UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE
MATEMÁTICAS

DESARROLLO COGNITIVO DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONCEPTO DE IMAGEN DE UNA FUNCIÓN EN UNA VARIABLE REAL

Tesis que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa

con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Yadira Airaly Guevara Martínez

Directora de tesis:

Dra. Ofelia Montelongo Aguilar

Zacatecas, Zacatecas Octubre del 2020

Agradezco al Consejo Nacional de
Ciencia y Tecnología (CONACYT) por
el valioso apoyo económico
proporcionado para mi formación
académica durante la realización
de mis estudios de maestría.
Becario No. 920450

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre **"Desarrollo Cognitivo del Estudiante sobre el Concepto de Imagen de una Función en una Variable Real"** y que fue realizado bajo mi asesoría por la **C. Yadira Airaly Guevara Martínez** alumna de la **Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior**; cumple con los requisitos de calidad académica para ser sometido a su revisión. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 09 de Septiembre de 2020

Ofelia Montelongo A.

Dra. Ofelia Montelongo Aguilar

Asesora de Tesis

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 9 del mes de septiembre del año 2020, la que suscribe, Yadira Airaly Guevara Martínez, egresada del Programa de Maestría en Matemática Educativa con número de matrícula matrícula 33146725, manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado ***"DESARROLLO COGNITIVO DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONCEPTO DE IMAGEN DE UNA FUNCIÓN EN UNA VARIABLE REAL"*** bajo la dirección de la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Yadira Airaly Guevara Martínez

Agradecimientos

Personalmente primero quiero agradecerte a ti Mami que siempre has estado ahí al pie del cañón, ayudándome y apoyándome en cada decisión que he tomado, tanto personal, como académica, este título es tuyo, pues de no ser por ti no estaría donde estoy ahora, ¡MUCHAS GRACIAS POR TANTO! Aunque trabajara mil años no podría jamás pagarte todo lo que has hecho por mi, pues se que siempre ha sido con la intención de que me vaya muy bien en la vida, muchas gracias por eso y por tantas veces que me llevaste a la escuela tan temprano ☺ .

Muchas gracias Papi por siempre darme tu apoyo y enseñarme tantas cosas, en especial de matemáticas, pues parte de mi admiración hacia ti fue lo que me convenció de estudiar esta carrera. Gracias por compartir conmigo siempre tus conocimientos y enseñarme que con el estudio uno siempre sale adelante. Gracias por siempre dar lo mejor de ti para que mis hermanas y yo estudiemos. ¡GRACIAS POR TUS CONSEJOS Y BUENOS DESEOS!

Muchas gracias a los dos por darme la oportunidad de educarme y por siempre estar ahí, LOS AMO MUCHO.

Muchas gracias Aranzita, pues simplemente el hecho de que seas mi hermana es de agradecerse, eres una persona tan bonita que la que te tiene que agradecer soy yo. Siempre me brindas tu apoyo, tu ayuda y siempre me escuchas, nunca ofendes a nadie y eres muy lista, ¡¡TE ADMIRO Y TE QUIERO DEMASIADO!!, gracias por siempre apoyarme y poner el ejemplo de lo que verdaderamente es estudiar.

Muchas gracias mi Winnie, pues aunque tenemos diferencia en edad siempre estas ahí para hacernos reír, pero en especial para apoyarnos. Siempre que puedes brindas tu ayuda y eso siempre te lo agradezco. Gracias por hacer tan agradable mi tiempo de estudio y por supuesto por ayudarme tanto ¡¡TE QUIERO MUCHO WENDY!!

Muchas gracias mi Mariquita, pues ¡¡NO PUDE HABER PEDIDO UNA MEJOR ABUELITA!!, muchas gracias por todas las veces que ha pedido por mi, desde que entré a la licenciatura siempre ha rezado y pedido porque me vaya bien, así que este título también ¡es suyo!. Muchas gracias por siempre animarme y decirme que yo puedo con todo lo que me proponga hacer. ¡LA QUIERO MUCHÍSIMO!

También me gustaría agradecer a mi tía lore y a mi tía meche, que siempre me seguían animando para que terminara de estudiar y a veces hasta iban por mi a la escuela, ¡MUCHAS GRACIAS!

A todos mis primitos Benny, Nallely, Juliana, Oscar, Michel, Jehimy y Yazminsita, porque cuando sentía que ya no podía más ustedes siempre me animaron a seguir, ¡¡gracias a todos yo LOS QUIERO MUCHO!!

Académicamente quiero agradecerle mucho a mi asesora, la maestra Ofe, primero que nada por haberme escogido para que trabajáramos juntas, y también por todas las veces que

resolvió mis dudas, pues no importara que fuera muy tarde o fuera fin de semana, siempre me ayudaba y eso se lo agradezco muchísimo, pues maestras como usted quedan muy pocas, la admiro y respeto demasiado y por supuesto le tengo mucho cariño maestra, gracias por guiarme y ayudarme tanto durante todo este tiempo.

También quiero agradecerle a cada uno de mis maestros y maestras de la maestría, pues siempre aportaron sus conocimientos de manera muy agradable y admirable. A su vez quiero agradecerle a todos y cada uno de mis compañeros de generación, pues siempre hicieron que las clases fueran muy agradables y llenas de risas.

Agradecer también a mis revisores y sinodales por apoyarme con sus observaciones que siempre fueron bienvenidas.

Por último, pero no menos importante, agradecerte a ti mi compañero y hermano de APOE, gracias por siempre estar ahí para ayudarme, para apoyarme y gracias por hacerme reír tanto. Gracias por haber entrado a la maestría y permitirme trabajar contigo, pues ¡no pudo haber sido mejor! ☺.

Resumen

A pesar de que el concepto de función es central en la Matemática y ha sido estudiado ampliamente dentro de la Matemática Educativa, no se ha hecho énfasis en el concepto de imagen de una función, siendo este importante al ser un concepto transversal dentro de la matemática y su enseñanza. Se ha reportado en diversas investigaciones que la comprensión de la imagen de una función representa dificultades para los estudiantes, pues no se deriva de la mera definición formal de función, como es tratada en los libros de Cálculo. El objetivo de esta investigación es estudiar el desarrollo cognitivo que muestran los estudiantes al aprender dicho concepto, para lo cual se hizo uso del marco teórico-metodológico APOE. Diseñamos una descomposición genética sobre el concepto de imagen de una función en una variable real que describe cómo los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas construyen este concepto, la cual fue validada de acuerdo a lo que indicaron los datos experimentales obtenidos de la aplicación de dos instrumentos, un cuestionario diagnóstico para determinar los conocimientos previos con los que cuenta el estudiante y otro cuestionario acompañado de audios grabados por los estudiantes, que mostraron las estructuras mentales que presentan los estudiantes al tratar de comprender el concepto de imagen de una función en una variable. A partir de los datos obtenidos se presenta como resultado una caracterización de las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de la imagen de una función en una variable real, lo anterior se espera sirva para dar cuenta de una posible manera sobre cómo un estudiante puede construir cognitivamente dicho concepto matemático.

Palabras claves: Imagen de una función, función, construcción cognitiva, teoría APOE, descomposición genética.

Abstract

Despite the fact that the concept of function is central in Mathematics and has been studied extensively within Educational Mathematics, the concept of the image set of a function has not been emphasized, being important as it is a transversal concept within mathematics and its teaching. It has been reported in several research that the understanding of the image set of a function is difficult for students to understand because it does not derive from the formal definition of function, as it is discussed in the Calculus books. The objective of this research is to study the student's cognitive development when learning this concept, for which we will make use of the APOE theoretical-methodological framework. We will design a genetic decomposition on the concept image set of a function of one real variable that will describe how the students of Bachelor of Mathematics construct this concept. The genetic decomposition will be validated or refined as indicated by the experimental data that will be obtained from the application of two instruments, a diagnostic questionnaire to determine the previous knowledge of students and another questionnaire accompanied by audios recorded by the students, which showed the mental structures that the students present when trying to understand the concept of the image set of a function in a variable. As a result of the controlled data, a characterization of the mental structures and mechanisms for the construction of the image of a function in a real variable is presented. The foregoing is expected to serve as a possible account of how a student can cognitively construct this mathematical concept.

Key words: Image of a function, function, cognitive construction, APOS theory, genetic decomposition.

Índice General

Índice de Figuras

Introducción

En el proceso de aprender conceptos matemáticos los estudiantes pueden enfrentarse a diversas dificultades, debidas a distintos factores. En esta investigación nos enfocamos en cómo un estudiante comprende un concepto visto desde la teoría APOE, esto a través de las dificultades que muestren al momento de resolver determinadas situaciones matemáticas.

Nos centramos en Cálculo porque los estudiantes presentan dificultades en la adquisición de conceptos de esta materia (García, 2013), enfocándonos en el tema de funciones, pero en particular en la imagen de una función.

Consideramos que el aprendizaje de los conceptos en Cálculo es muy importante y la correcta construcción de cada uno de estos permitirá que el estudiante comprenda de manera adecuada esta materia tan importante dentro de las matemáticas. Por esta razón, el interés de esta investigación es proponer un modelo cognitivo donde se describan las posibles construcciones mentales que pueden realizar los estudiantes para la comprensión del concepto matemático de imagen de una función. Para que después este modelo sea utilizado para el diseño de una instrucción que permita a los estudiantes tener una mejor comprensión del concepto, aunque es necesario aclarar que dicho diseño de instrucción no forma parte de la investigación.

Nos centramos en el estudio de dicho concepto porque es una componente importante dentro de la comprensión del concepto de función, además, porque le permitirá al estudiante construir conceptos posteriores que también son importantes, como por ejemplo la inversa de una función.

A continuación, se describen los seis capítulos en los que se divide nuestro trabajo de investigación:

Capítulo I. “Antecedentes”. En este capítulo se presenta un panorama general de algunas investigaciones en torno al tema de imagen de una función.

Capítulo II. “Planteamiento del problema de investigación”. En este capítulo se presenta la problemática que nos permite determinar el problema y a partir de aquí desarrollar una pregunta de investigación sobre la que trabajamos a lo largo del trabajo de investigación. Además, se presentan los objetivos a cumplir en la investigación.

Capítulo III. “Marco teórico”. En este capítulo se presenta la teoría APOE, teoría en la que se basa nuestra investigación, resaltando la postura que tiene sobre el aprendizaje y los constructos teóricos.

Capítulo IV. “Metodología: Ciclo de investigación de APOE”. En este capítulo se presenta el ciclo metodológico de la teoría y en qué consiste cada una de las fases que lo componen.

Capítulo V. “Desarrollo del ciclo de investigación”. En este capítulo se presenta el desarrollo y los resultados que se obtienen en cada fase del ciclo metodológico para el tópico en estudio.

Capítulo VI. “Conclusiones”. En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas de la investigación, así como las conclusiones generales, las líneas de investigación que se desprenden de este trabajo y una reflexión.

Motivación

Mi interés en esta investigación surge a partir de mi experiencia como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, pues dentro de cada carreras se establecen ciertos estatutos y en lo que concierne a ser estudiante de una licenciatura en matemáticas trae consigo ciertos prototipos sobre qué conocimiento debes tener como estudiante, pues se supone que por estar estudiando esta carrera cuentas con los conocimientos básicos de matemáticas con los que podrás construir nuevo y más complejo conocimiento. Tal vez este aspecto influye en la manera en cómo los profesores pueden llegar a impartir las clases y en los aspectos curriculares que toman en cuenta de lo que enseñan.

Al comenzar mis clases en esta licenciatura, una de las maestras nos dijo que lo que veríamos durante toda la carrera serían funciones, en ese momento no consideré que fuera así, pues al principio no era algo muy evidente o al menos en el nivel preparatoria nunca me habían hecho ver las matemáticas de esta manera. Conforme avancé en la carrera y después de llevar cuatro materias de Cálculo, en una clase de Análisis Real el profesor nos pidió sacar el rango de ciertas funciones, y para la mayoría de mis compañeros, incluyéndome a mí, nos causó dificultad y eso fue algo que nos sorprendió, pues se suponía que ese era un concepto que en esa materia y en ese grado que estábamos cursando debería de estar completamente comprendido.

A partir de ahí, fue cuando comencé a notar que tal vez no habíamos hecho énfasis en aprender aspectos de la función como el dominio o rango, y que estos se deben saber, pero en realidad no siempre es así, incluso pudiera ser que los profesores no toman en cuenta estos aspectos por ser conceptos básicos para entrar a la carrera.

A su vez, conforme avanzaba en las materias observé que en realidad fue cierto lo que nos dijo la docente, pues pude notar que las funciones sí están presentes en casi todas las matemáticas, unas con más o menos nivel de dificultad. También pude observar que de hecho el dominio y en particular la imagen de una función juega un papel muy importante; por ejemplo, en las clases de Cálculo cuando se nos pedía calcular la inversa de una función o en las clases de Álgebra Lineal, cuando nos pedían calcular la imagen de un homomorfismo, era muy importante tener bien comprendido el concepto de imagen de una función en una variable.

Fue así como me pude percatar que, así como las funciones son importantes de comprender, su imagen también lo es, pues comprendiendo este concepto podremos comprender otros más complejos.

Considero que el hecho de investigar de dónde y cómo se generan las dificultades en los estudiantes en cuanto a la comprensión de la imagen de una función me permitirá proponer una manera de enseñar este concepto tomando en cuenta investigaciones realizadas hasta este momento. Ésta sería mi mayor motivación, pues el hecho de querer ser maestra de matemáticas implica compromiso con los estudiantes y considero que si todos los maestros se dieran a la tarea de indagar sobre las dificultades de sus estudiantes podrían proponer estrategias para así mejorar su práctica, pero estas estrategias deben estar sustentadas en un análisis cognitivo que será mi objetivo principal.

Capítulo I. Antecedentes

En este capítulo se presentan resultados de algunas investigaciones dentro de la Matemática Educativa relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la imagen de una función, estas están clasificadas de la siguiente manera:

- Investigaciones de conceptos relacionados con la imagen de una función bajo la teoría APOE.
- Investigaciones de conceptos relacionados con la imagen de una función bajo diferentes perspectivas teóricas.

La razón para dividirlo de esta manera es porque interesa saber si dentro de la teoría ya se ha trabajado este tema y por otro lado ver qué se ha estudiado en otras teorías respecto a esto, enfocándonos en las dificultades que se presentan. Así mismo, se menciona que son investigaciones relacionadas con el concepto de imagen de una función porque estas investigaciones hablan sobre el rango o este aparece como un requisito. A continuación, presentamos los puntos más relevantes en torno a las investigaciones.

1.1 Investigaciones de conceptos relacionados con la imagen de una función bajo la teoría APOE.

Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) realizaron una investigación con la intención de ir a través de la observación y clasificación de las dificultades con las funciones interpretándolas en términos de la teoría APOE. Usaron esta interpretación para diseñar un tratamiento instruccional, y a partir de ahí, ver de qué manera ayudó éste para que los estudiantes desarrollaran su concepción proceso del concepto de función. Se utilizó el Ciclo de enseñanza ACE de la misma teoría APOE, siguiendo como metodología el ciclo de investigación de la teoría APOE.

Los estudiantes por los que se preocuparon en este artículo fueron en su mayoría maestros en pre-servicio que ya habían tomado la clase de cálculo. Primero les preguntaron al principio del semestre qué es una función y les pidieron dar ejemplos de funciones. La investigación clasificó las distintas respuestas de los estudiantes en 4 categorías: pre-función, acción, proceso y desconocido.

Una respuesta pre-función es cuando parece que los alumnos no tienen mucho conocimiento del concepto de función; se categorizó como acciones a las respuestas que enfatizaron el acto de sustituir números por variables y calcularla para obtener un número, pero no se refieren a ningún proceso en general de comenzar con un valor (numérico o de otro tipo) y hacer algo que resulte en un valor. Cualquier respuesta en la que faltara la mención explícita de los objetos iniciales o resultantes fue categorizada como una concepción de acción.

En las respuestas categorizadas como proceso, la entrada, la transformación y la salida estaban presentes, integradas y eran bastante generales. Hubo algunas respuestas en las que no fue posible decir si la concepción proceso estuvo presente y estas respuestas fueron enlistadas en la categoría de desconocido. Es importante mencionar que un número de respuestas sugirió una combinación de categorías.

Durante dos meses se les enseñó a los alumnos a utilizar ISETL (lenguaje de programación matemática que significa por sus siglas en inglés: International Society for Exploring Teaching and Learning). Después de este ambiente computacional se les volvió a pedir lo mismo, responder la pregunta qué es función y dar 3 diferentes tipos de función, se les dio una lista de descripción de situaciones donde había que decidir si la situación podía o no ser expresada como función y explicar. En el examen final no hubo mención en ninguna de las preguntas sobre el ISETL.

En general los resultados sugieren que hubo un avance por el tratamiento instruccional, pues los estudiantes estaban progresando en su desarrollo de una concepción objeto de función al menos para extender la comprensión de acciones y procesos que actúan en funciones y producen funciones como respuestas. También, después del ambiente computacional los estudiantes se familiarizaron con la sintaxis del ISETL para representar funciones y esta experiencia tuvo un efecto positivo en su pensamiento.

En el trabajo de Martínez-Planell & Trigueros (2009) se analizó la comprensión de los estudiantes sobre las funciones multivariables enfocándose en el reconocimiento del dominio y rango de funciones dadas en diferentes registros de representación utilizando un marco conceptual que considera la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas.

La teoría APOE en este caso se utilizó para modelar el desarrollo del concepto de funciones de dos variables mediante el diseño de una descomposición genética preliminar y la teoría de representaciones semióticas provee las herramientas conceptuales para analizar la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y su rol en la evolución cognitiva de las ideas matemáticas bajo consideración.

En este mismo estudio, se diseñó un instrumento para conducir a entrevistas semi-estructuradas con estudiantes y probar su comprensión de los diferentes componentes de una descomposición genética propuesta en Trigueros & Martínez (2007) (como se citó en Martínez-Planell & Trigueros, 2009).

Dentro de los resultados obtenidos, los estudiantes no fueron capaces de restringir el dominio en subespacios específicos y no podían entender el significado de las restricciones, lo cual dificultaba encontrar el rango. También se observó que todos los estudiantes que no podían obtener ni el dominio ni el rango de una función dada en su representación gráfica también tenían dificultades cuando se les pedía que los encontraran para funciones dadas en representaciones tabulares o algebraicas. Esto nos puede servir como elemento a tomar en cuenta cuando se realice el instrumento que nos permita observar las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante construye cuando resuelve un problema donde hay que obtener la imagen de una función.

Con respecto al rango de la función, la mayoría de las respuestas de los estudiantes mostraron que sus dificultades estaban relacionadas principalmente con la falta de interiorización de las acciones necesarias para encontrar los valores de la función. Algunos estudiantes mostraron que su idea de rango de una función no estaba claramente diferenciada de la de gráfica de una función.

Continuando con los resultados de este estudio, se encontraron estudiantes que mostraron una buena comprensión del dominio y el rango de funciones de dos variables, pero cuya definición general de función no les permitió considerar las funciones definidas en conjuntos arbitrarios y la singularidad de la imagen. La definición de funciones de dos variables de otros estudiantes mostró algunos aspectos que podrían estar relacionados con la interiorización de este concepto, pero demostró una incomprensión del dominio y el rango de funciones específicas en diferentes representaciones.

Otro artículo en donde también se hace evidente la necesidad de tener bien comprendido el concepto de imagen de una función es el de Martínez-Planell & Cruz (2016) en donde su interés fue observar la comprensión de los estudiantes de la trigonometría del círculo unitario. Esta elección hace surgir la interacción sutil entre el pensamiento geométrico y analítico involucrado en la construcción mental de las funciones seno y coseno, que es un punto potencial de problemas para algunos estudiantes.

Esta opción también permitió discutir lo que normalmente se considera que causa dificultad para los estudiantes: invertir las funciones sinusoidales mediante la inversión del proceso del círculo unitario que lleva a su definición. Si bien los estudiantes pueden realizar muchas de las tareas relacionadas con la trigonometría que comúnmente se les solicitan al confiar en la tecnología y la memorización, la trigonometría del círculo unitario es un principio organizativo necesario para una comprensión más profunda.

La teoría APOE se usa en Martínez-Planell & Cruz (2016) para describir el nivel de desarrollo cognitivo demostrado por un grupo de estudiantes que completaron un curso tradicional de trigonometría de lectura/recitación. La población objetivo consistió de estudiantes de ciencias e ingeniería de una universidad pública en Puerto Rico que tomaban un primer curso universitario de trigonometría en preparación para sus estudios futuros.

Todos los procesos que involucraron revertir la definición de seno y coseno causaron dificultades a los estudiantes, y se mencionó que el proceso de Rango, crucial en la construcción mental de las funciones trigonométricas inversas, resultó ser el proceso que causa la mayor frecuencia de dificultad observada por los estudiantes entre todos los procesos descritos en la descomposición genética. Una concepción del proceso del rango requiere atención explícita y no se derivará de la mera declaración de una definición formal.

Los resultados enfatizan la importancia de ayudar a los estudiantes a construir un proceso de Rango para las funciones trigonométricas inversas, relacionando el círculo unitario y los argumentos gráficos, de por qué las funciones seno y coseno están restringidas de la forma en que están definiendo funciones trigonométricas inversas. Al no tener este proceso, los estudiantes se quedarían con un hecho memorizado, de ahí una concepción de acción de Rango, lo que dificultaría recordar y utilizar el rango de una función trigonométrica inversa en situaciones problemáticas.

Otra de las investigaciones es el trabajo de Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) quienes realizaron un estudio basado en la teoría APOE con el fin de examinar el entendimiento de los estudiantes para profesores en pre-servicio que llevaban un curso de Análisis Real en una Universidad de Sudáfrica de los conceptos de funciones inyectivas y sobreyectivas.

La metodología que utilizaron las autoras para esta investigación fue el ciclo de investigación modificado de la teoría APOE. Se diseñó una descomposición genética preliminar de función inyectiva y sobreyectiva; los instrumentos de recogida de datos fueron un cuestionario que se aplicó a 54 profesores en pre-servicio seguido de entrevistas semiestructuradas que se realizaron a solo 5 estudiantes, los cuales fueron seleccionados con base en la necesidad de confirmar inferencias tentativas hechas del análisis de las respuestas escritas.

Los resultados que se obtuvieron en dicho trabajo emergieron del análisis de las respuestas de los estudiantes a las 4 preguntas que contenía el cuestionario, y se obtuvieron varias conclusiones, por ejemplo, hay tres errores que fueron muy comunes, 37 estudiantes consideraron que si la función no era uno a uno entonces era sobreyectiva, es decir, lo generalizaron como si fuera una regla. Otro error fue que existe inhabilidad para distinguir entre un conjunto y los elementos de un conjunto, confundir conjuntos (dominio y rango) con los elementos del conjunto y por último la tendencia de los estudiantes a considerar un elemento a la vez para decidir si una función es inyectiva o sobreyectiva, con lo cual las autoras consideraron que estos estudiantes muestran solo una concepción acción de función inyectiva y sobreyectiva.

Varios estudiantes mostraron dificultades en interpretar si una función era inyectiva porque no fueron capaces de determinar si todos los elementos del rango habían sido mapeados por solo un elemento del dominio, esta dificultad fue manifestada en la negación de la definición de inyectividad.

Además, mostraron que la construcción de inyectividad como un proceso necesita reflexión en las acciones realizadas a elementos específicos en el rango de una función, también se ilustró la importancia de un esquema adecuado para la teoría de conjuntos, sin el cual la representación del dominio y el codominio (un importante componente del entendimiento de funciones), puede ser inaccesible. Es decir, el concepto de imagen de una función se presenta como un elemento clave para la comprensión de este tema.

Podemos entonces decir que las dificultades con el concepto son variadas y que realmente es necesaria su comprensión para temas posteriores como lo es la inversa de una función o generalización de funciones. Lo más relevante de esto son las dificultades que presentan los estudiantes (analizadas bajo la teoría APOE) como lo es en qué registro de representación se presenta el problema a obtener el rango, que no se tiene una concepción clara del concepto, que hay dificultades con el uso de cuantificadores, que la definición como tal causa dificultad y la falta de distinción entre un conjunto y los elementos de este. Todos estos elementos me sirven para tomarlos en cuenta al momento de realizar la descomposición genética preliminar.

1.2 Investigaciones de los conceptos relacionados con la imagen de una función bajo diferentes perspectivas teóricas

Tall & Bakar (1992) realizaron una investigación en la cual estudiaron el concepto de función desarrollado por estudiantes de matemáticas. Los autores afirman que, aunque podemos enseñar a los alumnos sobre conceptos generales como el dominio en el que se define la función y el rango de valores posibles, estos términos no parecen quedarse en sus memorias. Su hipótesis es que los estudiantes desarrollan "ejemplos prototipos" del concepto de función en su mente, tales como: una función es y = x^2, o un polinomio, o $1/x$, o una función sinusoidal y cuando se les pregunta si una gráfica es una función, en ausencia de una definición operativa de una función, la mente intenta responder razonando con estos prototipos mentales.

Se pidió a un grupo de 28 estudiantes de entre 16 y 17 años que explicaran qué creen que es una función y si podían dar una definición de ésta, darla. Habían estudiado la noción de una función como parte de su curso preparándose para más de 16 exámenes durante un año antes y desde entonces habían usado funciones en el cálculo, pero sin ningún énfasis en los aspectos técnicos del dominio, rango, etc.

Ni una sola respuesta de las obtenidas menciona que el proceso solo puede aplicarse a un determinado dominio de entradas, o que toma un rango de valores, a pesar del hecho de que estas definiciones se les habían dado antes en sus estudios.

Luego se les dio 9 gráficas y se les preguntó cuáles representan una función, y en caso de que no fueran explicar por qué no lo son. Una y otra vez, los estudiantes respondieron que una gráfica no puede representar una función porque parece demasiado irregular o porque no pueden pensar en una fórmula para representarla.

Por lo tanto, incluso entre los estudiantes más capaces, la gran mayoría no tiene un concepto coherente de función al final de sus estudios. La enseñanza del concepto a través de ejemplos, como en el currículo actual, conduce a prototipos mentales que dan impresiones erróneas de la idea general de una función.

Otra investigación en la que se analiza el concepto de función bajo otra perspectiva es la que realizó Guzmán (1998) quien hace referencia al enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y cómo es que éstas inciden en el aprendizaje de algunas propiedades de las funciones.

Se aplicó un cuestionario a 75 estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial de primer año de universidad (de 18 a 19 años) el cual consistió de cuatro preguntas. Las preguntas son conceptuales, se refieren a función continua, función biyectiva, restricciones; son relativamente sencillas, no las más habituales en los cursos, pero responden al propósito del estudio: constatar la presencia de los registros mencionados en las respuestas de los estudiantes. El análisis se hizo por pregunta y en términos de los registros involucrados.

Dentro de este cuestionario la pregunta cuatro fue la que involucró el concepto de imagen, pues se requiere definir una restricción de modo que la función pueda cumplir la biyectividad, y para esto el estudiante necesita tener bien claro los conceptos de dominio y rango. La pregunta consistió en que dada una función real $f(x) =|x -1|$, se definiera una restricción (g) de modo que ahora g sea una función biyectiva.

Esta pregunta fue planteada en el registro algebraico, y según lo reportado por Guzmán (1998) resultó ser la más difícil para los estudiantes. Sólo hubo 14 respuestas aceptables y 25 entre incompletas y erróneas. Las principales dificultades constatadas estuvieron en definir los conjuntos de partida y llegada de la función g, que se pedía fuera restricción de f ; la traducción de la función dada $f(x)=|x-1|$; las dificultades de tipo conceptual que tienen que ver con el concepto mismo de función, de valor absoluto y de restricción de una función. Parece ser que existe incomprensión conceptual sobre la imagen de una función, pues los estudiantes no pueden resolver problemas que involucran este concepto.

Por otra parte, Dorko & Weber (2014) realizaron una investigación que se enfocó en analizar cómo piensan los estudiantes sobre el dominio y rango en el cálculo multivariable, en particular en dos y tres dimensiones y cómo generalizan su significado sobre dominio y rango de funciones de una a múltiples variables.

Utilizaron el dominio y el rango como un "estudio de caso" de cómo los estudiantes generalizan el significado de un concepto aprendido con funciones de una sola variable al significado del concepto para funciones multivariables. Mientras que el dominio y el rango aparecen en la instrucción inicial sobre las funciones, reciben poca o ninguna atención en el cálculo multivariable.

El marco analítico correspondiente que utilizaron para analizar cómo los estudiantes generalizan sus significados para el dominio y el rango fue la taxonomía de generalizaciones de Ellis (2007) (como se citó en Dorko & Weber, 2014). Esta taxonomía distingue entre acciones generalizadoras, que son "actos mentales de los aprendices como inferidos a través de la actividad y conversación de la persona" (Ellis, 2007, p. 233) y generalizaciones de reflexión, o declaraciones públicas sobre una propiedad o patrón común a dos situaciones. Las acciones de generalización incluyen relacionar, buscar y extender mientras que las generalizaciones de reflexión incluyen identificaciones y declaraciones, definiciones e influencia.

El método para la recolección de datos fue la aplicación de entrevistas semiestructuradas que duraron aproximadamente una hora a 18 estudiantes (voluntarios) que estaban inscritos en Cálculo multivariable en una universidad mediana en el noroeste de los Estados Unidos, grabaron el audio y el trabajo escrito de cada una de las entrevistas con un LiveScribe Echo Pen, que proporciona una grabación que consiste en audio sincronizado y trabajo escrito.

El análisis de resultados se hizo mediante una triangulación de datos donde los dos investigadores analizaron por separado lo obtenido, luego se pusieron de acuerdo y obtuvieron una tabla que contenía códigos y criterios para el significado de dominio y rango.

Se hicieron dos análisis, el primero fue sobre los significados de dominio y rango para los estudiantes, se les hicieron 3 preguntas, la primera ¿qué significa dominio y rango? y las otras dos se les pidió que calcularan el dominio y rango de una función de una sola variable y luego de una función de dos variables.

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en tres categorías:

(1) El dominio y el rango están asociados con símbolos de variables específicas en una ecuación; (2) El dominio y el rango son entradas y salidas; y (3) El dominio y el rango se relacionan con variables independientes y dependientes.

Se menciona que los estudiantes tienden a tener los mismos significados a través de los contextos, es decir, si consideran el dominio y rango como entradas y salidas para funciones de una sola variable, así la consideraran para funciones multivariables.

Uno de los significados que los estudiantes tenían para dominio y rango era que el dominio significaba los valores posibles para x y rango significaba los valores posibles para y. Para estos estudiantes, no hubo una explicación subyacente de x e y como entradas, salidas o variables independientes / dependientes. Determinaron la falta de significado subyacente al hacer preguntas de seguimiento tales como "¿por qué el dominio es siempre x?" y los estudiantes en la perspectiva variable no ofrecieron ninguna explicación más allá de "así es como lo aprendí" o "porque simplemente es".

La evidencia más sólida de que algunos estudiantes piensan que el dominio y el rango están relacionados con símbolos específicos es que muchos estudiantes dijeron que el dominio era x y que el rango era y para $f(x, y)$.

Varios estudiantes pensaron que el dominio y el rango están relacionados con la noción de función como una máquina que toma entradas y devuelve salidas. Para los estudiantes que pensaron en la función como una relación en la que el valor de una variable depende del valor de otra variable, dominio significaba los valores posibles de la variable independiente y el rango significaba los valores posibles de la variable dependiente.

En particular, los estudiantes que hablaron de independencia y dependencia parecían tener un mayor sentido del vínculo entre las dos variables, en contraste, los estudiantes que hablaron sobre una salida que "producía" salidas no parecían tener el mismo sentido del enlace entre la entrada y la salida; más bien, en algunos casos, parecían pensar en la función como una "máquina" mágica que produce una salida arbitraria para una entrada.

La mayoría de los significados de los estudiantes para el dominio y el rango de una función de variable única fueron los mismos que el significado para el dominio y el rango de una función multivariable.

El segundo análisis se hizo en términos de su marco teórico, la taxonomía de generalizaciones de Ellis (2007) (como se citó en Dorko & Weber, 2014) y éste fue para determinar cómo los estudiantes generalizan sus significados de dominio y rango cuando pasan de trabajar con función de una variable a una de dos variables.

De acuerdo con este marco se distingue entre acciones generalizadoras, que son "actividad de los estudiantes a medida que se generalizan" (Ellis, 2007, como se citó en Dorko & Weber, 2014), y generalizaciones de reflexión, que son "declaraciones finales de generalización (verbal o escrita) o el uso de un resultado de una generalización previa" (Ellis, 2007, como se citó en Dorko & Weber, 2014).

Los estudiantes que pensaron que el dominio era x y el rango era y, tanto en una sola función como en las funciones multivariables, parecían haber hecho una acción generalizadora basada en la presencia de las variables en las ecuaciones en lugar de un significado conceptual para el dominio y el rango.

Los autores de este artículo descubrieron que los estudiantes generalizan sus significados para el dominio y el rango al relacionar situaciones, relacionar objetos y extender sus significados más allá de los casos en que se originaron. Sin embargo, no se involucraron en todas las acciones de generalización o generalización de la reflexión que Ellis (2007) identificó.

Podemos decir que bajo otras perspectivas teóricas también se ha evidenciado que existen dificultades relacionadas con el concepto de imagen de una función, y realmente más allá del marco teórico que se utilicé, los alumnos presentan dificultades que son relevantes e incluso se presentan en maestros en pre-servicio, lo cual es preocupante y es necesario ocuparnos de ello tomando en cuenta lo que investigaciones como las citadas.

1.3 Reflexión de antecedentes

Las investigaciones que hemos analizado (Tall & Bakar, 1992; Guzmán, 1998; Dorko & Weber, 2014; Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Martínez-Planell & Trigueros, 2009; Martínez-Planell & Cruz, 2016; Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017) hacen referencia a las dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de función, y dentro de éstas se evidenció las dificultades que presentaron los estudiantes en torno al concepto de rango. Hasta la revisión de antecedentes que hemos realizado, no hemos encontrado alguna investigación en la Matemática Educativa donde se haya estudiado cómo atender a las dificultades que presentan los estudiantes con la imagen de una función.

Podemos decir que dichas dificultades se deben a la falta de énfasis en este concepto, pues, de manera general, cuando se aborda el concepto de función, los conceptos de dominio y rango pasan a segundo plano, y aunque son parte de la definición de función, no se les da la importancia que deberían tener; es decir, parece ser que no se presentan como si fueran algo importante o que son obvias para los estudiantes. Por esta razón, podemos decir que los estudiantes adquieren una definición imprecisa de este concepto, lo cual preocupa, ya que como mencionaron Guzmán (1998), Dorko & Weber (2014), Martínez-Planell & Trigueros (2009), Martínez-Planell & Cruz (2016) y Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) este concepto es requisito para resolver problemas de temas posteriores.

Capítulo II. Planteamiento del Problema de Investigación

2.1 Problemática

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ocupa un lugar importante dentro de la formación matemática de los estudiantes de ciencias y matemáticas, y como menciona García (2013) la sociedad no discute sobre la importancia y pertinencia del aprendizaje de las matemáticas.

A su vez, García (2013) menciona que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en general, y la del cálculo en particular, presentan una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario; entonces resulta vital que el docente que enseña cálculo reflexione sobre la problemática que sus estudiantes enfrentan. En investigaciones como la de Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) se hace evidente que los estudiantes tienen dificultad en el tema de funciones inversas, otras, sustentan el hecho de que en varios temas de esta materia hay dificultades (Dorko & Weber, 2014; Martínez-Planell & Trigueros, 2009; Martínez-Planell & Cruz, 2016; Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017). Es importante resaltar que, aunque no como tema central, sí aparece el tema de imagen como una de las nociones donde los estudiantes presentan dificultades. Por esto, en esta investigación nos centraremos en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, específicamente estudiaremos la imagen de una función en una variable real.

Es así como se realizó una revisión de lo que se ha estudiado sobre este concepto dentro de la Matemática Educativa. Con ello, se encontró que los estudiantes presentan distintas dificultades al momento de resolver problemas que involucran al concepto de imagen de una función ya sea de manera directa (como encontrar el rango de una función) o de manera indirecta (por ejemplo, al calcular la inversa de una función) (Tall & Bakar, 1992; Dorko & Weber, 2014; Martínez-Planell & Trigueros, 2009; Martínez-Planell & Cruz, 2016; Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017). Algunas dificultades encontradas son mencionadas a continuación.

Un aspecto que tiene que ver más con lo cognitivo es cuando se enseñan nuevos conceptos, pues como mencionan Tall & Bakar (1992) aunque se enseñe sobre conceptos generales como el dominio en el que se define la función y el rango de valores posibles, estos términos no parecen quedarse en las memorias de los estudiantes. Otra dificultad es la que mencionan Dorko & Weber (2014) respecto a la generalización de un concepto, pues el cómo los estudiantes generalizan un concepto aprendido con funciones de una variable al significado del concepto para funciones multivariables, dice mucho sobre la comprensión que el estudiante tiene de éste, y como mencionan los autores, mientras que el dominio y el rango aparecen en la instrucción inicial sobre las funciones, en cálculo multivariable reciben poca o ninguna atención, pues se considera que ya son conceptos bien comprendidos.

Otro tipo de dificultad es el registro de representación en el que se presenta el problema de obtención de la imagen de una función, pues como observaron Martínez-Planell & Trigueros (2009) en su investigación, todos los estudiantes que no podían obtener el dominio y el rango de una función cuando se daba en su representación gráfica, también tenían dificultades cuando se les pedía que los encontraran para funciones dadas en su representación tabular o algebraica.

Otra dificultad se presenta en el tema de las funciones inversas, pues en la investigación de Martínez-Planell & Cruz (2016) se hace énfasis en que la restricción que se necesita hacer para que la función inversa tenga sentido involucra la comprensión del dominio e imagen de una función, pues de esta manera, la restricción que se haga le dará sentido a las funciones para que se cumpla la propiedad de invertibilidad.

En esta misma investigación los autores definieron una estructura mental llamada "proceso rango", la cual se consideró crucial en la construcción mental de las funciones trigonométricas inversas y resultó ser el proceso que causó la mayor frecuencia de dificultad observada por los estudiantes (entre todos los procesos descritos en la descomposición genética), pues requería la coordinación de varias concepciones de procesos diferentes, en otras palabras, se mencionó que una concepción proceso de rango requiere atención explícita y no se derivará de la mera declaración de la definición formal de función.

Otra de las dificultades que presentan los estudiantes tiene que ver con la propia definición, pues Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) obtuvieron como resultados de su investigación que un error que presentaron los estudiantes en sus respuestas fue el hecho de confundir los conjuntos dominio y rango, a su vez, encontraron que los estudiantes presentan dificultad con la notación usada, más específicamente dificultades con el uso de cuantificadores. Otra dificultad es que los estudiantes asumen que el rango de una función es el codominio y concluyen que la función es sobreyectiva sin verificar.

Como menciona Carlson & Oehrtman (2005) la problemática de la enseñanza y aprendizaje de funciones es extensa y ha sido estudiada, pero de acuerdo a la revisión que se ha hecho hasta el momento, hace falta estudiar la imagen de una función, pues como se observa, es fundamental para la comprensión de otros conceptos, por ejemplo, la inversa de una función o como menciona Dorko & Weber (2014), en las transformaciones lineales.

2.2 Problema

En investigaciones como la de Martínez-Planell & Cruz (2016) y Martínez-Planell & Trigueros (2009) se muestra en los resultados de sus investigaciones evidencia de que los estudiantes presentan diversas dificultades en torno a este concepto, por ejemplo, Martínez-Planell & Cruz (2016) evidencian que la obtención del proceso Rango resultó ser el proceso que causó la mayor frecuencia de dificultad observada por los estudiantes y a su vez menciona que este concepto requiere atención explícita y no se derivará de la mera declaración de una definición formal.

Como podemos observar con el análisis de estas investigaciones el concepto de imagen de una función causa dificultad en los estudiantes y de acuerdo con Arnon et al. (2014) las dificultades permiten identificar la falta o no de determinada estructura mental en el estudiante.

Aunque se observa que hay evidencia de las dificultades que tienen los estudiantes con este concepto, no hay investigaciones que se centren específicamente en atenderlas, pues se centran en propuestas para la función y no para la imagen en específico y mucho menos investigaciones que estudien el aspecto cognitivo relacionado con la manera en cómo se aprende dicho concepto, por estas razones, consideramos necesario analizar cómo es que los estudiantes construyen este concepto, y en términos de la teoría APOE, analizar cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes de una Licenciatura en Matemáticas para comprender este concepto.

2.3 Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas pueden desarrollar para comprender el concepto de imagen de una función en una variable real?

2.4 Objetivo General

Describir las estructuras y mecanismos mentales necesarios para que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas puedan construir el concepto de imagen de una función en una variable real.

2.5 Objetivos Particulares

1. Describir hipotéticamente las estructuras y mecanismos mentales que se requieren para construir el concepto de imagen de una función en una variable real.
2. Caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que poseen los estudiantes de licenciatura en matemáticas al construir el concepto de imagen de una función.
3. Validar o refinar la descomposición genética preliminar.

2.6 Justificación

La comprensión del concepto de función es muy importante, prueba de ello es el hecho de que en casi todas las ramas de las matemáticas se encuentra involucrado dicho concepto. Como mencionan Tall & Bakar (1992) el concepto de función impregna todas las ramas de las matemáticas y ocupa una posición central en su desarrollo, por esto, consideramos importante centrarnos en un aspecto de este concepto (imagen de una función) ya que es importante para comprender otros conceptos.

Carlson & Oehrtman (2005) mencionan que el concepto de función es esencial en áreas relacionadas con las ciencias y un buen entendimiento de este concepto es esencial para cualquier estudiante que pretende entender el Cálculo. Es decir, al enfocarnos en esta parte de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, veremos la importancia que tiene estudiar la imagen de una función, pues como veremos más adelante, es un concepto transversal.

¿Por qué y para qué estudiar la imagen de una función?

Consideramos cuatro razones por las que estudiar sobre la imagen de una función en una variable real es muy importante:

1. Los estudiantes presentan dificultades (Tall & Bakar, 1992; Martínez-Planell & Trigueros, 2009; Dorko & Weber, 2014; Martínez-Planell & Cruz, 2016; Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017).
2. Es un concepto transversal en la matemática (basados en el mapa curricular de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la UAM, UAZ).
3. Es necesario para comprender conceptos más avanzados (Carlson & Oehrtman, 2005).
4. En la revisión de antecedentes que hemos realizado hemos observado que no se ha estudiado en la matemática educativa (Carlson & Oehrtman, 2005).

Capítulo III. Marco Teórico

Para este trabajo nos basamos en el marco teórico APOE, el cual consideramos pertinente para poder dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, por ser un marco teórico que nos proporcionará las herramientas necesarias para alcanzar nuestros objetivos a través de su metodología. Otra razón es porque este marco teórico se enfoca precisamente en la construcción cognitiva de conceptos matemáticos y además se reformuló a partir de las ideas de Piaget sobre la educación, para aplicarlas en el nivel educativo superior (Dubinsky, 1996).

La teoría APOE es principalmente un modelo para describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos. Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller (2014) mencionan que es un marco utilizado para explicar cómo los individuos construyen mentalmente su entendimiento de los conceptos matemáticos.

El acrónimo APOE significa Acción, Proceso, Objeto y Esquema; arraigado en el trabajo de Jean Piaget, sus ideas fundamentales se introdujeron por primera vez a principios de la década de 1980 (Dubinsky, 1984, como se citó en Arnon, et al., 2014), y desde entonces, investigadores, desarrolladores de planes de estudio y maestros han llevado a cabo un amplio desarrollo y aplicación de estas en muchos países del mundo.

La investigación y el desarrollo curricular basados en APOE se han centrado principalmente en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes de nivel medio superior y superior, pero también se ha trabajado en el contexto de las matemáticas de primaria y secundaria. Además, ahí se ha realizado un trabajo preliminar sobre la aplicación de la teoría APOE en áreas fuera de las matemáticas, como la informática.

En las investigaciones basadas en APOE, los términos concepción y concepto aparecen frecuentemente. Aunque están relacionadas, tienen ideas diferentes. McDonald et al. (2000) (como se citó en Arnon et al., 2014) hacen la distinción de la siguiente manera:

> Distinguimos entre concepción y concepto, ya que el primero es intrapersonal (es decir, la idea o comprensión del individuo) y el segundo es comunitario (es decir, un concepto acordado por los matemáticos) (p. 78).

Entonces se dice que para un determinado contenido matemático, se desarrolla una concepción como resultado de la actividad reflexiva, y el término concepto se refiere a la comprensión colectiva de ese contenido por parte de la comunidad de matemáticos. Es entonces esta actividad reflexiva a la que Piaget hace referencia.

El desarrollo de las concepciones que se alinean con un concepto es descrito en un modelo cognitivo al cual la teoría APOE llama *descomposición genética* del concepto, el cual es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender algún concepto matemático específico (Arnon, et al., 2014, p.27).

3.1 ¿Cómo surgió APOE?

Una de las ideas principales de Piaget y en la que APOE se basa, es lo que llamó abstracción reflexiva, que consideró como el mecanismo principal para las construcciones mentales del desarrollo del pensamiento y el mecanismo mental por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas se desarrollan en la mente de un individuo. Pero **¿qué es abstracción reflexiva?** La respuesta de Piaget consiste de dos partes:

La primera implica la reflexión, en el sentido de la conciencia y el pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflejar el contenido y las operaciones desde un nivel o etapa cognitiva inferior a uno superior (es decir, desde procesos a objetos). La segunda parte consiste en la reconstrucción y la reorganización del contenido y las operaciones en esta etapa superior las cuales dan como resultado que las operaciones mismas se conviertan en contenido al que pueden aplicarse nuevas operaciones (Piaget, 1973, como se citó en Arnon, et al., 2014). Este segundo paso le pareció a Dubinsky muy cercano a ciertas ideas matemáticas y los ejemplos lo llevaron a creer que la abstracción reflexiva podría ser una herramienta poderosa para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos más avanzados.

A partir de aquí, la teoría APOE sería introducida y desarrollada por Dubinsky y su grupo de colaboradores llamado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), durante el periodo 1995-2003.

3.2 Teoría APOE

Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon et al., 2014) analiza cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (interiorización, coordinación, inversión, encapsulación y tematización) que conducen a la construcción de estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas. Cabe mencionar que además de estos cinco tipos de abstracción añade uno más, el de desencapsulación.

Como la teoría APOE es constructivista, considera a la comprensión igual que construcción. Bajo esta teoría, **la manera en cómo se construye o comprende el conocimiento** se da mediante las relaciones entre los mecanismos y estructuras mentales los cuales se muestran en la siguiente figura (ver figura 3.1):

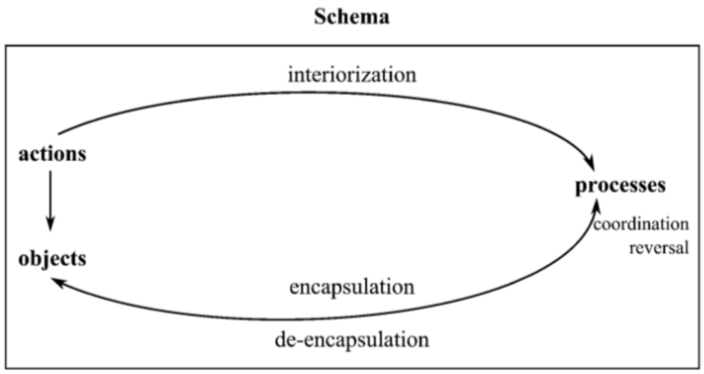


Figura 3.1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon, et al., 2014, p. 18).

La interacción de estos elementos en la figura 3.1 pueden ser descritos de la siguiente manera:

> … consideramos que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos mentales o físicos previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que luego se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden desencapsular de nuevo para regresar a los procesos a partir de los cuales se formaron. Finalmente, las acciones, procesos y objetos se pueden organizar en esquemas. (Asiala, et al., 1996, p. 9, como se citó en Arnon, et al., 2014, p. 19)

Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon et al., 2014) caracteriza la relación general entre estos elementos como un "sistema de retroalimentación circular" (p. 106). Aunque la construcción del conocimiento matemático es no lineal, la descripción basada en APOE de la construcción mental de un concepto matemático se presenta de manera jerárquica, pero es importante mencionar que la profundidad y complejidad de la comprensión individual de un concepto depende de su capacidad para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen. Estas conexiones forman la base de un Esquema cuya coherencia es crucial para la capacidad de un individuo de hacer sentido a situaciones matemáticas relacionadas con el concepto.

Otros mecanismos (y que Piaget usó en su trabajo) son la asimilación y la acomodación. La asimilación del conocimiento se refiere a un mecanismo por el cual un sujeto puede aplicar una estructura cognitiva, esencialmente sin cambio, para incluir un objeto cognitivo que el sujeto no haya tratado previamente y la acomodación se refiere a un mecanismo mediante el cual se reconstruye y modifica una estructura mental para enfrentar una nueva situación. Es decir, con la asimilación, las nuevas situaciones se abordan utilizando las estructuras existentes de una manera nueva. El alojamiento (acomodación) implica la reconstrucción de una estructura existente para hacer frente a una situación desconocida. Ambos mecanismos están relacionados con la idea de generalización de APOE, pero estos no aparecen en la figura 3.1.

Sin embargo, aunque en el esquema de la figura 3.1 se presenta esta progresión del conocimiento, necesariamente, como una cadena lineal, el desarrollo no siempre procede linealmente, una etapa tras otra. Más bien, un individuo puede moverse hacia adelante y hacia atrás entre etapas según lo requiera la situación. Es decir, que el desarrollo no sea lineal significa que se puede ir y venir entre las etapas.

A continuación, se describe en qué consiste cada una de las estructuras y mecanismos mentales. En algunos casos se presenta un ejemplo que describe cómo se puede manifestar (ya sea la estructura o el mecanismo mental) para cierto tema específico. Cabe mencionar que estos ejemplos no necesariamente se ligan al tema en investigación, solo se presentan con el fin de tener una mejor concepción de cada constructo.

3.3 Estructuras Mentales

Stenger et al. (2008) (como se citó en Arnon et al., 2014, p. 25) describe una estructura mental como cualquier estructura relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) (es decir, algo construido en la mente de una persona) que un individuo utiliza para dar sentido a las situaciones matemáticas. Una fuente para una estructura mental es una descripción de dónde proviene esa estructura.

A partir de esta definición, la primera estructura que se define en la teoría APOE es **Acción**. Las acciones son fundamentales para la teoría APOE, pues una concepción acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras. De acuerdo con Piaget (como se citó en Arnon et al., 2014) y adoptado por la teoría APOE un concepto se concibe primero como una Acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un Objeto u Objetos previamente concebidos. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse explícitamente y guiarse por instrucciones externas; además, cada paso solicita el siguiente, es decir, los pasos de la Acción aún no se pueden imaginar y no se puede omitir ninguno.

