UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS. UN RECURSO PARA ATENDER LAS APTITUDES SOBRESALIENTES

Proyecto de Desarrollo Profesional

Que para obtener el grado de:

Maestro en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Rogelio P. Mier Macias

Directora del proyecto:

Dra. Carolina Carrillo García

Zacatecas, Zac., Noviembre, 2020

Dedicatoria

Cada una de las horas invertidas para la materialización de este Proyecto se las quiero dedicar especialmente a mi niña y a mi hermana, mis mayores orgullos, manantiales de todas mis fuerzas.

A mis padres, mi esposa, mi abuelo y mi tía por sus constantes buenos deseos y su infinita confianza en mí.

A los amigos y excompañeros de trabajo de Cuba que de una u otra forma contribuyeron para que pudiera venir a este generoso país a realizar estudios de maestría.

A todos les digo: "Meta Cumplida".

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario No. 936543

Agradecimientos

Mi eterno agradecimiento a la Dra. Carolina Carrillo García quien ha sido para mí mucho más que la directora de este trabajo de titulación, llegando a convertirse en un referente personal tanto en el plano profesional como en el humano. Nunca olvidaré lo rápido que se me iba el tiempo aunque se acumularan horas de clase o de trabajo, su plática inteligente que invita a la reflexión, su buen humor hasta para regañarme, siempre disponible, 24h, los 7 días de la semana. Porque siempre me escuchó, me dio la posibilidad de decidir, por creer en mí más que yo mismo, por todo…, miles de gracias no me alcanzan.

Agradezco a la M. en C. Nancy Calvillo Guevara por confiar en mí y darme la oportunidad, ya que como Coordinadora de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Zacatecas fue mi primer contacto como aspirante cubano para ingresar al programa.

Al Dr. José Iván López Flores que junto a la maestra Nancy me han acompañado como revisores desde los inicios de este proyecto y cuyas oportunas observaciones han sido claves para enrumbarlo y enriquecerlo.

Al Mtro. José Tiscareño Bermúdez y al Lic. Eugenio Daniel Flores Alatorre por abrirme las puertas para tomar datos en los exitosos escenarios de las olimpiadas mexicanas de matemáticas que ellos presiden.

Al Mtro. Orlando Daniel Jiménez Longoria ya que su trabajo contribuyó a incrementar la motivación sobre esta línea de investigación, convirtiéndose en uno de los principales referentes de este Proyecto, por las recomendaciones dadas…

A mis compañeros de generación por sus consejos y por hacerme más llevadera la vida de extranjero.

A todos, muchas gracias.

Zacatecas, Zac., a 21 de octubre del 2020

M.C. Nancy Calvillo Guevara
Responsable del Programa de Maestría en Matemática Educativa
de la Unidad Académica de Matemáticas
de la Universidad Autónoma de Zacatecas
P R E S E N T E

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Los problemas de olimpiadas de matemática. Un recurso para atender las aptitudes sobresalientes" y que fue realizado bajo mi asesoría por el Lic. PGI. Rogelio Plácido Mier Macias, egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria, cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la maestría.

Atentamente,

Dra. Carolina Carrillo García
Docente Investigadora de la UAM-UAZ

Zacatecas, Zac., a 17 de noviembre de 2020

Dra. en D. Samanta Deciré Bernal Ayala
Responsable del Departamento Escolar
de la Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre ***"LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA. UN RECURSO PARA ATENDER LAS APTITUDES SOBRESALIENTES"*** y que fue realizado bajo mi asesoría por el **PGI. Rogelio Plácido Mier Macias**, egresado de la Maestría en Matemática Educativa, ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la maestría.

Atentamente,

Dra. Carolina Carrillo García
Docente Investigadora de la UAM-UAZ

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 17 del mes de noviembre del año 2020, el que suscribe Rogelio Plácido Mier Macias, egresado del Programa de Maestría en Matemática Educativa con número de matrícula 38192763, manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado "LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA. UN RECURSO PARA ATENDER LAS APTITUDES SOBRESALIENTES", realizado bajo la dirección de la Dra. Carolina Carrillo García.

Por tal motivo, asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Rogelio P. Mier Macias

RESUMEN

La valoración de la diversidad a la que nos convoca el más genuino sentimiento humano y por la que afortunadamente se apuesta desde la política educacional de México y de la mayoría de los países en la actualidad, bajo el paradigma de la Educación Inclusiva, constituye uno de los mayores desafíos a los que se enfrentan los docentes de hoy día. El responder con equidad a las características, necesidades, intereses, capacidades, habilidades y estilos de aprendizaje de todos y cada uno de los educandos requiere que los maestros, en especial los que se dedican a la enseñanza de las matemáticas, pongan todo el empeño y desarrollen capacidades.

Dada la complejidad que supone la tarea por el necesario cumplimiento con tiempos y la cantidad de alumnos diversos a intervenir por los docentes de la Educación Básica, en este esfuerzo no pocas veces pasan a un segundo plano en su gestión aquellas capacidades que le permiten satisfacer las demandas de los alumnos con aptitudes sobresalientes para las matemáticas, lo que frecuentemente conlleva a la pérdida del interés de estos educandos. Teniendo en cuenta este panorama de la realidad áulica, se perfila como deseable que el docente cuente con alternativas de intervención pragmáticas y de fácil acceso.

En este tenor, el autor del presente Proyecto de Desarrollo Profesional orientó su capacitación hacia el estudio de un medio extraescolar exitoso en la potencialización de talento matemático: las olimpiadas matemáticas. El objetivo general perseguido fue el identificar aspectos de las olimpiadas matemáticas como actividad transformadora de las altas capacidades naturales intelectuales y creativas en talento matemático.

Para su desarrollo se llevó a cabo una investigación de campo de tipo descriptivo, utilizando como método principal la observación en dos escenarios: la segunda edición del Curso para Entrenadores de Olimpiadas Matemáticas auspiciado por el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas (CARMA) y los entrenamientos del preselectivo zacatecano de primaria y secundaria para su participación en las olimpiadas matemáticas de 2020. Como expresión de los resultados se logró recopilar y organizar abundante material representativo del contenido implícito en los problemas de las competiciones para los niveles de primaria y secundaria, así como de las prácticas que implementan los entrenadores para su enseñanza. Sobre la base de tales resultados se pudo concluir con la identificación de los aspectos determinantes en el logro de aprendizaje en este medio extraescolar, aspectos que consecuentemente adaptados pueden ser retomadas para la intervención efectiva en pos de potencializar el talento matemático desde la escuela.

Palabras clave: alumnos sobresalientes, problemas, olimpiadas matemáticas, talento matemático.

ABSTRACT

The assessment of the diversity to which the most genuine human feeling summons us and for which fortunately the educational policy of Mexico and most of the countries are currently committed under the paradigm of Inclusive Education, constitutes one of the biggest challenges facing teachers today. Responding fairly to the characteristics, needs, interests, abilities, skills, and learning styles of each and every student requires that teachers, especially those who teach mathematics, make every effort and develop capabilities.

In this effort, given the complexity of the task due to the necessary compliance with times and the number of diverse students to be intervened by Basic Education teachers, not few times those capacities that allow them go to the background in their management meet the demands of students with outstanding mathematical aptitudes, which frequently leads to the loss of student interest. Taking into account this panorama of the classroom reality, it is outlined as desirable for the teacher to have pragmatic and easily accessible intervention alternatives.

In this way, the author of this Professional Development Project oriented his training towards the study of a successful afterschool environment in the potentialization of mathematical talent, the mathematical olympics. The general objective to follow was to recognize the qualities of the mathematical olympics as a transforming activity of the high intellectual and creative natural capacities in mathematical talent.

For their development, a field research was carried out at a descriptive level, using observation in two stages as the main method, the second edition of the course for Mathematical Olympics coaches sponsored by the Center for High Performance in Mathematics (CARMA is the acronym in Spanish) and the training of the Zacatecan elementary school and junior high school preselective for their participation in the 2020 Mathematical Olympics. Through the results, it was possible to collect and organize plenty material representative of the implicit content in the problems of the competitions for elementary school and junior high school levels, as well as the practices that coaches implement for their teaching. Based on those results, it was possible to conclude with the recognition of the determining qualities in the accomplishment of learning in this extracurricular environment, qualities that consequently adapted can be retaken for effective intervention in order to potentiate mathematical talent from school.

Keyword: outstanding students, problems, mathematical olympics, mathematical talent.

Índice General

Índice de Tablas

Índice de Figuras

INTRODUCCIÓN

La deseable efectividad en la atención a las diferencias individuales de aprendizaje de los educandos hacia la que se proyectan los sistemas educativos de la mayoría de los países que abrazan los principios de equidad a partir de la inclusión educativa decreta como imperativa la promoción del desarrollo profesional de los docentes. Para el logro de tal personalización en la enseñanza de las matemáticas se hace imprescindible que los maestros, como protagonistas en la tarea, incorporen a su bagaje los recursos didácticos-matemáticos que le permitan diversificar propuestas enriquecidas.

En esta dirección el menor interés se percibe en la consecución de aquellos recursos que lo capacitan para desarrollar el talento de los discentes con aptitudes naturales sobresalientes para el aprendizaje de la disciplina, cuestión que no se atiende con la profundidad que amerita desde la formación inicial de profesores, ni se intenciona de manera funcional en la formación continua, marcos donde la atención a la diversidad prioriza a aquellos alumnos cuyo rendimiento académico se considera por debajo de la media.

Ante esta problemática, la revisión bibliográfica para la investigación se orientó hacia la búsqueda de posiciones cercanas a la que empíricamente traíamos como idea inicial, para encausar el proyecto con avalada pertinencia. De esta forma se pudo corroborar que, a pesar de que en los últimos años se ha evidenciado mayor concientización de la importancia de brindar una atención efectiva a los alumnos con aptitudes sobresalientes para las matemáticas, no abundan las propuestas con acciones concretas y prácticas para invertir en estos alumnos desde el medio áulico y escolar en general. Se pudo percibir que una de las corrientes de investigación en torno al talento matemático más prolíficas es la centrada en la resolución de problemas, donde en general se converge hacia la idoneidad de este proceso tanto para la detección de las aptitudes naturales como para su desarrollo en talento.

El efecto dominó nos llevó a familiarizarnos con las miradas hacia dentro de los problemas, es decir, con las estrategias y creencias más familiares entre los estudiantes de secundaria cuando atraviesan el proceso de solución y con el tipo de problemas que en mayor grado potencializan el talento según autores especializados en el campo, los cuales los definen como retos y algunos alcanzan a ejemplificarlos con los propuestos dentro de las olimpiadas matemáticas. Finalmente, ratificamos que prevalece la resolución de problemas como enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas en las normativas vigentes de la Secretaría de Educación Pública de México para la Educación Secundaria, lo que implica el planteamiento de situaciones problemáticas interesantes y retadoras. La entidad también advierte la importancia de atender a los alumnos sobresalientes, definiendo el enriquecimiento curricular (desde el aula, la escuela o fuera de la escuela) y la aceleración como los modelos de atención educativa a implementar.

Considerando la información anterior, el Proyecto de Desarrollo Profesional se materializó teniendo como objetivo central la identificación de aspectos de las olimpiadas matemáticas como actividad transformadora de las altas capacidades naturales intelectuales y creativas en talento matemático. Para ello se realizaron observaciones en dos escenarios con amplia experiencia y resultados destacados en el campo de las olimpiadas mexicanas de matemáticas: la segunda edición del Curso para Entrenadores de Olimpiadas de Matemáticas impartido por el director del Centro de Alto rendimiento en Matemáticas que tiene su sede en San Luis Potosí, quien también ha fungido como entrenador de la selección nacional de primaria para olimpiadas internacionales, y el entrenamiento del preselectivo zacatecano para las olimpiadas nacionales de 2020, cuyos entrenadores han conseguido mantener a Zacatecas entre los primeros lugares en estas instancias en los últimos años.

Se aspira a que la alternativa de atención escolar a los sobresalientes en matemáticas por la que se apuesta en este Proyecto de Desarrollo Profesional sea acogida por otros docentes lectores, a que puedan hacer uso del material contenido en el documento y a que les marque una línea para enrumbar su superación. En general, se pretende que este reporte pueda tributar a la promoción de una visión más integradora acerca de los problemas propuestos en las competiciones matemáticas de la enseñanza secundaria y en lo relativo a los procesos de enseñanza-aprendizaje en los entrenamientos de estudiantes olímpicos.

Es importante señalar que el estudio de los problemas y de las dinámicas predominantes durante el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en un medio extraescolar exitoso en la promoción del talento como lo es la Olimpiada de Matemáticas, visto como una opción de capacitación profesoral, aportador de material de fácil acceso y prácticas efectivas que, consecuentemente adaptadas, pueden ser de suma utilidad en el enriquecimiento áulico y escolar de los alumnos sobresalientes; encuentra fundamento en la visión teórica que se expresa en el Modelo Diferenciador de Dotación y Talento de Francoys Gagné. Dicho modelo es representativo de la explicación sociocultural del talento asumida por la SEP y en consecuencia permitió fijar un lenguaje en sintonía con el institucional.

Al respecto, en el modelo se definen cinco componentes con sus categorías, cuyas interacciones en el tiempo contribuyen al desarrollo del talento. Claramente marca la diferencia entre la conceptualización de superdotación y el talento, aludiendo con el primero a las aptitudes naturales del individuo que mediante los procesos de desarrollo, tales como el aprendizaje y la práctica, se convierten en talentos expresados en distintos campos particulares de la actividad humana, incluyendo el matemático. Asimismo, reconoce la figura del profesor como persona significativa dentro de los catalizadores ambientales influyentes en los de tipo intrapersonales y en los procesos de desarrollo, cuyo centro son las actividades de aprendizaje y práctica por las que atraviesa el talento en desarrollo y donde se ponen bajo foco como categorías esenciales para el logro: el contenido específico hacia el que éstas se encaminan y el contexto de aprendizaje o formato en el que tienen lugar, lo que en este proyecto se expresa en la dirección que se le dio al estudio para el pretendido desarrollo profesional, es decir, a través de los problemas y entrenamientos de olimpiadas de matemáticas respectivamente.

El reporte del Proyecto de Desarrollo Profesional quedó documentado a través de los siguientes apartados:

En el Capítulo 1, titulado Planteamiento de la Investigación, se presentan los aspectos más significativos para el desarrollo del Proyecto rescatados con la revisión bibliográfica realizada en torno a los alumnos sobresalientes, la resolución de problemas y la política educacional vigente en México, concluyendo con el planteamiento formal del problema de investigación.

En el Capítulo 2 se exponen los referentes teóricos asumidos, sumando a la Caracterización de Superdotación y Talento, cuya esencia fue descrita de manera breve anteriormente, la Resolución de Problemas como modelo teórico y metodológico que explica la forma en que se concibe el aprendizaje de la matemática desde esta perspectiva asumida en la investigación y en consecuencia las prácticas deseables. En tal sentido, se convierte en el principal referente para orientar la observación y para la interpretación de los resultados. En este apartado se incluye también una descripción para familiarizar al lector no especializado con el panorama de las Competiciones Matemáticas en México para los alumnos de secundaria.

Dentro del Capítulo 3 se presenta la metodología, donde se describen y justifican los escenarios escogidos para llevar a cabo la observación, definiendo el tipo de investigación, así como el método y las técnicas que fueron utilizadas para la toma de los datos en cada caso.

En el Capítulo 4 se presentan organizados y se analizan los datos tomados tanto en el marco de la segunda edición del Curso para Entrenadores de Olimpiadas de Matemáticas, como los emanados de las sesiones de entrenamiento observadas en el preselectivo zacatecano para las olimpiadas nacionales de matemáticas de 2020.

En el Capítulo 5 se exponen las conclusiones a las que se arribaron a partir del análisis de los datos en función de los referentes teóricos asumidos y los objetivos propuestos. Además, se incluye la reflexión personal en torno a la huella que deja en el autor la presente investigación.

Por último, se presentan las referencias de todos los trabajos citados a lo largo del proyecto y los anexos, dentro de los cuales se incluyen ejemplos de materiales y temarios de entrenamiento, así como los formatos contenedores de las anotaciones interpretativas realizadas durante las observaciones de los entrenamientos del preselectivo estatal.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Motivación

En Cuba, mi país de origen, la educación ha sido una prioridad estatal desde el Triunfo Revolucionario de 1959. Evidencia de ello es que, en menos de tres años del ascenso al poder del nuevo gobierno, se erradicó el analfabetismo y se facilitó el acceso masivo a los distintos niveles de educación de manera gratuita, enarbolando la premisa martiana de "ser cultos para ser libres". En adelante, el sistema educativo cubano se fue consolidando y adecuando a las características del momento histórico para la formación de su capital humano.

En este camino, partiendo de ideas y conceptos nuevos, iniciando el presente milenio en Cuba se efectuó la tercera revolución educacional. Por aquellos años quien escribe cursaba el bachillerato dentro de la Enseñanza Técnica y Profesional (ETP) con especialidad en Construcción Civil.

Durante las últimas semanas del curso 2001-2002, y en el marco de los tradicionales seminarios de preparación de los docentes para el nuevo curso, tuvo lugar en las escuelas secundarias de todo el país un adiestramiento relámpago a los maestros con la finalidad de capacitarlos para la ambiciosa reforma del curso venidero. El nuevo modelo requería un profesor comprometido con el mejoramiento humano y capaz de dirigir el proceso de aprendizaje de todas las asignaturas del currículo con un enfoque interdisciplinario, aunque el protagonismo en las clases era asumido por videoclases y teleclases.

El novedoso proyecto no fue acogido por una buena parte de los docentes experimentados en su materia en aquel momento y otros lo intentaron por poco tiempo. Tal situación fue el marco propicio para que se produjera un éxodo de profesores prácticamente masivo dentro de la ya deficiente cobertura docente de enseñanza media básica del país.

Como alternativa, el Ministerio de Educación (MINED) prácticamente eliminó todo criterio de selectividad, estimuló con la exoneración del cumplimiento del servicio militar obligatorio y del estipendio a estudiante universitario más alto del país, en su convocatoria a jóvenes con 12moº (equivalente a bachillerato en México) para cursar la recién creada Licenciatura en Educación Profesor General Integral de Secundaria Básica, conocida como PGI.

Considerando todos los factores anteriormente descritos, al concluir mi bachillerato en el año 2004, decido abrazar el proyecto y luego de una habilitación de escasos 4 meses me enfrento a la exigente tarea. El modelo, aunque en teoría me consideraba estudiante de licenciatura que trabajaba como parte de la formación, partía del principio de escuela como micro universidad y relegaba prácticamente toda la responsabilidad de mi desarrollo profesional al conocimiento que pudiera absorber de un tutor sobrecargado de funciones, en la práctica. Recibí el programa de la licenciatura en 8h de cada sábado en los 5 cursos que bastaron para graduarme, el cual se restringía en general, a propiciar los conocimientos más básicos en torno a las materias a impartir en la secundaria.

