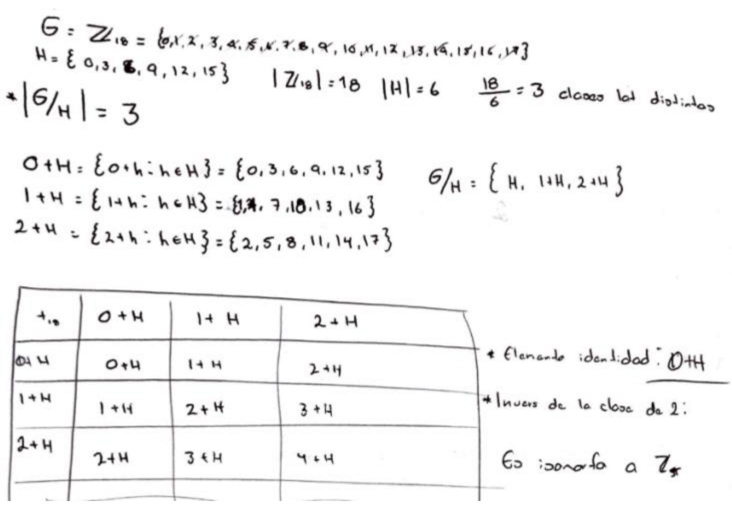
Inverso

Sean $\{0,1,2\}$ el inverso

$0 \cdot_3 0 = 0$ $1 \cdot_3 1 =$

Figura 4.38. Respuestas del alumno A6, inciso c) y situación 1.

Rumbo a la situación 2, el estudiante A6 contestó correctamente los incisos a), b) y solo una parte de c). Puede notarse que el alumno no tiene problemas con enlistar los elementos que conforman a G/H, así como su tabla de operaciones. Puede decir con facilidad cual es el elemento identidad de G/H sin embargo ya no puede enunciar cual es el inverso de la clase lateral de 2 y menciona que un grupo isomorfo a G/H es $\mathbb{Z}_{algo}$. Obsérvese figura 4.39.


$G = \mathbb{Z}_{18} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$

$H = \{0,3,6,9,12,15\}$ $|\mathbb{Z}_{18}| = 18$ $|H| = 6$ $\frac{18}{6} = 3$ clases lat distintas

$*|G/H| = 3$

$0+H = \{0+h : h \in H\} = \{0,3,6,9,12,15\}$ $G/H = \{H, 1+H, 2+H\}$

$1+H = \{1+h : h \in H\} = \{1,4,7,10,13,16\}$

$2+H = \{2+h : h \in H\} = \{2,5,8,11,14,17\}$

$+_{18}$	$0+H$	$1+H$	$2+H$
$0+H$	$0+H$	$1+H$	$2+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	$3+H$
$2+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$

* Elemento identidad: $0+H$

* Inverso de la clase de 2:

Es isomorfo a $\mathbb{Z}_{\cancel{5}}$

Figura 4.39. Respuestas del alumno A6, inciso a), b) y c) situación 2.

Al analizar la figura 32 es curioso que el llenado de la tabla de la clase lateral de $2+H$ operado con $1+H$ y $2+H$ le den como resultado $3+H$ y $4+H$, cuando debería ser $0+H$ y $1+H$ respectivamente, lo que parece indicar que no es consciente de que $3+H=0+H$ y $4+H=1+H$, pues la oepración binaria es cerrada.

Si bien el alumno tiene un conocimiento sobre los axiomas de grupo al contestar cuál es el inverso en la situación 1 y cuál es el elemento identidad en la situación 2. No obstante no menciona los elementos que conforman a un grupo y ni describe ningún ejemplo. Otro aspecto para resaltar es que al momento de mencionar ejemplos de subgrupos y no subgrupos de $\mathbb{Z}_6$ con dos y tres elementos se equivocó. A simple vista pareciese que el alumno A6 parece confundir la noción de subconjunto con la de subgrupo, ya que al escribir los subconjuntos como sus elementos están en $\mathbb{Z}_6$ entonces ya es un subgrupo de él.

Unas preguntas las contestó de manera fácil y de manera sustancial sin embargo al dejar otras respuestas sin contestar o dejar otras vacías esta información no brinda suficiente evidencia para afirmar que el estudiante cuente o no con una concepción esquema de grupo y de subgrupo.

En la respuesta a la situación 3, el estudiante A6 dio como respuestas $d = b = c = 0, a \in \mathbb{R}$ y $a = b = c = d = 0$ como solución al inciso i) y iii) respectivamente. Con ello no escribió ningún procedimiento ni se aseguró de su respuesta. En todo caso la respuesta está mal, no obstante hubiese sido interesante ver el procedimiento que el alumno tomó para llegar a dichos resultados. Véase figura 4.40.

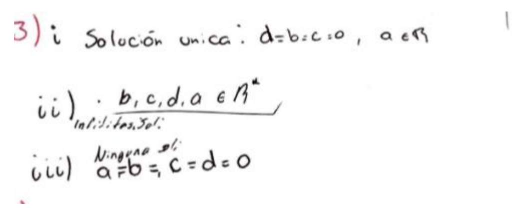


Figura 4.40. Respuestas del alumno A6, punto i), y iii) situación 3.

Debido a que no respondió esta situación, no se tiene evidencia de que el alumno tenga una concepción objeto de sistema de ecuaciones lineales.

En la situación número cuatro el alumno A6 no respondió nada, dejo en blanco dicha situación. Afirmando nuevamente que esta información no da pauta suficiente para confirmar que el estudiante no posee una concepción objeto de homomorfismo de grupos.

En la última situación el alumno A6 contestó los tres incisos. Para el inciso a) el estudiante intentó encontrar la imagen, es decir, un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$ mediante un sistema de ecuaciones con la primera componente de $\phi\big(p(x)\big)$ que es $p(1) - p(2)$. Pese a que no logra establecer correctamente la sustitución $p(1) - p(2)$, consigue obtener dos de los tres coeficientes del polinomio cuadrado para que se cumpla $\phi\big(p(x)\big) = A$. Lo curioso es que mediante este procedimiento logra obtener un polinomio $p(x)$ que cumple la condición pedida, sin embargo la idea que implica el procedimiento para encontrar la imagen en esta situación no es del todo correcto ya que se esperaba que el estudiante evaluara un polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$ bajo ϕ cuando fuese el caso y después igualarlo con la matriz A para encontrar los coeficientes del polinomio que se piden en esta situación. Obsérvese figura 4.41.

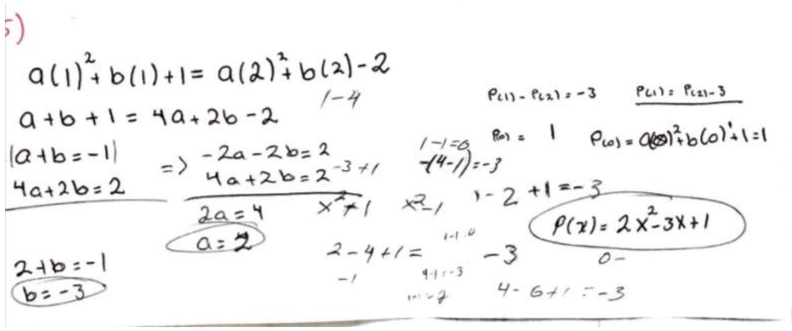


*Figura 4.41. Re*spuestas del alumno A6, inciso a) situación 5.

En el inciso b) el alumno se percata inmediatamente de la existencia de una incongruencia al pedirle que busque un polinomio $p(x)$ que cumpla $\phi(p(x)) = A$, ya que las entradas a_{12} y a_{21} de la matriz $\phi(p(x))$ siempre valdrán cero y usa esto para asegurar que no existe dicho polinomio. Obsérvese figura 4.42.

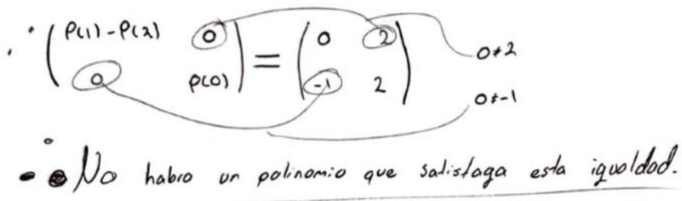


Figura 4.42. Respuestas del alumno A6, inciso b) situación 5.

En el inciso c) hay indicios de que el estudiante se percata de que debe sustituir un polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$ en $\phi(p(x))$ e igualarlo a una matriz A en general. Comienza haciéndolo correctamente sin embargo por la respuesta no parece clara la idea de que hay que tomar un polinomio de orden menor o igual a 2 para sustituirlo en $\phi\big(p(x)\big)$ y después igualarlo a la matriz A para encontrar los parámetros que satisfagan para que matrices se cumple un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$. El alumno al igual que en el inciso a) quiere establecer un sistema de ecuaciones y tratar de encontrar los coeficientes en general de un polinomio de grado menor o igual a 2 dada cualquier matriz *A* que le dé sin darse cuenta que lo que le piden es lo contrario, esto es, encontrar los parámetros o condiciones generales que la matriz *A* debe tener para que el estudiante pueda por lo menos siempre llegar a encontrar un polinomio. Obsérvese figura 4.43.

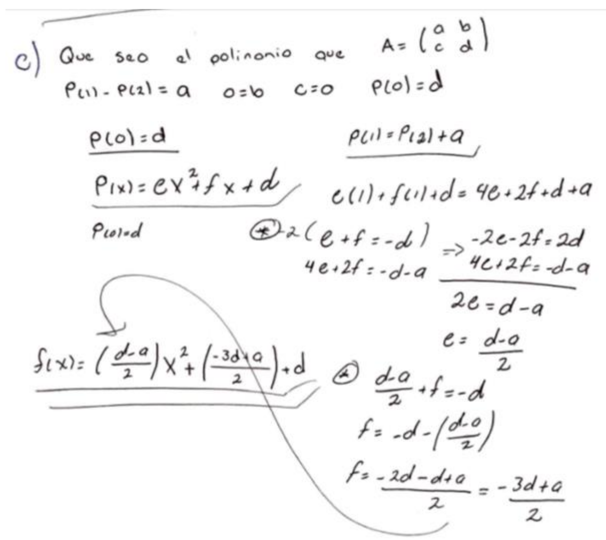


Figura 4.43. Respuestas del alumno A6, inciso c) situación 5.

El alumno pudo resolver un inciso bien de los tres, en sus procedimientos se ve el intento de encontrar las respuestas, se da cuenta de la existencia, es decir, de que debe al menos existir un elemento en el dominio para encontrar dicha imagen como en el inciso b). Por esta respuesta se tiene evidencia de que el alumno tiene el conocimiento del cuantificador existencial, no obstante con el inciso c) parece ser que el alumno se confundió al no saber que lo que le pedían era las condiciones que debe tener la imagen para que exista un polinomio lo cual consideramos que es una de las dificultades que más se presentan en los estudiantes al tratar de determinar la imagen de un homomorfismo entre grupos.

Estudiante A7

Comenzando el análisis con la situación número uno, el estudiante comienza contestando correctamente el inciso a) a la primera pregunta afirmando que la existencia del elemento identidad del conjunto $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es 1. Ver figura 4.44.

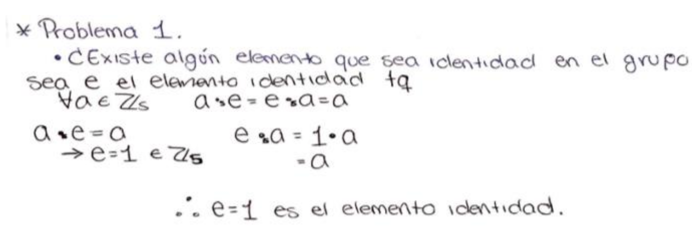
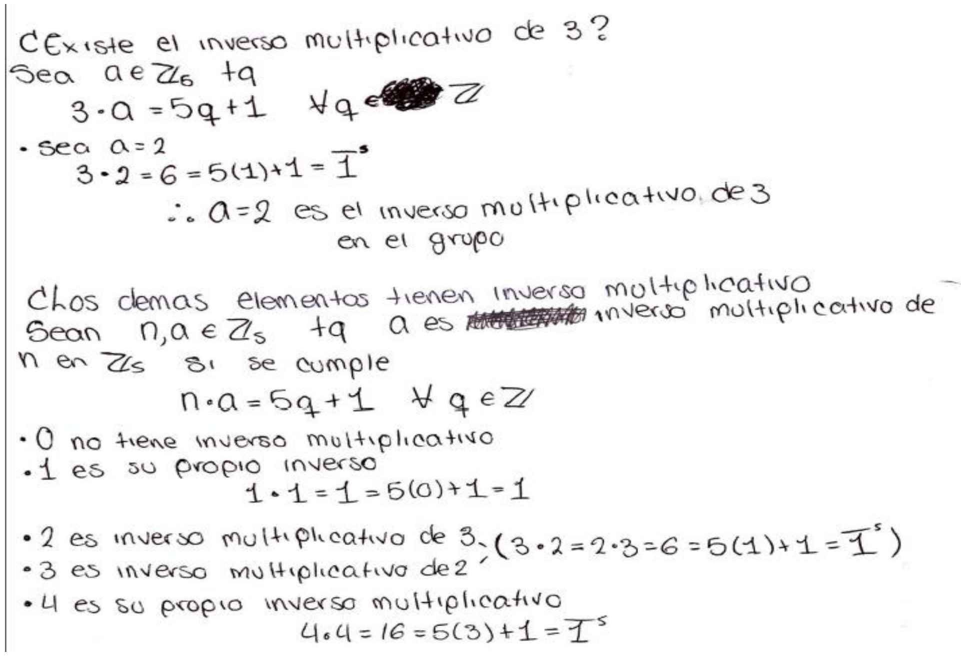


Figura 4.44. Respuestas del alumno A7, inciso a) situación 1.

En seguida puede determinar con facilidad la existencia de los inversos para los elementos de $[\mathbb{Z}_5, *_5]$, dándose cuenta de que el cero no tiene inverso. Obsérvese figura 4.45.



¿Existe el inverso multiplicativo de 3?

Sea $a \in \mathbb{Z}_5$ tq

$3 \cdot a = 5q + 1 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$

• sea $a = 2$

$3 \cdot 2 = 6 = 5(1) + 1 = \bar{1}^5$

$\therefore$ $a = 2$ es el inverso multiplicativo de 3 en el grupo

¿Los demas elementos tienen inverso multiplicativo

Sean $n, a \in \mathbb{Z}_5$ tq a es inverso multiplicativo de n en $\mathbb{Z}_5$ si se cumple

$n \cdot a = 5q + 1 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$

• 0 no tiene inverso multiplicativo

• 1 es su propio inverso

$1 \cdot 1 = 1 = 5(0) + 1 = 1$

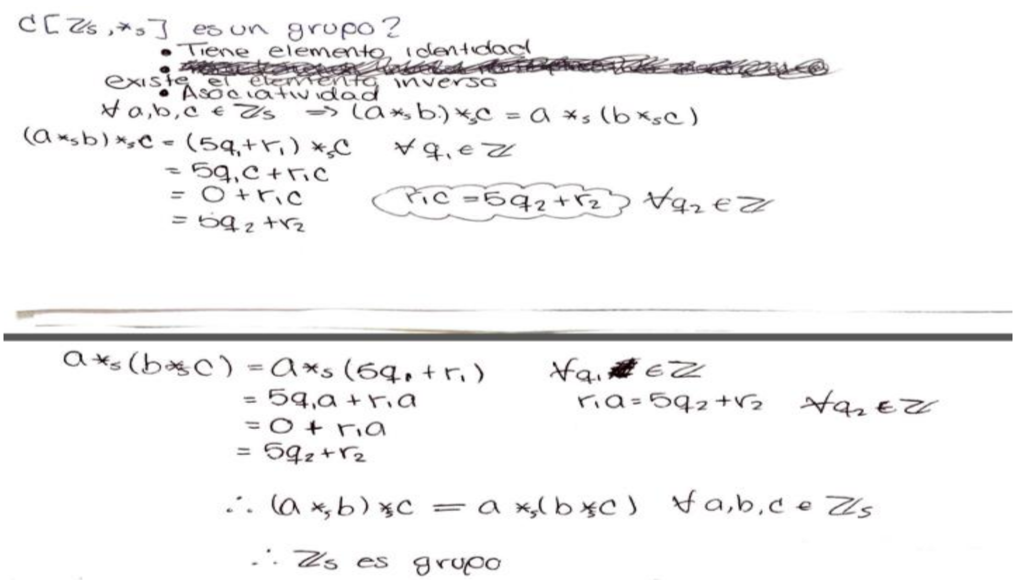
• 2 es inverso multiplicativo de 3,
• 3 es inverso multiplicativo de 2 $(3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6 = 5(1) + 1 = \bar{1}^5)$

• 4 es su propio inverso multiplicativo

$4 \cdot 4 = 16 = 5(3) + 1 = \bar{1}^5$

Figura 4.45. Respuestas del alumno A7, inciso a) situación 1.

En la siguiente pregunta el alumno A7 afirma que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es un grupo y para ello sustenta su respuesta afirmando que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ tiene elemento identidad, tiene existencia de inverso y además cumple con la propiedad asociativa entre sus elementos con lo cual cumple las propiedades para ser grupo. Sin embargo es interesante observar que el conjunto $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ que consta de los elementos $\{0,1,2,3,4\}$ no es grupo ya que el elemento cero no tiene inverso, detalle del cual se da cuenta el alumno A7 en la pregunta anterior, véase figura 35, y por lo que se hubiese esperado que el alumno A7 afirmara que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ no es grupo o bien que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es grupo quitando el elemento cero. Véase la figura 4.46.



¿$[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es un grupo?

• Tiene elemento identidad

• existe el elemento inverso

• Asociatividad

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow (a *_5 b) *_5 c = a *_5 (b *_5 c)$

$(a *_5 b) *_5 c = (5q_1 + r_1) *_5 c \quad \forall q_1 \in \mathbb{Z}$
$= 5q_1 c + r_1 c$
$= 0 + r_1 c \qquad r_1 c = 5q_2 + r_2 \quad \forall q_2 \in \mathbb{Z}$
$= 5q_2 + r_2$

$a *_5 (b *_5 c) = a *_5 (5q_1 + r_1) \quad \forall q_1 \in \mathbb{Z}$
$= 5q_1 a + r_1 a \qquad r_1 a = 5q_2 + r_2 \quad \forall q_2 \in \mathbb{Z}$
$= 0 + r_1 a$
$= 5q_2 + r_2$

$\therefore (a *_5 b) *_5 c = a *_5 (b *_5 c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}_5$

$\therefore \mathbb{Z}_5$ es grupo

Figura 4.46. Respuestas del alumno A7, inciso a) situación 1.

Queda la duda de por qué el estudiante no relacionó su respuesta de que el cero no tiene inverso con la de afirmar que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es grupo. En su siguiente respuesta, el estudiante sí, menciona cuales los axiomas que debe cumplir un conjunto para ser grupo, no obstante y aunque parece trivial a simple vista, le faltó contestar que aparte de cumplir con los tres axiomas, el conjunto con el que se está trabajando debe ser distinto del vacío y tener definida una operación binaria, considera que los axiomas las debe cumplir el conjunto lo cual es incorrecto, además cabe resaltar que no usa el lenguaje matemático para enunciar los axiomas, habría que ver si es por la manera en que se le presentó la pregunta. Al final de esta pregunta al pedírsele ejemplos, el estudiante A7 deja vacía su respuesta Ver figura 4.47.

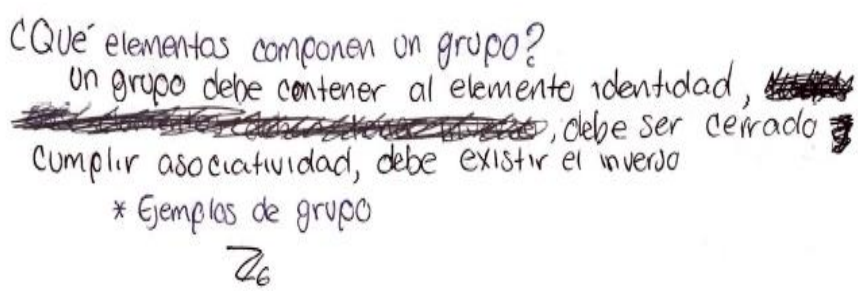


Figura 4.47. Respuestas del alumno A7, inciso a) situación 1.

En el inciso b) el estudiante solo pudo dar un ejemplo de un subconjunto que no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ el cual es $S = \{1,2,3,4\}$ sustentando su repuesta con la falta de inverso y de elemento neutro. Al pedirle ejemplos de subgrupos $\mathbb{Z}_6$ con dos y tres elementos el alumno deja en blanco su hoja de respuesta. Véase figura 4.48.

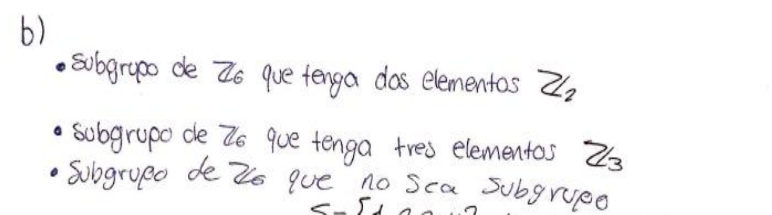


Figura 4.48. Respuestas del alumno A7, inciso b) situación 1.

Por último en la situación 1 inciso c) el alumno A7 ante la cuestión de responder si $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ o no, escribe los elementos de $\mathbb{Z}_3$ mediante los cuales describe dos axiomas de grupo, el de elemento identidad y el de inverso, diciendo además que $\mathbb{Z}_3 \neq \emptyset$, pero al final no contesta si $\mathbb{Z}_3$ es o no subgrupo de $\mathbb{Z}_6$. Obsérvese figura 4.49.

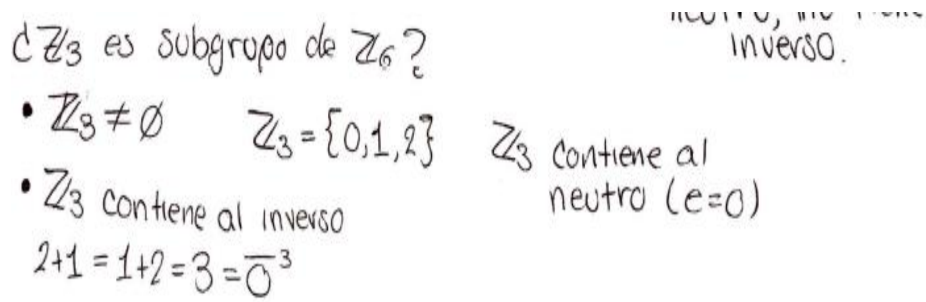
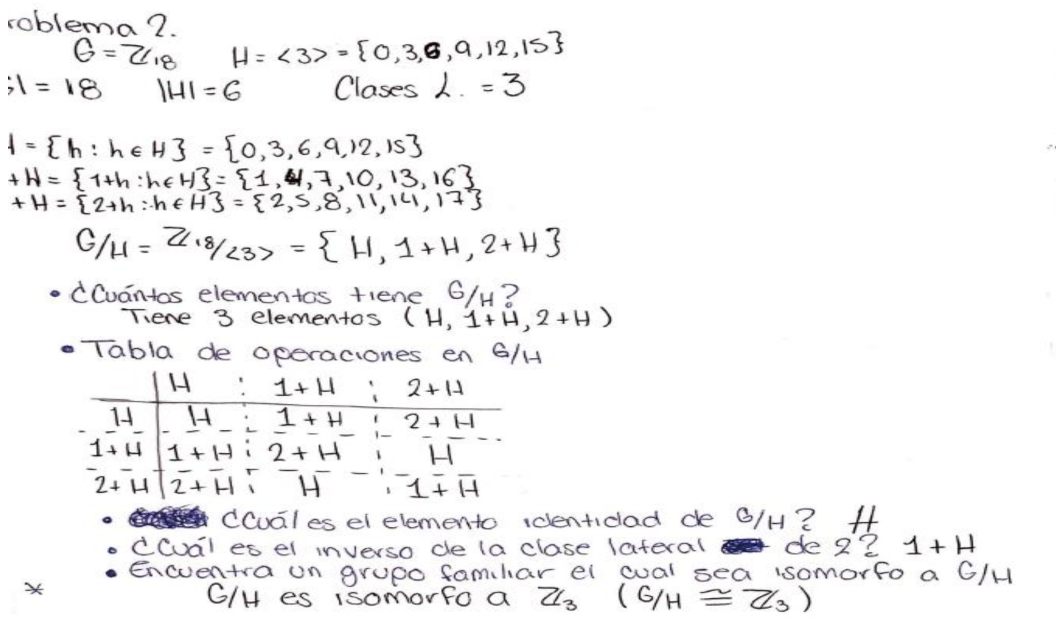


Figura 4.49. Respuestas del alumno A7, inciso c) situación 1.

Por sus respuestas puede observarse que el estudiante A7 tiene presente los elementos y axiomas que conforman a un grupo. Tiene presente que un conjunto debe cumplir estos axiomas y elementos para que sea grupo y además sabe identificarlos. En efecto el alumno A7 se equivoca cuando afirma que $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ es un grupo, pregunta que pudo contestar correctamente al haberse percatado que el elemento cero no tiene inverso bajo la operación $*$ como lo hace una pregunta anterior. Esta evidencia confirma que el alumno sabe correctamente las propiedades y elementos de grupo sin embargo puede notarse una falta de madurez al aplicar dicha teoría en la resolución de problemas o pudo ser un descuido que mediante una pregunta guiada podría haber reflexionado y corregido su respuesta, esto nos muestra lo importante que es realizar una entrevista como parte fundamental de la recolección de datos.

En cuanto al sector de los subgrupos con la evidencia expuesta se puede lograr observar que el alumno A7 tiene presente las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea subgrupo, tiene presente la teoría, sin embargo, este conocimiento le falta desarrollarse en la mente del individuo para que pueda afirmar cuando un subconjunto es o no subgrupo, y a su vez pueda brindar ejemplos y contraejemplos de subgrupos dado un grupo.

Por las respuestas dadas por parte del alumno A7 a los incisos que forman parte situación 2, parece indicar que el alumno no tuvo serias dificultades en su resolución. En el inciso a) responde que los elementos que tiene G/H son 3, de los cuales pueden enlistarlos sin problema. En el inciso b) el alumno logra proyectar la tabla de operaciones de G/H y en el inciso c) puede mencionar cuál es el elemento identidad de G/H, así como el elemento inverso de la clase lateral de 2. Por último en el inciso d) el alumno menciona que el grupo $\mathbb{Z}_3$ es isomorfo al grupo G/H, sin embargo no presenta ninguna justificación, de manera que no se puede saber por qué eligio a $\mathbb{Z}_3$ como grupo ismomorfo al grupo cociente. Véase Figura 4.50.



roblema 2.

$G = \mathbb{Z}_{18}$ $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15\}$

$|G| = 18$ $|H| = 6$ Clases $\mathcal{L}$. $= 3$

$H = \{h : h \in H\} = \{0,3,6,9,12,15\}$

$1+H = \{1+h : h \in H\} = \{1,4,7,10,13,16\}$

$2+H = \{2+h : h \in H\} = \{2,5,8,11,14,17\}$

$G/H = \mathbb{Z}_{18}/\langle 3 \rangle = \{H, 1+H, 2+H\}$

- ¿Cuántos elementos tiene G/H?
  Tiene 3 elementos $(H, 1+H, 2+H)$
- Tabla de operaciones en G/H

	H	$1+H$	$2+H$
H	H	$1+H$	$2+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	H
$2+H$	$2+H$	H	$1+H$

- ¿Cuál es el elemento identidad de G/H? H
- ¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2? $1+H$
- Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H

* G/H es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ $(G/H \cong \mathbb{Z}_3)$

Figura 4.50. Respuestas del alumno A7, inciso a), b), c) y d) situación 2.

Consideramos que el alumno A7 tiene un conocimiento sólido sobre los axiomas de grupo, por sus operaciones y procedimientos se tiene evidencia que el estudiante no tiene problemas con el manejo de la operación binaria.

No obstante, parece que el alumno A7 no ha establecido una sólida comprensión entre los conceptos de conjunto y subgrupo. Ya se dijo que el alumno dejó en blanco el área de los ejemplos de no subgrupos y subgrupos de $\mathbb{Z}_6$ y por otro lado no definió si $\mathbb{Z}_3$ es subgrupo o no de $\mathbb{Z}_6$ pese a que establece algunas propiedades de subgrupo parece ser que no quedó del todo claro cuando es conjunto puede ser subgrupo o no.

Ante la evidencia podría afirmarse que el estudiante muestra tener una concepción esquema de grupo mientras que la concepción de esquema de subgrupo se muestra ausente en el estudiante A7.

La situación tres la contestó someramente, no hay procedimientos que indiquen más allá de sus respuestas. En el primer punto, el cual se relaciona con encontrar los parámetros para que el sistema de ecuaciones tenga solución única lo dejó en blanco, la segunda pregunta relacionada a encontrar una infinidad de soluciones el estudiante contestó que $a = b = c = d = 0$ posiblemente creyendo que en una matriz al tener una columna de ceros como lo es en el caso de los renglones se podría tener una variable arbitraria que brindará una infinidad de soluciones. Y finalmente el alumno afirmo que los parámetros b, c, d deben ser iguales a otra fila para que el sistema no tenga ninguna solución; no queda muy claro el porqué de esto, pero parece como si en ese momento al alumno le vino las propiedades del determinante que lo hacen cero, si se tiene una columna de ceros o columnas iguales el determinante es cero y lo relacionó de alguna manera con la solución a esta pregunta, otra vez se deja ver la importancia de la entrevista para indagar más a fondo sobre la forma de pensar del estudiante y las estructuras mentales que tiene. Obsérvese la figura 4.51.

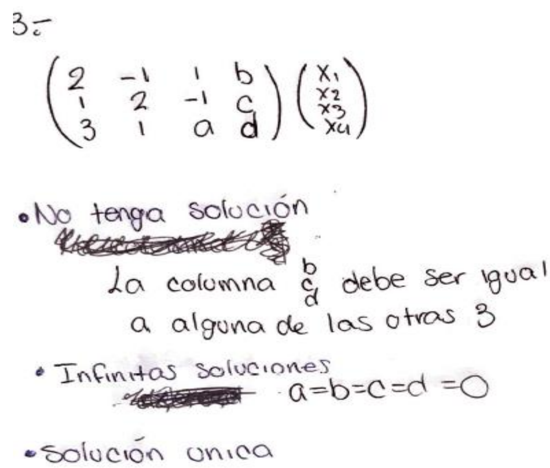


Figura 4.51. Respuestas del alumno A7 a la situación 3.

No se tiene más información y con lo que hay escrito es muy poca evidencia para asegurar si el alumno cuenta o no con una concepción objeto de sistema de ecuaciones lineales.

En la situación cuatro el estudiante optó por no intentar encontrar la solución, y debido a esto no se cuenta con información para establecer si el alumno A7 tiene o no una concepción objeto de homomorfismo de grupos.

Finalmente en la situación 5 la cual es la última, el alumno A7 solo contestó el inciso b) de manera superficial, una respuesta ambigua, ya que solo menciona que no existe un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$ (p(x)) ya que dos de las a_{ij} son cero, lo cual podría ser correcto dependiendo de sus argumentos, pero su respuesta no permite analizar más.

Debido a la falta de respuestas no se tiene evidencia para sustentar si el alumno posee o no una concepción esquema de cuantificador existencial.

Estudiante A8

En el inciso a) de la situación 1 el alumno A8 contestó correctamente al decir que el elemento identidad de $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ es 1. Siguiendo con el inciso a) el alumno no tuvo problema alguno al mencionar que el inverso multiplicativo de 3 en $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ es 2, confirmando además que los otros elementos de $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ tienen inverso a excepción del 0. Al preguntarle si $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ es o no grupo, el estudiante A8 contestó que $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ solo puede ser grupo sin el elemento cero lo cual está correcto, por otro lado también enuncia los tres axiomas que debe cumplir $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ para que sea grupo.

En la última pregunta del inciso a) el alumno A8 describe sin problema los elementos que deben conforman a un grupo, sin embargo aunque es un aspecto aparentemente trivial, el estudiante no menciona que el conjunto debe ser distinto del vacío, fuera de esto el alumno puede brindar ejemplos de otros conjuntos con operaciones binarias que son grupos. Véase la figura 4.52.

– ¿Existe algún elemento que sea Identidad en el grupo?
Sí, el 1 ya que ~~es~~ al multiplicar cualquier elemento de $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. por 1 ~~te~~ deja a dicho elemento Igual, esto Indica que pertenecera a la misma clase.
y notese que $1 \in \mathbb{Z}_5$

– ¿Existe el Inverso multiplicativo de 3 en este grupo?
Analisis

$3 \cdot 0 = 0 = 0 \bmod 5$ $\qquad$ $\underline{a \cdot a' = a' \cdot a = e}$, propiedad, definicion de Inverso
$3 \cdot 1 = 3 = 3 \bmod 5$ $\qquad$ $a = 3 \quad e = 1$
$3 \cdot 2 = 6 = 1 \bmod 5$ $\qquad$ Notese que $3 \cdot 2 = 6 = 1 \bmod 5$
$3 \cdot 3 = 9 = 4 \bmod 5$
$3 \cdot 4 = 12 = 2 \bmod 5$ $\qquad$ $\therefore$ el 2 es el Inverso multiplicativo de 3 $2 \in \mathbb{Z}_5$

R= Sí existe el Inverso multiplicativo de 3. y es 2, $2 \in \mathbb{Z}_5$.

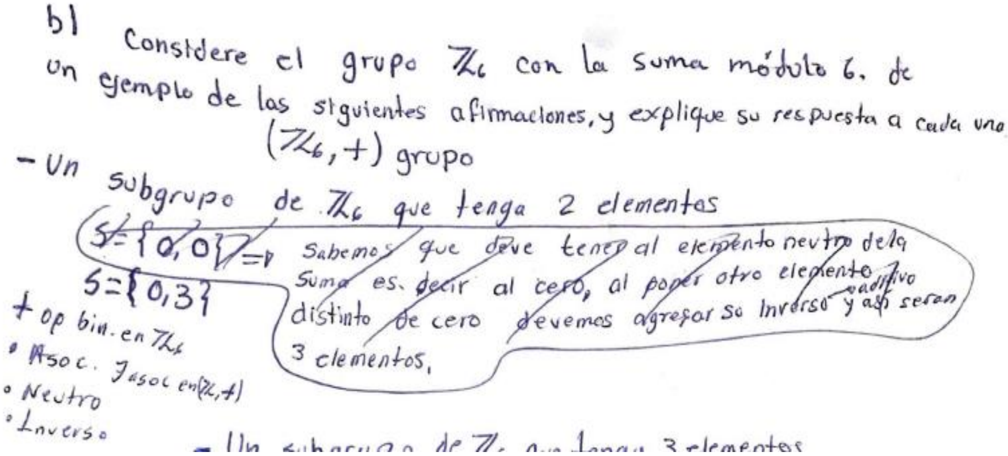
– Es $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ grupo
• s es operación binaria ya que ∀ Todos los $\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_5$
• Asociativa: Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ya que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y existe ~~con~~ asociatividad en $\mathbb{Z}$ además Todos los $\mathbb{Z}$ pertenecen a $\mathbb{Z}_5$
• Existe el elemento neutro y es el. 1 $1 \in \mathbb{Z}_5$
• Existe el elemento Inverso para los elementos de $\mathbb{Z}_5$ a excepcion de el cero.
$\therefore$ $\mathbb{Z}_5$ no es grupo con el producto. $(\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot)$ sí es grupo

¿Que elementos componen a un grupo? ¿
– Una operación binaria —— bien definido y cerrada.
– ~~Exist~~ Cumple la operación. deve ser asociativa.
– Existencia del elemento neutro en el grupo
– Existencia del Inverso ~~en~~ para todo elemento del grupo.

– ¿puede proporcionar otros gemplos de grupo?
$(\mathbb{R}, +)$ $\quad$ $(\mathbb{C}, +)$ $\quad$ $(\mathbb{Z}, +)$
$(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ $\quad$ ~~$(\mathbb{N}$~~ $\quad$ $(\mathbb{Z}, \cdot)$
$(\mathbb{Q}, +)$ $\quad$ $(M_{m \times n}, +)$
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ $\quad$ $(M_{m \times n}, \cdot)$ $\quad$ etc.

Figura 4.52. Respuestas del alumno A8, inciso a) a la situación 1.

En el inciso b) de la situación 1, el estudiante A8 da un ejemplo de un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ con dos elementos correctamente, y no solo eso, describe las propiedades que un conjunto necesita para ser subgrupo. Ver figura 4.53.



b) Considere el grupo $\mathbb{Z}_6$ con la suma módulo 6. de un ejemplo de las siguientes afirmaciones, y explique su respuesta a cada uno

$(\mathbb{Z}_6, +)$ grupo

- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga 2 elementos

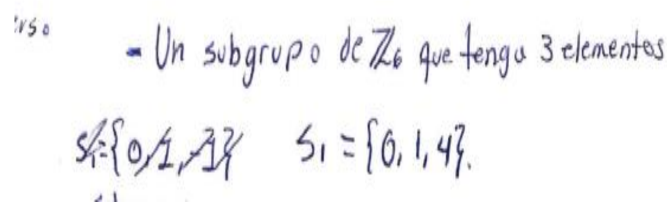
$S = \{0, 0\}$ ⇒ Sabemos que deve tener al elemento neutro de la suma es decir al cero, al poner otro elemento distinto de cero devemos agregar su inverso aditivo y así serán 3 elementos,

$S = \{0, 3\}$

+ op bin. en $\mathbb{Z}_6$
• Asoc. ∃ asoc en $(\mathbb{Z}, +)$
• Neutro
• Inverso

Figura 4.53. Respuestas del alumno A8, inciso b) situación 1.

A la hora de pedirle al alumno que diese un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ con tres elementos da el siguiente conjunto $\{0, 1,4\}$. Este conjunto no es correcto ya que pese a que tiene el elemento identidad, le falta el elemento inverso que es el 2, así el conjunto correcto sería $\{0, 2,4\}$. Por sus respuestas y procedimientos correctos anteriores se puede inferir que tal vez el alumno A8 cometió un error de descuido al no percatarse que en lugar del número 1 era el número 2 en el conjunto $\{0, 1,4\}$ o bien tal vez se confundió en ese momento con el grupo $\mathbb{Z}_5$ Obsérvese la figura 4.54.

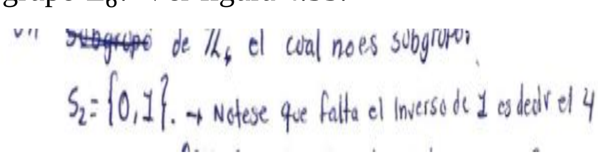


- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga 3 elementos

$S_1 = \{0, 1, 4\}$.

Figura 4.54. Respuestas del alumno A8, inciso b) situación 1.

De manera simple el alumno A8 pudo mencionar un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que no fuese subgrupo de él mediante el conjunto $S_2 = \{0,1\}$ mencionando que falta el inverso de 1 lo cual esto es correcto, sin embargo el estudiante A8 menciona que el inverso de 1 es 4 cuando debería ser 5; inferimos de nuevo en este error de que el alumno A8 estaba pensando posiblemente en el grupo $\mathbb{Z}_5$ en lugar del grupo $\mathbb{Z}_6$. Ver figura 4.55.



~~subgrupo~~ de $\mathbb{Z}_6$ el cual no es subgrupo

$S_2 = \{0, 1\}$. → Notese que falta el Inverso de 1 es decir el 4

Figura 4.55. Respuestas del alumno A8, inciso a) situación 1.

En el último inciso, que es el c) en la situación 1, el alumno A8 menciona que $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ lo cual es incorrecto. El estudiante A8 menciona que el neutro y el inverso de

$\mathbb{Z}_3$ también están en $\mathbb{Z}_6$, y que la operación de $\mathbb{Z}_6$ induce a $\mathbb{Z}_3$ por lo que $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$. Véase la figura 4.56.