Por ejemplo, en el caso del concepto de función, "un individuo que requiere una expresión explícita para pensar sobre el concepto de función y puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularla se considera que tiene una concepción acción de-función" (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005, p. 338, como se citó en Arnon, et al., 2014, p. 19).

La siguiente estructura mental es **Proceso**. Los procesos son construidos usando uno de tres mecanismos mentales: interiorización, coordinación o reversión. Cada uno de estos mecanismos dan lugar a nuevos Procesos. Dubinsky et al. (2005a) (como se citó en Arnon et al., 2014, p.21) dan la siguiente descripción de un Proceso:

> Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que la acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, lo que le permite imaginar y realizar la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente. (p. 339)

Aunque una Acción y un Proceso, cuando se relacionan con un concepto dado, pueden involucrar la misma transformación, difieren en el siguiente sentido: para una Acción, uno debe hacer la transformación (física o mentalmente); para un Proceso, uno puede llevar a cabo la transformación sin la necesidad de pasar por cada paso, es decir, ya no necesita de un estímulo externo.

Un ejemplo de esta estructura mental para el caso de funciones es la que se menciona en Dubinsky et al. (2005a) (como se citó en Arnon, et al., 2014) la cual menciona que un individuo con una comprensión Proceso de función construirá un proceso mental para una función determinada y pensará en términos de entradas, posiblemente no especificadas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas.

La siguiente estructura mental es **Objeto**, esta estructura se da mediante el mecanismo de encapsulación, del cual se hablará más adelante, pero este mecanismo se encarga de pasar de lo dinámico (aquello que cambia y evoluciona) a lo estático (cuando se ve como un todo). De acuerdo con Dubinsky et al. (2005) (como se citó en Arnon, et al., 2014):

> Si uno se da cuenta del Proceso como una totalidad, sabe entonces que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad y pueden es capaz de construir tales transformaciones (explícitamente o en la propia imaginación), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el Proceso en un Objeto cognitivo. (p. 339)

Entonces se dice que un objeto es estático y los procesos son dinámicos, al igual que el **Esquema**, la última estructura mental que se define en la teoría APOE.

El esquema es la interacción de los elementos presentados en la figura 3.1. De acuerdo con Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon et al., 2014, p.24) un Esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua, determinada por la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema está determinada por la capacidad del individuo para establecer si se puede utilizar para tratar una situación matemática particular.

Piaget y García (como se citó en Trigueros, 2005) proponen que los esquemas evolucionan y para ello establecen tres fases en la construcción de las relaciones entre los elementos constitutivos del esquema. Ejemplifican estas etapas para las construcciones algebraicas, algunas geométricas y otras para la mecánica Newtoniana. En la etapa *Intra* se construyen las relaciones internas del objeto o fenómeno; en la etapa *Inter* el individuo constituye relaciones entre los objetos o fenómenos de conocimiento; y por último la etapa *Trans* el individuo puede trabajar con el esquema de una manera mucho más estructurada que cuando el esquema está en otras fases constitutivas, lo cual no quiere decir que el esquema permanece ya inmóvil, pues los esquemas siguen construyéndose y enriqueciéndose mediante la construcción de nuevas relaciones con otros objetos u otros esquemas.

Esto quiere decir que una vez que un esquema se construye como una colección coherente de estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y otros esquemas) y las conexiones establecidas entre esas estructuras, puede transformarse en una estructura estática (objeto) y/o usarse como una estructura dinámica que se asimila otros Objetos o Esquemas relacionados.

Un ejemplo de Esquema es aquel que se da para el concepto de conjunto (colección de objetos que satisfacen una condición dada). En álgebra lineal, se dice que el individuo puede aplicar el Esquema conjunto a una situación matemática dada, y esto significaría poder definir conjuntos de Objetos que luego podrían clasificarse como conjuntos de vectores: tuplas, polinomios, funciones y matrices. Un individuo también puede haber desarrollado una noción general de qué es un conjunto y qué no es.

Por lo tanto, los esquemas son estructuras que contienen las descripciones, organización y ejemplos de las estructuras mentales que un individuo ha construido con respecto a un determinado contenido matemático. Los estudios que se centran en el desarrollo de esquemas no son muy numerosos y se necesita más investigación para comprender mejor cómo se desarrollan y se aplican los esquemas.

3.4 Mecanismos Mentales

Stenger et al. (2008) (como se citó en Arnon et al., 2014, p. 25) describe un mecanismo mental como un medio por el cual una estructura mental podría desarrollarse en la mente (s) de un individuo o un grupo de individuos.

El primer mecanismo descrito en la teoría APOE es el de **interiorización**, y Arnon et al. (2014) mencionan que a medida que las acciones se repiten y se reflexionan, el individuo pasa de confiar en las señales externas a tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por la capacidad de imaginar y llevar a cabo los pasos sin necesariamente tener que realizar cada uno explícitamente y poder omitir los pasos, así como revertirlos. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental.

Un ejemplo de la interiorización es aquel que se da en la descomposición genética para función basado en las ideas de Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon et al., 2014), la cual menciona que la construcción del concepto de función comienza con acciones en un conjunto. Dado un conjunto de números u otro tipo de elementos, estas acciones implican tomar un elemento de un conjunto, aplicar explícitamente una regla, generalmente una fórmula algebraica, y asignar a ese elemento específico un elemento único del segundo conjunto.

A medida que estas acciones se realizan en diferentes conjuntos, digamos pares ordenados, puntos u objetos no numéricos, el individuo reflexiona sobre ellos y los percibe como una transformación dinámica. En este punto, comienza la interiorización, ya que el individuo comienza a ver una función como un tipo de transformación que empareja elementos de un conjunto, llamado dominio, con elementos de un segundo conjunto, llamado rango. Esto significa que el individuo ha construido una estructura mental que realiza la misma transformación que la Acción, pero totalmente en la mente del individuo.

De aquí podemos decir que la interiorización permite pasar al Proceso porque ya hubo una repetición de acciones con reflexión.

Luego de este mecanismo, el que permite pasar de Proceso a Objeto es la **encapsulación,** y de acuerdo con Arnon et al. (2014) este ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática (Objeto), a la cual las Acciones pueden ser aplicadas. Como se informó en varios estudios basados en APOE, el mecanismo de encapsulación es el que causa mayor dificultad.

Para el concepto de función, Dubinsky et al. (2005) (como se citó en Arnon et al., 2014) menciona que la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones, como formar un conjunto de funciones, definir operaciones aritméticas en dicho conjunto, equiparlo con una topología, etc.

Una vez que un Proceso ha sido encapsulado en un Objeto mental, puede ser desencapsulado, cuando sea necesario, volver a su proceso subyacente. En otras palabras, aplicando el mecanismo de **desencapsulación**, un individuo puede volver al Proceso que dio origen al Objeto. Este mecanismo no viene de las ideas de Piaget, sino de Dubinsky, pues este mecanismo no genera una estructura mental, pero si está presente en el razonamiento del estudiante.

Además, un proceso también puede ser **revertido**. Por ejemplo, Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon, et al., 2014) explicó cómo se puede invertir el proceso función para obtener una función inversa:

> Al reflexionar sobre la totalidad del proceso de una función, uno da sentido a la noción de una función sobreyectiva. La reflexión sobre el proceso función y la reversión de ese proceso parecen estar involucrados en la idea de que una función sea uno a uno (inyectiva). (p. 115)

Podemos decir que la reversión es el proceso inverso del proceso que ya se construyó, pues la idea de una función biyectiva es construida mentalmente y da lugar a una función inversa aplicando el mecanismo de reversión.

Es importante mencionar que la reversión no necesita que el proceso haya sido encapsulado y además este mecanismo es de gran utilidad porque permite ver si un alumno realmente tiene la concepción proceso de un concepto.

La **coordinación** es el siguiente mecanismo mental, y este es indispensable en la construcción de algunos objetos. Cómo se lleva a cabo mentalmente, es aún tema de investigación. Se dice que dos objetos pueden ser desencapsulados, sus procesos coordinados y el proceso coordinado se encapsula en un nuevo objeto.

Un ejemplo de la coordinación es para la composición de funciones, según Arnon et al. (2014) para hacer la composición de dos funciones f y g para obtener $f \circ g$, los dos objetos función deben ser desencapsulados en los procesos que les dieron origen. Estos procesos son coordinados aplicando el Proceso de f a los elementos obtenidos de aplicar el proceso de g. El resultado de este Proceso es entonces encapsulado en un nuevo objeto $f \circ g$.

Arnon et al. (2014) mencionan que se plantea la hipótesis de que la coordinación de dos procesos, digamos PA y PB, puede considerarse como la aplicación de PA a PB (figura 3.2). Para que eso sea posible, el alumno primero debe encapsular PB en un Objeto, OB, para poder aplicarle PA. Una vez que eso sucede, la coordinación puede continuar de la siguiente manera: se asimila OB y se le puede aplicar PA, o se acomoda PA para que el alumno pueda aplicarlo a OB. Una alternativa es que PB se aplique a PA de manera similar:

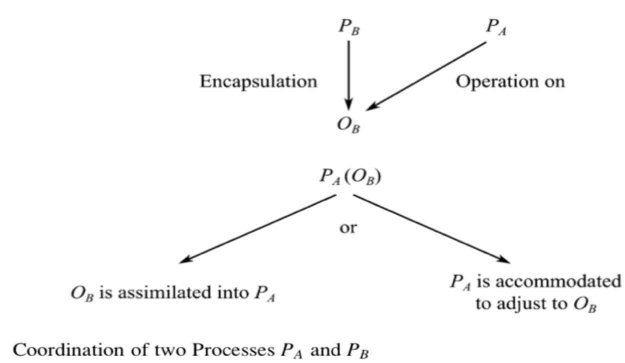


Figura 3.2. Coordinación de los Procesos PA y PB (Arnon, et al., 2014, p. 24).

Si la coordinación realmente ocurre de esta manera es el tema de futuros estudios. Lo que es importante mencionar es que la coordinación permite dos cosas: de procesos generar nuevos procesos o te ayuda a generar nuevos objetos (de la misma naturaleza).

El último mecanismo es el de **tematización** y es el que permite que se logre la construcción de un Esquema como un objeto metal. Este mecanismo permite a un individuo aplicar transformaciones a la estructura de Esquema.

Piaget habló sobre la tematización en varios de sus libros. Por ejemplo, discutió la tematización cuando habló de la abstracción reflexiva y de cómo "las acciones y las operaciones se convierten en objetos tematizados del pensamiento" (Piaget 1975/1985, p. 49, como se citó en Arnon, et al., 2014, p. 128). En su trabajo con García (1983–1989), introdujo la noción de tematización de un esquema:

> En muchos casos, las nociones matemáticas abstractas se han utilizado primero de manera instrumental, sin dar lugar a ninguna reflexión sobre su significado general o incluso a una conciencia consciente del hecho de que se estaban utilizando. Tal conciencia se produce solo después de un proceso que puede ser más o menos largo, al final del cual la noción particular utilizada se convierte en un objeto de reflexión, que luego se constituye como un concepto fundamental. Este cambio de uso o aplicación implícita al uso consecuente, y la conceptualización constituye lo que se conoce bajo el término tematización. (p.105)

Según Piaget y García, el desarrollo de un esquema es un proceso lento en el que el individuo toma conciencia de sus componentes y sus relaciones. Durante algún tiempo, el individuo puede usar un esquema para resolver algunos problemas sin la necesidad de reflexionar sobre sus componentes y las relaciones entre ellos. Eventualmente, el individuo puede reflexionar sobre el significado de los componentes y las relaciones que componen el esquema y puede realizar acciones conscientes sobre él. Cuando esto sucede, Piaget y García (como se citó en Arnon, et al.,2014) consideran que el esquema ha sido tematizado. En este sentido, la tematización es el mecanismo por el cual un esquema se usa conscientemente en la solución de problemas.

Se menciona que solo hay un estudio dentro de la teoría APOE centrado en la tematización de un esquema (Cooley, et al., 2007, como se citó en Arnon, et al., 2014), y en ese estudio los estudiantes universitarios que tuvieron éxito en su estudio de cálculo fueron entrevistados para determinar si habían tematizado su Esquema de gráfica en Cálculo. Los investigadores examinaron cómo los estudiantes construyeron relaciones entre las propiedades de las funciones, como la primera y la segunda derivada, los límites y la continuidad, y cómo relacionaron estas propiedades con las gráficas de funciones. El análisis de los datos se centró en la coordinación de los estudiantes de las diferentes propiedades e intervalos para describir posibles agrupaciones mentales dentro de sus esquemas y determinar su capacidad para acceder a partes del esquema cuando se les solicitara.

En general, la tematización de un Esquema está indicado por la conciencia individual del comportamiento global de los problemas relacionados con el Esquema, el uso flexible de este en diferentes situaciones y la habilidad de realizar acciones conscientes en ella.

3.5 Relación de los mecanismos y estructuras mentales

Cada una de las estructuras que componen la Teoría APOE se construye a través de un mecanismo mental: una Acción se interioriza en un Proceso mental, un Proceso se encapsula en un Objeto cognitivo, un Proceso puede revertirse para construir otro Proceso, dos Procesos pueden coordinarse para formar un nuevo proceso, y un esquema puede ser tematizado en un objeto cognitivo.

Como la teoría se basa en la premisa de que un individuo puede aprender cualquier concepto matemático siempre que se hayan construido las estructuras previas necesarias para comprender esos conceptos (Dubinsky, 1991, como se citó en Arnon, et al., 2014), se requiere hacer énfasis en que las estructuras mentales y los mecanismos por los cuales se construyen implican un enfoque en espiral donde las nuevas estructuras se construyen actuando sobre las estructuras existentes. Dubinsky (1997) (como se citó en Arnon et al., 2014), refiriéndose a las ideas de Piaget, escribió que:

> Los objetos, una vez construidos, pueden transformarse para realizar acciones de nivel superior y luego procesos, y así sucesivamente. Esto puede continuar indefinidamente. Además, cualquier acción, proceso u objeto puede ser reconstruido, como resultado de experimentar nuevas situaciones problemáticas en un plano superior, interiorizando acciones más sofisticadas y encapsulando procesos más ricos. La construcción de nivel inferior no se pierde, sino que permanece como parte de la concepción enriquecida. (p. 98)

Entonces se dice que cuando un estudiante pasó por todos los mecanismos y las estructuras previas, el objeto nuevo es cognitivamente más complejo, es decir, no es el mismo objeto con el que iniciaste realizándole acciones, por esta razón, el esquema de las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático queda en espiral (ver figura 3.3):

Figura 3.3. Esquema en espiral de las estructuras y mecanismos mentales (Montelongo, 2016).

Es importante mencionar que a pesar de que existen dichas estructuras y mecanismos mentales, para esta investigación solo se usarán las estructuras acción, proceso y esquema, y en cuanto a los mecanismos se usará interiorización y encapsulación.

Capítulo IV. Metodología: Ciclo de Investigación de APOE

Un proyecto de investigación y/o desarrollo de currículo basado en la teoría APOE utiliza su propio ciclo de investigación, el cual involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrucción, y recolección y análisis de datos, mismas que permitirán alcanzar nuestros objetivos (ver figura 4.1):

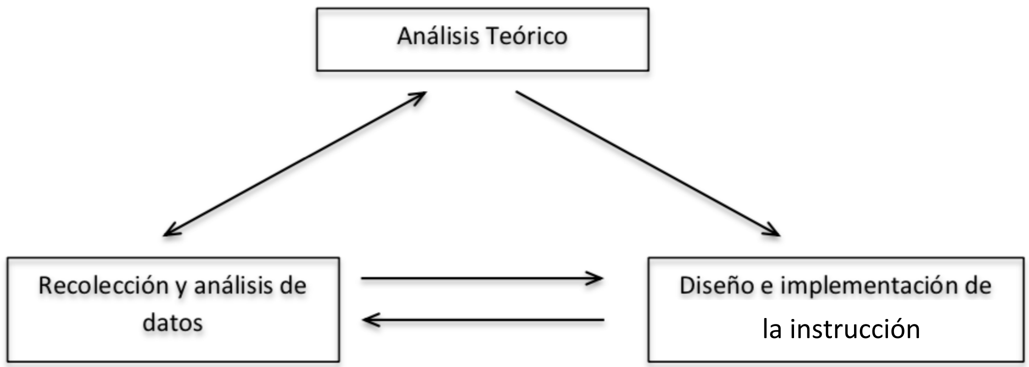


Figura 4.1. Ciclo de investigación, Arnon, et al., 2014, p. 94.

Arnon et al. (2014) mencionan que no todos los estudios que adoptan APOE como marco teórico hacen uso de todos los elementos del paradigma. Dependiendo del proyecto, las razones pueden ser metodológicas o prácticas. En nuestra investigación utilizaremos el *ciclo de investigación modificado*, el cual consiste en cambiar la segunda componente del ciclo de investigación, pues no diseñaremos ni implementaremos una instrucción, sino que diseñaremos e implementaremos instrumentos que nos permitan validar o refinar la descomposición genética preliminar (ver figura 4.2):

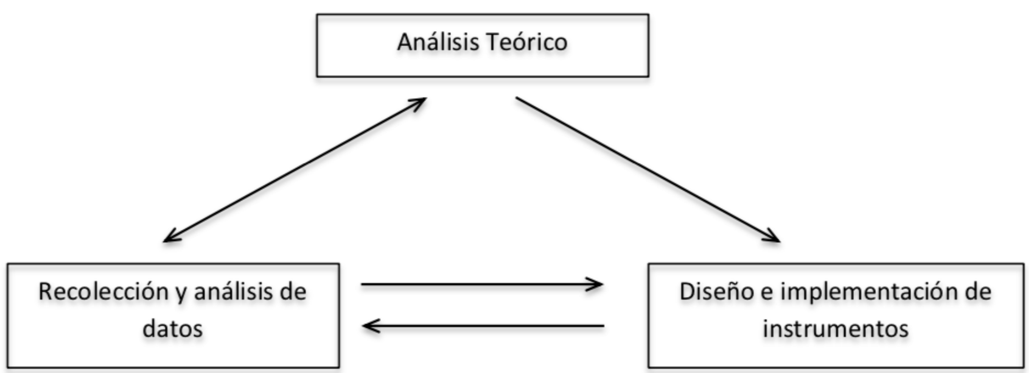


Figura 4.2. Ciclo de investigación modificado, Arnon, et al., 2014, p. 94.

Como se observa en las flechas del ciclo las tres componentes se influyen mutuamente. A continuación, se presenta la descripción de cada fase.

4.1 Fase I. Análisis Teórico

Según este paradigma, la investigación comienza con un análisis teórico del concepto matemático en consideración, el cual permitirá explicar cuestiones cognitivas para la comprensión de este. Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto.

¿Qué es una descomposición genética?

De acuerdo con Arnon et al. (2014) una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico. Se dice que hasta que se pruebe experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se le conoce como descomposición genética preliminar.

En el contexto de la teoría APOE, el investigador considera un "estudiante genérico" esto es, un representativo de la clase de estudiantes que están aprendiendo el concepto en estudio.

Se menciona en Arnon et al. (2014) que una descomposición genética típicamente comienza o surge como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigaciones publicadas previamente sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto. También se dice que se basa en investigaciones previas sobre el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto y/o un análisis de textos o materiales de instrucción relacionados con el concepto.

Algunas descomposiciones genéticas preliminares se diseñan teniendo en cuenta las descripciones matemáticas de un concepto, junto con las experiencias de los investigadores como aprendices o maestros. Otras son diseñadas a partir de datos de investigaciones anteriores sobre educación matemática, no necesariamente realizados utilizando la teoría APOE, sobre las dificultades de los estudiantes para aprender un concepto en particular.

También hay descomposiciones genéticas basadas en datos de observaciones de estudiantes que están aprendiendo un concepto matemático. El análisis de las observaciones conduce a una descripción cognitiva del concepto, que puede verificarse empíricamente.

Otras descomposiciones genéticas pueden basarse en el desarrollo histórico del concepto. Un estudio del desarrollo histórico de un concepto puede apuntar a construcciones mentales que los individuos pueden hacer.

Los materiales de texto también pueden informar el diseño de una descomposición genética preliminar. Específicamente, para un concepto dado, el enfoque didáctico utilizado en el texto puede ayudar a los investigadores a determinar cómo los estudiantes pueden llegar a comprender el concepto.

Finalmente, Arnon et al. (2014) mencionan que las descomposiciones genéticas pueden desarrollarse a partir de datos. En este caso, los estudiantes son entrevistados y la transcripción de la entrevista se divide en pequeñas piezas. Al comparar estas piezas, es posible encontrar diferencias en el rendimiento de los estudiantes en tareas específicas. Las diferencias en el rendimiento pueden descubrir casos en los que es necesario realizar ciertas construcciones mentales. La falta de éxito al completar una tarea puede indicar que el estudiante no ha realizado las construcciones mentales necesarias, mientras que el éxito con la tarea puede descubrir evidencia de que esas construcciones mentales se han realizado. La totalidad de los resultados obtenidos por este tipo de análisis conduce a la organización de las construcciones mentales que componen la descomposición genética.

Es importante mencionar que una descomposición genética no es única, pues Arnon et al. (2014) mencionan que no proporciona una sola forma en que todos los estudiantes construyan un concepto matemático específico, en cambio, sirve como modelo teórico que puede ayudar a comprender las construcciones que aparecen en el trabajo de la mayoría de los estudiantes.

¿Para qué sirve la descomposición genética en la investigación?

De acuerdo con Arnon et al. (2014) una descomposición genética actúa como una lente, pues cuando se utiliza, diferentes investigadores pueden analizar los mismos datos y obtener resultados comparables. Trabajando en equipo, pueden interpretar sus resultados en términos del modelo. Sin un modelo, podrían tener dificultades para acordar o negociar sus interpretaciones. Por lo tanto, el análisis de los datos se vuelve más confiable cuando se basa en un modelo teórico como la descomposición genética.

4.2 Fase II. Diseño e implementación de instrumentos

En el diseño e implementación de la enseñanza (segunda componente del ciclo no modificado) se diseñan y aplican estrategias pedagógicas específicas, con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico. La implementación generalmente se lleva a cabo utilizando el Ciclo de Enseñanza ACE, un enfoque instructivo que apoya el desarrollo de las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética (Arnon, et al., 2014).

En cambio, en el diseño e implementación de instrumentos, se diseñan y aplican instrumentos con cierta intencionalidad. En esta fase se puede aplicar cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (grabadas en audio y/o video), exámenes y/o juegos de computadora (dependiendo de los objetivos del estudio) de los cuales se obtiene información con cierta intencionalidad. En este trabajo haremos uso de una entrevista semiestructurada y de un examen diagnóstico (cuestionario escrito), la intencionalidad de estos se describe a continuación.

Preguntas escritas:

Las preguntas escritas se pueden administrar a grandes grupos de estudiantes durante un examen o en forma de cuestionario. Proporcionan información básica sobre el rendimiento matemático de los estudiantes.

En la investigación basada en APOE, las preguntas escritas están cuidadosamente diseñadas para ayudar a reunir evidencia de la presencia de las construcciones mentales predichas por la descomposición genética preliminar y para sugerir modificaciones de las estrategias pedagógicas y/o la descomposición genética cuando estas construcciones no están presentes. También permite a los investigadores enfocar su atención en los aspectos de la construcción de conocimiento que ellos están estudiando (Arnon, et al., 2014).

Entrevistas semiestructuradas:

Arnon et al. (2014) mencionan que las entrevistas son el medio más importante por el cual se recopilan datos en las investigaciones basadas en APOE. El objetivo principal es determinar si los estudiantes han realizado las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética utilizada en un estudio en particular.

La selección de a quiénes se les hace la entrevista puede hacerse en función de sus respuestas a un cuestionario escrito o un examen administrado previamente, comentarios del instructor o una combinación de estos criterios, en este caso del examen diagnóstico. De acuerdo con Arnon et al. (2014) la idea es acceder a datos que muestren un rango de rendimiento matemático en diferentes tareas matemáticas para comparar el pensamiento de los estudiantes que tuvieron dificultades con el pensamiento de los estudiantes que tuvieron éxito. Estas diferencias permiten a los investigadores determinar si las construcciones mentales solicitadas por el análisis teórico explican las diferencias en el rendimiento o si se requieren otras construcciones mentales no explicadas por el análisis teórico.

En las entrevistas semiestructuradas, el entrevistador sigue un esquema preparado de preguntas que previamente se diseñan de acuerdo a la descomposición genética, todo esto con la intención de determinar si los estudiantes realizaron las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico y encontrar evidencia de ello.

Dependiendo de las respuestas, el entrevistador puede hacer preguntas de seguimiento. El entrevistador hace este tipo de preguntas para buscar aclaraciones o para examinar más profundamente el pensamiento del estudiante. Si estas preguntas no logran obtener suficientes respuestas, el entrevistador puede tomar una ruta más didáctica y dar una pista para ver, con un poco de insinuación, dónde está el estudiante en términos de su progreso en hacer una construcción mental particular (Arnon, et al., 2014).

Una vez que se implementan los instrumentos, los datos se organizan. En el caso de entrevistas, se transcriben las grabaciones de audio y/o video anotando inclusive los sonidos que hayan manifestado lo estudiantes al momento de la entrevista. Después de organizar la información cada miembro del equipo de investigación analiza las transcripciones por separado para luego discutir su análisis (si es necesario se negocian las diferencias de interpretación) y llegar a un consenso. Arnon et al. (2014) afirman que esta es una forma de triangulación que ha demostrado ser efectiva en la investigación basada en APOE y es una de las principales razones por las cuales la mayoría de los artículos publicados que usan este paradigma tienen múltiples autores.

4.3 Fase III. Recopilación y análisis de datos

La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo simplemente una hipótesis (Arnon, et al., 2014).

El propósito del análisis de datos es responder dos preguntas:

(1) ¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética?

(2) ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión?

Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, la instrucción se reconsidera y revisa. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la respuesta a la segunda pregunta es negativa, el análisis teórico es reconsiderado y revisado. En cualquier caso, el ciclo se repite hasta que estas preguntas sean respondidas positivamente y el instructor / investigador esté satisfecho de que los estudiantes hayan aprendido los conceptos matemáticos suficientemente bien. En otras palabras, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apuntan hacia las mismas construcciones mentales (Arnon, et al., 2014).

Como en esta investigación utilizaremos el ciclo modificado, se puede ver que no corresponde contestar a la segunda pregunta, específicamente, analizaremos si las estructuras mentales que construyeron los estudiantes en la implementación de instrumentos coinciden con las propuestas en el análisis teórico, si coinciden, se valida la descomposición genética, sino, se refina, ya que de acuerdo con Arnon et al. (2014) cuando esto sucede la descomposición genética necesita ser refinada para reflejar lo que se ha encontrado empíricamente.

Capítulo V. Desarrollo de la Metodología

De acuerdo con la teoría APOE y el objetivo que nos hemos planteado los resultados que se obtendrán serán de corte cualitativo. A continuación, se presenta una sección de marco contextual y lo que se desarrolló en cada fase para la investigación.

5.1 Marco contextual

5.1.1 Transversalidad del concepto de imagen de una función en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Como este estudio se centrará en el concepto de imagen de una función, a continuación, mostraremos su transversalidad en el mapa curricular de la carrera de Licenciado en Matemáticas en la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

En el currículum de la licenciatura en matemáticas de la UAM el concepto de imagen de una función está presente en diferentes Unidades Didácticas que son de suma importancia en la formación de un licenciado en matemáticas, por ejemplo, en las asignaturas de Pre-cálculo, Álgebra Lineal II y Análisis Matemático I (por mencionar algunas). A continuación, se presenta la Unidad de Competencia de los planes analíticos de las Unidades Didácticas donde se puede observar que el concepto de imagen de una función está presente y es indispensable su comprensión para poder construir conceptos más abstractos como el de función inyectiva, sobreyectiva o funciones inversas.

Los planes analíticos se presentan por competencias, por ejemplo, en la clase de Precálculo seriada con cálculo diferencial impartida en el primer semestre de la licenciatura, el tema de imagen de una función se ve en la unidad 4 (ver figura 5.1.1):

UNIDAD DE COMPETENCIA 4	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Expresar las relaciones funcionales entre dos conjuntos, en sus diferentes representaciones: tabular, analítica, gráfica y verbal; para reconocer el cambio de una magnitud (variable dependiente) respecto de otra (variable independiente).			

Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias Genéricas
Determinar dominio e imagen de las funciones elementales: constante, lineal, cuadrática, exponencial, radicales, valor absoluto, logaritmo, seno y coseno; y aquellas definidas a trozos a partir de éstas.	Funciones como relaciones especiales entre conjuntos Funciones en los diferentes registros: tabular, analítico, gráfico y verbal Dominio, imagen y pre-imagen como un conjunto de valores Reales	Interpretación de un conjunto de coordenadas que componen a una función en los diferentes registros (numérico, algebraico y grafico).	Capacidad crítica y autocrítica Compromiso con la calidad
Representar las funciones elementales en los diferentes registros (evaluar expresiones algebraicas, construir tabulaciones, graficar parejas ordenadas), primero a lápiz y después con el apoyo de software de graficación.	Funciones elementales (lineal, cuadrática, exponencial, radicales, valor absoluto, logaritmo, trigonométricas, funciones a trozos. Igualdad, identidad, e inversa de funciones Funciones acotadas y no acotadas.	Identificar las gráficas, expresiones algebraicas o verbales que representan a las funciones elementales. Manejar la calculadora o software gráfico	

Figura 5.1.1. Unidad de Competencia 4 del Plan Analítico de Pre-cálculo

Como podemos observar, en la unidad Didáctica se considera el manejo de distintos registros de representación en el sentido de Duval (1998) (como se citó en Oviedo et al., 2012) y además se trabaja la imagen para ciertos tipos de funciones, como la función constante, lineal, cuadrática, entre otras.

En la materia de Álgebra Abstracta I, en la unidad de competencia 3 se encuentra el tema de grupo cociente (ver figura 5.1.2):

UNIDAD DE COMPETENCIA 3	TOTAL DE HORAS QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA AL SEMESTRE	
	T/SD	T. Indep.
Construir grupos cociente a partir de otros grupos analizados previamente para identificar las transferencias estructurales posibles	15	8

DESEMPEÑOS	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias genéricas
1. Construir grupos cociente a partir de los grupos conocidos hasta el momento	• Clases laterales • Subgrupos normales • Grupos cocientes		20. Compromiso con la preservación del medio ambiente. 24. Habilidad para trabajar en forma autónoma. 5. Responsabilidad social y compromiso ciudadano.
2. Identificar propiedades del grupo de origen que si se "transfieren" y "no se transfieren" al grupo cociente construido	• Propiedades de los grupos cocientes • Teorema de Cauchy • Teorema fundamental de homomorfismo		

ESTRATEGIA		
TÁCTICAS DE ENSEÑANZA	EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE	
	TRABAJO PRESENCIAL Y/O SUPERVISADO	TRABAJO AUTÓNOMO
• Exposición en pizarrón • Práctica de resolución de problemas en clase	• Identificación de propiedades transferibles • Demostración de propiedades	• Elaboración y fundamentación de argumentaciones lógico algebraicas

Figura 5.1.2. Unidad de Competencia 3 del Plan Analítico de Álgebra Abstracta

Dentro de esta unidad, como parte de los saberes teóricos, se encuentra el llamado "Teorema Fundamental de homomorfismo" el cual Fraleigh (1987) lo presenta de la siguiente manera:

Para un homomorfismo $\phi: G \to G'$, el kernel $K = \{e'\}\phi^{-1}$ es un subgrupo normal de G. Estamos ahora en condición de probar el teorema principal:

(Teorema fundamental del homomorfismo) *Sea ϕ un homomorfismo de un grupo G en un grupo G′, con kernel K. Entonces, $G\phi$ es un grupo y existe un isomorfismo canónico natural de $G\phi$ con G/K.*

Dada la definición, para este tema tan importante es necesario que el alumno tenga bien comprendido el concepto de imagen de una función (homomorfismo), de lo contrario presentará dificultades para resolver problemas que involucren este tema.

En la materia de Álgebra Lineal 2, en la unidad de competencia 1 se encuentra en el desempeño 1 determinar si una función dada entre espacios vectoriales es o no una transformación lineal si es inyectiva y/o sobreyectiva e invertible o no (figura 5.1.3):

UNIDAD DE COMPETENCIA 1	**TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA**		
	AID	**ATS**	**ATI**
Analizar las propiedades de las funciones entre espacios vectoriales para identificar y manipular las transformaciones lineales, así como demostrar que estas, considerándolas entre dos espacios vectoriales fijos de dimensión finita, forman un espacio vectorial isomorfo a un espacio vectorial de matrices.	**20**	**0**	**10**

Desempeños	**Saberes Teóricos/Declarativos**	**Saberes Procedimentales**	**Competencias Genéricas**
1. Determinar si una función dada entre espacios vectoriales es o no una transformación lineal, si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.	• Definición y propiedades de las transformaciones lineales. • Núcleo, imagen, nulidad y rango. • Isomorfismos. • Teorema de la dimensión.	• Cálculo del núcleo, Imagen, nulidad y rango de una transformación lineal.	20. Compromiso con la preservación del medio ambiente. 24. Habilidad para trabajar en forma autónoma. 5. Responsabilidad social y compromiso ciudadano.
2. Representar una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita por medio de su matriz asociada y demostrar que el conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales fijos de dimensión finita tienen estructura de espacio vectorial que es isomorfo a un espacio vectorial de matrices.	• Transformaciones lineales entre K^n y K^m. • Estructura de espacio vectorial en el conjunto de las Transformaciones lineales. • Representación matricial de una transformación lineal. • Invertibilidad e isomorfismo.	• Cálculo del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada. • Cálculo la matriz de cambio de base. • Cálculo la matriz asociada a una transformación lineal.	
3. Demostrar y aplicar los teoremas de isomorfismos entre espacios vectoriales.	• Teoremas de isomorfismos. • Espacio cociente. • Funcionales lineales.		

Figura 5.1.3. Unidad de Competencia 1 del Plan Analítico de Álgebra Lineal 2

Como podemos observar, dentro de los saberes teóricos se encuentra el concepto de imagen, así como la invertibilidad, conceptos que claramente involucran la comprensión del concepto de imagen de una función.

5.2 Elementos para el análisis teórico

El análisis teórico, componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, es la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Toma en cuenta el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino viable en la construcción de un concepto determinado, es decir, da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

En esta investigación se tomará en cuenta para nuestro análisis teórico la revisión de libros de texto que se utilizan a lo largo de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas y los resultados de estudios previos que dan cuenta de las estructuras previas que se requieren para abordar el concepto en estudio, así como las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto.

Hasta el momento, no hemos encontrado alguna descomposición genética del concepto que pueda darnos cuenta de qué estructuras podría desarrollar el estudiante, sin embargo, vamos a considerar otras descomposiciones genéticas que se relacionan con el concepto de imagen de una función, las cuales nos ayudaran a determinar las estructuras previas que necesita el estudiante para la construcción del nuevo concepto.

5.2.1 Revisión de libros de Cálculo

El mapa curricular vigente de la licenciatura en matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) dependiente de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) llamado "Plan de Estudios E" toma como referencia las competencias del Tuning, formando con ellas, de acuerdo a las características propias de la Unidad Académica de Matemáticas, una arquitectura de competencias que refleja los intereses y particularidades de todas las áreas.

Con base en este mapa curricular se hizo una revisión de las Unidades Didácticas en las cuales la imagen de una función se encuentra presente o es necesario para la comprensión de otros conceptos más avanzados. Esto nos ayudará a determinar posteriormente qué estructuras previas necesita el estudiante para construir el concepto en estudio.

El siguiente análisis se hizo por libro, los cuales fueron tomados de la bibliografía que consideran las Unidades Didácticas del Plan de Estudios E de la Licenciatura en Matemática de la UAM-UAZ. Enfocándonos en la manera cómo es abordado la imagen de una función desde su aspecto didáctico.

Purcell, Varberg y Rigdon (2007) es uno de los principales libros considerados en la Unidad Didáctica llamada Pre-Cálculo de primer semestre, y en este se menciona que el objetivo sigue siendo la comprensión de los conceptos de cálculo, que aunque algunos ven al énfasis en la presentación clara y rigurosa como una distracción para la comprensión del cálculo, los autores consideran que ambas son complementarias y que es más probable que los estudiantes comprendan los conceptos si los términos se definen con nitidez y los teoremas se enuncian y demuestran claramente.

Los autores presentan la definición de función (en la cual se incluye la de imagen de una función) de la siguiente manera (ver figura 5.2.1.1):

Definición

Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función. (Véase la figura 1).

Figura 5.2.1.1. Definición de función (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p.29).

Es importante hacer notar que este autor llama rango a lo que nosotros consideramos como imagen de una función. Como se puede observar, la definición de imagen forma parte de la definición de función, como uno de los elementos que la constituyen. Después de esta definición se presenta a tipo de comentario lo presentado en la figura 5.2.1.2, donde al parecer el autor intenta resaltar los elementos que componen la definición a través de un ejemplo de una función expresada algebraicamente, considerando que los elementos dominio y rango son necesarios para especificar a la función:

Dominio y rango Para especificar por completo una función, debemos establecer, además de la regla de correspondencia, el dominio de la función. Por ejemplo, si F es la función definida por $F(x) = x^2 + 1$ con dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (véase la figura 4), entonces el rango es $\{1, 2, 5, 10\}$. La regla de correspondencia, junto con el dominio, determina el rango.

Figura 5.2.1.2. Dominio y rango de una función (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 30).

Luego de estas definiciones el autor presenta 3 imágenes visuales con las que considera que ayudan al lector a comprender el concepto de función y con las cuales intenta representar al concepto matemático abstracto de función (ver figura 5.2.1.3):

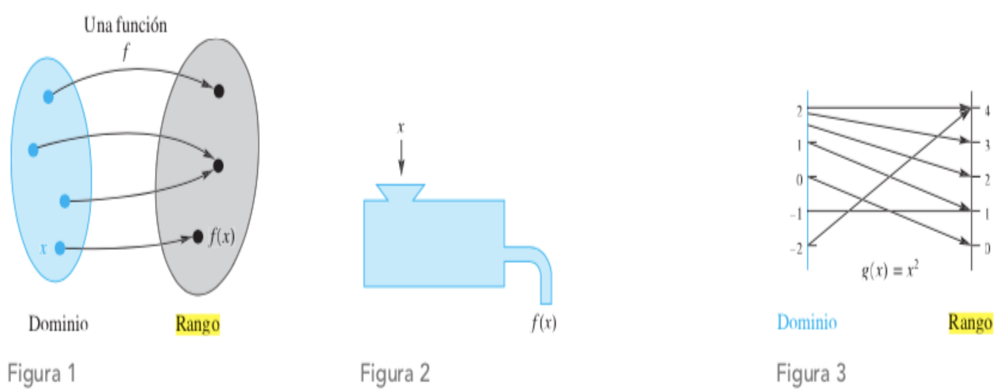


Figura 5.2.1.3. Diferentes representaciones para una función (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 29).

Como podemos ver, en la primera figura el autor utiliza dos óvalos para representar a los conjuntos dominio y rango, los elementos de los conjuntos son los puntos que aparecen dentro de cada uno de los óvalos y las flechas indican la regla de correspondencia. La segunda figura presenta un tipo de "máquina" para explicar el concepto de función indicando que esta recibe un valor y como resultado obtiene otro valor que es el resultado de aplicar la regla de correspondencia, desde esta interpretación podemos ver que el autor pretende que con esta figura se entienda a la función en una etapa de proceso hablando en términos Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) sin pasar antes por la etapa de acción, ya que de acuerdo con Arnon et al. (2014) la construcción del concepto de función comienza con acciones en un conjunto dado de números u otro tipo de elementos, éstas acciones involucran tomar un elemento de dicho conjunto y explícitamente aplicarle una regla (típicamente una fórmula algebraica), a diferencia del proceso, en el que se puede pensar a la función en términos de aceptar entradas, manipularlas de alguna manera y producir salidas sin la necesidad de hacer cálculos explícitos.

Por último, en la tercera figura presenta algún tipo de gráfico en donde se muestra un caso particular de función: $f(x) = x^2$, considerando como dominio y rango lo que pareciera la línea recta pero solo resaltando valores enteros y utilizando las flechas como la regla de correspondencia.

Después de esto, el autor define algunos otros conceptos como dominio natural, variable independiente y variable dependiente para de ahí comenzar con ejemplos como los presentados en la figura 5.2.1.4:

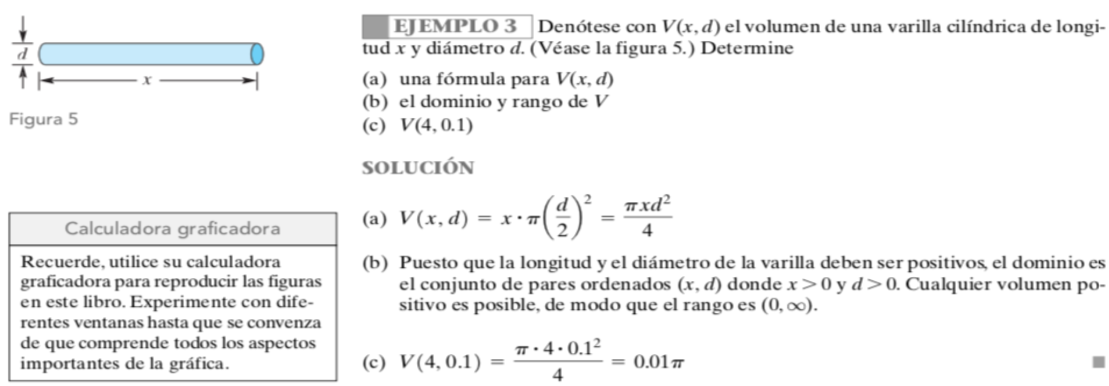


Figura 5

Calculadora graficadora

Recuerde, utilice su calculadora graficadora para reproducir las figuras en este libro. Experimente con diferentes ventanas hasta que se convenza de que comprende todos los aspectos importantes de la gráfica.

EJEMPLO 3 Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. (Véase la figura 5.) Determine

(a) una fórmula para $V(x, d)$
(b) el dominio y rango de V
(c) $V(4, 0.1)$

SOLUCIÓN

(a) $V(x, d) = x \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi x d^2}{4}$

(b) Puesto que la longitud y el diámetro de la varilla deben ser positivos, el dominio es el conjunto de pares ordenados (x, d) donde $x > 0$ y $d > 0$. Cualquier volumen positivo es posible, de modo que el rango es $(0, \infty)$.

(c) $V(4, 0.1) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 0.1^2}{4} = 0.01\pi$ ■

Figura 5.2.1.4. Ejercicio de función (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 30).

En la figura 5.2.1.4 se puede observar que se privilegia el registro de representación algebraico en el sentido de Duval (1998) (como se citó en Oviedo et al., 2012) tanto en la explicación como en los tipos de ejercicios que presenta el libro (ver figura 5.2.1.5):

40. Sea $A(c)$ el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como **función de acumulación**. (Véase la figura 13.) Determine

(a) $A(1)$ (b) $A(2)$

(c) $A(0)$ (d) $A(c)$

(e) Esboce la gráfica de $A(c)$.

(f) ¿Cuáles son el dominio y el rango de A?

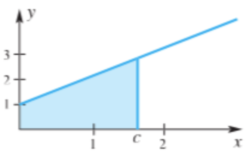


Figura 13

46. Siga las instrucciones del problema 45 para $f(x) = (\text{sen}^2 x - 3 \tan x)/\cos x$.

47. Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 8$ en el dominio $[-2, 5]$.

(a) Determine el rango de f.

(b) En este dominio, ¿dónde $f(x) \geq 0$?

49. Grafique $f(x) = (3x - 4)/(x^2 + x - 6)$ en el dominio $[-6, 6]$.

(a) Determine las intersecciones con el eje x y con el eje y.

(b) Determine el rango de f para el dominio dado.

(c) Determine las asíntotas verticales de la gráfica.

Figura 5.2.1.5. Ejercicios propuestos para el tema de función (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 34).

Como menciona Martínez-Planell & Trigueros (2009) para los estudiantes es difícil calcular el rango cuando el problema se presenta en el registro tabular, algebraico y gráfico, y dado que se privilegia más el registro algebraico, debería considerarse el tomar en cuenta otros registros para que de alguna manera una combinación de éstos permita una mejor comprensión.

Es importante mencionar que, además de que se privilegia uno de los registros de representación, el tipo de problemas que se deja como ejercicio al lector nos conducen solo a lo mecánico, ya que proporcionan la función y el estudiante tiene que determinar el rango sin pasar por acciones y procesos que le permitan llegar a calcularlo. Por esta razón podemos decir que, en términos de la teoría APOE, los ejercicios solo ayudan al estudiante a desarrollar cuando mucho una concepción acción del concepto imagen de una función y realmente no se propicia una reflexión que permita interiorizar las acciones en un proceso y encapsular este en un objeto.

Para este tema y en este libro los conceptos previos al tema son: los números reales, desigualdades y valor absoluto, sistema de coordenadas y gráfica de funciones.

Por otro lado, en la Unidad Didáctica de Análisis Matemático I uno de los libros que se utiliza es el Apostol (2001). En este se menciona que cada nuevo concepto importante viene precedido de una introducción histórica, que describe su desarrollo desde una primera noción física intuitiva hasta su formulación matemática precisa, así, el estudiante descubre en parte los esfuerzos del pasado, los triunfos de los hombres que más han contribuido al tema, se convierte en participante activo en la evolución de las ideas y no queda como mero observador pasivo de los resultados.

Además, se menciona que es posible combinar un desarrollo teórico riguroso con una sana formación técnica dentro del cálculo, y este libro representa un intento de establecer un sensible equilibrio entre las dos tendencias.

En este libro, en la sección “Funciones: Ideas generales y ejemplos” se presenta un panorama sobre lo que es una función, y dentro de ésta, se presenta una primera definición de imagen de una función (ver figura 5.2.1.6):

> La palabra «función» fue introducida en Matemáticas por Leibniz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas. Actualmente, la definición de función es esencialmente la siguiente: Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una *función* es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el *dominio* de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el *recorrido* de la función. (Éste puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario.)

Figura 5.2.1.6. Definición de función (Apostol, 2001, p. 62).

La representación de una función la hace de la siguiente manera (figura 5.2.1.7):

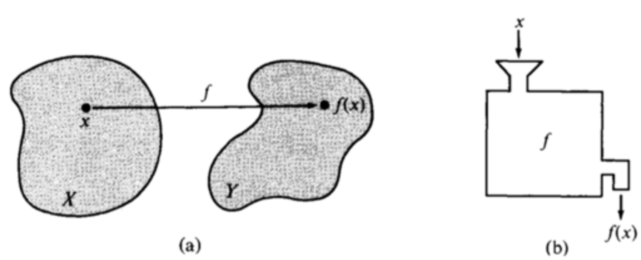


Figura 5.2.1.7. Representación esquemática del concepto de función (Apostol, 2001, p. 63).

Como podemos observar en la figura 7, este autor utiliza lo que llama “representación esquemática” para ayudar al estudiante a visualizar la función. En la imagen (a) considera dos “manchas” completamente irregulares como los conjuntos, llamados X e Y, puntos sobre ellas para denotar los elementos de los conjuntos y una flecha para la regla de correspondencia, pero realmente la idea de función podría resultar confusa a los estudiantes, pues solo hace una conexión de un elemento en el conjunto X con el conjunto Y, lo cual podría causar malas interpretaciones por parte de los alumnos. La figura (b) es exactamente la misma que vimos en Purcell, Varberg y Rigdon (2007) y esto es muy interesante, ya que nos muestra la idea de función que se pretende los alumnos entiendan desde un inicio y que Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) consideran en una etapa de proceso.

Luego de esto el autor menciona algunos ejemplos de funciones para después, en el apartado 1.3 llamado "Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados", dar la definición formal de función, en donde no sólo define lo que es un par ordenado, sino también cuándo dos pares ordenados son iguales como se muestra en la figura 5.2.1.8:

> En la definición de igualdad de conjuntos, no se menciona el *orden* en el que aparecen los elementos. Así que, los conjuntos $\{2, 5\}$ y $\{5, 2\}$ son iguales porque constan exactamente de los mismos elementos. En ciertas ocasiones el orden *es* importante. Por ejemplo, en Geometría analítica plana las coordenadas (x, y) de un punto representan un par ordenado de números. El punto de coordenadas $(2, 5)$ no es el mismo que el de coordenadas $(5, 2)$, si bien los *conjuntos* $\{2, 5\}$ y $\{5, 2\}$ son iguales. Del mismo modo, si tenemos un par de objetos a y b (no necesariamente distintos) y deseamos distinguir uno de los objetos, por ejemplo a, como el *primer* elemento y el otro, b, como el *segundo*, encerramos los objetos en un paréntesis (a, b). Lo consideramos como un par ordenado. Decimos que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales. Esto es, se tiene
>
> $$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d\,.$$

Figura 5.2.1.8. Definición de par ordenado (Apostol, 2001, p. 65).

Ambas definiciones son necesarias, pues enseguida define función en términos de este concepto como se muestra en la figura 5.2.1.9:

> Vamos ahora a establecer la definición de función.
>
> DEFINICIÓN DE FUNCIÓN. *Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*
>
> Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el *dominio* de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina *recorrido* de f, o conjunto de *valores* de f.

Figura 5.2.1.9. Definición de función con par ordenado (Apostol, 2001, p. 65).

Es importante mencionar que para el autor la imagen de la función es llamado recorrido o conjunto de valores. Luego de haber definido lo que es una función da ejemplos en donde dice cuál es el correspondiente recorrido de éstas y define cuándo dos funciones son iguales, pero luego de esto, dentro de los ejercicios propuestos, el autor en ninguno pide al menos determinar el recorrido de alguna función, parece ser que no le da importancia o da por sentado que queda totalmente claro.

Podemos decir que este autor no propicia que el alumno desarrolle al menos una concepción acción del concepto, pues pretende que los estudiantes adquieran de manera directa una concepción proceso de función. Como conocimientos previos el autor presenta: Conjunto, pares ordenados e igualdad de pares ordenados.

Otro de los libros que se utiliza en la Unidad Didáctica de Precálculo es el libro Stewart (2001) "Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas", en este libro menciona el autor que ha tratado de escribir un libro que ayude a estudiantes a descubrir el cálculo, por su poder práctico y sorprendente belleza. Su meta es expresar al estudiante un sentido de la utilidad del cálculo y desarrollar competencia técnica en él, pero también se esfuerza en dar alguna apreciación de la belleza intrínseca de esta materia.