En todo ese tiempo tuve que destinar mi autopreparación a la planeación maratónica y reproductiva de clases ya videograbadas. Por ello, a pesar de las ricas experiencias que me fue tributando la práctica, dado lo favorable en ese sentido de un sistema que posibilitaba permanecer casi 8h diarias con mi grupo de estudiantes durante sus tres cursos escolares, podía reconocer las necesidades de aprendizaje de cada uno, pero no tenía el conocimiento para encausarlas con la efectividad exigida por la administración para noveles y experimentados en correspondencia con las resoluciones ministeriales. A pesar de ello, me enamoró esta sublime profesión.

Poco tiempo después de concluida mi licenciatura, comenzó a desmontarse el sistema paulatinamente curso a curso; pasando desde profesor del área de ciencias, a lo que siguió la dualidad de asignaturas, en mi caso Matemática-Física y finalmente, el profesor especialista en matemáticas, materia en la que alcancé el mayor desarrollo como discente y en el ejercicio de la docencia.

Atendiendo a las exigencias administrativas y a mi comprensión de la responsabilidad social que en mis manos recaía, puse todo mi empeño en el cumplimiento de mis cambiantes funciones durante los 14 cursos escolares que impartí docencia. No obstante, en muchas ocasiones me pasaron factura las características de mi formación, llegando a sentir impotencia para diseñar o abordar situaciones de aprendizaje apropiadas para aquellos alumnos que, por sus características de asimilación, se apartan de la media.

Esta difícil tarea de atender las diferencias individuales de aprendizaje de los educandos está institucionalizada ministerialmente en el sistema educativo cubano, pero su concreción en la realidad áulica se ve obstaculizada principalmente porque desde la formación de profesores no es abordada con rigurosidad, además de la sobrecarga de funciones del docente. Por estas razones, en el control administrativo al desempeño del docente se prioriza, fundamentalmente, que él mismo trace estrategias de intervención dirigidas a aquellos alumnos que se encuentran por debajo de la media de aprendizaje.

La postura descrita hace que la mayor parte de los maestros en la realidad educativa que conocí se desentiendan de la atención a los alumnos con talento para la materia, los cuales muchas veces manifiestan problemas de actitud y estancamiento en su desarrollo, siendo la linealidad de las clases que le son impartidas, una de las causales principales de tales efectos.

En los años de práctica docente tuve la posibilidad de tener en mi salón de clases a varios alumnos con altas capacidades, los cuales motivaron mi acercamiento a los temas de concursos de conocimiento y ejercicios de las olimpiadas nacionales de matemáticas. La dinámica me cautivó, convirtiéndose en un ejercicio de disfrute cada vez mayor para mí y a su vez, una oportunidad de fomentar y desarrollar el talento matemático de mis educandos.

La ya mencionada sobrecarga de funciones en la docencia de hoy día competía por el reclamo de tiempo con la apertura de espacios donde pudiera realizar análisis sistemáticos que me permitieran la familiarización con las estrategias heurísticas que demandan las actividades habitualmente propuestas en estos eventos, en aras de ser más efectivo en este trabajo.

Aprovechando el marco de la maestría cursada, constituye una motivación encauzar el rumbo de mi investigación hacia el fortalecimiento de aquellos elementos que, por su especificidad, no se optimizaron con mis años de práctica y dentro de ellos, el tratamiento resolutivo a los problemas del contexto olímpico matemático constituye una pasión personal.

1.2 Antecedentes

Con el propósito de definir formalmente el problema de investigación se realizó la búsqueda de documentación portadora de teorías relevantes en torno a la idea inicial; con tal fin, se exploraron diversas fuentes. De acuerdo con el interés de nuestra investigación, la búsqueda fue orientada principalmente en las siguientes direcciones: la atención a los alumnos con talento matemático; la caracterización de los problemas que potencializan el talento matemático; estrategias de resolución de problemas; políticas de la Secretaría de Educación Pública (SEP) sobre la Resolución de Problemas (RP) y los alumnos sobresalientes.

1.2.1 Atención a los alumnos con talento matemático

Iniciamos la revisión de antecedentes para nuestra investigación considerando el panorama en torno a los alumnos con talento para las matemáticas. Primeramente, se considera importante destacar que “la conceptualización del talento nace ligada al concepto de inteligencia que tradicionalmente se evalúa a partir de medidas del cociente intelectual (CI)” (Rodríguez, 2004, p. 37). En tal sentido, el propio autor advierte que los llamados test de CI no evalúan suficientemente los diferentes tipos de inteligencia y que, por tanto, no se considera una medida suficiente para la toma de decisiones sobre las formas de intervención educativa.

Con relación a la importancia de proveer una atención efectiva a esta membresía de peculiares educandos, Artiles (2006) señala que “si no se estimulan los micro procesos intelectuales de este alumnado, ya presentes desde edades tempranas, se pierden e incluso pueden degenerar en inadaptaciones escolares y fracasos en el rendimiento” (p. 22). Lo anterior también es advertido en Feldhusen & Kroll (1991), Conejeros & Gudenschwager (2011) y Carrillo & Jiménez (2015).

Sustentando las ideas del párrafo anterior, Olga Carmona, psicóloga experta en atención psicoeducativa de niños con altas capacidades intelectuales y neuropsicología de la educación, explica que:

> Cuando la información ya es redundante para ellos, se desconectan. Y entonces el docente interpreta que está ausente o distraído (que lo está), pero es un mecanismo de defensa para no caer en el tedio y doloroso aburrimiento que les produce la repetición cuando el aprendizaje ya se ha producido. Entonces, ya no hay estímulo, no hay reto, no hay nada que hacer (Carmona, 2020).

Por otra parte, los resultados de estudios como Benavides (2008) y Castro, Benavides & Segovia (2006, 2008) nos ofrecen una clasificación de los errores cometidos por estudiantes con rendimiento superior a la media de sus compañeros al resolver un conjunto de problemas de estructura multiplicativa. Estos estudios ratifican lo referido por los autores en el párrafo anterior y evidencian que, a pesar de sus facilidades de asimilación, necesitan, al igual que sus compañeros, del apoyo de sus profesores para aprender.

Shayshon, Gal, Teslet & Ko (2014) expresan que la mayoría de los alumnos con talento matemático aprenden en escuelas regulares pasando muchas horas en clases mixtas, dejando de lado la potencialización de estos estudiantes (citado en Jiménez, 2016, p. 12).

Entre las motivaciones de Jiménez (2016) para la realización de su investigación alude hacia la falta de conocimientos especializados para la efectiva atención del talento matemático y en tal sentido refiere la superficialidad con la que se aborda la atención a la diversidad desde la formación de profesores de primaria, dando prioridad a aquellos alumnos que por distintas razones tienen logros de aprendizaje por debajo de la media. En su trabajo comparte las experiencias de una estancia profesionalizante en Valencia, España que le permitió realizar observaciones en dos institutos especializados en la atención a alumnos sobresalientes en matemáticas, enfocado en la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner, la cual considera y caracteriza la inteligencia Lógica-Matemática. Sus anexos exponen ejemplos de las actividades que se desarrollan en los centros visitados y que pudieran ser propuestas en una clase regular.

Asimismo, Acosta & Alisina (2017) revelan la falta de conocimientos del profesorado para detectar a los alumnos con altas capacidades y para llevar a cabo una intervención educativa eficaz. Conjeturan, con base en la bibliografía consultada, que se debe a que el sistema educativo tiende a homogeneizar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es de destacar que en su estudio fue considerada una muestra de 106 docentes, de los cuales el 50% tenía al menos 10 años de experiencia.

Los líderes de campo, Jaime & Gutiérrez (2017), describen y analizan diferentes factores que influyen de manera significativa en la problemática de la formación de los estudiantes con alta capacidad matemática, incluyendo los conocimientos del profesorado. De igual forma, con base en la revisión bibliográfica, hacen referencia a algunas de las características y capacidades de esta población. En la propia publicación también se informa acerca del resultado de investigaciones recientes de otros autores y de las líneas de investigación propias relativas a la problemática en las que actualmente están enfrascados. Dentro de este despertar de la investigación focalizado en el talento matemático destacan que una buena parte está relacionada con la resolución de problemas.

Lo anterior se ha podido corroborar con lo encontrado en varias investigaciones que suscriben el importante papel de la resolución de problemas (RP) como herramienta de identificación y potencialización del talento matemático. Estrategia que se fundamenta en la conocida importancia de estas estructuras matemáticas, la cual sintetizara Labarrere (1987) al postular que:

> Resulta necesario contemplar la solución de problemas no solo como una actividad cuya enseñanza posibilita a los estudiantes a enfrentarse a los problemas en la escuela y la vida fuera de ella; sino también como una vía de alcanzar niveles altos en su desarrollo intelectual en las formas del pensamiento y en su disposición general para investigar y comprender fenómenos de la realidad (p. 2).

Por ejemplo, en la investigación realizada por Díaz, Sánchez, Pomar & Fernández (2008) con el objetivo de identificar posibles talentos matemáticos partiendo de diferentes instrumentos en el nivel primario de Galicia, España, los autores mencionan que para detectar a estos alumnos es necesaria la implementación de test de CI, analizando también el rendimiento de los alumnos en la RP. Criterio que también fuera expuesto unos años antes por Niederer & Irwin (2001).

Por su parte, Castro (2008) plantea que "Los estudios sobre resolución de problemas deben aportar información y soluciones a los dos grandes retos que tiene planteada la atención a alumnos talento: la identificación y la intervención" (p. 23).

De la misma forma, Benavides & Maz-Machado (2012) destacan el papel crucial que desempeña la RP tanto en la detección como en el desarrollo y fomento del talento matemático. Estos autores refieren también que en los últimos años los estudios se centran en determinar cómo atender a estos alumnos.

En general, lo encontrado y expuesto en este apartado nos permite atribuir pertinencia a nuestra idea primaria de investigación. En este tenor, la literatura consultada previene sobre las dificultades que conlleva la falta de atención a esta población y da cuenta de la importancia de implementar estrategias de intervención educativa efectivas tanto para la identificación como para promoción del desarrollo de los alumnos con talento matemático. Igualmente se refiere la falta de conocimientos especializados por parte del profesorado para diseñar y llevar a la práctica tales estrategias, siendo la RP una de las líneas más activas dentro de la creciente investigación que se orienta hacia tal fin.

1.2.2 Problemas que potencializan el talento matemático

En cuanto a la naturaleza de los problemas idóneos para tal fin, en el trabajo de Leikin (2004) se reflexiona sobre el importante papel de los retos, dadas las características de esta población. Considera que entre las condiciones que deben cumplir los problemas propuestos es que deben ser motivadores, que no se resuelvan fácilmente con procedimientos disponibles, que requieran que el estudiante realice un intento y tener varios enfoques para obtener la solución. Asimismo, advierte sobre la relatividad de estos criterios, tomando en cuenta las experiencias que tenga el alumno puesto que, como se ha mencionado anteriormente, una tarea puede ser difícil para unos estudiantes y trivial para otros.

También podemos encontrar criterios en correspondencia en otros autores con vasta experiencia en la investigación en torno al talento matemático, como Castro, Ruiz-Hidalgo & Castro-Rodríguez (2015) quienes, con base en la bibliografía consultada, asumen posturas teóricas para ejemplificar sus ideas en torno a la formulación de retos para los alumnos talento en contenidos específicos y cómo organizar su secuencia didáctica en el aula. Entre los fundamentos relevantes que los autores exponen se encuentra el siguiente:

> Los retos matemáticos se pueden utilizar con dos finalidades en la educación de los escolares. Por un lado, los retos matemáticos se pueden utilizar para un diagnóstico inicial del talento matemático de los estudiantes y, por otro, se pueden emplear durante el proceso de intervención para enriquecer y potenciar las dotes intelectuales de los alumnos. Pero en un mismo nivel educativo lo que es un reto para un estudiante puede no serlo para otro, por lo que hay que seleccionar los retos de acuerdo con las capacidades de los estudiantes si queremos que cumplan su función de desafío intelectual (p. 88).

De la misma forma, Curra (2015) plantea que los problemas propuestos en las Olimpiadas de Matemática no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero sí constituyen un desafío para los estudiantes que los intentan resolver. Asegura que los referidos problemas se diseñan de manera que, en la búsqueda de sus soluciones, los alumnos adquieran habilidades y destrezas de gran utilidad, proceso que les permita, a la vez, redescubrir conceptos básicos.

Recientemente, Castillo (2019), profesora del Departamento de Ciencias en la prepa Tec campus Aguascalientes, México, y entrenadora para la OMM en esa ciudad, plantea que el tipo de problemas que en estos eventos se proponen, los cuales define como retos, resultan de gran utilidad para descubrir y desarrollar a los alumnos con talento matemático.

En resumen, siguiendo la línea de investigación que apuesta por la RP como estrategia de intervención educativa para atender el talento matemático de nuestras aulas, podemos ver que los problemas retadores, aquellos que suponen un desafío para el estudiante teniendo en cuenta los recursos con los que cuenta para atacarlo, constituyen la tipología de problemas que aporta las mayores ganancias para el desarrollo de sus capacidades. Así pues, consideramos que, por su propia naturaleza, las Olimpiadas Matemáticas son una fuente en la que se producen y atesoran materiales contenedores de estos problemas atractivos y desafiantes.

1.2.3 Estrategias de resolución de problemas

Considerando el importante papel que desde la investigación se le atribuye a la RP matemáticos en la detección y la potencialización del talento matemático, y con el propósito de comprender este proceso de solución en el que los alumnos recurren a diversos métodos, varias investigaciones en Matemática Educativa (ME) se han enfocado en el estudio y análisis de las estrategias utilizadas por docentes y discentes.

Con relación a tales estrategias, propiamente en el nivel secundario, Carpentier, Lindquist, Matthew & Silver (1983) destacan la fuerte creencia que manifiestan los estudiantes de que los problemas que se proponen en la escuela y que aparecen en los libros siempre conducen a una solución a través de una operación de cálculo. En este sentido, estos autores se pronunciaron en la Tercera Valoración Nacional del Progreso Educativo en Estados Unidos:

> … los estudiantes pueden no entender los problemas que resuelven. La mayor parte de los problemas rutinarios pueden ser resueltos mecánicamente aplicando un algoritmo de cálculo de rutina. En tales problemas los alumnos pueden no tener necesidad de entender la situación problema, porque ese cálculo particular es apropiado, o si la respuesta es razonable… Los errores cometidos en algunos de los problemas indican que los alumnos generalmente tratan de usar todos los números dados en una situación problémica (p. 656). [1]

En Sowder (1989) se presenta una relación de estrategias frecuentemente utilizadas por alumnos de 1º y 2º de secundaria, mismas que fueron obtenidas por el autor a partir de entrevistas realizadas a los propios adolescentes. Entre ellas destacan las siguientes: Encuentra los números y suma (o resta, o multiplica, o divide); Adivina qué operación debe ser utilizada; Mira los números y ellos te indican qué operación debes usar; Trata con todas las operaciones y selecciona la respuesta más razonable; Busca las palabras clave y ellas te dicen qué operación usar; Decide si la operación debe ser grande o pequeña según los números dados.

Otras investigaciones que se ocupan de la detección y descripción de las estrategias utilizadas en la RP por estudiantes del nivel secundario son las de Mónaco & Aguirre (1996) y Rizo & Campistrous (1999). En ambos trabajos se utiliza el estudio de caso como metodología, incluyendo test y entrevistas grabadas para la recopilación de datos. Sus resultados coinciden al aislar 6 estrategias recurrentes en el trabajo de los alumnos

[1]… Students may not understand some of the problems they do solve. Most of the routine problems can be mechanically solved by applying a routine computational algorithm. In such problems the students may have no need to understand the problem situation, why the particular computation is appropriate, or whether the answer is reasonable... The errors made on several of the problems indicate that students generally try to use all of the numbers given in a problem statement in their calculation, without regard for the relationship of either the given numbers or the resulting answers to the problem situation.

muestreados, en su descripción y en la clasificación como reflexivas e irreflexiva, atribuyendo la primera de estas categorías a la estrategia de tanteo y a la de identificar los significados de las operaciones en el texto del problema. A continuación, se exponen y describen las estrategias según lo expuesto en la segunda investigación referida:

- *Busca las palabras clave y ellas te indican qué operación utilizar:* se caracteriza por asociar el significado de las operaciones a determinadas palabras clave que han sido utilizadas muchas veces en el propio proceso docente al trabajar con problemas, como significados por "sinonimia" de las diferentes operaciones de cálculo (p. 37).
- *Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual:* consiste en reconocer ciertos indicadores en el texto que permiten asociarlo a la clase de problema en la que se usa un determinado procedimiento, digamos en el cálculo con fracciones o de porcentajes. En este caso el indicador textual es el porcentaje y el procedimiento rutinario es el de calcular por cientos. La estrategia se activa cuando el alumno reconoce el "indicador" que le recuerda el tipo de procedimiento rutinario aritmético o algebraico que está relacionado con ese indicador (pp. 37-38).
- *Tanteo:* consiste en buscar la solución al problema probando sistemáticamente con distintos valores hasta encontrar la solución; descansa en la búsqueda de soluciones por "ensayo y error". En la literatura se describen diferentes formas de utilizarla, desde la búsqueda "inteligente" de los valores con los que hay que probar, hasta el uso de valores escogidos arbitrariamente, pero de alguna manera relacionados con el problema que se quiere resolver y analizando si satisfacen o no las condiciones que se imponen. Una variante del tanteo es la comprobación exhaustiva de todos los valores posibles en el dominio de un problema dado, seleccionando aquellos que satisfacen las condiciones adicionales que se imponen a dichos valores en el contexto del problema (p. 39).
- *Operar con los números dados en el texto:* esta estrategia se asocia a la "tendencia ejecutora" descrita en la literatura y a una "creencia" aislada en esta propia investigación: Un problema siempre debe conducir a resolver operaciones. Consiste en identificar números en el problema y operar con ellos, por lo general de una manera muy irreflexiva tal como se ha manifestado en este estudio. Esta estrategia se utiliza con bastante frecuencia y en el estudio se apreció en todos los grados (p. 39).
- *Usar números cómodos (o razonables):* consiste en la adivinación del resultado infiriendo un número que razonablemente puede ser la solución y se prueba si lo es. No debe confundirse con la estrategia de tanteo, ya que no se trata de ensayo y error, sino de comprobar si el número es o no la solución. Si lo es, el problema queda resuelto; si no lo es, se abandona el problema (p. 41).
- *Identificar los significados de las operaciones en el texto del problema:* consiste en analizar la situación reflejada en el problema, identificar los significados de las operaciones presentes y utiliza precisamente esas operaciones cuyos significados corresponden a la situación descrita (p. 41).

De la misma forma, en Rizo & Campistrous (1999) los autores pudieron identificar las siguientes creencias en los alumnos, las cuales pudieran constituir obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas:

- No se puede resolver un problema si no se ha visto antes otro parecido.