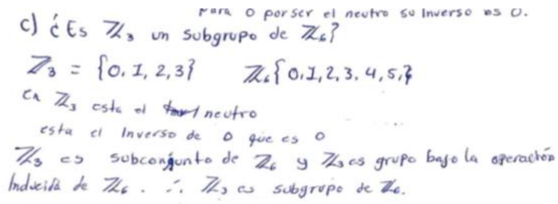

Para 0 por ser el neutro su Inverso es 0.
c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$?
$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ $\mathbb{Z}_6 \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
en $\mathbb{Z}_3$ esta el neutro
esta el Inverso de 0 que es 0
$\mathbb{Z}_3$ es subconjunto de $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_3$ es grupo bajo la operación Inducida de $\mathbb{Z}_6$. ∴ $\mathbb{Z}_3$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$.

Figura 4.56. Respuestas del alumno A8, inciso c) situación 1.

La primera situación da evidencia de que el alumno tiene definidos los axiomas de grupo, la noción de operación binaria y conjunto. Contestó de manera correcta el inciso a) pese algún pequeño detalle como no mencionar que el conjunto debe ser vacío en los elementos que componen al grupo. Se observa también que el alumno A8 puede describir las propiedades que necesita un conjunto para que sea un subgrupo, y pese a que se equivocó al dar dos ejemplos su error fue mínimo, parece ser que hubo una confusión al momento de estar trabajando con los grupos. Y finalmente al mencionar si $\mathbb{Z}_3$ es un subgrupo o no de $\mathbb{Z}_6$, el alumno A8 se equivocó; y es que aquí existe una confusión en todos los estudiantes al tratar preguntas semejantes a éstas ya que los alumnos creen que como los elementos de $\mathbb{Z}_3$ en efecto están en $\mathbb{Z}_6$ los alumnos no se dan cuenta que existe un conocimiento previo conceptual a esto, el cual afirma que cuando se trata de verificar si $H \subset G$ es subgrupo o no del grupo G, la operación en H ha de ser exactamente la misma que en G. Por ejemplo $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$ en $\mathbb{Z}_3$ $es \neq \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}$ en $\mathbb{Z}_6$ y por lo tanto no es subgrupo aunque sus elementos si lo estén, por ello los estudiantes en varias ocasiones confunden la noción de subconjunto con la noción de subgrupo.

En la situación número 2 el alumno A8 contestó correctamente el inciso a) al definir los elementos de G/H y enlistarlos. El inciso b) que está ligado al inciso a) también lo responde correctamente al escribir la tabla de operaciones de G/H; así como también responde el inciso c) de forma correcta al decir que el elemento identidad de G/H es el elemento $0 + H$, confirmando de paso que la clase lateral de 2 es 1 o $1 + H$. Por último el alumno A8 menciona que un grupo familiar que es isomorfo a G/H es $\mathbb{Z}_3$ lo cual es correcto, ya que hay una biyección entre ambos grupos, sin embargo el estudiante A8 no menciona nada sobre ello. Véanse imágenes 4.57 y 4.58.

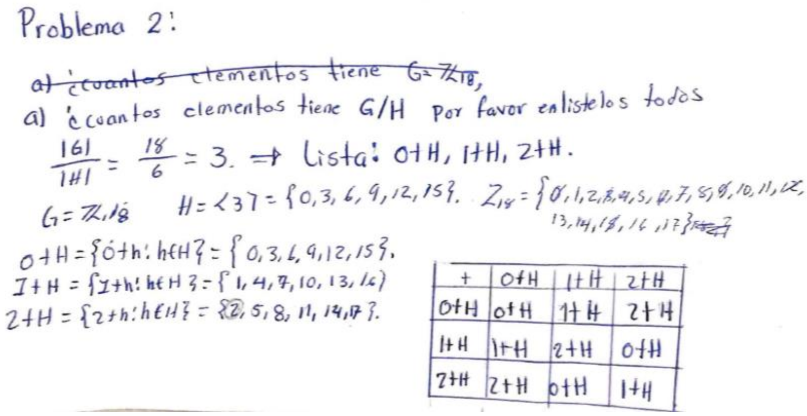


Figura 4.57. Respuestas del alumno A8, inciso a) e inciso b) situación 2.

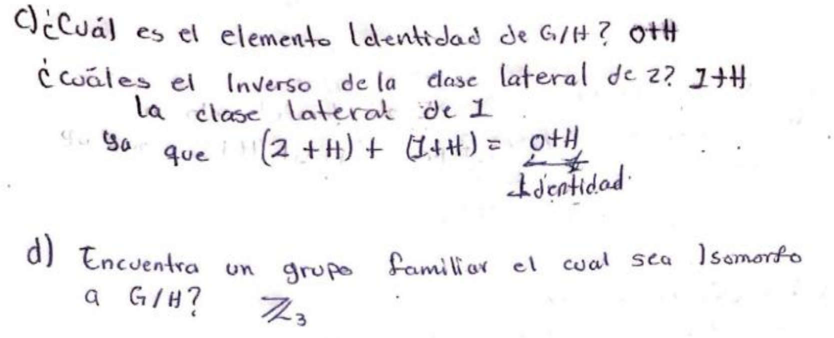


Figura 4.58. Respuestas del alumno A8, inciso c) e inciso d) situación 2.

Con las respuestas de la situación 2 puede verse que el alumno tiene conocimiento sobre los elementos que componen a un grupo y de como éstos se relacionan, es decir, tiene una noción definida de operación binaria, conjunto y axiomas de grupo. Se tiene evidencia que ha esquematizado al objeto grupo, ya que al aplicar acciones pudo determinar un grupo isomorfo familiar a G/H.

Así el análisis de la situación 1 junto con la observación de la situación 2 brinda la evidencia suficiente para determinar que el alumno A8 tiene una concepción de esquema de grupo y subgrupo.

Para la situación número 3 el alumno A8 no contestó correctamente ningún punto. Para la cuestión en la que el sistema debe tener solución única el estudiante A8 menciona que $a = b = c = 0$. *En la cuestión* en la que el sistema debe tener infinitas soluciones el alumno respondió que $\mathrm{a} = 0$; y por último, el estudiante A8 contestó que $\mathrm{a} = \mathrm{d}$ para que no tenga solución. Este conjunto de respuestas es particularmente ambiguas ya que no se tiene el procedimiento por el cual llegó a estos resultados por lo cual lo único que se puede hacer es inferir sobre sus respuestas. Aparentemente el alumno contesta que $a = b = c = 0$ para que $\mathrm{d} \neq 0$, y así se obtenga una única solución. En el caso de las infinitas soluciones parece ser que el alumno creyó que si $\mathrm{a} = 0$ entonces a podría quedar como una variable arbitraria y con ello dar infinitas soluciones. Y finalmente el alumno mencionó que si a = d entonces esto no podría pasar, lo cual daría una incongruencia y con ello no obtener ninguna solución. Como puede verse, el lector podrá inferir un gran número de caminos mediante los cuales emergen dichas respuestas sin embargo no se puede determinar cuál de estos siguió el estudiante, así que con esta evidencia no se puede confirmar que el alumno cuente con una concepción objeto de sistema de ecuaciones lineales, aquí se muestra la importancia de las justificaciones o argumentaciones de los estudiantes. Véase figura 4.59.

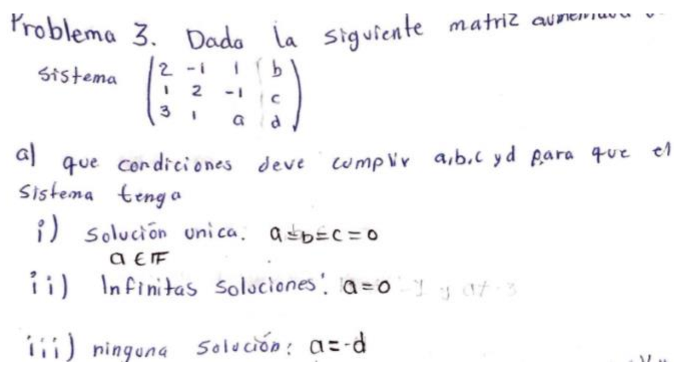


Figura 4.59. Respuestas del alumno A8, punto i, ii y iii situación 3.

La situación número 4 se presenta a simple vista un poco más compleja ante las demás, pero en realidad no es así. Sí bien, el alumno A8 pese a esto comienza contestando de manera adecuada el inciso a), la cual consiste en determinar ejemplos de homomorfismos entre grupos ϕ_1, ϕ_2 y obtener ϕ cuando $\phi = (\phi_1(u), \phi_2(u))$ y mencionar si es o no ϕ un homomorfismo de grupos. Para ello el alumno considera los grupos $U = V = W = (\mathbb{R}, +)$ y define a $\phi_1: U \longrightarrow V$ como $\phi_1(u) = 2u$, y $\phi_2: U \longrightarrow W$ como $\phi_2(u) = 3$, sin embargo, no justifica por qué las funciones dadas son homomorfismos, es decir si tuvo en mente la propiedad que debe cumplir una función para ser homomorfismo, pues considera que $\phi_2(u) = 3$ es homomorfismo cuando no lo es, de manera que resulta difícil determinar qué estructura tiene respecto a este concepto. Después toma un elemento del grupo U el cual es $7 \in U$ y define $\phi(7) = \big(\phi_1(7), \phi_2(7)\big) = \big((2u, 3)\big) = (14{,}3)$. Posteriormente afirma que $7 \in U, 14 \in V\ y\ 3 \in W$ lo cual es correcto, sin embargo esto no demuestra como tal que ϕ sea un homomorfismo ya que debió tomar dos elementos del grupo U y demostrar que: si $x, y \in U$ entonces $\phi(x * y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ la cual es la definición formal de homomorfismo, parece que no tiene en mente la propiedad que debe cumplir una función entre grupos para ser homomorfismo. Para el inciso b) se pide que el estudiante generalice el inciso a), es decir, debe describir el caso cuando $\phi = (\phi_1(u), \phi_2(u))$ mediante $\phi_1: U \rightarrow V$ y $\phi_2: U \rightarrow W$ cuando U, V y W son grupos y $\phi: U \rightarrow V \times W$. Para ello el alumno A8 solo contestó que en efecto ϕ es un homomorfismo entre grupos, y que esto se puede ver ya que $\phi_1 \in U$ y $\phi_2 \in W$; piensa en ϕ como en algo que se puede separar en dos partes, una especie de "composición". A través de esta respuesta se puede ver que el estudiante A8 contestó sin procedimientos tal vez debido a la falta de tiempo, no obstante puede notarse que el estudiante no tiene en su mente la propiedad que debe cumplir un homomorfismo, por lo que no muestra una concepción objeto de homomorfismo entre grupos. Véase la Figura 4.60.

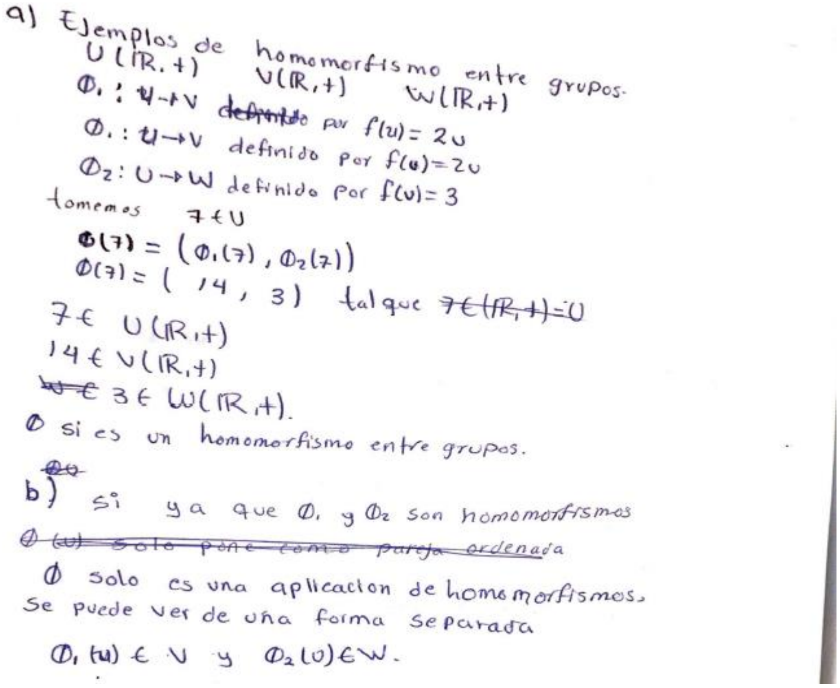
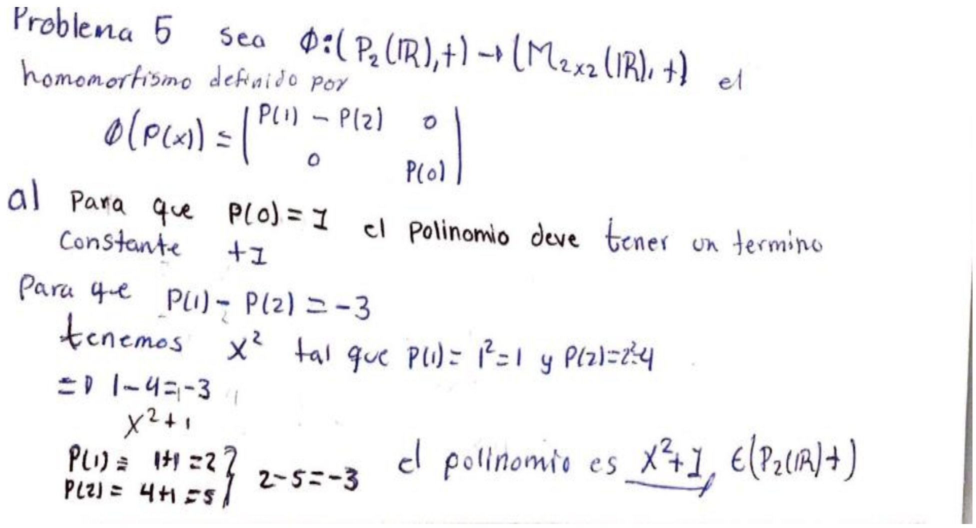

a) Ejemplos de homomorfismo entre grupos.
$U(\mathbb{R},+)$ $V(\mathbb{R},+)$ $W(\mathbb{R},+)$
$\phi_1 : U \to V$ ~~definido~~ por $f(u) = 2u$
$\phi_1 : U \to V$ definido por $f(u) = 2u$
$\phi_2 : U \to W$ definido por $f(u) = 3$
tomemos $7 \in U$
$\phi(7) = (\phi_1(7), \phi_2(7))$
$\phi(7) = (14, 3)$ tal que ~~$7 \in (\mathbb{R},+) = U$~~
$7 \in U(\mathbb{R},+)$
$14 \in V(\mathbb{R},+)$
~~$w \in$~~ $3 \in W(\mathbb{R},+)$.
ϕ si es un homomorfismo entre grupos.
b) si ya que ϕ_1 y ϕ_2 son homomorfismos
~~$\phi(u)$ solo pone como pareja ordenada~~
ϕ solo es una aplicacion de homomorfismos, se puede ver de una forma separada
$\phi_1(u) \in V$ y $\phi_2(u) \in W$.

Figura 4.60. Respuestas del alumno A8, inciso a) y b) situación 4.

En la situación 5, que es la última, el alumno A8 contestó cada uno de los incisos de forma correcta. En el inciso a) se da cuenta inmediatamente de que el polinomio $p(x)$ buscado que cumple $\phi\big(p(x)\big) = A$ debe tener como término constante al 1 ya que el polinomio $p(x)$ evaluado en cero dará $a_0 = 1$.

Otro punto importante es que el estudiante A8 se da cuenta que la matriz A tiene en sus componentes a_{12} y a_{21} cero y que por tanto no hay más que hacer en ello; además que $p(1) - p(2) = -3$ y señala que x^2 cumple esta condición cuando se sustituyen los valores 1 y 2 en $p(x)$ y tomando el valor de $a_0 = 1$ llega a la conclusión de que el polinomio debe ser $x^2 + 1$.

Si bien $x^2 + 1$ cumple con la respuesta el procedimiento para llegar a él no fue del todo esperado, ya que el alumno logra obtener los coeficientes $a_2, a_1\, y\, a_0$ del polinomio $p(x)$ mediante la solución de las ecuaciones por separado. Pese a no hacerlo de la forma esperada el alumno comprende lo que se está pidiendo y aunque no planea explícitamente un sistema de ecuaciones se nota que en su mente está presente pero lo va resolviendo tomando la ecuación más sencilla $p(0) = 1$ y después la más complicada $p(1) - p(2) = -3$ no porque no supiera tal vez este camino le resulto más fácil para este inciso. Véase Figura 4.61.



Problema 5 Sea $\phi:(P_2(\mathbb{R}),+) \to (M_{2\times 2}(\mathbb{R}),+)$ el homomorfismo definido por

$$\phi(P(x)) = \begin{pmatrix} P(1)-P(2) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix}$$

a) Para que $P(0)=1$ el Polinomio deve tener un termino Constante $+1$

Para que $P(1)-P(2)=-3$

tenemos x^2 tal que $P(1)=1^2=1$ y $P(2)=2^2=4$

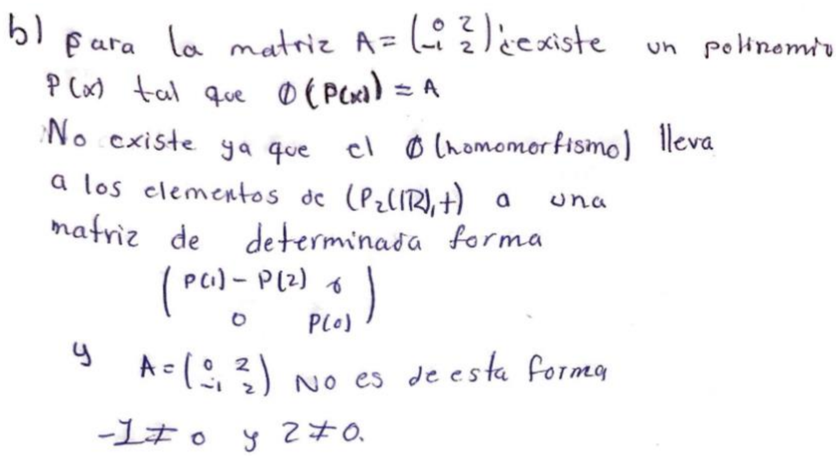
$\Rightarrow 1-4=-3$

x^2+1

$\left.\begin{matrix} P(1)= 1+1=2 \\ P(2)= 4+1=5 \end{matrix}\right\}$ $2-5=-3$ el polinomio es $\underline{x^2+1} \in (P_2(\mathbb{R}),+)$

Figura 4.61. Respuestas del alumno A8, inciso a) situación 5.

En el inciso b) el alumno describe que no puede existir un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$, ya que el homomorfismo ϕ lleva los elementos de $(P_2(\mathbb{R}),+)$ a una matriz determinada de la forma $\begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$ y como la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces las entradas $a_{12} = 0 \neq 2, y\ a_{21} = 0 \neq -1$ por lo que existe una incongruencia y por tanto no existe un polinomio tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$. Observe la figura 4.62.



b) para la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $P(x)$ tal que $\phi(P(x))=A$

No existe ya que el ϕ (homomorfismo) lleva a los elementos de $(P_2(\mathbb{R}),+)$ a una matriz de determinada forma

$$\begin{pmatrix} P(1)-P(2) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix}$$

y $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ No es de esta forma

$-1 \neq 0$ y $2 \neq 0$.

Figura 4.62. Respuestas del alumno A8, inciso b) situación 5.

En el inciso c) a través de los incisos a) y b), el alumno A8 se da cuenta como es que tienen que ser las matrices para que se cumpla la existencia de un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$, las matrices diagonales, es decir, aquellas matrices $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $a_{12} = a_{21} = 0$. Véase figura 4.63.

c) para que matrices existe un polinomio $P(x)$ tal que $\Phi(P(x)) = A$?

Para las matrices diagonales

~~ya que deven de cumplir~~ tener ceros

Para las $A \in M_{2\times2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

tal que ~~a_{21} y a~~ ~~a_{21}~~

$a_{12} = a_{21} = 0$

Matrices diagonales de 2x2.

Figura 4.63. Respuestas del alumno A8, inciso c) situación 5.

Con las repuestas se puede notar que el alumno A8 no llegó a los resultados por un procedimiento más riguroso, hablando matemáticamente, pero puede observarse que el estudiante A8 entiende con claridad lo que se le está pidiendo en cada inciso. Esta información nos proporciona la evidencia suficiente de que el alumno A8 posee una concepción esquema de cuantificador existencial al evidenciar que en cada respuesta pudo darse cuenta de la existencia de al menos un elemento x tal que cumpla b, proposición necesaria para trabajar con la imagen de un homomorfismo entre grupos.

Estudiante A9

En el inciso a) de la primera situación el alumno A9 contestó que 1 es el elemento identidad del grupo $[\mathbb{Z}_5, *_5]$ lo cual es correcto. En su respuesta argumenta por qué 1 es el elemento identidad de $[\mathbb{Z}_5, *_5]$. Véase figura 4.64.

¿Existe algún elemento que sea identidad en el grupo?

-Sí $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}_5 : \forall a \in \mathbb{Z}_5$ se cumple $a \cdot_5 1 = 1 \cdot_5 a = a$

$0 \cdot_5 1 = 1 \cdot_5 0 = 0$ $\quad 3 \cdot_5 1 = 1 \cdot_5 3 = 3$

$1 \cdot_5 1 = 1$ $\quad 4 \cdot_5 1 = 1 \cdot_5 4 = 4$

$2 \cdot_5 1 = 1 \cdot_5 2 = 2$

Figura 4.64. Respuestas del alumno A9, inciso a) situación 1.

La segunda pregunta respecto al inciso a) de la situación 1, el estudiante describe con facilidad la respuesta al mencionar que el inverso de la clase lateral del 3 es el 2. Afirmando y ejemplificando además que todos los elementos a excepción del cero en el grupo $\{0,1,2,3,4\}$ tienen su inverso. Véase figura 4.65.

¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo?

Sí $\exists\, 2 \in \mathbb{Z}_5 :$ $3 \cdot_5 2 = 2 \cdot_5 3 = 1$ (elemento identidad)

¿Los demás tienen inversos multiplicativo?

Exceptuando el elemento 0 y 4 pues para éstos no existe un $a \in \mathbb{Z}_5 :$ $0 \cdot_5 a = a \cdot_5 0 = 1$ y $4 \cdot_5 a = a \cdot_5 4 = 1$

los demás elementos sí tienen inverso.

Figura 4.65. Respuestas del alumno A9, inciso a) situación 1.

Siguiendo con la pregunta de ver si $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ es o no grupo, el alumno contestó que no. Esto es correcto, y lo justifica diciendo que para que $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ sea grupo todos sus elementos deberían tener inverso y como el cero falta a esta excepción por lo tanto $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ no es grupo. Menciona $[\mathbb{Z}_5,\ *_5]$ sería grupo si la operación de éste, $*_5$, se cambiase por $+_5$, esto es, $[\mathbb{Z}_5,\ +_5]$ entonces si sería grupo, una afirmación correcta. Obsérvese figura 4.66.

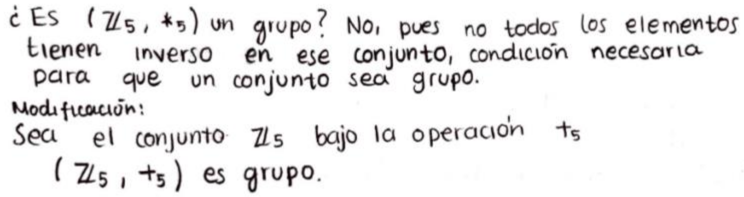


Figura 4.66. Respuestas del alumno A9, inciso a) situación 1.

En la última pregunta del inciso a) situación 1, el estudiante puede mencionar ejemplos de otros grupos sin problemas, sin embargo, en las componentes que conforman a un grupo le falto mencionar un axioma de inversos, pese a ello puede inferirse que al estudiante pudo habérsele olvidado en el momento ya que da evidencia de conocer bien este axioma con la primer respuesta a la primer pregunta de este inciso. Nótese figura 4.67.

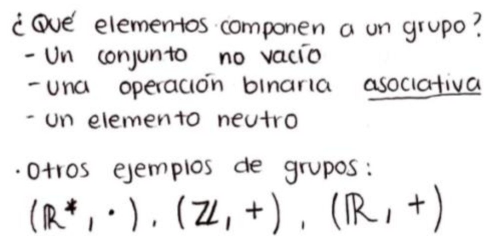


Figura 4.67. Respuestas del alumno A9, inciso a) situación 1.

Para el inciso b) que conforma la situación 1, el estudiante pudo dar un ejemplo correctamente de subgrupo, $H_1 = \{0,3\}$, con dos elementos de $\mathbb{Z}_6$. Complementando su respuesta que el conjunto tiene el elemento neutro y cada elemento del conjunto es su propio inverso.

En el caso de dar un ejemplo de subgrupo con tres elementos de $\mathbb{Z}_6$ el estudiante A9 se equivocó con el conjunto $H_2 = \{0,1,5\}$ ya que si bien es cierto que el conjunto contiene el elemento neutro y los demás elementos tienen sus inversos en él, al operar el elemento 5 con el mismo no da el elemento 1,0 o 5 y de forma análoga se tiene que al operar el elemento 1 con el mismo no da como resultado el elemento 5,0 o 1, es decir, no es una operación cerrada. Por esta razón H_2 no es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ con tres elementos.

En la pregunta tres del inciso b) el alumno A9 contestó de manera acertada al decir que $H_3 = \{3,5,7\}$ no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$, ya que no contiene elemento neutro ni elementos inversos. Los tres ejemplos mencionados pueden verse en la figura 4.68.

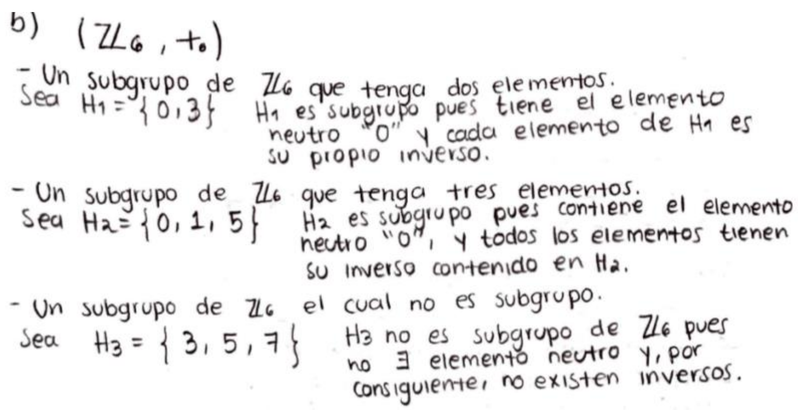


Figura 4.68. Respuestas del alumno A9, inciso b), situación 1.

En el último inciso c) correspondiente a la situación 1, el estudiante A9 contestó que $\mathbb{Z}_3$ no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ lo cual es correcto, afirmando que $\mathbb{Z}_3$ podría ser subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ si $\mathbb{Z}_3$ está bajo la misma operación de $\mathbb{Z}_6$, dando como ejemplo que los elementos 1 y 2 bajo la operación de $\mathbb{Z}_6$ no tienen inverso como en $\mathbb{Z}_3$. Nótese figura 4.69.

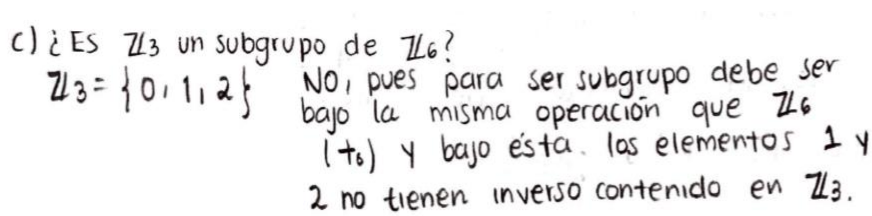
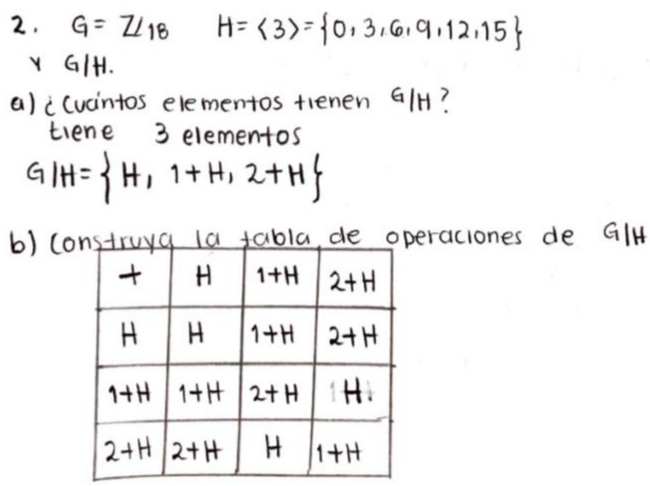


Figura 4.69. Respuestas del alumno A9, inciso c), situación 1.

Después del análisis de la situación 1, las respuestas dan evidencia que el estudiante A9 muestra una concepción esquema de grupo. Conoce bien los axiomas de grupo, identifica los elementos de un conjunto y sabe cómo relacionarlos mediante una operación binaria. Pese a que le haya faltado mencionar que un elemento de grupo es el axioma de inversos en otras preguntas puede mencionarlo sin dificultad o bien se puede ver que se equivocó en dar un ejemplo de subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ con tres elementos, sin embargo el error fue mínimo por lo que no implica que el alumno A9 no posea la concepción de esquema de grupo.

En la situación 2, el estudiante A9 contestó de forma correcta cada uno de los incisos. Para el inciso a) pudo determinar los elementos que tiene G/H y enlistarlos; así mismo construyó la tabla de operaciones de G/H del inciso b). Véase figura 4.70.


2. $G = \mathbb{Z}_{18}$ $H = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

Y G/H.

a) ¿Cuántos elementos tienen G/H?

tiene 3 elementos

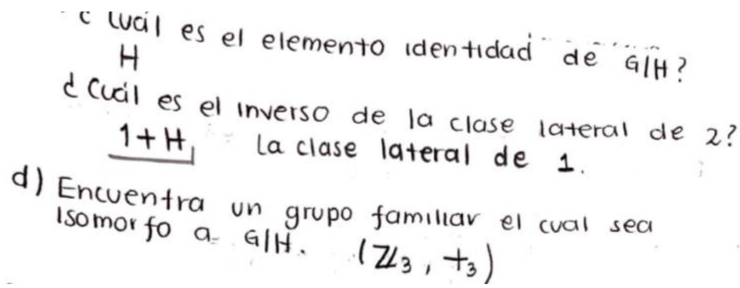
$G/H = \{H, 1+H, 2+H\}$

b) Construya la tabla de operaciones de G/H

+	H	1+H	2+H
H	H	1+H	2+H
1+H	1+H	2+H	H
2+H	2+H	H	1+H

Figura 4.70. Respuestas del alumno A9, inciso a) y b) situación 2.

En el inciso c) escribió que H es el elemento identidad de G/H, y que su inverso lateral de 2 es $1 + H$, que es la clase lateral de 1. Finalmente menciona que un grupo familiar isomorfo a G/H es $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ para el inciso d). Nótese figura 4.71.


c ¿Cuál es el elemento identidad de G/H?

H

¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2?

1+H la clase lateral de 1.

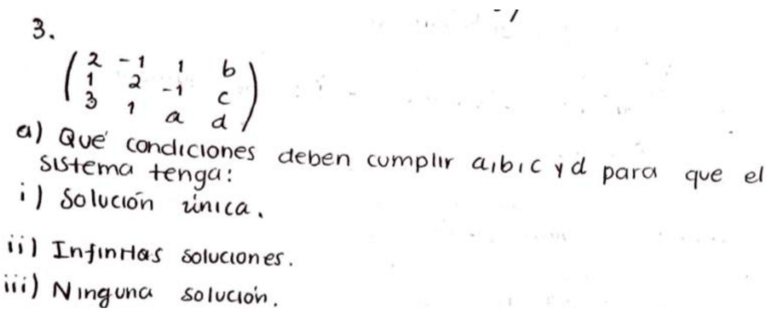
d) Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H. $(\mathbb{Z}_3, +_3)$

Figura 4.71. Respuestas del alumno A9, inciso c) y d) situación 2.

Por las respuestas en la situación 1, el estudiante A9 parece evidenciar tener una concepción esquema de grupo, lo cual le permitió trabajar con el grupo cociente G/H y su operación binaria, construir su tabla e identificar elemento inverso de cada elemento, así como su componente identidad. Puede observarse que el alumno A9 ha esquematizado el esquema de grupo en un objeto, ya que pudo aplicarle acciones al encontrar un grupo familiar isomorfo al grupo cociente G/H.

A través de la situación 1 y 2, el alumno A9 evidencia tener un esquema de operación binaria ya que pudo trabajar bajo distintos problemas matemáticos. Posee además un esquema de conjunto ya que se da cuenta de los elementos y sus diferencias bajo distintos conjuntos elementales y avanzados. Pese a que tuvo un error en los ejemplos de subgrupos, puede observarse que el estudiante conoce y aplica correctamente las propiedades que se requieren para que un conjunto sea subgrupo, además no confundió el concepto de conjunto o subconjunto con el de subgrupo. Por último se observa que posee un esquema de axioma de grupo ya que puede mencionarlos y a la par trabajar con ellos. Por estas razones se tiene evidencia de que este estudiante posee una concepción esquema de grupo y de subgrupo.

Dado que la situación 3 el alumno no contestó, no se puede inferir que realmente tenga o no conocimiento sobre el tema de sistemas de ecuaciones lineales, aunque parece difícil pensar que no conozca nada, tal vez por falta de tiempo no respondió esta situación. Por falta de evidencia no se puede asegurar que el estudiante posea o no una concepción objeto de ecuaciones lineales. Véase figura 4.72.



3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 3 & 1 & a & d \end{pmatrix}$$

a) Qué condiciones deben cumplir a, b, c y d para que el sistema tenga:

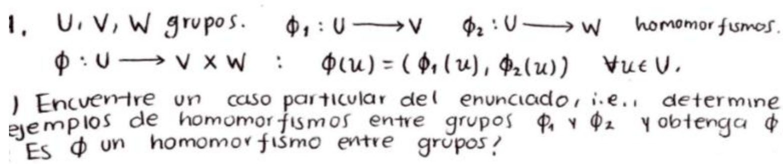
i) Solución única.

ii) Infinitas soluciones.

iii) Ninguna solución.

Figura 72. Respuestas del alumno A9, situación 3.

Al igual que en la situación 3, el estudiante no respondió la situación 4. Si bien es una situación aparentemente más compleja que las demás, parece ser que no la contestó por causas de tiempo ya que las demás repuestas están sumamente elaboradas y muy bien contestadas sin embargo se puede inferir que por esta falta de tiempo prefirió dejar en blanco esta situación y la 3 para no verse mal en contestar solo algunas ideas de las cuales no estaba segura. Por tal motivo tampoco se puede asegurar si el estudiante A9 posee o no una concepción objeto de homomorfismo entre grupos. Obsérvese la figura 4.73.



1. U, V, W grupos. $\phi_1 : U \longrightarrow V$ $\phi_2 : U \longrightarrow W$ homomorfismos.

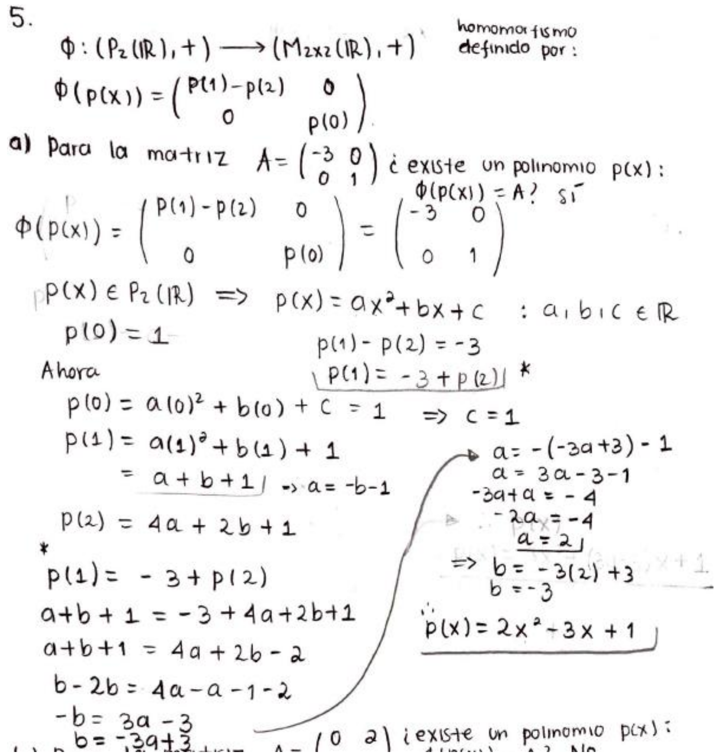
$\phi : U \longrightarrow V \times W$: $\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$ $\forall u \in U$.

) Encuentre un caso particular del enunciado, i.e., determine ejemplos de homomorfismos entre grupos ϕ_1 y ϕ_2 y obtenga ϕ. Es ϕ un homomorfismo entre grupos?

Figura 4.73. Respuestas del alumno A9, situación 4.

En la última situación, que es la número 5, el estudiante sí respondió los tres incisos. En el inciso a) se da cuenta de la acción de ϕ en el homomorfismo de grupos, es decir sabe que dado un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que dos al aplicarle ϕ le resulta una matriz de la forma $\begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$. Sabiendo bien lo que ocurre con el homomorfismo, sabe que para obtener un polinomio $p(x)$ tal que $\phi(p(x)) = A$ cuando $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ debe tomar un polinomio de grado menor o igual a dos, aplicarle las acciones de ϕ y después igualar el resultado con la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para obtener los coeficientes del polinomio $p(x)$ buscado y con ello encontrar al polinomio. El alumno A9 toma al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ y de inmediato se percata de que $c = 1$, posteriormente evalúa $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $x = 1, y\ x = 2$, y después establece la relación $p(1) - p(2) = -3$ con lo cual llega a

$p(1) = -3 + p(2)$. Después hace sustituciones y operación algebraicas para obtener los coeficientes y con ello el polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ buscado. Véase la figura 4.74.


5.

$\phi : (P_2(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (M_{2x2}(\mathbb{R}), +)$ homomorfismo definido por:

$\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$

a) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$: $\phi(p(x)) = A$? sí

$\phi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c \quad : a, b, c \in \mathbb{R}$

$p(0) = 1$ $\quad p(1) - p(2) = -3$

Ahora $\quad \boxed{p(1) = -3 + p(2)}$ *

$p(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$

$p(1) = a(1)^2 + b(1) + 1 = a + b + 1 \Rightarrow a = -b-1$

$p(2) = 4a + 2b + 1$

* $p(1) = -3 + p(2)$

$a + b + 1 = -3 + 4a + 2b + 1$

$a + b + 1 = 4a + 2b - 2$

$b - 2b = 4a - a - 1 - 2$

$-b = 3a - 3$

$b = -3a + 3$

$a = -(-3a+3) - 1$

$a = 3a - 3 - 1$

$-3a + a = -4$

$-2a = -4$

$a = 2$

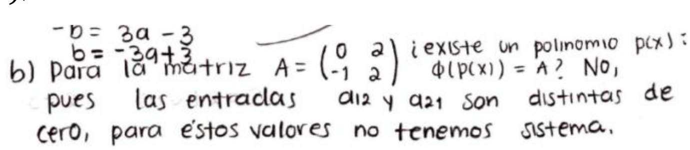
$\Rightarrow b = -3(2) + 3$

$b = -3$

$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Figura 4.74. Respuestas del alumno A9, inciso a) situación 5.