También se menciona que su énfasis está en que se entiendan los conceptos. Para ello, ha tratado de poner en práctica esa meta a través de la *Regla de Tres*: "Los temas deben presentarse de manera geométrica, numérica y algebraica", pues la visualización, la experimentación numérica y gráfica, y otros métodos, han cambiado de modo fundamental la forma en que se enseña el razonamiento conceptual.

En este libro se da la siguiente definición de función (ver figura 5.2.1.10):

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso, el segundo número es función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

A menudo, se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se llama **variable dependiente**. En el ejemplo **A**, r es la variable independiente y A es la dependiente.

Figura 5.2.1.10. Definición de función (Stewart, 2001, p. 11).

Como podemos observar, el autor le llama a la imagen "rango" y resalta en color rojo la definición de función, haciendo parecer que la definición de rango no es algo importante o no causará problema a los estudiantes.

Es importante resaltar que también en este libro usan la imagen de la máquina para referirse a la definición de función (ver figura 5.2.1.11) y dentro de ésta definen el rango, cabe mencionar que a diferencia de los otros autores de libros, aquí sí se explica cada uno de los elementos de la figura, y hace explícito que una función es como una máquina, donde se recibe una entrada que llama x y produce una salida $f(x)$ de acuerdo a la ley que define a la función, esta imagen va más acorde con la primera definición que considero de función y no a la de par ordenado, se puede pensar en que dar dos definiciones de función podrían en un inicio confundir al estudiante a menos que se estableciera la equivalencia entre ambas, es decir, que los estudiantes pudieran abstraer que se trata de la misma definición aunque en principio parecieran diferente. Esto es algo que los libros de texto no explican al lector.

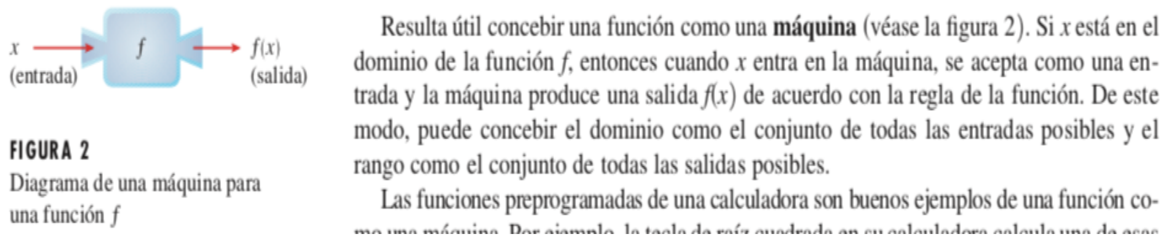


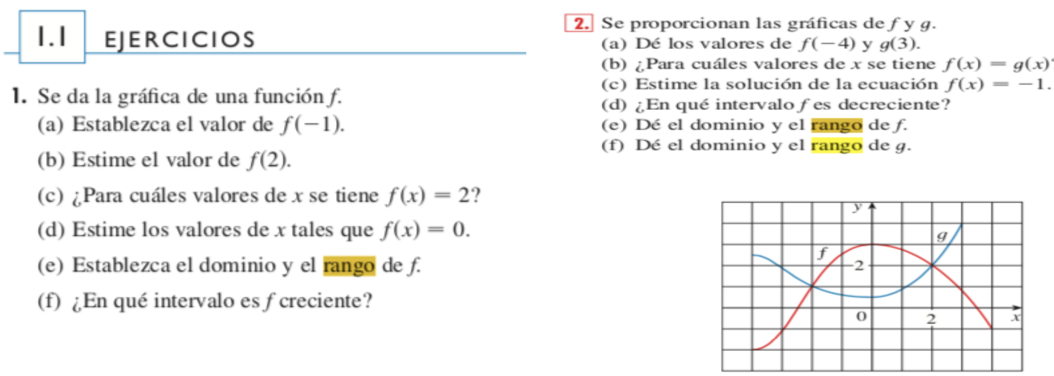
FIGURA 2
Diagrama de una máquina para una función f

Resulta útil concebir una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puede concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de una función co-

Figura 5.2.1.11. Concepción de función como una máquina (Stewart, 2001, p. 12).

El tipo de ejercicios que el autor presenta son como los siguientes (ver figura 5.2.1.12):



1.1 EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de una función f.
(a) Establezca el valor de $f(-1)$.
(b) Estime el valor de $f(2)$.
(c) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = 2$?
(d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
(e) Establezca el dominio y el rango de f.
(f) ¿En qué intervalo es f creciente?

2. Se proporcionan las gráficas de f y g.
(a) Dé los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
(b) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = g(x)$?
(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
(d) ¿En qué intervalo f es decreciente?
(e) Dé el dominio y el rango de f.
(f) Dé el dominio y el rango de g.

Figura 5.2.1.12. Ejercicios para el tema de imagen de una función (Stewart, 2001, p. 20).

Como podemos observar los ejercicios se quedan a un nivel de acción y no permiten que exista reflexión, además, se presentan en el registro verbal y algebraico los cuales es necesario tomar en cuenta, ya que de acuerdo a Martínez-Planell & Trigueros (2009) el registro de representación en el que se presenta a los estudiantes el problema de obtención de la imagen de una función determina la dificultad que les causará.

Como conceptos previos están: conjunto, regla de correspondencia, par ordenado.

En general, podemos decir que la imagen de la máquina aparece en los 3 libros analizados y parece ser que los autores dan por sentado que esta figura le será de ayuda al estudiante para comprender el concepto de imagen. Otro aspecto es que hay demasiados nombres para la imagen de una función: imagen, rango, recorrido y conjunto de valores, lo cual puede confundir al estudiante.

Se observó que se propician más los registros de representación algebraico y gráfico y que los libros comparten la misma estructura en la presentación del tema, pues explican la definición o teorema, luego ejemplos y ejercicios, así que podemos decir que siguen la forma tradicional de enseñanza. Además, aunque la definición es muy general, se usa para funciones reales.

Otro aspecto es que definen el concepto de imagen después del concepto de función y no parecen marcarlo como algo importante, esto también puede hacerle parecer al estudiante que no es una definición a considerar, cuando en realidad la comprensión de este concepto es fundamental para comprender conceptos posteriores.

También es importante mencionar que los autores presentan la definición de función como una regla de correspondencia y esta definición es ambigua en términos de qué es una regla de correspondencia. A su vez, los ejercicios que proponen se quedan en un nivel de acción ya que no propician la reflexión, es decir, pretenden que el alumno aprenda el concepto como proceso sin reflexionar.

Después de hacer el análisis de cómo presentan el tema algunos de los libros que se utilizan en la licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, se decidió que la definición a usar para referirnos a la imagen de una función será la de Stewart (2001), por la manera en la que define que "el rango es el conjunto de valores posibles de *f(x)*, conforme *x* varía en todo el dominio" (ver figura 5.2.1.13), ya que a diferencia de los otros dos libros, esta definición especifica que ese conjunto se obtiene de variar la *x* en todo el dominio de la función y esta necesidad de verlo de esta manera se hace notar más adelante en donde explicamos la Descomposición Genética Preliminar.

> A menudo, se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario

Figura 5.2.1.13. Definición de imagen tomada de Stewart, 2001, p. 11.

5.2.2 Dificultades

De acuerdo a las investigaciones revisadas en los antecedentes podemos decir que las dificultades que presentan los estudiantes son las siguientes:

Tall & Bakar (1992) mencionan que, aunque se enseñe sobre conceptos generales como el dominio en el que se define la función y el rango de valores posibles, estos términos no parecen quedarse en las memorias de los estudiantes.

Dorko & Weber (2014) describen dificultades sobre la generalización de un concepto y mencionan que el cómo los estudiantes generalizan un concepto aprendido con funciones de una variable al significado del concepto para funciones multivariables dice mucho sobre la comprensión que el estudiante tiene de éste, y realmente los estudiantes presentan dificultades para generalizar debido a que el concepto con funciones de una variable no está comprendido.

Martínez-Planell & Trigueros (2009) encontraron que tiene mucho que ver el registro de representación en el que se presenta el problema de obtención de la imagen de una función, pues en esta investigación, los estudiantes no podían obtener ni el dominio ni el rango de una función cuando se daba su representación gráfica, tabular y algebraica. Además, hubo incomprensión del dominio y el rango de funciones por parte de los estudiantes.

En la investigación de Martínez-Planell & Cruz (2016) se describen dificultades sobre las funciones inversas, pues como se sabe, la restricción que se necesita hacer para que la función inversa tenga sentido involucra la comprensión del dominio y rango de la función y realmente les causó dificultad a los estudiantes poder determinar funciones inversas.

En esta investigación definieron una estructura mental llamada proceso rango y resultó ser el proceso que causó la mayor frecuencia de dificultad, de aquí que los autores concluyan que “Una concepción del proceso del rango requiere atención explícita y no se derivará de la mera declaración de una definición formal”.

Por otra parte, Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) encontraron dificultades con el concepto de rango de una función, pues los alumnos confundieron los conjuntos dominio y rango, presentan dificultad con la notación usada, más específicamente dificultades con el uso de cuantificadores, hubo inhabilidad para distinguir entre un conjunto y los elementos de un conjunto. Otra dificultad es que los estudiantes asumen que el rango de una función es el codominio y concluyen que la función es sobreyectiva sin verificar.

Podemos entonces afirmar que la imagen de una función es fundamental para poder comprender conceptos más complejos, mismos que son fundamentales en la matemática. Es importante mencionar que parece ser que se da por hecho que los estudiantes comprenden a la perfección el concepto de imagen de una función, cuando en realidad es evidente que no lo es.

5.2.3. Construcciones previas necesarias para la construcción del nuevo concepto.

De acuerdo con la teoría APOE, los individuos tratan con situaciones de problemáticas construyendo y aplicando estructuras mentales en su esfuerzo por comprender conceptos matemáticos. Esto implica transformar estructuras previamente establecidas (Arnon, et al., 2014).

De acuerdo con Dubinsky (como se citó en Arnon, et al., 2014) la teoría APOE se basa en la premisa de que un individuo puede aprender cualquier concepto matemático siempre que se hayan construido las estructuras necesarias para comprender ese concepto.

Por esta razón, es muy importante determinar cuáles estructuras previas necesita el estudiante para construir el nuevo concepto, y de acuerdo con la revisión de libros de textos citados anteriormente y la revisión de investigaciones basadas en la teoría APOE consideramos que, como conceptos previos necesarios para la construcción del nuevo concepto *imagen de una función* deben estar: conjunto, cuantificadores, función y número real.

Para la construcción del concepto el estudiante debería contar con una concepción objeto de número real, proceso de conjunto, esquema de cuantificadores y proceso de función. A continuación, describimos con detalle en qué consiste cada una de estas concepciones y de qué manera contribuyen en el diseño de la descomposición genética elaborada.

Esquema de cuantificadores

En Dubinsky, Elterman & Gong (1988) se hace una investigación cuyo propósito es proponer un análisis constructivista del aprendizaje del concepto de cuantificadores. En ésta, se propone el Esquema de cuantificadores, donde se dice que en éste los objetos son proposiciones y un tipo de procesos son interiorizaciones de operaciones lógicas en conjuntos de proposiciones. Los procesos se encapsulan para obtener proposiciones más complejas y de esta manera, el esquema es generalizado. Otra fuente de los procesos es la interiorización de un proceso interno correspondiente a una declaración lógica presentada en lenguaje natural o derivada de una situación.

En esta investigación describen que la construcción del esquema de cuantificación se divide en tres etapas. Primero, la etapa preliminar que se refiere al conjunto de esquemas que el estudiante debe poseer para comenzar a comprender y trabajar con cuantificación; segundo, la cuantificación de un solo nivel en la que se aplica un cuantificador existencial o universal a un conjunto de proposiciones; y finalmente, el esquema completo en el que dos o más cuantificaciones se coordinan para formar las complejas declaraciones lógicas de las matemáticas avanzadas.

La etapa preliminar (primera etapa del Esquema cuantificador) se describe de la siguiente manera:

Al principio, los objetos están restringidos a declaraciones simples, declaraciones de hechos. Los únicos procesos internos que están presentes consisten en verificar (posiblemente imaginada) la realidad para determinar la verdad o la falsedad de la declaración. La negación equivale a verificar una realidad diferente.

A medida que el alumno avanza en esta etapa, las proposiciones se vuelven más complicadas de dos maneras: vinculando dos o más proposiciones mediante las operaciones lógicas estándar (y, o, implica, etc.) y la introducción de variables cuyos valores pueden ser desconocido o cambiantes. Ambas dan lugar a procesos internos. Para la primera, existe el acto de coordinar varias proposiciones con los conectores lógicos y, para la segunda, el estudiante debe imaginar recorrer todos los valores de la variable en su conjunto de dominio para ver cuál es la declaración declarativa en cada caso. Estos procesos son usados, por ejemplo, en pensar sobre la verdad o falsedad de toda la declaración. Es importante mencionar que los estudiantes iteran a través de los conjuntos y verifican el valor verdadero en cada caso.

La cuantificación de un solo nivel (segunda etapa del Esquema cuantificador) se describe de la siguiente manera:

Una cuantificación de un solo nivel es una propuesta de una de las siguientes dos formas:

$$\forall x \in S, P(x) \qquad \exists x \in S \ni P(x)$$

Para construir el esquema de cuantificación a este nivel, sugieren que el estudiante debe coordinar los dos desarrollos descritos en la etapa preliminar en relación con declaraciones simples.

El resultado general es un proceso interprocesado de iterar a través de un conjunto de proposiciones que dependen de una o más variables y aplicar una cuantificación a una posición única cuyo valor es la verdad o la falsedad de cualquiera de ellas (cuantificación universal) o al menos uno de ellos (cuantificación existencial).

La característica adicional que distingue esta etapa del final de la etapa preliminar es que la iteración está controlada por la cuantificación.

Específicamente la definición que utilizamos para la descomposición genética preliminar es la de un solo nivel, pues es la que describe precisamente el cuantificador universal (∀) y existencial (∃), fundamentales para que el alumno comprenda el concepto de imagen de una función, pues de acuerdo a la definición que tomamos en cuenta, estos cuantificadores nos permitirán obtener la imagen de una función.

Proceso de función

Otra de las estructuras mentales que necesitamos es el proceso de función, pues de acuerdo con la descomposición genética para la función basada en ideas de Dubinsky (1991) (como se citó en Arnon, et al., 2014) se menciona que:

La construcción del concepto de función comienza con Acciones en un conjunto, estas acciones involucran tomar un elemento de un conjunto, explícitamente aplicarle una regla y asignarle a ese elemento específico un único elemento del segundo conjunto. La interiorización comienza cuando el individuo comienza a ver la función como un tipo de transformación que empareja elementos de un conjunto, llamado dominio, con elementos de un segundo conjunto, llamado rango.

Un individuo que muestra una concepción Proceso de función puede pensar en una función en términos de aceptar entradas, manipularlas de alguna manera, y producir salidas sin la necesidad de hacer cálculos específicos. Evidencia de una concepción proceso de función puede incluir la habilidad de determinar si una función tiene inversa, lo que puede requerir una reversión del proceso función, o describir cómo hacer la composición de dos funciones, lo que requeriría una coordinación de dos Procesos de función.

Indicaciones de la encapsulación pueden incluir la capacidad de un individuo para formar conjuntos de funciones, o para realizar operaciones aritméticas en funciones, o para construir una función que sea un límite de una secuencia de funciones. En cada uno de estos casos, las funciones se tratan como entidades estáticas a las que se pueden aplicar acciones.

Un individuo que puede determinar si la relación entre dos entidades define una relación funcional y puede coordinar varios procesos para determinar el dominio y el rango de una función, puede estar dando evidencia de la construcción de un esquema de función. Una indicación de la coherencia de un esquema de función incluiría la capacidad de un individuo para determinar si una situación matemática particular define una relación funcional.

Por esta razón consideramos una concepción Proceso de función, pues es en esta concepción donde el estudiante piensa en la función en términos de una máquina, es decir, en términos de aceptar entradas, no importa que no sean números reales, y además produce su salida sin la necesidad de hacer cálculos específicos

Proceso de conjunto

Para que un alumno comprenda el concepto de imagen de una función necesita de la función y de los cuantificadores, pero dentro del análisis de las dificultades se encontró que realmente los alumnos presentan dificultades con el concepto de conjunto, por ejemplo, Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) mencionan que los estudiantes presentan inhabilidad para distinguir entre un conjunto y los elementos de un conjunto, confunden los conjuntos dominio y rango con los elementos del conjunto.

Para esto consideramos la descomposición genética de espacio vectorial de Weller et al. (como se citó en Arnon et al., 2014), en la cual se considera necesario el esquema de conjunto, y dentro del desarrollo de este concepto describe cuatro estructuras mentales involucradas, a continuación, describimos dos de éstas:

Acción: Un individuo solo puede concebir un conjunto cuando se le da una lista específica de elementos o cuando se le presenta una condición particular de pertenencia al conjunto.

Proceso conjunto: La acción de reunir y juntar objetos en una colección de acuerdo con alguna condición es interiorizada.

Se utilizará la concepción proceso de conjunto porque a diferencia de la acción, es en el proceso donde el estudiante ya no necesita una lista específica, sino que ya colecciona los objetos de acuerdo a alguna condición, y es exactamente lo que necesitamos para que el alumno comprenda el concepto en estudio.

Objeto número real

Por último, se ha considerado como elemento del conjunto de los números reales y realizar acciones sobre ellos con las operaciones básicas.

5.2.4 Descomposición Genética Preliminar

A continuación, presentamos la Descomposición Genética pensando en qué necesita cognitivamente un estudiante cuando quiere construir la imagen de una función. En términos de APOE se explica de la siguiente manera:

La construcción de imagen de una función comienza realizando la **acción de evaluar una función** usando las estructuras previas de proceso de función, objeto de conjunto y objeto de número real.

El alumno realiza la acción de evaluar una función específica, mediante su concepción proceso de función y concepción objeto de número real, más específicamente, con su concepción proceso de función el estudiante toma el objeto número real específico, aplica la regla y obtiene un nuevo objeto, que en este caso es un número real, el cual es su imagen. Si el alumno es capaz de hacer esto, diremos que tiene una concepción **acción de imagen de una función**. Luego eso se interioriza mediante la reflexión de la repetición de esta acción de evaluar funciones en diferentes valores particulares del conjunto dominio, ya sea finito o infinito, por ejemplo, el conjunto de los números naturales, enteros, irracionales, reales, además usando funciones representadas en forma algebraica y geométrica, así como funciones discretas, continuas, discontinuas, etc. En los registros de representación algebraico y geométrico haremos uso de números enteros para que no represente mayor dificultad el evaluar la función.

La interiorización que resulta de la repetición de la acción de imagen de una función permitirá al alumno en un **primer nivel,** ser consciente del subconjunto del contradominio obtenido al hacer mentalmente la evaluación de todos los elementos del dominio de la función. En otras palabras, la Interiorización se dará cuando el alumno se dé cuenta que puede evaluar la función en todos los elementos del dominio de *f* y que el resultado es un subconjunto del contradominio o inclusive el propio contradominio. Aunque no lo pueda realizar paso a paso cuando se le da conjuntos infinitos él ya reconoce que puede calcular todos los valores posibles *f(x)* sin necesidad de hacerlo y que le da como resultado un subconjunto del contradominio. Esto le permitirá ir **construyendo la estructura mental de proceso imagen de una función.**

Más específicamente, a nuestra consideración, lo que le va a ayudar al alumno a ser consciente de la existencia del subconjunto y el cuantificador universal, es el hecho de pasar de lo finito a lo infinito, ya que si solo trabajamos con conjuntos finitos podría calcular la imagen tomando todos los elementos del conjunto, en cambio si el conjunto es infinito tendrá que forzosamente pensar en que puede obtener la imagen de todos los elementos del conjunto. La interiorización se puede llevar a cabo poniéndole situaciones matemáticas a los alumnos en donde el conjunto de partida y llegada pueden ser conjuntos infinitos o finitos. Por ejemplo, podemos ponerle el conjunto {2,4,6,8} y que calcule *f(2)*, *f(4)*, etc. Pero, para que la repetición de la acción se acompañe de la reflexión, se le pueden hacer preguntas como: ¿puede evaluar a todos los elementos del conjunto dominio? ¿qué le daría como resultado? ¿cómo lo haría?

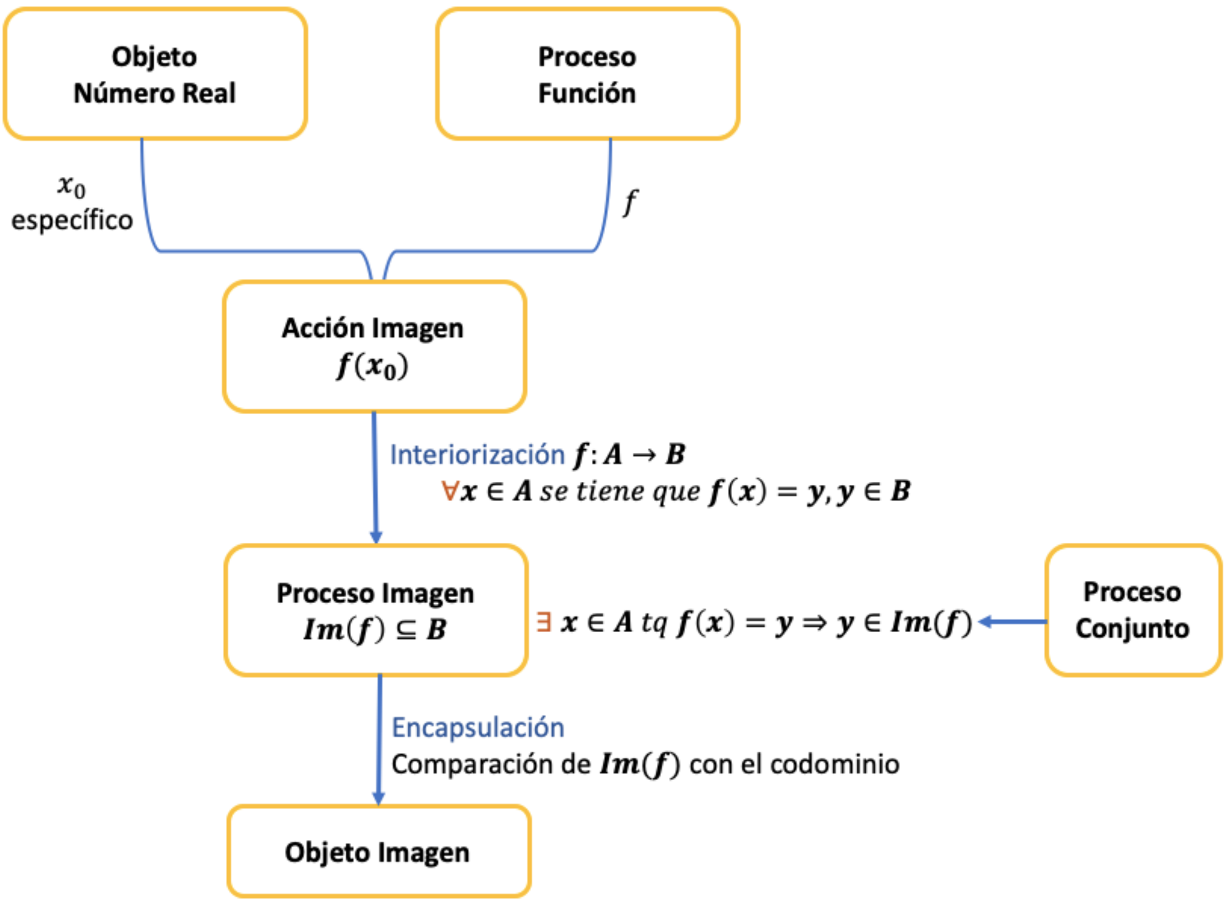
El **proceso imagen** se dará no solo cuando el alumno sea consciente de que evaluar todos los elementos del dominio *A* de la función le da un subconjunto del contradominio *B*; si no, además, que podrá obtener dicho subconjunto.

Para que el alumno determine ese subconjunto deberá tomar un objeto *y* en el contradominio, luego con su concepción esquema de cuantificador en un solo nivel (segunda etapa del esquema cuantificador) que le permite aplicar un cuantificador existencial a un conjunto de proposiciones, será capaz de determinar si existe un objeto *x* en el dominio. Luego, usando su concepción proceso de función, aplicará *f* a *x* para obtener *f(x)* y así, finalmente, llevar acabo **la acción de comparar** el objeto *f(x)* con *y* para determinar si son o no iguales, y de esta manera establecer si *y* es o no un elemento de la imagen.

Con su concepción proceso de conjunto que le permite reunir y juntar objetos en una colección de acuerdo con alguna condición, será capaz de determinar el conjunto de todos los elementos que cumplen la condición: dado *y* elemento del contradominio existe un *x* tal que al aplicarle *f* es igual a *y*, esto le dará la imagen de la función. De esta manera cuando el alumno pueda determinar la imagen de la función diremos que tiene una **concepción proceso imagen**.

El estudiante **encapsulará el proceso** cuando sea consciente de que se le pueden realizar acciones, y además es capaz de llevarlas a cabo, esto ocurrirá cuando utilice dicho conjunto para determinar cierta propiedad de la función, por ejemplo, al comparar la imagen obtenida con el contradominio para determinar si la función es o no sobreyectiva o al determinar si todos los elementos del contradominio son imagen de un elemento en el dominio se podrá determinar si la función tiene o no inversa.

Diagrama de la DGP



5.3 Diseño e implementación de instrumentos

5.3.1 Análisis *a priori del* cuestionario diagnóstico

A continuación, presentamos el cuestionario diagnóstico con su respectivo análisis a priori:

Situación 1. Resuelva:

(a) $2^4 * 3 + \sqrt{49} \div 2^4 \div 16 - (23 + 5^2)$

(b) $13^2 * \sqrt{25} - [(4^3 + \sqrt{144}) + (3^5 - 2^7)]$

(c) $(8^3 * \sqrt{36} - 2^5 + 2^3 + \sqrt{16} + 2) \div 3$

Este ejercicio pretende evidenciar la concepción objeto de número real, ya que el estudiante debe considerar a los elementos del conjunto de los números reales y realizar acciones sobre estos mediante las operaciones básicas, esta estructura previa es indispensable ya que el estudiante debe evaluar una función en valores específicos y simplificar lo más posible el resultado. Se considera que evidenciará esta concepción porque el estudiante tendrá que operar de manera adecuada para poder obtener el resultado.

Situación 2. Sea A el conjunto de todas las funciones reales en una variable, determine el conjunto de todas las funciones cuya inversa existe.

Con este ejercicio se pretende evidenciar la concepción proceso de conjunto, ya que se espera que los estudiantes realicen la acción de reunir objetos en una colección dada alguna condición, pero de una manera más interiorizada, es decir, no dar elementos finitos para que digan cuáles funciones tienen inversa, sino que, dado un conjunto infinito puedan determinar el conjunto que cumple con la condición pedida. Los estudiantes deberán tener interiorizada la acción de conjunto para poder determinar el conjunto que cumple con la condición cuando el conjunto dado es infinito. Puede ocurrir que los estudiantes solo den algunos ejemplos y no puedan ser conscientes de que al no poder enlistar a todos los elementos deban expresar el conjunto de manera general, es decir, $S = \{f : f\ es\ invertible\}$ o $S = \{f : f\ es\ biyectiva\}$.

Situación 3. Sea A el conjunto de las funciones reales, determine el conjunto de las funciones inyectivas.
Como en el ejercicio anterior el ejercicio 3 pretende evidenciar la concepción proceso de conjunto, se espera que los alumnos lleguen a ser conscientes de que necesitan determinar el subconjunto que cumple con la condición dada pero de manera general, pues no le será posible enlistar cada una de las funciones que son inyectivas, es decir, tendrá que dar un subconjunto $S = \{f : f(x_1) \neq f(x_2)\ siempre\ que\ x_1 \neq x_2\}$.

Situación 4. Verifique si la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ es una función sobreyectiva siendo el $\boldsymbol{Dom(f) = \mathbb{R}}$ y el rango $\boldsymbol{\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}}$.

Este ejercicio pretende evidenciar la estructura de esquema de cuantificador de un solo nivel, pues como se mencionó en Dubinsky, Elterman & Gong (1988), este es una propuesta de una de las siguientes dos formas:

$$\forall x \in S, P(x) \qquad \exists x \in S \ni P(x)$$

Y como se puede observar el ejercicio de determinar si una función es sobreyectiva hace uso de este nivel de cuantificación, ya que tendrá que verificar que para todo (∀) elemento del conjunto contradominio y existe (∃) un elemento x en el dominio tal que $f(x) = y$, es decir, tendrá que tomar todos los elementos del dominio, aplicarles la función y reunir esas imágenes en un conjunto que va a comparar con el contradominio para poder determinar si se cumple que coincidan.

Situación 5. Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones:

- **(a) Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^2 = y$.**
- **(b) Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^3 = y$.**

Esta situación fue tomada de Purcell, Varberg y Rigdon (2007, p.51) y con este se pretende evidenciar la concepción esquema de cuantificador de un solo nivel, pues el estudiante tendrá que utilizar el cuantificador existencial (∃) y el cuantificador universal (∀), es decir, las dos formas propuestas en Dubinsky, Elterman & Gong (1988) para poder determinar si los incisos son verdaderos o falsos.

Situación 6. En cada una de las siguientes preguntas, f, g, h son funciones cuyos dominios y rangos son el conjunto de los números reales, tales que

$$h = f \circ g$$

(a) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, ¿sería posible encontrar *h(0)*? Si sí, encuéntrela si no justifique.

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	**2**	**-3**
0	**-3**	**-1**
4	**1**	**2**

(b) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, ¿sería posible encontrar *f(2)*? Si sí, encuéntrela sino explique.

x	$h(x)$	$g(x)$
-1	**1**	**-3**
4	π	**1**
π	**0**	**2**

(c) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, ¿sería posible encontrar *g(4)*? Si sí, encuéntrela sino explique.

x	*h(x)*	*f(x)*
-1	**1**	**-2**
2	**3**	**1**
4	**-2**	π

Con esta situación se pretende evidenciar la concepción proceso de función, se propuso en Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992, p. 282) y de acuerdo a la investigación, este problema se preocupa por la habilidad de los estudiantes para trabajar con un proceso cuando es dado por un conjunto de pares ordenados listados en una tabla. La tarea particular es la composición de funciones. La pregunta 6a solo requiere que se coordinen dos procesos dados, ya que se pide obtener $h(0)$ donde *h* es la composición de las funciones *f* y *g,* de manera que el alumno debe aplicar el primer proceso dado por la función *g* al objeto 0, para obtener $g(0)$, luego encapsular este en un objeto para aplicarle el segundo proceso dado por la función *f* lo que le permitirá obtener $f\big(g(0)\big) = h(0)$. En cambio, para las preguntas 6b,c se requiere que sean capaces de revertir al menos uno de los procesos antes coordinados. En el caso particular del inciso b) debe revertir el proceso *g* ya que se requiere pensar en encontrar un *x* tal que $g(x) = 2$, el cual es $x = \pi$, de manera que al sustituirlo en la composición $h(x) = f(g(x))$ le de $0 = h(\pi) = f\big(g(\pi)\big) = f(2)$. Finalmente, para el inciso c) debe revertir el proceso *f* ya que se requiere pensar en encontrar un *x*, tal que $f(x) = h(4) = -2$, el cual es $x = -1$, de manera que al sustituir en la composición $h(x) = f(g(x))$ le de $-2 = h(4) = f\big(g(4)\big) = f(-1)$ obteniendo así $g(4) = -1$.

Situación 7. Sean las dos funciones *F* y *G* definidas como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{if } x < -2 \\ 2x+3 & \text{if } -2 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \sin x & \text{if } \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{if } 1 \leqslant x \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -4 & \text{if } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{if } 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

Encuentre el producto *F* · *G* de las dos funciones.

La pregunta 7 se propuso en Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992, p. 282) y de acuerdo a los autores es un cálculo relativamente sencillo, pero puede ser difícil para los estudiantes porque los dominios de las funciones se dividen en diferentes intervalos, es decir, las funciones están definida por partes. Entender la multiplicación de funciones no es suficiente. Tiene que contar con la estructura mental de proceso para poder determinar qué rama escoger ya que es diferente para las dos funciones, además debe determinar los intervalos en los que quedará definida la nueva función $F \cdot G$ y los valores que esta toma en cada uno de ellos. La pregunta está diseñada para determinar si la concepción proceso de los estudiantes es estable o si se va a quebrar al enfrentarse a dicha dificultad. Cabe resaltar que el manejo de las funciones definidas por partes será difícil para el estudiante que no cuente con la estructura de proceso de función.

5.3.2 Análisis *a priori del segundo* cuestionario

Para el segundo cuestionario se diseñaron nueve situaciones problemáticas matemáticas basadas en la descomposición genética preliminar, con la intención de evidenciar las estructuras y mecanismos mentales propuestos en esta.

A continuación, se presenta el análisis a priori de cada situación problemática donde se describe la estructura mental a evidenciar.

1. **Para $f(x) = 1 - x^2$ determine la imagen de:**

(a) 1, -2,0, ¼, π, $\sqrt{2}$, e, ¿puede calcular la imagen de cualquier número real? ¿cómo lo haría?

(b) [-1,1], [0,2], [-2,3) ¿Puede obtener la imagen de cualquier intervalo? ¿cómo lo haría?

Con el inciso (a) se pretende evidenciar si el alumno tiene una concepción acción de imagen de una función, pues lo que describimos en la descomposición genética fue que para la acción el alumno hace la evaluación de una función partiendo de números reales específicos, es por esta razón que no solo tomamos números enteros como lo presentan en los libros sino también números de subconjuntos de los números reales como los racionales, irracionales, etc. Una posible dificultad se puede dar cuando evalué en los irracionales, pues no es algo a lo que este acostumbrado, y será en su forma de proceder donde nos podremos dar cuenta de si evidencia su concepción previa de objeto de número real.

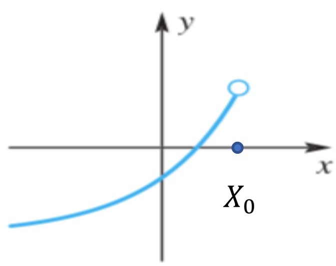
Las preguntas **¿puede calcular la imagen de cualquier número real? ¿cómo lo haría?** Nos darán cuenta de cómo el estudiante piensa sobre la imagen de una función en un valor específico, es decir, evidenciará si lo está pensando solo como una evaluación o como un subconjunto del recorrido.

En el inciso (b) lo que pretendemos es que el alumno vaya evidenciando una posible interiorización de la imagen, es decir un primer nivel en el camino al proceso, pues con los intervalos el estudiante podrá pensar en la imagen de todos los puntos del intervalo dado e ir proponiendo o imaginando posibles subconjuntos como imagen.

2. En la siguiente gráfica,

(a) ¿Qué valores de *x* tienen imagen? ¿Cuáles son las imágenes de estos valores?

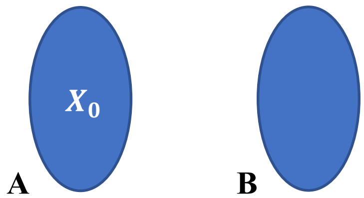
(b) ¿Cuáles valores de *x* no tienen imagen? Justifique su respuesta



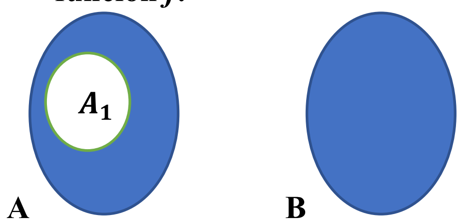
En el inciso (a) se pretende evidenciar la estructura acción, pero ahora de manera gráfica, pues al saber evaluar una función sabrá cómo puede verificar cuáles valores de *x* tienen imagen y podrá decir cuál valor no tiene imagen (inciso b), una posible dificultad para esta situación problemática sería considerar alguna imagen para X_0 o no poder determinar la imagen de manera gráfica debido a que no cuenta con la estructura previa de proceso de función, pues la función no está dada de manera algebraica y como mencionan Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) hay dificultad cuando no se tiene la expresión analítica de la función. Además, pretendemos que el alumno pueda dar a manera de subconjunto la imagen de la función, lo que daría indicios de estar construyendo el proceso, pues es capaz de ir más allá de realizar la acción de evaluar la función en valores específicos.

3. Sea el óvalo A el conjunto de partida (dominio) para alguna función *f* y el segundo óvalo el conjunto de llegada de dicha función (recorrido), conteste:

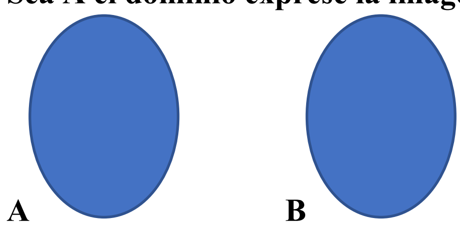
(a) Sea X_0 un elemento del dominio exprese la imagen de X_0 bajo la función *f*:



(b) Sea A_1 un subconjunto del dominio exprese la imagen de A_1 bajo la función *f*:



(c) Sea A el dominio exprese la imagen del dominio A bajo la función *f*:



En el inciso (a), (b) y (c) se pretende que el estudiante vaya construyendo su concepción proceso del concepto partiendo primero de un punto, luego un subconjunto del dominio y por último todo el dominio de la función, por esta razón no se dan de manera específica los conjuntos dominio y codominio, así como tampoco la función, los alumnos deberán de trabajar con estos elementos de manera general. Se pretende evidenciar si el alumno es consciente de que la imagen es un subconjunto del codominio. Las posibles dificultades pudieran ser con el propio concepto (imagen), tal como se menciona en Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) y que por esta razón pudieran tener dificultad para proceder.

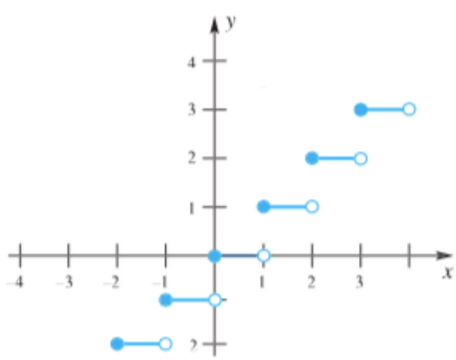
4. **Determine si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas. Si su respuesta es afirmativa dé una justificación, de lo contrario trate de proporcionar un contraejemplo.**

(a) Si la imagen de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

(b) Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

El inciso (a) y (b) de este problema tienen la intención de evidenciar el primer nivel del proceso correspondiente a pensar en la imagen de la función como un subconjunto del codominio, pues en ambos el alumno podrá dar evidencia de lo que tiene en mente como imagen de una función y podrá determinar si el enunciado es falso o verdadero. Ya que determinar la veracidad o falsedad de estas afirmaciones requiere que el alumno vaya más allá de realizar la acción de evaluar la función en objetos específicos del dominio al no darse de manera explícita la función y el dominio de esta. También para que el estudiante pueda dar solución a estas oraciones tendrá que evocar su estructura previa de objeto función pues deberá pensar en una función que cumpla con las condiciones requeridas. En el inciso a) el alumno debe pensar en un tipo de función que pudiera enviar más de un elemento del dominio al único elemento de la imagen, como por ejemplo en una función constante, esto requiere una concepción proceso de imagen de función, pues no podrá responder con solo tener una concepción acción. En el inciso b) deberá pensar en una función con dominio finito (al menos dos elementos) y que le asigne un solo elemento en el codominio, lo cual implica una concepción objeto de función.

5. **Determina la imagen de:**



a) **0, 1, 2, 3, 4, …n ¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.**

b) **[1,2), [1,2] ¿Se puede calcular la imagen de cualquier intervalo? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.**

c) $\boldsymbol{x \geq 0 , x < 0}$

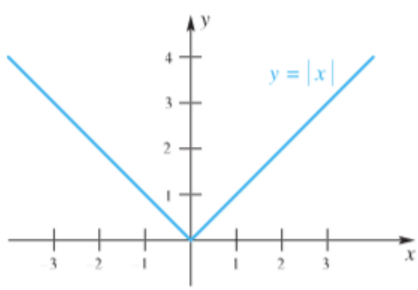
d) **Todos los** $\mathbb{R}$

En el inciso (a) se pretende evidenciar concepción acción de imagen de una función, pero esta vez de manera gráfica para cada uno de los puntos dados, a diferencia de la situación dos en donde no se dan valores específicos. La posible dificultad en esta situación será cuando responda las preguntas **¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique,** pues aquí podremos dar cuenta de si el estudiante está siendo consciente de que en efecto puede hacer la evaluación para todos los *x* en el dominio que se le den, y que a partir de aquí lo que obtiene es un subconjunto de valores en el recorrido (aunque aún no sepa cuál es ese subconjunto) podremos decir que está en un primer nivel hacia el proceso.

Análogamente para el inciso (b) con la diferencia de que este inciso y el (c) permiten evidenciar si el estudiante está consciente del cuantificador universal (∀), pues con los intervalos el estudiante se podrá percatar de que puede obtener la imagen de estos, entonces también podrá para todos los números reales. En el inciso (c) si el estudiante logra decir que es un subconjunto lo que obtiene, entonces estará en un primer nivel hacia la concepción proceso de imagen.

Una posible dificultad sería no poder obtener la imagen por estar en el registro gráfico.

6. **Conteste:**



(a) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé 2?
(b) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé -4?
(c) ¿Para qué valores de *y* existe uno o varios valores de *x* tales que *f(x)=y*?
(d) De acuerdo a las respuestas dadas anteriormente ¿cuál es la imagen de la función *y*?

En los incisos (a) y (b) se pretende hacer evidente una concepción proceso de imagen de una función preguntado por los y´s específicos para los cuales existe o no un x tal que al aplicarle la función *y* te de ese valor de y, para llegar al inciso (c) el estudiante pueda decir cuál es ese subconjunto. Para esto el estudiante debe evocar sus concepciones previas de esquema de cuantificador existencial y proceso de función. Una posible dificultad será cuando respondan el inciso (c), pues de acuerdo con Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) hay dificultad para distinguir entre un conjunto y los elementos de un conjunto, es decir, confunden los conjuntos (dominio y rango) con los elementos del conjunto.

En estos problemas se evidenciará si realmente el alumno tiene una concepción proceso de imagen y es en el inciso (c) donde el estudiante realizará la acción de comparar *f(x)* con *y* para determinar cuáles elementos del codominio pertenecen a la imagen. Cabe señalar que para lograr esto último deberá contar con la estructura previa de valor absoluto al menos en una concepción proceso pues deberá usarse al momento de realizar la acción de comparar los objetos *f(x)* con *y*.

7. **Para $g(y) = \frac{1}{y-1}$ determine cada valor.**

(a) 3, 2, 10, -5, $\sqrt{5}$, 1/5, 1

(b) Determine el rango de la función

En esta situación se pretende que el alumno ya determine el rango, pues a este punto ya debe saber de la existencia de este subconjunto del recorrido y con la situación anterior se espera que ya empiece a decir cuál es este conjunto de valores. Los valores dados en el inciso (a) tienen la intención de que el estudiante vaya viendo qué pasa con la función para ciertos valores.

Veremos si el estudiante usa algún registro de representación como apoyo y una posible dificultad sería la notación, pues en vez de tener g(x) como usualmente se utiliza, se tiene g(y), puesto que Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) mencionan que hay dificultad con la notación usada.

8. **Sea A (c) el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como función de acumulación. Determine**

   (a) A (1)

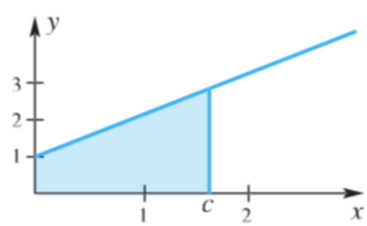
   (b) A (2)

   (c) A (0)

   (d) A (c)

   (e) Esboce la gráfica de A(c)

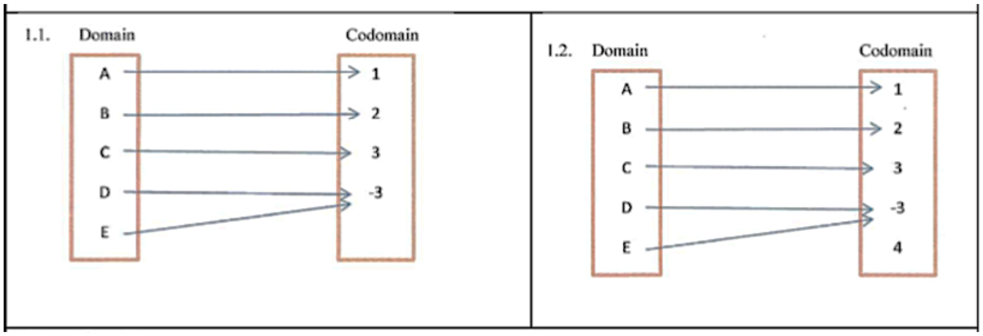
   (f) ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función A?



Consideramos que este ejercicio tiene mayor dificultad, pues considera más conocimientos previos como lo es gráfica de funciones, dominio, área de triángulo y rectángulo y noción de área. Para cada uno de los incisos lo que se pretende es evidenciar la concepción proceso de imagen, pues si cuenta con esta podrá decir cuál es el rango de A.

Las posibles dificultades podrían ser con la obtención del área, luego con el cálculo del rango, lo que nos interesa observar es de qué manera proceden o reaccionan los estudiantes.

9. **Estudie la correspondencia y explique si es función inyectiva o sobreyectiva:**



Por último, consideramos que este problema nos dará evidencia de una encapsulación del proceso, es decir, de una concepción objeto de imagen, pues aquí se espera que el estudiante determine si se trata de una función inyectiva o sobreyectiva. El estudiante que tiene esta concepción puede realizar acciones y procesos a la imagen para determinar si la función es inyectiva o sobreyectiva, debe realizar la acción de comparar la imagen de la función con el codominio de esta, para lo cual debe considerar tanto a la imagen como a codominio estáticos.

5.3.3 Aplicación y Análisis del Cuestionario Diagnóstico

A continuación, se presenta el análisis del cuestionario diagnóstico que fue aplicado el miércoles 4 de marzo del 2020 a 14 estudiantes que cursaban la materia de cálculo diferencial, correspondiente al segundo semestre en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. La aplicación tuvo una duración de alrededor de una hora, fue aplicado por su servidora y junto con la asesora de la presente tesis, se les explicó a los estudiantes la intención de este cuestionario para que los estudiantes supieran que lo que respondieran no afectaría en su calificación, pero que sí sería importante para la investigación.

Es importante mencionar que el tema de imagen de una función se presenta en el curso de pre-cálculo en primer semestre, sin embargo, la docente encargada de impartir la materia volvió a retomar el tema, pues lo requería para el concepto de límite, por lo que los estudiantes habían terminado de verlo cuando se les aplicó el cuestionario diagnóstico. Además, cabe señalar que todos los estudiantes llevaban por primera vez el curso.

Para llevar a cabo el análisis se designó a cada uno de los 14 estudiantes como E1, E2,…,E14. Éste se hizo por estudiante, analizando las respuestas que presentó en cada una de las preguntas del cuestionario y determinando si cuenta o no con cada estructura previa, ya que la intención del instrumento es seleccionar a aquellos que muestren todas o la mayoría de éstas, pues de acuerdo con la teoría APOE, si cuenta con ellas podrá construir un nuevo concepto relacionado con estas.

Estudiante E1

Para la situación 1 el estudiante E1 muestra evidencia de que en efecto puede realizar acciones sobre los números reales, pues es capaz de efectuar correctamente las operaciones pedidas en los incisos (b) y (c). En el inciso (a) comete un error al dividir $\sqrt{49} \div (\frac{2^4}{16})$, en lugar de $(\frac{\sqrt{49}}{2^4})\frac{1}{16}$, pero aquí lo que falló fue la jerarquía de operaciones, no la realización de las operaciones, como se muestra en la figura 5.3.3.1.

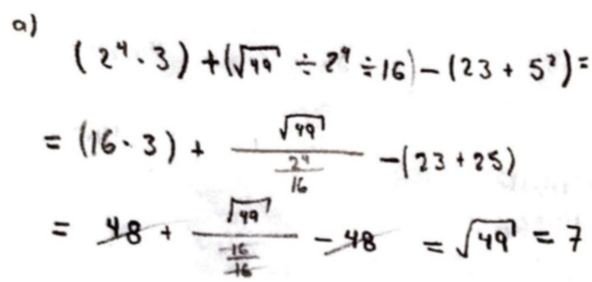
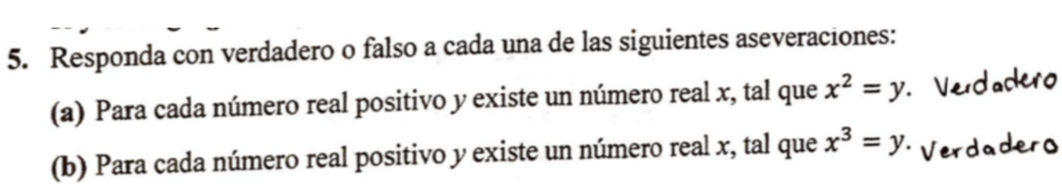


Figura 5.3.3.1. Solución del estudiante E1 a la situación problemática 1(a).

Además de la situación 1 el estudiante E1 contestó como verdaderas ambas aseveraciones de la situación 5, como se muestra en la figura 5.3.3.2, pero a pesar de que es correcto no justifica su respuesta, por lo que no contamos con suficiente evidencia para asegurar que cuenta o no con una concepción esquema de cuantificador de un solo nivel. Habría que indagar más a fondo es sus estructuras mentales mediante una entrevista.


5. Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones:

(a) Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^2 = y$. Verdadero

(b) Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^3 = y$. Verdadero

Figura 5.3.3.2. Respuesta del estudiante E1 a la situación problemática 5.

En cuanto a los demás ejercicios no contamos con evidencia que nos permita determinar si tiene o no las otras estructuras mentales previas que se pretendían evidenciar en el cuestionario diagnóstico ya que no las contestó, por lo tanto, solo podemos afirmar que el estudiante E1 muestra la estructura mental de objeto de número real.

Estudiante E2

Para la situación 1 el estudiante E2 realiza correctamente el inciso (c), pero en el inciso (a) tuvo error por la jerarquía de operaciones igual que el estudiante E1, pues tiene un error al dividir $\sqrt{49} \div (\frac{2^4}{16})$, en lugar de $(\frac{\sqrt{49}}{2^4})\frac{1}{16}$. En cambio, en el inciso (b) cometió un error en el cálculo de la operación 3^5 obteniendo así otro resultado, tal como se muestra en la figura 5.3.3.3. Consideramos que pudo ser un descuido al realizar el cálculo, pues en los demás incisos realizó de manera correcta las acciones sobre los números reales, salvo el que relacionaba la jerarquía de operaciones, de manera que podemos considerar que el estudiante muestra una concepción objeto de número real.