- Siempre se busca la manera de dar un resultado (en los test había situaciones que no eran problemas pues carecían de pregunta, pero de todos modos los alumnos calculaban y daban una respuesta).
- Un problema siempre debe conducir a resolver operaciones.
- Los problemas siempre son de lo último que se está dando (en el sexto grado estaban estudiando el tanto por ciento y utilizaron estos procedimientos en situaciones que no tenían nada que ver con eso) (p. 42).

En lo que describe como estrategias ingeniosas para llegar a un fin, González (1997) propone otra caracterización de estas herramientas astutas del resolutor, las cuales refiere como sigue:

- *Adivinar y probar:* se toman números al azar y se va probando, hasta encontrar la solución (se prueba con varios números hasta encontrarlo). A esta estrategia también se le conoce como tanteo.
- *Usar una variable:* se utiliza cuando se desconoce un dato, apoyándose en la estrategia anterior.
- *Observar un patrón:* consiste en el análisis de un determinado modelo para ver si se observa una regularidad. Es decir, un patrón, el cual casi siempre sugiere la solución del problema.
- *Hacer una lista:* se relacionan todos los posibles resultados y el que cumpla con las exigencias planteadas en el problema, entonces se tiene la solución del problema. Aquí se utiliza la comprobación para verificar la solución.
- *Resolver un problema más simple:* se trata de resolver un problema descomponiendo el problema original en problemas sencillos de tal manera que al integrarlo puede llegar a la solución del mismo.
- *Hacer un diagrama:* esta estrategia consiste en modelar la situación mediante figuras, en la que están presentes algunas relaciones de lo que se conoce y lo que se busca.
- *Usar un razonamiento directo:* es una estrategia cuyo razonamiento está basado en la lógica, y su principio es la inducción.
- *Usar un razonamiento indirecto:* es una estrategia cuyo razonamiento está basado en la lógica, y su principio es la deducción.
- *Dibujar:* esta estrategia que se usa como un medio auxiliar y que ayuda a ilustrar la información del problema. En muchas ocasiones, permite comprender el problema y sirve de apoyo en el momento de trazar el plan de solución. Aquí se conciben los modelos analógicos (citado por Cabañas, 2000, pp. 23-24).

En una investigación donde los muestreados por medio del estudio de casos fueron profesores de secundaria en el estado de Guerrero, y cuyo propósito estuvo orientado hacia la caracterización de las estrategias utilizadas por esta población en la enseñanza de la RP aritméticos, Ocampo (2000) obtuvo como resultados: *el tanteo* y *la identificación de significados de las operaciones*, tal y como se expusieron anteriormente en los trabajos de Mónaco & Aguirre (1996) y Rizo & Campistrius (1999), además de las que siguen:

- *Modelos formales:* se dice que utilizan modelos formales, cuando el estudiante o el profesor hacen uso de modelos matemáticos ya establecidos, como ecuaciones, sistemas de ecuaciones que implican el seguimiento irrestricto de dichos modelos.

- *Problemas análogos:* consiste en que los profesores resuelven problemas prácticamente iguales a los que se propone plantear a los estudiantes. Únicamente le cambia los datos al problema planteado antes y el contexto en algunos casos, en otros casos es el mismo. El estudio de analogías que utilizan los profesores no respeta el sentido lógico.
- *Trabajo hacia atrás:* consiste en que el proceso de solución se inicia a partir de la situación final expresada en el problema. Enseguida, se pasa a la situación semifinal y así sucesivamente hasta llegar a la situación (citado por Cabañas, 2000, pp. 24-25).

Respecto a las particularidades en el desempeño de los alumnos con talento matemático como resolutores de problemas, también se han encontrado algunas investigaciones dirigidas al análisis de las estrategias que utilizan. Por ejemplo, Heinze (2005) compara las estrategias empleadas por estos alumnos con las que emplearon estudiantes de una clase regular y concluye que los talentosos reconocen con mayor rapidez las estructuras y trabajan de manera más sistemática y estructurada los problemas, emplean menos tiempo en la solución de problemas, tienen una gran habilidad para verbalizar, explicar, verificar sus soluciones y utilizar su intuición de la estructura matemática del problema con el fin de obtener la solución.

Tomando en consideración principalmente sus creaciones en competiciones Matemáticas, también Valle, Juárez & Guzmán (2007), Guinjoan, Gutiérrez, & Fortuny (2015), Morelos, Londoño & Salazar (2016) y Rodríguez, Gregori, Riveros & Aceituno (2017) han realizado estudios para conocer las estrategias resolutivas de problemas en estos educandos.

En la primera de estas investigaciones se observó que el éxito en la RP trasciende el ámbito matemático e implica, por parte del estudiante, el dominio de la lectura y la valoración crítica de textos, en particular lo que se refiere a la localización de información específica, hacer inferencias simples, captar relaciones entre componentes e identificar información implícita. La investigación consideró las respuestas dadas por 91 concursantes en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) para el Estado de Puebla.

En Guinjoan, Gutiérrez, & Fortuny (2015) los autores analizan las estrategias de 10 estudiantes de 3ro y 4to de secundaria en Cataluña, considerados expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso Pruebas Canguro, con problemas de elección múltiple y tiempo limitado para resolverlos. Sus resultados exponen que las heurísticas analizadas (probar casos y aproximar cálculos) aparecen casi por igual en los dos bloques de problemas, es decir, en los de tiempo limitado y elección múltiple de respuesta y en los de tiempo ilimitado sin la opción de elección de respuesta. En sus conclusiones resumen además lo siguiente:

> Los alumnos que obtienen mejores puntuaciones no modifican de manera significativa sus patrones de resolución ni sus actuaciones por el hecho de que los problemas ofrezcan opciones de respuesta. Son buenos resolutores de problemas con recursos apropiados y los aplican para diseñar planes de resolución que parten de la esencia del problema y no del uso de estrategias basadas en las opciones de respuesta dadas por los

> problemas. Su habilidad no reside en encontrar atajos mediante la utilización de las opciones de respuesta, sino en ser capaces de intuir y adelantar resultados que les eviten tener que resolver los problemas con todo detalle, pero basándose en enfoques de la resolución de los problemas que no varían sustancialmente de los que utilizan cuando no tienen las opciones de respuesta disponibles (p. 45).

En el trabajo de Morelos, Londoño & Salazar (2016) se focaliza la atención en la RP de olimpiadas matemáticas de estudiantes del nivel primario y 1ro - 2do de secundaria, en el estado de Coahuila. El análisis de los autores considera tres de las cuatro dimensiones que, a decir de Schoenfeld (1985), condicionan el éxito en la RP, siendo éstas: las estrategias heurísticas, dominio de conocimientos, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Entre sus resultados destacan el uso de algunas estrategias propias del nivel, mismas que fueron usadas con distintos propósitos, ejemplificando que para entender el problema construyeron figuras o realizaron trazos auxiliares, mientras que para abordarlo usaron listas, la particularización, los diagramas y el típico ensayo-error. De la misma forma, plantean que, para la mayoría de los muestreados, el problema terminó cuando hallaron una solución, por lo que las estrategias metacognitivas fueron poco empleadas, lo que no corresponde con lo expuesto por Heinze (2005), quien percibiera habilidad para la verificación de los resultados. En cuanto al dominio de conocimientos, los autores observaron que, de las cuatro áreas presentes en el instrumento (álgebra, geometría, aritmética y combinatoria), las mayores dificultades se presentaron en geometría y fue álgebra la que evidenció el mejor desempeño.

Finalmente, la investigación de Rodríguez *et al.* (2017) se desarrolló en el contexto chileno y destaca el empleo de estrategias de ensayo y error, crear una lista y buscar regularidades, apreciando la diferencia en la forma como los estudiantes talentosos las utilizan, sistematizando la información que se despliega, a medida que utilizan los distintos recursos.

> A tono con los resultados de las investigaciones anteriormente expuestas, Flores (2010), quien tiene vasta experiencia como entrenador para estas lides, plantea que la dificultad de los problemas de olimpiadas no está en el conocimiento de los temas matemáticos sino en la habilidad del alumno para organizar, controlar y usar adecuadamente esos conocimientos para hallar la solución del problema. En tal sentido, sostiene que "la mayoría se resuelve con lo que aparece en el programa de estudios de nivel secundaria" (p. 2). Hace hincapié, además, en el papel de la concentración, la paciencia y la tenencia de un sentido común bien estructurado, para la consecución del éxito. Criterio que se corresponde con lo expuesto por otra entrenadora, Castillo (2019), quien argumenta que no todos los alumnos con calificaciones sobresalientes tienen éxito en la resolución de estos problemas y atribuye la mayor importancia al ingenio y a la capacidad de razonamiento de los estudiantes.

En este apartado, se ha recopilado información de estudios centrados en las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas. Al respecto, hemos hecho diferenciación entre aquellos que analizan las producciones de alumnos regulares y los que ponen bajo foco el desempeño de estudiantes talentosos cuando resuelven problemas de competiciones matemáticas. Lo reportado en estas investigaciones nos ha permitido identificar al ensayo y error, referido también como tanteo o adivinar y probar, como la estrategia reflexiva de uso más recurrente entre los estudiantes en ambos escenarios. En general, se sostiene que el éxito de los talentosos ante los problemas de competiciones va más allá del dominio teórico del contenido, e incluso, del tipo de estrategias que implementan para atacar los problemas, ya que éstas no divergen de forma significativa de las empleadas por los alumnos de rendimiento promedio. A tal efecto, el éxito del resolutor va de la mano con su capacidad de razonamiento, el desarrollo de su ingenio, de su pensamiento lógico y con la manera sistémica y estructurada en que logra implementar las diversas estrategias de resolución de problemas.

Conjeturando respecto a las conclusiones que emanan de la comparación implícita anterior entre los desempeños de los estudiantes en ambos contextos, entendemos que las capacidades y habilidades adquiridas por los alumnos con talento matemático que propician el logro de mayores aciertos en la resolución de problemas no es un producto exclusivo de sus dotes naturales. En nuestra hipótesis los alumnos que participan en Olimpiadas Matemáticas por lo general reciben un entrenamiento previo y, en el peor de los escenarios, los alumnos se "auto entrenan", lo que se traduce en que, habitualmente, estos alumnos resuelven cientos de problemas más que los alumnos regulares. La imitación, la repetición y el mayor arsenal de analogías que propicia esta práctica, constituye un eslabón fundamental que justifica el éxito en la resolución de problemas y con él, el desarrollo del talento.

1.2.4 Políticas de la SEP sobre la RP y los alumnos sobresalientes

En el año 2017 se realizaron importantes innovaciones como parte la reorganización en el sistema educativo en los niveles básicos de enseñanza para mejorar la calidad de la educación. En el marco de esta transformación algunos aspectos del currículo anterior prevalecieron, tal es el caso de mantener como el enfoque didáctico para el estudio de las matemáticas la RP. Según la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017):

> Este enfoque implica plantear situaciones problemáticas interesantes y retadoras que inviten a los alumnos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolverlas y a formular argumentos para validar los resultados; así como también que favorezcan el empleo de distintas técnicas de resolución y el uso del lenguaje matemático para interpretar y comunicar sus ideas (p. 243).

En las normativas curriculares fijadas por este ministerio, luego de nutrirse de las consultas populares realizadas en los años 2014 y 2016, se establece que "la RP en la educación básica es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio" (SEP, 2017, p. 163).

Con relación a la atención a los alumnos con aptitudes sobresalientes, este organismo rector de la educación básica ha ido refinando su enfoque con base en las adecuaciones realizadas en la Ley General de Educación (LGE). La última versión de dicha Ley, publicada el 30 de septiembre de 2019, dedica el Capítulo VIII a definir los principios de la *Educación Inclusiva* y entre ellos se refiere a:

> *Art. 61*: La educación inclusiva se basa en la valoración de la diversidad, adaptando el sistema para responder con equidad a las características, necesidades, intereses, capacidades, habilidades y estilos de aprendizaje de todos y cada uno de los educandos (p. 22).
>
> *Art. 62:* El Estado asegurará la educación inclusiva en todos los tipos y niveles, con el fin de favorecer el aprendizaje de todos los estudiantes, con énfasis en los que están excluidos, marginados o en riesgo de estarlo, para lo cual buscará:
>
> *II:* Desarrollar al máximo la personalidad, los talentos y la creatividad de los educandos (p. 23).
>
> *Art. 65:* Para garantizar la educación inclusiva, las autoridades educativas, en el ámbito de su competencia, ofrecerán las medidas pertinentes, entre ellas:
>
> *V*: Proporcionar a los educandos con aptitudes sobresalientes la atención que requieran de acuerdo con sus capacidades, intereses y necesidades (p. 24).

Cabe resaltar que las posturas anteriores no nacieron en el marco de esta última versión de la LGE, ya que el proceso de educación inclusiva en México se inició con la modalidad de integración educativa hacia el año 1993, según afirma García-Cedillo (2018). De la misma forma, en SEP (2019) se plantea que la atención educativa de los alumnos con aptitudes sobresalientes y talentos específicos ha sido promovida por la SEP desde los años ochenta y, a partir del año 2006, con la publicación del documento Propuesta de intervención: atención educativa a alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes (SEP, 2006) y en 2009, con la reforma al Artículo 41 de la LGE, se dio un mayor impulso a la atención educativa de estos alumnos.

Por ello, la reorganización en el sistema educativo en los niveles básicos de enseñanza impulsada por la SEP (2017), vigente, abraza el principio de "educación inclusiva: todos los estudiantes independientemente de su situación social, económica o física pueden alcanzar los aprendizajes esperados" (p. 115). Con tal fin "los docentes han de fundar su práctica en la inclusión, mediante el reconocimiento y aprecio a la diversidad individual, cultural, étnica, lingüística y social como características intrínsecas y positivas del proceso de aprendizaje en el aula" (p. 122). El llamado general se expresa desde el siguiente planteamiento:

> Se deben redoblar esfuerzos para consolidar una educación inclusiva, mediante acciones que promuevan la plena participación en el sistema de educación regular, de estudiantes con discapacidad y aptitudes sobresalientes. En este esfuerzo, la formación

inicial y continua de los docentes es un elemento fundamental, pues los maestros requieren desarrollar capacidades (SEP, 2017, p. 85).

Es importante esclarecer que en la publicación de la SEP (2019) se ratifica que se entiende por alumnos con aptitudes sobresalientes "aquellos capaces de destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenecen en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social, artístico o de acción motriz" (p. 4).

La intervención educativa con estos discentes se ha centrado prioritariamente en el modelo de *enriquecimiento* del contexto educativo, a través de actividades escolares y extraescolares, pero también está concebido como modelo de atención la *aceleración* (SEP, 2019). Este último modelo referido suele ser menos utilizado debido principalmente a los trámites que hay que llevar a cabo (Jiménez, 2016).

Estos modelos se definen de forma general en la Figura 1:

Figura 1. Modelos de atención educativa para alumnos sobresalientes (tomado de SEP, 2016).

Los tipos de enriquecimiento potenciados se explican de la siguiente manera:

> *En el aula.*- Hace referencia a las diferentes estrategias utilizadas por el docente dentro del aula para modificar: la dinámica de trabajo, los espacios del aula, las técnicas y procedimientos de enseñanza, la distribución del mobiliario, el uso de materiales didácticos, la organización del tiempo. Algunas de estas estrategias pueden ser: desarrollo de proyectos, centros de interés, programas para el desarrollo emocional, y programas para el desarrollo de habilidades sociales.
>
> *En la escuela.*- Hace referencia a las diferentes estrategias utilizadas por el colectivo de docentes dentro de la escuela para modificar la organización escolar basada en la edad cronológica, por otra basada en intereses y habilidades. Algunas de estas estrategias pueden ser: talleres, concursos escolares, programas sabatinos, y programas de verano.
>
> *Fuera de la escuela.*- Hace referencia a la gestión que realiza el colectivo de docentes en conjunto las autoridades escolares, para que los alumnos reciban atención en instituciones tanto públicas como privadas, especializadas en el desarrollo de las ciencias, las artes y los deportes. Este tipo de enriquecimiento contempla habilidades e intereses específicos que no tienen fácilmente cabida dentro del plan y los programas. (SEP, 2019, p. 5).

En cuanto a los tipos de aceleración que se emplean, la SEP (2019) destaca la acreditación y promoción anticipada, mismas que implican: la admisión temprana a un nivel educativo y la omisión de un grado escolar sin cambiar de nivel educativo respectivamente.

> *Admisión temprana a un nivel educativo*: El alumno es admitido a la educación primaria o a la educación secundaria, a una edad más temprana de la establecida en el Sistema Educativo Nacional. La admisión temprana no aplica a la educación preescolar.
>
> *Omisión de un grado escolar sin cambiar de nivel educativo*: El alumno deja de cursar el grado escolar inmediato que le corresponde de acuerdo a su edad cronológica, e inicia el ciclo escolar en el grado superior siguiente (p. 9).

De la misma forma, en la actualización de la SEP (2019) se sostiene que "los alumnos con talento específico son aquellos que presentan un conjunto de competencias que los capacitan para dominar la información en un área concreta; lo esencial en el talento es que es específico, a diferencia de las aptitudes sobresalientes" (p. 4). Los tipos de talento que se priorizan desde la Subsecretaría de Educación Básica se presentan en la Figura 2.

Figura 2. Talentos priorizados por la Subsecretaría de Educación Básica (tomado de la SEP, 2016).

En la publicación de la SEP (2019a) se presenta información sobre lugares y actividades en el Estado de Zacatecas que pueden contribuir de forma complementaria a las acciones o programas que se diseñan como parte del enriquecimiento dentro de la escuela para la atención de los alumnos con aptitudes sobresalientes. Los relacionados en la publicación referida se presentan seguidamente:

Institución	**Objetivo**
Instituto Zacatecano de la Cultura "Ramón López Velarde"	Estimular y fomentar entre los niños la creatividad mediante diversas formas de exploración y expresión en el ámbito del arte y la cultura, dentro del programa de Desarrollo Cultural Infantil (Alas y Raíces).
Centro Cultural del Estado de Zacatecas	Ofrece talleres de danza jazz, clásica, contemporánea y folklórica, artes plásticas, flamenco, ballet clásico y teatro. Asimismo, se imparten cursos, conferencias, exposiciones, proyecciones y conciertos.
Casa Municipal de Cultura Zacatecas	Se imparten talleres, exposiciones, cursos, conferencias y conciertos.
Escuelas de Iniciación Artística Asociadas del Instituto Nacional de Bellas Artes	Programa escolarizado con duración de tres años, donde los niños tienen la opción de seguir estudios en teatro, música, danza y artes plásticas.
Instituto de Cultura Manuel Puente Villela	Se imparten talleres de pintura, guitarra, y ballet clásico. Además, cuenta con salas para exposiciones.
Centro Cultural Ciudadela del Arte	Ofrece diversos talleres en música, apreciación musical, lectura, poesía, fotografía, teatro, cine. También se llevan a cabo conferencias, cine, teatro, exposiciones de artes plásticas, exposiciones fotográficas, presentaciones de libros, congresos, diplomados, mesas de trabajo, capacitación de grupos diversos, eventos socioculturales.
Centro Cultural de Moyahua	Ofrece talleres en las disciplinas de danza folclórica infantil y juvenil, dibujo artístico, pintura al óleo, iniciación a la música y difusión de festivales, obras de teatro, exposiciones, entre otras.
Instituto de Música "Don José María Vanegas Rocha"	Fomentar la música en los jóvenes para que transmitan los conocimientos a las generaciones posteriores. Se imparten cursos en diferentes niveles (inicial, medio, intermedio, avanzado), así como semiescolarizado los sábados.