Para el inciso b), el alumno A9 contestó de manera correcta al percatarse que no puede haber una matriz con entradas $a_{12}, a_{21} \neq 0$ ya que para estos valores dice la alumna que no se tiene sistema, aunque su argumento parece ser falso, habría que preguntar a la estudiante qué quiso decir con esto último, podría ser que no se tiene sistema en el sentido de que no tendía solución, entonces no existiría un polinomio $p(x)$ tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$ para el ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ con $a_{12},\ a_{21}\ \neq 0$. Recuérdese que $\phi(x)$ está dado por $\phi\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$. Obsérvese la figura 4.75.

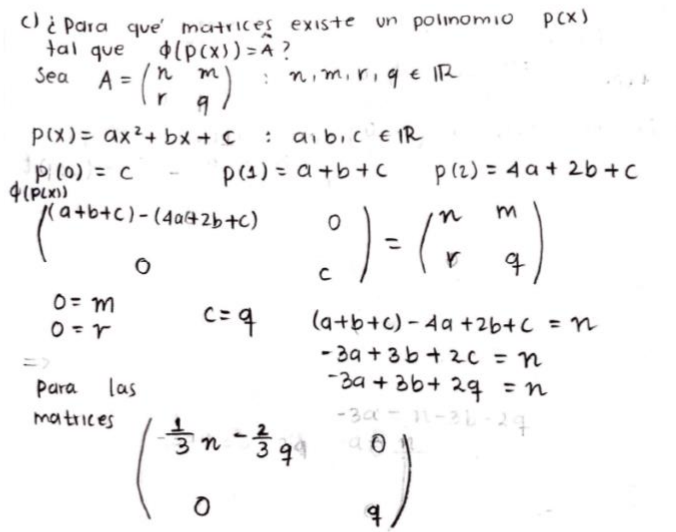

$-b = 3a - 3$

$b = -3a + 3$

b) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$: $\phi(p(x)) = A$? No, pues las entradas a_{12} y a_{21} son distintas de cero, para éstos valores no tenemos sistema.

Figura 4.75. Respuestas del alumno A9, inciso b) situación 5.

En el último inciso c) el estudiante da evidencia de entender para qué matrices existe un polinomio $p(x)$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $\phi\big(p(x)\big) = A$. Sabe que para la matriz $A = \begin{pmatrix} n & m \\ r & q \end{pmatrix}$ sus entradas $m, r = 0$, que la entrada $a_{22} = c = q$, que es el coeficiente independiente del polinomio $p(x)$ y para la entrada a_{11} se debe cumplir $p(1) - p(2) = n$ al sustituir $x = 1, x = 2$ en $p(x) = ax^2 + bx + c,$ lo cual lo conduce a $p(1) - p(2) = a + b + c - (4a + 2b + c) = n$; de donde obtiene $-3a + 3b + 2q = n$ lo cual es incorrecto, aunque lo demás es correcto, pude verse que aquí cometió un error de cálculos ya que debió llegar a $-3a - b = n$. Pese a este error de cálculos el cual se deba a la precipitación del tiempo o a un simple descuido la idea es correcta, con lo que al final el alumno A9 determina que las matrices que cumplen la condición pedida, son aquellas en las que $m = r = 0,\ q = c$ y $n = \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}q$, esto último debió haber sido $n = -3a - b$. Véase la figura 4.76.


c) ¿Para qué matrices existe un polinomio $p(x)$ tal que $\phi(p(x)) = \hat{A}$?

Sea $A = \begin{pmatrix} n & m \\ r & q \end{pmatrix}$: $n, m, r, q \in \mathbb{R}$

$p(x) = ax^2 + bx + c$: $a, b, c \in \mathbb{R}$

$p(0) = c$ $\quad p(1) = a + b + c$ $\quad p(2) = 4a + 2b + c$

$\phi(p(x))$

$\begin{pmatrix} (a+b+c) - (4a+2b+c) & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \\ r & q \end{pmatrix}$

$0 = m$ $\quad c = q$ $\quad (a+b+c) - 4a + 2b + c = n$

$0 = r$ $\quad -3a + 3b + 2c = n$

$\Rightarrow$ $\quad -3a + 3b + 2q = n$

Para las matrices

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

Figura 4.76. Respuestas del alumno A9, inciso c) situación 5.

Este estudiante pudo resolver los incisos a) y b) de la situación 5 a excepción del inciso c) donde tuvo algunos ligeros errores, sin embargo la evidencia de las respuestas da información suficiente para determinar que es consciente de la existencia de un elemento que cumple con cierta condición, es decir, se percata del cuantificador existencial que afirma que existe un elemento tal que… para esta investigación es de suma importancia que el alumno se percate de este hecho, ya que en un homomorfismo entre grupos involucra la relación del cuantificador existencial para encontrar un elemento "$x\ tal\ que$" para encontrar la imagen de dicho homomorfismo entre grupos. Por lo tanto con esta información se tiene evidencia de que el alumno A9 posee una concepción de esquema de cuantificador universal en una etapa intra.

Al finalizar el análisis se llevó a cabo un vaciado de información en una tabla para determinar a aquellos alumnos que parecen tener todos o la mayoría de los conocimientos previos para poder aplicarles el cuestionario estructurado y poder determinar si después del análisis de éste, los individuos dan evidencia de que las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética son las necesarias para poder comprender el concepto de imagen de un homomorfismo de grupos.

Alumno\Estructura previa	Esquema Grupo (situación 1)	Esquema de Subgrupo (situación 2)	Objeto de Ecuaciones Lineales (situación 3)	Objeto de Homomorfismo entre grupos (situación 4)	Esquema de Cuantificador Existencial (situación 5)
A1	✗	✗	No respondió	No respondió	No respondió
A2	✓	✓	No respondió	No respondió	✓
A3	✓	✓	No respondió	No respondió	✓
A4	✗	✗	No respondió	No respondió	✗
A5	✗	✗	No respondió	No respondió	✗
A6	✗	✗	No respondió	No respondió	✗
A7	✓	✗	No respondió	No respondió	No respondió
A8	✓	✓	No respondió	✓	✓
A9	✓	✓	No respondió	No respondió	✓

Tabla 4.1. Respuestas de los alumnos sobre el cuestionario diagnóstico.

De la tabla se puede observar que los alumnos A2, A3, A8 y A9 fueron aquellos que evidenciaron tener más conocimientos previos. Esta información permitió elegirlos para poder aplicarles el segundo instrumento, que es el cuestionario estructurado, y poder comparar los resultados ulteriormente con las estructuras de la descomposición genética.

Con el fin de ser más precisos, se incluye una tabla con los porcentajes de la población estudiantil para determinar el número de alumnos que si tenían los conocimientos previos y cuáles no.

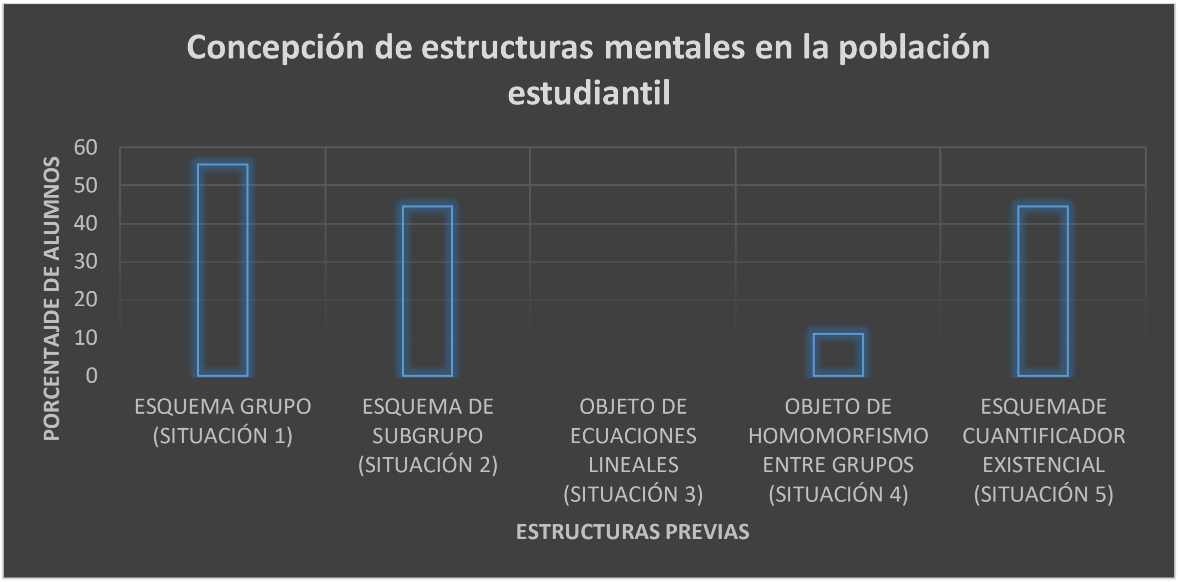


Figura 4.77. Porcentaje de estudiantes que respondieron al cuestionario diagnóstico

En la figura 4.77 se puede ver que 5 de los 9 estudiantes posee el conocimiento previo de esquema de grupo y solo 4 alumnos evidenciaron tener un esquema de subgrupo. Para la situación tres, que es el objeto de ecuaciones no se tuvo ninguna respuesta por parte de los estudiantes, dejaron en blanco la pregunta sin intentar contestarla, intuyendo que los alumnos si eran capaces de abordar la situación, pero tal vez por factores como el tiempo o cansancio no la intentaron responder. Para el objeto de homomorfismo de grupos solo un estudiante pudo responder a la situación y finalmente 4 de 9 estudiantes evidencio tener un esquema de cuantificador universal.

Merece la pena mencionar, que en la mayoría de los casos, los estudiantes poseen buenos conocimientos previos. Escogimos a aquellos que evidencian tener un conocimiento previo mayor estructurado con el cual pudieron dar una respuesta final correcta, sin embargo los 9 estudiantes intentaron responder a las situaciones con un buen dominio matemático.

4.2 Aplicación y Análisis del Cuestionario con audio

Arnon et al. (2014) afirma que existen diferentes instrumentos de análisis. Esto quiere decir que la entrevista semiestructurada no es el único que permite analizar las estructuras y mecanismos mentales en un individuo. Otros instrumentos utilizados en la teoría APOE pueden ser cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (grabadas en audio y/o vídeo), exámenes y/o juegos de computadora. No obstante, el diseño metodológico también puede incluir observaciones del aula, análisis de libros de texto y estudios histórico/epistemológicos.

Por motivos ajenos a la investigación y medidas preventivas derivados de la pandemia COVID-19 no fue posible llevar a cabo una entrevista semiestructurada (grabada con audio y/o vídeo) como se tenía planeado. En su lugar, se optó por establecer como instrumento de análisis un cuestionario estructurado acompañado de un audio, en el cual cada alumno describe sus procedimientos para contestar a cada pregunta del cuestionario.

El cuestionario estructurado se llevó a cabo a distancia en los días 8 al 12 de junio del 2020 mediante la aplicación de whats App. Para ello se eligió a cuatro de los nueve estudiantes: A2, A3, A8 y A9. La elección de estos fue debido a que ellos evidenciaron la mayoría de las estructuras mentales previas planteadas en el cuestionario diagnóstico y que están relacionadas con el concepto en cuestión a estudiar.

El cuestionario constó de cinco situaciones matemáticas, cada una de éstas, se estructuró con un problema matemático y con preguntas abiertas respecto a cada problema, teniendo como intensión ver la reflexión que llevaban a cabo los estudiantes. Los objetivos, son determinar si los alumnos muestran las estructuras mentales descritas en la descomposición genética preliminar y qué también aprendieron los estudiantes el concepto.

Así, en los siguientes párrafos se detalla el análisis de la información recabada del cuestionario estructurado y de cada uno de sus audios realizado por los alumnos escogidos que respondieron a estas preguntas. Buscando evidencia de las estructuras y mecanismos mental descritos previamente en la descomposición genética preliminar y que los alumnos lograron mostrar.

Estructura mental Acción

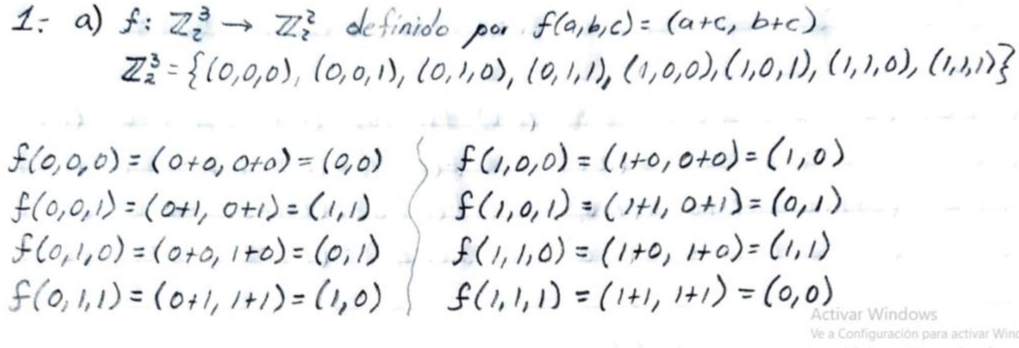
Conforme a la descomposición genética preliminar, la acción se da cuando un individuo es capaz de tomar ciertos elementos específicos del grupo G, a decir, $x_0 \in G$, y puede calcularles la imagen, en este caso dentro del homomorfismo entre grupos, que afirma:

Dados $\langle G,* \rangle$ y $\langle H,\cdot \rangle$ se cumple que:

$$\phi: G \longrightarrow H$$

$$\phi(x * y) = \phi(x) \cdot (y)$$

Para el análisis de esta estructura, en el primer problema del cuestionario estructurado se les pido a los estudiantes que calcularan la imagen específica de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c) = (a+c, b+c)$; y la imagen de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c) = (a-b+2c, 2a-2b+4c)$. Los cuatro alumnos pudieron dar sin problema las imágenes de los vectores específicos en $\mathbb{Z}_2^3$ en ambos problemas. Como ejemplo analicemos al estudiante A3 quien para responder al inciso a) del problema 1 comienza usando su estructura mental previa de esquema de grupo la cual le permite enlistar los elementos del grupo $\mathbb{Z}_2^3$. Después mediante su estructura proceso de homomorfismo le permite aplicarlo a los elementos del grupo obteniendo las imágenes pedidas. Cabe señalar que todos los estudiantes al igual que A3 tomaron en cuenta la operación del grupo codominio, ya que para obtener la imagen del elemento (1,1,1), el estudiante considera la igualdad $f(1,1,1) = (1+1, 1+1) = (0,0)$ dando evidencia que es consciente de que el elemento $f(1,1,1)$ pertenece al grupo $\mathbb{Z}_2^2$ y que por esa razón usa la operación suma modulo 2 definida en ese grupo al establecer la igualdad $(1+1,1+1)=(0,0)$. Esto se muestra en la figura 4.78:



$1.-$ a) $f:\mathbb{Z}_2^3\to\mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c)=(a+c,\ b+c)$

$\mathbb{Z}_2^3=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

$f(0,0,0)=(0+0,0+0)=(0,0)$ $f(1,0,0)=(1+0,0+0)=(1,0)$

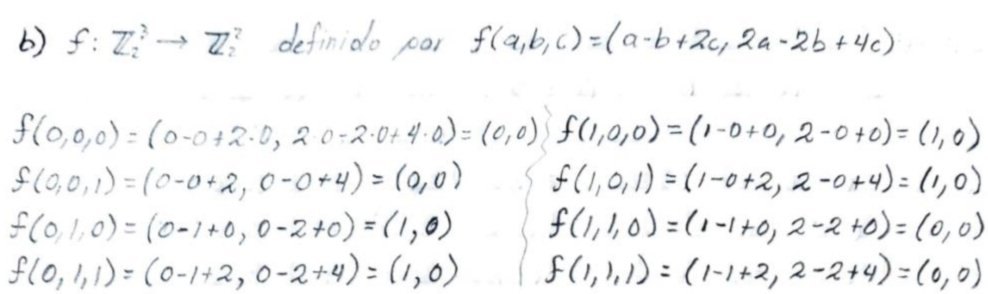
$f(0,0,1)=(0+1,\ 0+1)=(1,1)$ $f(1,0,1)=(1+1,\ 0+1)=(0,1)$

$f(0,1,0)=(0+0,\ 1+0)=(0,1)$ $f(1,1,0)=(1+0,\ 1+0)=(1,1)$

$f(0,1,1)=(0+1,\ 1+1)=(1,0)$ $f(1,1,1)=(1+1,\ 1+1)=(0,0)$

Figura 4.78. Situación 1, inciso a). Calculo de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ alumno A3.

En el inciso b) el estudiante A3 procedió de la misma forma que en el inciso a) obtuvo una por una la imagen de los elementos del grupo $\mathbb{Z}_2^3$ sin olvidar que el elemento $f(a,b,c)$ pertenece al grupo de llegada $\mathbb{Z}_2^2$ gracias a su concepción proceso de homomorfismo, el cual le permite considerar al homomorfismo como una función que toma elementos en $\mathbb{Z}_2^3$ y les asigna elementos en el grupo $\mathbb{Z}_2^2$, como se puede observar en la figura 4.79:



b) $f:\mathbb{Z}_2^3\to\mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a,b,c)=(a-b+2c,\ 2a-2b+4c)$

$f(0,0,0)=(0-0+2\cdot0,\ 2\cdot0-2\cdot0+4\cdot0)=(0,0)$ $f(1,0,0)=(1-0+0,\ 2-0+0)=(1,0)$

$f(0,0,1)=(0-0+2,\ 0-0+4)=(0,0)$ $f(1,0,1)=(1-0+2,\ 2-0+4)=(1,0)$

$f(0,1,0)=(0-1+0,\ 0-2+0)=(1,0)$ $f(1,1,0)=(1-1+0,\ 2-2+0)=(0,0)$

$f(0,1,1)=(0-1+2,\ 0-2+4)=(1,0)$ $f(1,1,1)=(1-1+2,\ 2-2+4)=(0,0)$

Figura 4.79. Situación 1, inciso b). Calculo de varios vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ alumno A3.

En los incisos a) y b) de la situación 1 se les planteó la pregunta a los estudiantes ¿Quién es la imagen de *f*? con el objetivo de ver si el estudiante había reflexionado sobre que la imagen de un homomorfismo es un subconjunto del grupo de llegada e inclusive que podría ser todo el grupo codominio. Tres de los cuatro estudiantes dieron respuesta correcta a esta pregunta. Identificaron que en el primer inciso la imagen era todo el grupo codominio, pero que en cambio en el inciso b) solo era un subconjunto de este. Aunque no todos usaron la misma estrategia para dar respuesta a la pregunta. Por ejemplo uno de ellos el estudiante A8 respondió con base en los resultados que obtuvo al calcular paso a paso las imágenes de los elementos del grupo dominio. Esto se puede observar en el siguiente extracto del audio de la estudiante:

> En la situación 1 mmm… primero detectamos los elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ y les aplicamos la función, luego vemos que en la función, que, que $f(z_3^2)$ nos manda a los elementos, a todos elementos de $\mathbb{Z}_2^2$ entonces así concluimos que la imagen de la función es $\mathbb{Z}_2^2$.
>
> En el inciso (b) lo hacemos de la misma forma le aplicamos la función a los elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ y vemos que, que a los elementos que nos manda pertenece a $\mathbb{Z}_2^2$ pero no son todos, nada más es el $(0{,}0)$ y el (0,…) y (1,0).

A diferencia del estudiante A8 los otros dos alumnos A3 y A9 para responder la pregunta su primer pensamiento fue utilizar la definición de imagen y el método que conocen para obtenerla, sin percatarse en principio que ya podrían responder la pregunta solo con observar los resultados obtenidos. Esto se muestra en el siguiente extracto del audio de la estudiante A9

> ¿Quién es la imagen de *f*? Bueno la imagen, son aquellos elementos (x, y) que están en $\mathbb{Z}_2^2$ tal que $f(a, b, c)$ en $\mathbb{Z}_2^3$ es igual a ese elemento (x, y); y bueno si aplicamos la función definida anteriormente obtenemos que $(a + c, b + c)$ es igual (x, y), y bueno ah por igualación de vectores obtenemos que x es igual a $a + c$ e y es igual a $b + c$, y notemos aquí que a, b y c están en $\mathbb{Z}_2$, entonces la imagen de f es $\mathbb{Z}_2^2$.

Cabe mencionar que después de considerar el método dado en su curso de Álgebra Lineal para determinar la imagen de un homomorfismo, se percataron que podían dar respuesta si observaban los resultados de las imágenes de los elementos del grupo $\mathbb{Z}_2^3$ que ya habían obtenido. Esto se muestra en el siguiente extracto del audio de la estudiante A9

> ¡Ah bueno! Si lo hacemos a pie, por ejemplo tomando el elemento neutro en $\mathbb{Z}_2^3$ el (0,0,0) y si le aplicamos la función tanto (a, b, c) son cero entonces obtenemos el vector (0,0) el neutro en $\mathbb{Z}_2^2$, y si seguimos aplicando la función a cada uno de los elementos vamos eh vamos a obtener todos los elementos de $\mathbb{Z}_2^2$.

Para ratificar la estructura mental acción en los estudiantes, consideramos la situación 3 inciso a), donde se pidió calcular la imagen de elementos del grupo de los polinomios de grado menor o igual a 2 bajo el homomorfismo $f: (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ definido por $f\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$. Este homomorfismo es más difícil que el dado en la situación 1 con la intención de ver si los estudiantes pueden obtener la imagen sin importar los grupos ni el homomorfismo. Hay que resaltar que todos los estudiantes resolvieron con éxito esta parte de la situación. Por ejemplo para el alumno A9 la tarea resultó bastante sencilla, debido a que fue capaz de manejar con soltura los grupos de los polinomios y las matrices los cuales como se puede observar forman parte de su esquema de grupo, además de su estructura de proceso de homomorfismo al aplicar con éxito el homomorfismo a los polinomios dados. La figura 4.80 muestra la respuesta de la estudiante A9 a la situación 3 inciso a):

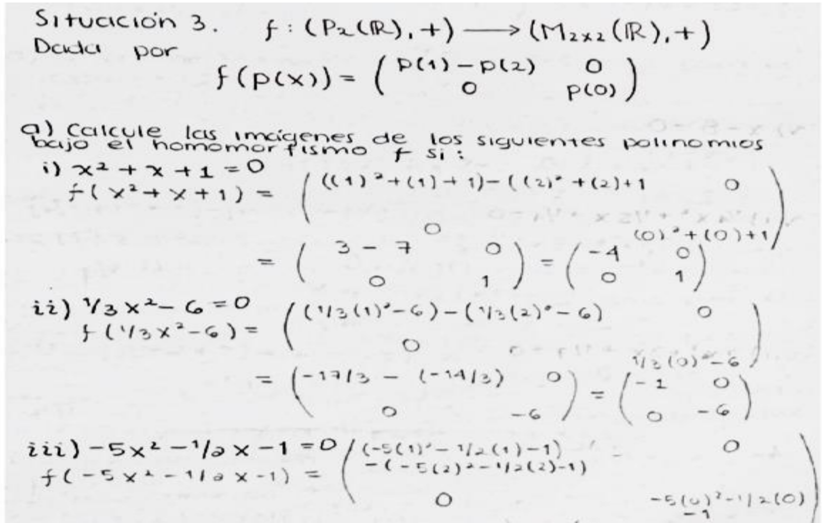


Figura 4.80. Situación 3, inciso a). Calculo de imágenes sobre polinomios, alumno A9.

En un fragmento del audio del estudiante A9 resalta lo siguiente:

> "En la situación tres tenemos una aplicación o transformación que va de $f: (P_2(\mathbb{R}), +) \rightarrow (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ dada por $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$ y nos pide calcular las imágenes de varios polinomios bajo ese homomorfismo, bueno en esos no hay mucho problema porque solo es eh de calcular, así que fue fácil".

Puede observarse que los cuatro alumnos pudieron tomar elementos específicos en $\mathbb{Z}_2^3$ en ambos problemas y calcular su imagen, así mismo en la situación tres pudieron encontrar la imagen para ciertos casos específicos. En sus procedimientos de los cuatro estudiantes se puede apreciar que los procedimientos son monótonos y sin tanta profundidad reflexiva, solo son acciones externas al individuo al tomar un elemento del grupo G y evaluarlo directamente en la aplicación del homomorfismo para obtener la imagen del grupo H siguiendo solo una serie de pasos.

De esta manera se puede establecer que la estructura mental de acción en la imagen de un homomorfismo entre grupos se da cuando el estudiante es capaz de tomar ciertos elementos específicos del grupo G y es capaz de calcular su imagen mediante el homomorfismo entre grupos.

Mecanismo mental interiorización

La interiorización comienza a emerger cuando el individuo repite y reflexione tomando distintos elementos del grupo G, esto es, $x_0 \in G,\ x_1 \in G, \dots,\ x_n \in G$, y calcula sus imágenes en el grupo H, es decir, $f(x_0) = y_0 \in H$, $f(x_1) = y_1 \in H$, …, $f(x_n) = y_n \in H$. Esta acción de calcular las imágenes de los elementos de un grupo G bajo una aplicación *f*, se debe realizar un gran número de veces a fin de ir reflexionando dicha acción y darse cuenta que puede calcular la imagen de cualquier elemento del grupo G.

Una característica en la aplicación de un homomorfismo entre grupos es que puede relacionar distintos tipos de éstos, como los polinomios, las matrices, vectores… así mismo existen distintas funciones entre ellos, esto es, la aplicación puede ser dada en forma algebraica, geométrica, matricial, etc.

Así, un individuo debería ser capaz de poder calcular la imagen de un homomorfismo entre cualquier par de grupos dados. No obstante, será capaz de interiorizar esta acción mediante la repetición reflexionada de encontrar la imagen considerando distintos grupos y homomorfismos utilizando sus estructuras previas de proceso de homomorfismo y esquema de grupo.

En el cuestionario estructurado se tienen situaciones problemáticas donde se pide calcular la imagen de distintos elementos de G bajo diferentes grupos y formas en la aplicación del homomorfismo.

Para proceder en el análisis de este mecanismo mental se recurre a la situación problemática dos y a cada uno de sus incisos. En el inciso a) se pide a los estudiantes que grafiquen la imagen de los siguientes vectores $\boldsymbol{u}(a,1), \boldsymbol{v}(0,-a), \boldsymbol{f}(a,0), \boldsymbol{d}(-1,-1)$, $\boldsymbol{l}(-a,2), \boldsymbol{s}(0,a), \boldsymbol{r}(a,3)$ bajo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que se define como $f(x,y) = (-y,x)$. Nótese a primera vista que los grupos en el homomorfismo son distintos a la situación uno, donde los grupos eran finitos, y la aplicación de f realizaba otra operación entre ellos.

Siguiendo el inciso a) se desea analizar si el alumno fue capaz de obtener las imágenes dadas mediante la repetición de ejecutar el mismo procedimiento bajo distintos elementos específicos y generales del grupo $\mathbb{R}^2$, del grupo dominio, resaltando que cada elemento del grupo es considerado como un objeto.

En esta situación, se tuvieron estudiantes que la resolvieron correctamente y otros no. Por ejemplo la estudiante A2 contestó correctamente, mediante su estructura mental previa de proceso de homomorfismo tomó los elementos del dominio dados y les calculó su imagen. El alumno fue capaz de hacerlo en forma algebraica y gráficamente. Cabe resaltar que usa correctamente su conocimiento previo de variable al tomar los vectores como $\boldsymbol{u}(a,1)$ y obtener su imagen, para después graficarla en el plano, como se puede observar en la figura 4.81 donde considera a “a" como un valor general.

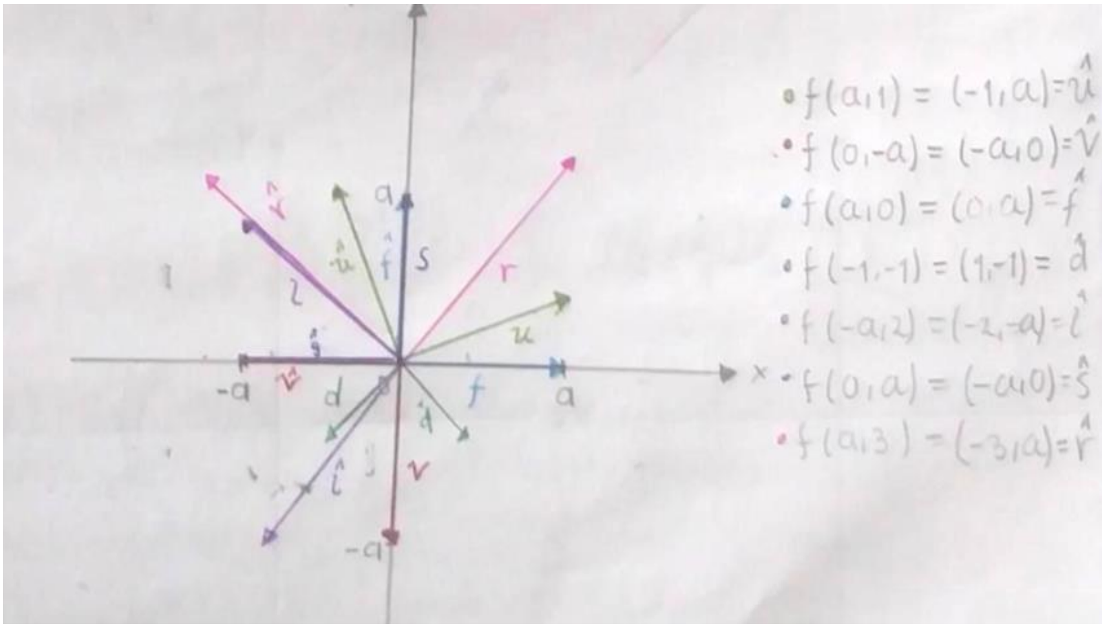
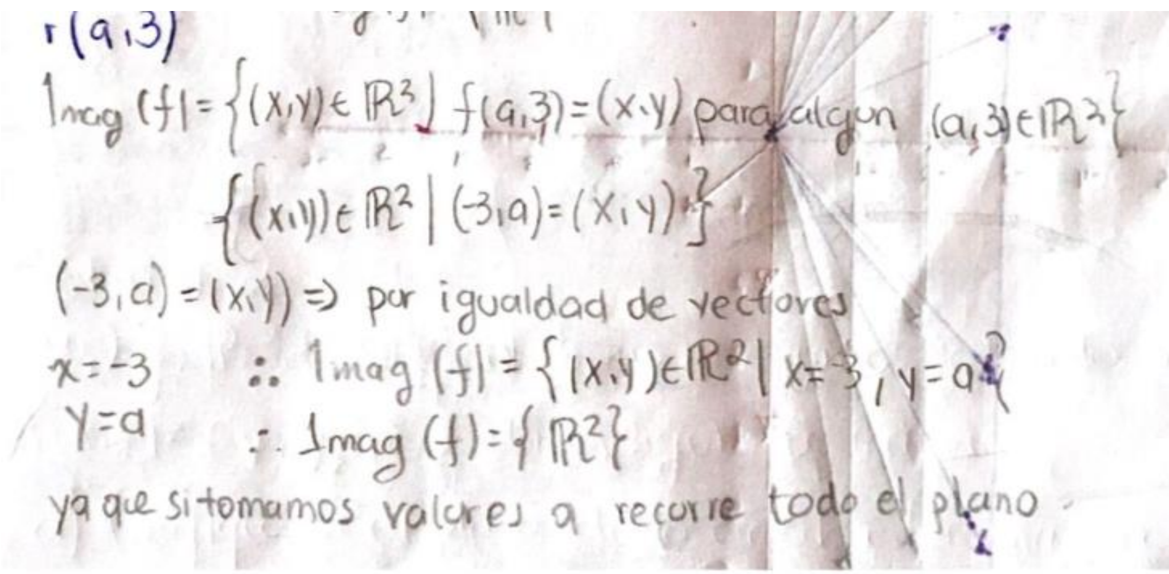


Figura 4.81. Respuesta de la estudiante A9 a la situación 2a)

En cambio A2 no pensó en "*a*" como un número general, esto le llevó a obtener la imagen usando la definición, y no solo aplicándole el homomorfismo. El estudiante calculó la imagen de cada uno de los vectores del inciso a) mediante la aplicación de la definición de imagen, en la figura 81 se muestra el ejemplo del cálculo de la imagen del vector $\boldsymbol{r}(a,3)$. Lleva a cabo paso a paso el procedimiento que se le dio en clase, sin mostrar ningún tipo de reflexión, pues todos los hace exactamente igual. Lo importante de resaltar es que al final de sus cálculos menciona: "ya que si tomamos valores *a* recorre todo el plano". Usando este argumento concluye que la imagen es todo el plano $\mathbb{R}^2$ (véase figura 4.81).



r(a,3)

$\text{Imag}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a,3) = (x,y) \text{ para algun } (a,3) \in \mathbb{R}^2\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-3,a) = (x,y)\}$

$(-3,a) = (x,y) \Rightarrow$ por igualdad de vectores

$x = -3$ $\quad \therefore \text{Imag}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -3, y = a\}$

$y = a$ $\quad \therefore \text{Imag}(f) = \{\mathbb{R}^2\}$

ya que si tomamos valores a recorre todo el plano

Figura 4.82. Situación 2, inciso a). Gráfica de varios vectores en $\mathbb{R}^2$, alumno A2.

La evidencia de que el alumno A2 no consideró a "*a*" en los vectores que se le plantearon en la situación como un número general, se muestra en la figura 82, donde escribe: "Pensamos que *a* es un deslizador el cual recorre todo el plano" en la gráfica las rectas que pone en distintos colores las obtiene justamente de tomar diferentes valores para "*a*" sin percatarse de que este es un valor fijo, es decir, un número general. Esto nos muestra que no es capaz de trabajar con objetos específicos pero generales.

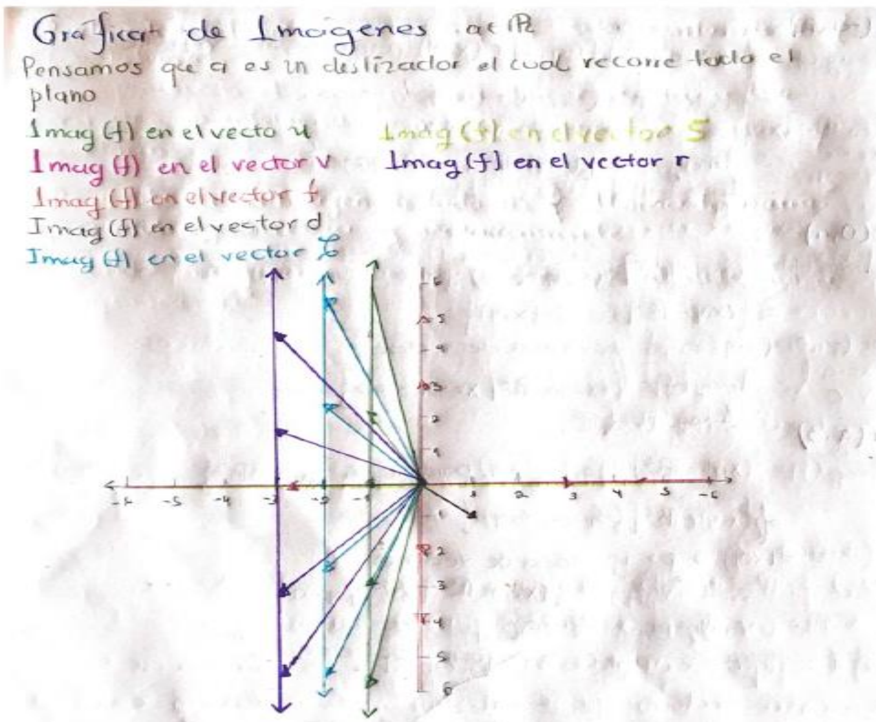


Figura 4.83. Situación 2, inciso a). Gráfica de varios vectores en $\mathbb{R}^2$, alumno A2.

Otro alumno que tuvo problemas con el valor arbitrario pero fijo de a fue el alumno A8, al momento de graficar los vectores, las imágenes las calcula de manera correcta, pero al momento de graficar muestra que lo hace de manera mecánica, sin ningún tipo de reflexión. Algebraicamente puede trabajar con "a", sin embargo, para graficar tiene que dar un valor específico a "a" en la figura 83 se ve que toma el valor de $a = 2.8$. Cognitivamente no tiene claro como fijar la coordenada en el plano $\mathbb{R}^2$ cuando aparece el valor general pero fijo de a y por ello establece un valor particular, esto da como evidencia no haber reflexionado cómo es que puede ser la imagen a través del valor arbitrario de a mediante la representación geométrica, lo cual es parte fundamental que contempla el mecanismo mental de interiorización de imagen de un homomorfismo de grupos. Esto se muestra en la figura 4.84.

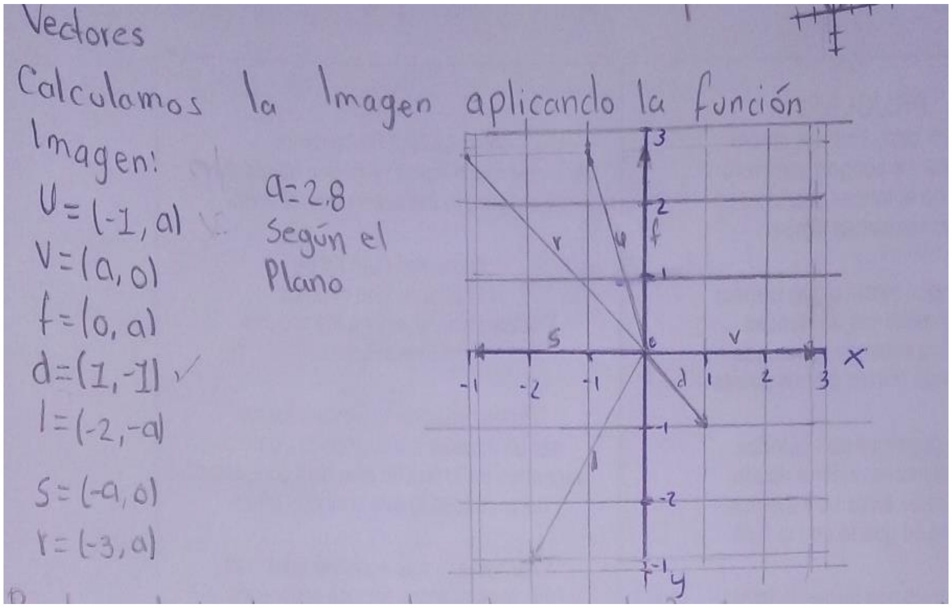


Figura 4.84. Situación 2, inciso a). Gráfica de varios vectores en $\mathbb{R}^2$, alumno A8.

La intención de los incisos a), b) de la situación uno, el inciso a) de la situación dos y el inciso a) de la situación 3 fueron planteados para forzar al alumno a que reflexionará sobre las repeticiones en el cálculo de imágenes. El objetivo, que el estudiante se fuera dando cuenta de cómo es que la imagen tenía que ser en cada problema sin la necesidad de estar realizando todos los pasos, es decir, que dado un elemento específico del domino pueda saber quién es la imagen sin tener que hacer todos los procedimientos algebraicos.

Así, después de realizar numerosas repeticiones de imágenes en diferentes aplicaciones y distintos grupos por parte de los alumnos y encaminarlos a una reflexión de que la imagen puede ser un conjunto que cumple ciertas condiciones, se establecieron preguntas reflexivas sobre como puede ser la imagen en general.

Como ya se vio, en la situación dos del inciso a) se pide que se calculen y se grafiquen una serie de vectores e inmediatamente se les pregunta ¿puede calcular la imagen de cualquier vector? Los cuatro estudiantes respondieron que sí, los alumnos A3 y A9 de forma muy similar, pero de los cuatro los estudiantes A2, A3 y A9 no tuvieron dificultades.