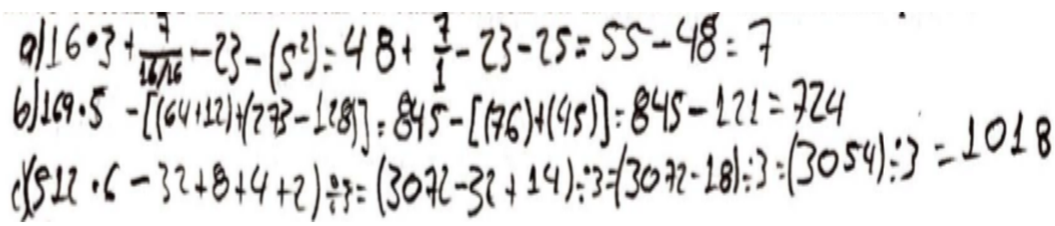


Figura 5.3.3.3. Solución del estudiante E2 a la situación problemática 1.

Para la situación 2 y 3 el estudiante no muestra presencia o ausencia de la estructura mental proceso conjunto, pues no las contesta. En cambio, para la situación 4 determina que la función no es sobreyectiva, pues al parecer por lo que responde el estudiante tiene una confusión con las definiciones de función inyectiva y sobreyectiva, esto lo afirmamos pues el estudiante menciona que no es sobreyectiva porque existe un valor de *y* que le corresponde a dos valores de *x* distintas, como se muestra en la figura 5.3.3.4.

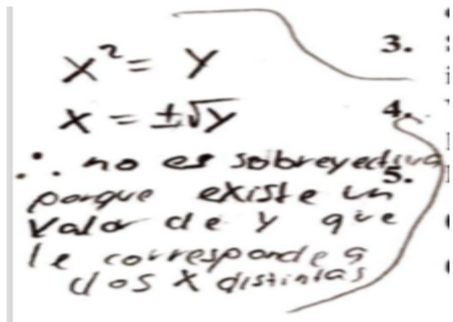


Figura 5.3.3.4. Solución del estudiante E2 a la situación problemática 4.

Este ejercicio pretende evidenciar la estructura de esquema de cuantificador de un solo nivel, que es de alguna de las formas:

$$\forall x \in S, P(x) \qquad \exists x \in S \ni P(x)$$

Y aunque el estudiante tiene una definición errónea para función sobreyectiva, hace uso del cuantificador de un solo nivel usando el cuantificador existencial (∃) para decir que "existe un valor de *y* que le corresponde a dos *x* distintas", así que podemos decir que cuenta con la estructura mental esquema de cuantificadores de un solo nivel.

Para la situación 5 E2 contesta correctamente diciendo que ambas aseveraciones son verdaderas, pero no justifica sus respuestas, pues no se le pidió que lo hiciera. Aún así, podemos decir que el estudiante muestra tener la concepción esquema de cuantificadores de un solo nivel, pues la situación 5 y la 4 tienen la intención de mostrar esta estructura mental y con lo que responde en la situación 4 se evidencia dicha estructura.

Para la situación 6 E2 contesta el inciso (a) erróneamente, ya que sí era posible encontrar *h(0)* y menciona que no. La justificación que da el estudiante nos permite decir primero que requiere tener las expresiones *f* y *g* de manera algebraica esto se deduce de lo que menciona en la figura 5 "no sabemos como son *f* y *g*", como mencionan Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) hay dificultad cuando no se tiene la expresión analítica de la función, y en este caso el estudiante requiere de ese estímulo externo para poder resolver correctamente la situación tal como se muestra en la figura 5.3.3.5.

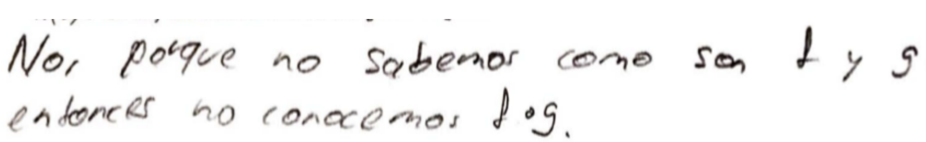


Figura 5.3.3.5. Solución del estudiante E2 a la situación problemática 6.

También podemos decir que no tiene una concepción proceso de función, porque la pregunta 6 inciso a) requiere que se coordinen dos procesos dados, ya que se pide obtener $h(0)$ donde h es la composición de las funciones f y g, de manera que el alumno debe aplicar el primer proceso dado por la función g al objeto 0, para obtener $g(0)$, luego encapsular este en un objeto para aplicarle el segundo proceso dado por la función f lo que le permitirá obtener $f(g(0)) = h(0)$, entones de acuerdo a lo que el estudiante contesta en esta situación no cuenta con la estructura mental de proceso de función y la falta de esta estructura mental se puede rectificar efectivamente con el hecho de que el estudiante no responde a los otros incisos (b) y (c).

En cuanto a la situación 7 el estudiante responde de manera correcta para el primer intervalo $x < -2$, para el segundo intervalo la multiplicación es correcta pero el intervalo no es el correcto, pues pone $-2 \leq x < 0$ en lugar de $-2 \leq x \leq 0$, de igual manera para el tercer intervalo pone $0 \leq x < 1/2$ en lugar de $0 < x < 1/2$. Para el cuarto intervalo el estudiante tuvo un error de dedo al poner $x \leq \frac{1}{2} < 1$ en lugar de $1/2 \leq x < 1$ .Para el intervalo $x = 1$ el estudiante no pone el resultado de la multiplicación de $F \cdot G = 2x\,Sen(\sqrt{x})$, por último en el intervalo de la última multiplicación el estudiante pone $x \geq 1$ en lugar de $x > 1$, tal como se muestra en la figura 5.3.3.6:

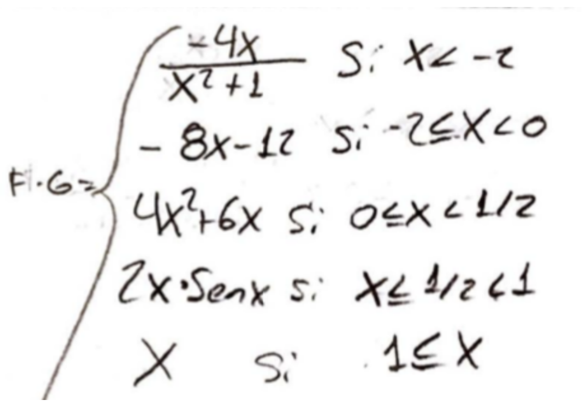


Figura 5.3.3.6. Solución del estudiante E2 a la situación problemática 7.

Podemos entonces decir que de acuerdo a lo que contestó E2 cuenta con la concepción objeto de número real y esquema de cuantificadores de un solo nivel, pero no muestra una concepción proceso de función.

Estudiante E3

Por otra parte, E3 en la situación 1 contestó correctamente al inciso (a) respetando el orden de las operaciones como se muestra en la figura 5.3.3.7:

1

$$a)\ 2^4 * 3 + \sqrt{49} \div 2^4 \div 16 - (23+5^2)$$

$$16 * 3 + 7 \div 16 \div 16 - (23+25)$$

$$48 + \frac{\frac{7}{16}}{\frac{16}{1}} - 23 + 25$$

$$\cancel{48} + \frac{7}{256} - \cancel{23} - \cancel{25}$$

$$\frac{12288 + 7 - 5888 - 6400}{256}$$

$$\frac{12295 - 12288}{256} = \frac{7}{256}$$

Figura 5.3.3.7. Solución del estudiante E3 a la situación problemática 1 (a).

En el inciso (b) solo tiene un error al restar en vez de sumar y en el inciso (c) el estudiante olvida hacer una multiplicación. A pesar de esto, como en el análisis a priori se mencionó que la concepción objeto de número real es cuando los estudiantes realizan acciones sobre los números reales mediante las operaciones básicas, podemos entonces decir que el estudiante sí cuenta con esta estructura mental previa.

Para la situación 2 no se tiene evidencia de que el estudiante cuente o no con la estructura previa ya que no contestó, sin embargo, para la situación 3 donde se pretende evidenciar la concepción proceso de conjunto, se espera que los alumnos lleguen a ser conscientes de que necesitan determinar el subconjunto que cumple con la condición dada, pero de manera general, es decir, tendrá que dar un subconjunto y el estudiante en efecto da un subconjunto en donde la condición que describe es la correcta para la definición de función inyectiva como se muestra en la figura 5.3.3.8:

3.

$$B = \{ x_1, x_2 \mid x_1, x_2 \subseteq A \text{ donde } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ y se cumple que si } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \}$$

Figura 5.3.3.8. Solución del estudiante E3 a la situación problemática 3.

Así que podemos decir que en efecto cuenta con la estructura previa proceso de conjunto. Algo que es interesante resaltar es la manera en que considera los elementos x_1 y x_2 al definir el conjunto, pues no pone que se trata de una función que va de un conjunto a otro (en este caso de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), además usa el símbolo de contención para denotar que x_1 y x_2 pertenecen al conjunto A.

Por otra parte, para la situación 4 el estudiante lleva a cabo un procedimiento para despejar la variable *x,* pero no justifica cómo eso le va ayudar a determinar que la función es o no sobreyectiva, incluso su conclusión de que la función no es sobreyectiva no esta justificada como se muestra en la figura 5.3.3.9:

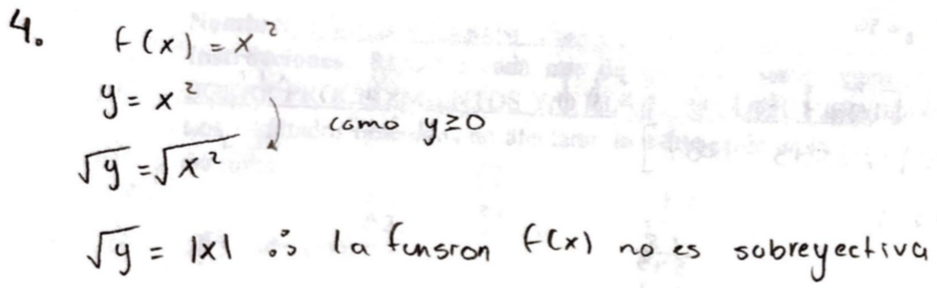


Figura 5.3.3.9. Solución del estudiante E3 a la situación problemática 4.

Como se observa el estudiante no contesta de manera correcta y tiene una concepción equivocada de función sobreyectiva, más allá de esto es evidente que el estudiante no hace uso del cuantificador existencial o el cuantificador universal, así que podemos decir que el estudiante no cuenta con la estructura de esquema de cuantificador de un solo nivel.

En la situación 5 el estudiante no justifica sus respuestas, siendo la segunda errónea, así que no permite decir mucho al respecto, más que no muestra evidencia de tener la estructura mental de esquema de cuantificador de un solo nivel.

Para la situación 6 en el inciso (a) responde que cree que sí es posible encontrarla, pero en realidad no responde cómo. Para la situación 7 no se tiene evidencia de la presencia o ausencia de las estructuras mentales previas, pues el estudiante no contestó.

Entonces de acuerdo a lo que el estudiante respondió en cada una de las situaciones problemáticas podemos decir que solo muestra las estructuras mentales previas de objeto de número real y proceso de conjunto.

Estudiante E4

En cuanto a la situación 1 el estudiante E4 solo tuvo correcto el inciso (c), cometió errores en los incisos (a) y (b), específicamente en el inciso (a) el error fue debido a la jerarquía de operaciones, pues suma $\sqrt{49}$ antes de dividir $(\frac{\sqrt{49}}{2^4})\frac{1}{16}$ como se muestra en la figura 5.3.3.10:

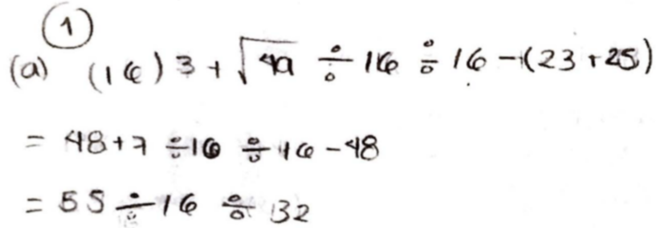


Figura 5.3.3.10. Solución del estudiante E4 a la situación problemática 1(a).

En cambio, para el inciso (b) tuvo error al hacer la multiplicación 169*5, pues en lugar de poner 845, puso 840, como se muestra en la figura 5.3.3.11:

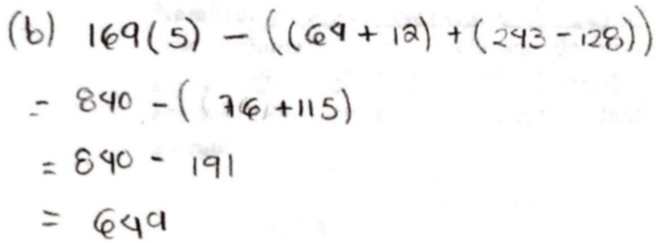


Figura 5.3.3.11. Solución del estudiante E4 a la situación problemática 1(b).

A pesar de esos errores podemos decir que el estudiante realiza acciones sobre los números lo cual quiere decir que el estudiante cuenta con la estructura mental objeto número real.

En lo que respecta a las situaciones restantes no tenemos evidencia de la presencia o ausencia de las estructuras mentales, pues el estudiante no contestó, entonces solo podemos decir que cuenta con la estructura mental de objeto de número real.

Estudiante E5

Para la situación 1 el estudiante E5 cometió un error en el inciso (a) por la jerarquía de operaciones, pues suma 3+7 como se observa en la figura 5.3.3.12:

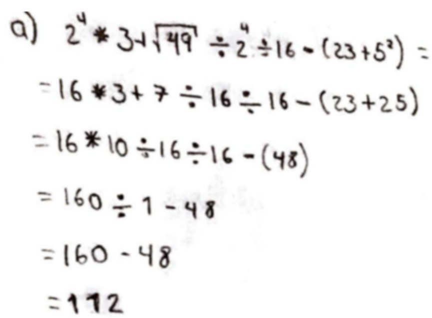


Figura 5.3.3.12. Solución del estudiante E5 a la situación problemática 1(a).

Para los incisos (b) y (c) las respuestas que da son correctas, así que podemos decir que el estudiante cuenta con la estructura objeto de número real. Para la situación 2 donde se pide al estudiante dado el conjunto A de todas las funciones reales en una variable, determine el conjunto de todas las funciones cuya inversa existe, el estudiante responde dando dos conjuntos, el primer conjunto A lo define como dice el enunciado 2: funciones reales de una variable y a un lado la define nuevamente pero con símbolos matemáticos, le pone un tipo particular de funciones invertibles aquellas de la forma $f(x) = ax$ que parecen ser ejemplos de funciones que cumplen la condición pedida, esto se muestra en la figura 5.3.3.13:

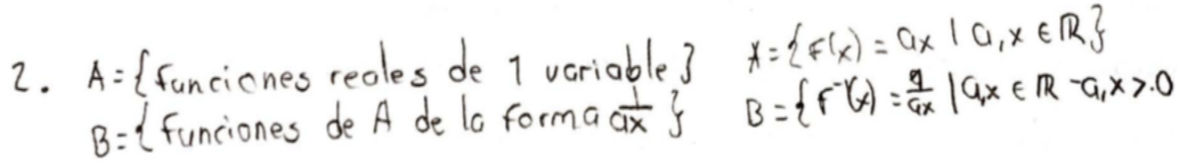


Figura 5.3.3.13. Solución del estudiante E5 a la situación problemática 2.

Para el segundo conjunto B que se muestra en la figura 13 el estudiante está tratando de dar el subconjunto que contiene a todas las funciones inversas, pero en realidad está pensando la función como un número y en su descripción del conjunto da a entender que quiere definir el inverso de un número.

El estudiante E5 pretende hacer lo mismo para la situación 3 dando el conjunto A como el conjunto de donde parten y el B el que se está pidiendo, cuando en realidad lo que se espera es que determine las condiciones que deberían de cumplir las funciones para que sean inyectivas y además no define bien lo que es una función inyectiva tal como se muestra en la figura 5.3.3.14:

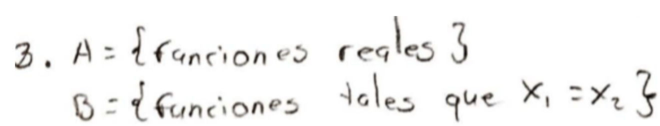
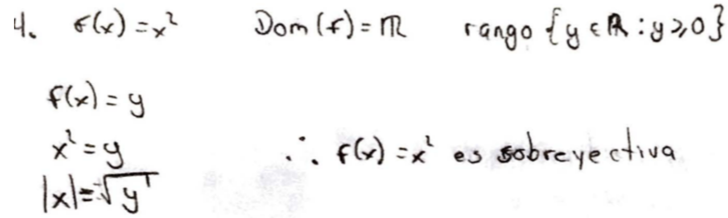


Figura 5.3.3.14. Solución del estudiante E5 a la situación problemática 3.

A pesar de que las definiciones del estudiante no son correctas, se evidencia que en efecto el estudiante sí realiza la acción de reunir objetos, lo evidencia el uso de llaves, en una colección dada alguna condición, pero de una manera más interiorizada, es decir, no dar elementos finitos, entonces podemos decir que tiene la concepción proceso de conjunto. Cabe señalar que este estudiante trata de usar el lenguaje formal de la matemática, lo que muchos otros alumnos no hacen.

Para la situación 4 el estudiante E5 responde correctamente, pero no especifica por qué el procedimiento de despejar a la variable x, de la ecuación $x^2 = y$ le permite decir que la función es o no sobreyectiva, concluyendo con esto que si es sobreyectiva como se ve en la figura 5.3.3.15.



4. $f(x)=x^2$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ rango $\{y\in\mathbb{R}: y\geq 0\}$

$f(x)=y$

$x^2=y$

$|x|=\sqrt{y}$

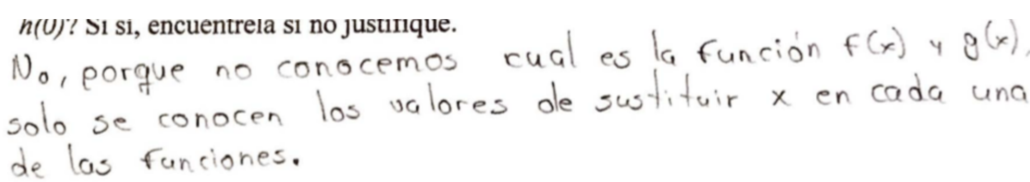
$\therefore f(x)=x^2$ es sobreyectiva

Figura 5.3.3.15. Solución del estudiante E5 de la situación problemática 4.

Se observa que el estudiante no hace uso de ningún cuantificador que le permita determinar si la función es sobreyectiva, así que podemos decir que no cuenta con la concepción esquema de cuantificador de un solo nivel.

En la situación 5 responde al inciso (a) como verdadero, lo cual es correcto, y para el inciso (b) falso, lo cual es erróneo, como el estudiante no justifica sus respuestas podemos corroborar que el estudiante no cuenta con la concepción esquema de cuantificador de un solo nivel.

Para la situación 6 en el inciso (a) E5 responde que es necesario conocer la función *f* y *g* para encontrar *h(0)*, lo cual es erróneo, aunque de algún modo escribió que sí puede obtenerla al escribir que solo se conocen los valores de sustituir *x* en cada una de las funciones, así que de esa aseveración pudo haber reflexionado un poco más para poder decir que en efecto, de lo obtenido en estas funciones evaluadas podía obtener *h(0)*, su respuesta es la presentada en la figura 5.3.3.16:

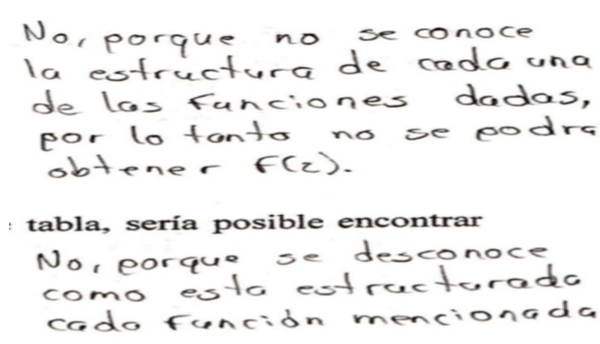


h(0)? Si sí, encuentrela si no justifique.

No, porque no conocemos cual es la función $f(x)$ y $g(x)$, solo se conocen los valores de sustituir x en cada una de las funciones.

Figura 5.3.3.16. Solución del estudiante E5 a la situación problemática 6 (a).

Así mismo las respuestas para los incisos (b) y (c) evidencian que el estudiante considera necesario conocer quiénes son *f* y *g* para poder resolver lo que se pedía, las respuestas a estos incisos se presentan en la figura 5.3.3.17:



No, porque no se conoce la estructura de cada una de las funciones dadas, por lo tanto no se podra obtener $f(z)$.

tabla, sería posible encontrar

No, porque se desconoce como esta estructurado cada función mencionada

Figura 5.3.3.17. Solución del estudiante E5 a las situaciones problemáticas 6 (a) y (c).

Entonces es evidente que el estudiante no cuenta con la concepción proceso de función porque necesita de ese estímulo externo de tener la expresión algebraica para cada una de las funciones, no va más allá de las acciones porque no puede coordinar dos procesos dados dentro de la composición de funciones.

Para la situación 7 parece ser que E5 pretendía multiplicar cada rama de la función F con cada rama de G, pero en realidad esto no le iba a permitir determinar el resultado de $F \cdot G$, entonces el hecho de que las funciones se presentaran a trozos le causó dificultad, tal como se muestra en la figura 5.3.3.18:

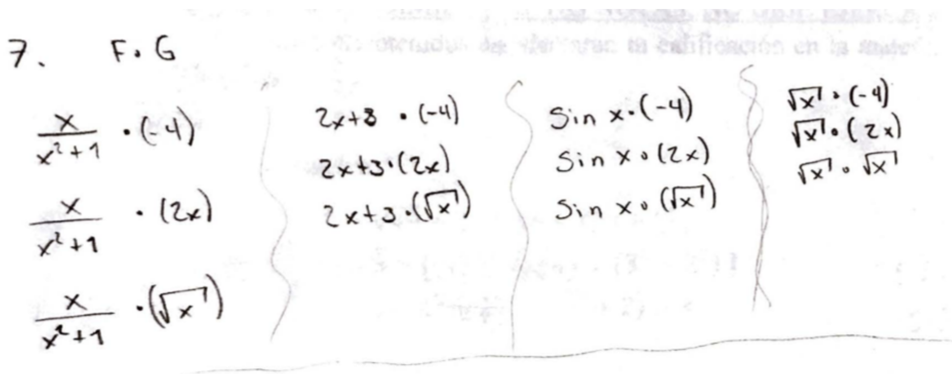


Figura 5.3.3.18. Solución del estudiante E5 a la situación problemática 7.

Con esta respuesta podemos asegurar que la concepción proceso del estudiante no es estable, de hecho, no se ha construido dicha estructura, pues se quebró al enfrentarse a dicha dificultad.

Podemos entonces decir en conclusión que el estudiante E5 cuenta solo con las estructuras de: objeto número real y proceso conjunto.

Estudiante E6

El E6 en la situación 1 responde correctamente a los tres incisos, solamente en el inciso (b) tiene un error de dedo y responde 645 en lugar de 654, como se muestra en la figura 5.3.3.19:

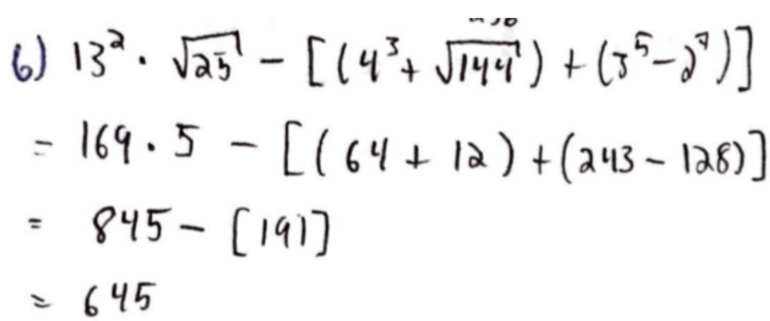


Figura 5.3.3.19. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 1(b).

Como ese error de dedo no tiene nada que ver con su concepción de objeto de número real podemos decir que en efecto cuenta con esta estructura mental, pues realiza acciones sobre los números reales con las operaciones básicas.

Para la situación 2 el estudiante claramente tiene comprendidas las definiciones tanto de función sobreyectiva como de función inyectiva y función inversa, pues comienza definiendo una función *g* que pertenece al conjunto A de funciones de una variable, tal como se indicó, luego define *g* como una función que va de un conjunto B a un conjunto C, lo cual es correcto pues entiende que estos pueden ser dos conjuntos arbitrarios, después describe la condición necesaria para que *g* tenga inversa, la cual es correcta. A partir de aquí menciona que si eso ocurre entonces significa que *g* es sobreyectiva y que también es necesario que la función sea inyectiva y da la definición de lo que significa función inyectiva, para de aquí decir que entonces es necesario que la función sea biyectiva, es decir, inyectiva y sobreyectiva. La respuesta del estudiante E6 nos permite decir que, en efecto, el estudiante cuenta con la concepción proceso de conjunto porque reúne objetos en una colección, dada alguna condición tal como se muestra en la figura 5.3.3.20:

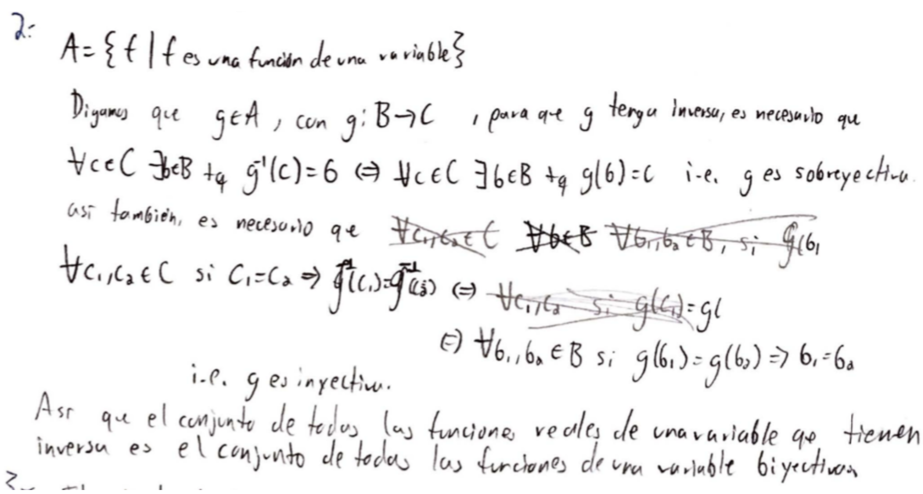

2.- $A = \{f \mid f$ es una función de una variable$\}$
Digamos que $g \in A$, con $g: B \to C$, para que g tenga inversa, es necesario que
$\forall c \in C\ \exists b \in B$ tq $g^{-1}(c) = b \Leftrightarrow \forall c \in C\ \exists b \in B$ tq $g(b) = c$ i.e. g es sobreyectiva.
así también, es necesario que $\cancel{\forall c_1, c_2 \in C}$ $\cancel{\forall b \in B}$ $\cancel{\forall b_1, b_2 \in B, \text{ si } g(b_1}$
$\forall c_1, c_2 \in C$ si $c_1 = c_2 \Rightarrow g^{-1}(c_1) = g^{-1}(c_2) \Leftrightarrow$ $\cancel{\forall c_1, c_2 \text{ si } g(c_1) = g(}$
$\Leftrightarrow \forall b_1, b_2 \in B$ si $g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$
i.e. g es inyectiva.
Así que el conjunto de todas las funciones reales de una variable que tienen inversa es el conjunto de todas las funciones de una variable biyectivas

Figura 5.3.3.20. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 2.

Para la situación 3 el estudiante responde correctamente dando la definición de función inyectiva definiendo correctamente el conjunto, como se muestra en la figura 5.3.3.21:

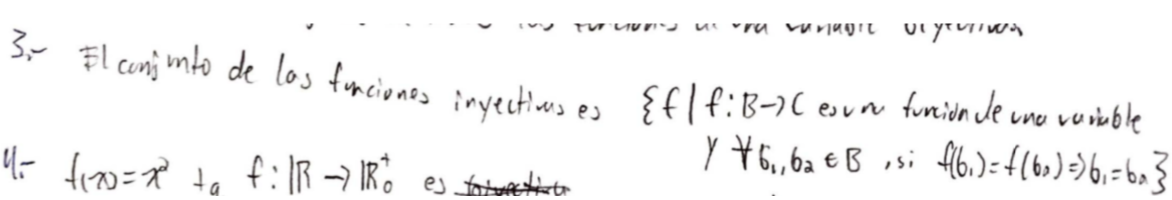
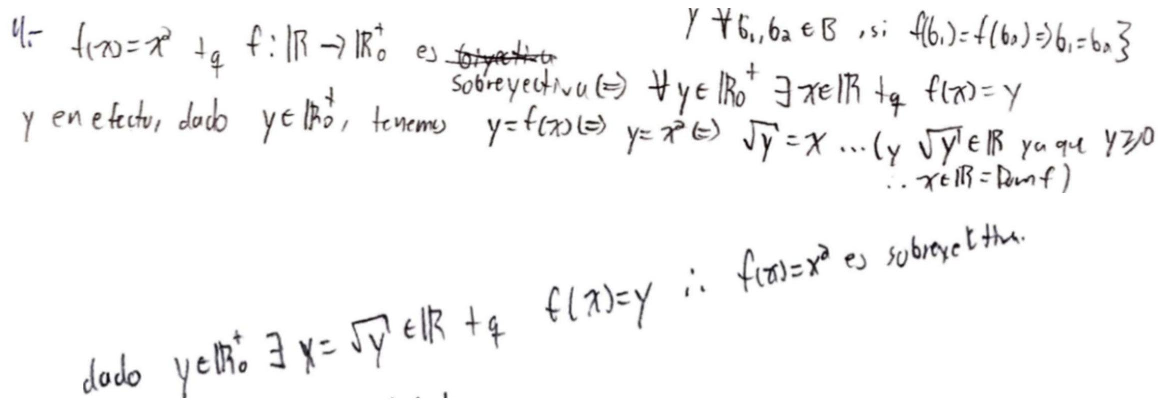

3.- El conjunto de las funciones inyectivas es $\{f \mid f: B \to C$ es una función de una variable y $\forall b_1, b_2 \in B$, si $f(b_1) = f(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2\}$
4.- $f(x) = x^2$ tq $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ es ~~[illegible]~~

Figura 5.3.3.21. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 3.

Entonces por las respuestas a las situaciones 2 y 3 el estudiante en efecto cuenta con la estructura mental proceso de conjunto ya que hace una clasificación correcta de los elementos que pertenecen al subconjunto.

Para la situación 4 el estudiante contesta correctamente diciendo que la función sí es sobreyectiva y justifica su respuesta primero dando la definición de lo que significa que una función sea sobreyectiva y a partir de ahí hace lo que otros estudiantes habían hecho anteriormente pero sin justificar (despejar la *x*), y E6 justifica por qué si cumple con las condiciones de sobreyectiva dando evidencia de contar con la concepción esquema de cuantificador de un solo nivel, pues hace uso del cuantificador existencial (∃) y del cuantificador universal (∀), tal como se muestra en la figura 5.3.3.22:


4.- $f(x)=x^2$ tq $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$ es ~~biyectiva~~ sobreyectiva $\iff \forall y\in\mathbb{R}_0^+\ \exists x\in\mathbb{R}$ tq $f(x)=y$ y $\forall b_1,b_2\in B$, si $f(b_1)=f(b_2)\Rightarrow b_1=b_2\}$

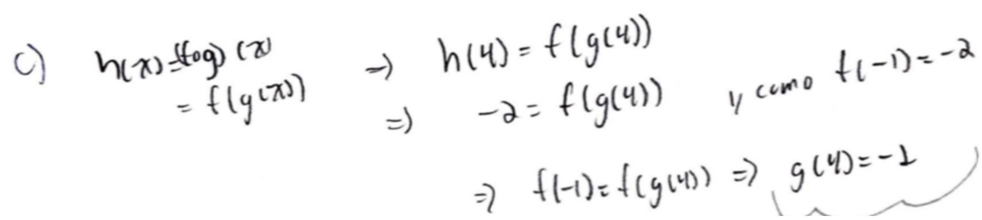
y en efecto, dado $y\in\mathbb{R}_0^+$, tenemos $y=f(x)\iff y=x^2\iff\sqrt{y}=x$ ... (y $\sqrt{y}\in\mathbb{R}$ ya que $y\geq 0$ $\therefore x\in\mathbb{R}=\mathrm{Dom} f$)

dado $y\in\mathbb{R}_0^+$ $\exists x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}$ tq $f(x)=y$ $\therefore$ $f(x)=x^2$ es sobreyectiva.

Figura 5.3.3.22. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 4.

En cuanto a la situación 5, E6 contesta como verdaderas a las aseveraciones, pero no justifica por qué lo son, pero a pesar de esto y por lo que contesta anteriormente en la situación 4 podemos decir que cuenta con la estructura mental de esquema de cuantificador de un solo nivel.

Para la situación 6, E6 contesta correctamente a los 3 incisos, lo cual nos da evidencia de que tiene la concepción proceso de función. Un ejemplo es el inciso (c), pues comprende lo que se le está pidiendo y hace el proceso necesario para obtener $g(4)$ solo teniendo valores de *x* para h y *f*, primero encuentra cuánto vale $h(4)$ para a partir de ahí encontrar cuánto debe valer $f(g(4))$, así encuentra que es cuando $g(4) = 1$, tal como se muestra en la figura 5.3.3.23:


c) $h(x)=(f\circ g)(x) = f(g(x))$ $\Rightarrow h(4)=f(g(4))$ $\Rightarrow -2=f(g(4))$ y como $f(-1)=-2$

$\Rightarrow f(-1)=f(g(4)) \Rightarrow g(4)=-1$

Figura 5.3.3.23. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 6 (c).

Para la situación 7 el estudiante E6 muestra evidencia nuevamente de tener la concepción de proceso de función, pues responde correctamente haciendo la multiplicación de F y G en cada uno de los intervalos correspondientes (ver figura 5.3.3.24), se puede observar en el procedimiento que el estudiante hizo uso del registro gráfico para poder determinar los intervalos en los que la multiplicación de $F \cdot G$ tiene sentido, tal como se muestra en la figura 5.3.3.25:

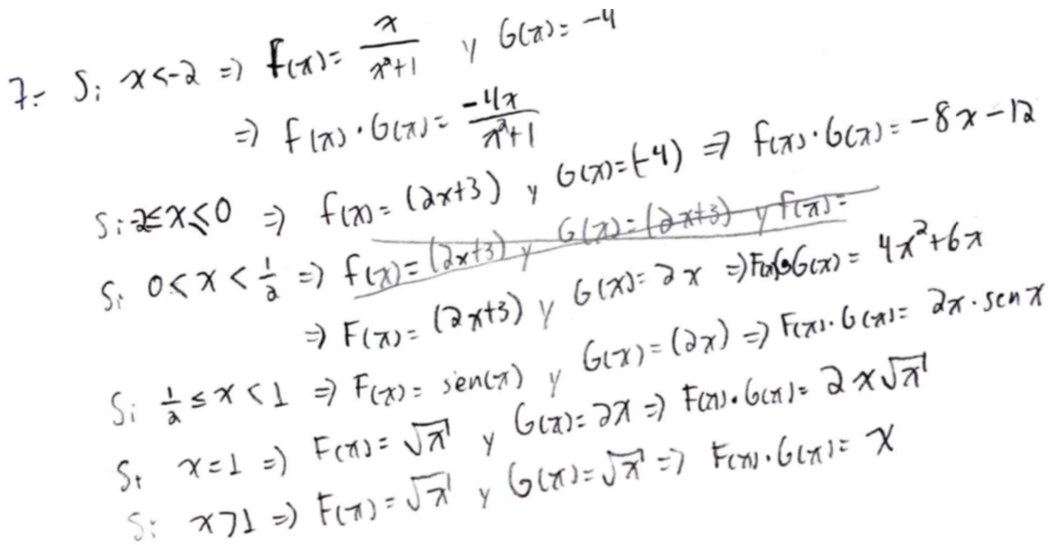


Figura 5.3.3.24. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 7.

Figura 5.3.3.25. Uso del registro gráfico del estudiante E6 a la situación problemática 7.

De acuerdo a las respuestas de cada una de las situaciones E6 cuenta con todas y cada una de las estructuras mentales previas que se necesitan para poder aprender el concepto de imagen de una función en una variable real.

Estudiante E7

En la situación 1 el estudiante E7 realiza de manera correcta los incisos (b) y (c) obteniendo los resultados correspondientes, pero para el inciso (a) tiene un error por la jerarquía de operaciones, pues resta en lugar de dividir como se muestra en la figura 5.3.3.26:

1.-

a) $2^4 \cdot 3 + \sqrt{49} \div 2^4 \div 16 - (23 + 5^2)$

$= 16 \cdot 3 + \sqrt{49} - 16 \div 16 - (23 + 25) \Rightarrow 16 \cdot 3 + 7 - 16 \div 16 - (48)$

$= 48 + 7 - 1 - 48 \Rightarrow \boxed{6}$

Figura 5.3.3.26. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 1 (a).

Podemos entonces decir que el estudiante cuenta con la estructura mental previa de objeto de número real, pues realiza acciones sobre estos con las operaciones básicas.

Para la situación 2 el estudiante da un conjunto en el cual no define de donde a dónde va la función, solo dice que se trata de un *x* real donde se cumple que la función evaluada en *x* da como resultado *-x,* entonces el estudiante pudiera haber estado pensando en definir el inverso de un número, no de una función, tal como se muestra en la figura 5.3.3.27:

2.- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -x\}$

Figura 5.3.3.27. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 2.

Aunque su definición no es la correcta, en realidad la acción que está haciendo de reunir objetos en una colección dada alguna condición es la que nos importa, así que podemos decir que cuenta con la estructura mental de proceso de conjunto.

Para la situación 3 el estudiante define el conjunto de las funciones inyectivas como un conjunto en el que te tomas dos elementos reales, *x* e *y* en donde se cumple que la función evaluada en *x* da como resultado *y*, y menciona que este *f(x)* es un valor único para cada *x* que se toma. Podemos ver que con la situación 2 y 3 el estudiante E7 le hace falta decir bien de qué elementos se están hablando, pues en realidad no comienza dando un conjunto que parte de una función que va de un conjunto a otro, sino que pone que se trata de dos números reales y luego da la condición haciendo uso de una función *f*, sin embargo, aunque la definición dentro del subconjunto no es correcta, el estudiante reúne objetos que cumplen cierta condición, lo cual nos permite decir que el estudiante evidencia tener concepción proceso de conjunto (ver figura 5.3.3.28):

3.- $C = \{x, y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$ y $f(x)$ es unico para cada $x\}$

Figura 5.3.3.28. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 3.

Para la situación 4 el estudiante responde de manera correcta que la función es sobreyectiva pero su justificación no es muy completa en el sentido de que no dice por qué la función cumple con ser sobreyectiva, tal como se muestra en la figura 5.3.3.29:

4.- $f(x) = x^2$ es sobreyectiva, Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rango $= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$, como $y \geq 0$, entonces $f(x)$ es sobreyectiva.

Figura 5.3.3.29. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 4.

Para la situación 5 el estudiante E7 responde como verdadero y falso a los incisos (a) y (b) respectivamente, pero no justifica por qué, así que podemos decir que el estudiante no da evidencia de contar con la estructura mental de esquema de cuantificador de un solo nivel, pues en ninguna de las dos situaciones hace mención de este, como la mayoría de los estudiantes parece no tomarlos en cuenta, u olvidarse de ellos.

Para la situación 6 responde que no es posible encontrar *h(0)* porque de acuerdo a lo que dice, la información no es la suficiente, de igual manera para el inciso (b) y (c) responde que no es posible, así que podemos decir que no muestra una concepción proceso de función, como se puede observar en la figura 5.3.3.30:

6.-

a) No es posible encontrar $h(0)$, ya que solo se da la información de ~~x~~, y de las funciones evaluadas en ese valor. Como hay multiples maneras de llegar al resultado deseado, sin que dicho resultado sea el deseado, no es posible.

b) Es un problema análogo al inciso anterior, ergo, no es posible

c) Es análogo a los dos incisos anteriores, no es posible.

Figura 5.3.3.30. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 6.

Por otro lado, para la situación 7 el estudiante E7 responde correctamente la multiplicación de las dos funciones en cada uno de los intervalos, y de acuerdo al análisis a priori de este ejercicio esta pregunta está diseñada para determinar si la concepción de proceso de función de los estudiantes es estable o si se quebrará al enfrentarse a la dificultad de que las funciones son funciones a trozos, lo cual no sucedió para estudiante, pues no presentó dificultad (ver figura 5.3.3.31), así que podemos decir que el estudiante está camino a la interiorización de la acción de función, pues es capaz de manipular funciones a trozos siempre y cuando se le den expresiones algebraicas, lo que implica que está más allá de una concepción acción, pero no ha logrado construir completamente el proceso de función porque no fue capaz de responder a la situación 6.

$$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} \dfrac{-4x}{x^2+1} & \text{si } x<-2 \\ -8x-12 & \text{si } -2\le x\le 0 \\ 4x^2+6x & \text{si } 0<x<\frac{1}{2} \\ 2x\,\mathrm{Sin}\,x & \text{si } \frac{1}{2}\le x<1 \\ 2x\sqrt{x} & \text{si } x=1 \\ x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Figura 5.3.3.31. Solución del estudiante E7 a la situación problemática 7.

Podemos entonces decir que el estudiante cuenta con todas las estructuras mentales previas que se pretendía evidenciar en el cuestionario, excepto la de esquema de cuantificador de un solo nivel y en la de proceso de función la cual tiene de manera parcial.

Estudiante E8

Para la situación 1 el estudiante tuvo correctamente los tres incisos, solo tuvo un error de dedo en el inciso (b) al momento de restar puso como resultado 754 en lugar de 654, como se muestra en la figura 5.3.3.32:

b) $13^2\cdot\sqrt{25}-[(4^3+\sqrt{144})+(3^5-2^7)] = 169\cdot 5-[(64+12)+(243-128)]$

$$\begin{aligned} &= 845-[76+(115)] \\ &= 845-[191] \\ &= 845-191 \\ &= 754 \end{aligned}$$

Figura 5.3.3.32. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 1 (b).

De esta manera podemos decir que el estudiante cuenta con su concepción objeto de número real, pues realiza acciones sobre los números reales con las operaciones básicas para obtener resultados.

Para la situación 2 da como respuesta dos funciones, una que va de un conjunto x a un conjunto y y otro que va de y a x, esto nos dice que el estudiante tiene al menos la idea del dominio y codominio de una función y de su inversa, pero realmente no determina el conjunto de todas las funciones que cumplen con ser funciones inversas, tal como se muestra en la figura 5.3.3.33:

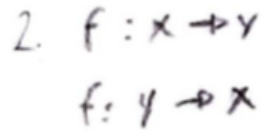


Figura 5.3.3.33. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 2.

Entonces realmente no está reuniendo elementos que cumplen ciertas condiciones, sino que está dando los conjuntos dominio y codominio, además la notación para la segunda función debería ser como función inversa y no la expresa así. Tal vez el hecho de no dar el conjunto no se debió tanto a no tener la estructura, sino a la falta de la definición, pues parece que no la recordó y eso se evidencia por lo que responde (tiene una idea).

Para la situación 3 el estudiante no da una definición correcta, ya que puso las condiciones $p \rightarrow q$ al revés, pues determina que si dos elementos tomados del dominio de la función son iguales entonces la función va a tomar el mismo valor evaluada en ese punto, en lugar de poner $S = \{f: f(x_1) = f(x_2)\ siempre\ que\ x_1 = x_2\}$, el estudiante no da evidencia de reunir elementos que cumplen cierta condición, pues no usa en ningún momento las llaves, se centra en solo dar una definición sin percatarse de que la situación pide un conjunto con determinadas condiciones, así que este estudiante no muestra la estructura mental proceso de conjunto como se puede observar en la figura 5.3.3.34:

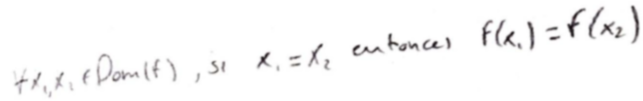
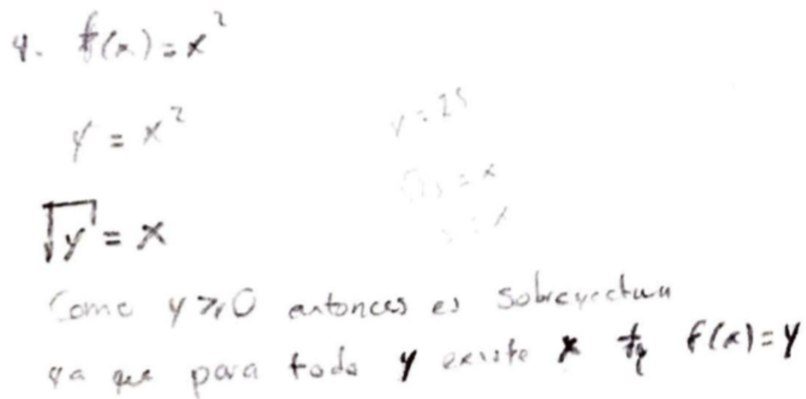


Figura 5.3.3.34. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 3.

Para la situación 4 el estudiante contesta correctamente diciendo que la función sí es sobreyectiva y justifica haciendo uso de los cuantificadores universal (∀) y existencial (∃), es decir cuenta con la estructura mental esquema de cuantificador de un solo nivel, como se muestra en la figura 5.3.3.35:



4. $f(x)=x^2$

$y=x^2$

$\sqrt{y}=x$

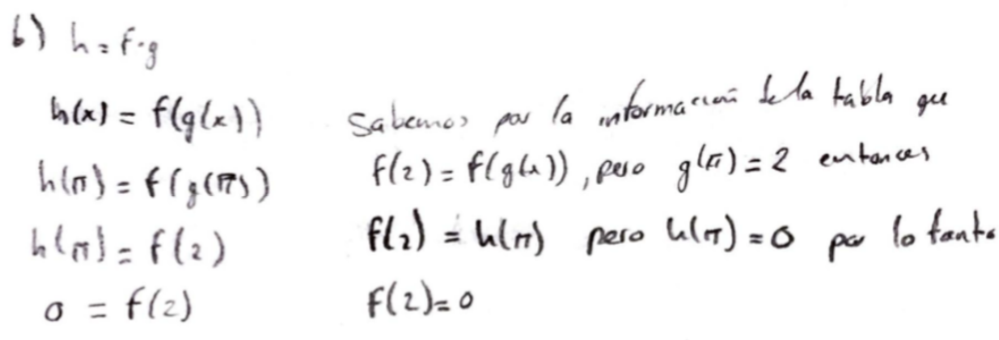
Como $y \geq 0$ entonces es sobreyectiva

ya que para todo y existe x tq $f(x)=y$

Figura 5.3.3.35. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 4.

En la situación 5 el estudiante responde correctamente diciendo que ambas aseveraciones son correctas, pero no justifica por qué, aun así, por lo que responde en la situación 4 podemos ratificar que el estudiante sí cuenta con la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel.

En la situación 6 el estudiante E8 responde correctamente a los incisos (a) y (b) determinando el valor de la función evaluada en el punto que se le pedía, por ejemplo, como en el inciso (b), que determina el valor de *f(2)* conociendo solo los valores de las funciones *h* y *g* evaluadas en ciertos puntos para *x*, como se muestra en la figura 5.3.3.36:



b) $h=f\cdot g$

$h(x)=f(g(x))$

$h(\pi)=f(g(\pi))$

$h(\pi)=f(2)$

$0=f(2)$

Sabemos por la información de la tabla que

$f(2)=f(g(\pi))$, pero $g(\pi)=2$ entonces

$f(2)=h(\pi)$ pero $h(\pi)=0$ por lo tanto

$f(2)=0$

Figura 5.3.3.36. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 6(b).

Para el inciso (c) muestra dificultad pues menciona que no puede obtener *g(4)* solo teniendo información de *h* y *f* como se muestra en la figura 5.3.3.37:

c)

$h = f \cdot g.$

$h(x) = f(g(x))$

No es posible ya que por ser composición de funciones, el valor de $f(x)$ esta determinado por $g(x)$, y no tenemos información del valor que pueda tomar g

Figura 5.3.3.37. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 6(c).

A pesar de que responde en los incisos (a) y (b) el estudiante no da evidencia de contar con la estructura proceso de función pues no contesta correctamente el inciso (c) que es el de mayor dificultad (y más adelante en la situación 7 no determina las ramas ni las multiplicaciones de manera correcta), pero si tiene elementos que permiten decir que tiene más que acción por resolver los incisos (a) y (b), entonces este estudiante esta entre la acción y el proceso, es decir, hace más que una acción, pero no alcanza la concepción proceso.

Por otra parte, en la situación 7 el estudiante responde de manera incorrecta, pues no determina bien ni las multiplicaciones ni las ramas en que están definidas cada multiplicación, como se muestra en la figura 5.3.3.38:

$$F(x) \cdot G(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^2+1} & \text{si } x \leq -2 \\ (2x+3)(2x)(-4) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Figura 5.3.3.38. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 7.

Es importante mencionar que este estudiante también hizo uso del registro gráfico para poder realizar el ejercicio, como se muestra en la figura 5.3.3.39:

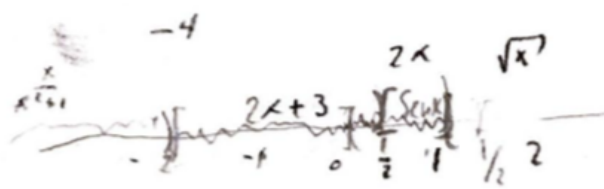


Figura 5.3.3.39. Uso del registro gráfico para la solución de la situación problemática 7.

De acuerdo a las respuestas del estudiante E8 podemos decir que cuenta con las estructuras de: objeto de número real, esquema de cuantificador de un solo nivel y para proceso de función se encuentra en un nivel entre acción y proceso.