Universidad Autónoma de Zacatecas. Área de Arte y Cultura. Unidad Académica de Artes	Se ofrece bachillerato y formación disciplinaria previa para ingreso a los programas de licenciatura. Asimismo, existen niveles previos que ofrecen la formación necesaria para obtener el perfil de ingresos requerido.
Instituto de Cultura Física y Deporte del Estado de Zacatecas • Escuela de Iniciación Deportiva de Futbol Mineros de Calera. • Unidad Deportiva Benito Juárez.	Fomentar, construir y normar la actividad física y el deporte a través de la unión con organismos del sector público y privado, prestando atención y servicios integrales a la sociedad. Cuenta con diversos programas como Talentos Deportivos y Alto Rendimiento.
Consejo Zacatecano de Ciencia y Tecnología (COZCyT)	Desarrollar mecanismos de difusión y divulgación de la ciencia como instrumentos educativos formales y no formales que busquen cerrar brechas en el rezago educativo actual y que fomenten la comprensión e interés por la ciencia por parte de los niños y jóvenes zacatecanos.
Revista de divulgación científica del Cozcyt Eek´	Difundir y Divulgar entre la población de Zacatecas, México y el mundo la ciencia, tecnología e innovación, mediante un lenguaje sencillo, conceptos claros y temas interesantes, para que estas temáticas no parezcan ajenas al lector, sino que le sean vigentes y cercanos a su realidad.
Centro Interactivo de Ciencias ZigZag	Forma parte de una iniciativa por acercar a niños y adolescentes al interés por la ciencia y la tecnología, por medio del fomento de la creatividad y la imaginación. Para lograr lo anterior, los responsables de este museo interactivo se valen de variadas exposiciones temáticas, talleres de divulgación científica y otras tantas dinámicas de educación abierta y voluntaria.

En resumen, se entiende que es voluntad prioritaria para la SEP la capacitación de su fuerza docente para trabajar bajo el enfoque de educación inclusiva, ello incluye la optimización de sus capacidades para atender de forma eficaz a los alumnos con talentos específicos como es el caso de aquellos con talento para las matemáticas. En este sentido, la escuela mexicana promueve la profundización en el contenido matemático propio al nivel del estudiante como principal estrategia de atención en el aula y la escuela. También existen actividades diseñadas en cada estado de la república para complementar el enriquecimiento de los alumnos sobresalientes fuera de la escuela, pero, al menos en el Estado de Zacatecas, éstas se orientan fundamentalmente hacia la promoción del talento artístico, deportivo y científico; no mencionándose ninguna enfocada específicamente en el desarrollo del talento matemático.

Por otro lado, se plantea que la RP constituye el enfoque didáctico para la enseñanza de la Matemática, visto como el tratamiento sistemático desde la clase de situaciones problémicas motivadoras y desafiantes. Siendo así, nuestro proyecto constituye una alternativa en sintonía con la política educacional del país, ya que se orienta hacia la potencialización del desarrollo profesional del docente, con la mira en la inclusión educativa de los alumnos con talento matemático, para lo cual se toman las olimpiadas mexicanas de la disciplina como fuente aportadora del saber que impulsa el pretendido crecimiento profesional, a la vez que proporciona material acorde al enfoque didáctico para el estudio de la Matemática en la Educación Secundaria.

1.3 Reflexión

Los trabajos revisados nos permiten concebir un panorama sobre lo que se ha realizado, lo que se realiza actualmente y algunas consideraciones teóricas en el campo de la Matemática Educativa en torno a nuestra idea inicial de investigación. Este análisis bibliográfico ha propiciado la identificación de algunos criterios convergentes en los autores consultados, a pesar de la diversidad geográfica y de los contextos en que desarrollaron sus investigaciones.

Se han percibido criterios afines en varios trabajos (Benedicto, 2013; Castro, Ruiz-Hidalgo & Castro-Rodríguez, 2015, Jiménez, 2016; Acosta & Alisina, 2017; Jaime & Gutiérrez, 2017) que manifiestan la falta de los conocimientos deseables en los docentes para proveer una atención efectiva a estos discentes, convirtiéndose en una de las principales causas de la ausencia o el déficit de la atención en la realidad áulica.

Con relación a la identificación de alumnos en esta población, Rodríguez (2004) plantea que, a partir del surgimiento de nuevas explicaciones teóricas en torno a la inteligencia, los test de inteligencia y el rendimiento académico ya no son considerados una herramienta suficiente, y Niederer & Irwin (2001); Castro (2008); Díaz *et al.*, (2008), y Benavides & Maz-Machado (2012) señalan la RP como una estrategia importante para la identificación y potencialización del talento matemático.

Diversos autores coinciden en la caracterización de los problemas idóneos para tal fin, refiriéndolos como retos en Leikin (2004), Castro, Ruiz-Hidalgo & Castro-Rodríguez (2015) y Flores (2010), Curra (2015) y Castillo (2019), los asocian con la tipología de problemas propuestos en las Olimpiadas de Matemáticas, sosteniendo en los tres casos, que el éxito en la resolución de los mismos dependerá del grado de familiarización que se tenga con estos problemas y de la creatividad e ingenio del estudiante, ya que no demanda conocimientos de contenidos más allá de los que aparecen en los programas de estudio.

Aunque son muy diversas las estrategias que puede implementar un resolutor de problemas en la realización de la tarea, se han evidenciado en las investigaciones consultadas ciertas similitudes tanto en las heurísticas puestas en práctica por los alumnos como en la caracterización de éstas hechas por los autores. En este sentido, por ejemplo, Mónaco & Aguirre (1996), Rizo & Campistrous (1999) y Ocampo (2000) observaron que la estrategia de tanteo y la de identificar los significados de las operaciones en el texto del problema fueron las estrategias reflexivas más recurrentes. De igual forma, los estudios de Carpenter *et al*., (1983) y Rizo & Campistrous (1999) reportan el arraigo de la creencia en los discentes de que siempre conducen a una solución a través de una operación de cálculo.

Estudios con propósitos similares que han considerado el desempeño de poblaciones de alumnos con talento matemático ante los problemas, principalmente de competiciones matemáticas (Heinze, 2005; Valle, Juárez & Guzmán, 2007; Guinjoan, Gutiérrez, & Fortuny, 2015; Morelos, Londoño & Salazar, 2016; Rodríguez, Gregori, Riveros & Aceituno, 2017), afirman que las estrategias que implementan estos alumnos son las propias de su nivel educativo y que la principal diferencia respecto a los alumnos de rendimiento promedio está dada por la forma en que éstos las utilizan.

La reflexión en torno a los estudios consultados apunta a subrayar la importancia de implementar una estrategia de intervención educativa desde edades tempranas dirigida a los alumnos con talento matemático en aras de potencializar su desarrollo. Su reconocimiento alcanza a reflejarse hoy día en la política educativa de muchos países, incluyendo a México que apuesta por la educación inclusiva, tal y como se deja claro en los lineamientos SEP (2017) dirigidos a la enseñanza secundaria, en cuyo texto se alude a la plena participación en el sistema de educación regular de estudiantes con aptitudes sobresalientes.

Más allá de la intencionalidad, siendo objetivos, pudimos constatar que no abundan las propuestas concretas acerca de cómo proporcionar una atención efectiva en correspondencia con las necesidades educativas de estos educandos en su contexto escolar cotidiano, incluida la clase en su aula regular.

Uno de los enfoques que con más fuerza se promueven desde la investigación educativa para invertir en el desarrollo de las capacidades de los alumnos con rendimiento superior a la media lo constituye la resolución de problemas no rutinarios, aquellos que los reten, que desafíen su creatividad y talento. Una fuente de problemas con tales características, en opinión de varios autores y en la propia, la constituyen los propuestos en las competiciones matemáticas.

En general, las investigaciones convergen hacia la falta de conocimientos especializados en los docentes de niveles básicos de enseñanza para diseñar e implementar estrategias de atención efectivas en el contexto escolar.

Considerando la corriente de la RP para la intervención educativa, vista como refiere la SEP (2017), como meta de aprendizaje, como medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio, convendría que los docentes profundizáramos nuestros conocimientos en torno a los factores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la RP y, en particular, de aquellos que como los olímpicos, motivan y promueven el conocimiento matemático.

Los estudios confirman que el éxito de los resolutores ante esta tipología de problemas trasciende el dominio del contenido matemático, el cual no va más allá del propio del nivel educativo al que se dirige el problema, por lo que se precisa de cierto grado de familiarización con las estrategias que conllevan a su solución, a la vez que se entrena la creatividad y se desarrolla el pensamiento lógico.

Los aspectos más significativos de lo expuesto en estos trabajos se resumen en el esquema, planteado en la Figura 3:

Figura 3. Aspectos principales de los antecedentes.

A partir de la presente reflexión, planteamos a continuación el problema a atender.

1.4 Planteamiento formal del problema

1.4.1 Problemática

En la actualidad, bajo el paradigma de la *Educación para todos* que permea diversos modelos educativos, poco a poco se está tomando consciencia de la diversidad de alumnos que recibimos en nuestras aulas, con diferentes características de aprendizaje; sin embargo, los estudiantes siguen recibiendo las mismas actividades en sus clases de Matemática.

Aunque no abundan las investigaciones focalizadas en las necesidades educativas de los alumnos con altas capacidades, se ha observado que en los últimos años ha habido un incremento del reconocimiento por administrativos y profesores del apremio de poner en práctica estrategias de aula que ayuden a estos estudiantes a explotar su potencial y evitar que incurran en problemas de conducta o pérdida de interés (Carrillo & Jiménez, 2015).

En 1980, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) en su documento *An Agenda of Action* en el que afirmaba que la destreza básica más importante era la resolución de problemas, también recogía el creciente reconocimiento de la importancia del desarrollo de los estudiantes con talento en matemáticas: "Los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas" (NCTM, 1980, p. 18).

Valadez & Ávalos (2010) mencionan que se pueden identificar (los talentos) pero no se sabe cómo actuar después, ¿cómo intervenir?, ¿desde dónde intervenir?, la escuela ordinaria ¿qué tiene que hacer?

Considerando que lo distintivo en estos escolares "no es sólo la habilidad para resolver ejercicios, sino que implica otras habilidades matemáticas tales como comprender, razonar, relacionar, aplicar, abstraer de una manera significativamente mejor que la media de los otros alumnos" (Benavides & Maz-Machado, 2012, p. 177), es de entender que en una clase generalizada, donde la propuesta no los desafía, se convierten en blanco de la rutina, atentando el aburrimiento y la desmotivación descrita también desde Feldhusen & Kroll (1991), contra el propósito de alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades.

De la misma forma, trabajos como Artiles (2006), Conejeros & Gudenschwager (2011) y Carrillo & Jiménez (2015) señalan la importancia de la intervención educativa especial, que propicie los estímulos intelectuales desde las edades tempranas y de forma sistemática para evitar que al paso del tiempo su talento no se convierta en un potencial eventualmente perdido.

1.4.2 Problema

En la actualidad se percibe un incremento de consenso sobre la necesidad de atender de forma diferenciada las demandas educativas especiales de los estudiantes con talento matemático, lo cual se expresa en el crecimiento cualitativo y cuantitativo de las investigaciones que estudian a esta población. No obstante, aún resultan escasas las propuestas con estrategias concretas de cómo trabajar con estos alumnos para potencializar su talento en el día a día durante su clase regular y en general en el medio escolar.

En este sentido, una de las apuestas más recurrentes promovidas desde la investigación educativa lo constituye la resolución de problemas retadores, como los propuestos en las competiciones olímpicas. Pero, ante esta opción, muchos docentes no contamos con la capacitación / formación para atender a estudiantes con altas capacidades matemáticas.

1.4.3 Objetivo general

Este Proyecto de Desarrollo Profesional tiene como objetivo primordial:

Identificar aspectos de las olimpiadas matemáticas como *actividad* transformadora de las altas capacidades naturales intelectuales y creativas en talento matemático.

1.4.4 Objetivos particulares

Promover una visión más integradora de:

1- Los problemas propuestos en las competiciones matemáticas de la enseñanza secundaria. (Contenido).
2- El proceso de enseñanza-aprendizaje en el entrenamiento de los estudiantes olímpicos. (Contexto de enseñanza).

1.4.5 Pregunta de investigación

¿Qué aportaciones puede dar la olimpiada de matemáticas para la atención de los alumnos con aptitudes sobresalientes en la escuela?

1.4.6 Hipótesis

A partir de la revisión bibliográfica realizada, la experiencia propia como profesor de matemáticas en el nivel secundario y ocasionalmente como entrenador de estudiantes de este nivel educativo para concursos de conocimientos, se plantea como hipótesis que por la naturaleza de los problemas de las Olimpiadas de Matemáticas, éstos constituyen retos motivadores utilizables por el docente en su propuesta de actividades diferenciadas dentro de una clase regular y en la atención extra clase; es decir, pueden ser vistos como una alternativa de enriquecimiento en la atención desde la escuela a las aptitudes sobresalientes de los alumnos del nivel secundario. Con tal fin, necesitaría profundizar mis conocimientos en torno a la resolución de estos problemas y a los "escenarios" donde se desarrolla su enseñanza.

1.4.7 Justificación

La carga laboral del profesor de matemáticas en la educación básica actual puede obstaculizar la adquisición de los conocimientos necesarios para la atención efectiva de las diferencias individuales de aprendizaje de sus educandos. El éxito en esta compleja tarea requiere que el docente invierta tiempo en su autopreparación, cuestión que, en opinión de quien escribe, no es estimulada desde la concepción de los modelos educativos de muchos países, incluyendo a México, donde por lo general, ésta queda relegada a la conciencia individual del maestro porque su escala salarial obedece estrictamente al parámetro cuantitativo determinado por las horas frente a grupo y no al desempeño cualitativo en las misma.

El problema se acrecienta porque no existen programas de formación sistemáticos y eficaces para atender estas necesidades de los maestros ni desde la formación inicial, ni en la formación continua. En particular, en el caso de la atención a estudiantes con aptitudes sobresalientes en matemática, lleva en ello la peor parte, debido a que se les concede mayor prioridad a aquellos alumnos que, por múltiples razones se encuentran por debajo de la media de rendimiento académico. Tal apreciación se puede fundamentar tanto en las características de la formación del autor de la presente investigación, la cual incluyen 14 cursos en el ejercicio de la práctica dentro del sistema educativo cubano, así como en lo reportado en las investigaciones de Jiménez (2016) en México, y Jaime & Gutiérrez (2017) respecto al contexto español.

Los resultados de investigaciones como la de Benavides (2008) y Castro, Benavides & Segovia (2006, 2008) demuestran que estos estudiantes no aprenden solos, por lo que al igual que sus compañeros necesitan que sus profesores les ayuden a entender y aprender los nuevos contenidos y a corregir los errores que cometen. Para tal fin, considerando las limitaciones de tiempo y conocimientos especializados del profesorado reportados anteriormente, se hace necesario que el producto de las investigaciones en cuanto a propuestas de atención sea más pragmático.

Por tal motivo, abrazamos la importancia atribuida por los autores referidos anteriormente con relación a la RP (Niederer & Irwin, 2001; Castro, 2008; Díaz *et al.*, 2008, y Benavides & Maz-Machado, 2012), presentados como retos matemáticos (Leikin, 2004; Castro, Ruiz-Hidalgo & Castro-Rodríguez, 2015) y ejemplificados en la tipología de problemas olímpicos (Flores, 2010, Curra, 2015 y Castillo, 2019), para desarrollar el ingenio y la capacidad de razonamiento de los estudiantes. Desde esta perspectiva, se entiende como retos matemáticos lo expuesto por Barbeau y Taylor (2009) "una cuestión planteada deliberadamente para atraer a un estudiante a que intente obtener una respuesta, ampliando al mismo tiempo su comprensión y conocimiento de un tema" (citado en Castro, Ruiz-Hidalgo y Castro-Rodríguez, 2015, p. 87).

De igual forma, coincidimos con Curra (2015) cuando plantea que:

> Se quiere que las olimpiadas sean un elemento dinamizador de la didáctica del profesorado y del avance en la enseñanza de la Matemática, de esta forma, su verdadero éxito se apreciará en la medida que el claustro involucrado incorpore a sus clases, de modo habitual, la resolución de problemas y aplicaciones prácticas no comprendidos en los programas (p. 6).

Para tal fin, necesito capacitarme, profundizando mis conocimientos en torno a la resolución de problemas de tipo olímpico. El pretendido desarrollo profesional en el campo al que se aspira en este proyecto beneficiaría en primer lugar a mis futuras generaciones de estudiantes y en particular a aquellos con aptitudes excepcionales para el aprendizaje de la matemática, dado que, con el tratamiento sistemático y consciente de estos problemas en mi práctica de instrucción contribuiría a potencializar sus capacidades. De igual forma, los conocimientos y la recopilación teórica que emanen de este proyecto pudieran ser compartidos entre pares, tanto como material bibliográfico como en las futuras comunidades de práctica a las que me integre.

CAPÍTULO 2. REFERENTES TEÓRICOS

Una vez planteado el problema por abordar, el siguiente paso consiste en sustentar teóricamente el estudio. Con tal finalidad, en este capítulo se presentan los aspectos teóricos con los que se identifica su autor para definir la perspectiva con relación a las variables involucradas en el problema de investigación, así como las formas en que pueden ser analizados e interpretados los datos. En general, este constructo teórico constituye la guía del proyecto. Con base en lo anterior y, considerando los objetivos de este Proyecto de Desarrollo Profesional, el enfoque teórico se presenta desde tres apartados con propósitos y sustentos contemplativos independientes.

En el primero de estos apartados se presenta la *Caracterización de superdotación y talento* asumida en el Proyecto, abrazando las ideas de Gagné y su Modelo Diferenciador de Dotación y Talento (MDDT). La presentación de los principios que conforman la estructura básica de este modelo nos permite entender las complejas interacciones entre los componentes causales del desarrollo del talento matemático y, consecuentemente, el reconocimiento de categorías para el análisis en correspondencia con nuestra idea primaria y objetivos de la investigación.

Dado que la finalidad rectora de este Proyecto es la promoción de los conocimientos del profesor en aras de su capacitación para proveer una atención efectiva a los alumnos con aptitudes sobresalientes en matemáticas, considerando además el enfoque didáctico para la enseñanza de esta disciplina que promueve la SEP (2017) y varios de los estudios consultados en nuestra revisión de antecedentes, tomamos el enfoque teórico de *Resolución de Problemas* para definir posturas en cuanto al significado de "talento matemático" desde el punto de vista del desempeño práctico del alumno. En este sentido, asumimos como referencias principales las experiencias de líderes en el campo, como George Pólya y Alan Schoenfeld, incorporando además su visión del proceso de enseñanza.