Se tomó como ejemplo al estudiante A2 para evidenciar la respuesta a esta pregunta. Este estudiante después de calcular el primer y último vector se da cuenta de las condiciones que se deben cumplir para obtener la imagen, esto da evidencia que el alumno después de haber realizado una serie de repeticiones en calcular la imagen de éste y los ejercicio pasados reflexiona en cómo es que se deben cumplir las condiciones para que dado cualquier vector en el dominio mediante la aplicación $f(x,y) = (-y,x)$ pueda obtener su imagen sin tener que realizar los pasos para obtener la imagen. En el siguiente extracto del audio emitido por el alumno A2 sobre el inciso a) de la situación dos se puede leer lo siguiente:

> Eh para la solución dos tenemos una función, tenemos un homomorfismo de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ entonces tenemos nuestra función dada y nos pide que lo calculemos en los vectores dados entonces lo que hacemos es, eh, eh valuar los vectores, que

tenemos en la función en él, la función dada, entonces lo único que hacemos pues es generar nuestro sistema de ecuaciones y ahí generamos las, las, las condiciones que se cumplen, y así le hacemos con todos los demás.

Puede leerse a través de sus palabras, que el alumno A2, reflexionó sobre cómo es que debe ser la imagen para cualquier vector. Gráficamente también comprende que se puede trazar la imagen de cualquier vector dado en $\mathbb{R}^2$.

Sin embargo, el alumno A8 también pudo encontrar las imágenes de los vectores en forma algebraica, pero a la hora de graficarlos tuvo problemas con los vectores donde aparecía el valor parcial de a. Entonces cuando se le pregunta ¿cómo calcularía la imagen de cualquier vector? Responde que puede calcular cualquier vector aplicando la función, pero graficarlo no sería posible, ya que el valor arbitrario de a debe tener un valor específico ya que de no ser así no sabría el punto exacto en el cual termina el vector. Mírese la figura 4.85.

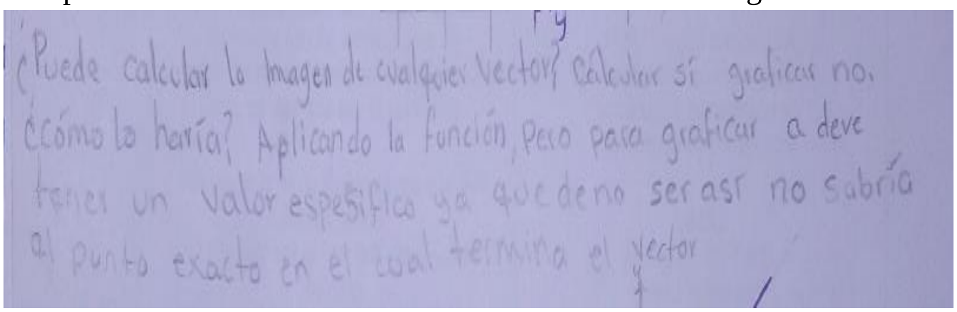


Figura 4.85. Situación 2, inciso a) ¿cómo calcularía la imagen de cualquier vector?, A8.

La respuesta del alumno A8 de la figura 82 pese a que ya encontró imágenes de tres homomorfismo diferentes y bajo distintos grupos da como evidencia que este estudiante no reflexionó del todo, ya que en su respuesta dice que si es posible calcular cualquier vector pero graficarlo no, es una contradicción, cómo es posible que si se puede calcular cualquier vector en $\mathbb{R}^2$, pero no se puede dibujar, entonces el estudiante A8 no puede ver que el valor de a que es un valor general pero fijo.

Para indagar sobre el desarrollo de la acción al proceso, se utilizaron los incisos b) y c) de la situación 2. Estos incisos tienen mayor dificultad ya que el individuo debe percatarse cómo es la imagen de un subconjunto infinito inclusive de todo $\mathbb{R}^2$ y no solo de algunos vectores después de haber calculado un conglomerado de imágenes mecánicamente. El individuo debe reflexionar cómo es que sería su imagen sin tener que realizarla paso a paso, es decir, que el estudiante mediante el análisis cognitivo sin tener que describir el procedimiento repetitivo en su hoja de trabajo pueda calcular toda la imagen del grupo dominio y no solo de un elemento.

Entonces dados $G = \{(x, y)|y = -x\}$, $H = \{(x, y)|x^2+y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ se les pidió a los estudiantes que calcularan las imágenes en el plano de G y H, y que después contestaran si era posible calcular la imagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y de cómo lo harían. Los cuatro estudiantes pudieron graficar los dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, tomemos de ejemplo al alumno A3. Este estudiante desde el inciso a) con su concepción previa de proceso de homomorfismo se percató que el homomorfismo manda a un vector cualesquiera a su perpendicular, pues en el extracto de su audio menciona de manera textual: “el homomorfismo f que va de $\mathbb{R}^2$ a

$\mathbb{R}^2$definido por $f(x,y)$ es igual a $(-y,x)$ o sea que a cada vector de $\mathbb{R}^2$ lo manda con el perpendicular a él" esto le permitió encontrar que la gráfica del subconjunto $G = \{(x,y)|y = -x\}$ al ser esta la recta perpendicular a la recta identidad su imagen es la recta identidad, como se muestra en el siguiente extracto de su audio:

> Ok, ahora en el inciso b) dice grafique en el plano de la derecha la imagen de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ entonces $G = \{(x,y)|y = -x\}$, y eso es la forma de una recta perpendicular a la recta identidad, entonces la imagen como ésta es perpendicular a la identidad la imagen va ser la identidad, la recta identidad.

El mismo argumento le permite determinar la imagen del subconjunto $H = \{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ considerando que el homomorfismo manda cualquier vector a su perpendicular, razón por la cual, cualquier vector de la recta va a estar en la misma circunferencia, es importante señalar que el estudiante usa el conocimiento que tiene de geometría respecto a una circunferencia, como se muestra en el siguiente extracto de su audio correspondiente a la situación 2 b)

> y el $H = \{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$, es una circunferencia de radio 1 y centro en el origen, pero como la circunferencia son los puntos que equidistan de un punto fijo que es el centro, en este caso el origen, entonces el perpendicular de cada punto de la circunferencia va estar en la misma circunferencia porque va seguir equidistando del centro, entonces la imagen de H va seguir siendo la misma circunferencia de radio 1 y centro en el origen, aquí dibujo una circunferencia, bueno arriba dibujo una recta identidad y abajo una circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

Con esto se da la evidencia de que el alumno ha reflexionado sobre la imagen, ya no tiene que recurrir a calcular imagen por imagen a través de pasos algebraicos, el individuo ya es capaz de reflexionar cuál será la imagen general para cada conjunto *G* y *H*.

La figura 4.86 muestra las gráficas del estudiante A3 respecto al inciso b):

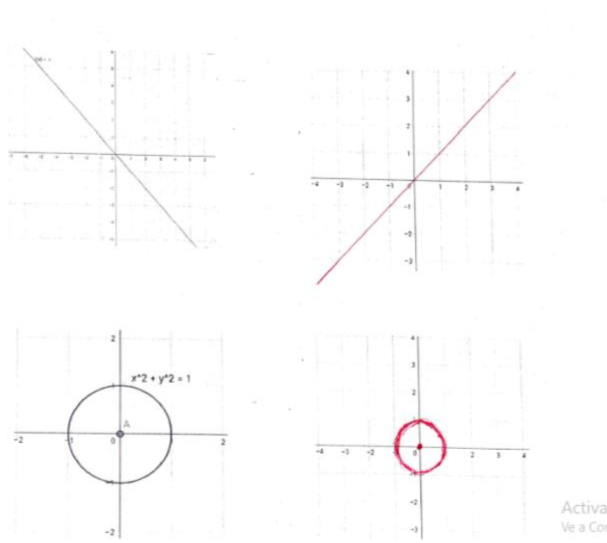


Figura 4.86. Situación 2, inciso b) Imagen de los conjuntos *G* y *H*, alumno A3.

También se tuvieron alumnos que respondieron de manera incorrecta cuando se les preguntó cuál es la imagen de *G* y *H*. Por ejemplo tomado al estudiante A2 se puede notar que este estudiante da argumentos erróneos, por ejemplo para el cálculo de la imagen del subconjunto $G = \{(x, y)|y = -x\}$ comienza asegurando que la imagen de *G* es todo $\mathbb{R}^2$, pues piensa en el homomorfismo como si fuera una función en una sola variable al mencionar que: “ya que si tomamos $y = -x$ entonces los manda, la función identidad a la inversa, ie. $f(x) = x$ lo manda a $f(x) = -x$”. Como se muestra en la figura 4.87.

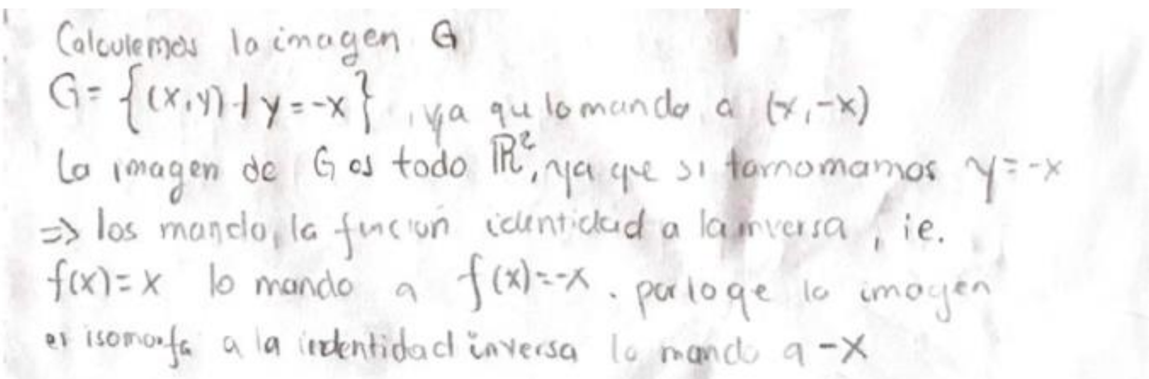

Calculemos la imagen G
$G = \{(x,y) | y = -x\}$, ya qu lo mando a $(x,-x)$
La imagen de G es todo $\mathbb{R}^2$, ya que si tomomamos $y=-x$
$\Rightarrow$ los mando, la función identidad a la inversa, ie.
$f(x)=x$ lo mando a $f(x)=-x$. por lo qe la imagen
es isomorfa a la identidad inversa lo mando a $-X$

Figura 4.87. Situación 2, inciso a) Calculo de la imagen de *G* y *H*, alumno A2.

En el inciso c) de la misma situación 2, se les pidió a los alumnos si era posible calcular toda la imagen de $\mathbb{R}^2$ y de cómo lo harían algebraica y gráficamente. El alumno A9 no contestó a este inciso. El alumno A2 solo menciona que si es posible calcular toda la imagen de $\mathbb{R}^2$, y que esto sería posible dando una función que lo genere. Esta última afirmación es interesante ya parece que el estudiante sufrió una confusión, pues olvidó que ya se daba un homomorfismo y sobre ese debía determinar si se podía obtener la imagen de todo el grupo dominio. Su respuesta es un tanto ambigua, pese a que ya había resuelto ejercicios similares como en del inciso b). Está falta de comprensión la podemos ver en el extracto del audio del mismo estudiante A2 al contestar este inciso:

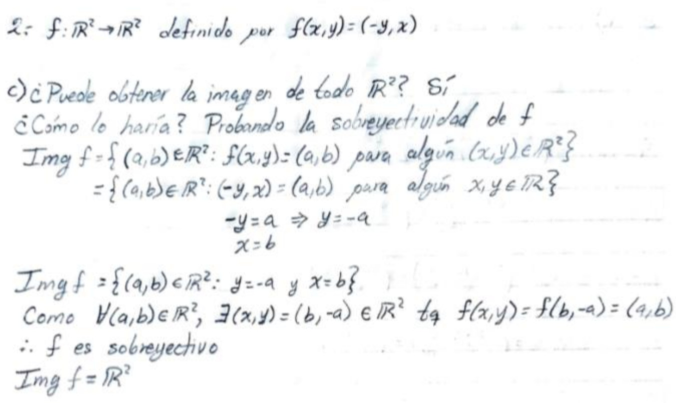
> Y pues el inciso (c) no me quedó muy claro cómo podría hacerlo pero, pero lo único que podría decir es que damos una función tal que al calcular su imagen nos regrese todo $\mathbb{R}^2$.

Y algebraicamente el estudiante A3 fue el único alumno que pudo dar la respuesta. Como dijimos el alumno tiene que pensar en cómo tiene que ser toda la imagen del grupo dominio y no solo de un elemento en específico, para ello, el alumno A3 que se da cuenta de que el homomorfismo es sobreyectivo y que probando esto, se puede obtener toda la imagen de $\mathbb{R}^2$. Esto puede leerse en el extracto del audio que emitió el alumno A3 sobre este inciso.

> Entonces probando la sobreyectividad tenemos imagen de f es igual a los (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y)$ es igual a (a, b) para algún (x, y) en $\mathbb{R}^2$, y entonces, la imagen son los (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tales que $(-y, x)$ es igual a (a, b) para algún (x, y) en $\mathbb{R}^2$de lo anterior tenemos que $-y = a$ o sea que $y = -a$ y que $x = b$, así que tenemos que la imagen son los (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tales que, tales que, $y = -a$, y $x = b$.

Ahora como para todo (a,b) en $\mathbb{R}^2$ existe un (x,y) igual a $(b,-a)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)$ es igual a $f(b,-a)$ y esto es igual a (a,b); por lo tanto f es sobreyectivo, y entonces la imagen de f es todo $\mathbb{R}^2$.

Este fragmento de audio lo pudo representar algebraicamente como se observa en la figura 4.88.



2.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (-y,x)$

c) ¿Puede obtener la imagen de todo $\mathbb{R}^2$? Sí

¿Cómo lo haría? Probando la sobreyectividad de f

$\operatorname{Img} f = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (a,b)$ para algún $(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (-y,x) = (a,b)$ para algún $x, y \in \mathbb{R}\}$

$-y = a \Rightarrow y = -a$

$x = b$

$\operatorname{Img} f = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : y = -a$ y $x = b\}$

Como $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\exists (x,y) = (b,-a) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x,y) = f(b,-a) = (a,b)$

$\therefore f$ es sobreyectivo

$\operatorname{Img} f = \mathbb{R}^2$

Figura 4.88. Situación 2, inciso c) Imagen de todo $\mathbb{R}^2$ algebraicamente, alumno A3.

Para terminar el análisis del mecanismo mental de interiorización tenemos los incisos b) y c) de la situación 3. Ya se vio que la mitad de los alumnos pudieron contestar el inciso a) de la situación 3. Ahora bien con estos dos incisos restantes se desea analizar si después de calcular imágenes bajo grupos distintos que son el de las matrices y polinomios a diferencia de las situaciones 1 y 2, el alumno es capaz de concebir de manera mental la imagen dado cualquier polinomio bajo el homomorfismo f, encaminándolo ulteriormente a que el alumno vaya interiorizando la idea de que la imagen es un subgrupo de H o incluso ser el mismo grupo H pero con determinadas características, que en otras palabras termina siendo la estructura mental de proceso de imagen de un homomorfismo.

En el inciso b) y c) se les pidió que respondieran si las imágenes encontradas tienen alguna característica en común, que si es posible calcular la imagen de cualquier polinomio, cómo es qué sería ésta y cómo la determinarían. El estudiante A3 no contestó estos dos incisos, los estudiantes restantes si contestaron a los incisos; sus respuestas fueron sumamente similares sin embargo el alumno A9 dio una mejor respuesta al mencionar cuál sería la imagen y por qué. Menciona que a simple vista sin tener que hacer algún cálculo las características que tienen en común las imágenes es que las entradas $a_{12} = a_{21} = 0$, y que la entrada $a_{22} = c$, que es el termino constante. En el extracto del audio se puede leer esto:

> Nos dice las imágenes encontradas tienen alguna característica en común, eh pues sí, las que podemos ver a simple vista sin tener que tener como que analizar como tal es que las entradas a_{12} y a_{21} son igual a cero y la entrada a_{22} es igual al termino constante.

En su respuesta a las preguntas de saber si es posible calcular la imagen de cualquier polinomio y de cómo lo haría, se puede notar que el estudiante A9 da evidencia de haber interiorizado la acción ya que habla de que una vez que se encuentre la imagen general, el conjunto imagen, podrá calcular la imagen de cualquier polinomio dado.

> Sí pues una vez que encontremos la imagen en general, es decir, para cualquier polinomio de grado dos con coeficientes en $\mathbb{R}$ pues es fácil encontrar la imagen porque tenemos, este, ya las características que mencione anteriormente y solo sería como que eh, especificar algunas para la entrada a_{11}.

En la pregunta de cómo es que sería la imagen, este estudiante, utiliza la definición de imagen, y mediante su estructura previa de objeto de sistema de ecuaciones lineales establece el sistema para encontrar las incógnitas que pueden ser consideradas como restricciones del problema, esto último gracias al conocimiento previo del alumno respecto al modelo 3uv, que involucra el uso de la incógnita.

Al final el alumno A9 puede encontrar cómo es qué sería o cuál sería la imagen, cómo es que encuentra la imagen y además menciona las características que debe tener este conjunto como imagen dando una vez más evidencia de que ha interiorizado la acción y el alumno comienza a construir la estructura mental de proceso la cual consiste en encontrar y darse cuenta que la imagen puede ser un subconjunto del grupo H o en algunos casos todo el grupo de llegada H. Véase la figura 4.89.

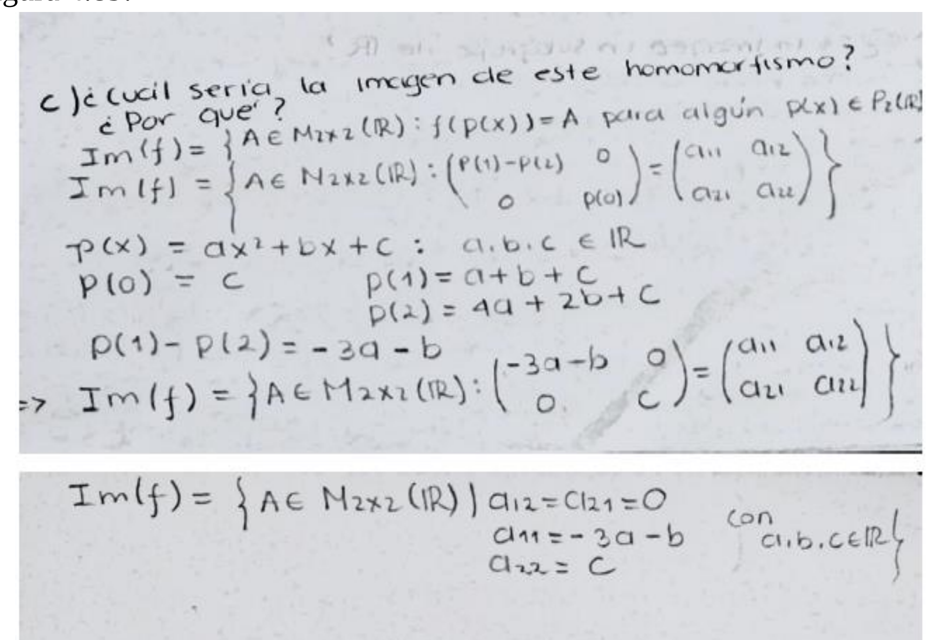


Figura 4.89. Situación 3, inciso c), conjunto imagen del homomorfismo f, alumno A9.

Con esta información podemos caracterizar que el mecanismo mental de interiorización en la imagen de un homomorfismo entre grupos se da cuando el estudiante es capaz de calcular la imagen considerando distintos grupos y homomorfismos utilizando sus estructuras previas de proceso homomorfismo y esquema de grupo; involucrando una reflexión que le permita visualizar cuál sería la imagen general o el conjunto imagen de dichos homomorfismo sin la necesidad de calcular imágenes repetidas mediante procesos o algoritmos paulatinos para encontrar dicho conjunto.

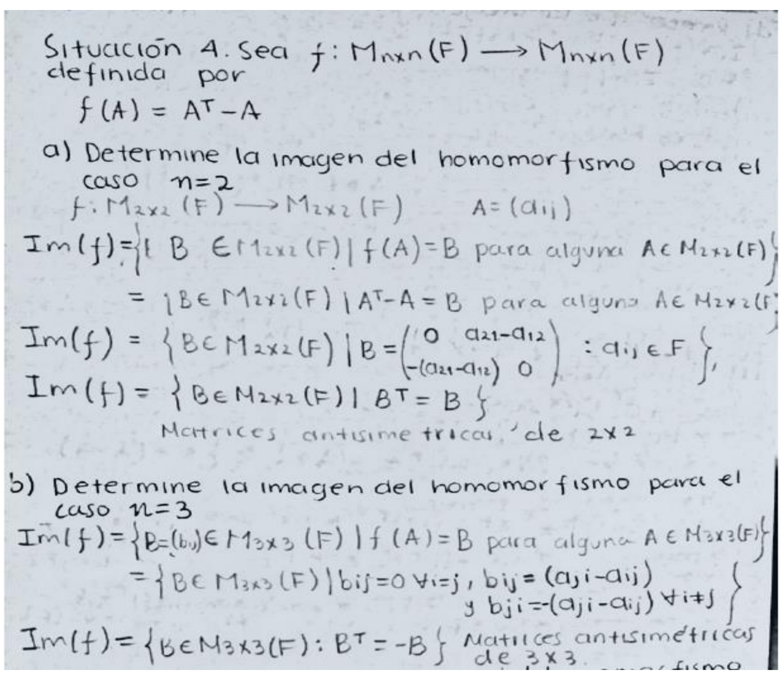
Estructura mental de proceso

La estructura mental de proceso de imagen de un homomorfismo entre grupos comienza cuando el individuo empieza a ser consciente de que la imagen es un subconjunto del grupo H es decir que la imagen del grupo G bajo la función f es un subconjunto del grupo H o bien $imag(f) \subseteq H$. Así mismo debe ser capaz de obtener dicho conjunto.

La situación 4 se planificó con el objetivo de analizar si el individuo fue capaz de desarrollar la estructura mental de proceso a través de observar sus respuestas en las situaciones 1 y 2 correspondientes a la estructura mental de acción.

En los incisos a) y b) de la situación 4 se les pidió a los alumnos obtener la imagen del homomorfismo $f: M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F)$ definido por $f(A) = A^T - A$ para casos particulares de *n* y con ello determinar si el alumno muestra la estructura mental de acción. El inciso c) que corresponde al caso general para *n* pretende evidenciar la estructura proceso.

La información recolectada muestra que los cuatro estudiantes lograron obtener las imágenes pedidas en los incisos a) y b). Como ejemplo analicemos el alumno A9 quien para responder a dichos incisos utiliza su concepción proceso de homomorfismo para calcular la imagen de f, puede verse que el esquema de grupo que posee le permite tomar un elemento del grupo codominio y con la estructura previa de cuantificador existencial no solo se percata de que existe un $y \in H$ tal $f(x) = y$, con $x \in G$, sino que se da cuenta de que la imagen puede ser un subconjunto de H, cosa que se pretendía con esta situación 4. Véase la figura 4.90.


Situación 4. Sea $f: M_{n\times n}(F) \longrightarrow M_{n\times n}(F)$ definida por

$f(A) = A^T - A$

a) Determine la imagen del homomorfismo para el caso $n=2$

$f: M_{2\times 2}(F) \longrightarrow M_{2\times 2}(F)$ $\quad A = (a_{ij})$

$Im(f) = \{B \in M_{2\times 2}(F) \mid f(A) = B$ para alguna $A \in M_{2\times 2}(F)\}$

$= \{B \in M_{2\times 2}(F) \mid A^T - A = B$ para alguna $A \in M_{2\times 2}(F)\}$

$Im(f) = \left\{B \in M_{2\times 2}(F) \mid B = \begin{pmatrix} 0 & a_{21}-a_{12} \\ -(a_{21}-a_{12}) & 0 \end{pmatrix} : a_{ij} \in F\right\}$,

$Im(f) = \{B \in M_{2\times 2}(F) \mid B^T = B\}$

Matrices antisimetricas de 2x2

b) Determine la imagen del homomorfismo para el caso $n=3$

$Im(f) = \{B = (b_{ij}) \in M_{3\times 3}(F) \mid f(A) = B$ para alguna $A \in M_{3\times 3}(F)\}$

$= \{B \in M_{3\times 3}(F) \mid b_{ij} = 0 \ \forall i = j,\ b_{ij} = (a_{ji} - a_{ij})$ y $b_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij}) \ \forall i \neq j\}$

$Im(f) = \{B \in M_{3\times 3}(F) : B^T = -B\}$ Matrices antisimétricas de 3x3

Figura 4.90. Situación 4, incisos a) y b) imagen de f para los casos $n = 2$ y $n = 3$, alumno A9.

En los incisos a) y b) como se mencionó, el fin fue observar si los estudiantes evidenciaban tener una estructura mental de acción y con ello encaminarlos a encontrar la imagen para el caso general n que es el inciso c) el cual tenía como meta evidenciar si los alumnos serían capaces de darse cuenta que la imagen es un subconjunto del grupo $M_{n\times n}$, y posteriormente calcularlo.

Mediante el análisis de la información se pudo encontrar que los cuatro alumnos pudieron contestar el inciso c). Por ejemplo los alumnos A3, A8 y A9, quienes contestaron quién sería el conjunto imagen para el caso n después de que calcularon la imagen para $n = 2$ y $n = 3$. Esto se puede ver en la figura 4.91:

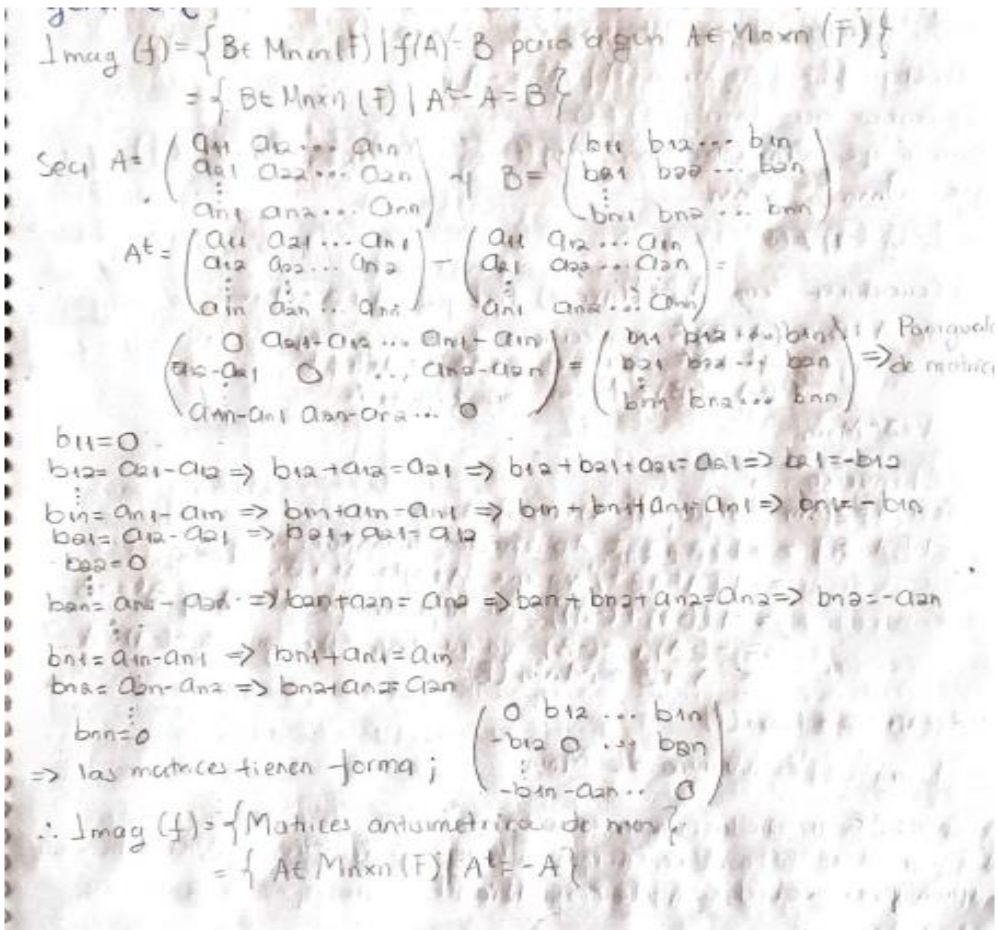


Figura 4.91. Situación 4, respuesta inciso c), alumno A9.

Puede verse que el estudiante A9 volvió a realizar todos los pasos para el caso general n, evidenciando no tener muy claro el mecanismo de interiorización, ya que no pudo emitir los procedimientos para calcular el conjunto imagen mentalmente después de haber realizado el mismo ejercicio para $n = 2$ y $n = 3$.

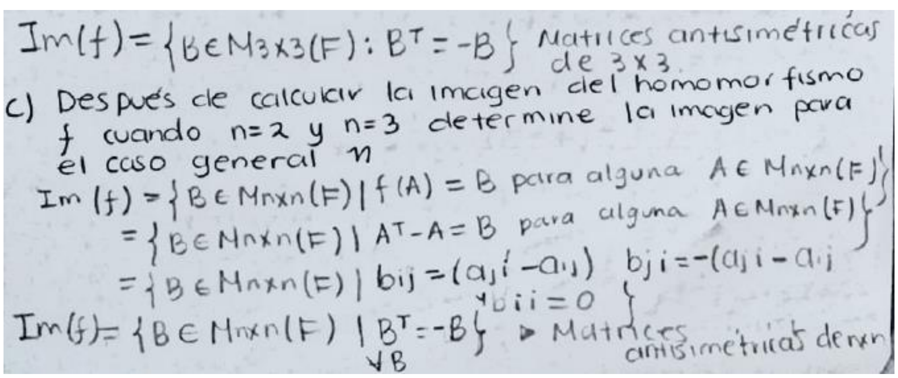
Por el otro lado, tomando de ejemplo al alumno A9, éste calcula la imagen solo para el caso $n = 2$ y se percata que la imagen para el caso $n = 3$ va a ser lo mismo, con lo cual se pasa al caso general n. Esto puede leerse del extracto del audio de su respuesta, que dice:

La imagen, son las matrices v en, las matrices de 2×2 con coeficientes en F tal que $B^t = B$, A$-B$ perdón; y son las matrices antisimétricas de 2×2 y bueno nos pide determinar el caso del homomorfismo para el caso $n = 3$, y vamos a obtener lo mismo que anteriormente las matrices antisimétricas de 3×3, por lo que nos vamos a pasar al caso general n.

Para el caso general n, el estudiante A9, detalla de manera sustancial cómo es que se logrará obtener el conjunto imagen, describe su razonamiento para obtener el conjunto imagen, esto puede leerse a través de la transcripción de la respuesta a este caso:

La imagen del homomorfismo va a ser las matrices $B\ de\ n \times m$ con coeficientes en F tal que $f(A) = B$ para alguna A en las matrices de $n \times n$ con coeficientes en F; y bueno aplicándole ya la función, el homomorfismo tenemos que $A^T - A = B$ para alguna A en el paréntesis. Y bueno después de hacer los, la igualación la matriz B es, son de entradas b_{ij} y la matriz A de entradas a_{ij}, entonces vamos a obtener que las entradas, mm… perdón, la matriz B va tener entradas b_{ij} igual a $a_{ji} - a_{ij}$, y las entradas $b_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij})$ o sea que es la inversa de las que mencionamos anteriormente, y para las entradas $b_{ii} = 0$ o sea la diagonal es cero, por lo que la imagen de f van a ser las matrices B tal que $B^T = -B$ o sea las matrices antisimétricas.

Finalmente en la hoja de respuesta no escribió paso a paso cómo obtener el conjunto imagen de f, en lugar de ello reflexionó cómo es que debía ser el conjunto imagen después de calcularlo para $n = 2$ y $n = 3$. Véase figura 92.



$Im(f) = \{B \in M_{3\times3}(F) : B^T = -B\}$ Matrices antisimétricas de 3x3.

c) Después de calcular la imagen del homomorfismo f cuando $n=2$ y $n=3$ determine la imagen para el caso general n

$Im(f) = \{B \in M_{n\times n}(F) \mid f(A) = B$ para alguna $A \in M_{n\times n}(F)\}$

$= \{B \in M_{n\times n}(F) \mid A^T - A = B$ para alguna $A \in M_{n\times n}(F)\}$

$= \{B \in M_{n\times n}(F) \mid b_{ij} = (a_{ji} - a_{ij})\ \ b_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij}\ \ y\ b_{ii} = 0\}$

$Im(f) = \{B \in M_{n\times n}(F) \mid B^T = -B\}$ ▸ Matrices antisimétricas de nxn
$\forall B$

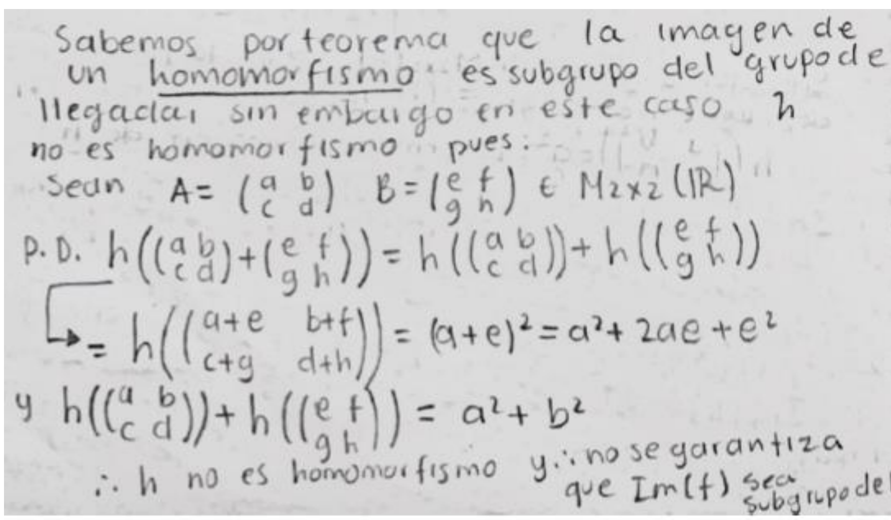
Figura 4.92. Situación 4, respuesta al inciso c), alumno A9.

Es muy temprano afirmar que a través de un problema sobre el cálculo del conjunto imagen un homomorfismo entre grupos un individuo pueda poseer la estructura mental de proceso. Por ello se establecieron dos situaciones más para determinar el conjunto imagen y poder llevar a cabo un análisis más profundo sobre esta estructura.

En la situación 5 se tienen dos incisos referentes a obtener el conjunto imagen de un homomorfismo, en ellos los estudiantes deben indagar sobre cuál es ese conjunto, con el objetivo ulterior de analizar si después de calcular el conjunto imagen, que es un subconjunto del codominio pueden percatarse que es un subgrupo de H con ciertas propiedades y características, ya que un homomorfismo es una aplicación especial que preserva la estructura entre sus grupos.

En el inciso a) se les pidió a los alumnos que encontraran el conjunto imagen de $h: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ cuando $h: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2$. Dada la información, se tiene que solo los alumnos A2 y A9 contestaron correctamente, sin embargo los procedimientos de los alumnos A3 y A8 no son incorrectos, ya que solo erraron al mencionar quien es el conjunto imagen de h¸ aparentemente parece que fue un descuido.

Como ejemplo se tomará al estudiante A9 para analizar la respuesta correcta y al alumno A8 para ver lo contrario. El estudiante A9 evidencia su concepción proceso de homomorfismo pues es capaz de verificar que una función *h* no cumple con la propiedad para ser homomorfismo, cabe señalar que solo este estudiante consideró la condición que debe ser satisfecha para que la imagen sea un subgrupo. Esto se muestra en la figura 4.93.


Sabemos por teorema que la imagen de un homomorfismo es subgrupo del grupo de llegada, sin embargo en este caso h no es homomorfismo pues:

Sean $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$

P.D. $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$

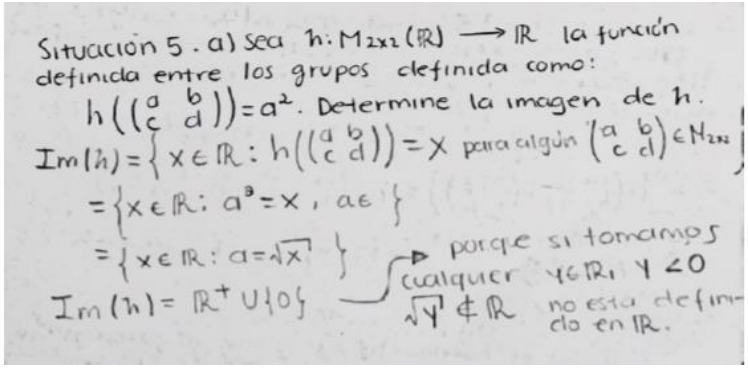
$= h\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right) = (a+e)^2 = a^2 + 2ae + e^2$

y $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2$

$\therefore$ h no es homomorfismo y $\therefore$ no se garantiza que Im(f) sea subgrupo del

Figura 4.93. Demostración de que *h* no es homomorfismo, alumno A9

Después, mediante la misma estructura de proceso de homomorfismo obtiene la imagen y llega a la igualdad $a^2 = x$ de donde concluye que la imagen serán los reales positivos junto con el cero, es decir $imag(h) = \{a \in \mathbb{R} | f(x) = a^2, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ ya que $a = \sqrt{x}$, es importnate notar que esta estudiante no considera ambos signos para la raíz, pues al despejar *a* debería haber escrito $a = \pm\sqrt{x}$, y justificar que para que exista la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como se está trabajando en $\mathbb{R}$ entonces x debe ser no negativo. En lo desarrollado por el estudiante está ausente el cuantificador de existencia ($\exists$), y no podemos saber si lo estaba considerando o no. Lo mencionado anteriormente se muestra en la figura 4.94.



Situación 5 . a) Sea $h: M_{2x2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida entre los grupos definida como:

$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2$. Determine la imagen de h.

$Im(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} : h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x \text{ para algún } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \right\}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : a^2 = x ,\ a \in \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : a = \sqrt{x} \}$ → porque si tomamos cualquier $y \in \mathbb{R}, y < 0$ $\sqrt{y} \notin \mathbb{R}$ no está definido en $\mathbb{R}$.

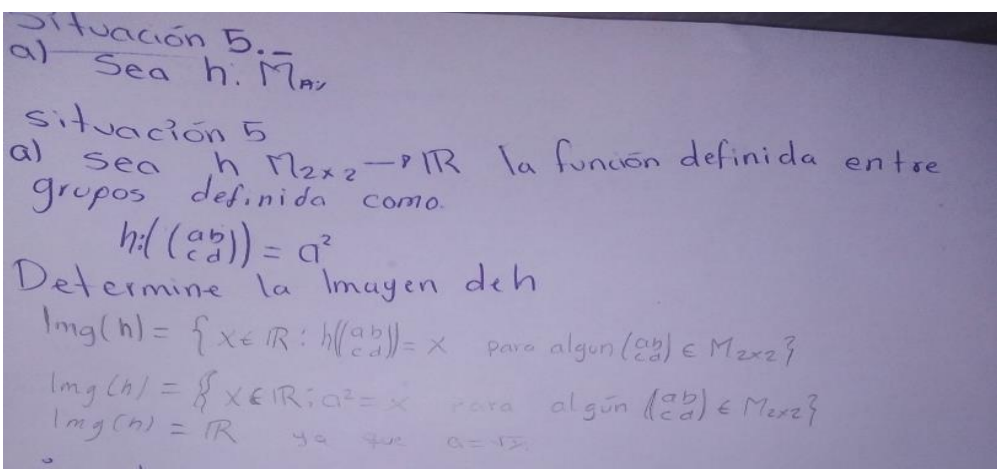
$Im(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Figura 4.94. Situación 5, inciso a) conjunto imagen de *h*, alumno A9.