Estudiante E9

En la situación 1 el estudiante E9 tiene los tres incisos incorrectos, se observa que no tiene clara la jerarquía de operaciones, por ejemplo, para el inciso (a) primero suma 3+7 en lugar de multiplicar 16*3, como se ve en la figura 5.3.3.40:

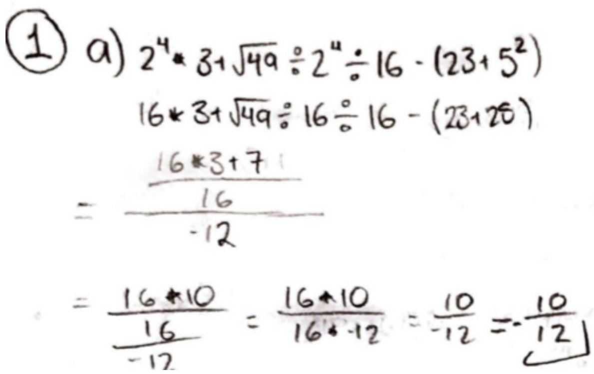


Figura 5.3.3.40. Solución del estudiante E9 a la situación problemática 1(a).

Aunque no tiene correctos los resultados de los incisos podemos decir que tiene la concepción objeto de número real, ya que realiza acciones sobre los números reales con las operaciones básicas, es decir las operaciones entre números reales son correctas, no así la jerarquía de las operaciones, razón por la cual no obtienen el resultado correcto.

Para la situación 2 el estudiante E9 no da un conjunto, da una definición en donde determina que las funciones inversas son todas las funciones distintas de cero, con esto nos hace evidente que el estudiante no tiene clara la definición de función inversa, pues por lo que escribió parece ser la confunde con el inverso de un número. De igual manera para la situación 3 menciona que las funciones inyectivas son todas aquellas funciones de la forma $ax + b$ de un polinomio de grado uno, lo cual hace evidente la falta de una definición clara para función inyectiva y que el estudiante sustituye por ejemplos prototipo, tal como se muestra en la figura 5.3.3.41:

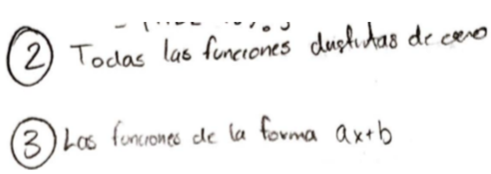


Figura 5.3.3.41. Solución del estudiante E9 a las situaciones problemáticas 2 y 3.

Como el estudiante no da evidencia de reunir objetos que cumplen cierta condición, es decir, en ningún momento considera o usar las llaves, las cuales son usadas en las matemáticas como símbolo que denota un conjunto, más bien se centra en dar las definiciones correspondientes a las condiciones que debe cumplir para que sea una función inversa o una función inyectiva, entonces el estudiante no muestra una estructura mental proceso de conjunto, no se puede decir que no la tiene pues se requiere de un análisis más profundo de sus estructuras mentales mediante una entrevista, que nos permita determinar si verdaderamente este estudiante no tiene la estructura o sí.

En la situación 4, E9 contesta correctamente, pero eso no significa que sabe por qué, pues el procedimiento que hace es despejar la variable *x* para obtener $\sqrt{y}$ y su justificación es que el dominio coincide con el rango, podemos entonces decir que tiene una definición errónea de función sobreyectiva y esto lo reafirmamos cuando dice que una función siempre es sobreyectiva de su dominio a su rango como se muestra en la figura 5.3.3.42:

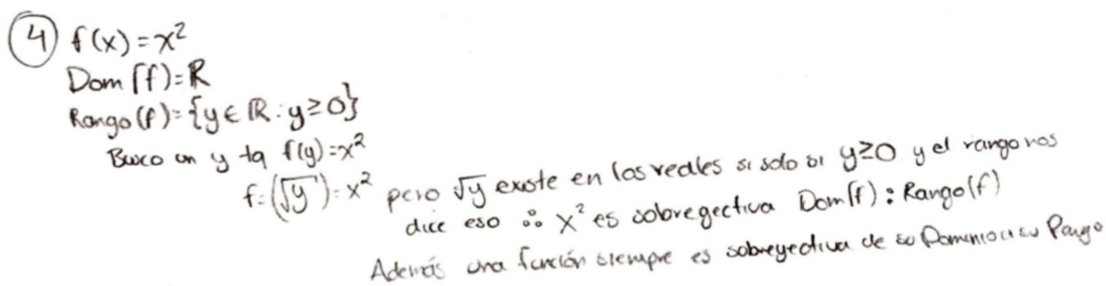


Figura 5.3.3.42. Solución del estudiante E9 a la situación problemática 4.

Podemos observar que su definición y su procedimiento son erróneos, el estudiante en efecto hace uso de la palabra “existe”, pero no da evidencia de contar con la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel, pues no lo utiliza para la validez de una proposición de la forma $\exists x \in S \ni P(x)$. En la situación 5 el estudiante E9 responde como verdaderas a las aseveraciones, pero no justifica por qué lo son, de manera que no se puede evidenciar la presencia de la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel.

En la situación 6 el estudiante responde que cree que sí es posible obtener el valor que se pide, pero dice que teniendo la regla de correspondencia, es decir, el estudiante necesita ese estímulo externo para poder calcular el resultado y no es capaz de coordinar dos procesos para obtener el resultado de la composición, así que podemos decir que no muestra la concepción proceso de función, esto lo reafirmamos con el hecho de que en la situación 7 responde solo para dos intervalos correctamente, para $x < -2$ y $x > 1$ como se muestra en la figura 5.3.3.43:

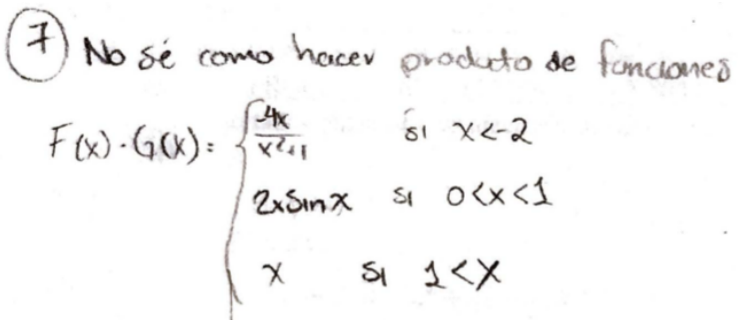


Figura 5.3.3.43. Solución del estudiante E9 a la situación problemática 7.

Entonces podemos decir que el estudiante solo cuenta con la estructura mental objeto de número real.

Estudiante E10

El estudiante E10 responde correctamente los tres incisos de la situación 1, en todos llegó al resultado correcto, por ejemplo, en el inciso (a) donde la mayoría de sus compañeros tuvieron error con la jerarquía de operaciones el estudiante lo realizó de manera correcta, como se ve en la figura 5.3.3.44:

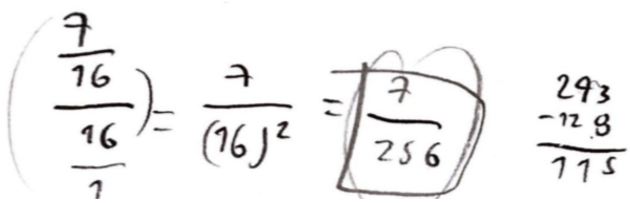


Figura 5.3.3.44. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 1.

Como el estudiante realiza acciones sobre los números reales con las operaciones básicas entonces se considera que evidencia la concepción objeto de número real.

En la situación 2 y 3 se pretende evidenciar la concepción proceso de conjunto y el estudiante E10 responde correctamente en ambas. En la situación 2 se pide dar el conjunto de todas las funciones invertibles, para lo cual el estudiante determina que la condición que deben de cumplir es que al aplicarle la función inversa a la función se obtiene solamente *x,* y el estudiante da evidencia de reunir elementos que cumplen cierta condición, de aquí podemos decir que cuenta con la concepción proceso de conjunto, además hace uso del "tal que", como se muestra en la figura 5.3.3.45:

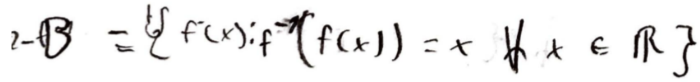


Figura 5.3.3.45. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 2.

Para la situación 3 el estudiante determina que el conjunto que contiene las funciones inyectivas es aquel en el que se tiene una función que cumple que si las imágenes de dos puntos son la misma quiere decir que los puntos son iguales, solamente que el estudiante puso un si solo si en lugar de un entonces (ver figura 5.3.3.46), pero realmente lo que interesa es que el estudiante reúna elementos que cumplen cierta condición y como lo realiza podemos decir que cuenta con la concepción proceso de conjunto.

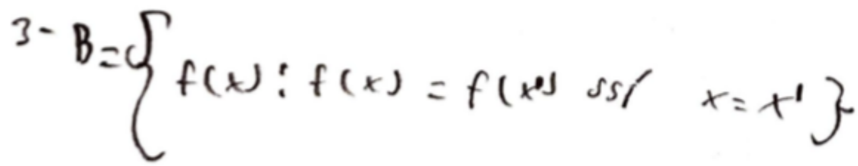


Figura 5.3.3.46. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 3.

En la situación 4 el estudiante menciona que el rango está determinado por lo valores mayores o iguales a cero y que dentro de los reales cualquier número elevado al cuadrado da como resultado un número que cae dentro del rango y esta es su justificación del por qué sí es una función sobreyectiva. Por la respuesta que da podemos decir que está en lo correcto, pero como en esta situación se pretende evidenciar la concepción esquema de cuantificador de un solo nivel y el estudiante no hace uso del cuantificador existencial (∃) ni del cuantificador universal (∀), así que aparentemente no cuenta con esta concepción, tal como se muestra en la figura 5.3.3.47:

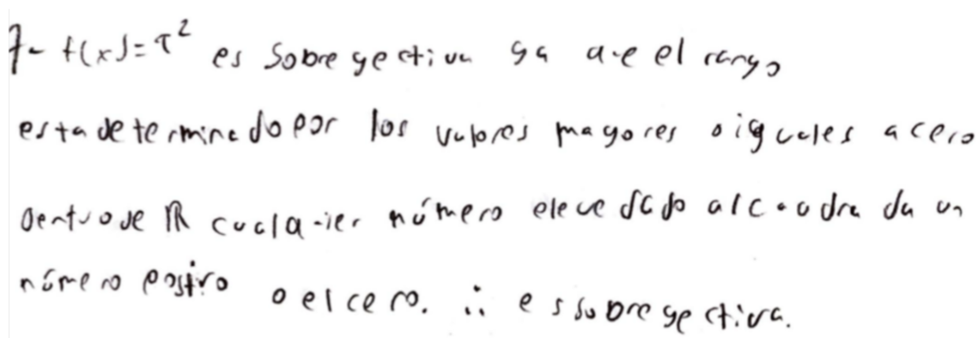


Figura 5.3.3.47. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 4.

Por otra parte para el ejercicio 5 el estudiante es el único estudiante que justifica sus respuestas, en particular para el inciso (a) responde correctamente la aseveración, en la cual su justificación es la que se esperaba para la situación 4, pues en esta hace uso del cuantificador existencial (∃) y del cuantificador universal (∀), tal como se muestra en la figura 5.3.3.48, así que podemos decir que el estudiante sí cuenta con la estructura mental esquema de cuantificador de un solo nivel.

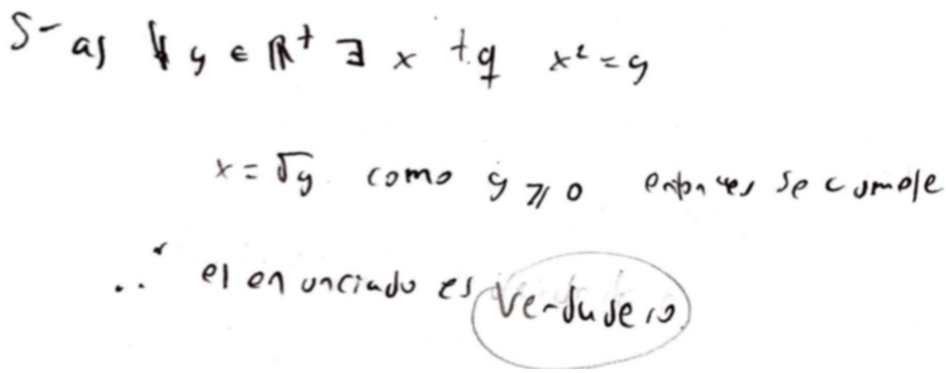


Figura 5.3.3.48. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 5(a).

Para el inciso (b) la respuesta del E10 a esta aseveración es incorrecta, pues menciona que es falso y su justificación es que para los valores de *y* mayores o iguales a 8 no van a cumplir que $x^3 = y$, sin embargo, usa el cuantificador existencial (∃) y el cuantificador universal (∀), así que en efecto tiene la concepción de esquema de cuantificador de un solo nivel como se muestra en la figura 5.3.3.49:

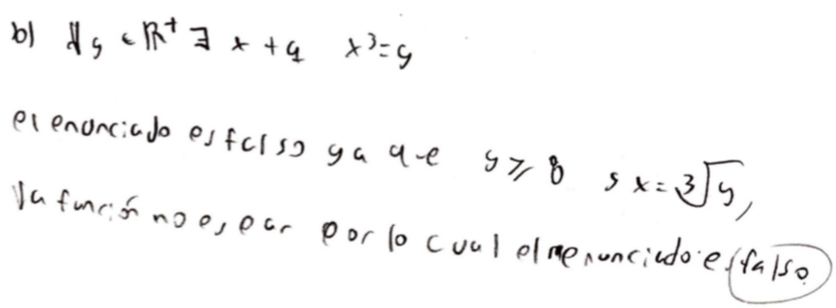


Figura 5.3.3.49. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 5(b).

Para la situación 6 el estudiante tuvo error en los tres incisos porque creyó que en lugar de ser composición era multiplicación de funciones, así que en estas tres respuestas de E10 no podremos determinar si el estudiante cuenta o no con la concepción proceso de función, además parece ser que el estudiante no comprende lo que significa un valor en la tabla que se da, pues por ejemplo, en el inciso (a) determina que para obtener *h(0)* es cuando *f* toma el valor de 3 y *g* el de -1, cuando en realidad en la tabla se refiere a que cuando *x* toma el valor de 0 la función *f* es igual a -3 y la función *g* es igual a -1, este procedimiento del estudiante se muestra en la figura 5.3.3.50:

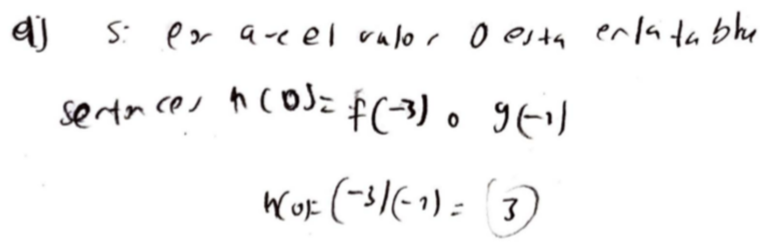


Figura 5.3.3.50. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 6(a).

Por último, en la situación 7 al E10 solo le faltó el resultado de la multiplicación para las ramas $-2 \leq x \leq 0$ y $x = 1$, pues en las demás si hace la multiplicación y de manera correcta solo en la primera es $x \leq 2$ en lugar de $x \leq 0$. De acuerdo al análisis a priori que se hizo para esta situación esta pregunta está diseñada para determinar si la concepción de proceso de función de los estudiantes es estable o si se quebrará al enfrentarse a la dificultad de que las funciones son funciones a trozos, lo cual no sucedió para estudiante, pues no presentó dificultad, solo le faltó definirla para dos ramas pero para las otras sí lo hizo, así que podemos decir que el estudiante sí cuenta con la concepción proceso de función y esto se puede observar en la figura 5.3.3.51:

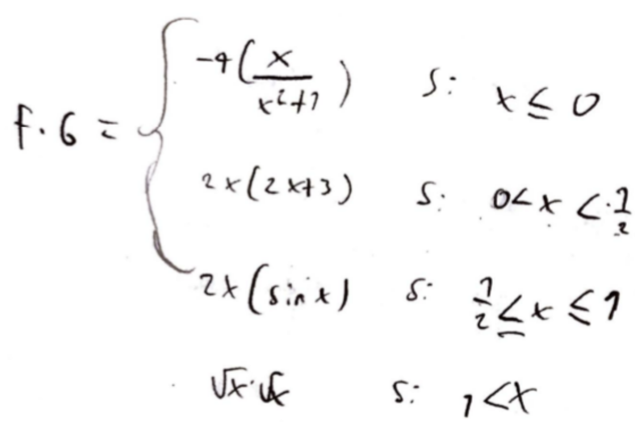


Figura 5.3.3.51. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 7.

Entonces podemos decir que el estudiante E10 cuenta con todas las estructuras mentales que se consideraron en el cuestionario diagnóstico.

Estudiante E11

Para la situación 1 el E11 tiene correcto el inciso (b), en cambio en el inciso (a) y en el (c) comete errores de jerarquía de operaciones, por ejemplo, en el inciso (a) que divide primero $\frac{2^4}{16}$ en lugar de realizar la operación $7 \div (\frac{2^4}{16})$ como se muestra en la figura 5.3.3.52:

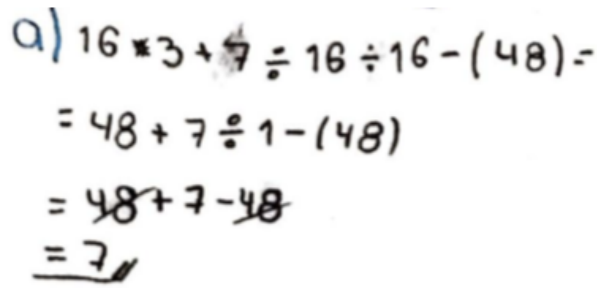


Figura 5.3.3.52. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 1(a).

A pesar de estos errores debidos a la jerarquía de operaciones el estudiante muestra evidencia de que puede realizar acciones sobre los números reales, es decir, muestra evidencia de contar con la estructura previa objeto de número real.

Para la situación 2 el estudiante define un primer conjunto A como una función que es de la forma *x*+*c*, de alguna forma podemos decir que está pensando a la función como si fuera un polinomio de grado 1, en donde dice que se debe cumplir que la constante es un número real. En el segundo conjunto A define una función inversa como si fuera el inverso de un número y como en esta situación lo que se pretende evidenciar es si el estudiante puede reunir objetos en una colección dada alguna condición, y el estudiante usa el “tal que” como se muestra en la figura 5.3.3.53, podemos decir entonces que el estudiante cuenta con la concepción proceso de conjunto.

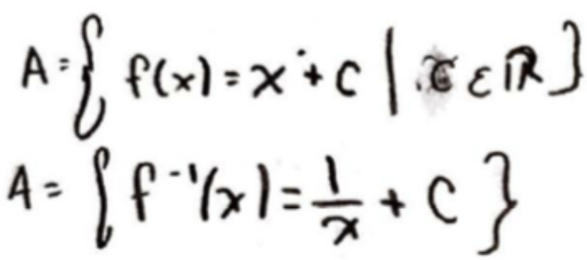


Figura 5.3.3.53. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 2.

En la situación 3 el estudiante E11 define el conjunto A como si fuera un polinomio de grado *n*, y después de ese conjunto menciona la definición de función inyectiva tal como se muestra en la figura 5.3.3.54:

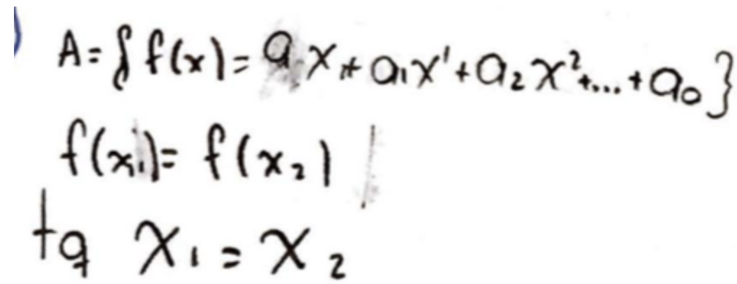


Figura 5.3.3.54. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 3.

En este caso el estudiante hizo uso del tal que lo cual nos permite decir que reunió objetos en una colección bajo alguna condición, es decir, tiene la concepción proceso de conjunto.

Para la situación 4 el estudiante E11 iguala $y = x^2$ para luego despejar la x, con esto concluye que la función es sobreyectiva pero realmente no hace uso del cuantificador existencial (∃) ni del cuantificador universal (∀) que le permita justificar el por qué ese procedimiento le permite afirmar que es sobreyectiva, así que podemos decir que no cuenta con la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel, tal como se muestra en la figura 5.3.3.55:

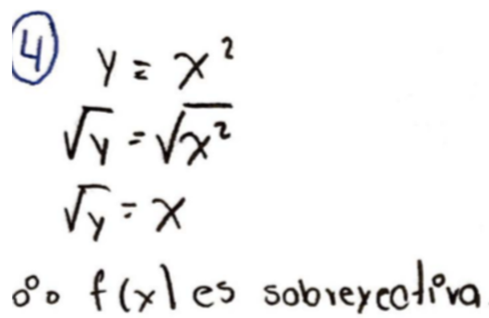


Figura 5.3.3.55. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 4.

En la situación 5 el estudiante solo responde como verdadero para el inciso (a) y como falso al inciso (b), así que no contamos con más evidencia que nos permita reafirmar que no cuenta con la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel.

Para la situación 6 el estudiante E11 confundió el símbolo de composición con el de multiplicación de funciones, puesto que para los tres incisos hace el procedimiento de la multiplicación, lo cual no nos da evidencia que nos permita decir que el estudiante cuenta o no con la concepción proceso de función, tal como se muestra en la figura 5.3.3.56:

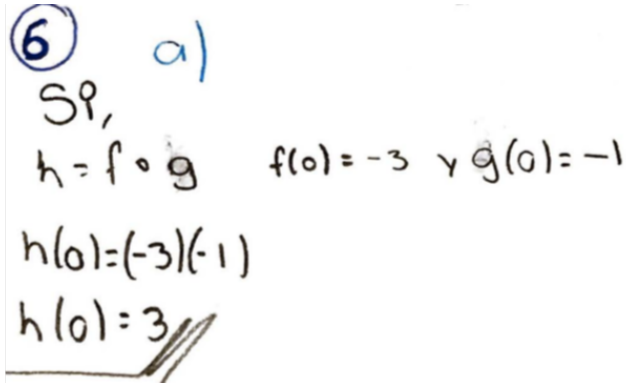


Figura 5.3.3.56. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 6(a).

En la situación 7 el E11 contestó solo para dos de las intersecciones de los dominios de las funciones *f* y *g*, las cuales fueron para $x < -2$ y para $0 < x < \frac{1}{2}$, solo que para este último le falto poner *2x* en lugar de 2. A pesar de haber respondido correctamente a estas dos ramas, no tenemos suficiente evidencia para decir que en efecto cuenta con la concepción proceso de función, ya que no sabemos si no contestó las demás por falta de tiempo o porque ya no supo cuales otras ramas hacer, la respuesta de E11 a este ejercicio es la que se muestra en la figura 5.3.3.57:

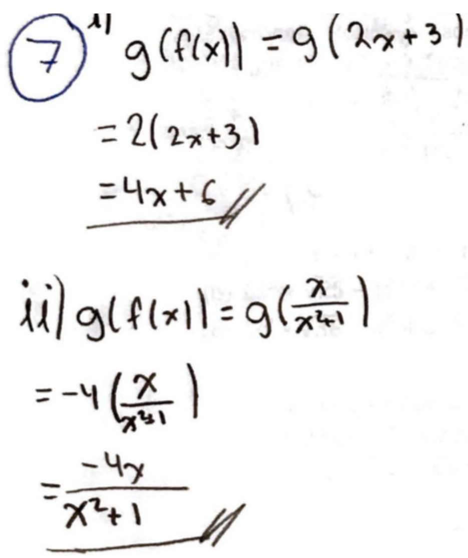


Figura 5.3.3.57. Solución del estudiante E11 a la situación problemática 7.

Entonces podemos decir que el estudiante E11 cuenta con la estructura mental objeto de número real y proceso conjunto.

Estudiante E12

En la situación 1 el estudiante E12 tuvo correcto los incisos (b) y (c), en cambio en el inciso (a) tuvo problemas con la jerarquía de operaciones, ya que primero dividió 16/16 en lugar de 7/16 y el resultado dividirlo entre 16, tal como se muestra en la figura 5.3.3.58:

$$a) = 16 \cdot 3 + 7 \div 16 \div 16 - 48$$
$$= 48 + 7 - 48$$
$$= 7$$

Figura 5.3.3.58. Solución del estudiante E12 a la situación problemática 1(a).

Como el estudiante muestra evidencia de que puede realizar acciones sobre los números reales con las operaciones básicas, podemos decir que cuenta con la estructura objeto número real.

Para la situación 2 y 3 el estudiante E12 no responde, así que no contamos con evidencia que nos permita decir si cuenta o no con la estructura mental proceso de conjunto.

Para la situación 4 el estudiante realiza un procedimiento en el cual por la función que se da, el estudiante es consciente de que para un valor de *y* le van a corresponder dos *x* distintas, en este caso sería una positiva y una negativa, entonces el estudiante iguala *f(x)* y *f(-x)* para después elevarlas al cuadrado, sacar raíz y finalmente decir que es la misma *x,* con este procedimiento concluye que la función es sobreyectiva, pero en realidad no explica cómo este procedimiento le permite hacer dicha afirmación. Se puede observar que el estudiante no hace uso de ningún cuantificador (existencial o para todo) que nos permita decir que cuenta con la estructura de esquema de cuantificador de un solo nivel, tal como se muestra en la figura 5.3.3.59:

4.- $f(x) = f(-x)$

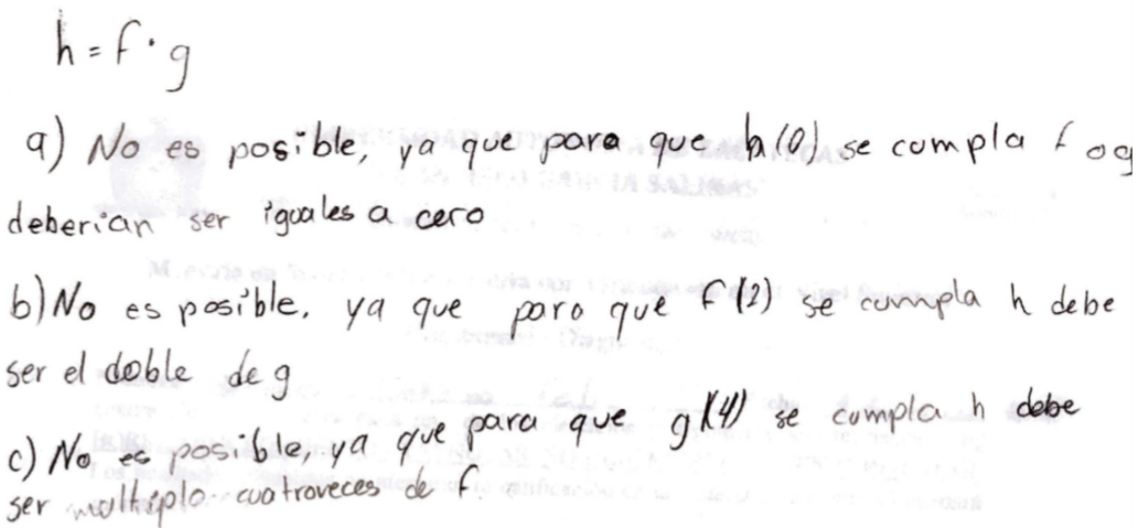
$$x^2 = -x^2$$
$$x^2 = x^2$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}$$
$$x = x$$

$f(x)$ es sobreyectiva

Figura 5.3.3.59. Solución del estudiante E12 a la situación problemática 4.

Para la situación 5 el estudiante E12 responde como verdadero al inciso (a) y falso al inciso (b) sin hacer ninguna justificación, lo cual nos permite reafirmar que no cuenta con la estructura mental de esquema de cuantificador de un solo nivel.

En la situación 6 el estudiante no responde correctamente, ya que no tiene una correcta concepción de composición de funciones pues en sus respuestas menciona condiciones que debe cumplir *h,f* y *g* respectivamente para que se pueda realizar la composición, cuando esto es incorrecto, entonces podemos decir que no cuenta con la estructura proceso de función, pues no puede realizar procesos que le permitan obtener el resultado de la composición tal como se muestra en la figura 5.3.3.60:


h = f · g

a) No es posible, ya que para que h(0) se cumpla f o g deberian ser iguales a cero

b) No es posible, ya que para que f(2) se cumpla h debe ser el doble de g

c) No es posible, ya que para que g(4) se cumpla h debe ser multiplo cuatroveces de f.

Figura 5.3.3.60. Solución del estudiante E12 a la situación problemática 6.

Por otro lado, en la situación 7 que está diseñada para determinar si la concepción proceso de los estudiantes es estable o si se va a quebrar al enfrentarse a las funciones por partes se observa que el estudiante tiene dificultad, pues el resultado que obtiene es incorrecto, aunque dos de los resultados son correctos ($\frac{-4x}{x^2+1}$ y $4x^2 + 6x$) se puede observar que los intervalos para los que lo puso que se cumple son incorrectos, entonces no podemos saber si esos resultados solo los obtuvo de hacer multiplicación al azar o si solo tuvo problemas con indicar el intervalo, pero por los resultados incorrectos obtenidos en las otras multiplicaciones podemos afirmar que no cuenta con la estructura proceso de función, tal como se muestra en la figura 5.3.3.61:

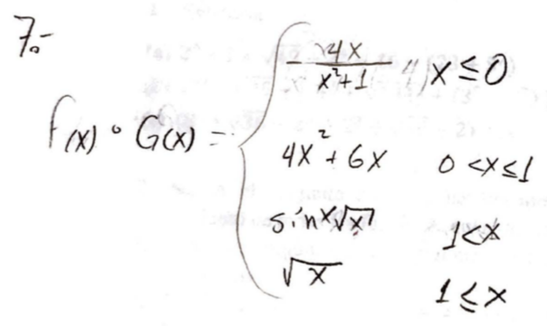


Figura 5.3.3.61. Solución del estudiante E12 a la situación problemática 7.

Entonces podemos decir que el estudiante E12 solo cuenta con la estructura objeto de número real.

Estudiante E13

El estudiante E13 tuvo mal los tres incisos de la situación 1 y en las tres tuvo errores por la jerarquía de operaciones, por ejemplo en el inciso (a), en donde primero multiplicó 6*3 en lugar de 16*3 y después primero dividió 16/16 en lugar de 7/16 y el resultado dividirlo entre 16, tal como se muestra en la figura 5.3.3.62:

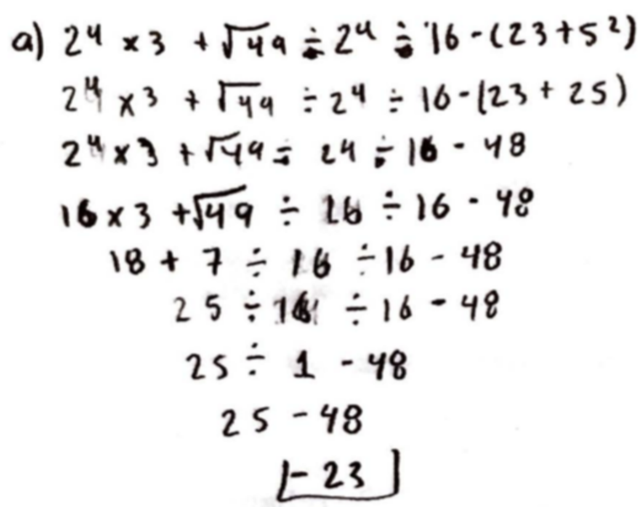


Figura 5.3.3.62. Solución del estudiante E13 a la situación problemática 1(a).

A pesar de tener mal los tres incisos, el estudiante muestra evidencia de que puede realizar acciones sobre los números reales con las operaciones básicas, así que podemos decir que cuenta con la estructura objeto número real.

Para las restantes 6 situaciones el estudiante no respondió, lo cual nos permite decir que no contamos con evidencia de que cuenta o no con las otras estructuras mentales previas.

Estudiante E14

El estudiante E14 tuvo correcto el inciso (a) de la situación 1, pero en los incisos (b) y (c) los errores que tuvo no fueron por la jerarquía de operaciones, sino que en el (b) el error fue por los signos ya que puso -115 en lugar de solo 115 y en el (c) el error fue al momento de dividir ya que el resultado que obtuvo no fue el correcto aunque los números a operar si lo eran, ya que el resultado era 3054/3=1018, tal como se muestra en la figura 5.3.3.63:

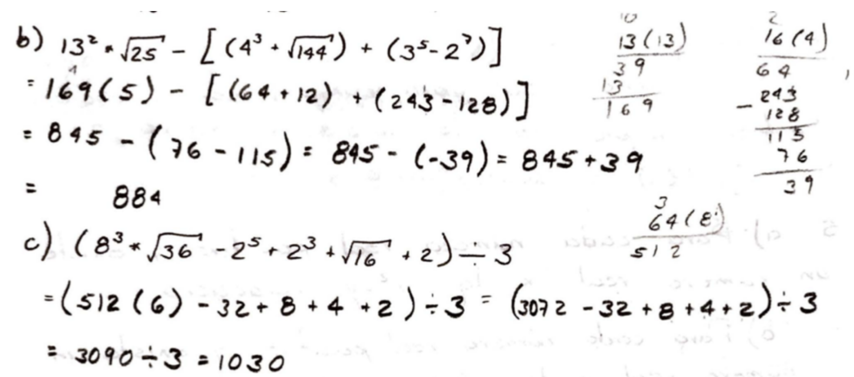


Figura 5.3.3.63. Solución del estudiante E14 a las situaciones problemáticas 1(b) y (c).

Aunque el estudiante no tiene correctos dos de los incisos muestra evidencia de que puede realizar acciones sobre los números reales con las operaciones básicas, así que podemos decir que cuenta con la estructura objeto número real.

En la situación 2 el E14 tiene mal su respuesta, pues empezando con que el conjunto A lo determina como si la función fuera un polinomio de grado uno, y define un conjunto B como si una función multiplicada por su inversa nos regresara la misma *x*, cuando esto no es correcto, pero a pesar de que las respuestas son incorrectas es evidente que el estudiante reúne objetos en una colección dada alguna condición, ya que utiliza el “tal que”, el “y” y determina condiciones que sus objetos deben cumplir, así que podemos decir que cuenta con la concepción proceso de conjunto como se muestra en la figura 5.3.3.64:

$A : \{ f(x) = ax \text{ tq } a \in \mathbb{R} \}$

$\cancel{\text{Si } f(x) = ax}$

$\cancel{\Rightarrow f(x) \cdot f^{-1}(x) = x}$

$\cancel{ax \cdot f^{-1}(x) = x}$

$\cancel{f^{-1}(x) = \frac{x}{ax}}$

$B : \{ f^{-1}(x) \text{ tq } x \in \mathbb{R} \wedge f^{-1}(x) \cdot f(x) = x \}$

Figura 5.3.3.64. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 2.

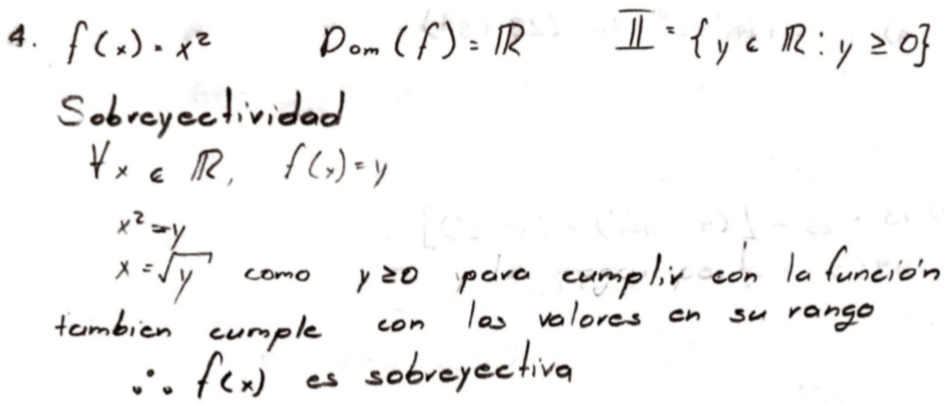
La situación 3 la responde de manera correcta, denomina el conjunto que se le pide como B y lo define como aquel conjunto en el que se toma una función que va de los reales a los reales y que cumple que, si toma el mismo valor en dos puntos dados, entonces esos puntos son el mismo. Con esta situación podemos reafirmar que cuenta con la concepción proceso de conjunto porque reúne objetos en una colección dada alguna condición, tal como se muestra en la figura 5.3.3.65:

$A = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge f(x) = y \text{ con } y \in \mathbb{R} \}$

$B = \{ \text{Sea } f(x) = y \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ y si } f(x) = f(x_1) \text{ entonces } x = x_1 \}$

Figura 5.3.3.65. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 3.

En la situación 4 el E14 determina que la función es sobreyectiva al igualar $x^2 = y$ para despejar la x y después decir que de esta manera la y cumple con ser mayor o igual a cero y que esto coincide con los valores del rango lo cual le permite concluir que la función es sobreyectiva. En esta situación se espera que el estudiante verifique que para todo ($\forall$) elemento del conjunto contradominio y existe ($\exists$) un elemento x en el dominio tal que $f(x) = y$, lo cual el estudiante hace cuando dice que $y \geq 0$ coincide con los valores de su rango, entonces podemos decir que en efecto E14 cuenta con la estructura esquema de cuantificador de un solo nivel, como se muestra en la figura 5.3.3.66:



4. $f(x) = x^2$ $Dom(f) = \mathbb{R}$ $\mathbb{I} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

Sobreyectividad

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = y$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$ como $y \geq 0$ para cumplir con la función

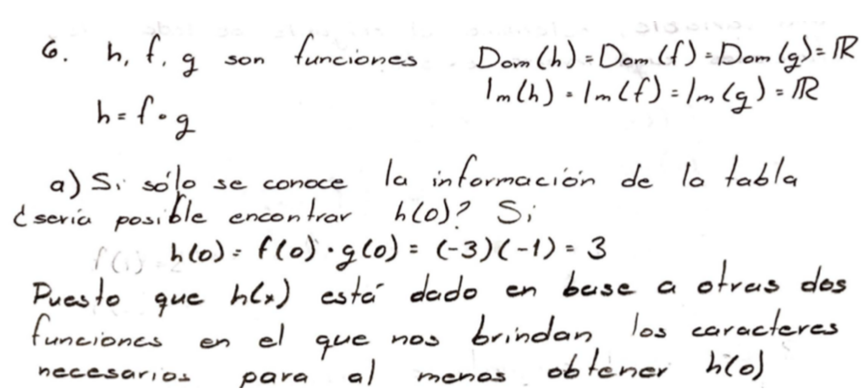
tambien cumple con los valores en su rango

$\therefore f(x)$ es sobreyectiva

Figura 5.3.3.66. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 4.

En la situación 5 el E14 responde como verdadero a ambos incisos, pero realmente no justifica su respuesta, así que no nos da más evidencia.

En la situación 6 el E14 confunde la composición con la multiplicación, así que en los tres incisos que se piden hace procedimientos y justificaciones como si de multiplicación de funciones se tratara, lo cual no nos da evidencia que nos permita decir que el estudiante cuenta o no con la concepción proceso de función, tal como se muestra en las figuras 5.3.3.67 y 5.3.3.68:



6. h, f, g son funciones $Dom(h) = Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}$

$Im(h) = Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$

$h = f \circ g$

a) Si sólo se conoce la información de la tabla ¿sería posible encontrar $h(0)$? Si

$h(0) = f(0) \cdot g(0) = (-3)(-1) = 3$

Puesto que $h(x)$ está dado en base a otras dos funciones en el que nos brindan los caracteres necesarios para al menos obtener $h(o)$

Figura 5.3.3.67. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 6 (a).

c) ¿Sería posible encontrar $g(4)$?

Si puesto que $g(x)$ en base a $h(x)$ y $f(x)$

es $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$

ya que conocemos $h(4) = -2$ y $f(4) = \pi$

sustituyendo $g(4) = \frac{h(4)}{f(4)}$

$\Rightarrow g(4) = \frac{-2}{\pi}$

Figura 5.3.3.68. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 6 (c).

Por último, el E14 tuvo correcta la situación 7, pues responde correctamente la multiplicación de las dos funciones en cada uno de los intervalos. Podemos decir que el estudiante no presentó dificultad al enfrentarse a las funciones a trozos, lo cual nos permite decir que cuenta con la concepción proceso de función y es estable (ver figura 5.3.3.69) de acuerdo al análisis a priori de este ejercicio.

$F \cdot G$:

- $-4\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{-4x}{x^2+1}$ si $x < -2$
- $-4(2x+3) = -8x-12$ si $-2 \le x \le 0$
- $2x(2x+3) = 4x^2+6x$ si $0 < x < \frac{1}{2}$
- $2x(\sin x) = 2x \operatorname{Sen} x$ si $\frac{1}{2} \le x < 1$
- $2x\sqrt{x}$ si $x = 1$
- $\sqrt{x}(\sqrt{x}) = x$ si $1 < x$

Figura 5.3.3.69. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 7.

Entonces podemos decir que el E14 cuenta con la estructura mental previa de objeto de número real, proceso conjunto, esquema de cuantificador de un solo nivel y proceso función.

Habiendo hecho el análisis del cuestionario diagnóstico por alumno de acuerdo a lo que respondió, se tiene como resultado la Tabla 1, en donde se determina qué estructura mental tiene cada estudiante:

Tabla 1

Resultados del análisis del Cuestionario Diagnóstico

	Objeto número real (situación 1)	Proceso de conjunto (situación 2 y 3)	Esquema de cuantificador de un solo nivel (situación 4 y 5)	Proceso de función (situación 6 y 7)
Estudiante 1	✓	NR	NR-4 NJ-5	NR
Estudiante 2	✓	NR	✓	✗
Estudiante 3	✓	✓	✗	NR
Estudiante 4	✓	NR	NR	NR
Estudiante 5	✓	✓	✗	✗
Estudiante 6	✓	✓	✓	✓
Estudiante 7	✓	✓	✗	Entre acción y proceso
Estudiante 8	✓	✗	✓	Entre acción y proceso
Estudiante 9	✓	✗	✗	✗
Estudiante 10	✓	✓	✓	✓
Estudiante 11	✓	✓	✗	✗
Estudiante 12	✓	NR	✗	✗
Estudiante 13	✓	NR	NR	NR
Estudiante 14	✓	✓	✓	✓

NR: No Respondió

NJ: No Justificó

A partir de estos resultados podemos decir que los estudiantes que cuentan con las estructuras previas necesarias para la construcción del nuevo concepto y a quienes entrevistaremos serán los estudiantes 6,8,10 y 14. A partir de estos datos podemos decir que del 100% de los estudiantes a quienes les aplicamos el cuestionario, el 29% cuenta con el total de las estructuras mentales previas, como se muestra en la figura 5.3.3.70:

Figura 5.3.3.70. Gráfico de los estudiantes que cuentan y no cuentan con las estructuras mentales previas.

5.3.4 Aplicación y Análisis del Segundo Cuestionario

Anteriormente se había mencionado que después de aplicar el cuestionario diagnóstico a los alumnos se seleccionaría a los estudiantes a entrevistar, dicha entrevista tenía que ser de manera presencial y por un guion determinado para que pudiera ser una entrevista semiestructurada, pero debido a la contingencia sanitaria (COVID-19) no nos fue posible entrevistarlos, por esta razón ahora le llamaremos *Cuestionario*, ya que en una entrevista semiestructurada tienen que estar presentes ambas partes, tanto el entrevistador como el entrevistado para poder preguntar en el momento en que el alumno está contestando las situaciones matemáticas a manera de que nos permita evidenciar de una mejor manera las estructuras mentales con las que cuenta el estudiante, desgraciadamente esto no pudo ser de esta manera.

Por dichas causas ajenas a nosotros se tuvo que enviar la entrevista (ahora llamado Cuestionario) a los estudiantes para que nos lo mandaran contestado por medio de un grupo que se hizo en la aplicación de WhatsApp, en donde participaban los cuatro estudiantes seleccionados para entrevistar, así como la asesora y autora de la presente tesis. Dicho cuestionario fue enviado el día 27 de mayo y se les pidió que lo contestaran y en audios nos mandaran lo que estaban pensando para resolver las situaciones, así mismo se les designó solo un tiempo determinado para mandar el cuestionario respondido junto con los audios para así poder evitar, en la medida de lo posible, que los alumnos consultaran libros o se compartieran sus respuestas.

La justificación para poder hacer este cambio metodológico la tomamos de Arnon et al. (2014) en el que se menciona que, en el diseño e implementación de instrumentos, se diseñan y aplican instrumentos con cierta intencionalidad, los cuales pueden ser cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (grabadas en audio y/o video), exámenes y/o juegos de computadora de los cuales se obtiene información con cierta intencionalidad.

Aunque se menciona que las entrevistas son el medio más importante por el cual se recopilan datos en las investigaciones basadas en APOE, no se menciona que sea indispensable, en cambio, sí se menciona que hay muchos instrumentos que se pueden utilizar y que permiten recolectar la información.

Aunque la metodología cambió, los objetivos siguen en pie, y como ya se había mencionado uno de estos es caracterizar las estructuras y mecanismos mentales, por esta razón, a continuación presentamos la evidencia que mostraron los estudiantes en el segundo cuestionario aplicado con su respectivo análisis siguiendo las estructuras y mecanismos mentales tal como se propusieron en la Descomposición Genética Preliminar, así como algunos fragmentos de los audios que nos enviaron los estudiantes para poder tener más evidencia de lo que pensaban al resolver cada situación. Cabe señalar que los alumnos tardaron entre una hora y media y dos horas en contestar el Cuestionario.

Estructura Mental Acción de Imagen de una Función

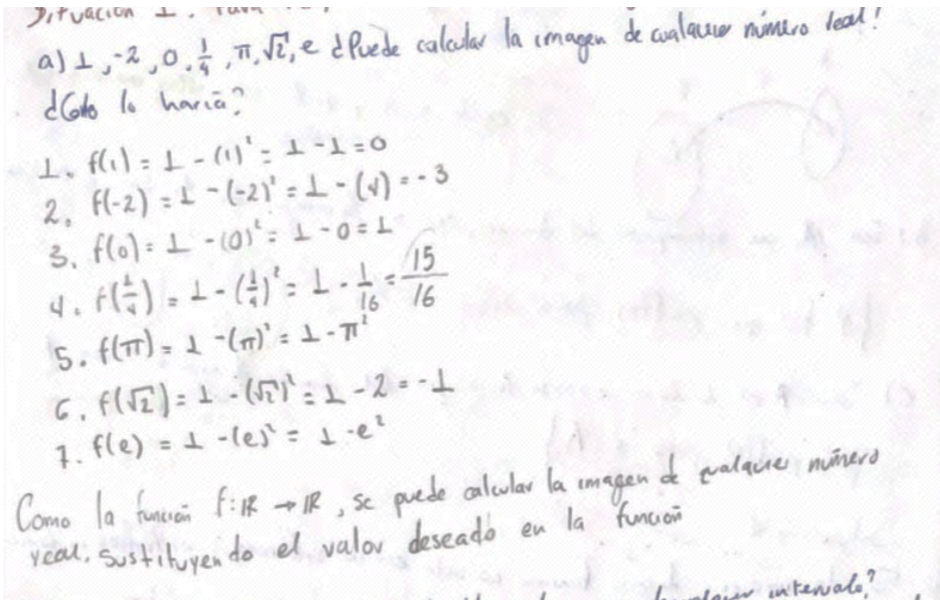
En nuestra descomposición genética la estructura acción de imagen de una función consiste en evaluar números reales bajo una función específica, mediante la concepción proceso de función y concepción objeto de número real. Más específicamente, con su concepción proceso de función el estudiante toma el objeto número real específico, aplica la regla y obtiene un nuevo objeto, que en este caso es un número real que es su imagen. Para poder evidenciar esta estructura se consideraron las situaciones 1(a), 5(a), 7(a) y 8(a).

En la situación problemática 1(a) del cuestionario, se pide determinar la imagen de números reales específicos bajo una función *f* dada en su representación algebraica como se muestra a continuación:

1. Para $f(x) = 1 - x^2$ determine la imagen de:

(a) 1, -2,0, ¼, π, $\sqrt{2}$, e, ¿puede calcular la imagen de cualquier número real? ¿cómo lo haría?

Los cuatro estudiantes que contestaron el cuestionario lo hicieron de manera correcta y no mostraron haber tenido problema para obtener las imágenes. Por ejemplo E8, quien para poder dar solución a esta situación problemática usa su estructura mental proceso de función que le permite tomar los objetos específicos **1, -2,0, ¼,** $\boldsymbol{\pi}, \sqrt{\mathbf{2}}$ **y** e, aplicarles la regla $\boldsymbol{f(x) = 1 - x^2}$ y obtiene nuevos objetos, otros números reales que son las imágenes de **1, -2,0, ¼,** $\boldsymbol{\pi}, \sqrt{\mathbf{2}}$ **y** e. Esos números reales específicos los puede tomar y operarlos gracias a su estructura previa de objeto de número real, ya que con esta el estudiante realiza acciones sobre los números reales. El procedimiento realizado por E8 se muestra en la figura 5.3.4.1:



Situación 1.

a) 1, -2, 0, $\frac{1}{4}$, π, √2, e ¿Puede calcular la imagen de cualquier número leal?
¿Cómo lo haría?

1. $f(1) = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$
2. $f(-2) = 1 - (-2)^2 = 1 - (4) = -3$
3. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1 - 0 = 1$
4. $f(\frac{1}{4}) = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
5. $f(\pi) = 1 - (\pi)^2 = 1 - \pi^2$
6. $f(\sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$
7. $f(e) = 1 - (e)^2 = 1 - e^2$

Como la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede calcular la imagen de cualquier número real, sustituyendo el valor deseado en la función

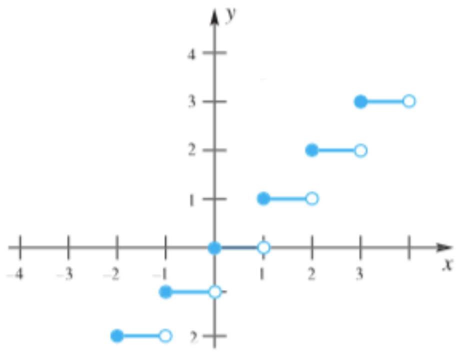
Figura 5.3.4.1. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 1(a).