Finalmente, se presentan las *Competiciones matemáticas en México para alumnos de la Educación Secundaria* para familiarizar al lector no especializado a través de la síntesis de aspectos significativos de los certámenes con mayor relevancia a nivel de país de acuerdo con su capacidad de convocatoria y antigüedad. En este apartado se pretende, prioritariamente, rescatar concepciones y propósitos generales de las Olimpiadas Matemáticas que constituyen argumentos justificativos de su adecuación para el desarrollo del talento matemático.

2.1 Caracterización de superdotación y talento

En la historia de la humanidad muchas personalidades con cualidades extraordinarias han dejado una huella indeleble que sigue teniendo influencia sobre las concepciones y la forma de vida de las generaciones que le han sucedido. En los estudios que intentan explicar la "genialidad" alcanzada por estos personajes en los campos que inmortalizaron su obra de vida se reconoce el valor de sus características cognoscitivas, afectivas y sociales.

La visión de la SEP sobre los modelos explicativos de la superdotación se apoya en una caracterización que tiene en cuenta los distintos enfoques teóricos: modelos de capacidades, modelos orientados al rendimiento, modelos cognitivos y modelos socioculturales. En particular, los modelos de atención a los alumnos con aptitudes sobresalientes en México que se mencionan en el epígrafe 1.2.4 (enriquecimiento y aceleración) se acogen a la visión sociocultural bajo el precepto de que "se adapta mejor a las condiciones educativas de nuestro país, ya que considera elementos significativos como la familia, el entorno educativo, social y cultural del alumno y sus características específicas" (SEP, 2006, p. 50).

Los modelos socioculturales incorporan el valor de los contextos sociales a la hora de definir la superdotación. Para los principales exponentes de estos modelos (según la SEP: Mönks, Tanenbaum y Gagné) ésta puede variar como resultado de la acción del sistema educativo y la estructura social, es decir, consideran que los superdotados son también un producto de la sociedad en la que viven. La SEP (2006) con base en las aportaciones de estos autores los describe de la siguiente forma:

> *Modelos socioculturales*: la superdotación y el talento sólo pueden desarrollarse por medio del intercambio favorable de los factores individuales y sociales, (…), los contextos condicionan las necesidades y resultados del comportamiento humano y determinan qué tipos de productos son considerados valiosos y dignos de un reconocimiento especial (p. 50).

Este Proyecto de Desarrollo Profesional se adhiere a la explicación sociocultural de la superdotación y el talento, específicamente, a la línea de pensamiento de Francoys Gagné con su Modelo Diferenciador de Dotación y Talento (MDDT), ya que se considera que es una valiosa herramienta analítica que permite clasificar la información en categorías causales de cualquier talento humano, incluido el talento matemático. Para mostrar la estructura básica de este modelo que permite entender las olimpiadas matemáticas mexicanas y específicamente su objeto fundamental, la resolución de problemas, como una *actividad* pertinente para potencializar el talento matemático se recurre a los últimos trabajos publicados por su creador.

Una panorámica general de la estructura básica del modelo se puede encontrar en Gagné (2000), donde se explica y ejemplifica lo que el autor denomina "la coreografía compleja del talento" (p. 67). En dicha investigación se marca claramente la diferencia entre la conceptualización de superdotación y el talento. Con el primero, se refiere a las aptitudes naturales del individuo, "la posesión y el uso de *capacidades naturales*, sin haber recibido una formación sistemática se manifiestan de manera espontánea en al menos un dominio de aptitud" (p. 67), que mediante los *procesos de desarrollo* tales como: el aprendizaje y la práctica informal y formal, se convierten en *talentos* expresados en distintos campos particulares de la actividad humana. La transformación progresiva de las aptitudes naturales es mediada por *catalizadores intrapersonales* y *ambientales* que facilitan o entorpecen su proceso de desarrollo. Además, considera la suerte o casualidad como un elemento externo influyente en los dominios de aptitud, en los catalizadores y en los procesos de desarrollo.

Desde la perspectiva del modelo, los cinco componentes destacados en el párrafo anterior abarcan todas las variables relevantes para el análisis del desarrollo del talento y, vistos como categorías causales, pudieran ayudar a entender mejor la interacción dinámica durante ese largo período desde el momento en que los individuos deciden desarrollar sistemáticamente un conjunto de habilidades en un campo particular de la actividad humana hasta lograr cierto nivel de excelencia dentro de ese campo (Gagné, 2000). Seguidamente, se profundiza en la visión teórica del modelo con relación a cada uno de los cinco componentes (los primeros cuatro categorías causales del talento).

Capacidades naturales:

El MDDT, en la versión publicada en Gagné (2010) y difundida como "MDDT 2.0", se define como "la posesión y uso de capacidades naturales destacadas, llamadas aptitudes, en al menos un área o dominio de capacidad, en un grado que sitúa al individuo dentro del 10% superior de sus pares de edad" (p. 64). De la misma forma, propone seis dominios de actitud para agrupar las capacidades naturales, cuatro de ellos son mentales: intelectual, creativo, social, perceptual; y los otros dos dominios aúnan las habilidades físicas: capacidades musculares involucradas en los movimientos físicos amplios, y capacidades asociadas con el control y los reflejos motores finos. Desde la teoría presentada en Gagné (2000) estas habilidades naturales o dones actúan como materia prima o elementos constitutivos de los talentos. Su desarrollo y nivel de expresión está parcialmente controlado por la dotación genética del individuo, pero la estimulación ambiental juega también un papel importante a través del uso cotidiano y del entrenamiento informal. Tales aptitudes pueden observarse en muchas de las tareas que un estudiante enfrenta en el ambiente escolar, siendo la facilidad o rapidez en los procesos de aprendizaje un reflejo de la presencia de un talento o disposición natural hacia ciertas áreas.

Proceso de desarrollo:

Constituye "la transformación progresiva de dones en talentos" (Gagné, 2013). Se manifiesta cuando el individuo participa sistemáticamente en un programa de aprendizaje y práctica (Gagné, 2000), también referido como programa sistemático de desarrollo del talento en Gagné (2010). Las *actividades* de aprendizaje y práctica para el desarrollo de los talentos se encaminan a un *contenido* específico o currículo y tienen lugar dentro de un contexto específico de aprendizaje o *formato*. El contexto de aprendizaje puede ser inestructurado (aprendizaje autodidacta) o estructurado (colegio, conservatorio, club deportivo) (Gagné, 2010).

Además de las actividades, constituyen subcomponentes de esta categoría en el modelo la *inversión* y el *progreso*. El primero muestra cuantitativamente la intensidad del proceso de desarrollo de los talentos en términos del *tiempo, dinero* o *energía* psicológica. Estos índices pueden expresarse a través de curvas longitudinales (evolución por semanas, meses, años) para mostrar aumento o disminución a lo largo del tiempo; también pueden ilustrar diferencias entre varios talentos en formación (Gagné, 2010).

El progreso se expresa en términos de niveles de competencia sucesivos o *etapas* (novato, avanzado, competente, experto), teniendo como principal forma de representación cuantitativa el *ritmo*, es decir, la rapidez del progreso del talento en desarrollo comparado con la de sus pares hasta alcanzar su rendimiento máximo, así como de ritmo de desarrollo desde el acceso inicial hasta su desempeño máximo (Gagné, 2010). El progreso puede verse influenciado por eventos significativos (*hitos*) de índole personal sean positivos o negativos como pueden ser la pérdida de un familiar cercano, el ganar un premio o una beca importante, la ocurrencia de un accidente, entre otros (Gagné, 2013).

Catalizadores

El proceso de desarrollo "es facilitado (u obstaculizado) por la acción de dos tipos de catalizadores intrapersonales y medioambientales" (Gagné, 2000, p. 69). Su presencia o ausencia puede ejercer influencias tanto positivas como negativas, y son propensos a tener transformaciones permanentes a través de su implicación en el proceso de desarrollo. El estudio longitudinal del talento de una persona podría excluir los que considere causalmente irrelevante para la emergencia de los desempeños destacados del talento en formación (Gagné, 2010).

Catalizadores intrapersonales

Los catalizadores intrapersonales se dividen en factores *físicos* y *mentales* o psicológicos, todos ellos influidos parcialmente por la herencia genética (Gagné, 2013). Los primeros incluyen apariencia, género, rasgos étnicos o raciales, discapacidades, enfermedades crónicas, etc. Los segundos refieren una lista prácticamente infinita de cualidades descriptivas determinadas por las predisposiciones hereditarias para comportarse de un determinado modo (temperamento), así como los estilos de conducta adquiridos (personalidad). En este componente se incluye también el manejo de los objetivos, dicho de otra forma, qué tan altas son las expectativas del talento en formación. En este sentido el foco se centra en tres subcomponentes: la *conciencia*, la *motivación* y la *voluntad* (Gagné, 2010).

Los catalizadores ambientales

Su influencia directa sobre los procesos de desarrollo es limitada ya que la mayor parte pasa a través del filtro dado por las necesidades, intereses o rasgos de personalidad del individuo (catalizadores intrapersonales). Además, se plantea que estudios sobre resiliencia humana han revelado que una sólida fuerza de voluntad minimiza los obstáculos (Gagné, 2010).

Los catalizadores ambientales se dividen en tres subcomponentes: el *medio*, los *individuos* y los *servicios*. En el primero, se incluyen las influencias ambientales físicas como el clima, residencia rural o urbana; las sociales o culturales y las económicas. El segundo contempla la influencia de personas significativas en el entorno cercano del talento en formación como son los casos de familiares, profesores, entrenadores y compañeros. En el subcomponente de los servicios se incluye toda forma de servicios y programas de desarrollo de talentos. En el caso de México, éstos se expresan a través de los modelos de atención de enriquecimiento y aceleración descritos en el epígrafe 1.2.4 de este documento.

Talentos

Según se refiere en Gagné (2000), los talentos emergen progresivamente de la transformación de estas altas aptitudes en habilidades bien desarrolladas sistemáticamente en un campo particular de la actividad o la actuación humana. En forma sintetizada, Gagné (2013) plantea que "los talentos representan logros sobresalientes o resultados del proceso de desarrollo del talento". De manera más precisa se presenta este componente en Gagné (2010) como:

> El dominio destacado de capacidades sistemáticamente desarrolladas, llamadas competencias (conocimientos y destrezas), en al menos un campo de la actividad humana, en un grado que sitúa al individuo dentro del 10% superior de sus pares de edad que están o han estado activos en ese campo (p. 64).

Los campos de actividad pueden ser extremadamente diversos, los seis tipos básicos son el técnico, ciencias y tecnología, artes, servicio social, administración/ventas y operaciones comerciales; éstos a su vez contienen 26 grupos ocupacionales más específicos. También se incorporan tres subcomponentes adicionales que complementan el sistema básico de lo que se denomina "Mundo del Trabajo", conformadas por las asignaturas académicas, juegos y deportes (Gagné 2010).

Tabla 1.

Niveles de dotación y talento dentro del MDDT (Tomado de Gagné, s. f.).

Niveles	Etiquetas	Prevalencia	CI	D.S.
5	Extremadamente	1:100.000	165	+4.3
4	Excepcionalmente	1:10.000	155	+3.7
3	Altamente (super)	1:1.000	145	+3.0
2	Moderadamente	1:100	135	+2.3
1	Levemente	1:10	120	+1.3

Según Gagné (2010) la denominación de talentosos se aplica a los individuos que pertenecen al 10% superior (aproximadamente 1.3 desviación estándar por encima de la media en Gagné, 2000) respecto al grupo de referencia correspondiente en términos del desempeño. Pero, como las personas talentosas en un dominio no son necesariamente las mismas que tienen talento en algún otro, la cantidad total supera el 10%. Dentro de este 10% hay cinco niveles jerárquicos cuyas categorías con su correspondiente prevalencia se muestran en la Tabla 1.

En general, el MDDT enfatiza en el carácter esencial pero no suficiente de cada uno de los componentes como contribuyentes al talento excepcional (Gagné, 2000), siendo la compleja coreografía (interacciones en el tiempo) entre los cuatro componentes causales única para cada individuo. La estructura general del modelo se presenta en la siguiente figura:

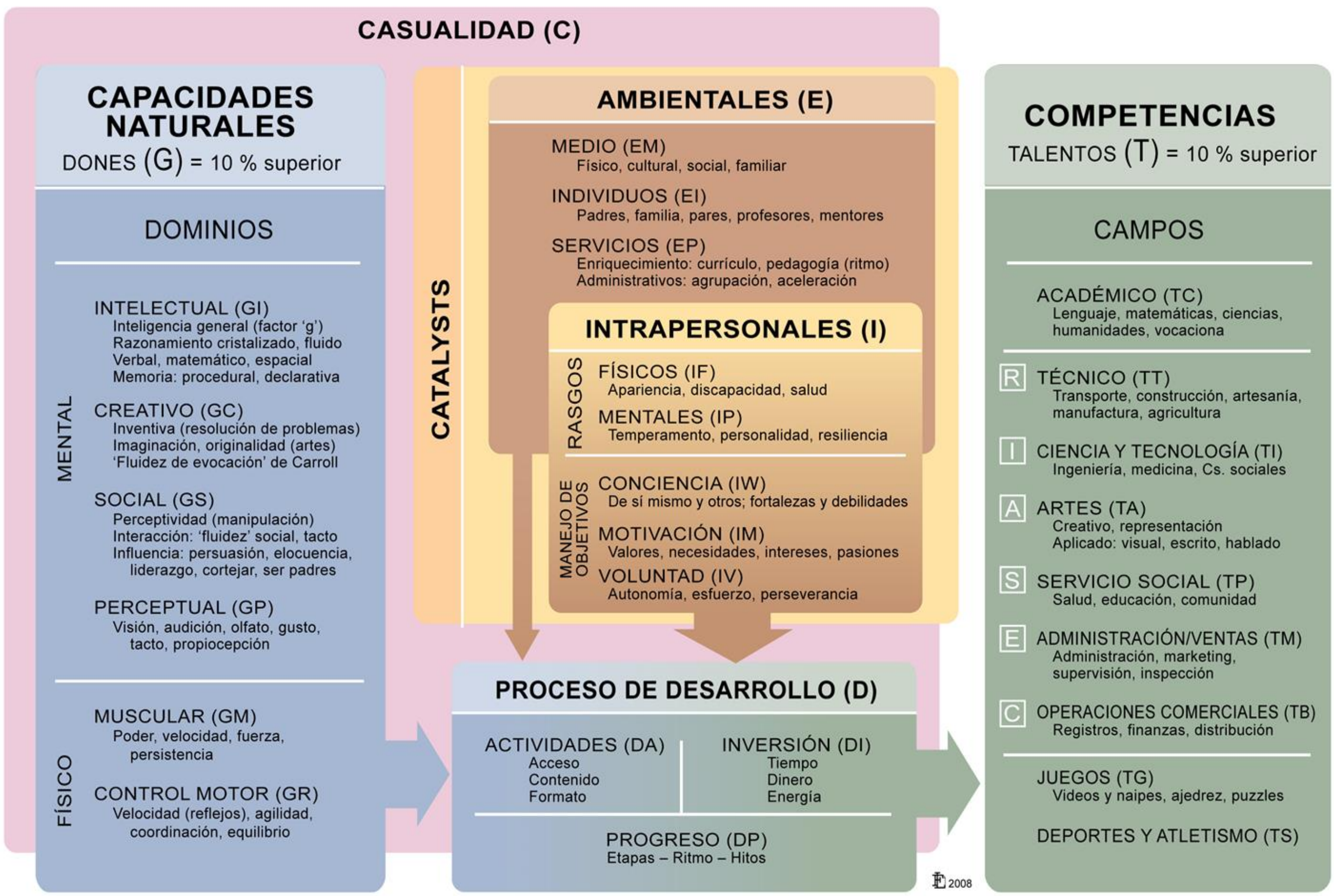


Figura 4. Modelo Diferenciador de Dotación y Talento (Tomado de Gagné, s. f.)

2.2 Resolución de problemas

Paul Halmos, uno de los matemáticos prominentes del siglo XX, escribió: "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones" (Halmos, 1980, p. 519).

En el mismo sentido se pronunció el insigne matemático y educador George Pólya afirmando que entender la matemática significa ser capaz de hacer matemática, lo que entiende como ser capaz de resolver problemas matemáticos (Pólya, 1989).

La NCTM (2000) plantea que:

> La resolución de problemas exitosa requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un automonitoreo efectivo, y una disposición productiva a plantear y resolver problemas. La enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesores, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y aptitudes en sus estudiantes. […] La enseñanza en sí misma es una actividad de resolución de problemas (citado en Barrera *et al.*, 2008, p. 137).

La perspectiva teórica que se adopta para enfocar el proceso de la RP y su enseñanza en este Proyecto de Desarrollo Profesional, al cual da pertinencia lo citado en (NCTM, 2000), parte de considerar con base en las ideas anteriores, a un "*talento matemático*" como un "*especialista en resolución de problemas*".

En correspondencia con la naturaleza de este proyecto, se ha considerado pertinente por su carácter relativo, en función del reto que supone, asumir las ideas de Schoenfeld para definir el término problema. En la visión del autor, un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea, constituyendo una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla (Schoenfeld, 1985). En este tenor, refiriéndose a la demanda cognitiva de las actividades que se proponen para la enseñanza también subraya que:

> Los estudiantes aprenden mejor cuando son desafiados de maneras que brindan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas cuya dificultad varía de moderadas a exigentes. El nivel de desafío debe conducir a lo que se ha llamado lucha productiva.
>
> Si a los estudiantes se les da un trabajo que es demasiado fácil, hay poco que puedan aprender, y es probable que se aburran o se sientan frustrados. Si a los estudiantes se les da un trabajo que está muy lejos de su comprensión actual y no pueden ver caminos para progresar, entonces no hay camino hacia el aprendizaje; también es probable que se aburran o se sientan frustrados[2] (Schoenfeld, 2016, p. 5).

---

[2] Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called productive struggle.

If students are given work that is too easy, there is little for them to learn – and, they are likely to be bored or frustrated. If students are given work that is too distant from their current understandings and they can see no pathways to progress, then there is no pathway to learning; they are likely to be bored or frustrated as well.

En lo anterior se fundamenta la elección del *contenido* en la presente investigación dadas las características de las tareas que se proponen en el marco de las olimpiadas matemáticas y las de la población a la que se pone bajo foco.

En general, las ideas anteriores y otras aportaciones complementarias sobre el proceso de enseñanza de dos de los autores clásicos en el campo: George Pólya, y el también matemático y profesor Alan Schoenfeld, conforman nuestra lente interpretativa para el análisis de los datos y el paradigma de lo deseable.

En sus obras, ambos autores presentan diversos métodos heurísticos que se basan en comunicar sus propias experiencias como matemáticos resolviendo problemas. Fundamentan que las estrategias y preguntas de un experto en la RP podrían ser modeladas por los profesores en las aulas, es decir, que, bajo la guía del profesor, los estudiantes podrían interiorizar el proceso de cómo un matemático dialoga consigo mismo durante el proceso de solución y utilizarlo de manera natural sin ayuda externa, lo cual constituye el paradigma en el que descansa su teoría.