Ahora considerando al estudiante A8, puede verse que al igual que el alumno A9 con su estructura de proceso de homomorfismo puede llegar a la igualdad $a^2 = x$, y por consiguiente que $a = \sqrt{x}$ señalamos el mismo error que el del estudiante anterior al despejar "a". Además no puede definir el conjunto imagen de manera correcta, pues menciona que la raíz de x va a ser algún número real o complejo, siendo x un número real, pareciera que el estudiante está confundiendo el dominio y la imagen de la función dada, está pensando en el resultado de extraer la raíz más no en los valores para los que está definida esta. Esto se puede leer del siguiente extracto del alumno A8:

> Pues para tomar una determinación en la imagen pero según yo pues para cualquier x que pertenezca a los reales la raíz de x va ser algún número ya sea real o un complejo, ¡ay no sé! Si o sea ya sea real o complejo pero para cualquier x que pertenezca a los reales siempre va ser raíz de, raíz de x siempre va a ser un número.

En la siguiente figura como se mencionó previamente se ve que A8 tuvo dificultad en llegar al conjunto imagen de *h*, debido a no contar con los conocimientos previos de la función radical, es decir de la imagen de la función raíz cuadrada.



Situación 5.-
a) Sea h. M

Situación 5
a) Sea $h\ M_{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida entre grupos definida como.

$h:\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2$

Determine la Imagen de h

$Img(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} : h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x \text{ para algún } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \right\}$

$Img(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} : a^2 = x \text{ para algún } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \right\}$

$Img(h) = \mathbb{R}$ ya que $a = \sqrt{x}$

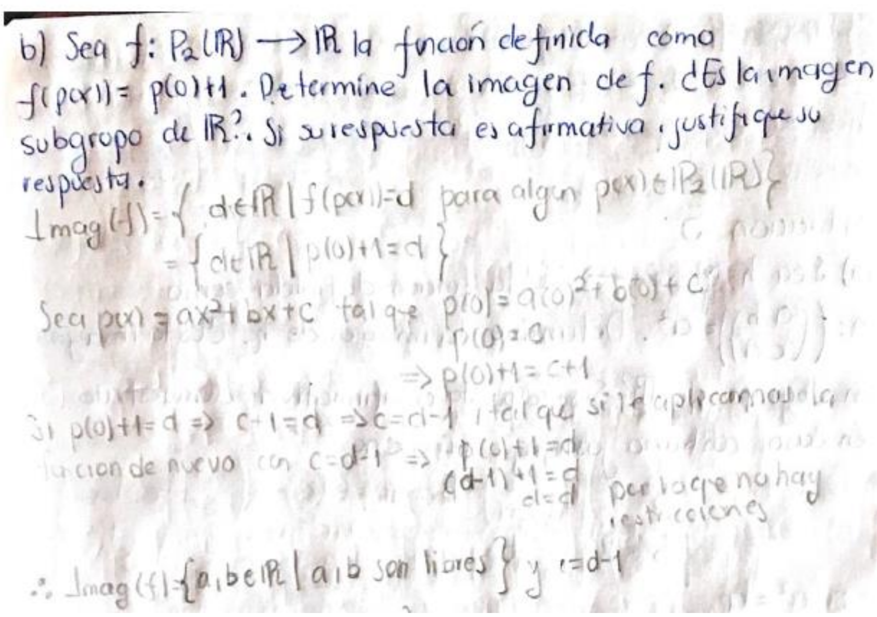
Figura 4.95. Situación 5, inciso a) conjunto imagen de *h*, alumno A8.

Esta información da evidencia de que el estudiante A8 no ha desarrollado una estructura mental de proceso ya que le es difícil discernir quien es el conjunto imagen, aunque ya ha calculado imágenes específicas de manera correcta previamente. Cabe señalar también que está ausente la estructura previa de esquema de cuantificador.

Para finalizar el análisis de esta estructura, se tiene el inciso b) de la situación 5. En éste se pide que los alumnos determinen la imagen de $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ cuando $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$.

De los tres alumnos, solo el estudiante A3 dejó en blanco esta pregunta. Los individuos A2, A8 y A9 si lograron determinar el conjunto imagen, solo que el alumno A2 aparentemente parece haberse confundido al escribir su respuesta final.

Este estudiante al igual que los alumnos A8 y A9 mediante su estructura proceso de homomorfismo pudo establecer que la $imag(f) = \big\{d \in \mathbb{R} | f\big(p(x)\big) = d\ para\ algun\ p(x) \in p_2(\mathbb{R})\big\}$. Después tomó un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ y al aplicar $f\big(p(x)\big) = c + 1 = d$ fue lo que obtuvo, posteriormente despejó c obteniendo $c = d - 1$; volvió aplicar $f(p(x))$ pero con $c = d - 1$ y llegó al resultado de que $d = d$. Con esta última igualdad afirma que el conjunto $imag(f) = \{a, b \in \mathbb{R} | a, b\ son\ libres\}$. Si bien, su procedimiento es correcto pero su respuesta final no, se tiene evidencia de no haber reflexionado que el conjunto imagen es $imag(f) = \mathbb{R}$; ya que siempre va a existir el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + (d - 1) \in p_2(\mathbb{R})$ que al aplicarle f dé el número real c, pareciera que el alumno A2 puso una mezcla de las condiciones del dominio y de la imagen. Véase la figura 96.


b) Sea $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(p(x)) = p(0)+1$. Determine la imagen de f. ¿Es la imagen subgrupo de $\mathbb{R}^2$?. Si su respuesta es afirmativa, justifique su respuesta.

$Imag(f) = \{ d \in \mathbb{R} \mid f(p(x)) = d$ para algun $p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \}$

$= \{ d \in \mathbb{R} \mid p(0)+1 = d \}$

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(0) = a(0)^2 + b(0) + c$

$p(0) = c$

$\Rightarrow p(0)+1 = c+1$

Si $p(0)+1 = d \Rightarrow c+1 = d \Rightarrow c = d-1$, tal que si le aplicamos la función de nuevo con $c = d-1 \Rightarrow p(0)+1 = d$

$(d-1)+1 = d$

$d = d$ por lo que no hay restricciones

$\therefore Imag(f) = \{a, b \in \mathbb{R} \mid a, b$ son libres$\}$ y $c = d-1$

Figura 4.96. Situación 5, inciso b) Cálculo de la imagen de f, Alumno A2.

Como ejemplo de respuesta correcta se tomó al estudiante A9, quien nuevamente con su concepción proceso de homomorfismo establecer la ecuación $p(0) + 1 = y$, y utiliza la forma general que tiene un polinomio de segundo grado el cual evalúa en 0 y sustituye en la ecuación anterior, realiza los cálculos correspondientes y encuentra que la imagen es todo $\mathbb{R}$, esta estudiante a diferencia de A2 da evidencia de la estructura previa del esquema de cuantificador, y es consciente de que dado cualquier número real y existirá el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + (y - 1)$, aunque se refiere al polinomio y no a "los" polinomios, pues al ser a y b libres habrá una infinidad. Véase la figura 97.

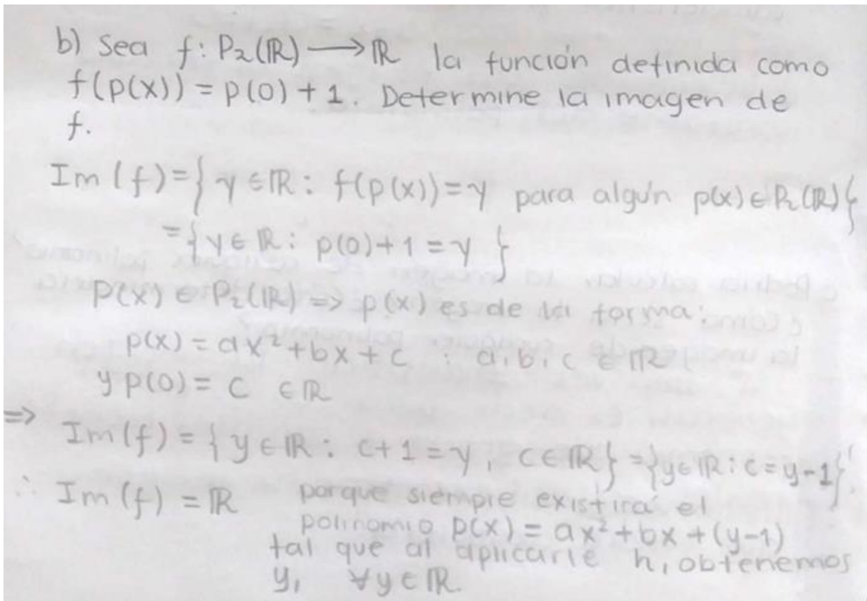


Figura 4.97. Situación 5, inciso b). Cálculo de la imagen de f, alumno A9

En la figura 95 puede observarse cómo el alumno ya no requiere de calcular imágenes previas para poder encontrar el conjunto imagen de f, mediante su estructura previa de esquema de cuantificador existencial puede ver que $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $p(x) \in p_2(\mathbb{R})$ tal que $f\big(p(x)\big) = y$. Esto da evidencia que la acción se ha interiorizado correctamente, dándose cuenta que existe un conjunto imagen, que a su vez es un subconjunto del conjunto de llegada H, es decir, $imag_f^{(G)} \subseteq H$, y con ello lograr tener una concepción proceso de homomorfismo.

A diferencia del Alumno A2, el alumno A9 puede describir quien es el conjunto imagen de f, puede darse cuenta mediante la reflexión quienes son los elementos de la imagen f mientras que el alumno A2 no se percate de ello.

Con la información revelada se puede establecer que la estructura mental de proceso se da cuando el alumno es capaz de poder encontrar un subconjunto del grupo G', es decir que la imagen del grupo G bajo la función es un subconjunto del grupo G' o bien $imag_f^{(G)} \subseteq G'$, y además debe ser capaz de logar calcular dicho subconjunto.

Mecanismo mental de encapsulación

Después de haber interiorizado la acción en un proceso en el cual el o los alumnos son conscientes de que la imagen de un homomorfismo entre grupos es un subconjunto del grupo

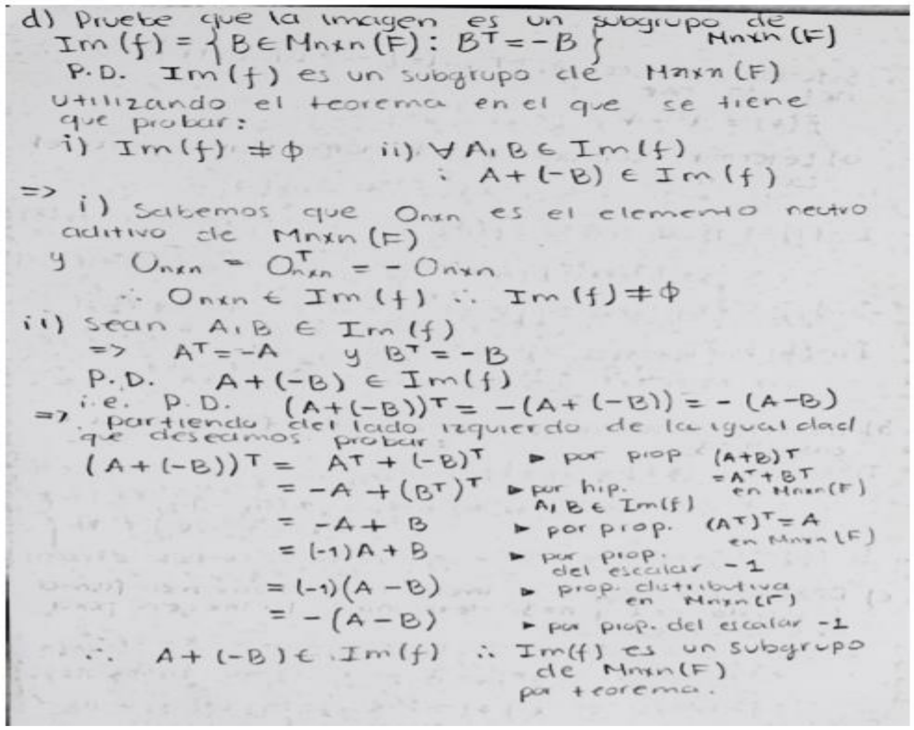
H o bien $imag_f^{(G)} \subseteq H$ y son capaces de determinarla. El mecanismo mental de encapsulación permite al individuo determinar que la imagen es un subgrupo del grupo H mediante acciones o procesos sobre el proceso construido, pues el homomorfismo entre grupos es un tipo de función especial que preserva estructura, en este caso la de subgrupo.

En las situaciones 4 y 5 mediante algunos incisos se les pidió a los alumnos que encontraran el conjunto imagen y con ello observar si éstos fueron capaces de desarrollar la estructura mental de proceso. Posteriormente en los incisos siguientes de las mismas situaciones 4 y 5 se les pidió a los estudiantes que contestaran si dichos conjuntos obtenidos eran o no subgrupos de *H*, y por qué.

En el análisis de este mecanismo mental se desea observar si los individuos poseen una coordinación de los tres esquemas de grupo, subconjunto y función para poder determinar si el conjunto imagen es o no un subgrupo del grupo *H*.

Comenzando con la situación 4, se tiene el inciso d) en el que se le pregunta que si la imagen obtenida, el conjunto de las matrices antisimétricas, es un subgrupo de las matrices de $n \times n$ en el campo F. Los cuatro alumnos llegaron a la misma respuesta, encontraron que las matrices antisimétricas son un subgrupo. Cada estudiante lo hizo mediante sus propios métodos, los procedimientos cambian, pero al final convergieron hacia la misma respuesta.

Como ejemplo tomaremos al estudiante A9 quien mediante la coordinación de los esquemas de función y subconjunto obtuvo el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio y con su concepción previa de esquema de grupo puede determinar ulteriormente si el subconjunto imagen obtenido es o no subgrupo de *H*. Esto se evidencia en el estudiante al ser capaz de aplicar correctamente el teorema que da las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto *H* de un subgrupo *G* sea subgrupo. En la figura 4.98 se puede observar cómo la estudiante es capaz de aplicar el teorema para el caso en el que la imagen de un homomorfismo es el subconjunto de las matrices antisimétricas.



d) Pruebe que la imagen es un subgrupo de $M_{n\times n}(F)$

$Im(f) = \{B \in M_{n\times n}(F) : B^T = -B\}$

P.D. $Im(f)$ es un subgrupo de $M_{n\times n}(F)$

Utilizando el teorema en el que se tiene que probar:

i) $Im(f) \neq \phi$ ii) $\forall A, B \in Im(f)$, $\therefore A + (-B) \in Im(f)$

$\Rightarrow$ i) Sabemos que $O_{n\times n}$ es el elemento neutro aditivo de $M_{n\times n}(F)$

y $O_{n\times n} = O^T_{n\times n} = -O_{n\times n}$

$\therefore O_{n\times n} \in Im(f)$ $\therefore Im(f) \neq \phi$

ii) sean $A, B \in Im(f)$

$\Rightarrow A^T = -A$ y $B^T = -B$

P.D. $A + (-B) \in Im(f)$

$\Rightarrow$ i.e. P.D. $(A+(-B))^T = -(A+(-B)) = -(A-B)$

partiendo del lado izquierdo de la igualdad que deseamos probar:

$(A+(-B))^T = A^T + (-B)^T$ ► por prop $(A+B)^T = A^T + B^T$ en $M_{n\times n}(F)$

$= -A + (B^T)^T$ ► por hip. $A, B \in Im(f)$

$= -A + B$ ► por prop. $(A^T)^T = A$ en $M_{n\times n}(F)$

$= (-1)A + B$ ► por prop. del escalar -1

$= (-1)(A - B)$ ► prop. distributiva en $M_{n\times n}(F)$

$= -(A - B)$ ► por prop. del escalar -1

$\therefore A + (-B) \in Im(f)$ $\therefore Im(f)$ es un subgrupo de $M_{n\times n}(F)$ por teorema.

Figura 4.98. Situación 4, inciso d). Probando si es o no subgrupo de las matrices M_{nxn},, alumno A9.

En la respuesta puede verse que A9 tiene un esquema de grupo, ya que puede enunciar las propiedades que debe satisfacer un subconjunto para que sea un subgrupo, más aún, puede demostrar las propiedades que deben cumplirse. Mediante su esquema de cuantificador existencial demuestra que no solo para elementos específicos de la imagen se debe probar que ésta es distinta del vació, sino que para todo elemento que está en ella esto se debe cumplir. En el siguiente extracto del individuo A9 correspondiente a esta solución se puede leer el procedimiento que empleó para verificar la primera condición que debe cumplir el subconjunto H para ser subgrupo, y que es: $imag(f) \neq \emptyset$

> Bueno hice la demostración usando el teorema en el que hay que probar que la imagen de f, bueno que lo que se quiere demostrar que es distinto del vacío, en este caso la imagen de f que es distinto del vacío y otra cosa que hay que probar es que es para todo, bueno ya en este caso particular $\forall\, a, b \in imagen(f)$ se cumple que a operado, bueno ah, aquí la operación tomé la suma $a + (-b)$ pertenecen a la $imagen(f)$ entonces para demostrar que la $imag(f) \neq \emptyset$ tomamos el neutro aditivo en $M_{n\times n}(F)$ que es la matriz cero en $M_{n\times n}(F)$, y sabemos que la matriz cero en $M_{n\times n}(F)$ es igual a su traspuesta igual a su inversa aditiva por lo tanto la matriz cero en $M_{n\times n}(F)$ pertenece a la $imagen(f)$, y por lo tanto la $imagen(f)$ es distitna del vacío.

Al final demuestra que $A + (-B) \in imgen(f)$ lo que implica demostrar $[A + (-B)]^T = -(A - B)$, esto lo puede hacer gracias a sus conocimientos previos sobre las propiedades de la transpuesta de una matriz y las operaciones con matrices, es decir, con su concepción precia de esquema de grupo que le permite considerar a las matrices como un grupo y su estructura previa de esquema de subgrupo, lo cual es coordinar de manera efectiva los esquemas de grupo, subconjunto y función, esto se puede observar en el siguiente párrafo de la transcripción del audio:

> Bueno partiendo de primero, de la primera igualdad que se… del lado izquierdo perdón, de la igualdad que deseamos probar tenemos que $A^T + (-B) = A^T + (-B^T)$, y bueno esta es una propiedad de transpuesta. Y luego tenemos por hipotésis que $A^T = -A$, así que tenemos, es, esto es igual a $-A$ más, como también tenemos $-B$ aquí, pues es B^T, y la transpuesta de esto o sea, $(B^T)^T$. Y luego tenemos este es una propiedad que $(B^T)^T = B$, así que vamos a tener que es igual a $-A + B$, y por propiedad del escalar menos uno tenemos que esto es igual a $-1(A + B)$, y luego también por, usamos la propiedad distributiva en la matrices de, de $n \times n$ y vamos a tener el escalar $-1(A - B)$, yo volvemos aplicar la propiedad del escalar menos uno, y vamos a tener que es igual a $-A - B$, que es lo que queríamos probar, la igualdad que queríamos probar, pues esta es la inversa de $A + (-B)$, por lo tanto $A + (-B) \in imagen(f)$, y por lo tanto es subgrupo por el teorema que aplicamos.

Para responder la pregunta de que si es siempre la imagen un subgrupo los estudiantes A2, A9 fueron los únicos en contestar usando la misma respuesta. Como ejemplo tomamos al estudiante A9, quien afirma que por el teorema de que si la imagen de un homomorfismo es subgrupo del grupo de llegada entonces siempre que la aplicación o la transformación sea un homomorfismo se puede afirmar que la imagen de esa aplicación es un subgrupo. Véase la figura 4.99.

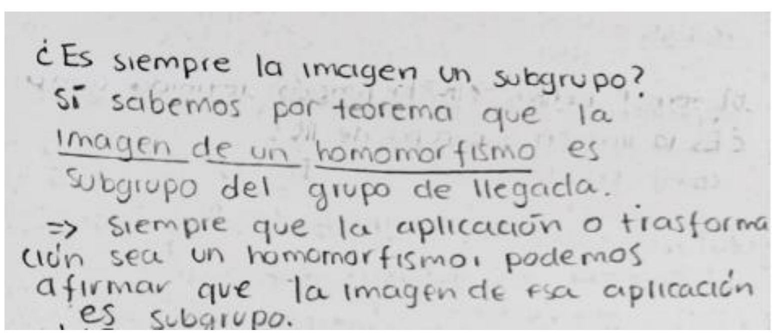
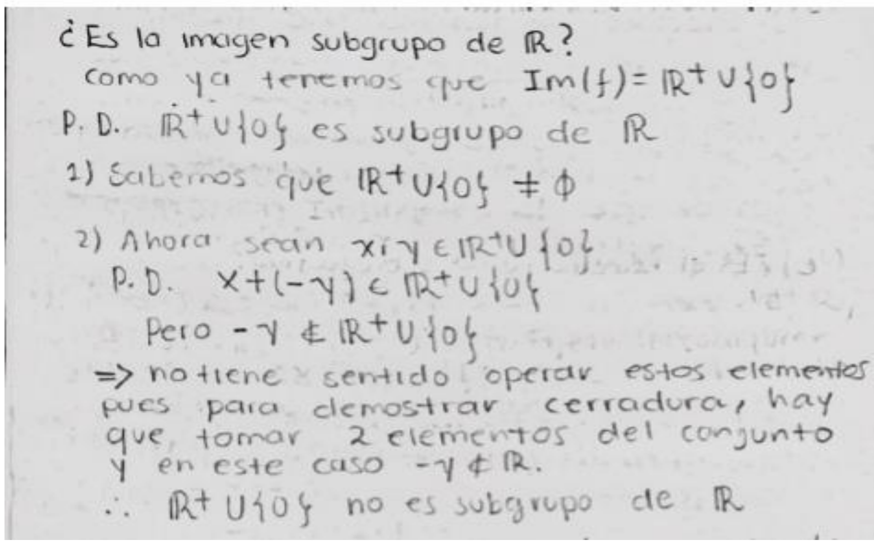

¿Es siempre la imagen un subgrupo?
Sí sabemos por teorema que la imagen de un homomorfismo es subgrupo del grupo de llegada.
=> siempre que la aplicación o trasformación sea un homomorfismo, podemos afirmar que la imagen de esa aplicación es subgrupo.

Figura 4.99. Situación 4, inciso d), respuesta a la pregunta ¿es siempre la imagen un subgrupo? alumno A9.

Para la situación 5 en los incisos a) y b) se les vuelve a preguntar si después de haber obtenido el conjunto imagen, éstos son o no subgrupos del grupo de llegada. En la estructura mental de proceso, se dijo que los alumnos A2 y A9 fueron los dos estudiantes que habían encontrado el conjunto imagen correctamente a la situación 5 del inciso a). Pese a ello, solo el estudiante A9 fue el único que pudo contestar correctamente.

Tomando como ejemplo al alumno A9, éste se percata de que *h* no es homomorfismo, esto ya se mencionó en la estructura de proceso mental; inmediatamente se da cuenta de que no existen elementos negativos en $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ que puedan confirmar una cerradura en él, y al no existir esto el conjunto imagen no es subgrupo del grupo de llegada, que en este caso es $\mathbb{R}$. Esto puede verse en la figura 4.100:

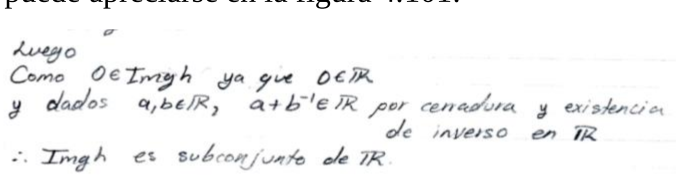


¿Es la imagen subgrupo de $\mathbb{R}$?
Como ya tenemos que $Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
P. D. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es subgrupo de $\mathbb{R}$
1) Sabemos que $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \phi$
2) Ahora sean $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
P. D. $x + (-y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
Pero $-y \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\Rightarrow$ no tiene sentido operar estos elementos pues para demostrar cerradura, hay que tomar 2 elementos del conjunto y en este caso $-y \notin \mathbb{R}$.
$\therefore$ $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ no es subgrupo de $\mathbb{R}$

Figura 4.100. Situación 5, inciso a), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? alumno A9.

Puede notarse que este estudiante tiene una concepción proceso de homomorfismo de grupos y un esquema de función ya que pudo determinar si era o no un homomorfismo. Su esquema de grupo y su esquema de subconjunto le permitieron observar que el conjunto imagen no es como tal subgrupo de $\mathbb{R}$, ya que no cumple con elementos inversos que puedan probar una cerradura, pero si puede darse cuenta que el subconjunto es la imagen de *h,* y que además es distinto del vacío.

Analizando los casos donde la respuesta no fue correcta se tiene a los alumnos A2, A3 y A8. El alumno A3 afirmó que el conjunto imagen $\mathbb{R}$ si es subgrupo de sí mismo, sin embargo está incorrecto, ya que asentó que el conjunto imagen era $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, aceptando así elementos inversos y comprobar la cerradura, lo cual no era posible, y afirmando al final que si era subgrupo. Esto puede apreciarse en la figura 4.101.



Luego
Como $0 \in Img\,h$ ya que $0 \in \mathbb{R}$
y dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b^{-1} \in \mathbb{R}$ por cerradura y existencia de inverso en $\mathbb{R}$
$\therefore$ $Img\,h$ es subconjunto de $\mathbb{R}$.

Figura 4.101. Situación 5, inciso a), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? alumno A3.

Hay que resaltar que si el conjunto imagen hubiese sido ℝ, su respuesta hubiese estado correcta. Con esto se está diciendo que el alumno A3 en realidad no es que no tenga desarrollados los esquemas de grupo, subconjunto o función, el detalle fue que al no fijarse, un error de descuido, en su respuesta final de subconjunto de imagen sus demás respuestas serían incorrectas. Sin embargo sus procedimientos algebraicos, así como su intuición para encontrar las respuestas muestran evidencia de que el alumno posee los esquemas ya mencionados ya que pudo afirmar si un subconjunto es o no subgrupo del codominio.

El estudiante A8 contestó correctamente pese a que no obtuvo la imagen de la aplicación h de manera correcta, ella considera el hecho de que todo grupo es subgrupo de sí mismo y como ℝ es un grupo entonces es también subgrupo. Véase la figura 4.102.

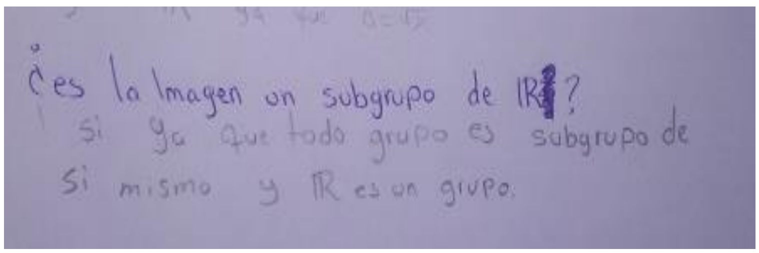


Figura 4.102. Situación 5, inciso a), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de ℝ? alumno A8.

Es claro que este estudiante muestra evidencia de tener un esquema de grupo, de subconjunto y de función, ya que no requiere mencionar las propiedades que debe cumplir un subconjunto para ser subgrupo. Sin embargo, su respuesta en el conjunto imagen de la aplicación h no fue correcta. Puede verse en la figura 100 que es consciente de que un grupo contiene al menos dos subgrupos, uno de ellos él mismo.

Por su parte el alumno A2 da evidencia de tener conocimiento sobre las propiedades que se requieren para que un subconjunto sea subgrupo, mostró confusión al obtener la imagen de h pues utilizó los coeficientes a y b de la matriz que representa a los elementos del grupo dominio para expresar la imagen en la forma $Imag(h) = \{a, b \in \mathbb{R}: a = \sqrt{b}\}$ y considera que la igualdad $a = \sqrt{b}$ se cumple para $b \geq 0$, lo que le permite finalmente escribir $Imag(h) = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, sus esquemas de grupo, subconjunto y función emergen en su respuesta ya que sus procedimientos son coherentes; sin embargo no se da cuenta o se olvida de que no puede operar con elementos negativos pues considera $Imag(h) = \{a, b \in \mathbb{R}: a = \sqrt{b}\}$ enfocandose en la igualdad $a = \sqrt{b}$ sin considerar el hecho de que $b \geq 0$, y por tanto que la imagen es $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, y al no notar esto termina por decir que el conjunto imagen es subgrupo de ℝ, caso similar al estudiante A3. Esto puede verse en la figura 4.103.

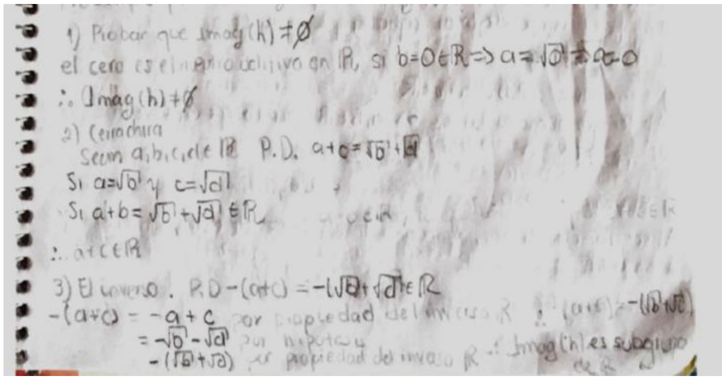

1) Probar que Imag(h) ≠ ∅
el cero es el neutro aditivo en ℝ, si b=0∈ℝ ⇒ a=√0
∴ Imag(h) ≠ ∅
2) Cerradura
Sean a,b,c,d ∈ ℝ P.D. a+c=√b+√d
Si a=√b y c=√d
Si a+b=√b+√d ∈ ℝ
∴ a+c ∈ ℝ
3) El inverso. P.D. −(a+c) = −(√b+√d) ∈ ℝ
−(a+c) = −a+c por propiedad del inverso ℝ
= −√b − √d por hipótesis
−(√b+√d) por propiedad del inverso ℝ ∴ Imag(h) es subgrupo de ℝ

Figura 4.103. Situación 5, inciso a), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de ℝ? alumno A2.

Finalmente, para el inciso b) donde se pide mencionar si la imagen es subgrupo de ℝ en $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada como $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$, solo los alumnos A2, A8 y A9 pudieron contestar a esta pregunta; el alumno A3 no contestó y el estudiante A8 solo mencionó que si ℝ es un grupo entonces ℝ es un subgrupo. Véase la figura 4.104.

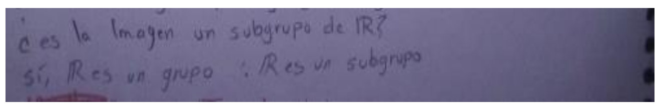

¿es la Imagen un subgrupo de ℝ?
sí, ℝ es un grupo ∴ ℝ es un subgrupo

Figura 4.104. Situación 5, inciso b), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de ℝ? alumno A8.

En el caso del alumno A9, éste solo respondió sí es subgrupo, ya que el conjunto imagen es subgrupo de sí mismo, sin embargo, en ningún momento demostró que f era homomorfismo, consideramos que ya lo daba por hecho con solo observar a la función *f*, pues si recordamos ella fue la única estudiante que en el inciso a) de esta situación fue consciente de que la imagen es subgrupo siempre y cuando *f* sea homomorfismo. Observe la figura 4.105.

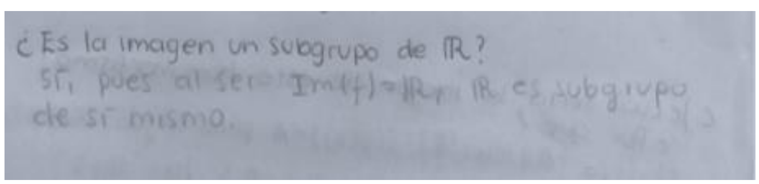

¿Es la imagen un subgrupo de ℝ?
sí, pues al ser Im(f) = ℝ, ℝ es subgrupo de sí mismo.

Figura 4.105. Situación 5, inciso b), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de ℝ? alumno A9.

Finalmente el alumno A2 mediante la aplicación del teorema que da las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de *G* sea subgrupo, demuestra porque el conjunto imagen es subgrupo de ℝ. Se había mencionado que este alumno erró al calcular el conjunto imagen, pese a ello se da cuenta de las propiedades que se deben satisfacer en un subconjunto para que éste sea subgrupo, siempre acarreando los errores que conllevan el haber considerado a la imagen de *f* en la forma $Imag(f) = \{a, b \in \mathbb{R}: a, b\ son\ libres\}$. En la figura

106 se puede observar que demuestra dichas propiedades, concluyendo al final que el conjunto imagen es subgrupo.

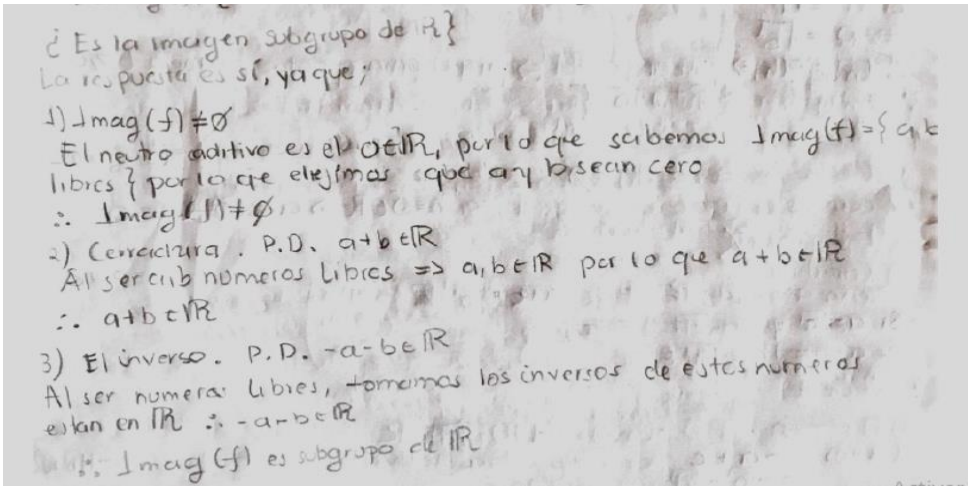

¿Es la imagen subgrupo de $\mathbb{R}$}
La respuesta es sí, ya que;
1) $Imag(f) \neq \emptyset$
El neutro aditivo es el $0 \in \mathbb{R}$, por lo que sabemos $Imag(f) = \{a, b$ libres$\}$ por lo que elejimos que a y b sean cero
$\therefore Imag(f) \neq \emptyset$
2) Cerradura. P.D. $a+b \in \mathbb{R}$
Al ser a, b numeros libres $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$ por lo que $a+b \in \mathbb{R}$
$\therefore a+b \in \mathbb{R}$
3) El inverso. P.D. $-a-b \in \mathbb{R}$
Al ser numeros libres, tomamos los inversos de estos numeros
estan en $\mathbb{R}$ $\therefore -a-b \in \mathbb{R}$
$\therefore Imag(f)$ es subgrupo de $\mathbb{R}$

Figura 106. Situación 5, inciso b), respuesta a la pregunta ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? Alumno A2.

Al final solo el alumno A9 dio evidencia de mostrar una concepción esquema de función, subconjunto y grupo para poder determinar si un conjunto imagen es subgrupo del codominio. Con la información obtenida se puede ver que el estudiante A8 no posee aun dichos esquemas y el alumno A3 no contestó la última situación con lo cual no se pude afirmar con exactitud si cuenta o no con dichos esquemas.

Un punto importante a mencionar es que pese a que los grupos dominio y codominio de los homomorfismos cambiaron en las diferentes situaciones dadas, el estudiante A9 pudo dar las respuestas claramente a las cinco situaciones, mientras que el alumno A2 tuvo algunos errores, pero cognitivamente se puede observar en todo momento, que sus procedimientos describen las ideas principales de lo que se está pidiendo.

En base en los hechos previos se puede establecer que la encapsulación en la imagen de un homomorfismo de grupos se da cuando el individuo es capaz determinar que la imagen es un subgrupo del grupo H y, que además es capaz de obtenerla.

Estructura mental de objeto

El saber que el homomorfismo es un tipo de función especial por preservar la estructura también permitirá al alumno comparar el conjunto imagen con el grupo codominio G´ para determinar si el homomorfismo es o no sobreyectivo, esta comparación implica que el estudiante considere a la imagen como un todo. El mecanismo mental de encapsulación que permite la construcción de la estructura mental de objeto se puede desarrollar mediante la aplicación de acciones o procesos sobre el proceso construido. Estas aplicaciones de acciones o procesos sobre el proceso construido le permitirán al individuo generar un cambio en su pensamiento que le permitirá ir de lo dinámico a lo estático.

Considerando entonces que se pueden realizar acciones y otros procesos sobre la estructura mental de manera que esto lo llevará a contar con una estructura de objeto de imagen de un homomorfismo.

Para poder analizar esta estructura tenemos un inciso e) en la situación número cuatro que dice ¿es el homomorfismo sobreyectivo? Justifique. El alumno A3 no contestó a esta pregunta. Los estudiantes sobrantes A2, A8 y A9 si lograron contestar a esta pregunta, los tres alumnos se basaron en la premisa de que si el conjunto imagen es todo el grupo de llegada, es decir, el codominio, que en esa situación es el grupo $M_{nxn}(F)$, entonces el homomorfismo es sobreyectivo. Como ejemplo se consideró al estudiante A9 quien anteriormente concluyó que el conjunto imagen fueron las matrices antisimétricas y no todo el grupo de llegada $M_{n\times n}(F)$, y que por lo tanto el homomorfismo no es sobreyectivo. Véase la siguiente figura 4.107.

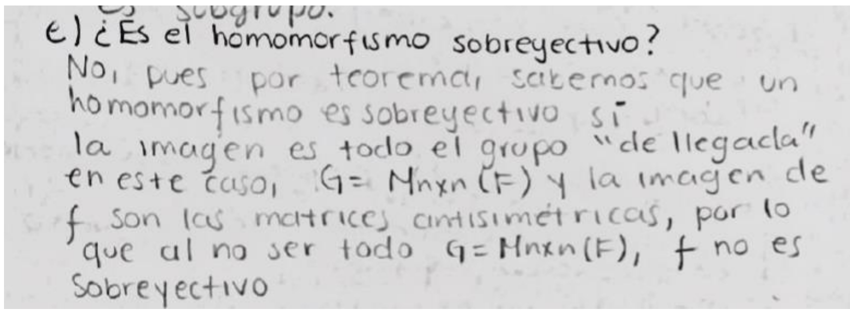

e) ¿Es el homomorfismo sobreyectivo?
No, pues por teorema, sabemos que un homomorfismo es sobreyectivo sí la imagen es todo el grupo "de llegada" en este caso, G= Mnxn(F) y la imagen de f son las matrices antisimétricas, por lo que al no ser todo G=Mnxn(F), f no es Sobreyectivo

Figura 4.107. Situación 4, inciso e) respuesta a la pregunta ¿Es el homomorfismo sobreyectivo?, alumno A9.

Ahora bien, su definición es correcta, y gracias a ello los alumnos pudieron contestar a esa pregunta. Sin embargo, ninguno se dio a la tarea de demostrar si el homomorfismo es sobreyectivo de una manera formal, el cual no lo es, pero no se ve en sus procedimientos alguna demostración. Se puede inferir que al tener la definición en mano fue más sencillo responder así, que hacer una demostración, sin embargo esto no quiere decir que el estudiante no lo pueda hacer, ya que la demostración en realidad no era laboriosa, pues solo tendría que demostrar que no se cumple la igualdad $imag(f) = G'$ mostrando que existe un elemento en G' que no pertenece a la $imag(f)$, y por lo tanto haber afirmado que f no es un homomorfismo sobreyectivo.