Se hizo evidente que a los alumnos no les causó conflicto evaluar la función en números diferentes a los naturales o enteros, están familiarizados con números que pertenecen a otros conjuntos, prueba de esto es lo que describe el E8 en un fragmento del audio correspondiente a la situación 1:

> *"Para calcular la imagen de los valores que se plantean lo único que hice fue cambiar el valor de x por el valor de los que están ahí propuestos, por ejemplo, la imagen de 1, pues sería* $f(1) = 1 - 1^2$ *que sería* $1 - 1 = 0$ *entonces la imagen de 1 sería el cero y así con cada uno de los valores…"*

Por otra parte, se propuso la situación 5(a) en la que también se pretende evidenciar la concepción acción de imagen de una función, esta vez la función se da en su representación gráfica. En esta situación se pretende que los estudiantes puedan hacer la evaluación de valores específicos que se les dieron, pero ahora con una función que no se da de manera analítica, tal como se muestra a continuación:

5. Determina la imagen de:



(a) 0, 1, 2, 3, 4, …n ¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.

Para resolver esta situación los estudiantes tienen que hacerlo de manera diferente a cuando se les da una función de manera analítica, pues ahora solamente cuentan con el registro de representación gráfico, entonces van a tener que evocar su concepción proceso de función la cual incluye la representación gráfica. Tendrá que irse al valor especifico x que le piden encontrar su imagen para luego observar qué valor toma la función en el eje de las ordenadas cuando toma ese valor "x". Esta situación tiene mayor dificultad que 1(a), pues aquí no se tiene la expresión analítica de la función correspondiente a la gráfica.

En esta situación ninguno de los estudiantes dio la imagen para cada valor específico, y los estudiantes E8, E14 y E10 se limitan a responder la pregunta de reflexión: ¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? Si su respuesta es sí, ¿por qué? Ejemplo de las respuestas que dan estos estudiantes es como la de E14 quien asegura que sí se puede calcular la imagen de cualquier número real, argumentando: "porque el dominio de la función $f(x)$ está definido para todos los reales", esto se muestra en la figura 5.3.4.2:

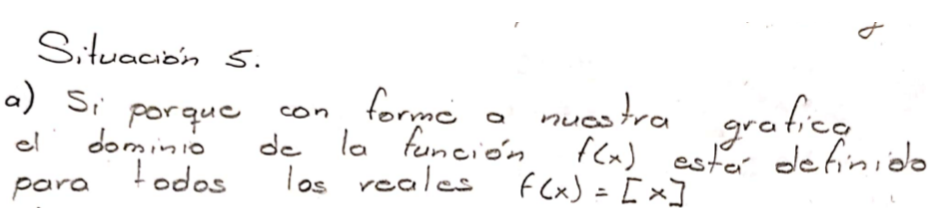

Situación 5.
a) Si porque con forme a nuestra grafica el dominio de la función f(x) está definido para todos los reales f(x) = [x]

Figura 5.3.4.2. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 5.

Este estudiante E14 no da la imagen para cada valor que se le propone en el inciso (a) pero con lo que responde podríamos decir que está consciente de que puede obtener la imagen de cualquier número real que se le dé, esto se ratifica con su fragmento del audio correspondiente a la situación 5:

“¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? si su respuesta es sí, por qué, si su respuesta es no, justifique…Ah sí porque realmente en nuestra gráfica como… como nuestro dominio está determinado sobre el eje x en cierta manera entonces todos nuestros números reales sobre el eje x van a tener un punto específico sobre el eje y que determina nuestro rango, nuestra imagen, entonces sí, sí se podría obtener…”

Es importante resaltar que, aunque den esta repuesta no es garantía de que si se le da un valor específico pudiera determinar la imagen, ya que, por ejemplo, la función de la situación 5 es una función discontinua y pudiera ser que no estén familiarizados con este tipo de funciones.

Por otra parte, E6 responde de manera diferente a los demás, aunque no obtiene las imágenes de manera específica para cada número que se le dio, da la imagen de la función como un conjunto, lo cual parece que se encuentra en un primer nivel de proceso. De hecho, la respuesta al inciso a) nos muestra que evidencia una concepción acción al mencionar que la imagen de un número concreto en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es el mismo número, tal como se muestra en la figura 5.3.4.3:

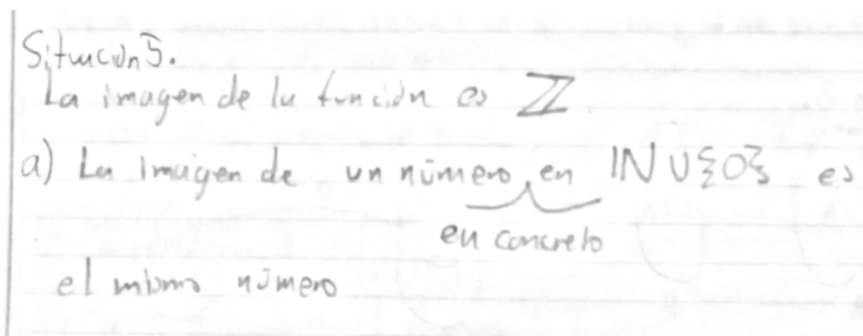

Situación 5.
La imagen de la función es $\mathbb{Z}$
a) La imagen de $\underbrace{\text{un número en}}_{\text{en concreto}}$ $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es el mismo número

Figura 5.3.4.3. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 5(a).

Para que E6 pudiera haber determinado la imagen de alguna manera tuvo que haberlo hecho empezando con casos particulares, para poder concluir quién es la imagen de cada valor, es decir con su concepción proceso de función tomar un valor en el dominio, evaluarlo con la gráfica de la función y determinar quién era la imagen de ese valor en el eje de las abscisas. Luego de esto el estudiante tuvo que usar su concepción previa de proceso conjunto para poder determinar el conjunto que cumplía ciertas condiciones, en este caso, ser imagen de un elemento del dominio bajo la función dada gráficamente.

Para tener más elementos que nos permitan caracterizar la estructura acción se propuso también la situación 7(a), en donde se da una función también en su representación algebraica como en la situación 1a), pero más difícil y se pide al estudiante obtener los valores de las imágenes, tal como se muestra a continuación:

7. Para $g(y) = \frac{1}{y-1}$ determine cada valor.

(a) 3, 2, 10, -5, $\sqrt{5}$, 1/5, 1

A pesar de que la función está dada en términos de *y*, esto no causó problemas para los estudiantes, pues todos resolvieron con éxito este inciso y dieron las respuestas correctas. Como es el caso de E14, quien usa su concepción proceso de función para tomar un valor de los que se le dan, aplicarle la función y obtener un nuevo objeto que sería la imagen de ese valor. Es importante resaltar que el estudiante escribe en el caso particular de la imagen para el número real 1, que ahí la función no está definida, como se muestra en la figura 5.3.4.4:

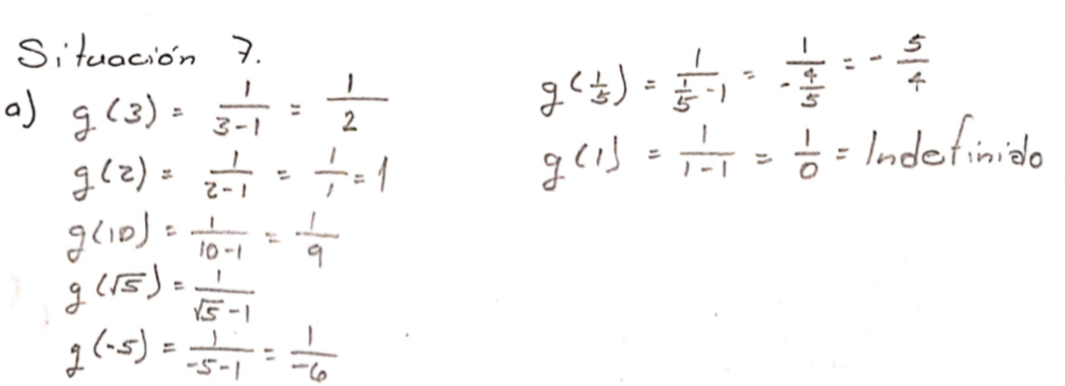


Figura 5.3.4.4. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 7(a).

Nuevamente se observa que están familiarizados con números que no solo pertenecen al conjunto de los enteros y son capaces de obtener la imagen para cada valor que se les da, pero es muy importante resaltar el hecho de que cuando se les da una función en su forma analítica los estudiantes sin problema dan las imágenes, en cambio en el registro gráfico, como fue en el caso de la situación 5(a), los estudiantes por alguna razón no dan los valores específicos correspondientes a las imágenes.

La última situación que se propone para caracterizar la estructura acción es la 8(a), (b), (c) y (d), en donde se pide que den los valores correspondientes al evaluar la función A, que corresponde al área sombreada de la gráfica dada, tal como se muestra a continuación:

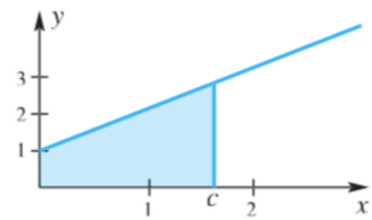
8. Sea A (c) el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como función de acumulación. Determine

(a) A (1)

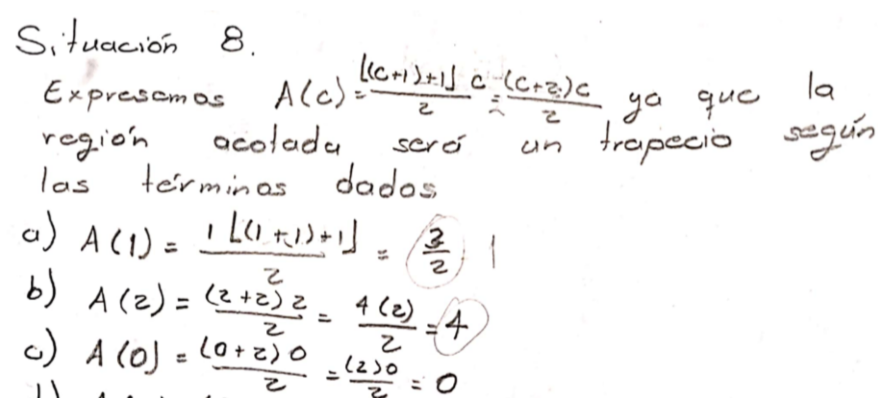
(b) A (2)

(c) A (0)

(d) A (c)



Lo primero que tenían que hacer los estudiantes era haber obtenido A(c) para de esta manera poder evaluar la función A en los puntos dado en los incisos (a), (b) y (c). Los estudiantes E6 y E14 respondieron de manera correcta la situación. En particular el estudiante E14 menciona que la región acotada es un trapecio y con la fórmula de este obtiene *A(c),* después usa su concepción proceso de función y objeto de número real, para hacer la evaluación de la función en los valores dados. Esto se muestra en la figura 5.3.4.5:



Situación 8.

Expresamos $A(c)=\frac{[(c+1)+1]c}{2}=\frac{(c+2)c}{2}$ ya que la región acotada será un trapecio según los términos dados

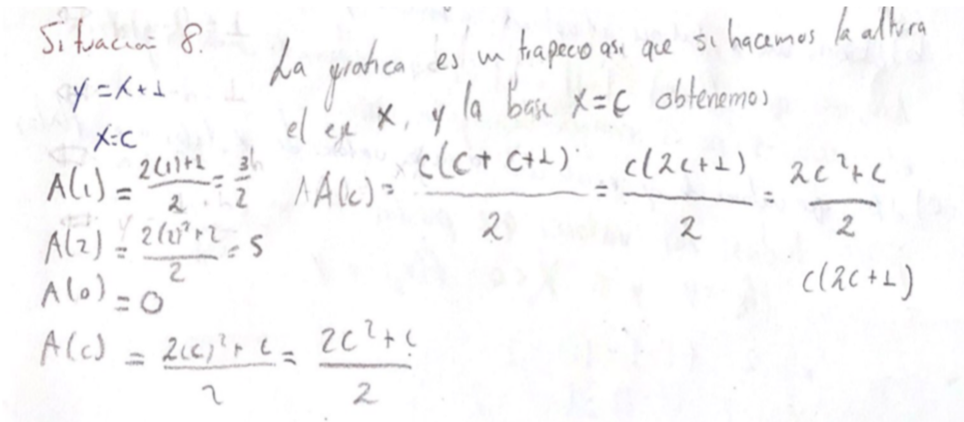
a) $A(1)=\frac{1[(1+1)+1]}{2}=\frac{3}{2}$

b) $A(2)=\frac{(2+2)2}{2}=\frac{4(2)}{2}=4$

c) $A(0)=\frac{(0+2)0}{2}=\frac{(2)0}{2}=0$

Figura 5.3.4.5. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 8(a), (b) y (c).

Realmente en esta situación la dificultad era que nuevamente la función a evaluar no estaba dada de manera analítica, y más aún, que se tenía que obtener la fórmula para encontrar el área de la región acotada de manera tal que esa fuera la nueva función para evaluar. La dificultad que presentaron los estudiantes E8 y E10 fue al momento de obtener la función a evaluar, por ejemplo, E8, quien obtuvo como fórmula $A(c)=\frac{2c^2+c}{2}$ al considerar incorrectamente la altura y base del trapecio, pero independientemente de esto, la evaluación de la función en los valores 1, 2 y 0 la obtiene de manera correcta, tal como se muestra en la figura 5.3.4.6:



Situación 8. La gráfica es un trapecio así que si hacemos la altura el eje x, y la base $x=c$ obtenemos

$y = x+1$

$x:c$

$A(1) = \frac{2(1)+1}{2} = \frac{3}{2}$

$A(2) = \frac{2(2)^2+2}{2} = 5$

$A(0) = 0$

$A(c) = \frac{2(c)^2+c}{2} = \frac{2c^2+c}{2}$

$A(c) = \frac{c(c+c+1)}{2} = \frac{c(2c+1)}{2} = \frac{2c^2+c}{2}$

$c(2c+1)$

Figura 5.3.4.6. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 8(a), (b) y (c).

En un fragmento del audio del estudiante E8 describe su procedimiento como sigue:

> *"Y para la situación 8 aquí lo que yo… bueno lo primero que hice antes de empezar fue esbozar la gráfica porque como se nos decía que pues es área yo me imagine que se trataba de una figura entonces lo que hice fue esbozar la gráfica primero para ver como que de qué figura se trataba. Ver si me podía ayudar un poquito más y vi que la figura es un trapecio y lo que hice fue con dadas las condiciones que se nos dan que esta acotada por arriba por $x+1$ y eso pues como que intenté establecer una fórmula, bueno utilizando la fórmula para sacar el área de un trapecio hacer lo mismo pero para la función para dejarla en función de c y ahora si poder sustituir el valor de c como se pide que evaluemos A(1), A(2) y así..."*

Es importante destacar que, una vez que los estudiantes tienen la expresión analítica de una función, evidencian no tener problemas con obtener las imágenes, a diferencia de cuando se les da una función de manera gráfica, donde parece ser que presentan mayor dificultad.

De esta manera se puede establecer que la estructura mental de acción en la imagen de una función se da cuando el estudiante es capaz de tomar ciertos elementos específicos del dominio y es capaz de calcular su imagen mediante la función.

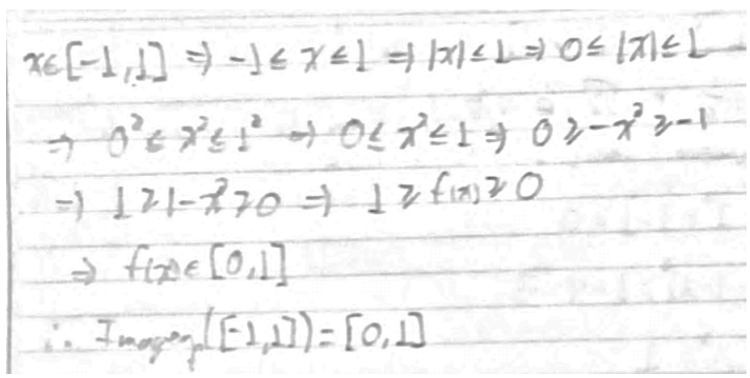
Interiorización

En el inciso (b) de la situación 1 se pretendía que el alumno evidenciara una posible interiorización de la concepción acción de imagen, pues se le da intervalos en los que se les pide la imagen de estos para la misma función, como se muestra a continuación:

> **1. Para la función $f(x) = 1 - x^2$ determine la imagen de los siguientes intervalos:**

(b) [-1,1], [0,2], [-2,3) ¿Puede obtener la imagen de cualquier intervalo? ¿cómo lo haría?

Es aquí donde el estudiante podría recorrer mentalmente todos los puntos del intervalo dado e ir proponiendo o imaginando posibles subconjuntos como imagen. El estudiante E6 muestra esta interiorización en un primer nivel, al ser consciente de que la imagen de estos intervalos es otro intervalo e incluso determinarlo de alguna manera. E6, determina la imagen de cada intervalo que se le da, y esto lo hace utilizando su concepción objeto de número real, proceso de intervalo y proceso de valor absoluto. E6 inicia estableciendo primero el intervalo al que le quiere determinar su imagen, para después coordinar los procesos de intervalo cerrado y valor absoluto, lo que le permite considerar que si $x \in [-1,1]$ entonces $|x| \leq 1$, luego usando su concepción proceso de valor absoluto el cual le permite considerarlo como desigualdades puede establecer relaciones como $0^2 \leq x^2 \leq 1^2$ para manipularlas de manera que pueda obtener la función y así decir que es en ese intervalo la imagen bajo la función del intervalo dado inicialmente, tal como se muestra en la figura 5.3.4.7:


$x \in [-1,1] \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 1$

$\Rightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq -1$

$\Rightarrow 1 \geq 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq f(x) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \in [0,1]$

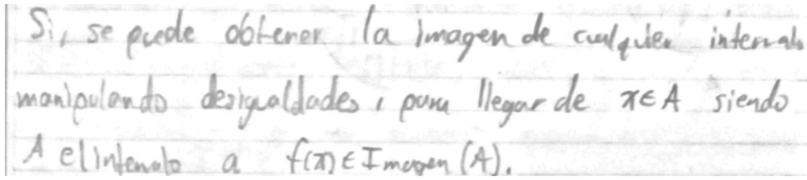
$\therefore$ Imagen$([-1,1]) = [0,1]$

Figura 5.3.4.7. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 1(b).

Si el estudiante no contara con las concepciones previas mencionadas anteriormente, no podría proceder de la manera en cómo lo hizo. Este alumno nos proporciona evidencia de que ve la imagen de una función más allá de una simple evaluación, esto lo podemos confirmar con lo que menciona E6 en el audio correspondiente a la situación 1(b):

> *"...para el punto (b) partí de que x pertenece al intervalo que dice ahí y pues con multiplicaciones bueno y utilizando desigualdades llegué a qué conjunto tenía que pertenecer $f(x)$ el único caso en el se me complejo poquito fue en el último, ya pero solamente fue separar como en dos casos cuando x va desde menos dos hasta cero y cuando va de cero hasta tres y ya pues resolví igual que los dos anteriores."*

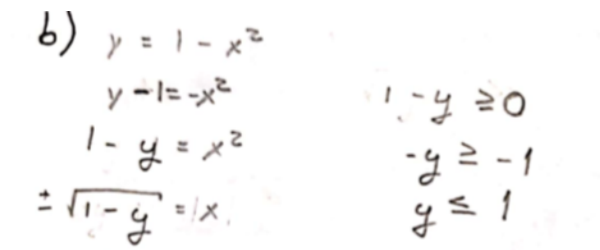
Además, responde a las preguntas de reflexión que, en efecto, puede obtener la imagen de cualquier intervalo haciendo uso de las desigualdades para poder llegar a que valores toma la función en ese intervalo, tal como se muestra en la figura 5.3.4.8:



Si, se puede obtener la imagen de cualquier intervalo manipulando desigualdades, para llegar de $x \in A$ siendo A el intervalo a $f(x) \in \text{Imagen}(A)$.

Figura 5.3.4.8. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 1(b).

Por otra parte, el estudiante E14 no determina la imagen para cada intervalo que se da, lo que hace es usar el método que se les proporcionó en clases para obtener la imagen de la función, el cual se obtiene directamente de la definición de imagen. El considera a la función como una igualdad de dos términos y opera a partir de $y = 1 - x^2$, haciendo uso de las operaciones básicas llega a obtener que $x = \pm\sqrt{1-y}$, y es aquí donde el estudiante es consciente de que a partir de ahí puede obtener cuáles serían las imágenes de la función *f*, para lo cual usa su concepción previa de proceso de función la cual incluye la función raíz cuadrada y sabe que no puede obtener la imagen de un número negativo, sino mayor o igual a cero, a partir de aquí utiliza su concepción proceso de desigualdades para obtener los valores que toma la función en el contradominio, tal como se muestra en la figura 5.3.4.9:



b) $y = 1 - x^2$
$y - 1 = -x^2$
$1 - y = x^2$
$\pm\sqrt{1-y} = x$

$1 - y \geq 0$
$-y \geq -1$
$y \leq 1$

Figura 5.3.4.9. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 1(b).

Como se muestra en la figura 8, el estudiante no considera el intervalo dado, pues se esperaría que después de obtener la imagen de todo el dominio de la función, usara este para de alguna manera determinar la imagen del intervalo dado. Pareciera que el estudiante solo aplica la definición de imagen de una función de manera algorítmica.

Por otra parte, los estudiantes E8 y E10 no dan evidencia de que pueden ver la imagen de esa función en dichos intervalos como subconjuntos, sino como solo una evaluación, por ejemplo el E10, quien menciona que no podría obtener la imagen de todo un intervalo porque tendría que reemplazar todos los valores de este en la función, tal como se muestra en las figura 5.3.4.10:

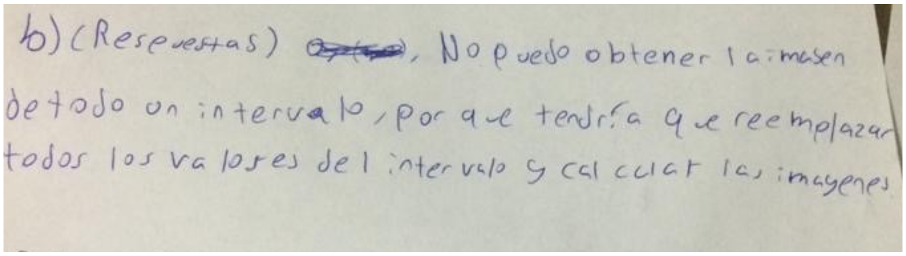


Figura 5.3.4.10. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 1(b).

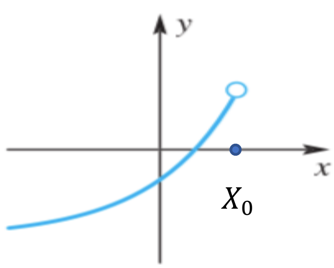
Podemos entonces afirmar que E10 no dio evidencia de tener la concepción proceso, ya que no le es posible considerar un conjunto que contenga a todas las imágenes de estos puntos sin necesidad de obtenerla una por una.

En la situación 2 del cuestionario también se pretende evidenciar una posible interiorización de la estructura acción, pues se pide determinar qué valores tienen imágenes en la función, pero esta vez dada solamente en su representación gráfica, como se muestra a continuación:

2.

(a) ¿Qué valores de x tienen imagen? ¿Cuáles son las imágenes de estos valores?

(b) ¿Cuáles valores de x no tienen imagen? Justifique su respuesta



Al no tener la expresión analítica de la función se contempló que los estudiantes pudieran tener dificultades si no cuentan con la estructura previa de proceso de función, pues de no ser así, no pudieran determinar si uno de los valores en el dominio tiene imagen, primero ubicándolo en el dominio, luego aplicarle la función de manera gráfica y finalmente obteniendo el nuevo objeto que es la imagen.

Para esta situación los estudiantes E6, E14 y E8 determinaron de manera correcta los x para los que se tiene un valor en el contradominio, tal como lo hizo E6, quien menciona que son todos los $x < x_0$ haciendo uso de su concepción previa de proceso conjunto al reunir elementos que cumplen cierta condición, además añade una descripción de quiénes son las imágenes en una función de manera gráfica, donde menciona que existe un punto de la forma de un par ordenado (x, y) que pertenece a la gráfica de la función, tal como se muestra en la figura 5.3.4.11:

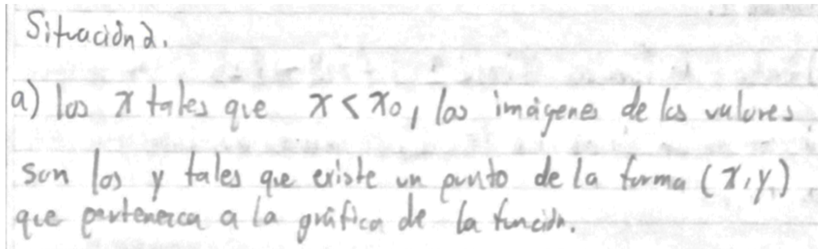

Situación 2.
a) los x tales que $x < x_0$, las imágenes de los valores
son los y tales que existe un punto de la forma (x, y)
que pertenezca a la gráfica de la función.

Figura 5.3.4.11. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 2(a).

Se puede afirmar que para los estudiantes les fue más fácil determinar la imagen en el registro gráfico al determinar qué valores tienen imagen de la función y cuáles no, y además dan a manera de subconjunto la imagen de la función, lo que da indicios de estar construyendo el proceso, pues son capaz de ir más allá de realizar la acción de evaluar la función en valores específicos, tal como se mencionó en la descomposición genética, prueba de esto es lo que describe el E6 en un fragmento del audio correspondiente a la situación 2, pues nos da evidencia de que mentalmente "recorrió" todos los valores de *x* que pudieran tener imagen:

> *"Para resolver la situación 2 el punto (a), bueno me fui sobre los… mentalmente me fui sobre los valores del eje x y trace rectas verticales y bueno si la recta vertical toca la gráfica de la función entonces pues el valor de x en cuestión tiene imagen y ya pues esto ocurre para todos los x que son menores a x_0, para x_0 como tiene un circulo sin rellenar pues quiere decir que no tiene imagen ese punto, el x_0 , y pues ya a partir de x_0 incluyendo x_0 ciertas líneas verticales no van a tocar la función entonces esos valores no tienen imagen."*

Una respuesta muy particular fue la que dio el E14, quien además de mencionar qué valores tienen imagen, añade que serán los valores menores al $\lim_{x \to x_0} f(x)$, lo cual nos da evidencia de que esta estudiante utiliza además de su concepción previa de proceso de función, su concepción proceso de límite de una función, tal como se muestra en la figura 5.3.4.12:

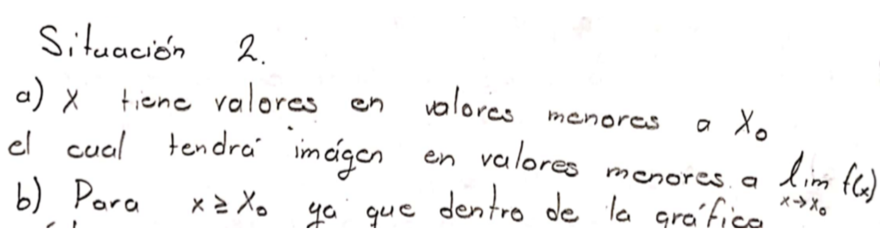
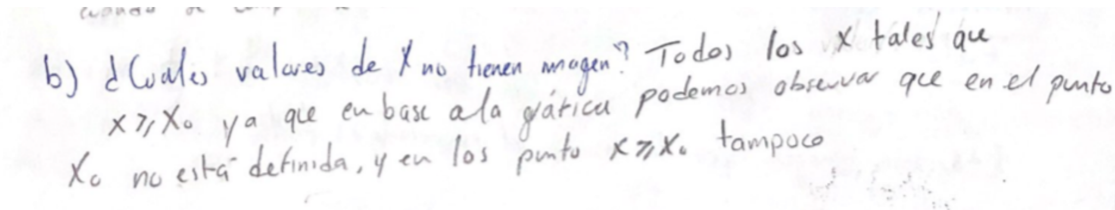

Situación 2.
a) x tiene valores en valores menores a X_0
el cual tendrá imagen en valores menores a $\lim_{x \to x_0} f(x)$
b) Para $x \geq X_0$ ya que dentro de la gráfica

Figura 5.3.4.12. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 2(a).

Para el inciso (b) de la situación 2 todos los estudiantes determinaron de manera correcta cuáles valores no tienen imagen y todos se basan en la gráfica de la función determinando que a partir de x_0 ya no hay gráfica de la función, tal como describe el

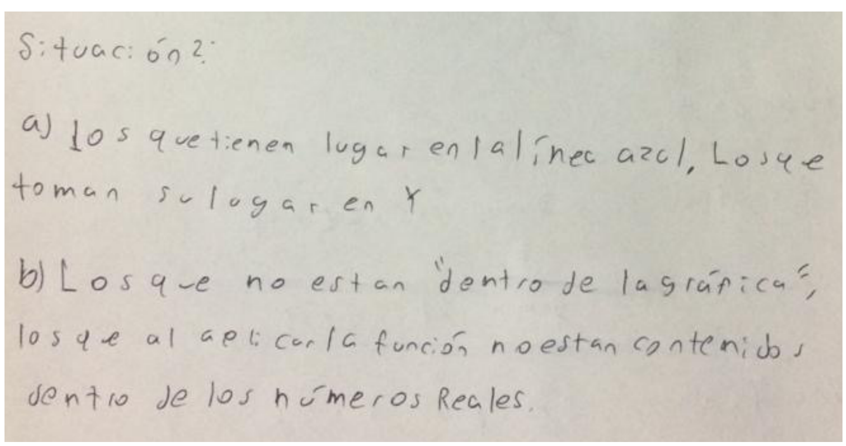
E8, quien menciona que los x que no tienen imagen son los $x \geq x_0$ ya que a partir de aquí la función ya no está definida, para esto el estudiante evoca a su concepción proceso de función para poder determinar de manera gráfica a partir de cual valor de x la función ya no estaba definida y así con su concepción proceso conjunto poder reunir esos objetos que cumplían no ser imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.13:



b) ¿Cuáles valores de X no tienen imagen? Todos los x tales que $x \geq X_0$ ya que en base a la gráfica podemos observar que en el punto X_0 no está definida, y en los punto $x \geq X_0$ tampoco

Figura 5.3.4.13. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 2.

Por otra parte tenemos al E10, quien en sus respuestas a los incisos (a) y (b) de la situación 2 no hizo uso de su concepción proceso de conjunto para obtener los valores de *x* que tienen imagen y lo mismo para los que no tienen, sino que responde en el lenguaje común observando la gráfica de la función, por ejemplo en el inciso (a) determina que tienen imagen todos los *x* que tienen lugar en la línea azul respectivamente en los valores de *y*, y para el inciso (b) afirma que son los que no están dentro de la gráfica. Para estas dos respuestas el estudiante utiliza su concepción proceso de función de manera gráfica, pues solo se limita a decir que son los que están y los que no están en esta, pero no especifica a partir de qué elemento en el dominio se tiene o no imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.14:



Situación 2:

a) los que tienen lugar en la línea azul, Los que toman su lugar en Y

b) Los que no estan "dentro de la gráfica", los que al aplicar la función no estan contenidos dentro de los números Reales.

Figura 5.3.4.14. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 2 (a) y (b).

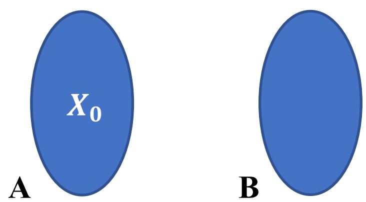
Aunque no escribe de manera matemática cuáles *x* tienen y no tienen imagen podemos afirmar que el estudiante sí sabe cuál es el valor que determina estas condiciones, pues en el audio correspondiente a esta situación E10 menciona:

“En la situación 2 puse que los valores que tienen imagen son los que estarían dentro de la línea azul de la gráfica y son todos los valores que están contenidos en ésta y los valores que no tienen imagen son los que están fuera de esta gráfica como aparecen a partir del punto x_0 en el antes no tienen imagen en la función”.

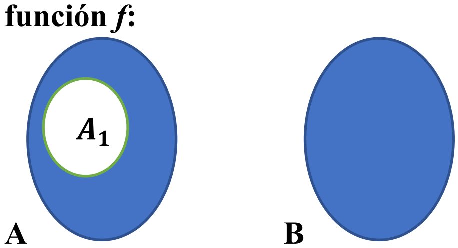
La situación 3 fue diseñada para que el estudiante vaya construyendo su concepción proceso del concepto partiendo primero de un punto, luego de un subconjunto y terminar con todo el dominio de la función, como se muestra a continuación:

3. Sea el óvalo A el conjunto de partida (dominio) para alguna función *f* y el segundo óvalo el conjunto de llegada de dicha función (recorrido), conteste:

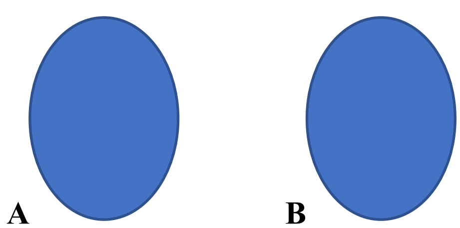
(a) Sea X_0 un elemento del dominio exprese la imagen de X_0 bajo la función *f*:



(b) Sea A_1 un subconjunto del dominio exprese la imagen de A_1 bajo la función *f*:



(c) Sea A el dominio exprese la imagen del dominio A bajo la función *f*:



En las dos situaciones problemáticas previas se le fue haciendo preguntas al estudiante para que reflexionara si era posible, además de determinar la imagen en un punto, obtener la imagen de un intervalo, para llevarlos a que pudieran finalmente encontrar la imagen de todo el dominio de la función. Como en esta situación los alumnos no tienen una función, un valor o algún conjunto en específico, se tomará en cuenta si son conscientes de que la imagen es un subconjunto del codominio, y en general, los cuatro estudiantes determinaron las imágenes que se piden lo que nos permite decir que van construyendo su concepción proceso del concepto, de acuerdo a lo que dice la DGP.

Ejemplo de esto es lo que realizó el E6, quien utiliza su concepción proceso de función para poder determinar que la imagen corresponde al objeto que se obtiene de aplicarle la función a un valor dado, dado x_0 la imagen es $f(x_0)$, luego para un subconjunto la imagen corresponde a otro subconjunto con las imágenes de cada valor en el dominio, para lo cual utiliza su concepción proceso de conjunto, luego para todo el dominio determina que es un subconjunto en el contradominio que contiene todas las imágenes del dominio, tal como se muestra en la figura 5.3.4.15:

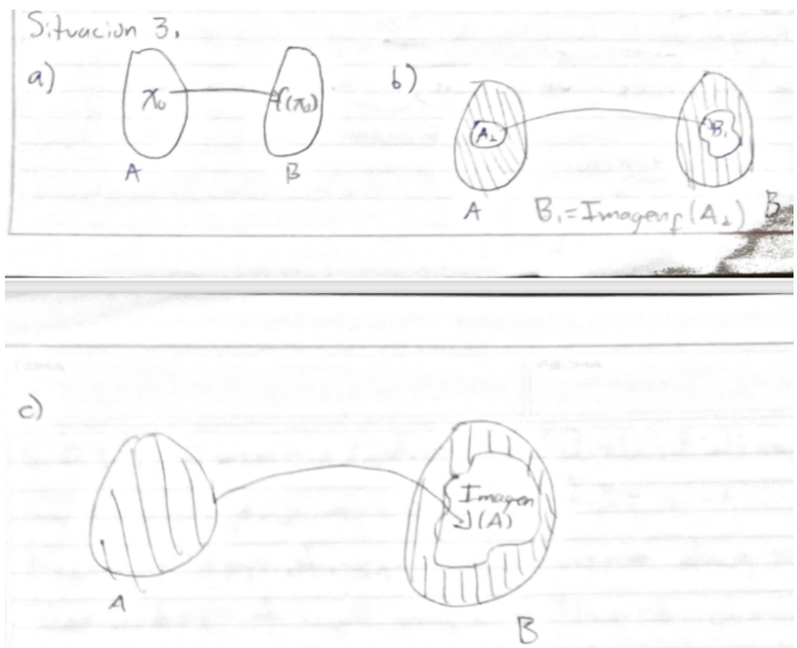


Figura 5.3.4.15. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 3.

Aparentemente esta situación no causó conflicto en los estudiantes, y esto lo reafirmamos con lo que describe E6 en un fragmento del audio correspondiente a la situación 3, donde describe como “simplemente” lo que tiene que representar:

> *“Para resolver la situación 3 en el inciso (a) pues la imagen de un elemento del dominio va hacer otro elemento ahora en el contradominio y simplemente se va a llamar $f(x_0)$ es decir la imagen de x_0 bajo la función f, la imagen de un subconjunto del dominio pues va hacer otro conjunto digamos B_1 que va a ser subconjunto del contradominio y ya simplemente digo que B_1 es la imagen bajo f del conjunto A_1, y para expresar la*

imagen del dominio A bajo la función f ésta va a ser un subconjunto del contradominio también, entonces pues ya simplemente lo pongo así como un subconjunto no tiene porque ser todo el contradominio."

Incluso podemos ver que este estudiante es consciente de que el subconjunto imagen pudiera ser todo el contradominio, aunque no necesariamente. De alguna manera E6 da indicios de tener más allá de una estructura acción de imagen de una función.

Proceso Imagen de una Función

Primer nivel del proceso:

Se describió en la DGP un primer nivel del proceso que consiste en pensar en la imagen de la función como un subconjunto del codominio, para esto se requiere que el alumno vaya más allá de realizar la acción de evaluar la función en objetos específicos del dominio.

Para evidenciar este primer nivel de la estructura proceso se propuso la situación 4 en donde no se da una función de manera explícita, y el estudiante tiene que contestar como verdadero o falso a los enunciados proporcionados, como se muestra a continuación:

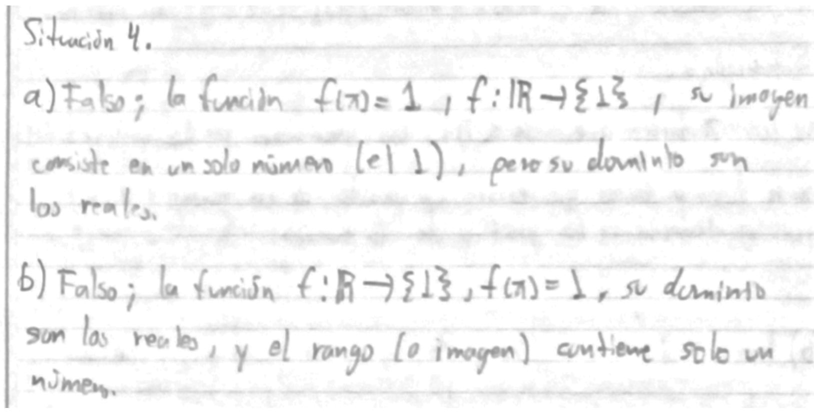
4. Determine si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas. Si su respuesta es afirmativa dé una justificación, de lo contrario trate de proporcionar un contraejemplo.

(a) Si la imagen de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

(b) Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

Para resolver la situación el estudiante requiere tener una concepción más allá de acción, pues con solo esta estructura no le sería posible pensar en una función que cumpla con lo que se le está pidiendo para poder determinar si es verdadero y justificar o decir si es falso y dar un contraejemplo.

En ésta situación las respuestas de los estudiantes fueron varias, pues todos proponen una función para responder a los incisos, pero en algunos casos no fue correcta, a excepción del E6, quien contestó de manera acertada y en ambos incisos hace uso de su concepción previa de objeto función, la cual le permite dar una función que cumpla determinadas condiciones, aquellas que se piden en la situación. Una vez dada la función determina el dominio y rango de ésta y luego explica el por qué esta función le sirve para justificar. Para esto hace uso de su concepción esquema de cuantificador de un solo nivel, pues aplica el cuantificador existencial (∃) para poder verificar que efectivamente ambas oraciones son falsas, tal como se muestra en la figura 5.3.4.16:

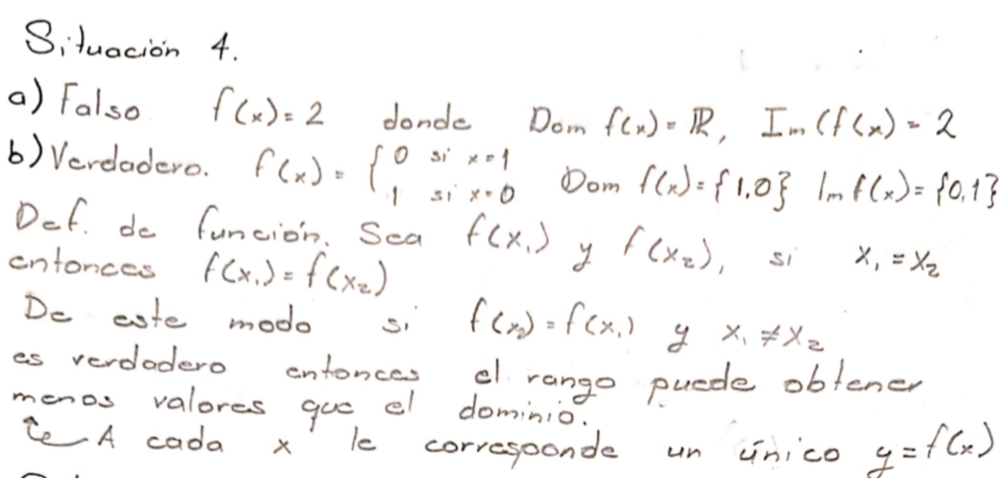

Situación 4.

a) Falso; la función $f(x) = 1$, $f: \mathbb{R} \to \{1\}$, su imagen consiste en un solo número (el 1), pero su dominio son los reales.

b) Falso; la función $f: \mathbb{R} \to \{1\}$, $f(x) = 1$, su dominio son los reales, y el rango (o imagen) contiene solo un número.

Figura 5.3.4.16. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 4.

Solamente uno de los cuatro alumnos (E14) determinó que el inciso (b) era falso, ya que encontró una función para la que sí se cumplía la oración, pero no se percató que solo era un caso particular y no una demostración de lo que afirmaba. Aun así, hace uso de su concepción esquema de cuantificador de un solo nivel para poder determinar si lo que decía era cierto al dar la función, y después con su concepción proceso de conjunto reunir los elementos que cumplían la condición pedida para tener el dominio y rango como conjunto y comparar con lo que se estaba pidiendo, tal como se muestra en la figura 5.3.4.17:


Situación 4.

a) Falso $f(x) = 2$ donde $Dom\, f(x) = \mathbb{R}$, $Im(f(x)) = 2$

b) Verdadero. $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 1 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ $Dom\, f(x) = \{1, 0\}$ $Im\, f(x) = \{0, 1\}$

Def. de función. Sea $f(x_1)$ y $f(x_2)$, si $x_1 = x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$

De este modo si $f(x_2) = f(x_1)$ y $x_1 \neq x_2$ es verdadero entonces el rango puede obtener menos valores que el dominio.

A cada x le corresponde un único $y = f(x)$

Figura 5.3.4.17. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 4.

Como podemos observar este estudiante trato de dar respuesta a las oraciones basándose en su concepción previa de proceso de función, esto lo reafirmamos con lo que menciona en el audio correspondiente a esta situación:

"Situación 4 para el primer inciso (a) si la imagen de una función consiste en un solo número entonces su dominio también consiste en un solo número, creo que es falso porque nuestra definición de función no especifica como que esa parte o por ejemplo tenemos el ejemplo cuando $f(x)$ es igual a 2 entonces tenemos un solo número en imagen y ninguno en el dominio, para ver si el dominio de una función contiene al menos dos números entonces el rango también contiene al menos dos números y esa sí sería verdadero por lo mismo de que, de la definición de función en el que…"

Por otra parte está E8, quien da una función, pero no cumple con las condiciones pedidas, no establece el dominio e imagen de la función, piensa en casos particulares o valores específicos cuando considera -5 y 5 hace uso de su concepción acción de imagen de una función para obtener las imágenes de estos valores específicos y menciona que la imagen de los valores dados es un solo valor, 25, tal como se muestra en la figura 5.3.4.18. Esta confusión en el estudiante no nos permite determinar o ver si tiene una concepción más allá de acción de imagen de una función.

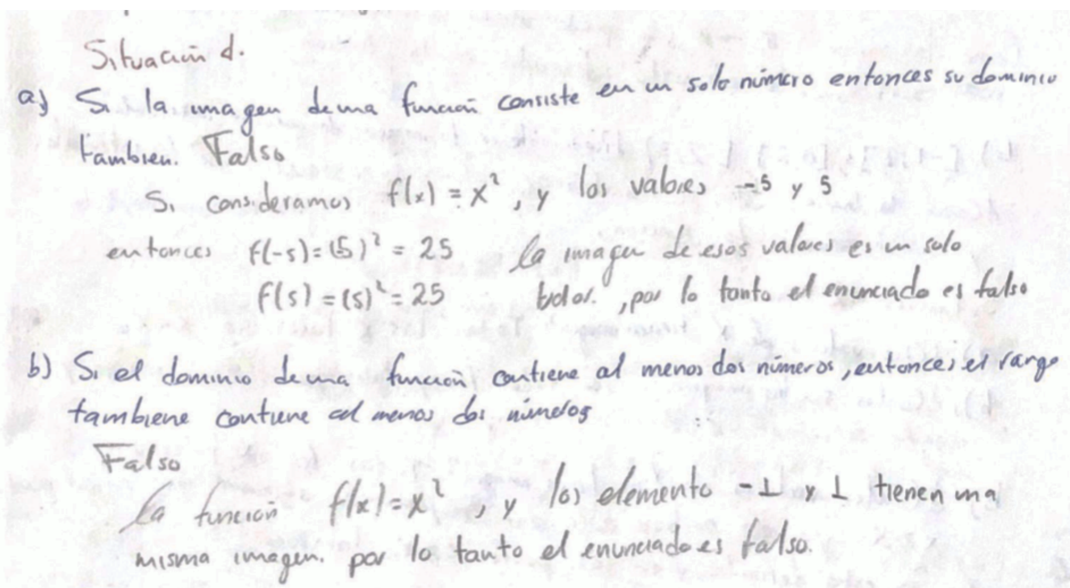

Situación 4.
a) Si la imagen de una función consiste en un solo número entonces su dominio tambien. Falso
Si consideramos $f(x) = x^2$, y los valores -5 y 5
entonces $f(-5) = (5)^2 = 25$ la imagen de esos valores es un solo
$f(5) = (5)^2 = 25$ valor, por lo tanto el enunciado es falso
b) Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango tambiene contiene al menos dos numelos
Falso
La función $f(x) = x^2$, y los elemento -1 y 1 tienen una misma imagen. por lo tanto el enunciado es falso.

Figura 5.3.4.18. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 4.

Con esto, se tiene evidencia de que algunos estudiantes ya tienen una concepción más allá de acción, la cual les permitió contestar a la situación 4. A excepción de E14 y E8, los otros estudiantes observaron que la misma función les servía para responder ambos incisos. El estudiante E6 justifica correctamente mientras que E10 responde de una manera en la que no se distingue cuál es la respuesta para cada inciso, pero pone que es falso y da la función f(x)=x^2, hace uso de su concepción proceso de conjunto para poder decir cuál es el dominio de esa función, pero no menciona nada sobre la imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.19:

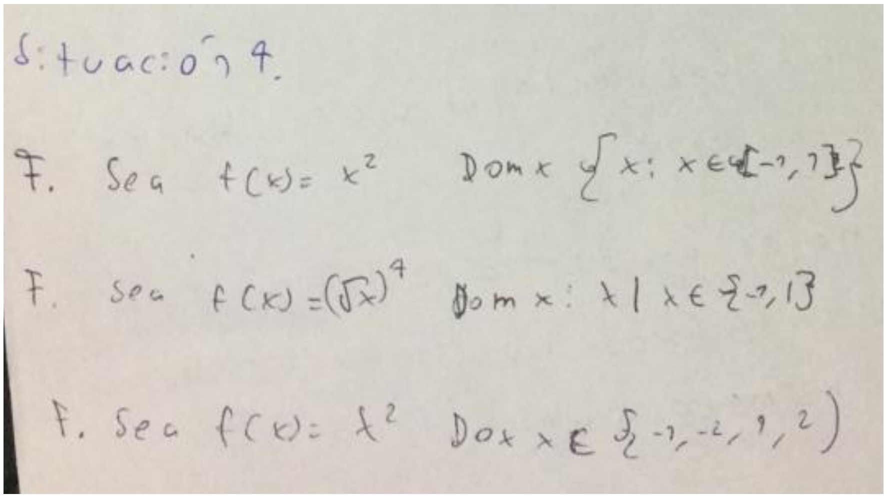
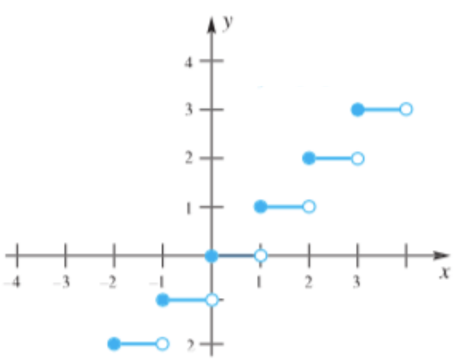


Figura 5.3.4.19. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 4.

Por otra parte, se propuso la situación 5 (b), (c) y (d) en el que se presenta la función parte entera con valores específicos y se pide obtener la imagen de intervalos y de todos los reales, como se muestra:

5. Determina la imagen de:

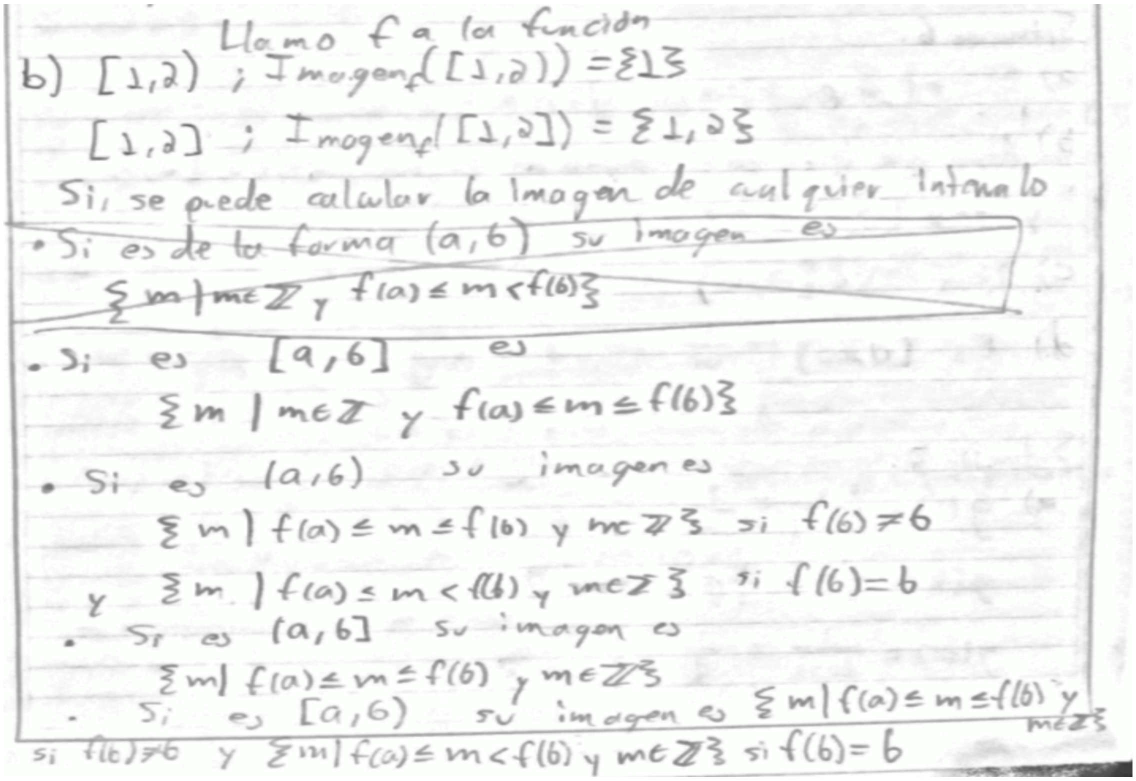


(b) [1,2), [1,2] ¿Se puede calcularla imagen de cualquier intervalo? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.