Desde que Pólya, autor del clásico "Cómo plantear y resolver problemas" cuya primera edición apareció en 1945, hiciera evidente la importancia de resolver problemas como medio de crear conocimiento en matemáticas y sus posibilidades en el aprendizaje de esta disciplina, ha ayudado a muchos profesores a redescubrir el sentido de la educación matemática. Para este destacado profesor, la RP puede ser vista como un arte que utiliza como medio la heurística moderna, una forma de descubrimiento, y considera la heurística como una forma de investigar nuevos problemas (Pólya, 1989), entendiendo que las heurísticas modernas "tratan de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles para este proceso" (p. 102).

Atendiendo a lo expuesto por Schoenfeld (1985) puede entenderse que, aunque existen métodos heurísticos, estrategias y técnicas que los resolutores de problemas usan una y otra vez, no son recetas, sino orientaciones que pueden ayudar a obtener una solución.

Como se evidenció anteriormente, la teoría parte de un factor subjetivo muy importante en el enfoque metodológico que determina el abordaje de los problemas, se requiere que los alumnos imiten al matemático, que vean cómo este piensa, cómo ataca un problema, cómo conjetura, cómo busca ejemplos y contraejemplos.

La postura sobre la perspectiva metodológica para el abordaje de los problemas en aras de crear el conocimiento matemático expuesta en las publicaciones de estos autores no es divergente, más bien Schoenfeld enriquece y complementa el legado de Pólya. Para este último la clave radica en el empleo de heurísticas determinadas para fases que se identifican en el tránsito hacia la solución. Así, en Pólya (1989), se determinan cuatro etapas asociando a cada una de ellas una serie de preguntas y sugerencias, que cuando son aplicadas conscientemente, ayudan a resolver el problema. Estas etapas y algunas de las preguntas reflexivas para encausar las mismas se relacionan a continuación:

1. *Comprensión del problema*
   Preguntas y sugerencias: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?
2. *Concepción de un plan*
   Preguntas y sugerencias: ¿Se ha encontrado un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado con algo diferente? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce alguna herramienta que pueda ser útil? Si conoce un problema similar ¿podría utilizarlo? ¿Podría emplear su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? Si no puede resolver el problema trate de resolver algún otro similar. ¿Puede resolver una parte del problema? Considere una parte del problema y analice en qué forma puede variar la incógnita. ¿Puede cambiar la incógnita para acercarse un poco a la solución? ¿Ha empleado todos los datos?
3. *Ejecución del plan*
   Preguntas y sugerencias: Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos. ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?
4. *Visión retrospectiva*
   Preguntas y sugerencias: ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema? (p. 19).

En la primera de estas etapas Pólya hace énfasis en que es prácticamente imposible resolver un problema si no hemos comprendido el enunciado y que si se llega al resultado de esta forma es por pura casualidad. En tal sentido refiere la tendencia operatoria e irreflexiva que frecuentemente se observa en las aulas y que fuera descrita en reportes como Carpenter, Lindquist, Matthew & Silver (1983) y Rizo & Campistrous (1999). Esta visión de Pólya fue compartida por Schoenfeld (1985) en lo que llamó "entendimiento", refiriendo una de las acciones que involucran el control, con la cual señala la importancia de tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo. Propone entre sus preguntas guía para reflexionar: "¿qué se pide?, ¿qué se tiene?, ¿a dónde se quiere llegar?" (Schoenfeld, 1985, citado en Santos, 1992, p. 3).

La segunda etapa tiene que ver con la estrategia, donde se concibe de manera general un plan para atacar el problema, pero aún no se entra en precisiones técnicas. Las preguntas que se proponen para esta etapa tratan de traducir el problema a un lenguaje conocido, es decir, se quiere que el ataque al problema se produzca en una zona conocida por el que está enfrentando el problema. Schoenfeld (1985) también contempla esta etapa dentro de sus acciones de control, a la cual hace referencia como "hacer un diseño", en la que sugiere la consideración de varias formas posibles de solución antes de seleccionar una específica.

La tercera etapa corresponde a la táctica, en ella se ponen de manifiesto todos los recursos con los que se cuente para poder poner en práctica la estrategia. El éxito de esta etapa depende en gran medida de si se fue capaz de establecer un plan eficaz, unido a los conocimientos y al entrenamiento que se tenga, lo que es considerado por Schoenfeld (1985) como otro de los factores que determinan el éxito en la resolución de problemas, los recursos, con los cuáles refiere todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. Es en esta etapa donde se constata la pertinencia del plan concebido para resolver el problema y entre las acciones de control que propone Schoenfeld con tal fin refiere monitorear el proceso, decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo en el momento oportuno.

La cuarta etapa constituye una mirada hacia atrás (de igual forma señalada como la última de las estrategias de control propuesta Schoenfeld, 1985, a la que llama "Revisar el proceso de resolución"). Su importancia es resaltada por Pólya (1989) con el fundamento de que comprobar lo realizado permite la subsanación de errores en el trabajo y también que este análisis puede conducir a la obtención de nuevos resultados que pudieran generalizar o consolidar tanto el camino como la solución encontrada. También en ello se encuentra coincidencia con Schoenfeld (1989) cuando plantea que los estudiantes deben reconocer que "encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el producto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema" (citado en Santos, 1992, p. 22).

A pesar de las concurrencias en muchas de las ideas enarboladas por estas personalidades de la Matemática Educativa, algunas destacadas anteriormente, Barrantes (2006) asegura que "el interés de Schoenfeld nace al averiguar que la gente que se dedicaba a trabajar con personas que va a resolver problemas (en olimpiadas) no usaba las ideas de Pólya, y, más bien, decían que no funcionaba" (p. 1). Al respecto, producto de años de experimentación desde fines de los 70´s y durante el primer lustro de los 80´s, Schoenfeld (1985) concluye que:

> Cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas, de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores (citado en Barrantes, 2006, p. 2).

Son estos otros factores a considerar los que complementan el trabajo de Pólya, algunos de los cuales se han venido aludiendo desde párrafos anteriores y a continuación se presentan de forma sintética:

1. *Recursos cognitivos*, con lo cual se refieren a los conocimientos matemáticos generales, como conceptos, resultados y algoritmos, (conocimientos previos).
2. *Heurísticas*, refiriendo a las estrategias y técnicas que conocemos y sepamos aplicarlas para progresar en situaciones dificultosas.
3. *Control y metacognición*, visto como la capacidad de utilizar lo que sabemos para cumplir un determinado objetivo, es decir, aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.
4. *Creencias*, con lo que se refiere a lo que se cree y lo que se opina sobre la resolución de problemas y sobre la matemática en general (Barrantes, 2006).

En la concepción de Schoenfeld (1985) se subraya que el primer factor es indiscutible, si a la hora de resolver un determinado problema el individuo no cuenta con las herramientas necesarias para encontrar la solución, entonces, no va a funcionar. Considera absolutamente necesario apoyarse en algunas técnicas y estrategias que ayuden a atacar el problema. En tal sentido, fundamenta además que cuando se tratan de tipologías de problemas que poseen varios caminos a tomar con los cuales no se está familiarizado, se necesita mucho más que conocimientos y estrategias, se ocupa algo que guíe la utilización de estos recursos, que indique en determinados momentos qué es lo más aconsejable, o si en un momento determinado se debe abandonar un camino o por el contrario insistir más en él y no abandonarlo por muy ilógico que parezca, a esto es lo que Schoenfeld se refiere como *control*. Dada su importancia, propone algunas actividades que pueden desarrollar las habilidades para el control de las personas que aprenden a resolver problemas:

- Tomar videos durante las actividades de resolución de problemas. El video luego se pasa a los estudiantes para que vean qué es lo que han hecho, porque, en general, resuelven un problema y, al final, se les olvida qué fue lo que hicieron.
- El docente debe tomar las equivocaciones como modelo; es decir, poner un problema en la pizarra, tratar de resolverlo (aun cuando sepa la solución), escoger una estrategia que sabe que no va a llevar a un término y ver en qué momento se decide que esa no lleva a ninguna parte y se opta por otra. El profesor resuelve problemas como modelo, y, posteriormente, debe discutir las soluciones con todo el grupo para que cada uno aporte ideas.
- Es muy importante cerciorarse si los estudiantes entienden el vocabulario utilizado en la redacción de un ejercicio o de un problema; se debe hacer preguntas orientadoras y evaluar métodos sugeridos por los mismos estudiantes.
- También propone que se resuelvan problemas en pequeños grupos, en un ambiente de trabajo colaborativo; esto para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con alguna materia, y, así, que cada uno pueda aprender sobre la forma en que los demás controlan su trabajo (citado en Barrantes, 2006, p. 4).

Finalmente, se considera conveniente también, dados los objetivos del docente inmerso en el presente proyecto de desarrollo profesional, incorporar a la teoría hasta aquí expuesta el "Decálogo del Profesor de Matemáticas" enunciado por Pólya (1962), también conocido como "Los diez mandamientos" en Arguedas (2012), para quienes enseñan la materia, en cuyo texto refiere:

1. *Demuestre interés por su materia*. Si el profesor se aburre, toda la clase se aburrirá.
2. *Domine su materia.* Si un tema no le interesa personalmente, no lo enseñe, porque no será capaz de enseñarlo adecuadamente. El interés es una condición necesaria, pero no suficiente. Cualesquiera que sean los métodos pedagógicos utilizados, no conseguirás explicar algo claramente a tus estudiantes si antes no lo has comprendido perfectamente. De ahí este segundo mandamiento. El interés es el primero, porque, con algunos conocimientos junto con una falta de interés, se puede uno convertir en un profesor excepcionalmente malo.
3. *Sea instruido en las vías del conocimiento: el mejor medio para aprender algo es descubrirlo por sí mismo*. Se puede obtener gran provecho de la lectura de un buen libro o de la

audición de una buena conferencia sobre la psicología del acto de aprender. Pero leer y escuchar no son absolutamente necesarios y en todo caso no son suficientes: hay que conocer las vías del conocimiento, estar familiarizados con el proceso que conduce de la experiencia al saber, gracias a la experiencia de vuestros propios estudios y a la observación de vuestros estudiantes (p. 4).

Este tercer "mandamiento" es corroborado por Schoenfeld con su propia vivencia en el aprendizaje de las estrategias para resolver problemas cuando afirma "yo he asimilado por accidente, en virtud de haber resuelto miles de problemas durante mi carrera (esto es, yo he sido ´entrenado´ por la disciplina, recogiendo pedazos y piezas del pensamiento matemático como fui desarrollando)" (Schoenfeld, 1987, citado en Santos, 1992, p. 18).

4. *Trate de leer en el rostro de sus estudiantes, intente adivinar sus esperanzas y sus dificultades; póngase en su lugar*. Aunque uno se interese por el tema, lo conozca bien, se comprendan los procesos de adquisición de los conocimientos, se puede ser un mal profesor. Es raro, pero muchos hemos conocido profesores que, siendo perfectamente competentes, no eran capaces de establecer contacto con su clase. Ya que la enseñanza del uno debe acompañarse por el aprendizaje del otro, tiene que existir un contacto entre el profesor y el estudiante. La reacción del estudiante a tu enseñanza depende de su pasado, de sus perspectivas y de sus intereses. Por lo tanto, téngase en consideración lo que saben y lo que no saben; lo que les gustaría saber y lo que no les importa; lo que deben conocer y lo que no importa que no sepan (Pólya, 1962, citado por Arguedas, 2012, p. 4).

Los elementos en los que enfatiza Pólya en este punto también son factores considerados dentro de la visión de Schoenfeld para alcanzar el éxito, lo que saben y lo que no saben forma parte de los recursos (conocimientos previos), y lo que les gustaría saber y lo que no les importa; lo que deben conocer y lo que no importa que no sepan, se incluyen y determinan en función de las creencias del alumno, del profesor y de la sociedad.

5. *No les dé únicamente "saber", sino "saber hacer", aptitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico*. El conocimiento consiste, parte en "información" y parte en "saber hacer". El saber hacer es el talento, es la habilidad en hacer uso de la información para un fin determinado; se puede describir como un conjunto de aptitudes intelectuales; es la capacidad para trabajar metódicamente. En Matemáticas, el "saber hacer" se traduce en una aptitud para resolver problemas, construir demostraciones, examinar con espíritu crítico soluciones y pruebas. Por eso, en Matemáticas, la manera como se enseña es tan importante como lo que se enseña.
6. *Enseñarles a conjeturar*. Primero imaginar, después probar. Así es como precede el descubrimiento, en la mayor parte de los casos. El profesor de Matemáticas tiene excelentes ocasiones para mostrar el papel de la conjetura en el campo del descubrimiento y hacer así que los estudiantes adquieran una actitud intelectual fundamental. La conjetura razonable debe estar fundada en la utilización juiciosa de la evidencia inductiva y de la analogía, y encierra todos los conocimientos plausibles que pueden intervenir en el método científico (Pólya, 1962, citado por Arguedas, 2012, p. 4).

La trascendencia de estas ideas se deja ver en (NRC, 1989) cuando plantea que "Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea… El proceso de "hacer" matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados" (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

7. *Enseñarles a demostrar*. "Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento demostrativo". De hecho, la verdad va más allá: las matemáticas pueden extenderse al razonamiento demostrativo, que se infiltra en todas las ciencias desde que alcanzan un nivel matemático y lógico suficientemente abstracto y definido (Pólya, 1962, citado por Arguedas, 2012, p. 5).

Esta habilidad puede verse favorecida a partir del trabajo colaborativo, el análisis y las discusiones en plenaria que propone Schoenfeld como actividades para desarrollar el control en los resolutores de problemas al tener que "convencer" a sus interlocutores de que algún camino o estrategia es acertado.

8. *En el problema que estés tratando, distinguir lo que puede servir más tarde para resolver otros problemas, intentad revelar el modelo general que subyace en el fondo de la situación concreta que se afronte*. Cuando presentéis la solución de un problema, subrayar sus rasgos instructivos. Una particularidad de un problema es instructiva si merece ser imitada. Un aspecto bien señalado, en un problema, y vuestra solución puede transformarse en un modelo de resolución, en un esquema tal que, imitándole, el estudiante pueda resolver otros problemas (Pólya, 1962, citado por Arguedas, 2012, p. 5).

En ello se enfatiza en la etapa que Pólya refiere como "visión retrospectiva" y se manifiestan ideas afines en Schoenfeld (1978), por ejemplo, cuando propone entre las heurísticas para la exploración del problema la consideración de problemas equivalentes y el cambio de condiciones por otras equivalentes.

9. *No revele de pronto toda la solución; deje que los estudiantes hagan suposiciones, déjeles descubrir por sí mismos siempre que sea posible*. He aquí una pequeña astucia fácil de aprender: cuando se empieza a discutir la solución de un problema, deje que los estudiantes adivinen su solución. Quien tiene una idea o la ha formulado, se ha comprometido: debe seguir el desarrollo de la solución para ver si lo que ha conjeturado es exacto o no, con lo que no puede despistarse. Voltaire decía: "El secreto para ser aburrido es decirlo todo" (Pólya, 1962, citado por Arguedas, 2012, p. 5).

La metodología inherente a la teoría establece que el profesor sea el guía en la conducción del proceso a partir de cuestionamientos y preguntas inteligentes que introduzcan el rumbo y hagan emerger las buenas ideas, pero que, en todo momento, deje al alumno asumir la parte de responsabilidad que le corresponde.

10. *No inculque por la fuerza, sugiera*. Se trata de dejar a los estudiantes tanta libertad e iniciativa como sea posible, teniendo en cuenta las condiciones existentes de la enseñanza. Dejen que los estudiantes hagan preguntas; o bien planten cuestiones que ellos mismos sean capaces de formular. Dejen que los estudiantes den respuestas; o bien den respuestas que ellos mismos sean capaces de ofrecer (Pólya, 1962, citado en Arguedas, 2012, p. 5).

Este último mandamiento está estrechamente relacionado con las "cuatro libertades en clase", cuya autoría según González-Senovilla (2014) le es atribuida a Pólya, también considerado "Padre de la heurística moderna", las cuales pueden ser un factor importante para crear un buen clima en el aula. Estas libertades son:

1. *La libertad de cometer errores*. Todos cometemos errores, por ello es importante animar a los alumnos, que participen y tengan confianza. Llegará un momento en que sean capaces de resolver problemas a la primera.
2. *La libertad de hacer preguntas*. Las preguntas de los alumnos nos ayudan a determinar dónde están y a evaluar nuestra propia capacidad docente.
3. *La libertad de pensar por uno mismo*. Tienen que buscar sus propias soluciones, hay que dar a los alumnos la satisfacción de llegar a la meta: la solución.
4. *La libertad de elegir su propio método de resolución*. Cada niño tiene una forma diferente de pensar, y por tanto diferentes caminos para llegar a la solución (Pólya, s. f., citado en González-Senovilla, 2014, p. 18).

En general, la teoría de la RP desde la mirada de estos dos íconos de la didáctica de las matemáticas nos presenta un guía para abordar el proceso de resolución de un problema, una metodología que es válida más allá del mundo de las matemáticas pues se puede utilizar en cualquier disciplina. La metodología puede resumirse de la siguiente forma:

Figura 5. Modelo de Pólya de Resolución de Problemas (Modificado de versión en Internet[3]).

2.3 Competiciones Matemáticas en México para Alumnos de la Educación Secundaria

Se tiene conocimiento de que desde el siglo XVI se desarrollaron competiciones matemáticas en Italia relacionadas con la resolución de ecuaciones cúbicas. Sin embargo, no fue hasta 1934, en la extinta Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), que se celebró la primera Olimpiada de Matemáticas (Nieto, 2005).

[3] https://matematicasiesoja.wordpress.com/resolucion-de-problemas/

Por aquel entonces, Delone, uno de los principales artífices de la organización de las primeras ediciones de la olimpiada, expresó en una conferencia el espíritu que hasta hoy perdura en la preparación de los alumnos que participan en las olimpiadas y que tomamos como referente para el desarrollo de nuestro proyecto "Un alumno no es un recipiente que hay que llenar de conocimientos, sino una antorcha que hay que encender" (Nieto, 2005, p. 41).

Por ello, compartimos la concepción de De Losada (2001) cuando afirma que las olimpiadas proporcionan al maestro vastos materiales y otros recursos que pueden ser usados en sus clases o en actividades de enriquecimiento, dirección de clubes de matemáticas, y muchos más.