Por el otro lado se tiene que los estudiantes no intentan demostrar formalmente si el homomorfismo es o no sobreyectivo, sino que al obtener el conjunto imagen correctamente en un homomorfismo entonces pueden aplicar la definición mostrada en la figura 106, y contestar si sí o no es un homomorfismo sobreyectivo, con las respuestas dadas por los estudiantes al inciso c) de la situación 4 no podremos evidenciar esta estructura pues ellos solo justifican con el conocimiento que tienen de que las matrices antisimétricas no son todas las matrices de $n \times n$.

Para saber entonces si los alumnos comienzan a realizar acciones o procesos sobre el proceso construido, que es el mecanismo de encapsulación, creando un cambio en su mente de un estado dinámico a uno estático, desarrollando la estructura mental de objeto de imagen de un homomorfismo de grupos debemos realizar entrevistas semiestructuradas, en las cuales se les cuestione al estudiante el por qué hace determinadas afirmaciones, por ejemplo, que el conjunto de las matrices simétricas no son todas las matrices de $n \times n$ y la manera en que podrían demostrar dicha afirmación.

Esto finalmente nos muestra la importancia de llevar a cabo entrevistas semiestructuradas dentro de una investigación con APOE. Así los estudiantes logran desarrollar esta estructura no solo podrán discernir si el conjunto imagen es subgrupo del codominio, sino podrán observar si la aplicación es biyectiva, entonces serán conscientes de que la aplicación es un isomorfismo de grupos, o analizar si el homomorfismo es inyectivo o sobreyectivo como lo hicieron en este caso.

Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones derivadas del análisis de los datos obtenidos al implementar los instrumentos a estudiantes de nivel superior, estos fueron dos cuestionarios escritos, el segundo de ellos se acompañó de un audio por parte de los estudiantes donde explicaban la manera en cómo resolvieron la situación planteada, esto corresponde a la tercera y última fase del ciclo de investigación de la teoría APOE. Como ya se ha mencionado anteriormente estos instrumentos se aplicaron a 9 estudiantes.

5.1 Conclusiones respecto al cuestionario diagnóstico.

El primer de ellos fue el cuestionario diagnóstico, que constó de 5 preguntas con su respectivo análisis a priori, cuyo objetivo fue determinar las estructuras previas requeridas para acceder al nuevo conocimiento en este caso el de imagen de un homomorfismo entre grupos. Los conocimientos previos requeridos son: esquema de grupo, esquema de subgrupo, objeto ecuación lineal y conjunto solución, objeto de homomorfismo entre grupos y esquema de cuantificador existencial. Este pequeño conglomerado de conocimientos previos fue la primera parte del resultado de un análisis teórico, y que forma parte de la descomposición genética preliminar.

Las estructuras mentales previas necesarias originadas a través de la descomposición genética resultaron ser complejas. Dubinsky (1994) menciona que ya de entrada el álgebra abstracta es una materia complicada en su entendimiento y difícil en su enseñanza; por ello los alumnos requerían tener conocimientos ya de por sí complejos para comprender el nuevo concepto de estudio. Para dar evidencia a ello, en los siguientes párrafos se detallará los resultados que se obtuvieron de las estructuras previas mostradas por los estudiantes.

En la primera estructura mental de esquema de grupo, solo cinco alumnos fueron capaces de dar evidencia de contar con ella. Se pudo apreciar que estos cinco estudiantes muestran tener conocimientos sólidos en los cuatro axiomas de grupo, en operación binaria y en conjunto; se puede decir que muestran una estructura mental de esquema de estos conceptos de acuerdo con Dubinsky (1994).

Para la segunda estructura mental de esquema de subgrupo solo cuatro alumnos fueron capaces de responderla. Derivado de sus respuestas, pudo notarse que los estudiantes poseen una estructura mental de esquema de grupo, subconjunto y función; donde los alumnos son capaces de restringir una función a un subconjunto de su dominio, diferenciando así al subconjunto emergido del conjunto dominio que posteriormente podría ser o no subgrupo del grupo dominio.

Seguida de estas dos estructuras mentales se encuentra la de objeto de sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución. Resultó interesante observar que ningún estudiante contestó a esta pregunta, ya que lo esperado según las dos estructuras mentales pasadas era que al menos cuatro o cinco estudiantes pudiesen llegar a contestarla. Dado que el problema estuvo planteado para dar una respuesta usando parámetros parece ser que los alumnos tienen serias dificultades para representar soluciones paramétricas, lo que nos indica que los estudiantes no tienen un buen manejo de la variable como número general ni en relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006). Esta estructura al igual que las demás es de suma importancia ya que la solución de un sistema de ecuaciones en forma paramétrica es requerida para que el estudiante pueda determinar la imagen de un homomorfismo entre grupos.

Para el objeto de homomorfismo entre grupos, que es la cuarta estructura mental previa, solo un alumno pudo contestar a esta pregunta. En su respuesta da evidencia de que puede trabajar con el concepto de homomorfismo entre grupos, es decir, fijados un par de vectores u y $v\ en\ G$, donde G es un grupo, pudo calcular $f(u * v) = f(u)\Delta f(v)$. Al tener objeto de grupo se observó que el estudiante no solo fue capaz de trabajar con la definición de homomorfismo sino también de dar diferentes ejemplos de homomorfismo entre distintos grupos. Cabe resaltar que este estudiante fue uno de los que evidenció tener esquema de grupo y subgrupo; y por otro lado fue interesante encontrar que como solo un alumno contestó correctamente la pregunta para evidenciar esta estructura previa.

Finalmente, en la estructura mental de cuantificador existencial cuatro estudiantes la evidenciaron al resolver correctamente situaciones que la involucraban. Es necesario que los estudiantes se percaten de que existe al menos un elemento en la imagen tal que al aplicarle el homomorfismo a un elemento en el dominio exista ese elemento imagen, y que este elemento es el neutro del grupo codominio, para que puedan ir interiorizando la imagen de un homomorfismo entre grupos.

El análisis del primer cuestionario permitió a la investigación elegir aquellos alumnos que mostraron tener los conocimientos previos o la mayoría de ellas, para poder acceder al nuevo conocimiento ya que en palabras de Dubinsky (1991) un individuo puede obtener el nuevo conocimiento si éste cuenta con el conocimiento previo requerido por conocimiento a construir. Se seleccionaron 4 de los 9 estudiantes para aplicarles el cuestionario con audio.

5.2 Conclusiones respecto al cuestionario con audio.

Después de llevar a cabo un minucioso análisis sobre los resultados obtenidos por los estudiantes A2, A3, A8 Y A9, el objetivo consecuente fue observar si la descomposición genética se validaba o refinaba de acuerdo a las actuaciones de los estudiantes ante las situaciones problemáticas planteadas en el cuestionario con audio.

En el momento en que los estudiantes resolvían las situaciones problemáticas estuvieron emitiendo audios al contestar cada pregunta, intentando en cada momento clarificar el por qué había respondido de tal forma a cada situación.

En los siguientes párrafos se describirá el análisis de las respuestas de estas situaciones problemáticas, así como parte de los fragmentos de los audios por parte de los alumnos a la hora de resolver el segundo instrumento diseñado en esta investigación.

El primer problema propuesto en el segundo instrumento se estableció para intentar observar si efectivamente los alumnos evidenciaban una concepción de acción sobre la imagen de un homomorfismo entre grupos. Dicha estructura de acuerdo a la descomposición genética preliminar se centra en la idea de tomar elementos específicos del grupo $x_{1,} x_2, \dots x_n \in G$ y aplicarle la función ϕ para obtener un nuevo objeto del grupo H, dado por $\phi(x_1) = y_1 \in H$, $\phi(x_2) = y_2 \in H$, …, $\phi(x_n) = y_n \in H$.

Teniendo en cuenta la idea central de acción de un homomorfismo entre grupos se le pidió a los cuatro alumnos calcular la imagen específica de los vectores en $\mathbb{Z}_\mathbf{2}^\mathbf{3}$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a, b, c) = (a + c, b + c)$; y la imagen de los vectores en $\mathbb{Z}_\mathbf{2}^\mathbf{3}$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a, b, c) = (a - b + 2c, 2a - 2b + 4c)$. Al momento del análisis se observó que los cuatro alumnos pudieron atender el problema. Los estudiantes dan evidencia de una estructura mental previa de esquema de grupo, la cual les permite enlistar los elementos del grupo $\mathbb{Z}_\mathbf{2}^\mathbf{3}$, y posteriormente obtener sus imágenes mediante la estructura mental de proceso de homomorfismo. Tal como se describió en la DGP.

Ahora bien, la estructura mental de acción contempla que el alumno debe ser capaz de calcular la imagen de diferentes elementos específicos del dominio de distintos grupos y homomorfismos. Por tal motivo en el cuestionario se anexaron el cálculo de imágenes entre diferentes grupos en un homomorfismo, como lo fue el caso de las matrices, polinomios y vectores. Así en los diferentes tipos de grupos los alumnos pudieron determinar las imágenes de elementos específicos del dominio, evidenciando la estructura acción de homomorfismo.

Los cuatro estudiantes pudieron encontrar las imágenes específicas pedidas entre los distintos grupos, sin embargo a la hora de encaminarlos hacia la reflexión y pedirles cuál o cómo sería el conjunto imagen en ciertos problemas no todos los estudiantes pudieron responder. A medida que los alumnos iban calculando más y más imágenes específicas, comenzaron a reflexionar percatándose después de un tiempo quien era el conjunto imagen en los problemas en los que se les pedía esta respuesta. Es imperativo mencionar que los procedimientos entre los alumnos es un punto clave a mencionar, ya que los estudiantes A3 y A9 desde un inicio utilizaron la definición de imagen, contrario a los otros dos alumnos que no lo hicieron.

En particular para esta estructura mental los cuatro alumnos pudieron evidenciar tener una concepción esquema de grupo, ya que durante la realización de los problemas involucrados con la estructura de acción pudieron entender la operación binaria, el conjunto y los cuatro axiomas de grupo que estaban involucrados en la situación problemática, que junto con la estructura mental de proceso de homomorfismo les permitió encontrar las imágenes solicitadas.

Para el análisis del mecanismo de interiorización, que es el mecanismo mental mediante el cual se interioriza la acción en un proceso, se buscaron situaciones en las cuales los grupos fueran finitos y no finitos, es decir, se propusieron situaciones donde la imagen pueda representarse solo un subconjunto del codominio e inclusive todo este. También se buscó problemas en los cuales el homomorfismo considerar grupos como $P_n(\mathbb{R})$ y $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, esto es, encaminar al alumno a que pueda lograr calcular cualquier imagen específica dado cualquier grupo. Estas actividades forzaron al alumno a reflexionar en cómo es que debería ser el conjunto imagen.

Y es la reflexión a través de la repetición precisamente lo que busca el mecanismo mental de interiorización, para que así el alumno obtenga un proceso de imagen de homomorfismo entre grupos, y con ello pueda captar en su mente que la imagen puede ser un subconjunto del codominio o todo este.

Después del análisis y de haber mencionado que a través del esquema de grupo y proceso de homomorfismo los estudiantes fueron capaces de calcular ciertas imágenes bajo ciertos grupos. Para la interiorización se tomó el siguiente ejercicio, sean los siguientes vectores $\boldsymbol{u}(a,1), \boldsymbol{v}(0,-a), \boldsymbol{f}(a,0), \boldsymbol{d}(-1,-1)$, $\boldsymbol{l}(-a,2), \boldsymbol{s}(0,a), \boldsymbol{r}(a,3)$ bajo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que se define como $f(x,y) = (-y,x)$ calcule su imagen gráficamente.

En primer lugar, nótese que la forma de calcular la imagen cambia de algebraica a gráfica, y parte de la interiorización es precisamente eso, que el alumno pueda calcular las imágenes bajo distintas representaciones del homomorfismo y diferentes grupos. Después del análisis hubo un alumno que no contestó correctamente al ejercicio; este estudiante no mostró un conocimiento previo de variable ya que se le dificulta observar a la literal $\boldsymbol{a}$ de los vectores como un número fijo, tienen que darle distintos valores a $\boldsymbol{a}$ para observar que es lo que sucede sin percatarse que cada vector ya está definido. Por el otro lado un estudiante respondió correctamente el ejercicio tanto algebraica como geométricamente, utilizando la definición de imagen pudo calcular ésta y al mismo tiempo representarla en el plano $\mathbb{R}^2$.

Atendiendo al mismo plano $\mathbb{R}^2$ de los vectores, otro alumno no pudo calcular las imágenes en este ejercicio, ya que cognitivamente no tiene claro como representar $\boldsymbol{a}$ en el plano $\mathbb{R}^2$, tratando así de asignarle un valor fijo para poder graficarlo. Este hecho demuestra que aunque tiene una noción de como calcular la imagen no hay evidencia de una reflexión por parte del estudiante, ya que tuvo que recurrir a asignarle un valor fijo a $\boldsymbol{a}$ para poder calcular las imágenes, no tiene claro la representación geométrica.

Este ejercicio junto con los incisos a), b) de la situación uno, el inciso a) de la situación dos y el inciso a) de la situación 3 fueron planteados para observar si los estudiantes reflexionaban sobre las repeticiones en el cálculo de imágenes. El objetivo es que el estudiante se percatase de cómo es que debía ser la imagen sin tener que llevar a cabo cada uno de los ejercicios propuestos en los problemas.

Parte importante de los ejercicios relacionados con la interiorización mental fue la elaboración de preguntas que involucraban una reflexión por parte de los estudiantes. Se les preguntaba si podían calcular la imagen de cualquier vector dado. Tres de los cuatro alumnos pudieron responder que sí, dando evidencia en sus audios y en sus respuestas dadas. Este suceso confirma que después de haber llevado a cabo varios cálculos de imágenes en un homomorfismo se desarrolló una reflexión, lo cual les permitió a estos tres estudiantes poder calcular la imagen sin realizar cada uno de los procedimientos para llegar a la respuesta.

Entonces se les dio dos subconjuntos $G = \{(x, y)|y = -x\}$ y $H = \{(x, y)|x^2+y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ y se les pidió a los estudiantes que calcularan las imágenes en el plano bajo el homomorfismo $f(x, y) = (-y, x)$, y que después contestaran si era posible calcular la imagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cómo lo harían. Tres alumnos en sus propias palabras, pero con la misma idea, se percataron a través de su concepción previa de proceso de homomorfismo, que dicho homomorfismo manda a un vector cualesquiera a su perpendicular, detectando al final que la imagen va a ser la recta identidad. En sus respuestas puede encontrarse la evidencia de que los alumnos no tuvieron que recurrir a elaborar ejercicios repetitivos, la reflexión les permitió encontrar quien sería la imagen final.

Para el caso del subconjunto H, los alumnos nuevamente pueden encontrar la imagen final sin la necesidad de operar diferentes elementos del grupo dominio. Con su conocimiento previo de circunferencia, se dan cuenta que, dado cualquier elemento tomado del dominio al aplicarle el homomorfismo, éste va seguir equidistando del centro, y que por lo tanto la imagen de H va ser la circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

Con estos ejercicios se tiene evidencia de que los alumnos han reflexionado sobre la imagen, ya no tiene que recurrir a calcular imagen por imagen a través de pasos algebraicos. Sin embargo al preguntarles al final si era posible calcular toda la imagen de $\mathbb{R}^2$, y de cómo lo harían; solo un estudiante pudo responder. Se da cuenta de que el homomorfismo es sobreyectivo y que probando esto, la imagen es todo $\mathbb{R}^2$. Al analizar esta respuesta puede notarse como este alumno ya ha alcanzado la interiorización de la acción mental de imagen del homomorfismo entre grupos al ver la imagen como un subconjunto, que era lo que se pretendía lograr al implementar estos ejercicios de interiorización.

Para concluir este mecanismo se plantearon dos incisos más cuya meta era observar si dados diferentes grupos, los estudiantes eran capaces de calcular la imagen sin la necesidad de elaborar pasos mecánicos. Así dado $f: (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ definido por $f\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$ se les pidió que contestaran si las imágenes encontradas tienen alguna característica en común, que si podría calcular la imagen de cualquier polinomio, cómo es que sería esta imagen y cómo determinaría la imagen de cualquier polinomio. Nuevamente solo un alumno respondió. Menciona que a simple vista sin tener que hacer algún cálculo las características que tienen en común las imágenes es que las entradas $a_{12} = a_{21} = 0$, y que la entrada $a_{22} = c$, que es el termino constante; mediante la definición de imagen y de su estructura mental previa de objeto de sistema de ecuaciones lineales establece el sistema de ecuaciones para encontrar las incógnitas faltantes, en este caso a_{11}, y determinar cómo es que sería la imagen para cualquier elemento dado del dominio y con ello responder a todas las preguntas que involucraba este ejercicio.

Con este análisis se tiene la evidencia de que por lo menos un alumno muestra la interiorización de la acción en un proceso y darse cuenta que la imagen es así todo el codominio o un subconjunto de él mismo.

Continuando con el camino cognitivo plateado en la DGP, el proceso mental de un homomorfismo entre grupos comienza cuando el individuo empieza a ser consciente de que la imagen es un subconjunto del grupo H, es decir, $imag_f(G) \subseteq H$. Para ello se situación problema $f: M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F)$ dada por $f(A) = A^T - A$ y se les pidió calcularan la imagen cuando $n = 2$ y $n = 3$; y posteriormente para el caso general n. La idea era que conforme hicieran los caso $n = 2$ y $n = 3$ logran observar quien sería el conjunto imagen.

Al calcular la imagen de $n = 2$ y $n = 3$ los alumnos no solo evidenciarían la estructura mental de proceso, sino que también volverían a tener que probar implícitamente que ellos poseían la estructura mental de acción y el mecanismo de interiorización. Ahora bien, los cuatro alumnos pudieron responder que pasa cuando $n = 2$ y $n = 3$, pero en particular el alumno que ha respondido a cada una de las situaciones usando su esquema de grupo que posee el cual le permite tomar un elemento del grupo codominio y con la estructura previa de cuantificador existencial no solo se percata de que existe un $y \in H$ tal $f(x) = y$, con $x \in G$, sino que se da cuenta de que la imagen es un subconjunto de *H*.

Hasta este punto los alumnos fueron capaces de calcular la imagen cuando $n = 2$ y $n = 3$, pero para el caso general, tres lo hicieron sobre una base de reflexión y uno mecánicamente, éste último no evidenció tener muy claro el mecanismo de interiorización, ya que no pudo emitir los procedimientos para calcular el conjunto imagen mentalmente. Así el objetivo de haber calculado los casos $n = 2$ y $n = 3$ era para que cuando calcularan el caso en general $\boldsymbol{n}$ pudieran entender que la imagen es un subconjunto o todo el conjunto de llegada, objetivo que lograron demostrar tres de los cuatro alumnos antes mencionados.

Para asegurar tener una evidencia más certera en los alumnos sobre la estructura mental de proceso se propusieron dos ejercicios más para identificar si en realidad los estudiantes ya habían entendido que la imagen es un subconjunto o todo el conjunto codominio. Para ello, la primera situación problema fue $h: M_{2x2} \to \mathbb{R}$ cuando $h:\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2$, de manera somera pero sustanciosa solo dos alumnos pudieron contestar correctamente, afirmando que en efecto la imagen es $imag(h) = \{a \in \mathbb{R} | f(x) = a^2, x \in \mathbb{R} \cup \{0\}\}$ ya que $a = \sqrt{x}$. De hecho todos los alumnos llegaron a la idea principal de que $a = \sqrt{x}$ pero el momento de definir el conjunto imagen dos de ellos erraron, lo cual indica que fue un descuido o bien existe una ausencia de conocimiento previo que les impidió definir el conjunto imagen, pues en su respuesta final indicaron que el conjunto imagen era para cualquier raíz de *x*, con *x* que pertenezca a los reales va a ser algún real o complejo, o bien que la $imagen(h) = \mathbb{R}$, ya que $a = \sqrt{x}$ pero esto es prácticamente imposible ya que de acuerdo al homomorfismo entre los grupos la imagen tenía que ser un número real.

La información previa demuestra que los dos alumnos que se equivocaron no han desarrollado una estructura mental de proceso ya que le es difícil discernir quien es el conjunto imagen, aunque ya ha calculado imágenes específicas, no hay una reflexión interna de entender quién es ese conjunto imagen.

Y finalmente se propuso la situación $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ cuando $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$ con el propósito de encontrar al conjunto imagen. De los cuatro alumnos solo uno fue capaz de responder correctamente. Los estudiantes que fallaron comúnmente se equivocaron al indicar las condiciones que debe cumplir la imagen para que dado cualquier elemento del dominio ésta pueda cumplirse. En cambio, el alumno que contestó correctamente pudo hacerlo ya que mediante su concepción proceso de imagen de homomorfismo de grupos, su concepción objeto de ecuaciones lineales y el uso correcto de la definición de imagen pudo establecer las condiciones necesarias para hallar el conjunto imagen de f. Es importante destacar que este estudiante ya no requirió de cálculos previos para encontrar el conjunto imagen ya que mediante su estructura previa de esquema de cuantificador existencial pudo ver que $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $p(x) \in p_2(\mathbb{R})$ tal que $f\big(p(x)\big) = y$. Esto da evidencia para poder afirmar que el alumno ha logrado alcanzar una concepción mental de proceso al darse cuenta de que la imagen es todo el conjunto de llegada o un subconjunto de éste.

Una vez que el alumno es consciente de que la imagen es un conjunto, el mecanismo de encapsulación emerge cuando los estudiantes pueden entender que la imagen puede ser o no un subgrupo del grupo codominio o incluso el propio grupo de llegada.

Consecuentemente las preguntas en esta sección era establecer si un conjunto imagen era o no subgrupo del grupo codominio o bien todo el grupo de llegada. Para ello se utilizó la situación problema 4, que dice: sea $f: M_{n\times n}(F) \to f: M_{n\times n}(F)$ definida por $f(A) = A^T - A$, preguntándoles si el conjunto imagen que encontraron era o no un subgrupo. Así los cuatro estudiantes mediante su esquema de grupo, subconjunto y función pudieron determinar que efectivamente el conjunto de las matrices antisimétricas es un subgrupo de las matrices de $n \times n$ con elementos sobre el campo F.

Difícilmente los estudiantes mostrarían el mismo procedimiento de resolución. Hubo un alumno que respondió que el conjunto de las matrices antisimétricas es un subgrupo de las matrices de $n \times n$ en el campo F, en sus respuestas puede notarse que tiene un esquema de subgrupo ya que pudo enunciar las propiedades que deben satisfacerse en un subconjunto para que éste sea un subgrupo, más aún, pudo demostrar las propiedades que deben cumplirse. Mediante su esquema de cuantificador existencial demostró que no solo para elementos específicos de la imagen se debe probar que ésta es distinta del vació, sino que para todo elemento que está en ella esto se debe cumplir.

Como parte complementaria al problema de las matrices que se menciona en el párrafo anterior, se planteó la pregunta de que si el conjunto imagen es siempre un subgrupo; Para esto, el estudiante que propusimos como ejemplo de análisis con mayor conocimiento matemático incluyó una afirmación al decir que por el teorema de que si la imagen de un homomorfismo es subgrupo del grupo de llegada entonces siempre que la aplicación o la transformación sea un homomorfismo se puede afirmar que la imagen de esa aplicación es un subgrupo; a parte de los conocimientos previos que se establecieron para que el alumno pudiese lograr entender la imagen de un homomorfismo entre grupos, aquí encontramos evidencia de que éste estudiante posee conocimientos sólidos del álgebra lineal que le ayudan a poder encapsular mejor el proceso.

Para la última situación problema relacionada al mecanismo de encapsulación se consideró $h: M_{2x2} \to \mathbb{R}$ cuando $h: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a^2$, y como ya se había mencionado la $imag(h) = \{a \in \mathbb{R} | f(x) = a^2, x \in \mathbb{R} \cup \{0\}\}$. Así de manera análoga al caso anterior se preguntó si este conjunto era o no subgrupo de $\mathbb{R}$.

Ya se había mencionado que solo dos alumnos logaron obtener el conjunto imagen de h pero al momento de contestar si la imagen de h era subgrupo o no, solo un estudiante pudo responder correctamente. Este alumno es el único que ha contestado correctamente las situaciones problema desde el inicio. Analizando sus respuestas, el alumno se percató inmediatamente de que h no es un homomorfismo a través de su concepción proceso de homomorfismo de grupos y su esquema de función, pudo reflexionar mediante su esquema de grupo y su esquema de subconjunto el hecho de que no existen elementos negativos en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que puedan confirmar una cerradura en él, y al no tener permitida esta operación con números negativos con respecto al homomorfismo entonces la imagen de h no es un subgrupo del codominio $\mathbb{R}$.

Se trató en la medida de lo posible gestionar la mayor evidencia posible para poder dictaminar si los estudiantes poseían o no la estructura mental propuesta en la descomposición genética. Por tales razones se analizó un problema más acerca del mecanismo mental de encapsulación.

El problema fue $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada como $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$. Siguiendo la mecánica de análisis, se mencionó que la imagen de f es $imag(f) = \{d \in \mathbb{R} | f\big(p(x)\big) = d \; para \; algun \; p(x) \in p_2(\mathbb{R})\}$, la pregunta fue entonces ¿este conjunto imagen es subgrupo de $\mathbb{R}$? Solo dos estudiantes pudieron responder, sí bien responden que sí es subgrupo de $\mathbb{R}$, solo uno de ellos trato de demostrarlo y el otro empleó el teorema que afirma que si el conjunto imagen es el grupo de llegada entonces el conjunto imagen es subgrupo de él mismo. En ambos casos los alumnos se percatan de que efectivamente es subgrupo y esto lo pueden constatar gracias a sus esquemas mentales previos de grupo, subgrupo, proceso de homomorfismo, esquema de función, esquema de operación binaria y esquema de cuantificador universal y existencial.

En la recta final tenemos la estructura mental de objeto de homomorfismo entre grupos. En esta parte el alumno debe no solo ser capaza de entender si el conjunto imagen es o no subgrupo, sino que demás debe ser capaz de realizar acciones sobre él, por ejemplo poder hacer comparaciones entre el conjunto imagen y el grupo codominio G´. Para determinar si el homomorfismo es o no sobreyectivo, así esta comparación implica que el estudiante considere a la imagen como un todo. Los cuatro alumnos contestaron correctamente, como evidencia se estableció el problema 4 y se les pregunto ¿es el homomorfismo sobreyectivo? En el problema $f: M_{n\times n}(F) \rightarrow f: M_{n\times n}(F)$ definida por $f(A) = A^T - A$. Como los estudiantes ya habían encontrado la imagen, que era el conjunto de las matrices antisimétricas pudieron responder con un teorema que afirma que si el conjunto imagen no es todo el grupo codominio entonces el homomorfismo no es sobreyectivo, afirmando así que el homomorfismo no es sobreyectivo. Sin embargo, ninguno mostró un elemento del codominio que no estuviera en la imagen.

Después del análisis se puede puntualizar el hecho de que un alumno de cuatro pudo resolver todas las situaciones problema planteadas. Este hecho marca un punto decisivo en la investigación ya que da validez al camino cognitivo propuesto en la descomposición genética preliminar en la primera fase del ciclo de investigación de la teoría APOE. No obstante hubo otro alumno que dio evidencia de poseer un gran conglomerado de estructuras y mecanismos mentales, ya que casi resolvió todos los problemas, los que no contestó fue porque uno lo dejo en blanco, tal vez ya no quiso seguir pero por sus respuestas en general pareciese indicar que no hubiese tenido problemas al contestar ese problema que dejo en blanco, otra situación que no respondió correctamente fue porque al final al dar su resultado se equivocó, todo lo demás lo tuvo bien, lo cual parece indicar que fue un error de descuido, pero en general tuvo muy buen desempeño cognitivo al evaluar los problemas.

Y finalmente los dos estudiantes restantes contestaron de forma irregular, algunas situaciones las contestaron correctamente y otras no, pese a ello, los problemas que logaron resolver permiten observar la evidencia de que estos estudiantes tienen conocimientos suficientes en al menos los problemas que lograron resolver.

Las actuaciones de los estudiantes al hacer frente a la situación problemática nos permiten evidenciar errores o dificultades más o menos comunes, a continuación, enlistamos los que mostraron los estudiantes que participaron en la investigación:

- En repetidas ocasiones los alumnos suelen confundir la noción epistemológica de la definición de subgrupo y de subconjunto, los estudiantes suelen pensar que ya porque un grupo hereda las propiedades a un subconjunto, éste ya pasa por default a ser subgrupo, cuando en realidad muchas de las veces esto no se cumple.
- Algunos alumnos tienen dificultades al trabajar con parámetros, tal fue el caso del alumno A8 quien no pudo calcular la imagen a través del plano $\mathbb{R}^2$ cuando se le presentaron los vectores coordenados con una coordenada literal y no un número fijo.
- Otra dificultad que presentan los alumnos es al momento de trabajar con la definición de imagen, si bien los alumnos pueden escribir como tal la definición sin embargo no hay un entendimiento completo, ya que muchas de las veces no se percatan que la imagen es como tal un conjunto, aunque la mayoría de las veces la escriban como conjunto a veces creen que la imagen solo son ciertos elementos.

- Los alumnos tienen dificultades a la hora de trabajar con casos generales, por ejemplo, trabajar con matrices de nxn, con polinomios de grado menor igual a n, etc. El pensamiento abstracto que involucra trabajar con este tipo de casos hace que los alumnos tengan serias dificultades para encontrar lo que se les pide.
- En algunas ocasiones los estudiantes cometen el error de asentar que $\mathbb{R}$ puede llegar a ser lo mismo que $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, parece ser un error de descuido, ya que no comprueban en realidad qué números pueden estar en cada subconjunto.
- A menudo un error que salta a la luz es olvidar el cuantificador existencial y cuantificador universal, los alumnos no le dan importancia a estos cuantificadores, provocando que no logren entender a profundidad la definición de imagen.
- Los estudiantes enfrentan dificultades al momento de hacer demostraciones en álgebra abstracta, prefieren seguir otros caminos que enfrentar una demostración cara a cara.
- En ocasiones los alumnos tienen dificultades para poder comprender cómo es que se está operando en el grupo.
- Otra dificultad es que a menudo los estudiantes no saben realmente cómo es que está operando el homomorfismo entre los grupos.

5.3 Validación de la Descomposición Genética Preliminar.

Al validarse la descomposición genética la estructura mental de acción se puede caracterizar como: el individuo comienza a tomar elementos específicos del grupo G, a decir, $x_0 \in G$. el estudiante es capaz de tomar un elemento del grupo G y aplicarle la función ϕ para obtener un nuevo objeto del grupo H, $f(x_0) = y_0 \in H$.

La validación de este mecanismo de interiorización se da cuando un individuo repite la acción y reflexiona tomando diferentes elementos del grupo G, esto es, $x_0 \in G,\ x_1 \in G, \dots,\ x_n \in G,$ y calcula sus imágenes en el grupo H, es decir, $f(x_0) = y_0 \in H,\ f(x_1) = y_1 \in H,\ \dots,$ $f(x_n) = y_n \in H$. Esta acción de calcular las imágenes de los elementos de un grupo G bajo una aplicación f, se debe realizar un gran número de veces a fin de ir reflexionando dicha acción y darse cuenta que puede calcular la imagen de cualquier elemento del grupo G.

La estructura mental de proceso después de validar la descomposición genética preliminar se podrá caracterizar como: el individuo es consciente de que la imagen es un subconjunto del grupo $G´$, es decir que la imagen del grupo G bajo la función es un subconjunto del grupo $G´$ o bien $imag_f^{(G)} \subseteq G´$. Luego deberá ser capaz de calcular dicho subconjunto.

Después del proceso se tiene el mecanismo de encapsulación, éste se valida cuando el alumno es consciente de que la imagen puede ser un subgrupo del grupo G´ a través de la coordinación de los tres esquemas: el de grupo, subconjunto y función, donde los esquemas de función y subconjunto son coordinados para obtener el proceso de restricción de una función a un subconjunto de su dominio. Otra acción sobre el proceso de imagen de un homomorfismo podría consistir en que el estudiante puede comparar el conjunto imagen con el grupo codominio G´ para determinar si el homomorfismo es o no sobreyectivo, esta comparación implica que el estudiante considere a la imagen como un todo.

Finalmente, el objeto validado se caracteriza como: el alumno generará un cambio en su pensamiento que le permitirá ir de lo dinámico a lo estático. Considerando entonces que se pueden realizar acciones y otros procesos sobre la estructura mental de manera que esto lo llevará a contar con una estructura de objeto de imagen de un homomorfismo.

Las palabras anteriores se pueden expresar en el siguiente diagrama, que describe el camino cognitivo que detalla las estructuras y mecanismos mentales que un alumno de la Licenciatura en matemáticas de segundo semestre debiera poseer para poder comprender el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos.

Homomorfismo entre grupos

$\phi: G \longrightarrow H$

$\phi(x * y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$

$\boldsymbol{Imagen(\phi) = \{y \in H | \phi(x) = y,}$ **para algún** $\boldsymbol{x}$

Acción $f(x_0) = y_0$ $\xrightarrow{\text{Actúa sobre}}$ Objetos (Elementos específicos del grupo G).

Interiorización $\xrightarrow{\text{Repite y reflexiona}}$ Tomando diferentes elementos del grupo G

Esto es, $x_0 \in G,\ x_1 \in G, \dots,\ x_n \in G,$ y calcula $f(x_0) = y_0 \in H, f(x_1) = y_1 \in H, \dots,$ $f(x_n) = y_n \in H$. El alumno se dará cuenta que puede calcular la imagen de cualquier elemento del grupo G.

Proceso

El alumno es consciente de que $\boldsymbol{imag_f^{(G)} \subseteq H}$

Encapsulación $\xrightarrow{\text{Coadyuvar}}$ Mediante los esquemas de función, operación binaria y subconjunto.

El individuo podrá establecer cualidades del objeto como el determinar que el conjunto imagen es un subgrupo del grupo H.

Objeto $\xrightarrow{\text{Acciones sobre el proceso}}$ El individuo podrá comparar todo el conjunto imagen con el grupo contradominio y analizar en qué casos el homomorfismo puede ser o no sobreyectivo, permitiendo al alumno considerando la imagen como un todo.

5.4 Conclusiones generales

Para concluir, en este apartado presentaremos de manera sustancial los resultados obtenidos después de haberse realizado un análisis minucioso en los instrumentos propuestos para esta investigación, que corresponden a la fase del diseño e implementación de la instrucción, que por cuestiones metodológicas tuvo que cambiarse por el diseño e implementación de instrumentos.

Los instrumentos analizados fueron un cuestionario diagnóstico y un cuestionario estructurado. En el primer cuestionario se analizaron a nueve estudiantes, de los cuales, solo cuatro evidenciaron contar con la mayoría de las estructuras mentales previas para poder construir el concepto de imagen de homomorfismo entre grupos. De los cuatro estudiantes, que representan al 44.4% de la población total, ninguno fue capaz de mostrar tener todos los conocimientos previos, solo el 11.1%, que fue un alumno, logro evidenciar cuatro de los cinco conocimientos previos.

Como ya se mencionó anteriormente las estructuras previas son cinco: esquema de grupo y subgrupo, objeto de sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución, objeto de homomorfismo y esquema de cuantificador universal. Estos fueron evaluados en el cuestionario diagnóstico y pese a que algunos alumnos solo mostraron tener uno o dos de éstos, sus procedimientos y respuestas no diferenciaron mucho unos de otros.

Así, el haber tomado a cuatro alumnos fue por diferencias mínimas, por ejemplo en dar la respuesta final al problema, ya que aunque los nueve estudiantes mostraron en general tener conocimientos claros respecto al concepto de estudio, al final los estudiantes elegidos pudieron dar la respuesta correcta mientras los alumnos restantes no.

Merece la pena mencionar que los esfuerzos de los alumnos que no mostraron tener más de dos conocimientos previos fueron en vano, ya que a través de la información de sus respuestas se puede obtener información detallada de aquellas estructuras elementales que se requieren a la hora de construir la imagen de un homomorfismo entre grupos.

La ausencia del conocimiento previo en el alumno para poder comprender un nuevo concepto se pudo mostrar después de haber aplicado el cuestionario estructurado. Este cuestionario tenía la intención de analizar si los alumnos elegidos después del cuestionario diagnóstico evidenciaban tener las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar, y con ello validar o refinar dicha descomposición.

En un principio los cuatro estudiantes evidenciaron tener una estructura mental de imagen de un homomorfismo de grupos, mediante su estructura proceso de homomorfismo lograron calcular mecánicamente la imagen de elementos específicos de un grupo finito, así como imágenes variadas en homomorfismos entre polinomios y matrices.

En el mecanismo mental de interiorización, se pudo notar un desfase, dos estudiantes no lograron evidenciar en algunas situaciones una reflexión del cálculo de la imagen, no consiguieron expresar mentalmente la imagen sin la necesidad de hacer los procedimientos algebraicos o geométricos.

De igual forma en la estructura menta de proceso ya no hubo constancia entre los cuatro alumnos, nuevamente solo dos estudiantes fueron capaces de evidenciar tener esta estructura. Mediante la interiorización, reflexionaron que la imagen es un subconjunto del grupo codominio. Los dos individuos pudieron comprender que la imagen es un conjunto de elementos del grupo codominio que emergen de la ejecución de la aplicación del homomorfismo.

Este conjunto de elementos que es un subconjunto del grupo codominio puede ser también un subgrupo. Para comprobar que dicho conjunto es un subgrupo se requiere una coordinación de los esquemas de función, subconjunto y grupo; así mismo se requiere un esquema de operación binaria. Fueron nuevamente los dos alumnos que evidenciaron tener la estructura de proceso quienes mostraron una reflexión del tipo encapsulación sobre la imagen de un homomorfismo de grupos.

Finalmente, estos dos estudiantes evidenciaron tener una estructura mental de objeto de imagen de homomorfismo entre grupos. Estos estudiantes no solo consiguieron discernir si el conjunto imagen es subgrupo del codominio, sino lograron observar si la aplicación es biyectiva y con ello descubrir que es un isomorfismo de grupos, o analizar si el homomorfismo es inyectivo o sobreyectivo como lo hicieron en el cuestionario estructurado; puede verse entonces que los alumnos ya aplican acciones o procesos al subgrupo del grupo codominio y con ello mostraron tener la estructura mental de objeto.

5.5 Investigaciones a futuro

Esta investigación tiene el objetivo de servir de base a nuevas investigaciones vinculadas a este tema y otros del álgebra abstracta. En particular se puede pensar en estudiar el esquema de imagen de un homomorfismo y establecer la interacción de este con el esquema de homomorfismo. Establecer las etapas de evolución inter-intra y trans del esquema, lo cual mostraría la importancia de este para el desarrollo de otras nociones igualmente abstractas.

Por circunstancias ajenas a la investigación, la epidemia covid-19, no fue posible realizar una entrevista semiestructurada a los participantes. Si fuera posible sería interesante volver a realizar nuevos instrumentos e implementarlos para llevar a cabo dicha entrevista semiestructurada y observar los resultados, de manera que pudiera hacerse una comparación con los resultados obtenidos con una entrevista y sin ella.

Y por último, desarrollar la segunda fase del ciclo de investigación de la teoría APOE, el cual propone el diseño e implementación de una instrucción, basada por supuesto en la descomposición genética validad en esta investigación. Dicho diseño podría contener una parte que ayudara a reforzar las estructuras previas que como se evidenció por los datos del cuestionario diagnóstico no están presentes en algunos estudiantes, dificultándoles así la comprensión de la imagen de un homomorfismo. Y la segunda parte para desarrollar las estructuras y mecanismos mentales propias del concepto en estudio.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York, USA: Springer-Verlag.

Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D., & Thomas K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, The American Mathematical Society, 1-32.

Breidenbach, D. Dubinsky, E. Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. and Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187–239.

Consejo de Acreditación de Programas de Matemáticas –CAPEM-. (2019). *Instrumento de Evaluación*. Recuperado de 07 de mayo de 2019 de: http://www.capem.org.mx/Anexo4.php.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 267–305.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The Student´s Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematics,* 8(2), 44-51.

Findell, B. (2001). *Learning and Understanding in Abstract Algebra.* Doctoral Dissertations. 51. University of New Hampshire, Durham, USA.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics,*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 71–90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 163–172.