(c) $\boldsymbol{x \geq 0}$ **,** $\boldsymbol{x < 0}$

(d) Todos los $\mathbb{R}$

En estos incisos se pretende evidenciar un primer nivel hacia el proceso cuando los estudiantes obtienen un subconjunto de valores en el recorrido, aunque aún no sepan cuál es ese subconjunto. Para el inciso (b) solamente E6 dio la imagen para cada intervalo que se pedía, tal como se muestra en la figura 5.3.4.20:


Llamo f a la función

b) $[1,2)$; $\text{Imagen}_f([1,2)) = \{1\}$

$[1,2]$; $\text{Imagen}_f([1,2]) = \{1,2\}$

Si, se puede calcular la Imagen de cualquier Intervalo

• ~~Si es de la forma (a,b) su imagen es~~

~~$\{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } f(a) \leq m < f(b)\}$~~

• Si es $[a,b]$ es

$\{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } f(a) \leq m \leq f(b)\}$

• Si es (a,b) su imagen es

$\{m \mid f(a) \leq m \leq f(b) \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$ si $f(b) \neq b$

y $\{m \mid f(a) \leq m < f(b) \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$ si $f(b) = b$

• Si es $(a,b]$ su imagen es

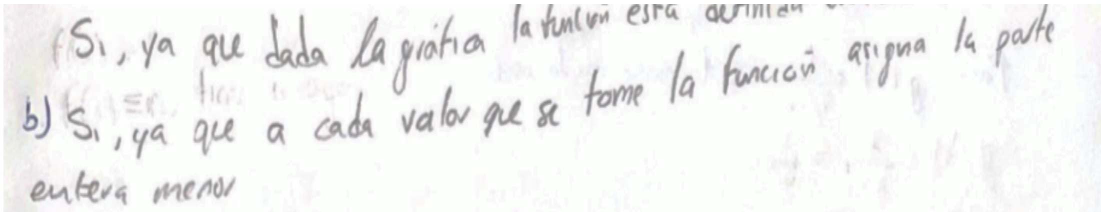
$\{m \mid f(a) \leq m \leq f(b) \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$

• Si es $[a,b)$ su imagen es $\{m \mid f(a) \leq m \leq f(b) \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$ si $f(b) \neq b$ y $\{m \mid f(a) \leq m < f(b) \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$ si $f(b) = b$

Figura 5.3.4.20. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 5(b).

Podemos observar que para dar solución a este inciso el estudiante evoca su concepción proceso de intervalo cerrado, abierto y semiabierto para expresar la imagen de la función en forma de desigualdad y así con su concepción proceso de conjunto decir que la imagen son los valores de un *m* que pertenece a los enteros y que cumple ciertas condiciones según el intervalo en el que se encuentre. Es aquí donde se evidencia que el estudiante piensa en la imagen como un subconjunto del codominio.

Los otros tres estudiantes no determinan la imagen para los intervalos y solo se limitan a contestar las preguntas de reflexión **¿Se puede calcular la imagen de cualquier intervalo? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.** Dentro de las respuestas a este inciso en general mencionan que sí es posible, justificando que es porque a cualquier número que se les dé se le asigna su parte entera, como es el caso de la respuesta de E8 quien con lo que responde podríamos decir que es consciente de que sí puede obtener la imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.21:



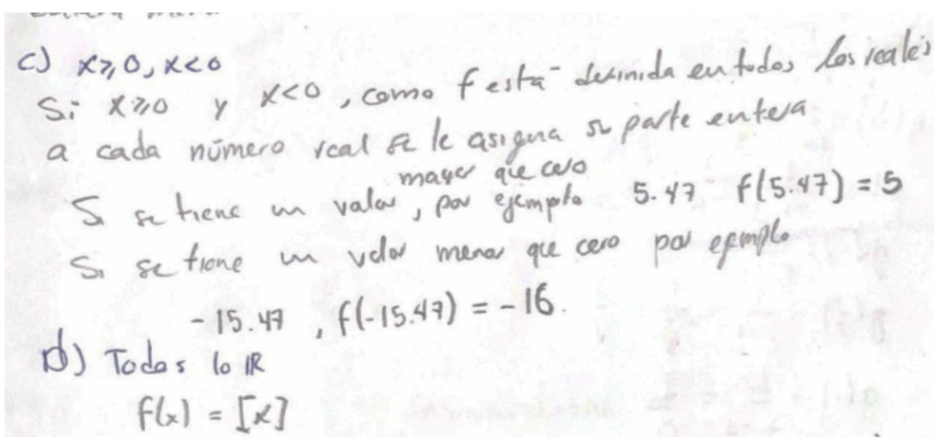
Si, ya que dada la gráfica la función está definida ...
b) Si, ya que a cada valor que se tome la función asigna la parte entera menor

Figura 5.3.4.21. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 5(b).

El hecho de que digamos que E8 es consciente de que puede obtener la imagen lo confirmamos con lo que dice en el fragmento del audio correspondiente a la situación 5:

> *"Para la situación 5 nos dice que si se puede calcular la imagen de cualquier número y pues yo diría que sí porque en la gráfica se observa que la función está definida en todos los reales y si se podría calcular la imagen de cualquier intervalo porque como cada valor, bueno esa gráfica yo diría que es la gráfica de la función parte entera entonces yo diría que si a cada valor de ese intervalo le va asignar su parte entera menor, entonces ahí si a pesar de que sean números muy chiquitos, muy pequeños pues igual nos va a dar la parte entera y ahí como que se haría más pequeño el conjunto de las imágenes."*

A pesar de que es consciente de que puede obtenerlo aún no lo puede determinar, pues para el inciso (c) vuelve a decir que se le asigna la parte entera a cualquier número pero no dice cuál es el subconjunto, en lugar de eso da dos casos particulares, el 5.47 y el -15.47 en el que respectivamente usando su concepción acción de imagen de una función determina la imagen al evaluar estos puntos y le da como resultado la parte entera de dicho número y para el inciso (d) dice que la imagen de todos los reales es la función parte entera, tal como se muestra en la figura 5.3.4.22, esto muestra que el estudiante no es capaz de ir más allá de obtener la imagen para valores específicos, lo que muestra solo una concepción acción de imagen de una función:



c) $x \geq 0$, $x < 0$
Si $x \geq 0$ y $x < 0$, como f está definida en todos los reales a cada número real se le asigna su parte entera
Si se tiene un valor mayor que cero, por ejemplo 5.47 $f(5.47) = 5$
Si se tiene un valor menor que cero por ejemplo -15.47, $f(-15.47) = -16$.
d) Todos lo $\mathbb{R}$
$f(x) = [x]$

Figura 5.3.4.22. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 5(c) y (d).

De igual manera E14, aunque no pone a manera de conjunto en el inciso (c) cuál sería la imagen para $x \geq 0$ y $x < 0$ pone un ejemplo de cuál sería la imagen en cada caso para un valor arbitrario, tal como se muestra en la figura 5.3.4.23:

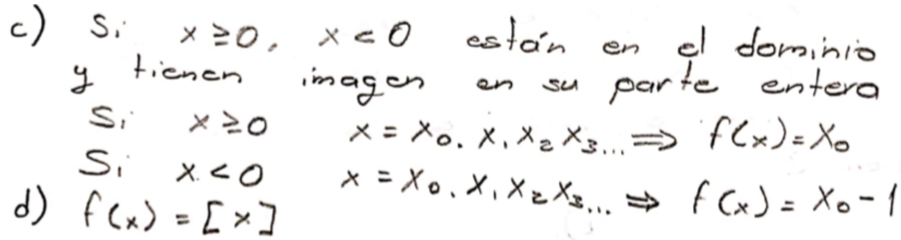

c) Si $x \geq 0$, $x < 0$ están en el dominio y tienen imagen en su parte entera
Si $x \geq 0$ $x = x_0 . x_1 x_2 x_3 ... \Rightarrow f(x) = x_0$
Si $x < 0$ $x = x_0 . x_1 x_2 x_3 ... \Rightarrow f(x) = x_0 - 1$
d) $f(x) = [x]$

Figura 5.3.4.23. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 5.

Podemos evidenciar con el fragmento del audio correspondiente a la situación 5 que el estudiante E14 tuvo dificultad para poder determinar esa imagen:

> *"... entonces inciso (c) nos dan como un intervalo de x, cuando $x \geq 0$ y cuando x es menor estricto a 0, no se a que se refiere si tiene dominio o imagen pero me imagino que sí, ya que los dos puede escribir más bien la imagen dentro de estos intervalos y para la situación…el inciso (d) creo que…no tampoco sé que a qué se refiere todos los reales, pues tiene imagen y tiene… bueno la función tiene dominio en todos los Reales, sí, pero no todos los reales entran en imagen, entonces no sé mucho a que se refiere."*

Por otra parte, E6 responde al inciso (c) dando un subconjunto para cada caso, determinando que el subconjunto de llegada para las *x mayores e iguales a cero* son los naturales unión el cero y en el caso de las *x* negativas son los enteros menores que cero, para esto tuvo que evocar a su concepción proceso de conjunto para reunir aquellos elementos que cumplían con ser imagen de algún elemento del dominio, tal como se muestra en la figura 5.3.4.24:

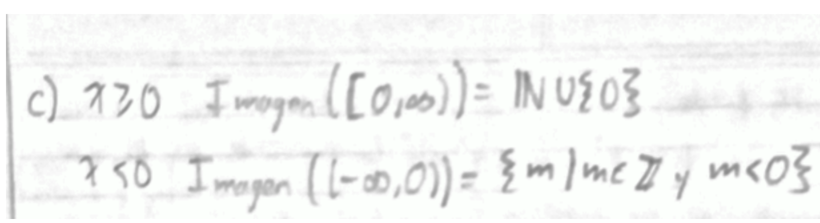

c) $x \geq 0$ Imagen$([0,\infty)) = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$x < 0$ Imagen$((-\infty,0)) = \{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } m < 0\}$

Figura 5.3.4.24. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 5(c).

Podemos observar que este estudiante ya está más allá de ser consciente de que existe un subconjunto que es la imagen, pues la determina e incluso se pone a pensar en cómo sería la imagen en cada posible caso de los intervalos.

Por otra parte, E10 da respuestas que nos dan evidencia de que no muestra un primer nivel de proceso, pues no piensa en la imagen como un subconjunto del codominio, pues en el inciso (b) no da las imágenes para los intervalos dados, solo menciona que sí puede obtenerlo y que pudiera ser la unión de varios intervalos, lo cual nos da evidencia de que el estudiante no es capaz de obtener la imagen de intervalos, esto lo reafirmamos con su respuesta del inciso (c) en donde dice que la imagen para $x \geq 0$ y $x < 0$ es cero y en el inciso (d) menciona que la imagen de todos los reales es la parte decimal de los reales, y los racionales e irracionales. , tal como se muestra en la figura 5.3.4.25:

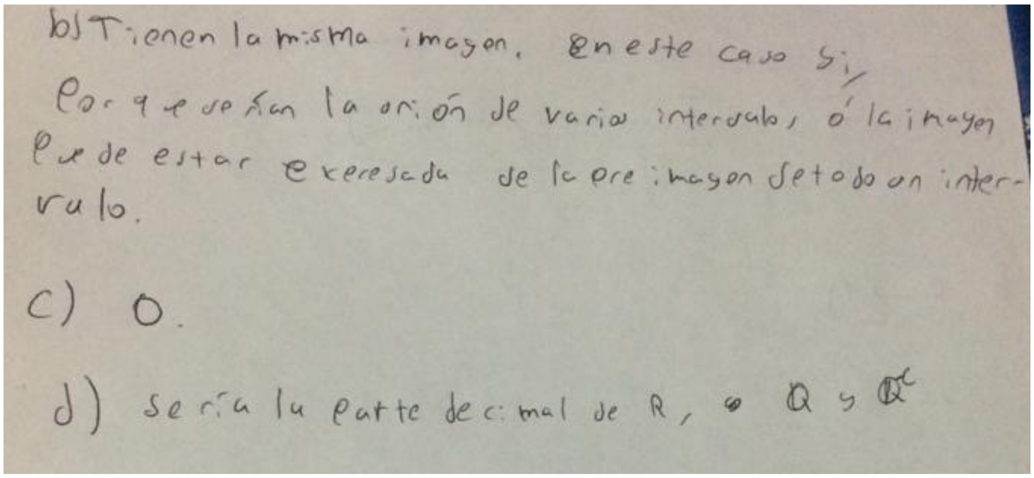


Figura 5.3.4.25. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 5.

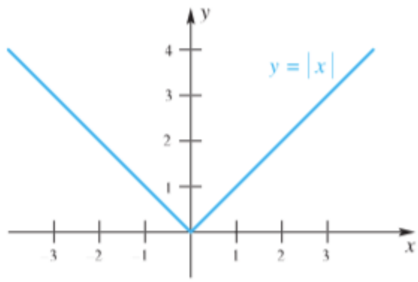
Proceso:

En nuestra DGP se describió que esta estructura se dará cuando el alumno sea consciente de que evaluar todos los elementos del dominio *A* de la función le da un subconjunto del contradominio *B* y además obtiene dicho subconjunto, para esto el alumno utilizará sus concepciones previas de esquema de cuantificador en un solo nivel, proceso de función y proceso conjunto.

Se esperó que los alumnos compararán el objeto *f(x)* con *y* para determinar si son o no iguales, y así decir si *y* es o no un elemento de la imagen, de esta manera con su concepción proceso de conjunto podrán reunir todos aquellos objetos que cumplan la condición de ser imagen de los elementos del dominio. La estructura esquema de cuantificador de un solo nivel les permite determinar que dado *y* elemento del contradominio existe un *x* tal que al aplicarle *f* es igual a *y* para a partir de ahí poder reunir dichos elementos.

Para poder evidenciar esta estructura y caracterizarla se aplicó la situación 6 y 7. En la situación 6 se da la gráfica de $y = |x|$ y se pregunta por valores en el dominio que puedan satisfacer cumplir que $y = |x|$ para de esta manera poder preguntar cuál es la imagen de dicha función, como se muestra a continuación:

6. Conteste:



(a) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé 2?

(b) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé -4?

(c) ¿Para qué valores de *y* existe uno o varios valores de *x* tales que *f(x)=y*?

(d) De acuerdo a las respuestas dadas anteriormente ¿cuál es la imagen de la función *y*?

En los incisos (a) y (b) los estudiantes dan respuestas acertadas y justifican sus respuestas de acuerdo a la gráfica de la función, tal como lo hace E14, quien justifica que el -4 no está dentro de los valores de la imagen de la función, pues con su concepción proceso de función y esquema de cuantificador en un solo nivel se da cuenta de que no existe un *x* en el dominio tal que al aplicarle la función para obtener *f(x)* lo pueda comparar con el -4 y determinar que no es imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.26:

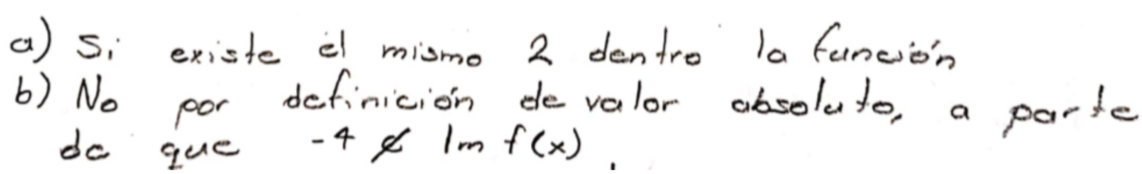

a) Si existe el mismo 2 dentro la función
b) No por definición de valor absoluto, a parte de que $-4 \notin \operatorname{Im} f(x)$.

Figura 5.3.4.26. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 6(a) y (b).

Prueba de que justifican de acuerdo a la gráfica es lo que menciona E14 en el audio correspondiente a la situación 6:

> *"Situación 6 el inciso (a), ¿existe un x tal que al aplicarle la función y=|x| te de 2? Sí, primero que nada, bajo a la grafiquita que nos dan para más fácil y rápido defino mi imagen y mi dominio, entonces me doy cuenta de*

que el dominio son todos los reales y mi imagen son todos los reales positivos, entonces un x tal que la función te de 2, pues sí, si existe y para el (b) hago el mismo caso de identificar el dominio e imagen, para que valores…. Bueno todo lo voy hacer bajo la imagen y la grafiquita puesta.”

Las respuestas de los estudiantes a los incisos (c) y (d) también son correctas, como por ejemplo E14, quien haciendo uso de su concepción proceso de función hace la evaluación de los elementos en el dominio para así, con su concepción proceso de conjunto reunir los elementos de *y* para los que existe un *x* tal que *f(x)=y* , es decir usando su concepción esquema de cuantificador de un solo nivel comparando esos *y* con los *f(x),* determinando así que son todos los reales positivos, tal como se muestran en la figura 5.3.4.27:

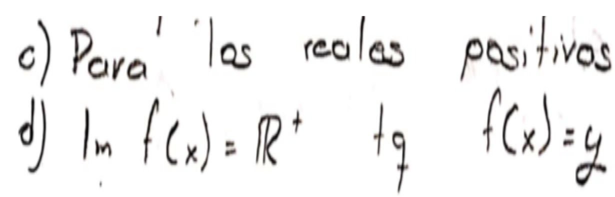


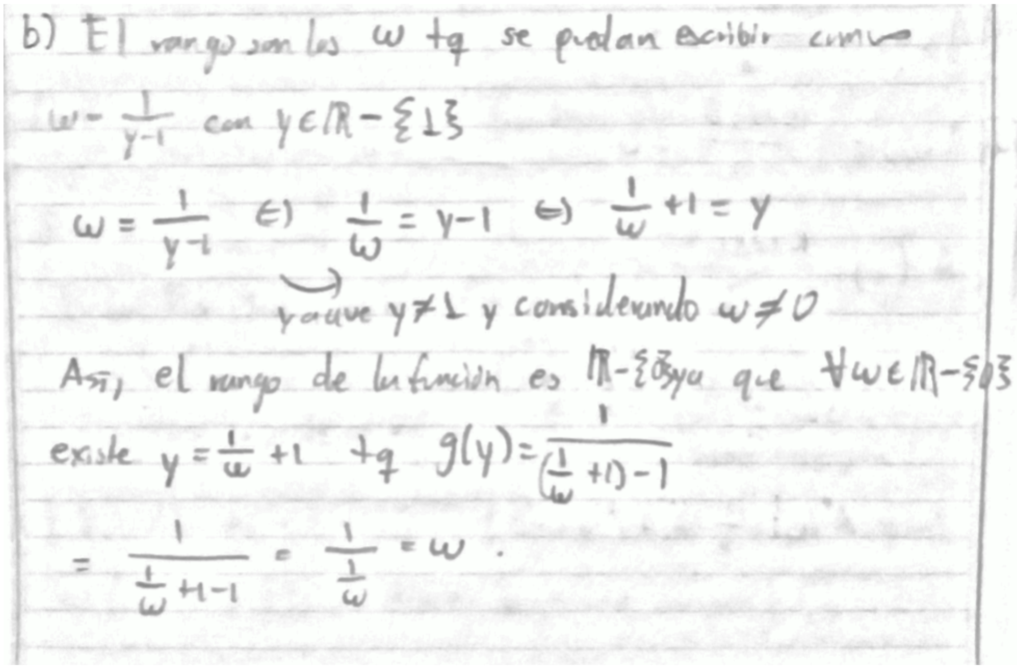
Figura 5.3.4.27. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 6 (c) y (d).

Con esto podemos decir que tenemos evidencia de que los estudiantes pudieron obtener la imagen de esa función, lo cual nos permite decir que muestran una concepción proceso de imagen de una función, esto la podemos reafirmar con la situación 7(b) en la que se pide obtener el rango de la función dada, como se muestra a continuación:

7. Para $g(y)=\frac{1}{y-1}$ determine cada valor.

(b) Determine el rango de la función

Para esta situación, solamente E6 dio la respuesta correcta, determinando primero cuál es el dominio de la función para poder operar con $\frac{1}{y-1}$ función que le llama *w,* luego de esto obtiene que $\frac{1}{w}+1=y$ de donde concluye que el rango de la función es todos los reales menos el 0, esto lo realiza operando con la función y haciendo uso de su concepción proceso de función recorriendo los elementos del dominio para poder determinar y reunir con su concepción proceso de conjunto aquellos elementos que cumplían con ser imagen, finalmente con su concepción esquema de cuantificador de un solo nivel verifica que para todo *w* que esta en el rango de la función existe $y=\frac{1}{w}+1$ tal que $g(y)=w$, tal como se muestra en la figura 5.3.4.28:


b) El rango son los ω tq se puedan escribir como

$\omega = \frac{1}{y-1}$ con $y \in \mathbb{R} - \{1\}$

$\omega = \frac{1}{y-1} \iff \frac{1}{\omega} = y-1 \iff \frac{1}{\omega} + 1 = y$

ya que $y \neq 1$ y considerando $\omega \neq 0$

Así, el rango de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que $\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}$

existe $y = \frac{1}{\omega} + 1$ tq $g(y) = \frac{1}{(\frac{1}{\omega} + 1) - 1}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\omega} + 1 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega}} = \omega$.

Figura 5.3.4.28. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 7(b)

Como podemos observar, este estudiante cuenta con la concepción proceso de imagen de una función porque obtiene el rango de la función y lo hace de manera correcta. Prueba de esto es el procedimiento realizado que describe en el audio correspondiente a la situación 7:

> *"…Para ver cuál es el rango de la función pues vamos a ver qué números podemos obtener teniendo un* y *y aplicándole la función, ya pues ahí explico que van a ser todos los reales excepto el cero, porque el cero no se puede escribir como uno sobre algo, porque el cero no tiene inverso multiplicativo, bueno no tiene inverso multiplicativo, inverso del producto."*

Por otra parte, los estudiantes E14, E8 y E10 confundieron el dominio con la imagen, esta fue una de las dificultades que se mencionó en la investigación de Bansilal, Brijlall & Trigueros (2017) en donde se menciona que los estudiantes presentan dificultad para distinguir entre los conjuntos dominio y rango con los elementos del conjunto. Por ejemplo, E14, quien define como w a la función dada y dado que se trata de un cociente, determina que el denominador debe ser distinto de cero, así que y debe ser distinto de 1 y concluye que el rango son todos los reales menos el 1, tal como se muestra en la figura 5.3.4.29:

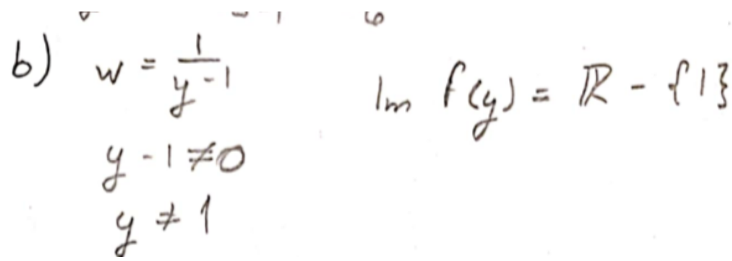
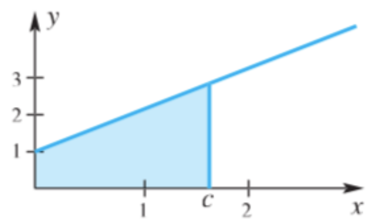


Figura 5.3.4.29. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 7(b)

Este tipo de dificultades nos puede dar cuenta de que el estudiante a mecanizado el algoritmo para determinar la imagen, sin mostrar ningún tipo de reflexión, de manera que nos da evidencia de no ir más allá de la acción.

Por último, para esta estructura también se propone la situación 8(f) en la que ya después de que los estudiantes encuentran la función que corresponde al área sombreada se pide determinar el dominio y rango, como se muestra a continuación:

8. (f) ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función A?



Para poder dar respuesta a este inciso el estudiante tenía que observar su gráfica y la función que obtuvieron como área, y solamente el E8 y E6 respondieron de manera correcta, por ejemplo, E6, quien con su concepción proceso de conjunto puede reunir todos los elementos que forman parte de la imagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.30:

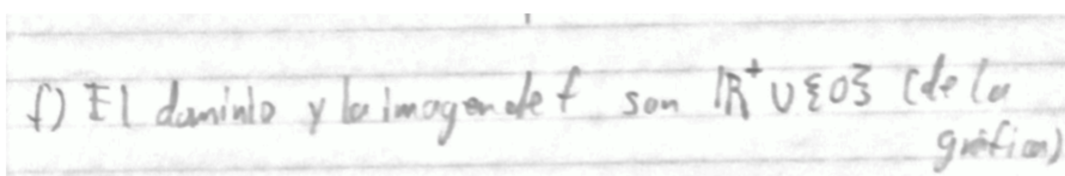


Figura 5.3.4.30. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 8(f)

Por otra parte E14 y E10 dan respuestas erróneas, como E10 quien solamente utiliza su concepción proceso de función para evaluar los elementos en el dominio del área sombreada y determina que el dominio va de [0,C] y la imagen de [0,3], tal como se muestra en la figura 5.3.4.31:

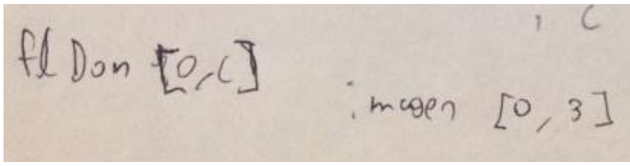


Figura 5.3.4.31. Solución del estudiante E10 a la situación problemática 8(f)

Podemos rectificar con el audio de la situación 8 que para E10 fue complicado resolverlo:

> *"La situación 8 fue la que me causó más conflicto de toda la entrevista por el área no clara o no clara a simple vista del dominio de las diferentes áreas en las que se evalúa* a *pero si de ahí en más todo se pudo hacer bien, eh ya especifiqué cuál es el dominio de los respectivos valores de c, bueno del área de c…"*

Como hubo un estudiante (E6) que sí pudo determinar el rango en las situaciones 6, 7 y 8 podemos entonces caracterizar la estructura proceso de función cuando el alumno es consciente de que evaluar todos los elementos del dominio A de la función le da un subconjunto del contradominio B, y además puede obtener dicho subconjunto.

Objeto Imagen de una Función

En la descomposición genética se describió que un estudiante encapsulará el proceso imagen de una función en un Objeto cuando sea consciente de que se le pueden realizar acciones, y además es capaz de llevarlas a cabo. Para poder evidenciar y caracterizar esta estructura, se propuso la situación 9, en donde se dan dos funciones a manera de diagrama y se pide que respondan si la correspondencia es de una función inyectiva o sobreyectiva.

En esta situación todos los estudiantes dieron respuestas correctas, aunque dentro de sus justificaciones hicieron uso de las definiciones de función inyectiva y sobreyectiva. Ejemplo de esto es la respuesta de E6, este estudiante observa que todos los elementos del contradominio tienen una preimagen, esto se evidencia cuando justifica que 1.1 es sobreyectiva porque: "a todos los elementos del contradominio les corresponde una preimagen" y justifica en la segunda relación que no es sobreyectiva porque el 4 no tiene preimagen, tal como se muestra en la figura 5.3.4.32:

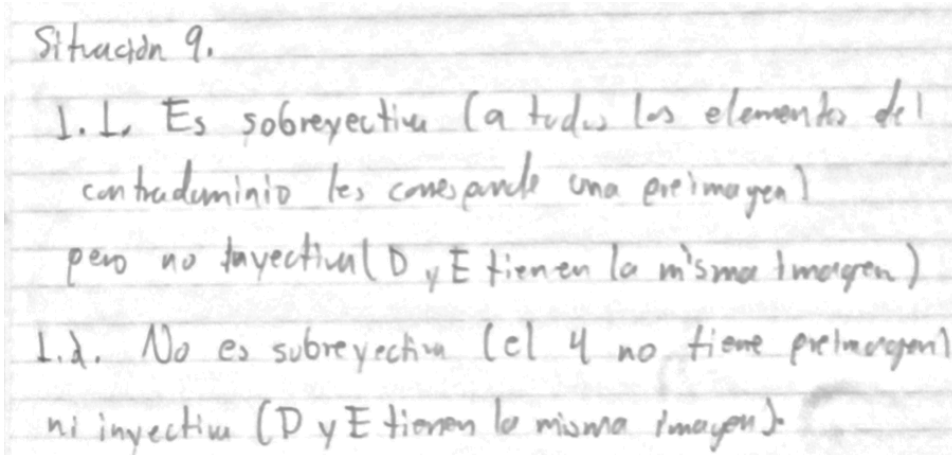
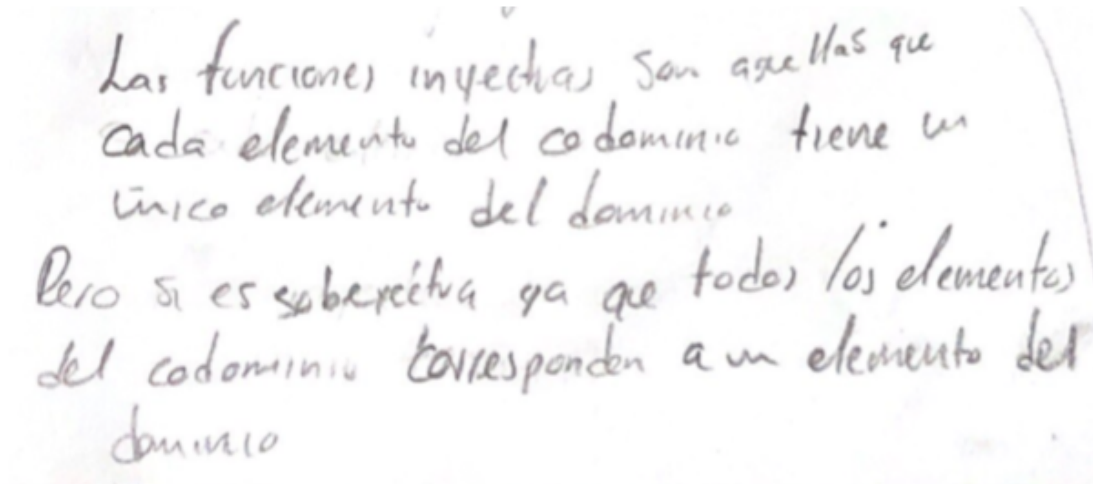

Situación 9.
1.1. Es sobreyectiva (a todos los elementos del contradominio les corresponde una preimagen)
pero no inyectiva (D y E tienen la misma imagen)
1.2. No es sobreyectiva (el 4 no tiene preimagen)
ni inyectiva (D y E tienen la misma imagen).

Figura 5.3.4.32. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 9

Podemos decir que los cuatro estudiantes tienen presentes las definiciones de función inyectiva y sobreyectiva, pues E8 menciona en el audio correspondiente a esta situación las definiciones que usa:

> *"...para la 1.1 yo diría que no es inyectiva ya que los elementos del dominio tienen la misma imagen y aquí como recordando la definición de función inyectiva, bueno ahí un poco informal, son aquellas que cada elemento del codominio tienen un elemento del dominio, entonces por ejemplo, aquí el -3 pues no tiene, tiene dos elementos del dominio entonces no cumple con la definición, sin embargo, esta representación sí es sobreyectiva ya que, bueno aquí igual recordando la definición de sobreyectividad es que todos los elementos del codominio le corresponden a un elemento del dominio, en este caso sí, todos los elementos, elemento a,b,c,d y e tienen un elemento en el codominio, a pesar de que el d y el e tienen la misma imagen…"*

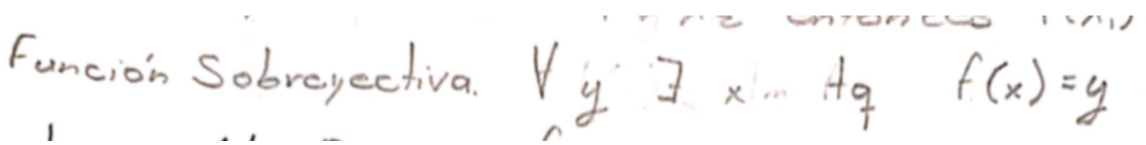
Y en sus hojas de respuesta escribe las definiciones de función sobreyectiva e inyectiva sin usar cuantificadores de manera formal, solamente explicándolas de manera verbal al mencionar "todos los elementos", tal como se muestra en la figura 5.3.4.33:



Las funciones inyectivas son aquellas que
cada elemento del codominio tiene un
único elemento del dominio
Pero si es sobreyectiva ya que todos los elementos
del codominio corresponden a un elemento del
dominio

Figura 5.3.4.33. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 9

Por otra parte, E14 escribe la definición de sobreyectividad usando los cuantificadores para todo (∀) y existe (∃), la definición de sobreyectividad le indica al estudiante que observe que todos los elementos del contradominio tienen preimagen y no como se propuso en la descomposición genética, comparando la imagen de la función con el conjunto contradominio (figura 5.3.4.34):



Función Sobreyectiva. $\forall y \; \exists x$ tq $f(x) = y$

Figura 5.3.4.34. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 9

Se pudo observar que los estudiantes no presentaron dificultad en esta situación dado que la relación propuesta consideraba un codominio con un número finito de elementos y de manera directa se podía aplicar la definición. De esta manera, consideramos necesario presentarle a los estudiantes una situación problemática en la que el codominio tuviera un número infinito de elementos, para poder observar si usan la definición de la misma manera o si lo hacen como se propuso en la descomposición genética preliminar, comparando la imagen con el codominio de la función. Para poder evidenciar esto propusimos las siguientes dos situaciones problemáticas:

Situación 1. Para la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \frac{1}{y-1}$ determine lo que se pide a continuación:

a) **El dominio de g**
b) **La imagen de g**
c) **Si la función g es o no sobreyectiva.**

Situación 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dada cuya imagen es $imag(f)=[0,\infty)$. ¿Es f sobreyectiva? Justifique su respuesta.

En donde en ambas situaciones lo que se pretende evidenciar es si utilizan la acción de comparar el codominio con la imagen, y utilizando su definición de función sobreyectiva determinar que, si son iguales, la función será sobreyectiva. Es importante mencionar que, para estas últimas dos situaciones, solo pudimos obtener respuesta de los estudiantes E8, E6 y E14.

Para la situación 1 los estudiantes contestaron correctamente a los incisos a) y b) determinando correctamente los conjuntos dominio e imagen, pero fue en el inciso c) en donde E14 no dio la respuesta correcta, pues determina que la función es sobreyectiva cuando en la imagen ya había obtenido que el cero no era parte de este conjunto, aún así no consideró esa respuesta para justificar su respuesta tal como se muestra en la figura 5.3.4.35:

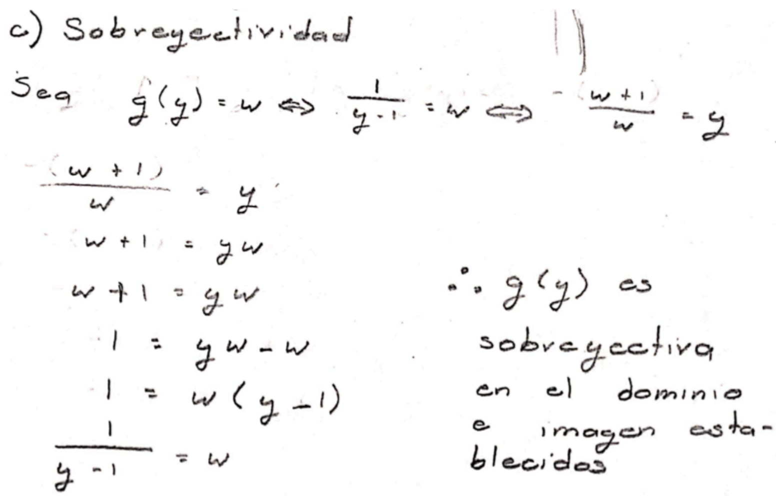


Figura 5.3.4.35. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 1(c).

Por otra parte E6 y E8 contestan utilizando su definición de sobreyectividad, justificando que hay un elemento en el contradominio que no le corresponde uno del dominio, tal como lo hace E8 (figura 5.3.4.36):

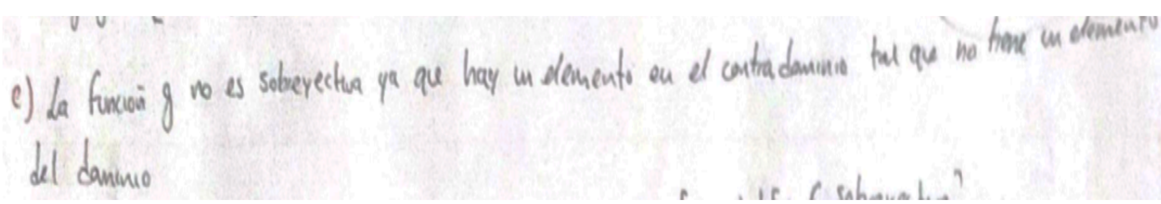
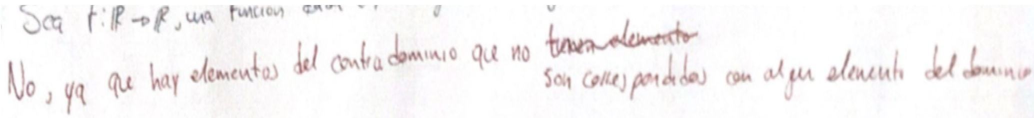


Figura 5.3.4.36. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 1(c).

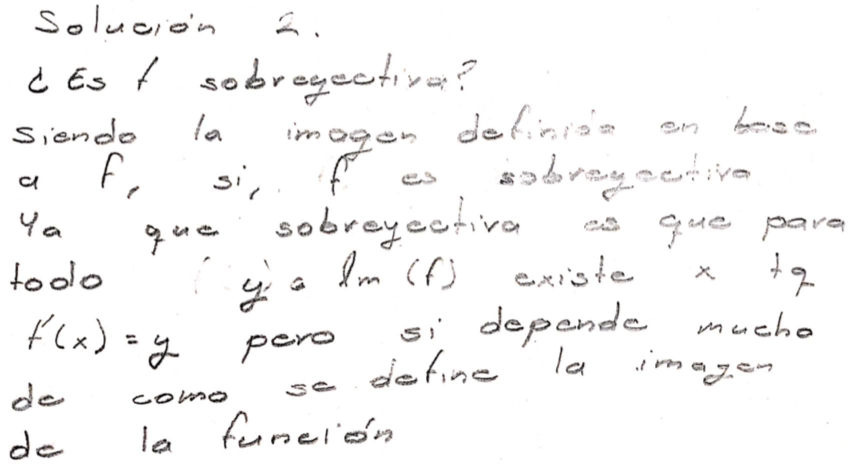
En la situación 2 las respuestas de E8 y E14 no fueron las esperadas, pues nuevamente E8 solo justifica que la función no es sobreyectiva porque hay elementos del contradominio que no son correspondidos por algún elemento del dominio, pero no especifica cuáles son esos elementos tal como se muestra en la figura 5.3.4.37:


Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, una función

No, ya que hay elementos del contradominio que no ~~tienen elemento~~ son correspondidos con algún elemento del dominio

Figura 5.3.4.37. Solución del estudiante E8 a la situación problemática 2.

El E14 da una respuesta en la que da evidencia de que no comprendió la situación planteada, ya que menciona que la función sí es sobreyectiva pero luego menciona que depende mucho de la imagen, la cual ya estaba dada, la respuesta de E14 es la que se presenta en la figura 5.3.4.38:


Solución 2.

¿Es f sobreyectiva?

siendo la imagen definida en base a f, sí, f es sobreyectiva ya que sobreyectiva es que para todo $y \in Im(f)$ existe x tq $f(x)=y$ pero sí depende mucho de como se define la imagen de la función

Figura 5.3.4.38. Solución del estudiante E14 a la situación problemática 2.

Por otra parte, el estudiante E6 respondió exactamente lo que se esperaba, ya que para poder contestar si la función es o no sobreyectiva hace la comparación de los conjuntos imagen y codominio tal como se muestra en la figura 5.3.4.39:

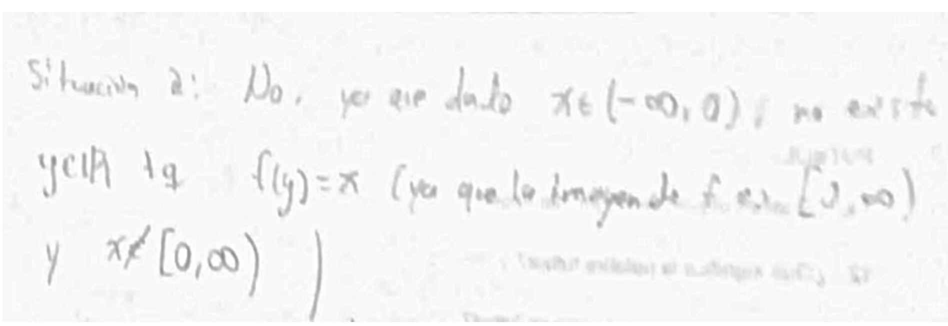

Situación 2: No, ya que dado $x\in(-\infty,0)$, no existe $y\in\mathbb{R}$ tq $f(y)=x$ (ya que la imagen de f es $[0,\infty)$ y $x\notin[0,\infty)$)

Figura 5.3.4.39. Solución del estudiante E6 a la situación problemática 2.

Esto lo podemos reafirmar con el fragmento del audio del E6 correspondiente a esta situación:

> *"…entonces pues vemos un número en el conjunto de llegada, en los reales, por ejemplo, un x<0, y pues este no va a tener preimagen porque no pertenece a la imagen de la función, entonces pues la función no sería sobreyectiva"*

En donde evidenciamos que la concepción Objeto sí se puede dar tal como se dijo en la DGP, realizando acciones sobre el proceso, por ejemplo, comparando la imagen con el contradominio para saber si la función es o no sobreyectiva.

Capítulo VI. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones que se obtuvieron del análisis de los datos experimentales como primer apartado. Se comienzan con aquellas relacionadas al cuestionario diagnóstico y que tienen que ver con las estructuras previas de los estudiantes; después describiremos con detalle las obtenidas de la implementación del segundo cuestionario y que nos permitirán evaluar la DGP. Finalizando con la validación de la descomposición genética. En el segundo apartado se mencionan algunas conclusiones en general, futuras investigaciones que se pueden llevar a cabo y por último una reflexión sobre la realización del presente trabajo.

6.1 Conclusiones del análisis de los datos experimentales y validación de la Descomposición Genética

6.1.1 Conclusiones respecto al Cuestionario Diagnóstico

Antes de presentar las conclusiones es importante mencionar que la participación de los estudiantes durante la aplicación del Cuestionario Diagnóstico fue muy buena, pues se mostraron siempre amables y además lo realizaron de una buena manera, aunque sabían que no les afectaría en su calificación.

Durante la aplicación de los instrumentos pudimos observar que los estudiantes están familiarizados con los registros de representación algebraico y gráfico, esto por supuesto no quiere decir que puedan trabajar en ellos sin problema como se mostrará más delante, esto tiene sentido, pues cuando se hizo la investigación sobre cómo se presenta el concepto en los libros utilizados para impartir el curso de Precálculo y Cálculo Diferencial se observó que se privilegian estos registros por encima de los demás.

Es importante mencionar que, de manera no intencional, dentro del cuestionario diagnóstico no consideramos el registro gráfico, haberlo hecho pudiera haber permitido determinar si los estudiantes tendrían o no alguna estructura mental que de manera algebraica o gráfica no pudieron evidenciar.

En lo que respecta al análisis del Cuestionario Diagnóstico pudimos observar que a pesar de que los estudiantes se enfrentaron por primera vez a los conceptos previos en su curso de Precálculo y los repasaron nuevamente en el curso de Cálculo Diferencial, no todos mostraron las estructuras mentales previas necesarias para la construcción del nuevo concepto, de los 14 estudiantes solo 3 de ellos las mostraron.

Con el análisis del Cuestionario Diagnóstico obtuvimos la tabla 1 que nos da evidencia de que todos los estudiantes cuentan con la estructura mental previa de objeto número real, pues mostraron evidencia de que pueden realizar acciones sobre los números reales con las operaciones básicas, a pesar de que hubo algunos errores de dedo y del mal uso de la jerarquía de las operaciones, realmente hicieron lo que la estructura mental objeto de número real pedía. Fue a partir de la estructura proceso de conjunto en donde los estudiantes presentaron dificultades, pues algunos ya no respondieron o no justificaron las situaciones correspondientes dirigidas a evidenciar la estructura.

La estructura mental que causó más dificultad, de acuerdo a la evidencia que obtuvimos, fue la de Proceso de función, pues de los 14 estudiantes 3 respondieron correctamente y dieron evidencia de contar con dicha estructura mental. Además, fue en esta estructura mental en la que nos encontramos con dos estudiantes que no mostraban la estructura de proceso de función, pero hacían algo más que la acción.

De acuerdo con el análisis a priori de las situaciones 6 y 7 (situaciones correspondientes a evidenciar la estructura mental proceso de función) éstas iban a determinar si el estudiante cuenta con la concepción proceso y si ésta era o no estable, respectivamente, y dos de los estudiantes o contestaban el 6 y el 7 no, o el 7 sí y el 6 no. De esta manera, podríamos considerarlos en una etapa intermedia entre acción y proceso, ya que hacen más que acción, pero sin llegar al proceso. Además, hay evidencia de que entre las estructuras mentales hay niveles intermedios, como mencionan Dubinsky, Arnon & Weller (2013), quienes en su investigación describen 7 de estos niveles.

6.1.2 Conclusiones respecto al Segundo Cuestionario

Dentro del análisis del Segundo Cuestionario pudimos observar que todos los estudiantes presentaron la estructura mental de Acción cuando la función se da de manera analítica, pues fácilmente evaluaron la función en los puntos que se les plantearon, no importa que fueran números distintos a los enteros.

Para evidenciar la estructura Acción también se plantearon otras situaciones en las que utilizamos el registro gráfico; sin embargo, no todos los estudiantes respondieron a las preguntas determinadas para dicha estructura, pues parece ser que les causó mayor dificultad cuando no se les daba la función de manera analítica. Aun así, intentaron responder para poder obtener la imagen de una función dada en su representación gráfica.

A pesar de que el cuestionario no fue aplicado como una entrevista semiestructurada, las preguntas de reflexión nos permitieron tener evidencia de qué era lo que los estudiantes estaban pensando sobre cómo obtener la imagen de las funciones dadas. A partir de aquí, las siguientes situaciones consistieron en mostrar que los alumnos estaban interiorizando la acción, pasando de obtener la imagen de un solo punto a intervalos y luego subconjuntos. A partir del análisis que se hizo pudimos observar que, en efecto, a los estudiantes les causó dificultad obtener la imagen de los intervalos dados, a excepción de uno de los estudiantes (E6), quien calculó la imagen de los intervalos dados y respondió con certeza a las preguntas de reflexión.

Aunque a los estudiantes les causó dificultad determinar la imagen para ciertos intervalos dados, cuando les preguntábamos qué valores de x tienen imagen para una función dada de forma geométrica, respondían acertadamente e incluso contestaban correctamente a la pregunta ¿cuáles son las imágenes de estos valores?, lo cual nos permite ver que los estudiantes están familiarizados con cierto tipo de problemas a resolver, pues la situación en la que tenían que obtener la imagen para un intervalo fue más complicada para ellos. Podemos afirmar que el hecho de presentar la situación de manera geométrica les ayudó de manera visual para poder responder, pues una de las situaciones se presentó de manera geométrica, en esta se dieron conjuntos de una función y se pedía que calcularan la imagen de un elemento del dominio, luego de un subconjunto y por último de todo el conjunto, y los estudiantes lo realizaron de manera correcta.

Para la estructura mental de Proceso pudimos percatarnos de que cuando al estudiante se le da una función en su representación gráfica puede tener una idea de qué elementos conforman a la imagen, aunque aún no lo puedan obtener. Lo hacen observando la gráfica de la función lo cual les da una mejor idea que si la función fuera presentada en su forma algebraica y además en las preguntas de reflexión determinan que sí pueden obtener la imagen y hacen la justificación de acuerdo a lo que observan en la gráfica.

Para las situaciones en las que se preguntó específicamente por el rango de la función los estudiantes lo calcularon de manera correcta cuando la función se daba de manera gráfica, pero cuando no fue así les causó dificultad y fue solo un alumno (E6) quien pudo contestar correctamente, cabe mencionar que él mostró una concepción previa de proceso función estable. Podemos entonces decir que realmente fue la concepción proceso la que causó más conflicto a los estudiantes.

Para la estructura mental de Objeto todos los estudiantes respondieron correctamente a la situación propuesta para esta estructura e hicieron buen uso de sus definiciones de función inyectiva y sobreyectiva, pero consideramos que todos respondieron correctamente porque la función presentada en la situación problemática fue dada en su representación geométrica, y con conjuntos de partida y llegada finitos.