Según Curra (2015) "las olimpiadas internacionales son concursos entre jóvenes estudiantes, cuyo objetivo primordial es estimular el estudio de la Matemática y el desarrollo de jóvenes talentos en esta ciencia" (p. 3). A decir de este autor, los objetivos perseguidos por una Olimpiada de Matemática son los siguientes:

> Despertar el interés y desarrollar una actitud positiva por el estudio de esta ciencia.
>
> Contribuir a la ampliación y profundización de los conocimientos.
>
> Estimular la creatividad, la capacidad de decisión, el pensamiento divergente y la habilidad para enfrentarse a nuevas situaciones y resolver problemas imprevistos.
>
> Propiciar la participación de alumnos y profesores en actividades matemáticas complementarias al trabajo en el aula.
>
> Ayudar a mejorar la práctica docente, apoyando la renovación y la innovación en la forma de hacer matemáticas.
>
> Favorecer en la sociedad, en general, una reflexión que posibilite el aprecio que la Matemática, sin duda, merecen como instrumento de comprensión del mundo actual (p. 3).

El acercamiento al contexto mexicano con relación a las competiciones matemáticas en las que tienen participación los estudiantes de la Educación Básica deja ver que en las últimas dos décadas han ido creciendo la cantidad de certámenes convocados anualmente por distintas organizaciones con la anuencia de la SEP. A continuación, se relacionan y describen cronológicamente algunas de las competiciones con mayor poder de convocatoria a nivel de país.

Según la página oficial en internet de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM)[4], éste es un programa de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), cuya parte central, desde que viera la luz por vez primera en México en 1987, ha sido la realización del Concurso Nacional para estudiantes preuniversitarios. Este concurso es el más importante

---

[4] http://www.ommenlinea.org/

en México a nivel bachillerato, así como la Olimpiada Internacional de Matemáticas lo es a nivel mundial.

Su objetivo principal según se refiere en el apartado "¿Qué es la OMM?" de la propia página web es "promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, alejándose del estudio tradicional que promueve la memorización y mecanización, y buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes" (p. 1).

En la convocatoria para la 33ª OMM (2019) se hace explícito que "los problemas sólo suponen conocimientos del nivel del tercer año de secundaria, pero requieren de creatividad, intuición y dedicación" (p. 1).

Anualmente, el programa básico de la OMM se desarrolla desde la base, con autonomía para que cada entidad federativa organice su proceso estatal: (Olimpiada Zonal-Regional-Estatal), filtros que le permiten definir el selectivo que asiste a la instancia Nacional. Los 16 alumnos con mejor desempeño conforman la preselección nacional que recibe un entrenamiento especial durante varios meses para conformar las delegaciones que representan a México en la olimpiada Internacional, Iberoamericana, Centroamérica y el Caribe y de la Cuenca del Pacífico.

De la misma forma, a partir de 1996 se efectúa la Competencia de Primavera de Matemáticas convocado por la Academia Mexicana de Ciencias (AMC) y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), en la que participan estudiantes de secundaria divididos en dos niveles: menores de 13 años y menores de 15 años, los cuales, según su desempeño, pueden transitar por 3 etapas, donde en las dos primeras, por lo general, enfrentan problemas de opción múltiple. El propósito de esta competición es fomentar el interés por las matemáticas entre los jóvenes participantes (AMC, 2017).

También en la propia página oficial de la OMM, ya citada anteriormente, se puede leer que a partir del año 2000 se ha venido aplicado en México el Canguro Matemático luego de que fuera formalmente invitado por la Asociación Canguro Matemático en su reunión de 1999. La competición tiene el propósito de dar a conocer el tipo de matemáticas que fomentan la imaginación y el ingenio de los alumnos, y que los alumnos que lo presenten conozcan y puedan desarrollar más su propio talento.

Es importante señalar que los exámenes del Canguro Matemático constan de preguntas de opción múltiple, con nivel creciente de dificultad, poco tiempo para resolverlo y no se califica el razonamiento empleado para llegar a la respuesta. Los niveles que se aplican en México son:

- *Escolar*. Para alumnos de 10 a 12 años (fin de la primaria). El examen consta de 12 preguntas a resolver en 1 hora.
- *Benjamín*. Para alumnos de 12 a 14 años (1º y 2º de secundaria). El examen consta de 12 preguntas, a resolver en una hora.

- *Cadete*. Para alumnos de 14 a 17 años. Éste podrá decirse que es el nivel precursor de la Olimpiada, puesto que corresponde a alumnos desde 3º de secundaria hasta 2º de preparatoria. Para este nivel se manejan dos versiones: Una con 12 preguntas para resolver en una hora, y otra con 30 preguntas (llamado examen eliminatorio) para resolver en tres horas.
- *Estudiante*. Para alumnos a partir de los 17 años (de 3º de preparatoria a primeros años de nivel profesional). El examen consta de 12 preguntas, a resolver en una hora.

Otra de las competiciones matemáticas que ya cuenta con años de historia es la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y de Secundaria (ONMAPS), (OEMAPS) a nivel estatal, convocada también anualmente a partir del 2001 por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) en todos los estados del país con el propósito manifiesto de "fomentar el desarrollo de talentos con habilidades y competencias matemáticas" (Secretaría de Educación Pública de Zacatecas (SEP-Zacatecas) y ANPM-Zacatecas, 2019, p. 1).

Cada estado de la república lleva a cabo, en forma autónoma, su concurso que de igual forma transita por seis etapas, siendo éstas: la etapa Escolar, la etapa Zonal, la etapa Regional, la etapa Estatal, la etapa Preselectiva y la etapa Selectiva para la participación en la competición nacional. En estas Olimpiadas pueden participar estudiantes mexicanos inscritos en escuelas oficiales o particulares desde cuarto de primaria hasta tercero de secundaria. Los estudiantes son agrupados en categorías (difieren en los diferentes estados) para su participación en correspondencia con el nivel educativo que cursan (desde el 4to de primaria hasta el 3ero de secundaria) y el selectivo final se constituye como máximo de dos estudiantes por categoría.

Las convocatorias para la competición en general refieren que el contenido de los temarios de las OEMAPS no va más allá del que proponen los programas de estudio para cada nivel educativo. Por ejemplo, según la Secretaría de Educación Pública de Nayarit (SEPN, 2018), "los contenidos académicos del concurso para cada categoría serán los correspondientes a los programas de estudio oficiales vigentes" (p. 2). Lo anterior también lo ratifica el Instituto de Educación de Aguascalientes (IEA, 2018) en su convocatoria:

> Cada una de las preguntas será elaborada tomando en cuenta los contenidos y aprendizajes esperados del programa de matemáticas aprobados por la SEP. Las preguntas tomarán en cuenta la habilidad que se requiere para resolver la situación presentada, apoyándose en sus propios recursos. En los exámenes de preselección estatal y selección estatal se tomará muy en cuenta el proceso para la resolución del problema (p. 1).

De manera similar y con alcance nacional, el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas (CARMA) ha convocado cada año a partir del 2011 a la Olimpiada de Otoño de Matemáticas. En esta competición puede participar cualquier alumno inscrito en alguna institución educativa mexicana, determinándose seis categorías en las que incluyen a los alumnos de acuerdo con su nivel educativo desde el 3ero de primaria hasta la licenciatura.

Para contestar el examen en cualquiera de las categorías no se permite el uso de calculadoras o formularios y se fija un tiempo máximo de tres horas para responder alrededor de veinte preguntas de tipo abiertas y cerradas. La premiación considera la siguiente jerarquía: (1) Primer Lugar, (2) Mención Honorífica, (3) Gran Pez; e incluye un premio monetario que en el caso de los concursantes de la Educación Secundaria va desde $600 hasta $2000 para el Primer Lugar.

Por último, de más reciente creación, específicamente a partir del año 2017, la SMM organiza la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), en los niveles de Primaria y Secundaria. Entre sus objetivos, plasmados en la convocatoria OMMEB (2020) y disponible en la web de la OMM, se relacionan los siguientes:

- Crear una atmósfera académica para motivar a los maestros y estudiantes para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas, de pensamiento crítico y analítico.
- Establecer cooperación a través de redes para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con organizaciones educativas en los distintos estados y a nivel nacional.
- Ofrecer a los estudiantes participantes de los distintos estados oportunidades de intercambio cultural, académico y de conocimientos matemáticos.
- Mejorar la currícula en matemáticas de la educación básica para estar a la par de los estándares internacionales (p. 2).

La competición se organiza tradicionalmente en tres niveles de acuerdo con el nivel educativo de los educandos. En el Nivel 1 participan los alumnos de 4to y 5to de primaria, en el Nivel 2 los estudiantes de 6to de primaria y primero de secundaria y, en el Nivel 3 los convocados son los estudiantes de 2do de secundaria. Estos alumnos enfrentan dos tipos de exámenes: individual y por equipos, enfrentando en cada caso un número considerable de problemas, en los primeros de acuerdo con el nivel educativo, y en ambos en un tiempo limitado (Web OMM).

Los contenidos que se abarcan en la OMMEB, según su convocatoria 2020, corresponden por lo general a temas de matemáticas básicas, agrupados en cuatro áreas: Combinatoria, Geometría, Teoría de Números y Álgebra (Web OMM).

Esta competición es la fuente por excelencia para la conformación de la selección mexicana que participa cada año en la principal olimpiada internacional para alumnos de primaria y secundaria, la International Mathematics Competition (IMC), evento por invitación en el que se compite a nivel individual y por equipos, mediante preguntas de sólo respuesta y de argumentación (Web OMM).

Los concursos matemáticos referenciados en este apartado constituyen ejemplos significativos por su capacidad de convocatoria y nivel de organización de las olimpiadas matemáticas en cuyo proceso anualmente se involucran miles de estudiantes mexicanos de la Educación Básica junto sus entrenadores. Una visión de su crecimiento cuantitativo en el decursar del tiempo a partir de su primera edición, así como de las instituciones protagonistas en su promoción se muestran en la siguiente figura:

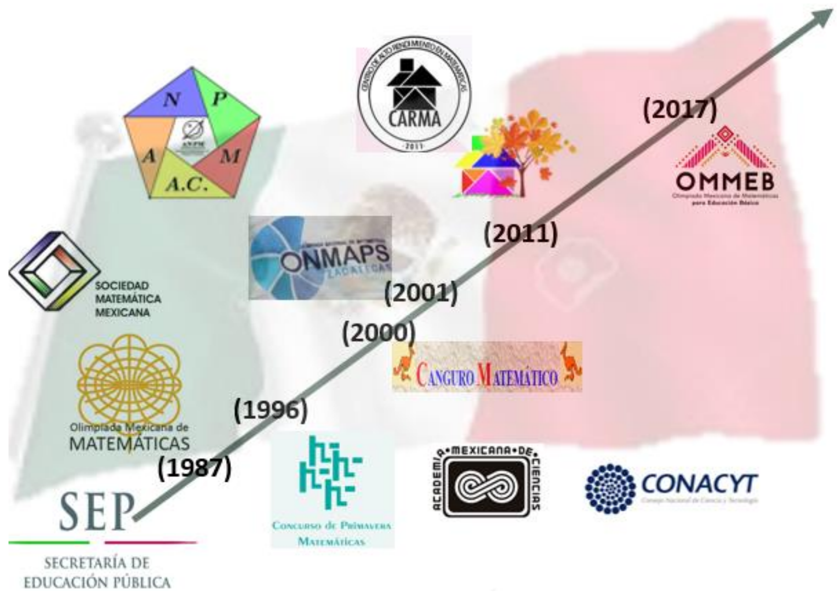


Figura 6. Principales concursos matemáticos en México para alumnos de la Enseñanza Secundaria.

2.4 Integración teórica

En general, las posturas teóricas descritas en estos tres apartados forman un constructo que nos permite sustentar la idea de investigación. La base la constituye la explicación del MDDT de Gagné sobre el desarrollo del talento y la distinción de componentes causales que se hace en el mismo.

Desde esta perspectiva, la configuración ideal toma como punto de partida a aquellos adolescentes de aulas regulares con *capacidades naturales* mentales superiores a la del resto de sus compañeros en el campo intelectual (ej. : inteligencia general, razonamiento fluido para inducir y deducir, matemático, espacial y memoria declarativa) y/o creativo (ej.: ingenio en la resolución de problemas, imaginación y originalidad). El modelo reconoce el importante papel del *profesor* (*catalizador ambiental*) como una persona de influencia significativa sobre los *catalizadores intrapersonales* del talento en formación (manejo de sus objetivos) y sobre el *proceso de desarrollo*. En tal sentido, nuestro Proyecto apuesta por el *desarrollo profesional del profesor* en aras de su capacitación para proveer un *enriquecimiento* efectivo. El *talento matemático* en el modelo se incluye dentro de los talentos en el campo *académico* y los principios didácticos matemáticos asumidos (RP) nos permite interpretarlo atendiendo al desempeño práctico como *especialistas en la resolución de problemas*. Por tanto, las *actividades de aprendizaje y práctica*, columna vertebral del proceso de desarrollo, deben orientarse hacia la promoción de este logro. Con este fin, el *contenido* recomendado por la investigación educativa en nuestros antecedentes y la SEP apunta a la utilización de *retos matemáticos*. Consideramos que por su naturaleza el contexto de las olimpiadas matemáticas es una valiosa fuente de recursos (material, prácticas de enseñanza) que pueden ser también útiles en el *contexto* institucional escolar, incluida el aula regular. La integración teórica descrita se presenta en la Figura 7.

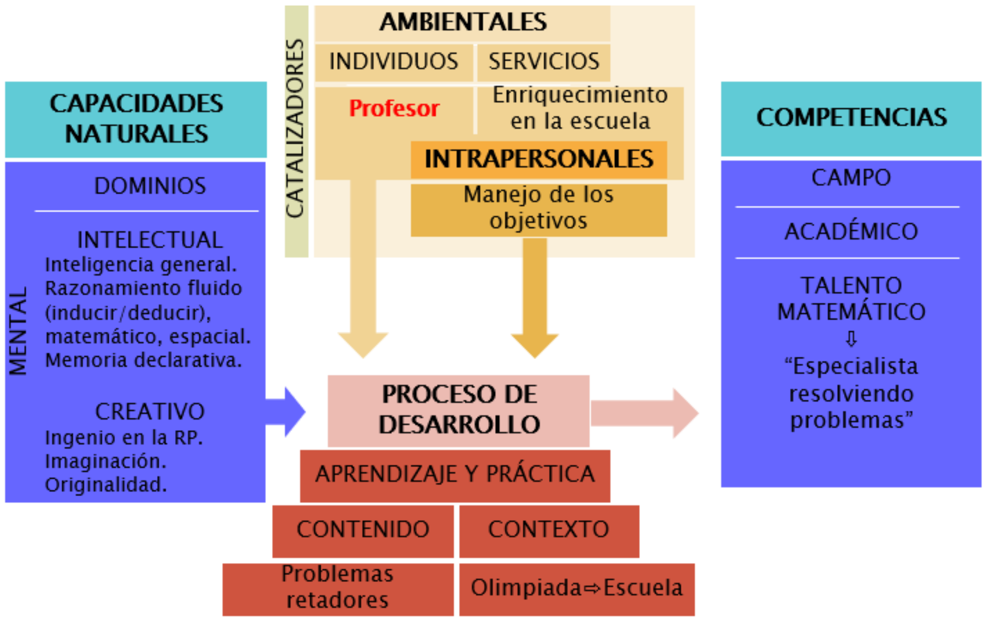


Figura 7. Integración teórica del Proyecto (adaptado de Gagné, s. f.).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Descripción de la metodología

Kaplan (1973, citado en Cohen, Manion & Morrison, 2007) sugiere que "el objetivo de la metodología es que nos ayude a entender, en los más amplios términos, no los productos de la investigación científica, sino el proceso en sí" (p. 47). En ese sentido, lo que se describe seguidamente en este apartado, constituye la guía para alcanzar los objetivos planteados.

En este tenor, de acuerdo con el grado de profundidad con el que se abordan los objetos de estudio se concibe una investigación de corte *descriptivo*, el cual, según Hernández, Fernández & Baptista (2010), "busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. Describe tendencias de un grupo o población" (p. 80). Se considera que el estudio que se configura está a tono con esta perspectiva debido a que se pretende describir enfoques del proceso de resolución de problemas que típicamente se proponen en la preparación de alumnos de nivel secundario con vistas a su participación en competiciones matemáticas, así como de las dinámicas que caracterizan el proceso de su enseñanza.

Dado lo anterior, se trata de una investigación *cualitativa* en el sentido de Kothari (2004), quien plantea que este tipo de investigación se ocupa de fenómenos cualitativos, es decir, los fenómenos relacionados con la calidad o tipo, dentro de los cuales se encuentra la indagación sobre lo que piensa una persona de un tema en particular. En razón de que se deberá interactuar con los sujetos y objetos que se estudian (entrenadores y problemas), se considera pertinente este tipo de investigación ya que las variables situadas bajo foco para la comprensión de los procesos replicables en los contextos institucionales escolares no son susceptibles a la medición y sí a expresarse en términos de sus cualidades y tipologías.

Entendiendo el diseño de investigación en la acepción de Pérez Juste (1985), para quien éste constituye la "planificación de actividades que deben llevarse a cabo para solucionar los problemas o contestar a las preguntas planteadas" (p. 71), el diseño que estructura este proyecto se inició con la revisión de literatura enfocada, principalmente, en los dos temas subyacentes a nuestra idea primaria de investigación: Los alumnos con talento matemático y los problemas de competiciones matemáticas. La familiarización con el panorama general de las olimpiadas matemáticas mexicanas y la disponibilidad de acceso al campo en un momento dado, delimitaron los escenarios propicios para la observación.

3.2 Escenarios a observar

Los escenarios estudiados en pos del logro de los objetivos planteados y de encontrar respuestas a la pregunta formulada en esta investigación fueron los siguientes:

La segunda edición del Curso para Entrenadores de Olimpiadas de Matemáticas (CEOM), auspiciada por el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas (CARMA). Para esta segunda generación, se inició el 1 de octubre 2019, en la modalidad "en línea" para los 93 matriculados incluyendo mexicanos y extranjeros.

La sede de CARMA se encuentra en el estado de San Luis Potosí desde que fuese fundado el 1 de septiembre de 2011 por un equipo de trabajo compuesto por exolímpicos con destacado palmarés tanto como competidores como en su desempeño como entrenadores de alumnos para su participación en las distintas competiciones de la disciplina a nivel estatal, nacional e internacional. Su director, Lic. Eugenio Daniel Flores Alatorre, es un experimentado y prestigioso entrenador conocido en el ámbito académico como "ugesaurio", actualmente delegado de la OMM en el referido estado y entrenador de estudiantes mexicanos de nivel primaria para su participación en la International Mathematics Competition (IMC). En la página web[5] de CARMA puede verse toda la información sobre esta organización.

El curso tiene un costo de $1999 y consta de 16 semanas formales más una introductoria. El trabajo desarrollado en este período gira en torno al propósito de proveer a los entrenadores más noveles, participantes o familiares de herramientas para el entrenamiento de estudiantes de la Educación Básica en el proceso de las olimpiadas matemáticas. El acceso a la plataforma del curso puede hacerse a través de la página[6] que nos lleva a la siguiente presentación:

Figura 8. Presentación del Curso para Entrenadores de Olimpiada de Matemáticas (CARMA, 2019).