Konyalıoğlu, S. (2006). A Study on teaching group and subgroup concepts. *Journal of Qafqaz University.*Atatürk. University, K.K. Education Faculty, Department of Secondary Science and Mathematics Education. Erzurum, Turkey, 155-158.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). *An abstract algebra story*, The American Mathematical Monthly, 102(3), 227–242.

Mena-Lorca, A., & Marcela, A. (2016). Mental Constructions for the Group Isomorphism Theorem.

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Guerrero, Centro de Investigación en Matemática Educativa, Chilpancingo.

Piaget, J. (1975/1985). El nacimiento de la inteligencia en el niño. Barcelona: Crítica.

Titova, S. (2007). *Understanding abstract algebra concepts.* Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, USA.

Weber, K. & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory In M. Carlson and C. Rasmussen, (Eds.). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, pp. 137-149. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Reflexión

Después de dos años de haber cursado la maestría en matemática educativa puede uno darse cuenta de la cantidad de detalles que se esconden detrás de cada enseñanza y aprendizaje en diversas áreas de la matemática. De relieve puede verse que la enseñanza no debería ser tan complicada sin embargo cuando se toma una lupa y se hace un ligero zoom al aprendizaje, uno comienza a descubrir porque en determinadas ocasiones la matemática puede llegar a ser tan compleja; uno ejemplo que pude constatar es que desde una definición no bien comprendida puede causar en un futuro dificultades en los estudiantes para poder comprender otros temas.

Las dificultades y los errores siempre estarán presente no obstante, es parte en la tarea del matemático educativo analizarlos y comprender la esencia y naturaleza de ellos para proveer herramientas que ayuden a iniciar el aprendizaje en los estudiantes.

El originar el desarrollo del aprendizaje es uno de los pilares en el desarrollo profesional. A manera intra personal, es interesante observar que la comunidad docente desde hace años ha venido trabajando en conjunto para encausar este desarrollo. El intercambio de ideas, de experiencias, de trabajos y proyectos de diversos maestros en todo el mundo ha evolucionado el orbe de la matemática educativa.

Y es precisamente con la lente de la matemática educativa que se analizó este trabajo titulado el desarrollo cognitivo del estudiante sobre la imagen de un homomorfismo entre grupos. Desde un punto de vista particular y sin la intención de exagerar el álgebra moderna aparece en el marco matemático como una de las materias más complejas, y esto tal vez se deba a su carácter abstracto en las definiciones y conceptos propios de la materia.

Es el carácter abstracto propio de la materia lo que atrajo mi atención, el tratar de comprender cómo encontrar un camino relativamente sencillo en el cual los estudiantes puedan encontrar la forma de entender la materia de una forma simple mediante la teoría APOE.

Fue una experiencia increíble el poder adentrarse al mundo de la matemática educativa, para aquellos que venimos de otras licenciaturas terminamos descubriendo que estábamos muy lejos de la realidad, que el ser docente implica no solo saber mucho de matemáticas, sino que esto es apenas el comienzo del camino de la enseñanza. Entendí que si quieres adquirir nuevas técnicas de aprendizaje primero debes entenderte a ti mismo. Para ser honestos nunca imaginé que fuera posible poder analizar de tal forma la enseñanza de la matemática.

Como miembro egresado de una maestría Profesionalizante sin temor a equivocarme puedo decir que el álgebra abstracta seguirá siendo una materia sumamente difícil de entender para los alumnos, aunque se construyan caminos para su fácil entendimiento continuará siendo compleja y es que el punto sustancial de su aprendizaje no radica en los alumnos cuando ingresan a la licenciatura o los maestros, el problema está en que mientras no se promueva o se implemente la intuición y el pensamiento abstracto en los jóvenes estudiantes desde sus inicios escolares el aprendizaje el álgebra moderna seguirá siendo una materia difícil de entender ya que cuando se les presenta este pensamiento matemático sus mentes no están acostumbradas a este cambio tan repentino, de hecho observe que la mayoría de los estudiantes olímpicos en matemáticas son los que mejor logran entablar una relación de comprensión con la materia, y lo vuelvo a mencionar, tal vez esto se deba a que han estado entrenando con problemas más complejos y de un nivel de intuición mayor.

Durante mi investigación pude observar distintas referencias relacionadas al álgebra moderna y una que más llamó mi atención fue una de Dubinsky y Leron (1995) que mencionan que: "los estudiantes no están preparados para tomar la materia y sus actitudes hacia el Álgebra Abstracta son débiles, los alumnos son reacios a querer estudiar y existe poca conciencia en el profesor sobre este problema". Analizando dicha referencia se puede ver que el tiempo a la fecha es relativamente corto y yo concuerdo con que los alumnos no están preparados y que son reacios a querer entenderla.

Estoy a favor de Dubinsky y Leron (1995), y lo digo en mi opinión porque en México no se tiene aún una cultura de aprendizaje en la mayoría de los alumnos hasta que ya pasa un tiempo en sus vidas, es decir no hay una madurez intelectual; Por otra parte existen muchos docentes que han perdido el camino de la enseñanza, y claro que existen más factores como la comunicación entre maestro padre y alumno y muchos otros más, pero la realidad es que este proyecto de investigación no cambiará el curso de este problema ya que un proyecto de dos años no puede venir a cambiar un problema de más de 20 años por lo menos empero si puede clarificar el hecho de que existe una teoría la cual crea estructuras y mecanismos mentales que por lo menos dan pautas al estudiante para que pueda entender que existen caminos cognitivos y herramientas a su disposición para poder comprender al álgebra abstracta.

Para finalizar de acuerdo a Dubinsky y Leron (1995) no apoyo y sí la moción de que los maestros tengan poca conciencia de este problema, y por qué, pues porque maestros que se egresaron de una escuela normal o de una institución distinta a la de matemáticas no están enterados de los niveles que los jóvenes estudiantes enfrentarán en una licenciatura de matemáticas; y por otra parte los docentes de una licenciatura en matemáticas, porque me tocó verlo, hacen hasta lo imposible por que los alumnos comprendan dicha materia. Ahora, no quiere decir que suceda siempre esto, pero en la mayoría de los caso se da, y con esta falta de comunicación entre escuelas y docentes es cuando se llega producir este tipo de eventos que menciona Dubinsky y Leron (1995).

Me voy muy satisfecho, me retiro con más de lo que esperaba, me llevo el conocimiento de distintas teorías las cuales nunca antes las había leído. Me voy con un sabor dulce de la matemática educativa al descubrir la cantidad de eventos y organizaciones que la conforman. Me voy intrigado al saber de la inmensidad de la matemática educativa. Pero sobre todo me voy con entusiasmo, ya que la teoría con la cual trabajé me atrajo completamente en cada uno de sus aspectos, proponiéndome la meta de trabajar con esta teoría a un siguiente nivel y mejorar cada una de mis áreas de oportunidad ya que para mí el haber realizado esta tesis fue mi primera vez, mostrándome que aún puedo mejorar en demasía para seguir investigando o bien ayudar a mi comunidad.

Anexos

Cuestionario Diagnóstico:

Zacatecas, Zac., 17 de marzo de 2020

Cuestionario Diagnóstico de Estructuras Previas para la Construcción de la Imagen de un Homomorfismo entre Grupos.

Aplicador: Salvador Barrón Hernández.

Estudiante de la Maestría en Matemática Educativa, en la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Cuestionario Diagnóstico

Nombre: ____ **Fecha:** ______________

Instrucciones: Resuelva cada uno de los ejercicios y argumente sus respuestas. NO BORRE PROCEDIMIENTOS Y/O NOTAS. NO DEJE EJERCICIOS SIN CONTESTAR Y SI LO HACE DE UNA EXPLICACIÓN DE POR QUÉ LO HIZO. Los resultados obtenidos son completamente ajenos a alguna calificación, la identidad quedará anonimato.

Problema 1.

(d) Considere el conjunto $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ que consiste en el conjunto $\{0,1,2,3,4\}$ y la operación binaria de multiplicación módulo 5. Por favor de una o dos afirmaciones explicando sus respuestas a las siguientes preguntas:
¿Existe algún elemento que sea identidad en el grupo?
¿Existe el inverso multiplicativo de 3 en este grupo? ¿Los demás elementos tienen inversos multiplicativo?
¿Es $[\mathbb{Z}_5, \cdot_5]$ un grupo? Si su respuesta es afirmativa justifique, en caso contrario modifique $\mathbb{Z}_5$ para que sea grupo.
¿Qué elementos componen a un grupo? ¿Puede proporcionar otros ejemplos de grupos?

(e) Considere el grupo $\mathbb{Z}_6$, con la suma módulo 6. De un ejemplo de las siguientes afirmaciones y explique su respuesta a cada una.
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga dos elementos.
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga tres elementos.
- Un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ el cual no es un subgrupo.

(f) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$?

Problema 2.

Considere el grupo cociente $G = \mathbb{Z}_{18}$, su subgrupo $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,9,12,15\}$ y el grupo cociente G/H. Conteste las siguientes cuestiones:

(e) ¿Cuántos elementos tienen G/H? Por favor enlístelos todos.
(f) Construya la tabla de operaciones de G/H.
(g) ¿Cuál es el elemento identidad de G/H? ¿Cuál es el inverso de la clase lateral de 2?
(h) Encuentra un grupo familiar el cual sea isomorfo a G/H.

Problema 3.

Dada la siguiente matriz aumentada de un sistema $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 3 & 1 & a & d \end{pmatrix}$

c) Qué condiciones deben cumplir *a*, *b*, *c* y *d* para que el sistema tenga:
iv. Solución única.
v. Infinitas soluciones.
vi. Ninguna solución.

Problema 4

Sean U, V y W grupos, dados $\phi_1 : U \to V$ y $\phi_2 : U \to W$ homomorfismos entre grupos. Se define $\phi : U \to V \times W$ como:

$$\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$$

Para todo $u \in U$.

c. Encuentre un caso particular del enunciado, es decir, determine ejemplos de homomorfismos entre grupos ϕ_1, ϕ_2 y obtenga ϕ. ¿Es ϕ un homomorfismo entre grupos?

¿Es posible considerar en general, la aplicación ϕ como un homomorfismo entre grupos? Justifica tu respuesta.

Problema 5.

$\phi(x) : (P_2(\mathbb{R}), +) \to (M_{2\times2}(\mathbb{R}), +)$ Dada por $f(\phi(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$.

d) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ(p(x)) = A? Si su respuesta es afirmativa dé el polinomio, y si es negativa entonces justifique.
e) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ (p(x)) = A? Si su respuesta es afirmativa dé dicho polinomio, y si es negativa entonces justifique.

f) ¿Para qué matrices existe un polinomio $p(x)$ tal que ϕ(p(x)) = A?

Segundo Cuestionario con Audio:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Entrevista Estructurada

Nombre: ____ **Fecha:** ______________

Instrucciones: Resuelva cada uno de los ejercicios y argumente sus respuestas. NO BORRE PROCEDIMIENTOS Y/O NOTAS. NO DEJE EJERCICIOS SIN CONTESTAR. Los resultados obtenidos no tienen ninguna relación con la calificación en la materia y tu identidad quedará anónima.

Situación 1. Considere los siguientes grupos $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^2$ bajo la operación de suma y conteste lo siguiente:

c) Calcula las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a, b, c) = (a + c, b + c)$. ¿Quién es la imagen de f?

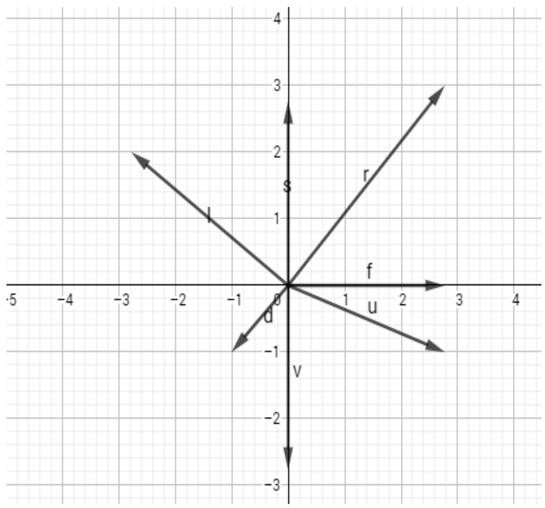
d) Calcule las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f(a, b, c) = (a - b + 2c, 2a - 2b + 4c)$. ¿Quién es la imagen de f?

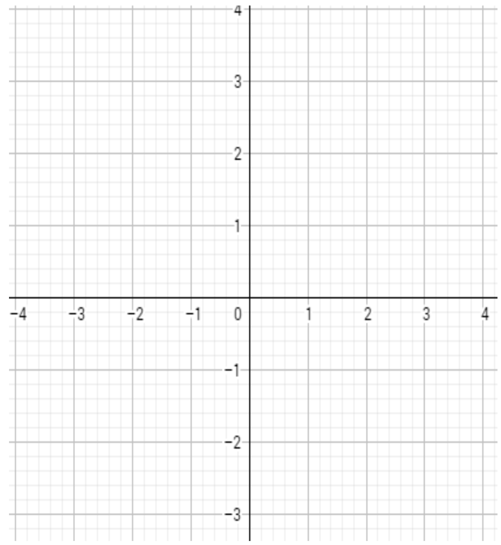
Situación 2. Sea $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, responda los siguientes incisos:

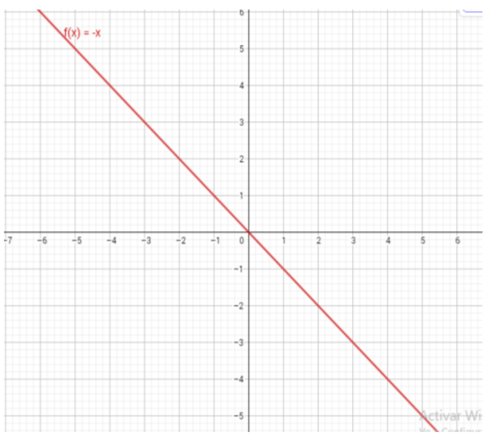
d) Grafique en el plano de la derecha la imagen de los siguientes vectores que se enlistan y se muestran en el plano de la izquierda bajo el homomorfismo f: $\boldsymbol{u}(a, 1), \boldsymbol{v}(0, -a), \boldsymbol{f}(a, 0), \boldsymbol{d}(-1, -1), \boldsymbol{l}(-a, 2), \boldsymbol{s}(0, a), \boldsymbol{r}(a, 3)$. ¿Puede calcular la imagen de cualquier vector? ¿Cómo lo haría?

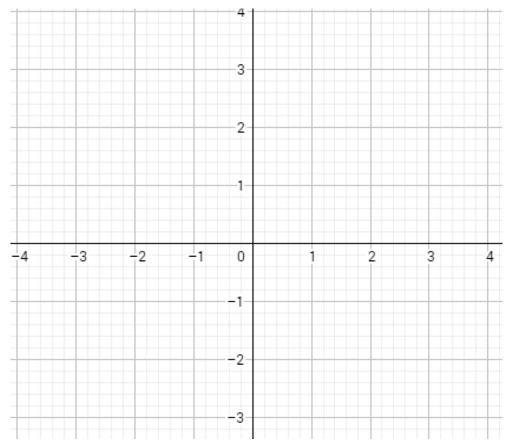
e) Grafica en el plano de la derecha la imagen de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, $G = \{(x, y) | y = -x\}$, $H = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ que se muestran en el plano de la izquierda. ¿Puede calcular la imagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$? ¿Cómo lo haría?

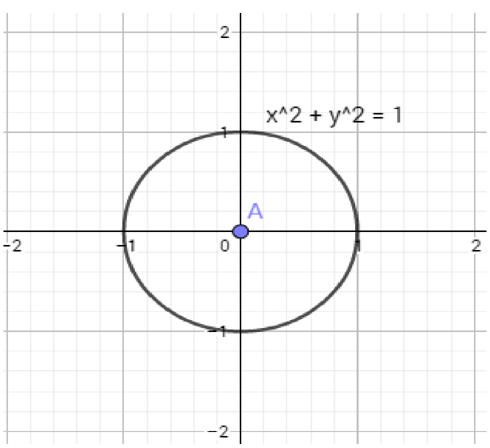
f) ¿Puede obtener la imagen de todo $\mathbb{R}^2$? ¿Cómo lo haría? Represéntalo geométricamente y algebraicamente.

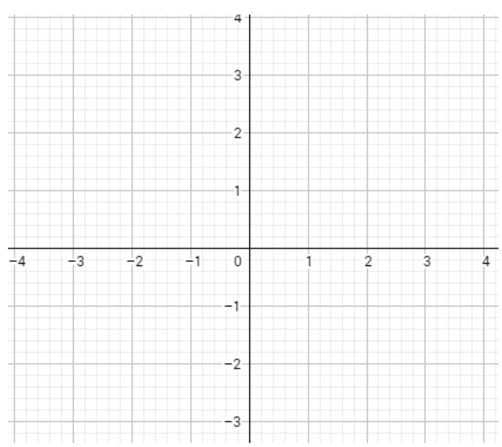

r
s
l
f
u
d
v




f(x) = -x




x^2 + y^2 = 1
A



Situación 3. $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{P_2}(\mathbb{R}), +) \to (\boldsymbol{M_{2\times 2}}(\mathbb{R}), +)$ **Dada por** $\boldsymbol{f(p(x))} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p(1) - p(2)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{p(0)} \end{pmatrix}$

d) Calcule las imágenes de los siguientes polinomios bajo el homomorfismo f si: $i)\ x^2 + x + 1,\ ii) \frac{1}{3}x^2 - 6 = 0,\ iii)$ $-5x^2$-$\frac{1}{2}x - 1 = 0,\ iv)\ -2x^2 + 7x - 10 = 0,\ v)\ x - 8 = 0,\ vi)\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{4} = 0,\ vii)\ 2x^2 + 3x + \frac{1}{7} = 0.$

e) ¿Las imágenes encontradas tienen alguna característica en común? ¿Podría calcular la imagen de cualquier polinomio? ¿Cómo sería la imagen? ¿cómo determinaría la imagen de cualquier polinomio?

f) ¿Cuál será la imagen de este homomorfismo entre grupos? ¿Por qué?

Situación 4. $f: M_{nxn}(F) \to f: M_{nxn}(F)$ Definida por $f(A) = A^T - A$.

f) Determine la imagen del homomorfismo f para el caso $n = 2$.

g) Determine la imagen del homomorfismo f para $n = 3$.

h) Después de calcular la imagen del homomorfismo f cuando $n = 2$ y $n = 3$ determine la imagen para el caso general n.

i) Pruebe que la imagen es un subgrupo de las matrices M_{nxn}. ¿Es siempre la imagen un subgrupo? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.

j) ¿Es el homomorfismo sobreyectivo? Justifique.

Situación 5. a) Sea $h: M_{2x2} \to \mathbb{R}$ la función definida entre grupos definida como $h: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2.$ Determine la imagen de h. ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.

d) Sea $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(p(x)) = p(0) + 1$. Determine la imagen de f. ¿Es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? si su respuesta es afirmativa demuéstrelo en caso contrario justifique por qué no.

Transcripciones de los audios:

Después de llevar acabo el cuestionario diagnóstico y hacer un minucioso análisis a priori en cada una de las situaciones que forman parte de éste alumno por alumno se pudo obtener la siguiente información. De los nueve estudiantes que hicieron el cuestionario, tres de ellos fueron idóneos para seguir con la entrevista semiestructurada gracias a los buenos resultados obtenidos en el instrumento del cuestionario.

Desafortunadamente por cuestiones ajenas a los propósitos de la investigación, después de contestar el cuestionario diagnóstico la forma metodológica tuvo que cambiar. Se tenía pensado establecer una entrevista semiestructurada con los estudiantes elegidos, pero la pandemia propagada por el virus COVID-19 hizo que esto no fuera posible ya que una de las precauciones ante dicha enfermedad era mantener completo aislamiento social.

Por tales motivos la entrevista se dejó de lado, sin embargo, los alumnos mediante los medios tecnológicos, what´s app y zoom, pudieron contestarnos las preguntas de la entrevista semiestructurada, tomándole fotos a cada una de sus respuestas y además grabando audios en su forma de proceder en cada situación.

En los siguientes párrafos se podrán observar las transcripciones completas de los tres estudiantes que contestaron el cuestionario que formaba parte de la entrevista, ulteriormente se evidenciarán algunas imágenes de sus respuestas.

Estudiante A2

Situación 1

Bueno la idea para resolver la situación uno es que consideramos el homomorfismo entonces queremos calcular la imagen, entonces eh, damos un vector que pertenece a bueno a $\mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2$, y entonces lo que hacemos es que por medio de eso generamos un sistema de ecuaciones que nos determinen las soluciones para este problema, tal que si lo resolvemos nos damos cuenta que siempre podemos encontrar esas soluciones y de ahí determinamos la imagen.

Para el inciso (b) hacemos un procedimiento similar solo que lo único que cambia es la función dada, entonces, mm, hacemos un procedimiento, generamos el sistema de ecuaciones, solo que aquí eh, llegamos a, a un resultado, que queda dependiente de dos variables, entonces también ahí calculamos la imagen y damos las condiciones.

Situación 2

Eh para la solución dos tenemos una función, tenemos un homomorfismo de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entonces tenemos nuestra función dada y nos pide que lo calculemos en los vectores dados entonces lo que hacemos es, eh, eh valuar los vectores, que tenemos en la función en el, la función dada, entonces lo único que hacemos pues es generar nuestro sistema de ecuaciones y ahí generamos las, las, las condiciones que se cumplen, y así le hacemos con todos los demás, y luego vienen una pregunta que nos dice que ¿qué si es posible calcular la imagen de cualquier vector? Y sí pues damos un vector en $\mathbb{R}^2$ al cual lo tenemos que igualar con otro en $\mathbb{R}^2$ para calcular así la imagen, entonces igual que los otros ejercicios eh, desarrollamos nuestro sistema de ecuaciones por medio de la igualdad de vectores por lo que nos da las condiciones para que esto se cumpla.

Para el inciso (b) nos pide que calculemos la imagen de dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ entonces tenemos g, que es un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que $y = -x$. Bueno lo que hice aquí para plantearme eso, es que lo, lo sustituí, y entonces me di cuenta que, que eso nos manda como a la función identidad pero con signo negativo, como a $-x$ pues, y entonces lo único que nos pide calcular la imagen de eso, entonces lo que yo quiero ver es la imagen a lo que recorre todos esos puntitos, recorre todo el plano por lo que es la imagen ya se calcula.

Ah para el siguiente subconjunto que es h con un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ ahí lo que me puse que esto es la for… la norma al cuadrado entonces van a ser todos los vectores que tengan norma cuadrada una, o sea norma una eh, y lo que vi es que es isomorfo al círculo unitario.

Y pues el inciso (c) no me quedó muy claro cómo podría hacerlo pero, pero lo único que podría decir es que damos una función tal que al calcular su imagen nos regrese todo $\mathbb{R}^2$.

Situación 3

En la solución tres, en la situación tres perdón, tenemos un homomorfismo de grupos entre los polinomios de grado dos con coeficientes en $\mathbb{R}$ y las matrices de dos por dos en coeficientes en $\mathbb{R}$, vamos con la suma, esto se nos pide calculemos la imagen de los polinomios bajo el homomorfismo de f por lo que tenemos varios, tenemos siete polinomios a lo único que a mi idea fue, fue valorar el polinomio, y así poder calcular su imagen y así nos da las condiciones que se requieren hasta el polinomio que tenemos en el número siete, y ya viene una serie de preguntas, y ya las respondí dependiendo como creía que se respondía. Y entonces nos pide que si es posible calcular este homomorfismo para la imagen pues, para cualquier polinomio por lo que digo que sí, ponemos un polinomio arbitrario que pertenezca a los polinomios de grado dos y entonces evaluamos en uno, en dos y en cero; y entonces de ahí lo igualamos a la matriz que nos quede, con una arbitraria también que pertenezca a las matrices de dos por dos y por la igualdad de matrices eh, damos el sistema de ecuaciones tal que son las condiciones que se deben de cumplir.

Situación 4

Mmm… con lo que respecta a la situación 4 nos pide calcular la imagen de las matrices n por n en un campo F al menos por la $f(A) = A^T - A$. Entonces nos pide que lo hagamos para el caso $n = 2$. Entonces nosotros damos una matriz eh… B que pertenezca a esa, que sea arbitraria tal que cuando y otra matriz A que la ponemos la, bueno, le aplicamos la función tal que $A^T - A = B$ entonces proponemos una matriz, y la matriz A y la matriz B, y entonces de, hacemos las cuentas necesarias por igualdad de matrices sacamos nuestro sistema de ecuaciones a lo que nos lleva que es una matriz con diagonal cero y con los demás coeficientes son inversos con lo que decimos que son las matrices anti simétricas la imagen.

Análogamente lo hacemos con el caso $n = 3$ y el caso general que es el de nxn, y así lo generamos, mmm… y luego nos pide que, que demostremos que si la imagen es subgrupo de las matrices nxn. Para lo que vemos que la imagen sea distinto del vacío, que cumpla la cerradura, y que el inverso pertenece también, y llegamos a la conclusión de que sí es subgrupo.

Y luego nos pregunta que si el homomorfismo es inyectivo, pero nosotros por teorema que vimos en álgebra lineal uno sabemos que si la imagen nos da el conjunto de ida, todo el conjunto entonces sabemos que es sobreyectivo, pero en este caso no, así que llegamos a que es, a que no es sobreyectivo.

Situación 5

Para la situación 5 hacemos algo similar solo que se centra en las matrices de dos por dos a $\mathbb{R}$, y tenemos nuestra función dada y tenemos que calcular la imagen de eso. Entonces damos un número que pertenezca a $\mathbb{R}$, que y un matriz que cuando le aplicamos la función nos da $a^2 = b$ por ejemplo. Entonces hacemos las cuentas necesarias para determinar su imagen y para después de esto tenemos que, ah y después, probamos que la imagen es distinto del vacío, la cerradura y el inverso.

Eh para el inciso (b) pues hacemos algo similar, proponeos un polinomio de grado dos, lo evaluamos en cero y le sumamos uno, y entonces lo igualamos a una constante que pertenece a $\mathbb{R}$, y ya calculamos la imagen, y también ésta nos, nos pide demostrar que sea distinto, que sea perdón subgrupo, entonces vemos que sea distinto del vacío, que sea, que cumpla esa cerradura y el inverso; y sería todo.

Estudiante A3

Situación 1

Calcula las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^2$ bajo el homomorfismo f, entonces, calcula las imágenes. Tengo que calcular a imagen de cada vector de $\mathbb{Z}_2^2$ bajo el homomorfismo f, entonces, ok, entonces, $\mathbb{Z}_2^2$ los elementos son $(0,0,0)$ el $(0,0,1)$, el $(0,1,0)$ el $(0,1,1)$ el ya me equivoqué, el $(1,0,0)$, el $(1,0,1)$, el $(1,1,0)$ y el $(1,1,1)$. Un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho elementos ok. Entonces empezamos con la imagen del $(0,0,0)$ $f\ de\ (0,0,0)$ es igual a $a + c$ como a vale cero y cero vale es cero más cero y $b + c$ que también es cero más cero, y esto es igual a $(0,0)$. F de $(0,0,1)$ es $a + c$, a vale cero, c vale 1 entonces cero más 1, luego $b + c$, cero más uno también, y aquí sería el $(1,1)$. F de $(0,1,0)$ es $a + c$ a vale cero, c vale cero entonces es cero más cero y luego es $b + c$ que es uno más cero, y esto da como resultado el $(0,1)$. Luego f de ¿cuál sigue? $(0,1,1)$ Esto es igual a $a + c$, que es cero más uno, y $b + c$ que es uno más uno, y esto es uno, uno más uno es dos pero estamos en $\mathbb{Z}_2$ entonces es cero. Ok, ahora f de $(1,0,0)$ es igual a $a + c$, uno más cero, y $b + c$, que es cero más cero, entonces es $(1,0)$. Luego f de $(1,0,1)$ esto es $a + c$, que es uno más uno y $b + c$ que es cero más uno, luego uno más uno en $\mathbb{Z}_2$ es cero, y cero más uno es uno. Y luego $(1,10)$ es $a + c$, uno más cero, y luego $b + c$, uno más cero, y esto es $(1,1)$. Por último el $(1,1,1)$ f de $(1,1,1)$ es $a + c$, que es uno más uno, y $b + c$ que es uno más uno, entonces esto es $(0,0)$. Ahora ¿quién es la imagen de f? entonces vamos a calcular la imagen de f, es igual a los vectores a, b pertenecientes a $\mathbb{Z}_2^2$ que es el conjunto de llegada tales que son el resultado de aplicarle f a algún vector de $\mathbb{Z}_2^2$, que es el conjunto de salida. Entonces nuestro vector de $\mathbb{Z}_2^2$ será (x, y, z) y le vamos aplicar f para que nos de (a, b) y entonces la imagen de f es el conjunto de los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que, entonces $f(x, y, z)$ sería $(x + z, y + z)$, esto es igual a (a, b) para algún x,, y, z en $\mathbb{Z}_2^2$, y entonces en $x + z$ tiene que ser igual a a y $y + z$ es igual a b por igualdad de vectores, y entonces despejando z de la segunda ecuación tenemos que es igual a $b - y$ con y en $\mathbb{Z}_2^2$, y en $\mathbb{Z}_2^2$, y sustituimos en la primera ecuación, entonces $x + z$ sustituimos z con $b - y$ y esto es igual a, y entonces despejando x tenemos que es igual $a - b + y$ con y en $\mathbb{Z}_2$ como ya habíamos dicho, y entonces la imagen de f.

Y entonces sustituyendo los valores de $x\ e\ y$ en la imagen de f tenemos la imagen de f son los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tal que, ahora tenemos $x + z$ entonces sumamos el valor de x que es $a - b + y$ le sumamos z que es $b - y$, $y + z$, y está en $\mathbb{Z}_2$, y le sumamos z que es $b - y$, y esto es igual a b; y entonces la imagen de f son los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tal que resolviendo tenemos que nos queda a, b es igual a ab, o sea, tenemos los ab en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que ab es igual así mismo entonces la imagen, la imagen de f pues es en realidad todo $\mathbb{Z}_2^2$. Ahora en inciso b) me piden que calcule las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^2$ que ya sabemos cuáles son sus elementos bajo su homomorfismo f entonces empecemos. f de $(0,0,0)$ entonces es la primera entrada es $a - b + 2c$ que es $0 - 0 + 2(0) = 0$, $2a$ que es $2(0)$ menos $2b$, que es $2(0)$, que es 0 también más 4c que $4(0)$ y esto es $(0,0)$.

Ahora $f(0,0,1)$ es $a - b$, $0 - 0$, mas $2c$ que es $2(1) = 2$, luego es $2a$, que es 0, menos $2b$ que también es 0 mas $4c$, $4(1) = 4$, entonces tenemos, ¡ah pero en $\mathbb{Z}_2$ también es el $(0,0)$! luego $f(0,1,0)$ es $a - b$ que es $0 - 1$ más $2c$ que es 0, luego es $2a$ que es 0 menos $2b$ que es -2 porque b vale 1 más $4c$ que es 0 entonces tenemos la primera entrada -1, -1 que en $\mathbb{Z}_2$ es 1, y -2 que en $\mathbb{Z}_2$ es 0.

Ahora $f(0,1,1)$ es igual a $a - b$, que es $0 - 1$ más $2c$ que es 2, $2a$ que es cero menos $2b$ que es -2 más $4c$, es +4, entonces $-1 + 2$ es 1, y en $\mathbb{Z}_2$ es 1, y $-2 + 4$ es 2 que en $\mathbb{Z}_2$ es 0.

Ahora $f(1,0,0)$ es igual a $a - b$ es $1 - 0 + 2c$ que es 0 y es $2a$ que es $2 - 2b$ que es 0 más 4c que también es 0, y esto es igual a $(1, 2)$ que en $\mathbb{Z}_2$ es 0.

Ahora $f(1,0,1)$ y esto es $a - b$, $1 + 2c$ que es 2, $2a$ que es 2 menos b que es 0 mas $4c$ que es 4 entonces esto es igual a $1 + 2$ son 3 que en $\mathbb{Z}_2$ es 1, y $4 + 2$ que en $\mathbb{Z}_2$ es 0.

Ahora $f(1,1,0)$ es $a - b$, $1 - 1$ mas $2c$ que es 0, y $2a$ que es 2 menos $2b$ menos 2 más $4c$ que es 0 entonces tenemos $(0,0)$. Y luego $f(1,1,1)$ tenemos $a - b$ que es $1 - 1$ más $2c$ que es 2 luego $2a$ que es 2 menos $2b$ que es 2 más $4c$ que es 4 entonces tenemos 2 que en $\mathbb{Z}_2$ es 0, y 4 que en $\mathbb{Z}_2$ también es 0.

Ahora quien es la imagen de f por los resultados obtenidos anteriormente podemos ver que la imagen va ser el $(0,0)$ y el $(1,0)$ pero vamos a verificarlo. Imagen de f son los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que $f(x, y, z)$ es igual a (a, b) para algún (x, y, z) en $\mathbb{Z}_2^3$, y entonces tenemos que imagen de f es igual a $(a. b)$ en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que $f(x, y, z)$ sería $a - b$ entonces es $x - y + 2c$ que es $+2z$ y en la otra entrada sería $2x - 2y + 4z$ esto es igual (a, b) para algún (x, y, z)en $\mathbb{Z}_2^3$; entonces de lo anterior obtenemos que $x - y + 2z$ tiene que ser igual a a, y $2x - 2y + 4z$ es igual a b por igualdad de vectores.

Luego de la ecuación dos podemos factorizar un dos de cada miembro del lado izquierdo, tenemos $2(x - y + 2z)$ es igual a b, y si nos fijamos la primera ecuación lo que está dentro del paréntesis es la primer ecuación de arriba que es igual a a entonces podemos sustituir eso y nos queda $2a$ es igual a b, esto es, sustituyendo la ecuación uno en la ecuación dos. Entones nos queda que la imagen de f son los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que $2a$ es igual a b, pero eso significa que a lo que valga a lo voy a multiplicar por dos y eso es lo que va valer b pero en $\mathbb{Z}_2$, o sea que, b va ser siempre 0, porque en $\mathbb{Z}_2$ multiplicar por un dos es como multiplicar por un cero entonces b siempre va valer cero, entonces la imagen de f son los (a, b) en $\mathbb{Z}_2^2$ tales que b es igual a cero. Entonces los elementos en la imagen de f van a ser los $(0,0)$ y el $(1,0)$ porque b siempre va valer cero.

Situación 2

Ahora en la situación dos tenemos el homomorfismo f que va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$definido por $f(x, y)$ es igual a $(-y, x)$ o sea que a cada vector de $\mathbb{R}^2$ lo manda con el perpendicular a él. Porque el

$(-y, x)$ es el perpendicular al vector (x, y). Para el inciso a) me piden que grafique en el plano de la derecha la imagen de los siguientes vectores que se enlistan y se muestran en el plano de la izquierda bajo el homomorfismo f entonces el primer vector es $u(a, 1)$ entonces la imagen de $(a, 1)$ sería $(-1, a)$ entonces vamos a graficar $(-1, a)$ en el plano de la derecha entonces como y vale a, con a un real supongo entonces puede ser en realidad lo que sea entonces lo voy apuntar nomás al nivel de -1 en x y que y pueda ser lo que sea.

Ahora el vector v es $(0, -a)$ entonces su imagen sería $(a, 0)$ entonces vamos a graficar el $(a, 0)$, entonces como y vale cero y x es igual a a que en realidad puede ser lo quesea entonces vamos hacer una flechita en el eje x, y esto es el vector v.

Ahora f es el $(a, 0)$ entonces su imagen va ser el $(0, a)$ que va ser perpendicular al vector v entonces vamos a graficarlo como y vale cero, no como x vale cero este y y vale a entonces puede ser lo que sea entonces hacemos una flechita en el eje y, y este es el vector f.

Ahora el vector d que es $(-1, -1)$ su imagen va a ser $(1, -1)$ entonces ubicamos el 1 y el -1 va estar aquí, entonces graficamos el vector d, el vector d, ya quedó entonces ahora el vector l es $(-a, 2)$ su imagen sería $(-2, -a)$ entonces -2 en x ubicamos el -2 y como y vale $-a$ entonces hacemos una flechita y llegué a la altura del -2, y esto es el vector, bueno la imagen de l.

Ahora el vector s que es $(0, a)$ su imagen va ser $(-a, 0)$ entonces como y vale cero y x es $-a$ hacemos una flechita en el eje x negativo, este es el vector s.

Y por último el vector r que es $(a, 3)$ su imagen sería $(-3, a)$ entonces ubicamos el -3 en x y hacemos una flechita que llegue a la altura del -3 porque y vale a y puede ser lo que sea entonces este es el vector r. Luego dice puede calcular la imagen de cualquier vector como lo haría; pues simplemente este… calculando su perpendicular que si es (x, y) sería $(-y, x)$ si de hecho si se puede calcular la imagen de cualquier vector, si la imagen de cualquier vector si se puede calcular, ¿cómo lo haría? Pues si tengo un vector (x, y) es $(-y, x)$ es su perpendicular.

Ok, ahora en el inciso b) dice grafique en el plano de la derecha la imagen de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ entonces $G = \{(x, y) | y = -x\}$, y eso es la forma de una recta perpendicular a la recta identidad, entonces la imagen como ésta es perpendicular a la identidad la imagen va ser la identidad, la recta identidad, y el $H = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, es una circunferencia de radio 1 y centro en el origen, pero como la circunferencia son los puntos que equidistan de un punto fijo que es el centro, en este caso el origen, entonces el perpendicular de cada punto de la circunferencia va estar en la misma circunferencia porque va seguir equidistando del centro, entonces la imagen de H va seguir siendo la misma circunferencia de radio 1 y centro en el origen, aquí dibujo una circunferencia, bueno arriba dibujo una recta identidad y abajo una circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

Ahora puede calcular la imagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$, pues yo supongo que sí, no veo problema para calcularlo, ¿cómo lo haría? Pues obteniendo el perpendicular de cada punto, bueno cada vector, lo tomaríamos como perpendicular, de cada punto viéndolo como un vector, el perpendicular de cada punto viéndolo como un vector así. Luego puede obtener de todo $\mathbb{R}^2$ ¿cómo lo haría? Representalo geométricamente y algebraicamente.

Pues bueno este, pues bueno este, la imagen de todo $\mathbb{R}^2$ pues el homomorfismo es sobreyectivo, empezando de ahí porque, porque para todo $(-y,x)$ siempre existe un vector (x,y) en el conjunto de salida que de hecho es igual así mismo tal que al aplicarle la función me da $(-y,x)$; entonces el homomorfismo es sobreyectivo entonces la imagen es todo $\mathbb{R}^2$ ¿cómo lo haría? Ehhh tomando un (x,y) arbitrario en $\mathbb{R}^2$ en el conjunto de salida, no bueno de hecho eso no hace falta, ya con lo que dije anteriormente ya, ya creo que es suficiente porque pues el homomorfismo es sobreyectivo, habría que demostrar que la sobreyectividad, pero pues eso queda aquí en la libreta, entonces como es sobreyectivo la imagen es todo $\mathbb{R}^2$todo el conjutno de llegada.

Entonces probando la sobreyectividad tenemos imagen de f es igual a los (a,b) en $\mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y)$ es igual a (a,b) para algún (x,y) en $\mathbb{R}^2$, y entonces, la imagen son los (a,b) en $\mathbb{R}^2$ tales que $(-y,x)$ es igual a (a,b) para algún (x,y) en $\mathbb{R}$ de lo anterior tenemos que $-y=a$ o sea que $y=-a$ y que $x=b$, así que tenemos que la imagen son los (a,b) en $\mathbb{R}^2$ tales que, tales que, $y=-a$, y $x=b$.