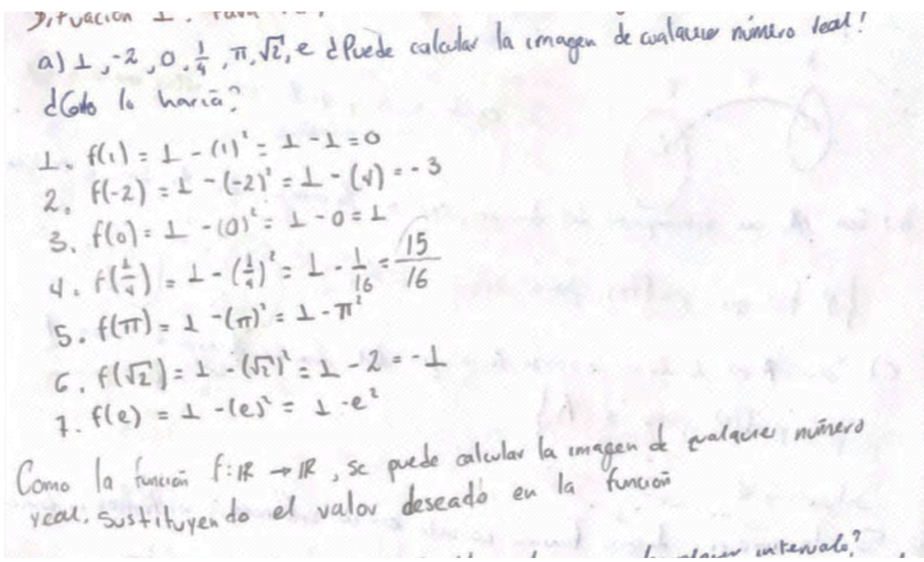
Por esta razón, consideramos que no era suficiente para afirmar que los estudiantes contaban o no con la estructura mental de objeto, así que le hicimos una modificación a este instrumento. Propusimos añadir otras dos situaciones, en las que pretendíamos que realizaran la acción de comparar la imagen con el contradominio, para que determinaran si la función era o no sobreyectiva, es decir, situaciones que de manera muy específica nos permitieran tener evidencia de si los estudiantes podían realizan acciones sobre el proceso. Fue uno de los estudiantes (E6) quien nos permitió contar con la evidencia de que, en efecto, hace la comparación de estos conjuntos para determinar que la función es sobreyectiva y así de esta manera podimos caracterizar la estructura mental tal como la describimos.

Algo que fue muy evidente en la última situación para evidenciar la estructura mental de Objeto, fue que todos los estudiantes tuvieron la tendencia de definir de manera verbal las características que cumple una función cuando es inyectiva y sobreyectiva, no usando cuantificadores, a excepción de una de las estudiantes (E14).

Se pudo observar que las estructuras presentes en los estudiantes fueron de más a menos, todos mostraron una concepción acción de imagen de una función, en el camino al proceso se fueron quedando algunos alumnos, y finalmente solo uno evidenció la estructura mental de objeto, lo cual era de esperarse, pues en investigaciones que hacen uso del marco teórico metodológico de APOE se menciona que esta estructura es muy difícil de alcanzar por los estudiantes, por ejemplo, en Martínez-Planell & Trigueros (2010), quienes en su investigación encontraron que solo uno de sus estudiantes construyeron una concepción objeto.

6.1.3 Validación de la Descomposición Genética

Se valida la acción de imagen de una función, caracterizada de la siguiente manera: El estudiante debe ser capaz de evaluar números reales bajo una función específica, es decir, toma el objeto número real específico, le aplica el proceso de función y obtiene un nuevo objeto, otro número real que es su imagen. Evidencia de la validación de esta estructura mental es lo que presenta E8 en la situación problemática 1(a), pues realiza de manera adecuada la evaluación en cada punto de la función como se muestra en la figura 5.3.4.1:


a) 1, -2, 0, $\frac{1}{4}$, π, $\sqrt{2}$, e ¿Puede calcular la imagen de cualquier número real?
¿Cómo lo haría?

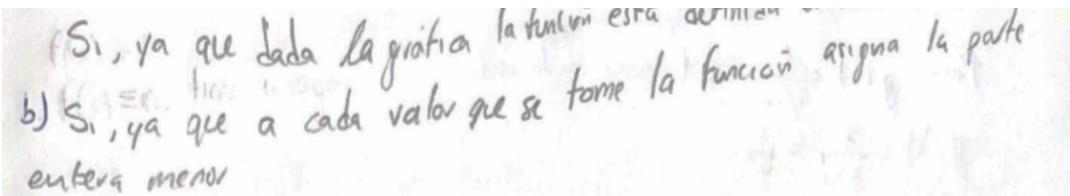
1. $f(1) = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$
2. $f(-2) = 1 - (-2)^2 = 1 - (4) = -3$
3. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1 - 0 = 1$
4. $f(\frac{1}{4}) = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
5. $f(\pi) = 1 - (\pi)^2 = 1 - \pi^2$
6. $f(\sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$
7. $f(e) = 1 - (e)^2 = 1 - e^2$

Como la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede calcular la imagen de cualquier número real, sustituyendo el valor deseado en la función

Figura 5.3.4.1. Evidencia de la estructura Acción por el estudiante E8 en la situación problemática 1(a)

Se valida el Proceso imagen de una función, caracterizada de la siguiente manera: El alumno es consciente de que evaluar todos los elementos del dominio *A* de la función le da un subconjunto del contradominio *B*, y además puede obtener dicho subconjunto.

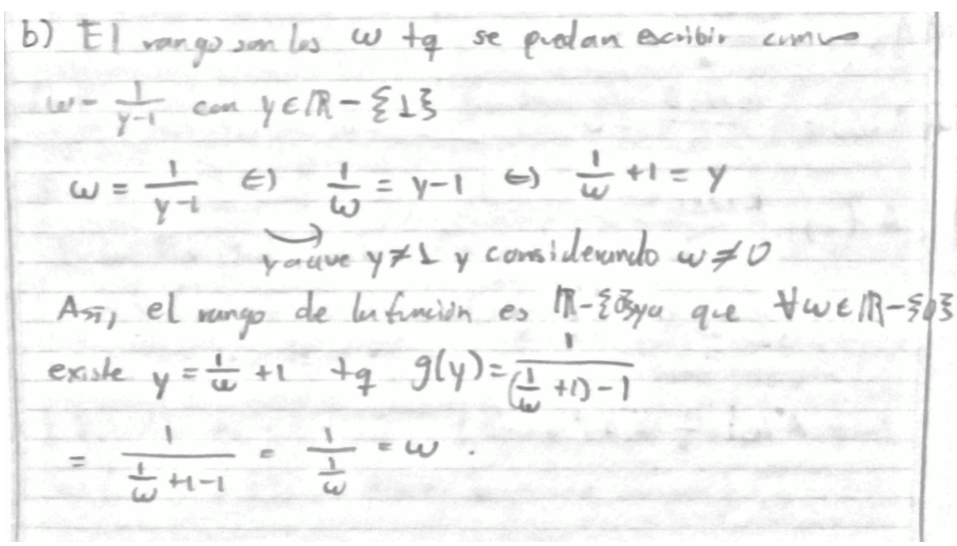
Evidencia de la validación de esta estructura es lo que presenta el estudiante E8 en la situación problemática 5(b), pues primero se presenta lo que designamos como Primer nivel de proceso, en donde E8 responde que sí puede calcular la imagen de cualquier intervalo, es decir, aunque aún no diga cuál es el rango de estos intervalos, es consciente de que lo puede obtener porque sabe cómo se está comportando la función, y de alguna manera mentalmente ya recorrió todo su dominio y sabe qué es lo que le va a dar como resultado, pero aún no lo obtiene, tal como se muestra en la figura 5.3.4.21:


Si, ya que dada la gráfica

b) Si, ya que a cada valor que se tome la función asigna la parte entera menor

Figura 5.3.4.21. Evidencia de un primer nivel de Proceso por el estudiante E8 en la situación problemática 5(b)

Ahora bien, para la estructura Proceso aquí solamente un estudiante pudo responder correctamente y fue E6. Primero comienza determinando cuál es el dominio de la función, para a partir de ahí, hacer procedimientos que le permitan decir que *w* tiene que ser distinto de 0 y así de esta manera, el rango sea todos los reales menos el 0, tal como se muestra en la figura 5.3.4.28:


b) El rango son los ω tq se puedan escribir como

$\omega = \frac{1}{y-1}$ con $y \in \mathbb{R} - \{1\}$

$\omega = \frac{1}{y-1} \iff \frac{1}{\omega} = y-1 \iff \frac{1}{\omega} + 1 = y$

ya que $y \neq 1$ y considerando $\omega \neq 0$

Así, el rango de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que $\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe $y = \frac{1}{\omega} + 1$ tq $g(y) = \frac{1}{(\frac{1}{\omega}+1)-1}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\omega}+1-1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega}} = \omega$.

Figura 5.3.4.28. Evidencia de la estructura Proceso por el estudiante E6 en la situación problemática 7(b)

Se valida el Objeto de imagen de una función, caracterizada de la siguiente manera: El alumno es consciente de que se le pueden realizar acciones al proceso, y además es capaz de llevarlas a cabo. Evidencia de la validación de esta estructura es lo que presenta el estudiante E6 en la situación problemática 2, pues en su respuesta compara la imagen con el contradominio para determinar si la función es o no sobreyectiva, es decir, está realizando acciones sobre el proceso, tal como se muestra en la figura 5.3.4.39:

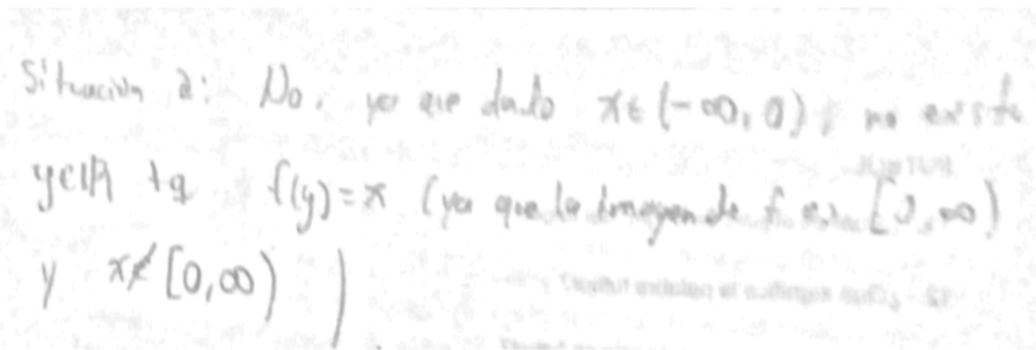
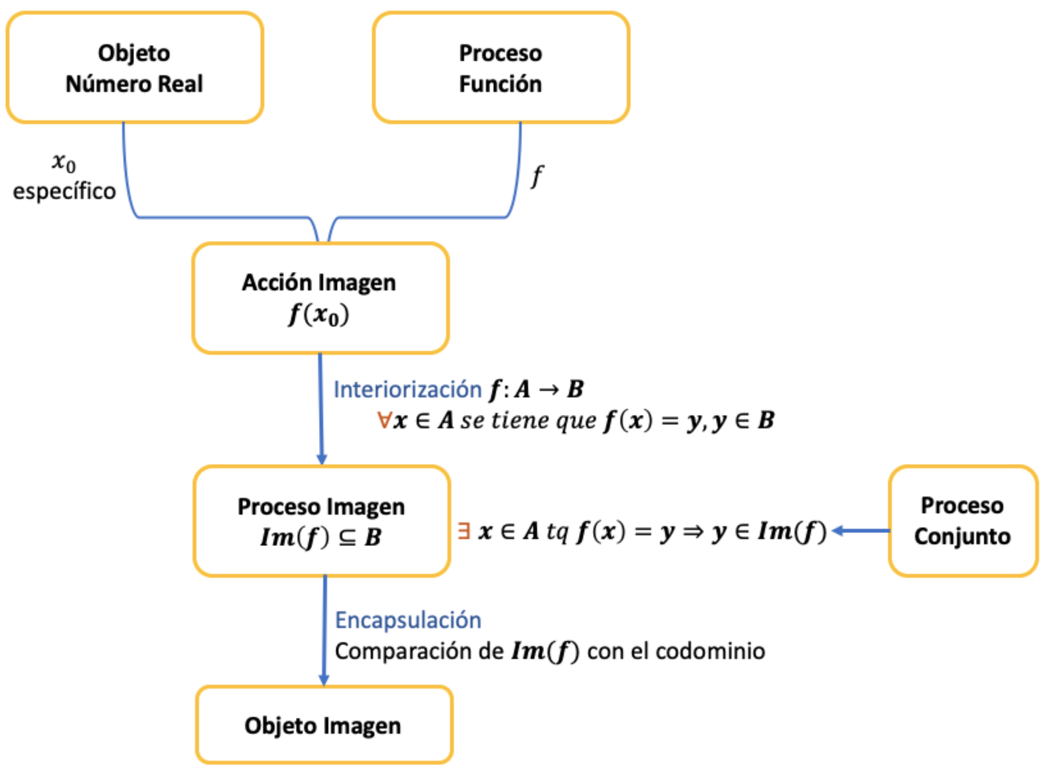

Situación 2: No, ya que dado $x \in (-\infty, 0)$ no existe $y \in \mathbb{R}$ tq $f(y) = x$ (ya que la imagen de f es $[0,\infty)$ y $x \notin [0,\infty)$)

Figura 5.3.4.39. Evidencia de la estructura Objeto por el estudiante E6 en la situación problemática 2

De esta manera podemos concluir que la descomposición genética preliminar fue validada y no hubo necesidad de refinarla. A manera de cierre para este apartado, se presenta nuevamente el diagrama de la DGP, que en este caso ya está validada:



6.2 Conclusiones generales

6.2.1 Conclusiones generales

Con la evidencia del análisis de datos podemos validar nuestra DGP, pues al menos uno de los estudiantes mostró que sí lo hace tal como lo describimos en esta.

Es importante resaltar que la teoría APOE permite identificar problemas que se presentan en la comprensión de un concepto al considerar la hipótesis de que, si el estudiante cuenta con las estructuras previas de un concepto, podrá construirlo, así que es una excelente teoría para considerar al momento de determinar el por qué un estudiante no está aprendiendo un nuevo concepto.

Consideramos que de haber podido aplicar la entrevista semiestructurada se hubiera obtenido aun más evidencia de las estructuras que presentan o no lo estudiantes, pues el hecho de haber aplicado la entrevista como un segundo cuestionario no permitió observar los gestos de los estudiantes cuando se presentaban a cierta situación ni observar personalmente qué era lo que estaban haciendo al momento de resolver cada situación.

Sin embargo, el no haber realizado una entrevista directa con los estudiantes tuvo sus beneficios. El hecho de no estar frente a una cámara respondiendo a un cuestionario semiestructurado sobre un tema complejo de matemáticas, como lo es la imagen de una función, propició por sí mismo un ambiente de tranquilidad, por lo que consideramos que el alumno pudo evidenciar respuestas más acertadas.

6.2.2 Trabajos a futuro

Consideramos que, aunque se obtuvo información importante de la aplicación del segundo cuestionario, sugerimos realizar la entrevista semiestructurada del mismo, para poder indagar con mayor profundidad sobre las estructuras mentales de los estudiantes, ya que esto pudiera dar cuenta de nuevos resultados o mostrar elementos que pudieron no ser considerados. De igual forma sugerimos aplicar el cuestionario diagnóstico con situaciones en las que se involucre el registro geométrico para observar si de esta manera se evidencian las estructuras mentales previas que no mostraron los estudiantes.

Otra posible investigación sería desarrollar una DGP del Esquema de imagen de una función, de manera que esto podría determinar cuáles son las estructuras que conforman los elementos del esquema y la relación entre ellas. Además de poder describir la evolución de dicho esquema, y mostrar así su transversalidad, pues la imagen no solo se presenta en funciones con una variable, sino con varias variables, o con dominio y codominio que tienen alguna estructura, como la de espacio vectorial, espacio topológico, etc.

El ciclo de investigación de la teoría APOE, que constituye una metodología de investigación, contempla en su segunda fase el diseño y aplicación de la instrucción, esto consiste en diseñar y aplicar un diseño de enseñanza para el tema de imagen de una función. Debido al tiempo que se tuvo para realizar la investigación, este no pudo ser llevado a cabo. Es por eso que una investigación a futuro es cómo diseñar una instrucción basada en la descomposición genética que hemos validado.

6.2.3 Reflexión

En términos de la práctica considero que el elaborar una tesis me ha brindado más aprendizaje del que yo esperaba, pues en un principio consideré que esto solo me iba a permitir de alguna manera enfocarme en un tema específico, cuando no fue así, pues aprendí muchas otras cosas, una de ellas, el hecho de conocer un poco más a profundidad una teoría, en este caso la teoría APOE.

Considero que el haber indagado en la teoría APOE me ha brindado principalmente algo muy importante para la práctica, el hecho de no solo considerar si un alumno ha respondido de manera correcta o incorrecta algún problema, pues en APOE se toman en cuenta otros aspectos, como considerar todas las estructuras previas que hay detrás de ese concepto, así como las investigaciones sobre ésta.

Otro de los aspectos que aprendí durante la realización de mi trabajo de tesis es el proceso de investigar algún tema para poder tener bases que me permitan proporcionar instrumentos que me evidencien determinados aspectos, y esto es algo que en la práctica sería perfecto que lo pudiéramos aplicar siempre que explicáramos un nuevo tema.

Por otra parte, considero que el hecho de que se me enseñara sobre paradigmas en matemática educativa y los distintos marcos teóricos que hasta ahora existen, me permitió darme cuenta del amplio conocimiento que un docente debería tener para poderlo aplicarlos en la práctica, y más allá de esto, me permitió tener una visión más amplia sobre la Matemática Educativa para poder enseñar matemáticas.

La experiencia y la manera de enseñar de todos mis profesores fueron muy enriquecedoras, pues me permite tomar todo lo bueno que cada uno da en sus clases, así como su manera de enseñar y la postura que tienen sobre la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias

Apostol, T. (2001). *Cálculo: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. México, D.F.: Reverté Ediciones.

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*: *a framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Bansilal, S., Brijlall, D., & Trigueros, M. (2017). An APOS study on pre-service teachers' understanding of injections and surjections. *Journal of Mathematical Behavior, 48*, 22–37.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, *23* (3), 247-285.

Butúzov, V., Krutítskaya, N., Medvédev, g., & Shishkin, A. (1989). *Análisis matemático en preguntas y problemas.* Moscú: Editorial Mir.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dorko, A., & Weber, E. (2014). Generalising calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education,* 1-19. DOI: 10.1080/14794802.2014.919873

Dubinsky, E., Arnon, Ll., & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of and 1, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(3), 232-258. DOI: 10.1080/14926156.2013.816389.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The student's construction of quantification. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 44-51.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2005). *Funciones.* Santa Fe, Argentina: Ediciones UNL.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 5-21.

Martínez-Planell, R., & Cruz, A. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior, 43*, 111–133.

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2009). Students' ideas on functions of two-variables: Domain, range, and representations. *Proceedings of PME-NA, 5*, 73-80.

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo.

Oviedo, L., Kanashiro, M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 29-36.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Pearson Educación.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 89-112.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México, D.F.: Cengage Learning.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 23*(1), 39–50.

Trigueros, M. (2005). La noción del esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Anexos

Cuestionario Diagnóstico

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Cuestionario Diagnóstico

Nombre:____**Fecha:**___________

Instrucciones: Resuelva cada uno de los ejercicios y argumente sus respuestas. NO BORRE PROCEDIMIENTOS Y/O NOTAS. NO DEJE EJERCICIOS SIN CONTESTAR. Los resultados obtenidos no afectaran tu calificación en la materia y tu identidad quedará anónima.

1. Resuelva:

(d) $2^4 * 3 + \sqrt{49} \div 2^4 \div 16 - (23 + 5^2)$

(e) $13^2 * \sqrt{25} - [(4^3 + \sqrt{144}) + (3^5 - 2^7)\ ]$

(f) $(8^3 * \sqrt{36} - 2^5 + 2^3 + \sqrt{16} + 2) \div 3$

2. Sea A el conjunto de todas las funciones reales en una variable, determine el conjunto de todas las funciones cuya inversa existe.

3. Sea A el conjunto de las funciones reales, determine el conjunto de las funciones inyectivas.

4. Verifique si la función $f(x) = x^2$ es una función sobreyectiva siendo el $Dom(f) = \mathbb{R}$ y el rango $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$.

5. Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones:

(c) Para cada número real positivo *y* existe un número real *x*, tal que $x^2 = y$.

(d) Para cada número real positivo *y* existe un número real *x*, tal que $x^3 = y$.

6. En cada una de las siguientes preguntas, f, g, h son funciones cuyos dominios y rangos son el conjunto de los números reales, tales que

$$h = f \circ g$$

(d) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, sería posible encontrar *h(0)*? Si sí, encuéntrela si no justifique.

x	*f(x)*	*g(x)*
-1	**2**	**-3**
0	**-3**	**-1**
4	**1**	**2**

(e) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, sería posible encontrar *f(2)*? Si sí, encuéntrela sino explique.

x	*h(x)*	*g(x)*
-1	**1**	**-3**
4	π	**1**
π	**0**	**2**

(f) Si solo se conoce la información de la siguiente tabla, sería posible encontrar *g(4)*? Si sí, encuéntrela sino explique.

x	*h(x)*	*f(x)*
-1	**1**	**-2**
2	**3**	**1**
4	**-2**	π

7. Sean las dos funciones F y G definidas como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{if } x < -2 \\ 2x+3 & \text{if } -2 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \sin x & \text{if } \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{if } 1 \leqslant x \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -4 & \text{if } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{if } 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

Encuentre el producto $F \cdot G$ de las dos funciones.

Segundo Cuestionario

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"
Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Entrevista Semiestructurada

Nombre:____**Fecha:**___________
Instrucciones: Resuelva cada uno de los ejercicios y argumente sus respuestas. NO BORRE PROCEDIMIENTOS Y/O NOTAS. NO DEJE EJERCICIOS SIN CONTESTAR. Los resultados obtenidos no afectaran tu calificación en la materia y tu identidad quedará anónima.

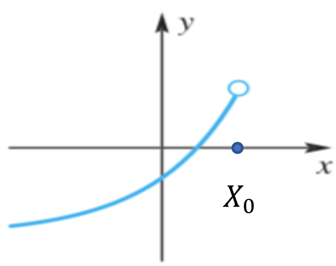
Situación 1. Para $f(x) = 1 - x^2$ determine la imagen de:

(c) 1, -2,0, ¼, π, $\sqrt{2}$, e, ¿puede calcular la imagen de cualquier número real? ¿cómo lo haría?

(d) [-1,1], [0,2], [-2,3) ¿Puede obtener la imagen de cualquier intervalo? ¿cómo lo haría?

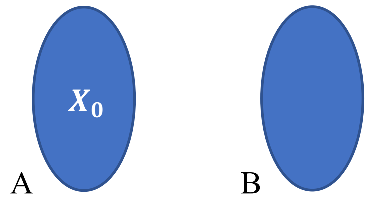
Situación 2. En la siguiente gráfica,

3. ¿Qué valores de *x* tienen imagen? ¿Cuáles son las imágenes de estos valores?
4. ¿Cuáles valores de *x* no tienen imagen? Justifique su respuesta

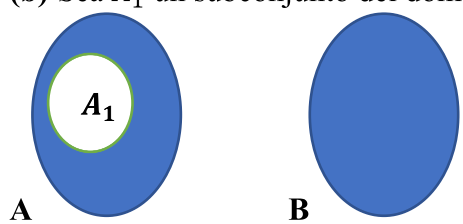


Situación 3. Sea el óvalo A el conjunto de partida (dominio) para alguna función *f* y el segundo óvalo el conjunto de llegada de dicha función (recorrido), conteste:

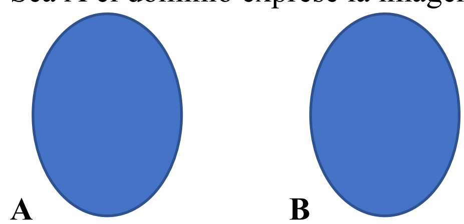
(a) Sea X_0 un elemento del dominio exprese la imagen de X_0 bajo la función *f*:



(b) Sea A_1 un subconjunto del dominio exprese la imagen de A_1 bajo la función *f*:



(c) Sea A el dominio exprese la imagen del dominio A bajo la función *f*:

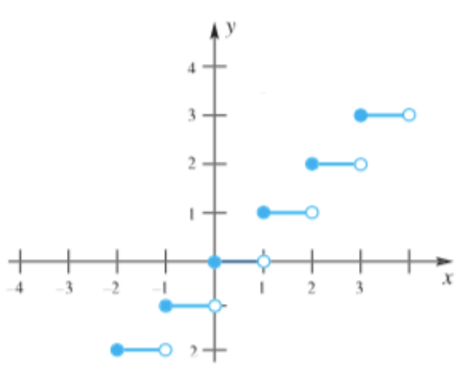


Situación 4. Determine si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas. Si su respuesta es afirmativa de una justificación, de lo contrario trate de proporcionar un contraejemplo.

(a) Si la imagen de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

(b) Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

Situación 5. Determina la imagen de:



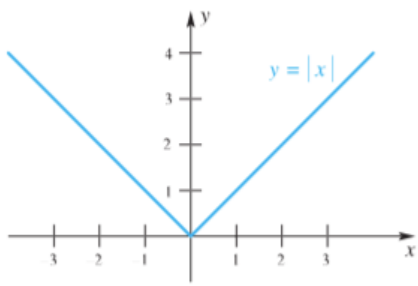
e) 0, 1, 2, 3, 4, …n ¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.

f) [1,2), [1,2] ¿Se puede calcular la imagen de cualquier intervalo? Si su respuesta es sí, ¿por qué?, si su respuesta es no, justifique.

g) $x \geq 0$, $x < 0$

h) Todos los $\mathbb{R}$

Situación 6. Conteste:



(a) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé 2?
(b) ¿Existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ te dé -4?
(c) ¿Para qué valores de y existe uno o varios valores de x tales que f(x)=y?
(d) De acuerdo a las respuestas dadas anteriormente ¿cuál es la imagen de la función *y*?

Situación 7. Para $g(y) = \frac{1}{y-1}$ determine cada valor.

(c) 3, 2, 10, -5, $\sqrt{5}$, 1/5, 1

(d) Determine el rango de la función

Situación 8. Sea A (c) el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como función de acumulación. Determine

(g) A (1)

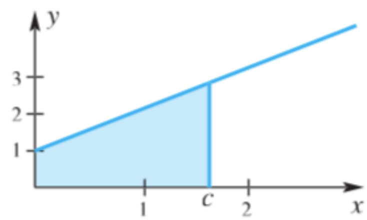
(h) A (2)

(i) A (0)

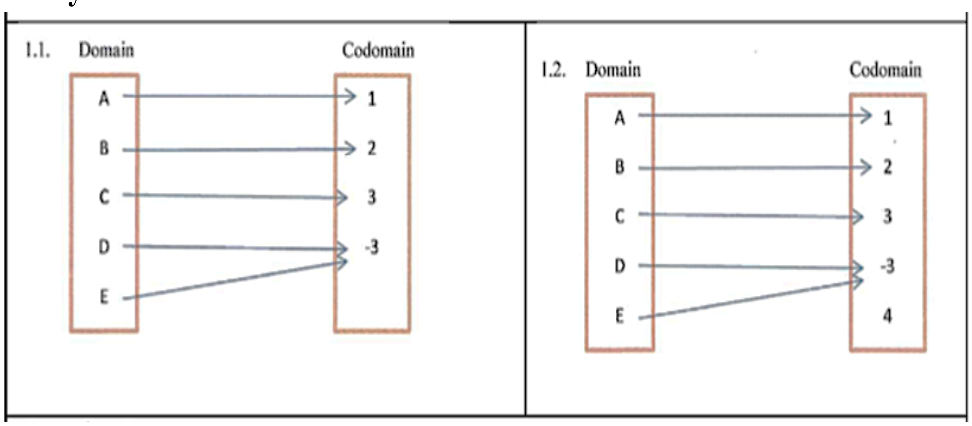
(j) A (c)

(k) Esboce la gráfica de A(c)

(l) ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función A?



Situación 9. Estudie la correspondencia y explique si es función inyectiva o sobreyectiva:



Situaciones probemáticas agregadas al Segundo Cuestionario

Situación 1. Para la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \frac{1}{y-1}$ determine lo que se pide a continuación:

a) El dominio de g
b) La imagen de g
c) Si la función g es o no sobreyectiva.

Situación 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada cuya imagen es $imag(f) = [0, \infty)$. ¿Es f sobreyectiva? Justifique su respuesta.

Transcripciones de los audios

E14(Be)

En la situación 1 para sacar imagen sobre los valores que nos dan en a sustituiría mi x por los valores que queremos y en la situación 2 sacaría como la imagen en general de nuestra función y en base a ella justificaría si se puede dentro de esos mismos intervalos.

En la situación 2 observo mi gráfica y voy identificando la imagen y preimagen de nuestra función de qué valores pues se obtiene con x y que valores abarca en y.

Para la situación 3 no la tengo mucho en claro pero… lo que creo que es, es que tengo que representar mi… en la primera situación mi x_0 dentro del dominio que va hacer mi ovalo que están en mi ovalo B entonces en el ovalo B tendría $f(x_0)$ en un segundo…sea un subconjunto (lee el problema) sería como que igual, definir A_1 en un intervalo que va dirigido hacia B que también se va a especificar en un intervalo en un subconjunto de B y el tercer inciso sea el dominio…(lee la pregunta) creo que igual lo representaría como $f(A)$ no, no estoy muy segura con respecto a la pregunta a lo que se tiene que expresar.

Situación 4 para el primer inciso (a) si la imagen de una función consiste en un solo número entonces su dominio también consiste en un solo número, creo que es falso porque nuestra definición de función no especifica como que esa parte o por ejemplo tenemos el ejemplo cuando $f(x)$ es igual a 2 entonces tenemos un solo número en imagen y ninguno en el dominio, para ver si el dominio de una función contiene al menos dos números entonces el rango también contiene al menos dos números y esa sí sería verdadero por lo mismo de que, de la definición de función en el que…

Situación 5 (lee el enunciado) ¿se puede calcular la imagen de cualquier número real? si su respuesta es sí, por qué, si su respuesta es no, justifique.

Ah sí porque realmente en nuestra gráfica como… como nuestro dominio está determinado sobre el eje x en cierta manera entonces todos nuestros números reales sobre el eje x van a tener un punto específico sobre el eje y que determina nuestro rango, nuestra imagen, entonces sí, sí se podría obtener, y el inciso B (lee el enunciado) ¿se puede calcular la imagen de cualquier intervalo? Amm sí podemos especificar mientras que... ay no sé cómo justificar, yo creo que sí, o en el escrito lo voy a definir un poquito mejor lo voy a intentar.

Situación 5 no me había fijado que faltaban dos incisos entonces inciso (c) nos dan como un intervalo de x, cuando $x \geq 0$ y cuando x es menor estricto a 0, no se a que se refiere si tiene dominio o imagen pero me imagino que sí, ya que los dos puede escribir más bien la imagen dentro de estos intervalos y para la situación…el inciso (d) creo que…no tampoco sé qué a que se refiere todos los reales, pues tiene imagen y tiene… bueno la función tiene dominio en todos los Reales, sí, pero no todos los reales entran en imagen, entonces no sé mucho a que se refiere.

Situación 6 el inciso (a), ¿existe un x tal que al aplicarle la función y=|x| te de 2? Sí, primero que nada, bajo a la grafiquita que nos dan para más fácil y rápido defino mi imagen y mi dominio, entonces me doy cuenta de que el dominio son todos los reales y mi imagen son todos los reales positivos, entonces un x tal que la función te de 2, pues sí, si existe y para el (b) hago el mismo caso de identificar el dominio e imagen, para que valores…. Bueno todo lo voy hacer bajo la imagen y la grafiquita puesta.

Situación 7, como la función esta dada en términos de y, entonces para mi primer inciso voy a sustituir los valores y por los valores que me piden y para mi segundo inciso que me piden el rango de la función voy a despejar lo que es mi… bueno la función g(y) la voy a equivaler a otro término que sería como w y en base a mi w, que va a ser $\frac{1}{y-1}$ voy a determinar el rango.

Situación 8, sea *a,b,c* el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo de la recta se llama función de acumulación, ay nunca había como trabajado en una función de esta manera o al menos no que me hubiera dado cuenta, creo que me voy a basar bajo la gráfica que creo que es la siguiente y voy a sustituir los términos de x por los valores que me piden, si no voy a buscar de qué otra forma poder hacerlo.

Situación 9 estudie la correspondencia y explique si es función inyectiva o sobreyectiva, ok en base a las imágenes que nos dan y las definiciones que se de inyectiva y sobreyectiva voy a definir cuál es cual y voy a intentar de crear como una función sobre ambos términos si es que cumplen con la definición de función.

E10 (Lr)

En esta en la sección 1 me enfoque en reemplazar los valores de x en la función y se pudo calcular lo que no hice fue sustituir los intervalos porque sino tendría que reemplazar todos los valores del intervalo en la función lo cual no, no puedo hacer o no es posible.

En la situación 2 puse que los valores que tienen imagen son los que estarían dentro de la línea azul de la gráfica y son todos los valores que están contenidos en esta y los valores que no tienen imagen son los que están fuera de esta gráfica como aparecen a partir del punto x_0 en el antes no tienen imagen en la función.

En la situación 3 hice el caso donde si un elemento de la imagen del dominio es pues la imagen sería un del conjunto de llegada por lo que no tiene el ovalo b entonces puse como si fuera una función inyectiva en el conjunto, en el inciso (b) hice lo mismo, también puse cualquier valor del subconjunto A1 a cualquier elemento del conjunto B y en el inciso (c) lo puse como una función biyectiva de donde cada elemento del conjunto A tiene un elemento de, solo un elemento del conjunto B, ah y que también todos los elementos del conjunto A tienen un conjunto, bueno tienen un elemento de llegada del conjunto B.

En la situación 4 yo determiné que ambas son falsas, en ambas di un contraejemplo.

Situación 5 puse que sí, que todo se puede calcular para cualquier número real, es su parte decimal menos la parte entera, bueno sería si la parte decimal de cualquier número y ¿se puede calcular intervalos?, también se pueden calcular intervalos porque es la imagen del punto 1, no del punto 2 es la parte decimal del intervalo 1,2, y dije que sí se podía calcular para cualquier intervalo porque sería la unión de varios intervalos, o de un solo intervalo.

En la situación 6 y 7 no fue complicada, hice, expliqué lo que hice en las hojas, así que no voy a explicar lo que hice en audios. La situación 8 fue la que me causó más conflicto de toda la entrevista por el área no clara o no clara a simple vista del dominio de las diferentes áreas en las que se evalúa a pero si de ahí en más todo se pudo hacer bien, eh ya especifiqué cuál es el dominio de los respectivos valores de c, bueno del área de c y la parte 9 ya también la explicó en las hojas que voy a enviar con ese archivo.

E6 (Os)

Para resolver la situación 1, el punto (a) solamente sustituí cada uno de los valores en la expresión a lo que define a la función f sustituí x por cada uno de los valores y para el punto (b) partí de que x pertenece al intervalo que dice ahí y pues con multiplicaciones bueno y utilizando desigualdades llegue a qué conjunto tenia que pertenecer $f(x)$ el único caso en el se me complejo poquito fue en el último, ya pero solamente fue separar como en dos casos cuando x va desde menos dos hasta cero y cuando va de cero hasta tres y ya pues resolví igual que los dos anteriores.

Para resolver la situación 2 el punto (a), bueno me fui sobre los, mentalmente me fui sobre los valores del eje x y trace rectas verticales y bueno si la recta vertical toca la gráfica de la función entonces pues el valor de x en cuestión tiene imagen y ya pues esto ocurre para todos los x que son menores a x_0, para x_0 como tiene un circulo sin rellenar pues quiere decir que no tiene imagen ese punto, el x_0 , y pues ya a partir de

x_0 incluyendo x_0 ciertas líneas verticales no van a tocar la función entonces esos valores no tienen imagen.

Para resolver la situación 3 en el inciso (a) pues la imagen de un elemento del dominio va hacer otro elemento ahora en el contradominio y simplemente se va a llamar $f(x_0)$ es decir la imagen de x_0 bajo la función f, la imagen de un subconjunto del dominio pues va hacer otro conjunto digamos b_1 que va a ser subconjunto del contradominio y ya simplemente digo que b_1 es la imagen bajo f del conjunto A_1, y para expresar la imagen del dominio A bajo la función f está va a ser un subconjunto del contradominio también, entonces pues ya simplemente lo pongo así como un subconjunto no tiene porque ser todo el contradominio.

Para resolver la situación 4 tanto en los puntos a y b propuse contraejemplo la función $f(x) = 1$, sirve de contraejemplo para el *a* porque si la imagen de esta función es un solo número que es el 1 pero su dominio son todos los reales, ah porque dije que fuera de los reales al conjunto que nomas tiene el 1, y también sirve como contraejemplo del (b), porque el dominio contiene al menos dos elementos, de hecho, contiene todos los reales, y el rango pues no contiene al menos dos números, de hecho contiene a uno que es el 1.

Para resolver la situación 5 vi que pues la función era, me parece ser la función piso, entonces para resolver el punto (a), si se puede calcular la imagen de cualquier número real porque pues se ve que el dominio, bueno según la gráfica, el dominio de la función son todos los números reales, entonces sí, se puede calcular la imagen de cualquier número real. Para calcular la imagen de un intervalo bueno pues van a ser enteros que van desde la imagen del extremo inferior del intervalo, por ejemplo si el intervalo es de la forma a, b ya sea cerrado o abierto sus extremos va a ser los enteros desde la imagen de *a* hasta… sin importar si el intervalo es cerrado o abierto en *a*, va a ser los enteros desde la imagen de *a* hasta y bueno ahí ya depende, si el intervalo es cerrado en *b*, entonces va a ser los enteros desde la imagen de *a* hasta la imagen de *b*, si el intervalo es abierto en *b*, entonces si *b* es un entero va a ser los enteros desde la imagen de *a* hasta los menores a la imagen de *b*, es decir, sin incluir la imagen de *b* y si *b* no es entero entonces van a ser los enteros desde la imagen de *a* hasta la imagen de *b*, osea esto lo vi porque por ejemplo si es 2, si *b* es 2, como en los ejemplos de arriba cuando era abierto en 2 entonces la imagen nomas era el 1, porque el 2 no se incluía, es decir la imagen del 2 no iba a estar en el conjunto de las imágenes y cuando era cerrado en 2 la imagen del 2 bajo la función sí se incluía en el conjunto de las imágenes y ya en eso me base.

Para el punto (c) para los $x \geq 0$ pues nomas vi que la imagen del cero pues es el cero y a partir de ahí pues el conjunto de imágenes iba a ser los enteros mayores o iguales a cero, es decir 0,1… así, y para los menores a cero pues vi que iban a ser los enteros que son menores a cero.

Ahorita estoy viendo que no contesté el inciso (d) pero la respuesta ahí pues sería todo el conjunto de enteros y eso bueno se deduce de la gráfica de la función, vemos que las, bueno si nosotros trazáramos líneas horizontales, estas tocarían a la gráfica de la función únicamente en valores enteros y pues de hecho en todos los enteros entonces pues ya, la imagen de los reales pues va a ser el conjunto de los enteros.

Para resolver la situación 6, bueno se resuelve viendo la gráfica y la pregunta es sí existe un valor tal que al aplicarle la función de valor absoluto te de 2 y ya pues puse que si, si trazamos nosotros una línea horizontal, bueno que obviamente va a cortar al eje y en dos entonces esa misma línea horizontal corta la gráfica de la función en dos puntos el que corresponde a $x = 2$ y $x = -2$ y ya entonces sí hay una x que al aplicarle la función me de 2 porque al trazar la línea horizontal pues esa línea horizontal traza la… digo corta la gráfica. Y luego para el (b) existe un x tal que al aplicarle la función de -4, pues no porque si trazamos una línea horizontal por el -4 no va a tocar a la gráfica de la función, y luego viene la pregunta (c) que ya es como más general, ¿para qué valores de y existe uno o varios valores de x tales que $f(x) = y$, eh pues vemos para que valores si nosotros trazamos una línea horizontal por esos valores la línea va a tocar a la gráfica de la función y vemos que va a ser para los que sean mayores o iguales a cero porque ahí digamos que empieza la gráfica de la función para los menores a cero pues no, las líneas horizontales no tocan a la gráfica de la función y ya pues en base a eso respondemos la pregunta de la imagen de la función es todos los números mayores o iguales a cero.

Para resolver la situación 7 el punto (a) simplemente sustituimos y por cada uno de los valores que dice ahí, vemos que al sustituir el 1 pues se hace una indeterminación entonces el 1 no tiene imagen bajo la función g. Para ver cuál es el rango de la función pues vamos a ver qué números podemos obtener teniendo un y y aplicándole la función, ya pues ahí explico que van a ser todos los reales excepto el cero, porque el cero no se puede escribir como uno sobre algo, porque el cero no tiene inverso multiplicativo, bueno no tiene inverso multiplicativo, inverso del producto.

Para resolver la situación 8, bueno analicé más como geométricamente, vi que la figura que se formaba ahí era un trapecio y calculé su área en base a la formula del área de un trapecio y eso me dio una formula para la función A, ya pues con esa formula saque los valores de la función en 1, 2, 0 y en c en general, y ya pues viendo cuál era la formula de la función era una cuadrática, pues ya hice un esbozo como de la gráfica pero pues vi que iba a ser como una parábola pero trace como la parábola y la corte osea simplemente va a ser la parte que en la que $x \geq 0$ y en base a la gráfica pude determinar el dominio y la imagen de la función A. Ahí en ambos casos pues vemos que el dominio son todos los positivos y el cero y la imagen también.

Y pues para resolver la situación 9 pues nomas viendo las definiciones no, de inyectividad y sobreyectividad, la 1.1 pues sí es sobreyectiva, a todos los del contradominio les corresponde su preimagen pero no inyectiva porque hay dos en el dominio que tienen la misma imagen. En la 1.2 pues hay uno que... uno en el contradominio que no tiene preimagen entonces pues no es sobreyectiva e igual hay dos en el dominio que les corresponde la misma imagen entonces no es inyectiva.

E8 (Ja)

Para calcular la imagen de los valores que se plantean lo único que hice fue cambiar el valor de x por el valor de los que están ahí propuestos, por ejemplo la imagen de 1 pues sería $f(1) = 1 - 1^2$ que sería $1 - 1 = 0$ entonces la imagen de 1 sería el cero y así con cada uno de los valores y respondiendo a la pregunta de si se puede calcular la imagen de cualquier número real , eh pues sí, sí se puede porque pues la función tiene dominio los reales y pues si, también tienen de contradominio los números reales también pues se puede calcular la imagen de cualquier número real sustituyendo el valor del número que se busque en la función, y para obtener la imagen de pues de cualquier intervalo yo lo que hacia por ejemplo tomar valores específicos de cada uno de esos intervalos, porque creo que haciéndolo así para cada uno de los valores pues si sería, creo que si sería mucho, porque como son números reales pues si serían bastantes, pero yo creo que para casos específicos, casos particulares sí se podría igual que como se hizo con la situación, bueno si con esta misma situación donde sustituimos el valor de *x* por el valor que se quiere encontrar la imagen.

De la situación 2 de la primer pregunta que se nos dice que qué valores de x tiene la imagen y pues dada la gráfica, después de masomenos… bueno más bien de analizarla vi qué valores de *x* tienen imagen, pues son los que, todas las *x* tales que *x* es menor que el x_0 porque vemos que el x_0 como que ya no tiene imagen, pues de x_0 en adelante yo creo que ya no esta definido entonces por eso diría que los valores de *x* que tienen imagen son todas las *x* tales que *x* es menor que x_0 y en la parte de donde dice ¿cuáles son las imágenes? Son… pues serían todos los y tales que $f(x) = y$ pero siempre y cuando se cumpla la condición que $x < x_0$ y ¿Cuáles valores de *x* no tienen imagen? Pues serían todos los *x* tales que $x \geq x_0$ ya que en base a la gráfica se puede observar que en el punto x_0 pues no esta definida y en los puntos mayores que x_0 pues tampoco.

En la situación 3 donde nos dice que sea x_0 un elemento del dominio expresemos la imagen de x_0 bajo la función, aquí pues en la primer parte, aplicando la definición de imagen que si existe un elemento en a en este caso a pues es el dominio ahí, existe un elemento en y, perdón en B ,un elemento y en B, son tales que $f(x) = y$. En la situación 2 si A_1 es un subconjunto del dominio expresemos la imagen de A_1 bajo la funcion f, aquí lo que yo hice pues, mas bien como que lo que plantee como función serían todas las y tales que $y = f(x)$ pero aquí sería para algún x que pertenece a ese subconjunto, un x que pertenece a A_1, en el inciso (c) donde dice que A es el dominio expresemos la imagen del dominio de a bajo la funcion f y sería casi lo mismo que para el subconjunto que en le inciso (b) lo único que si cambiaría aquí es que son los

y tales que $y = f(x)$ para algún x que pertenece al dominio, osea aquí ya es para todo el conjunto a diferencia de que en a_1 solo era para ese subconjunto.

Para la situación 4 en el inciso (a) donde dice que si la imagen de una función consiste en un solo número entonces su dominio también, bueno yo diría que ese enunciado es falso y el contraejemplo que propuse es que considerando la función $f(x)$… bueno la regla de correspondencia de una función x^2 y a su vez tomamos los valores -5 y 5 que en este caso son valores que sí pertenecen al dominio de la función entonces las imágenes de esos valores sería en el caso de -5 pues sería 25 y en el caso del 5 también sería 25 entonces vemos que la imagen de esos valores es un solo, bueno al final de cuentas es un mismo valor, la misma imagen y por lo tanto dijimos que el enunciado es falso, para el inciso (b) si el dominio de una función contienen al menos dos números entonces el rango también contiene al menos dos números, bueno aquí lo que yo hice pues fue prácticamente lo mismo que en el inciso (a), propuse la función $f(x) = x^2$ y dos elementos en su dominio que en este caso fueron -1 y 1 y haciendo el mismo proceso que en el inciso (a) se observa que tiene la misma imagen y sí como que se contradice el enunciado porque aquí se nos dice que si el dominio tiene al menos dos números entonces el rango contiene al menos dos números entonces aquí lo que yo hice fue como que aplicar casi lo mismo que en el inciso (b), hacer un subconjunto del dominio en este caso mi subconjunto sería el subconjunto que tiene los elementos -1 y 1 y la imagen de esos subconjuntos sería el 1, entonces aquí vemos que el dominio contiene dos elementos, al menos dos números y el rango contiene nadamas un número.

Para la situación 5 nos dice que si se puede calcular la imagen de cualquier número y pues yo diría que sí porque en la gráfica se observa que la función esta definida en todos lo reales y si se podría calcular la imagen de cualquier intervalo porque como cada valor, bueno esa gráfica yo diría que es la gráfica de la función parte entera entonces yo diría que si a cada valor de ese intervalo le va asignar su parte entera menor, entonces ahí si a pesar de que sean números muy chiquitos, muy pequeños pues igual nos va a dar la parte entera y ahí como que se haría más pequeño el conjunto de las imágenes.

Para el inciso (c) nos dice que $x \geq 0$ y $x < 0$ que como f esta definida en todos los reales a cada número real se le va asignar su parte entera, entonces si se tiene un número o un valor mayor que cero, aquí yo puse un ejemplo 5.47 entonces la función le va asignar el número 5 y si se tiene un valor menor que cero por ejemplo el -15.47el valor que se le va asignar va a ser el -16.

En la situación 6 en donde esta la parte de la gráfica de la función valor absoluto en la primer pregunta que nos dice que si existe un x tal que al aplicarle la función $y = |x|$ nos de 2 y pues sí, por ejemplo sería el número 2 ya que si hacemos $f(2)$ sería el $|2|$ que es 2, para el inciso (b) en donde se nos dice que si existe una x tal que al aplicarle la función valor absoluto nos de -4 y aquí pues yo diría que no, porque si por ejemplo hacemos el que se parecería mas que sería… si evaluamos en $f(-4)$ sería el $|-4|$ y nos daría 4 igual si evaluamos en 4, igual nos daría el $|4|$ pues 4, entonces ningún valor del dominio nos va a regresar el valor de -4, mas bien en este caso pues siempre nos va a dar valores positivos. ¿Para qué valores de y existe uno o varios valores de x tales que f(x)=y? pues yo diría que para todos los valores que pueda tomar y, por ejemplo si $x_0 \geq 0$ entonces $f(x_0) = y_0$ y si $x_0 < 0$ entonces de todas maneras la función nos va a regresar $f(x_0) = y$,y pues la imagen de y serían todos los reales positivos ya que la función tiene dominio los reales y a cada valor le asigna su valor positivo.

En la situación 7 donde se nos pide determinar el valor de varios elementos, bueno aquí lo que… pues para esta parte lo único que hice fue sustituir el valor de y por los que vienen ahí, y el rango de la imagen, bueno vemos que primero en el valor de 1, la función 1 no esta definida porque nos queda algo de $\frac{1}{0}$ entonces el rango o la imagen de la función va a ser los todos los reales menos el 1 porque pues el 1 no tiene imagen.

Y para la situación 8 aquí lo que yo… bueno lo primero que hice antes de empezar fue esbozar la gráfica porque como se nos decía que pues es área yo me imagine que se trataba de una figura entonces lo que hice fue esbozar la gráfica primero para ver como que de qué figura se trataba. Ver si me podía ayudar un poquito más y vi que la figura es un trapecio y lo que hice fue con dadas las condiciones que se nos dan que esta acotada por arriba por $x + 1$ y eso pues como que intenté establecer una formula, bueno utilizando la formula para sacar el área de un trapecio hacer lo mismo pero para la función para dejarla en función de c y ahora si poder sustituir el valor de c como se pide que evaluemos A(1), A(2) y así.

Y para la última situación en donde se nos pide que expliquemos si las imágenes representan una función inyectiva o sobreyectiva, para la 1.1 yo diría que no es inyectiva ya que los elementos del dominio tienen la misma imagen y aquí como recordando la definición de función inyectiva, bueno ahí un poco informal, son aquellas que cada elemento del codominio tienen un elemento del dominio, entonces por ejemplo, aquí el -3 pues no tiene, tiene dos elementos del dominio entonces no cumple con la definición, sin embargo esta representación sí es sobreyectiva ya que, bueno aquí igual recordando la definición de sobreyectividad es que todos los elementos del codominio le corresponden a un elemento del dominio, en este caso sí, todos los elementos, elemento *a,b,c,d* y *e* tienen un elemento en el codominio, a pesar de que el d y el e tienen en la misma imagen. La 1.2 no es inyectiva porque igual los elementos d y e tienen la misma imagen, pero tampoco es sobreyectiva ya que el elemento cuatro del codominio no es imagen de ningún elemento del dominio entonces se esta contradiciendo la… bueno mas bien no se esta contradiciendo si no que pues no, no podemos como que ajustar la definición de sobreyectividad a esta representación y pues sería todo.