Ahora como para todo (a,b) en $\mathbb{R}^2$ existe un (x,y) igual a $(b,-a)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)$ es igual a $f(b,-a)$ y esto es igual a (a,b); por lo tanto f es sobreyectivo, y entonces la imagen de f es todo $\mathbb{R}^2$.

Situación 3

Bueno, en la situación 3, tenemos el homomorfismo f que va de los polinomios de grado menor o igual a dos en $\mathbb{R}$ a las matrices de 2x2 en $\mathbb{R}$ y me pide que calcule las imágenes de los siguientes polinomios bajo el homomorfismo f, entonces vamos con el primero,

$f(x^2+x+1)$ la imagen va a ser p de 1, p valuado en 1 mas bien, que es (cuenta 1, 2,3) es $3-p(2)$ que es 4+2+1= 7, 3-7, 0, 0 y $p(0)$ que es 1 esto 3-7 es -4, 0, 0 y 1

Ahora el segundo, el segundo es $f(\frac{1}{3}x^2-6)$ y esto es igual a, p(1) es $\frac{1}{3}-6$, 6 son 18 tercios entonces $\frac{1}{3}-\frac{18}{3}$ son $-\frac{17}{3}-p(2)$ tenemos $\frac{2}{3}$ no, $\frac{4}{3}$ menos 6 osea $-\frac{18}{3}+\frac{4}{3}$ son $-\frac{14}{3}$ pero con este menos se hacen más entonces 0,0 y p(0) es -6 y entonces -17+14 son -3/3 si -3/3 que es -1, -1,0,0 y -6.

Ahora el segundo, digo el tercero $f(-5x^2-\frac{1}{2}x-1)$ p(1) es -5-1/2-1 y esto es -6 -1/2-1/2 y -6 son -12/2-1/2 son -13/2 ahora -p(2) que es -5(4) -20 – ½(2) que es -1-1 y esto es -22 pero con este menos se hace más 0, 0 y p(0) que es -1 entonces 13/2, -13/2+22, 22 son 44/2-13 son 31, 31/2, 0,0 y -1.

Ahora el que sigue $f(-2x^2+7x-10)$ es igual a p(1) es -2+7-10 y esto es -5 -p(2) que es -8 y luego es +14-10 y aquí es -18+14 son -4 con este menos se hace más 0,0 y p(0) es -10, -5+4 es -1, 0, 0, y -10.

El que sigue $f(x-8)$ entonces p(1) es 1-8 es -7-p(2), 2-8 es -6 y se hace un más 0,0,-8, y luego -7+6 es -1, 0, 0 y -8 el que sigue $f(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}x)$, ok p(1) es $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ son $\frac{2}{4}+\frac{1}{5}$ son 1/4 +1/5 son 20…son 14/20 y reduciéndolo son 7/10-p(2) ahora son 4/4+1/4 son 5/4+1/5 y esto es 20, 5*5=25+4 son… ah no se me olvido aquí, son 2/5entonces 4*2=8 entonces son

25+8 son 33/20, 0,0 y p(0) es ¼ ahora 7/10-33/20, 200, 7*20 son 140-330 esto es140-330 son -190/200 y esto es -19/20, 0,0 y $\frac{1}{4}$.

Ahora el que sigue $f(2x^2+3x+\frac{1}{7})$,ok p(1) es 2+3 que son 5+1/7, 5 son 35/7+1/7 son 36/7-p(2) que es 4x2=8+3x2=6 que son 14, 14+1/7, 14 son 98/7+1/7 son 99/7, 0, 0 y p(0) es 1/7 entonces 99-36 son 3, 63, son -63/7 pero eso es 9 o sea -9 , 0, 0, 1 digo 1/7.

Situación 4

Ahora en la situación 4 tenemos el homomorfismo f que va de las matrices de nxn con coeficientes en f a las matrices de n*n con coeficientes en f, definida como $f(A)=A^T-A$ determine la imagen del homomorfismo f para el caso n=2 en el inciso (a) entonces a ver, vamos a determinar la imagen de f, la imagen de f son las matrices b en (piensa n=2, ok) matrices b en las matrices de 2*2 con coeficientes en f tales que $f(a)=b$ para algún a en las matrices de 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces la imagen de f va a ser las b en las matrices de 2x2 con coeficientes en f tales que $A^T-A=b$ para algún a en las matrices de 2x2 con coeficientes en f, ok, bueno aquí yo se algo, bueno aquí ahorita aquí voy a poner una demostración mmm digamos rápida de lo que estoy diciendo pero bueno sea cual sea las dimensiones de la matriz , siempre y cuando sea cuadrada sé que A^T-A es una matriz que tiene ceros en la diagonal, bueno aquí voy a poner la demostración de esto entonces como$a=a_{ij}$ en las matrices de 2x2 en f y $A^T=a_{ij}$ en las matrices de 2x2 en $f$entonces A^T-A son los $a_{ij}-a_{ji}$ pertenecientes a las matrices de 2x2 con coeficientes en f y entonces tenemos que cuando $j=i$ osea $a_{ii}-a_{ii}$ es el 0 de f para todo i en el intervalo de 1 a 2, entonces la imagen de f son las b en las matrices de 2x2 con coeficientes en f tales que, pues que tiene ceros en la diagonal, osea que $b_{ii}=0$ para todo i de 1 a 2.

Bueno ahora en el inciso b me piden determinar la imagen del homomorfismo f para n=3, lo mismo nomás que ahora la dimensión es 3, entonces imagen de f con las b en las matrices de 3x3 con coeficientes en f tales que $f(a)=b$ para algún a en las matrices de 2x2 en f entonces la imagen de f son las p en las… ay es 3x3 aquí me equivoque, 3x3 entonces las matrices de 3x3 con coeficientes en f tales que $A^T-A=b$ para algún a en las matrices de 3x3 con coeficientes en f y la misma justificación, como $a=a_{ij}$ pero ahora en las matrices de 3*3 coeficientes en f y $A^T=a_{ij}$ en las matrices de 3x3 coeficientes en f, entonces A^T-A son los $a_{ji}-a_{ij}$ pertenecientes a las marices de 3x3 con coeficientes en f y tenemos que cuando $j=i$,$a_{ii}-a_{ii}=0$ de f para todo i de 1 a 3, conjunto 1,2,3, por lo que la imagen de f son las b en las matrices de 3x3 con coeficientes en f tales que b_{ii} son los elementos de la diagonal igual 0 de f para todo i de 1 a 3.

Ahora en el inciso (c) después de calcular la imagen del homomorfismo f cuando n=2 y n=3 determine la imagen para el caso general n, bueno lo mismo nomás que ahora para n, imagen de f son las b en las matrices de nxn con coeficientes en f tales que $f(a)=b$ para algún a en las matrices de nxn con coeficientes en f entonces, la imagen son los b, las matrices de nxn con coeficientes en f tales que $A^T-A=b$ para algún a en matrices de nxn con coeficientes en f, como a son los a_{ij} en las matrices de nxn con coeficientes en fy A^T son los a_{ji} en las matrices de nxn con coeficientes en f entonces A^T-A son los $a_{ji}-a_{ij}$ en las matrices de nxn con coeficientes en f y tenemos que cuando $j=i$ osea $a_{ii}-a_{ii}=0$ es igual al cero de f para todo i en el intervalo de 1 hasta n, entonces la imagen de f son las b en las matrices de nxn con coeficientes en f tales que tiene ceros en la diagonal osea b_{ii} es igual al cero de f para todo i en el intervalo de 1 hasta n.

Ahora en el inciso (d) pruebe que la imagen es un subgrupo de las matrices de nxn, ok entonces bueno el primer paso tenemos que demostrar que el cero de nxn, la matriz cero de nxn está en la imagen de f, pues bueno como como en la matriz cero de nxn son los a_{ij} en las matrices de nxn en f tales que a_{ij} es igual a cero, al cero de f, para todo i y para todo j de 1 hasta n, entonces resulta obvio que cuando $i = j$osea los a_{ii} también son igual a cero porque es para todo i para todo j entonces a_{ii} es igual al cero de f para todo i desde 1 hasta n por lo tanto la matriz cero de nxn pertenece a la imagen de f. Ahora el segundo paso, sean a y b en la imagen de f tenemos que demostrar… Por demostrar que $a + b^{-1}$ esta en la imagen de f , bueno a son los a_{ij} en las matrices de nxn en f tales que a_{ij} es igual al cero de f para todo i desde 1 hasta n, ahora b^{-1} son los b_{ij} en las matrices de n*n con coeficientes en f tales que b_{ii} es igual al cero de f para todo i desde 1 hasta n porque si b está en la imagen su inversa también está en la imagen porque también tiene ceros en la matriz, digo en la diagonal, también tiene ceros en la diagonal, entonces también está en la imagen, entonces también, bueno tiene ceros en la diagonal y entonces $a + b^{-1}$ son los $a_{ij} + b_{ij}$ en las matrices de n*n con coeficientes en f tales que $a_{ii} + b_{ii}$ son el cero de f más el cero de f y esto es igual al cero de f para todo i desde 1 hasta n, por lo tanto $a + b^{-1}$ pertenece a la imagen de f y por lo tanto la imagen de f es un subgrupo de las matrices de nxn con coeficientes en f. ¿Es siempre la imagen un subgrupo? Sí, sí porque a toda matriz cuadrada, porque la matriz cero esta en la imagen y porque a toda matriz cuadrada se le puede sacar su inversa entonces una matriz más la inversa de otra también está en la imagen entonces sí. ¿Es el homomorfismo sobreyectivo? Sí, porque para toda matriz en el conjunto de llegada, no es cierto haber, no, no es cierto, el homomorfismo no es sobreyectivo porque la imagen solo son las matrices con ceros en la diagonal, entonces no es todo el conjunto de las matrices de nxn con coeficientes en f entonces no es sobreyectivo.

Situación 5

Ahora en la situación 5 tenemos h, la función definida entre grupos, ok, va de las matrices de 2x2 a los reales, determine la imagen de h, ok entonces imagen de h son los…vamos a ponerle x, los x en $\mathbb{R}$ tales que $h(a, b, c, d) = \mathbb{R}$ para alguna matriz (a, b, c, d) en las matrices de 2x2 entonces la imagen son los x en $\mathbb{R}$ tales que $a^2 = \mathbb{R}$ para un a en $\mathbb{R}$, en x perdón, estaba diciendo r, es a x, que $a^2 = \mathbb{R}$ para algún a en $\mathbb{R}$, y entonces tenemos que si $a^2 = x$ entonces $\pm a = \sqrt{x}$ pero si le aplicamos el valor absoluto de a también el valor absoluto de la $\sqrt{x}$ entonces tenemos que a= $|\sqrt{x}|$, que es lo mismo que $\sqrt{|x|}$ entonces la imagen de h son los x en $\mathbb{R}$ tales que a^2 sustituimos a a como la $\sqrt{|x|}$ y la elevamos al cuadrado es igual a x y tenemos que la imagen son los x en $\mathbb{R}$ tales que x es igual a si mismo entonces la imagen de h es $\mathbb{R}$, es todo $\mathbb{R}$, y sí porque dada una matriz, no, dado un real x, bueno eso lo voy a aponer aquí, como dado un x en $\mathbb{R}$ existe una matriz (a, b, c, d) en las matrices de 2x2 con $a = \sqrt{|x|}$ tal que $f(a, b, c, d) = f\ (\sqrt{|x|}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d})$, entonces esto es $\sqrt{|x|}^2$ y esto es x, como f es sobeyectiva, entonces la imagen es todo $\mathbb{R}$.

Estudiante A8

Situación 1

En la situación 1 mmm… primero detectamos los elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ y les aplicamos la función, luego vemos que en la función, que, que $f(z_3^2)$ nos manda a los elementos, a todos elementos de $\mathbb{Z}_2^2$ entonces así concluimos que la imagen de la función es $\mathbb{Z}_2^2$.

En el inciso (b) lo hacemos de la misma forma le aplicamos la función a los elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ y vemos que, que a los elementos que nos manda pertenece a $\mathbb{Z}_2^2$ pero no son todos, nada más es el $(0,0)$ y el (0,…) y (1,0).

Situación 2

Luego en el siguiente, en la situación dos, primero, primero vemos que, ok, primero escribimos el homomorfismo, luego la, como es que es la función, como está definida y luego trato de analizar la función, y veo que a cada vector lo manda, lo hace que rote 90°, luego le aplico la función a cada uno de los vectores dados y a la hora de eh de graficarlos o supe qué valor tenía a, pero me fije en la gráfica que ya venía ahí y más o menos vi que a es igual a 2.8, y de esa manera los grafiqué. Tomando el valor de a como 2.8, en la siguiente en el (b), eh tenemos la definición de G que son los elementos (x, y) donde $y = -x$, entonces de esa forma los, la forma que tienen los elementos de G son $(x, -x)$. Ahora tomando los elementos que están en G, que son $(x, -x)$ les aplicó la función, y eso resulta que van a ser ah, las coordenadas o los puntos (x, x) esto quiere decir que, que tienen, que son los (x, y) tal que $x = y$; y pues esa es la imagen.

Luego en el, en el subconjunto H vemos que es, son las coordenadas que pertenecen al círculo unitario entonces le aplicamos la función a los elementos de H, y eso quiere decir que los elementos de H son de la forma $(-y, x)$, y como esos cumplen que x^2, que el primer, la primer coordenada más la segunda coordenada tienen que ser al cuadrado, la primera coordenada al cuadrado más la segunda al cuadrado tiene que ser igual a uno, entonces pues quiere decir que $-y^2 + x^2 = 1$, pero y^2 es, $-y^2 = y$ y por la propiedad conmutativa en la sumas, de la suma en $\mathbb{R}$, éstos, $y^2 + x^2$ es lo mismo que $x^2 + y^2$, entonces concluimos que la imagen de H es igual H, y pues como habíamos, como habíamos analizado, que la función lo que hace es rotar la gráfica, con los puntos 90° por eso la gráfica de este subconjunto aplicándole la función es pues que da igual, porque como es una circunferencia al rotar los pintos no, no se ve la diferencia.

En el inciso (c), que es de todos de los reales cuadrados a los reales cuadrados, el homomorfismo, vamos a analizarlos todos, todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ entonces, entonces ah, ok, entonces, cuando le aplicamos la definición de imagen, y nos damos cuenta que, que la imagen es $\mathbb{R}$, todo $\mathbb{R}^2$, mmm… y algebraicamente, y geométricamente como ya habíamos dicho que traslada 90° a cada punto entonces yo creo que, que la imagen es el, el plano cartesiano solamente rotado 90°.

Situación 3

En la situación 3 pues solamente le aplicamos la función a cada uno de los polinomios y pues yo encontré que las características que comparten es que, que, que la mmm, el elemento principal a_{12} y el a_{21} siempre van a ser cero por la definición del homomorfismo, y el a_{22} siempre va ser la constante que acomp… la constante del polinomio ya que un polinomio de grado igual, igual o menor que dos es de la forma $ax^2 + bx + c$, entonces el a_{22} va ser, va tener el valor de la constante, nada más eso fue lo que yo encontré que, que tenían en común.

Situación 4

Mmmm… y luego en la situación cuatro analizamos que forma tiene primero, tomamos una matriz de $2x$, de, en el inciso (a) de $2x2$ y calculamos la transpuesta y le restamos la misma matriz al igual que, que en el inciso (b), ahí vemos que, que va ser igual, la diagonal siempre va ser ceros y los otros elementos va ser de la forma $a_{ji} - a_{ij}$, así van a quedar cada uno de los elementos. Luego en, en el inciso (d) eh pues, trato de aplicar el teorema dos para subgrupos, y pues ya, el inciso (a) del teorema dice que hay que, que hay que, ok, que la suma de dos elementos va pertenecer a, ok, que si tomamos dos elementos del subgrupo en este caso eh, eh el $f(A)$ que es la imagen entonces el resultado también tiene que ser, que pertenecer en este caso a la imagen porque es lo que estamos tratando de ver, que la imagen sea un subgrupo de las matrices de $M_{nxn}(F)$, pero al sumar, bueno aquí casi más bien, solo nos basamos en que la diagonal sea, que la diagonal, ¡ay bueno es que lo que! A lo mejor estoy mal pero lo que tome en cuenta es que la diagonal sea cero. Y cuando sumamos, cuando la sumamos, dos elementos también siempre va ser cero, y va tener la forma de ser cero.

Bueno luego ya ahí concluí que la tercer matriz del resultado pertenece al $f(A)$, que sería la imagen. Entonces eh, la segunda, ahh, la segunda cosa que tiene que cumplir para que sea un subconjunto, un subgrupo es que el inverso a pertenezca a la imagen, y pues también me reburuje más o menos porque cuando la matriz es del cero de nxn su misma inversa es, es cero de nxn, y como nada más estaba tomando en cuenta, que la diagonal sea cero pues esa matriz cumple; y ahora las demás matrices eh, sabemos que la inversa es la adjunta por la transpuesta entre el determinante, y ahí, ahí solo si la matriz tiene determinante distinto de cero.

Ok una matriz es invertible solo, solo si tiene su determinante distinto de cero entonces yo creo que no sé, no, no pude determinar que todos los elementos de $f(A)$ de la imagen tengan determinante distinto de cero, porque según yo puede haber matrices que, que tengan determinante igual a cero y cumplan con la definición de, de, de los elementos de la imagen, pero solo lo hice para los que tienen, solo lo demostré para los que tienen determinante distinto del cero, y eso es porque al hacer la transpuesta de esa matriz, la diagonal sigue sien… teniendo ceros luego al multiplicarla por cualquiera que sea su adjunta, la diagonal como va quedar un número por el cero, en la diagonal, la diagonal sigue siendo cero, y al dividirlo entre un número que es sería el número de su determinante, el valor del determinante cero sobre cualquier número distinto de cero es cero; y entonces como la matriz resultante va tener la diagonal con ceros entonces va pertenecer al $f(A)$ según yo.

Luego en el inciso (e) según yo no es sobreyectivo porque, porque entonces si para que sea sobreyectivo tiene que, que cumplir, que el kernel sea, sea el cero de, el cero de mm…. De las matrices de nxn, y ese pues si puede cumplir, pero, pero también tiene que cumplir que la imagen sea todo el segundo, el segundo grupo del homomorfismo entonces ahí debiera ser que $f(A)$ tiene que ser todas las matrices de nxn, pero como ya habíamos dicho visto que, que $f(A)$ una de las, que para que estén en la imagen una de las condiciones es que la diagonal sean ceros, y hay muchas matrices que pertenecen a las matrices de nxn que no necesariamente su diagonal es, son puros ceros, entonces no, no cumple, que sea sobreyectivo, ¡Ay perdón me equivoqué! ¿Cuál era? Con él, ¡ay pensé que decía biyectivo, perdón! pero, bueno para que sea sobreyectivo debe de cumplir que la imagen de la función sea todo el segundo grupo y como el segundo grupo son las matrices de nxn entonces tiene que cumplir que, que la imagen sean todas esas matrices, y sí, por lo que ya había dicho entonces hay muchas matrices que pertenecen a las matrices de nxn que no necesariamente su diagonal son puros ceros, y por eso es que no es sobreyectivo.

Situación 5

La situación 5 para determinar la imagen primero pensé que son las equis tal que $a^2 = x$, eso quiere decir que $a = \sqrt{x}$, pero ahí también me confundí porque no dice, bueno según yo, las matrices de $2x2$ no dice en que campo están, pero no sé si eso sea como que muy relevante para, para saber, para pues para tomar una determinación en la imagen pero según yo pues para cualquier x que pertenezca a los reales la raíz de x va ser algún número ya sea real o un complejo, ¡ay no sé! Si o sea ya sea real o complejo pero para cualquier x que pertenezca a los reales siempre va ser raíz de, raíz de x siempre va a ser un número. Entonces la imagen de h va ser lo reales, entonces dice que, luego dice que, que, ¿qué si la imagen es, es un subgrupo?, ok, ¿qué si la imagen es un subgrupo de los reales?, entonces según yo, como la imagen es todos los reales, y el rea… y los reales es un grupo entonces estamos viendo que un subgru… que sí, ¡ay Dios! Ok, bueno como ya sabemos que todo sub… que todo grupo es subgrupo de sí mismo, y como la imagen son todos lo reales entonces sí, la imagen es un subgrupo de los reales.

En el inciso (b) tenemos los polinomios de grado igual, igual o menor que dos, y el homomorfismo va de $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, y pues ahí en, mediante una función que es el polinomio ¡ay Dios! Ok, es el polinomio evaluado en cero, ok cuando le aplicamos la función a al polinomio, es el polinomio evaluado en cero más uno, entonces dice que calculemos la imagen, entonces vamos a calcular la imagen, y por la definición de imagen vemos que, que, ¡ay Dios! Ok por la definición de imagen vemos que son las y que pertenecen a los reales tal que el polinomio evaluado en la función mm… sea ese y, entonces como estamos valuando el polinomio en cero nos va quedar que, ok el polinomio en cero y le sumamos uno entonces al valuar un polinomio en cero lo que sobrevive es la constante entonces la imagen van a ser los y que pertenecen a los reales tal que la constante del polinomio más uno sea igual a esa y, y, y pues para todo número real que, real, para todo número y real que pertenece, para todo número y que pertenece a los reales se puede, ese número se puede representar como una constante más el uno, y pues concluimos que la imagen de f son todos, son todo $\mathbb{R}$; ok, y, y ahí viene la pregunta que es y ¿qué si la imagen es un subgrupo de los reales? Como la imagen es todos los reales va la misma conclusión, como $\mathbb{R}$ es un grupo cualquier subgrupo pues, perdón, cualquier subconjunto, ¡no, ok! Como $\mathbb{R}$ es un grupo entonces cualquier grupo es subgrupo de él mismo, y por eso $\mathbb{R}$ es el mismo, por eso $\mathbb{R}$ es subgrupo, y pues ya.

Estudiante A9

Situación 1

La situación uno nos dice, considere los siguientes grupos $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^2$ bajo la operación de suma y contesté lo siguiente. Calcule las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ definido por $f\ de\ un\ elemento\ (a, b, c)$ en $\mathbb{Z}_2^3$ es igual al vector $(a + c, b + c)$. ¿Quién es la imagen de f? Bueno la imagen, son aquellos elementos (x, y) que están en $\mathbb{Z}_2^2$ tal que $f(a, b, c)$ en $\mathbb{Z}_2^3$ es igual a ese elemento (x, y); y bueno si aplicamos la función definida anteriormente obtenemos que $(a + c, b + c)$ es igual (x, y), y bueno ah por igualación de vectores obtenemos que x es igual a $a + c$ e y es igual a $b + c$, y notemos aquí que a, b y c

están en $\mathbb{Z}_2$, entonces la imagen de f es $\mathbb{Z}_2^2$. ¡Ah bueno! Si lo hacemos a pie, por ejemplo tomando el elemento neutro en $\mathbb{Z}_2^3$ el (0,0,0) y si le aplicamos la función tanto (a, b, c) son cero entonces obtenemos el vector (0,0,0) el neutro en $\mathbb{Z}_2^2$, y si seguimos aplicando la función a cada uno de los elementos vamos eh vamos a obtener todos los elementos de $\mathbb{Z}_2^2$. Ahora $\mathbb{Z}_2^3$ tiene ocho elementos y $\mathbb{Z}_2^2$ solo tiene cuatro, por lo que cada elemento de $\mathbb{Z}_2^2$ es pre imagen de dos elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ por lo que concluimos que la imagen es $\mathbb{Z}_2^2$. Y bueno aquí me surgió una duda por qué tenemos que cuando la imagen de un homomorfismo es todo el conjunto de llegada podemos concluir que es un homomorfismo sobreyectivo pero aquí pues como lo mencione anteriormente cada elemento de $\mathbb{Z}_2^2$ es pre imagen de dos elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ entonces ahí no sé como que se concluye, y esa es mi duda en ese ejercicio.

Ahora para el inciso b) nos pide calcular las imágenes de los vectores en $\mathbb{Z}_2^3$ bajo el homomorfismo $f: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ definida por $f(a, b, c)$ en un $\mathbb{Z}_2^3$ es igual $(a - b + 2c, 2a - b + 4c)$ y nos pide calcular la imagen de f, bueno la imagen de f son los elementos de la forma (x, y) en $\mathbb{Z}_2^2$ tal que $f(a, b, c)$ en $\mathbb{Z}_2^3$ es igual $f(x, y)$. Entonces aplicando la función vamos a obtener que el vector $(a - b + 2c, 2a - b + 4c)$ es igual al (x, y) y por igualación de vectores tenemos que x es igual a $a - b + 2c$ e y es igual a $2a - b + 4c$; y de aquí es fácil observar que y es dos veces x por lo que tendremos eh, el vector eh la imagen son los vectores de la forma $(x, 2x)$ pero falta ver que elementos son, bueno si aplicamos la función podemos aplicar la función a cada uno de los elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ y ver lo que obtenemos o eh en $\mathbb{Z}_2^2$ mm… hacer esa condición que tenemos cada uno de esos elementos que x, perdón, los vectores son del a forma $(x, 2x)$ bueno y después de hacer ese procedimiento obtenemos que la imagen son dos elementos de $\mathbb{Z}_2^2$ que son el neutro el (0,0) y el vector (1,0), y bueno cada, éstos, este elemento, cada uno de estos elementos es pre imagen de cuatro elementos de $\mathbb{Z}_2^3$.

Situación 2

La situación dos nos dice sea f el homomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (-y, x)$, y nos pide responder los encisos. El inciso a) dice grafique en el plano la imagen de los siguientes vectores que se enlistan y se muestran en el plano de la izquierda, bueno eh, desde arriba podemos ver que… ah nos manda, ah, toma un vector y nos manda a su vector perpendicular, bueno a uno de sus vectores perpendiculares, y pues, no fue tan difícil encontrarlos y graficarlos a cada uno de éstos; por ejemplo el vector $u(a, 1)$ es igual al vector $(-1, a)$, y éste notamos en la gráfica que es perpendicular como había dicho anteriormente, y dice ¿puede calcular la imagen de cualquier vector? Pues sí, ¿cómo lo haría? Aplicándole la función f bueno si solo se trata de en este caso, pues es fácil notar y solo es como quien dice intercambiar los vectores, uno con el o sea el (x, y) como quien dice cambiamos, lo invertimos, pero el y va estar con signo negativo así que pues es fácil no es complicado.

Y luego dice gráfica en el plano la imagen de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, y tenemos el conjunto $G = \{(x, y) | y = -x\}$, o sea que tendríamos los vectores de la forma $(x, -x)$por lo que si le aplicamos éste, perdón, si le aplicamos el homomorfismo a cada uno de estos elementos vamos a obtener los vectores de la forma (x, x) que equivale a la función identidad, y en el sub conjunto $H = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$; pues ahí si le aplicamos los, ah, si tomamos un (x, y) y le aplicamos el homomorfismo obtenemos $(-y, x)$, y pues si tenemos $-y^2 + x^2$ pues va seguir siendo uno, porque $-y^2$ pues es $y^2 + x^2$ pues ahí ya tenemos la condición de que es uno por lo que entonces la imagen va seguir siendo la misma, que, bueno que en este caso es el círculo unitario, lo que es su imagen va ser también el círculo unitario.

Situación 3

En la situación tres tenemos una aplicación o transformación que va de $f:(P_2(\mathbb{R}),+) \rightarrow (M_{2\times 2}(\mathbb{R}),+)$ dada por $f\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$ y nos pide calcular las imágenes de varios polinomios bajo ese homomorfismo, bueno en esos no hay mucho problema porque solo es eh de calcular, así que fue fácil, por ejemplo en el primero que tenemos el polinomio $x^2+x+1=0$ eh, y al aplicarle la función vamos a obtener la siguiente matriz. El polinomio evaluado en uno es igual a tres y el polinomio evaluado en dos es igual a 7, así que tres menos siete menos cuatro, esa va ser la entrada a_{11}; y tanto a_{12} como a_{21} pues es cero y la entrada a_{22} es la constante, es el termino constante que en este caso es uno, así que obtenemos la matriz, $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y pues todos los demás pues también este de la misma manera, por ejemplo el cinco, que tenemos el polinomio $x-8$, la matriz que vamos a obtener es, como no tenemos a, ay perdón, el polinomio evaluado en uno es igual a uno, y el polinomio evaluado en dos pues es igual a dos entonces uno menos dos es menos uno, esa es la entrada a_{11} y la entrada a_{12} y a_{21} es igual cero y la entrada a_{22} es igual al termino constante que es menos ocho, entonces la matriz que obtenemos es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, y luego nos dice las imágenes encontradas tienen alguna característica en común, eh pues sí, las que podemos ver a simple vista sin tener que tener como que analizar como tal es que las entradas a_{12} y a_{21} son igual a cero y la entrada a_{22} es igual al termino constante, y luego dice ¿podría calcular la imagen de cualquier polinomio? Mm… ¿y cómo podría determinaría la imagen de cualquier polinomio? Sí pues una vez que encontremos la imagen en general, es decir, para cualquier polinomio de grado dos con coeficientes en $\mathbb{R}$ pues es fácil encontrar la imagen porque tenemos, este, ya las características que mencione anteriormente y solo sería como que eh, especificar algunas para la entrada a_{11}.

Y luego dice ¿cuál sería la imagen de este homomorfismo? Bueno la imagen son las matrices, eh de 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $f(p(x)=A$ esa matriz A, bueno ahí le llame A, y para algún polinomio p en los polinomios de grado 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces al aplicarle la función a ese p obtenemos que, el polinomio evaluado en uno menos el polinomio evaluado en dos es igual a la entrada a_{11}, cero es igual a entrada a_{12}, cero igual a a_{21} y el polinomio evaluado en cero es igual a a_{22}. Entonces aquí para hacerlo de manera general eh, escribimos la forma que tienen los polinomios de grado dos, en este caso, yo les puse coeficiente a, b, c. El polinomio $p(x)$ queda igual a ax^2+bx+c, tal que a, b, c están en $\mathbb{R}$, entonces el polinomio evaluado en cero tenemos que es igual c, el polinomio evaluado en uno tenemos que es $a+b+c$, el polinomio evaluado en dos igual a $4a+2b+c$, entonces el polinomio evaluado en uno menos el polinomio evaluado en dos tenemos que es tres, perdón, $-3a-b$, entonces la imagen va quedar las matrices en 2x2, en las matrices de 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que la entrada a_{11} es igual $-3a-b$, a_{12} es igual a a_{21} igual a cero y la entrada a_{22} es igual a c, con a, b, c en $\mathbb{R}$, y bueno esto, esto lo hacemos por la igualación de matrices, así que vamos a obtener eh como imagen las matrices que tienen entradas a_{12} igual a a_{21} igual a cero y pues las otras entradas van a tener esas condiciones.

Situación 4

Para la situación cuatro tenemos una aplicación, bueno un homomorfismo que va de las matrices $f: M_{n\times n}(F) \rightarrow M_{n\times n}(F)$ y se define por $T(A) = A^T - A$. Nos pide determinar la imagen del homomorfismo para el caso $n = 2$ de las matrices $2x2$, entonces la imagen son las matrices v de $2x2$ con coeficientes en F tal que $f(A) = V$ para alguna A que pertenece a las matrices de $2x2$ con coefiientes en F, y bueno aplicandole la función a esa A pues tenemos que $A^T - A = V$, y bueno A esta en las matrices de $2x2$ con coeficientes en F; eh, y bueno si le damos entradas a_{ij} a la matriz A y hacemos $A^T - A$ vamos a obtener la matriz con diagonal cero y con entrada ah, a_{12} ah, mm… bueno no eso no está correcto, bueno obtenemos la matriz con diagonal cero, y en la entrada, en la segunda entrada tenemos a_{21} menos a_{12} y en la entrada de la esquina sup… inferior izquierda tenemos menos, menos a_{21} menos a_{22}, o sea tenemos la inversa de la otra, por lo que igualando la matriz v a esta matriz vamos a obtener ehh, que las matrices, la imagen, son las matrices v en, las matrices de $2x2$ con coeficientes en F tal que $V^t = V$, a $-V$ perdón; y son las matrices antisimétricas de $2x2$ y bueno nos pide determinar el caso del homomorfismo para el caso $n = 3$, y vamos a obtener lo mismo que anteriormente las matrices antisimétricas de $3x3$, por lo que nos vamos a pasar al caso general n.

La imagen del homomorfismo van a ser las matrices $V\ de\ nxm$ con coeficientes en F tal que $f(A) = V$ para alguna A en las matrices de nxn con coeficientes en F; y bueno aplicándole ya la función, el homomorfismo tenemos que $A^T - A = V$ para alguna A en el parentésis. Y bueno después de hacer los, la igualación la matriz V es, son de entradas v y j y la matriz A de entradas a y j, entonces vamos a obtener que las entradas, mm… perdón, la matriz V va tener entradas v y j igual a $a_{ji} - a_{ij}$, y las entradas $v_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij})$ o sea que es la inversa de las que mencionamos anteriormente, y para las entradas $v_{ii} = 0$ o sea la diagonal es cero, por lo que la imagen de f van a ser las matrices V tal que $V^T = -V$ o sea las matrices antisimétricas.

Y luego nos dice pruebe que la imagen es un subgrupo de las matrices $M_{nxn}(F)$. Bueno sabemos por teorema que la imagen de un homomorfismo eh, es, es subgrupo del grupo de llegada, pero pues igual, hice la demostración usando el teorema en el que hay que probar que la imagen de f, bueno que lo que se quiere demostrar que es distitnto del vacio en este caso la imagen de f que es distitno del vacio y otra cosa que hay que probar es que para todo, bueno ya en este caso particular $\forall\ a, b \in imagen(f)$ se cumple que a operado, bueno ah, aquí la operación tome la suma $a + (-b)$ pertenecen a la $imagen(f)$ entonces para demostrar que la $imag(f) \neq \emptyset$ tomamos el neutro aditivo en $M_{nxn}(F)$ que es la matriz cero en $M_{nxn}(F)$, y sabemos que la matriz cero en $M_{nxn}(F) = 0$ es igual a su traspuesta igual a su inversa aditiva por lo tanto la matriz cero en $M_{nxn}(F)$ pertenece a la $imagen(f)$, y por lo tanto la $imagen(f)$ es distitna del vacío. Ahora tomamos dos matrices A, B en la $imagen(f)$ entonces para éstas dos se cumple que $A^T = -A$ y $B^T = -B$, mm… bueno esto porque pertenecen a la imagen, y para demostrar que $A + (-B)$ pertenecen a la $imagen(f)$, es decir, para demostrar que la $A^T + (-B) = A^{-1} + (-B)$.

Bueno partiendo de primero, de la primera igualdad que se… del lado izquierdo perdón, de la igualdad que deseamos probar tenemos que $A^T + (-B) = A^T + (-B^T)$, y bueno esta es una propiedad de transpuesta. Y luego tenemos por hipotésis que $A^T = -A$, así que tenemos, es, esto es igual a $-A$ más, como también tenemos $-B$ aquí, pues es B^T, y la transpuesta de esto o sea, $(B^T)^T$. Y luego tenemos este es una propiedad que $(B^T)^T = B$, así que vamos a tener que es igual a $-A+B$, y por propiedad del escalar menos uno tenemos que esto es igual a $-1(A+B)$, y luego también por, usamos la propiedad distributiva en la matrices de, de nxn y vamos a tener el escalar $-1(A-B)$, yo volvemos aplicar la propiedad del escalar menos uno, y vamos a tener que es igual a $-A-B$, que es lo que queríamos probar, la igualdad que queríamos probar, pues esta es la inversa de $A+(-B)$, por lo tanto $A+(-B) \in imagen(f)$, y por lo tanto es subgrupo por el teorema que aplicamos, y luego dice ¿es siempre la imagen un subgrupo? pues sabemos por teorema que mencione anteiormente que la imagen de un homomorfismo es subgrupo entonces siempre que tengamos una aplicación o una transformación que sea homomorfismo podemos afirmar que la imagen entre esa aplicación es un subgrupo y luego nos dice, ¿es el homomorfismo sobreyectivo? Y no pues también tenemos un teorema ehh, que nos dice que si la imagen es todo el conjunto de llegada entonces el homomorfismo es sobreyectivo, pero pues en este caso nuestro conjunto de llegada son todas las matrices $M_{nxx}(F)$, y la $imagen(f)$ son las matrices antisimétricas por lo que pues al no ser todas las matrices f no se sobreyectivo.

Situación 5

Y luego la situación cinco tenemos una aplicación $h,$ que $h: M_{2x2} \rightarrow \mathbb{R}$, y está definida como $h: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2,$ y nos pide determinar la imagen de h. Mmm… bueno la imagen de h van a ser los $x \in \mathbb{R}$ tal que $h: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x$ para algúna matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en las matrices de $2x2$, y bueno aplicando la función a esa matriz, obtenemos que $a^2 = x$ y $a \in \mathbb{R}$, o sea que, $a = \sqrt{x}$, y bueno de ahí con concluí que la imagen eran los reales positivos junto con el cero, porque por ejemplo si tomamos cualquier elemento negativo no vamos a encontrar una matriz con entrada a_{11} que elevando al cuadrado esa entrada a_{11} obtengamos ese número negativo, y pues el cero si lo podemos, o sea todas las matrices que tengan entrada $a_{11} = 0$ eh, pues van a dar cero, por eso son lo reales positivos con el cero.

Dice ¿es la imagen subgrupo de $\mathbb{R}$? eehh pues aquí, ahhh, el, el cero pues si pertenece a la imagen como mencione ahorita que eran todas las matrices con entradas $a_{11} = 0$, pero para el segundo inciso tomamos dos elementos en la imagen, es decir, un x e y en los reales positivos unido con el cero, y se tiene que demostrar que x operado con el inverso de y pertenece a la imagen, o sea que $x+(-y)$ pertenecen a los reales positivos unidos con el cero, pero para empezar pues $-y$ no pertenece a los reales positivos con el cero entonces no tiene sentido operar estos elementos porque como quien dice es un cerradura, pero para demostrar cerradura tenemos que tomar dos elementos del mismo conjutnto, $-y$ no está ahí por lo que $\mathbb{R} \cup \{0\}$ no es subgrupo de $\mathbb{R}$, y bueno aquí si tuve mucha confusión porque ehhh, yo recordaba, ya lo mencione varias veces que la imagen de pero de un homomorfismo es subgrupo del grupo de llegada, y entonces si tuve mucho conflicto en esto porque, jajaja, pues no me salía que era subgrupo entonces ya después recorde y me puse a lee… a leer ese teorema que lo puse anteriormente, que puse, bueno en una pregunta de las anteriores, así que pensé que tal vez la aplicación h no era un homomorfismo y efectivamente esa aplicación no es un homomorfismo por lo que entonces no se garantiza que la imagen sea subgrupo de $\mathbb{R}$, bueno ahí este hice la demostración de que no era homomorfismo.

Y en el inciso b) tenemos la aplicación $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y está definida como $f\big(p(x)\big) = p(0) + 1$, y nos pide determinar la imagen de f. Bueno la imagen van a ser los y en $\mathbb{R}$ tal que $f(p(x)) = y$ para algún $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$, por lo que al aplicarle la función tenemos que es un polinomio, es $p(0)$ perdón, es $p(0) + 1 = y$, bueno y ahhh, $p(x)$ es de la forma $ax^2 + bx + c$ tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $p(0) = c$. Entonces la imagen son los $y \in \mathbb{R}$, tal que $c + 1 = y$, y $c \in \mathbb{R}$, o sea que $c = 1 - y$, entonces como no tenemos niguna restricción concluimos que la $imagen(f)$ es todo $\mathbb{R}$, porque siempre vamos a encontrar un polinomio mmm…. $p()$ bueno para cualquier y que querramos vamos a encontrar un polinomio $p(x) = ax^2 + bx +$ aquí sustitui yo la c como $y - 1$ tal que al aplicarle la, al apllicarle la función o transformación h tenemos y. Entonces, entonces eehhh, pues de ahí concluí que la imagen es todo $\mathbb{R}$.

¿Y luego nos pregunta es la imagen un subgrupo de $\mathbb{R}$? Y sí, pues al ser la imagen todo $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es subgrupo de sí mismo, y eso fue todo.