La abundancia de material, la autorización de uso ratificada por CARMA (2020) en su actual video promocional de presentación del curso cuando refiere: "el material está listo para descargar, si estás como entrenador, la intención es que lo uses (…)" (min: 3); la posibilidad de acceso en cualquier horario dado que es en línea, unido a que dicho material

[5] http://undostresporcarma.com/

[6] https://cursos.carmaenlinea.com/

es fruto de la experiencia acumulada en años por un equipo de exolímpicos que ha logrado mantener a San Luis Potosí entre los diez primeros puestos de la tabla en las competiciones nacionales del último decenio, justifica nuestra decisión de seleccionar este material para el análisis del *contenido específico*.

El otro escenario observado fue el entrenamiento a los estudiantes del preselectivo zacatecano de los niveles primaria y secundaria para el proceso de las Olimpiadas Nacionales Matemáticas (ONM) de 2020. El calendario de los entrenamientos marcaba su desarrollo entre el 10 de enero y el 10 de abril, con entrenamientos los viernes y sábados de cada semana y cerrando con una semana completa de intensivo, pero los tiempos en que se tuvo el acceso a la información y la posterior búsqueda de contactos para la autorización de entrada al campo, hizo que ésta no se produjera sino hasta la sexta semana, con fecha 14 de febrero.

Esta actividad es organizada y rectorada por la ANPM-Zacatecas y llevada a la práctica por un equipo estable de entrenadores, algunos de ellos ya con años de experiencia y resultados en estas funciones, y otros noveles exolímpicos con resultados cercanos en el tiempo como competidores.

Los logros alcanzados en los últimos años han convertido a Zacatecas en un estado de referencia nacional en cuanto a olimpiadas matemáticas para alumnos de primaria y secundaria se refiere, ubicándose entre los 5 primeros puestos a nivel de país, razón que justifica nuestra elección como escenario propicio para la realización de observaciones al sistema que en general organizan para potenciar los entrenamientos. De manera particular, el interés se centra en las dinámicas que promueve el entrenador en las sesiones de entrenamiento, lo que nos dará una visión de este *contexto de enseñanza.*

3.3 Tipo de investigación

Considerando la clasificación dada por Arias (2012) atendiendo a la naturaleza del diseño, este proyecto constituye una *investigación de campo* a nivel descriptivo, ya que no se manipulan o controlan variables y condiciones incidentes en el desarrollo del CEOM, ni en el accionar de los entrenadores que conciben y conducen las sesiones de entrenamientos del preselectivo zacatecano. En esta perspectiva teórica, atendiendo a su procedencia, los datos se clasifican en primarios, cuando son obtenidos originalmente por el investigador, o secundarios, cuando son tomados de otras investigaciones.

Dados los escenarios que se estudian, se consideran varias fuentes de información para la toma de datos, teniendo presencia tanto fuentes vivas, como documentales. Las primeras están representadas por los entrenadores de olimpiadas matemáticas, quienes suministran datos primarios a partir de su observación y de ser encuestados. Las fuentes documentales aportan los datos secundarios y están dadas por los audiovisuales puestos a disposición como material del Curso, consistentes en videos (online/offline, disponibles en

YouTube) que se acercan a un tema, una idea o estrategia en particular y, las fuentes electrónicas, categoría en la que se ubican los documentos digitalizados obtenidos desde la página web del propio CEOM o vía correo electrónico.

3.4 Métodos y técnicas

Kothari (2004) nos dice que en la investigación de campo se utiliza como método principal la *observación*, pudiendo ser la misma complementada con la utilización de cuestionarios tanto por correo como y/o de opinión.

Según Hernández *et al*. (2010) "la observación consiste en el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos y situaciones observables" (p. 260). En la propia obra de estos autores se ejemplifica su utilidad en muy diversas circunstancias.

Cuando ésta se realiza, como es nuestro caso, en los lugares donde ocurren los hechos o fenómenos investigados, se denomina *observación de campo* y constituye un recurso principal para la observación descriptiva (Fuentes, 2011).

En el desarrollo de la observación de campo es de suma importancia llevar registros y elaborar anotaciones. A decir de Hernández *et al*. (2010), estas anotaciones pueden ser de diferentes clases:

1. *Anotaciones de la observación directa*. Descripciones de lo que estamos viendo, escuchando, olfateando y palpando del contexto y de los casos o participantes observados. Regularmente van ordenadas de manera cronológica. Nos permitirán contar con una narración de los hechos ocurridos (qué, quién, cómo, cuándo y dónde).
2. *Anotaciones interpretativas*. Comentarios sobre los hechos, es decir, nuestras interpretaciones de lo que estamos percibiendo (sobre significados, emociones, reacciones, interacciones de los participantes).
3. *Anotaciones temáticas*. Ideas, hipótesis, preguntas de investigación, especulaciones vinculadas con la teoría, conclusiones preliminares y descubrimientos que, a nuestro juicio, vayan arrojando las observaciones.
4. *Anotaciones personales* (del aprendizaje, los sentimientos, las sensaciones del propio observador o investigador).
5. *Anotaciones de la reactividad de los participantes* (cambios inducidos por el investigador), problemas en el campo y situaciones inesperadas. (pp. 377-378).

Considerando las diferencias en los escenarios donde se implementó la observación en el proyecto, se clasifica el papel que desempeña el observador en el sentido de Hernández *et al*., 2010, p. 417; es decir, "*no participación,* cuando se observan videos", actividad fundamental en el escenario del CEOM; y "*participación pasiva,* se está presente pero no se interactúa", tal y como sucede en el marco de la preparación del preselectivo zacatecano. En este marco, atendiendo además al tipo de datos cuya generación se privilegia intencionalmente con cada una en correspondencia con los objetivos definidos, se realizan anotaciones de campo de diferentes clases en cada uno de los foros observados.

3.4.1 Técnicas para la observación del contenido en el CEOM

El enfoque teórico asumido para la RP deja ver que para convertirse en un buen resolutor de problemas la clave está en resolver muchos problemas, por lo que entendemos que un Proyecto de Desarrollo Profesional que se oriente hacia tal fin debe contemplar el análisis de problemas y soluciones.

El CEOM, en general nos permite describir los saberes matemático-didácticos que desde éste se promueven a través de la definición de los *contenidos* de interés dentro del contexto de las olimpiadas de nivel básico, expresados a través de: tipologías de problemas, recursos que demandan su resolución, la ejemplificación de técnicas y estrategias heurísticas como herramientas resolutivas. Para la toma de datos se realizaron *anotaciones temáticas* a modo de monografías de la realidad observada a partir de las cuales se recogieron, transcribieron y organizaron las principales ideas vinculadas con la teoría, mismas que se encuentran dispersas en las fuentes documentales disponibles, a pesar de su asociación temática por semanas.

Considerando la extensión de las fuentes documentales (documentos electrónicos y videos), a pesar de la autorización de uso dada por CARMA, los documentos electrónicos no se reproducen es su totalidad. En este sentido, se deja ver íntegramente a modo de ejemplo (Anexo 1) el correspondiente a la Sesión 2, titulado: Sucesiones, Sumas, Progresiones. Otra limitación importante del proyecto aflora toda vez que el CEOM no tiene acceso libre (es pago), por lo que, por ética, no se precisan en las referencias las direcciones electrónicas ni los nombres reales de ninguno de los videos de su programa, los cuales quedan expuestos en el canal de "Uge Saurio" en YouTube, pero con acceso restringido ya que se encuentra como "no listado" en su configuración de privacidad.

No obstante, a pesar de las limitaciones anteriores, para ubicar en las fuentes documentales observadas los objetos pragmáticos que se analizan bajo la categorización original de los autores y las principales ideas teóricas que sobre éstos se exponen, en la transcripción que se realiza a manera de cita o paráfrasis se utiliza la siguiente leyenda para la codificación:

S-	Semana	A-	Acertijo	Ejem-	Ejemplo
I-	Introducción	P-	Problema	R-	Reto
J-	Juego	E-	Ejercicio	V-	Video

Para referir determinada fuente acotamos primero la semana y luego indicamos el elemento al que se hace referencia teniendo en cuenta en ambos casos su número de orden. Por ejemplo, para referirnos al problema 4 del tema Perímetro (contenido abordado la 5ª semana del curso), lo hacemos en la siguiente forma: S_5P_4, al reto 3 del propio tema S_5R_3 y para aludir al video de la sesión en vivo del tema Criterios de Divisibilidad (contenido abordado la 8ª semana) escribimos S_8V_1. Es importante aclarar que, en el documento de

Sucesiones, Sumas, Progresiones (Anexo 1), aparecen dos bloques de problemas, por lo que para el primero utilizamos S_2P_{1a}; S_2P_{2a}; (…), y para el segundo S_2P_{1b}; S_2P_{2b}; (…).

Finalmente, con el ejercicio de análisis-síntesis de las anotaciones temáticas conformadas para cada tema, se rescatan algunos de los aspectos relevantes dentro de la teoría de la resolución de problemas ("Contenidos" en el MDDT). Estos aspectos se presentan resumidos en la Tabla 2.

Tabla 2.

Síntesis de los aspectos relevantes observados.

Módulo:	Tema:			
Objetivo(s):				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias Heurísticas:	Habilidades	Tips
Problemas análogos asociados por temas o estrategias específicas.	Conocimientos previos necesarios	Sugerencias o técnicas que ayuda a los resolutores de problemas a comprender o resolver un problema.	Lo que se promueve (ganancia)	Sugerencias generales

3.4.2 Técnicas para la observación de entrenamientos del preselectivo zacatecano de primaria y secundaria para las ONM de 2020

En este escenario, la atención se centra en el *contexto de enseñanza o formato* en el sentido del MDDT, integrado al enfoque teórico de la RP, siendo el foco prioritario la identificación de los estilos de enseñanza implementados por los entrenadores en la conducción del proceso. Los datos son vistos según Rodríguez, Gil y García (2004) como elaboraciones del investigador sobre la realidad estudiada en forma de cadenas verbales de naturaleza descriptiva.

Es oportuno señalar que las *anotaciones interpretativas* que componen estas cadenas se apartan completamente del propósito de evaluar el desempeño de los entrenadores desde todo punto de vista, ya que, como se mencionó anteriormente, la base de este propio equipo de preparadores ha conseguido llevar y mantener el talento zacatecano a planos estelares en los certámenes nacionales para estos niveles educativos en los últimos años, lo constituyó motivo para su elección como contexto a observar. Por ello, las anotaciones en general se encaminan hacia el registro de acciones y la forma en que éstas se manifiestan, con el objetivo de promover una visión más integradora acerca de las funcionales dinámicas que caracterizan dicho contexto de enseñanza y que, convenientemente adaptadas, pudieran ser replicadas en el contexto escolar formal.

Con esta finalidad se considera pertinente contar con una guía de referencia, como sugieren Hernández *et al*. (2010, p. 415), que facilite en la práctica los procesos de orientar y ordenar la elaboración de los datos primarios, dada la extensión de cada jornada de entrenamiento (3 a 4 horas) y la cantidad de sesiones observadas (que tienen lugar entre el 14 de febrero y el 10 de abril). Pensando en la intención de fondo del proyecto (que tenga aplicabilidad en la escuela), la guía de referencia que se toma en cuenta para el registro de acciones dentro de la actividad central de aprendizaje y práctica en este contexto de aprendizaje (el entrenamiento) constituye una adecuación de la realizada con elementos (lo deseable) que propone el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) por miembros del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE) para ejemplificar las posibles propuestas para la evaluación del desempeño docente. El formato original se titula: "Guía para la Observación de Prácticas Educativas"[7] y, según consta en el propio documento, no es oficial.

Cabe señalar que, en la versión del formato guía para realizar las observaciones que se presenta, 8 de las 14 acciones que se cuestionan directamente [e); f); g); h); i); j) m); n)] aparecen reflejadas de forma más o menos literal en la metodología que proponen los autores clásicos de la teoría de RP, cuyos aspectos más importantes se recogen en el epígrafe 2.2 de este Proyecto. En este sentido se aclara que atendiendo a lo recopilado en nuestros antecedentes y a la visión teórica de la RP asumida, en nuestro formato se sustituyen e incorporan algunos términos como por ejemplo el de *actividad* por *problema* y *entrenamiento* por *clase.*

El formato (Tabla 3) se compone de cuatro apartados no disjuntos, pero con focos prioritarios distintos. En el primero de ellos se aúnan datos que permiten la identificación en cuanto a personas, temas, al cuándo y al dónde se realiza la observación. Seguidamente los cuestionamientos se centran en el entrenador, en las cualidades de su planeación, con énfasis en la forma en que trae preconcebido el aseguramiento del nivel de partida para el entrenamiento. Para ello, teniendo en cuenta la peculiaridad del contexto (entrenamiento), incluimos como referente sólo algunas de las acciones recomendadas desde la teoría de la RP presentes en el formato original del SNTE y que comúnmente ejecutan los docentes de aulas regulares para tal fin, partiendo de la hipótesis de que pudieran manifestarse. En los casos de que se evidencien acciones no previstas en nuestro formato, serían comentadas en el cuarto apartado. En el acápite tres la directriz la constituye el registro del papel que desempeña el entrenador al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos, especialmente, con el proceso de resolución de los problemas. Para ello, al igual que en el apartado anterior, los aspectos señalados para el registro parten del principio de intersección entre la versión del formato original referido anteriormente y la visión teórica. Finalmente, el cuarto apartado recoge observaciones generales de aspectos no

[7] Disponible en: https://materialeducativo.org/guia-para-la-observacion-de-practicas-educativas/

representados anteriormente en el formato y/o explicaciones más detalladas de los que sí se refieren, así como nuestras apreciaciones e inferencias.

Tabla 3.

Formato guía para la observación de los entrenamientos.

GUÍA PARA LA OBSERVACIÓN DEL ENTRENAMIENTO

1	**CARTEL DE LA CONVOCATORIA**	**ENTRENAMIENTO** / **SESIÓN:**	**FECHA:**	**HORA:**
		LUGAR:		**CIUDAD:**
		ENTRENADOR(A):		**ALUMNOS:**
		MÓDULO:	**TEMA:**	

	EL entrenador		**SÍ**	**NO**
2	a)	¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? **(P)**		
	b)	¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? **(ED)**		
	c)	¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? **(PA)**		
	d)	¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? **(EM)**		
	e)	¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? **(RR)**		
	f)	¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? **(TC)**		
	Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:			
3	g)	¿Explica en qué consisten los problemas? **(Ex)**		
	h)	¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? **(NA)**		
	i)	¿Modela cómo se realizan los problemas? **(M)**		
	j)	¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? **(REM)**		
	k)	¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza? **(MD)**		
	l)	¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? **(EA)**		
	m)	¿Gestiona la utilización de estrategias para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? **(EH)**		
	n)	¿Cómo? **(CGE)**		
	Observaciones generales			
4				

Las anotaciones interpretativas sobre el nivel de cumplimiento de estas acciones se registran en cada apartado del formato para las sesiones observadas, información que se anexa íntegramente a este documento (Anexos 2 - 11) pero sin plasmar los nombres de los entrenadores encargados de conducir el desarrollo de la sesión. En este sentido, para evidenciar las participaciones de distintos entrenadores se identifican con números (1-6).

Para facilitar el análisis, en las anotaciones interpretativas relacionadas con cada acción cuestionada primero se identifica el cuestionamiento y seguidamente se determinan categorías con base en las regularidades detectadas. Para ejemplificar dichas categorías se toman las anotaciones de una sesión representativa precisando la semana de entrenamiento y la sesión a la que pertenece. Por ejemplo, para indicar que la anotación corresponde a la primera sesión del sexto entrenamiento, se identifica como E_6S_1.

3.4.3 Cuestionario

Como se refirió anteriormente, otro instrumento útil en la investigación de campo es el cuestionario, el cual "tal vez sea el instrumento más utilizado para recolectar los datos, consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir" (Hernández *et al*., 2010, p. 217).

Muñoz (2003) lo describe como "un instrumento muy útil para la recogida de datos, especialmente de aquellos difícilmente accesibles por la distancia o dispersión de los sujetos a los que interesa considerar, o por la dificultad para reunirlos" (p. 2).

En el caso de este proyecto, el conjunto de preguntas se dirige al director y entrenador principal de CARMA cuya sede, como se refirió anteriormente, se encuentra ubicada en el estado de San Luis Potosí y quien también ocupa la responsabilidad de delegado de la OMM en dicha entidad federativa. Su propósito general de aplicación es el de complementar la información recopilada desde los campos observados, a la vez que permite la triangulación entre métodos en el sentido de Cohen *et al*. (2007), es decir, comprobando la validez de los datos obtenidos a partir de la noción de convergencia entre las medidas independientes de un mismo objetivo.

El cuestionario que se propone se compone de cuatro apartados que se articulan como relación lógica en torno a 12 preguntas abiertas. El primero se centra en recoger los datos generales del entrenador encuestado. El segundo apartado está compuesto por las preguntas de la 1 a la 4 y persigue el propósito de conocer las formas y criterios para la organización y planificación de los aprendizajes de los olímpicos. Con la tercera parte del cuestionario, constituida por las interrogantes de la 5 a la 8, se busca indagar en la dinámica de los entrenamientos y sobre todo en las estrategias didácticas que implementan los entrenadores para promover el logro de los objetivos. Finalmente, las preguntas de la 9 a la 12 conforman el cuarto apartado, cuyo objetivo central es determinar qué concepciones son predominantes en el entrenador de olimpiadas de matemáticas acerca del desarrollo del talento matemático.

El instrumento descrito se presenta íntegramente a continuación:

Estimado(a) Entrenador(a):

Frente a usted tiene un cuestionario que creemos le tomará unos 30-40 minutos responder. Las respuestas que nos proporcione serán confidenciales y tendrán como única finalidad aportar datos para la investigación que estoy realizando como parte de mis estudios de posgrado en torno a los alumnos con talento matemático y las Olimpiadas Mexicanas Matemáticas para la Educación básica.

Se le aclara que no hay respuestas consideradas correctas o incorrectas y se le solicita que responda ampliamente.
Atentamente,
Lic. Rogelio Plácido Mier Macias.

CUESTIONARIO PARA LOS ENTRENADORES DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Estado ____________________ **Municipio:** ____________________

Formación Académica: ____

Experiencia como competidor(a): ____**(años).**

Experiencia como entrenador(a): ____**(años).**

1- ¿Qué temas matemáticos (a nivel general) considera indispensables dentro de los entrenamientos a participantes en Olimpiadas Matemáticas de la Educación Secundaria? Escríbalos en el orden en que los abordaría y exponga algunas ideas acerca del por qué el orden que propone.

2- ¿Cómo estructura (si lo hace) la planeación de la sesión de entrenamiento?

3- ¿Qué criterios toma en cuenta para la selección de los problemas que trabajará durante la sesión de entrenamiento?

4- ¿Qué tipo de actividades recomendaría trabajar con los alumnos que se inician (novatos) en el contexto de las Olimpiadas Matemáticas dentro de la Educación Secundaria?

5- ¿Cuál es la dinámica de trabajo que suele emplear en los entrenamientos? Si en ella distingue momentos (inicio-desarrollo-cierre), realice una breve descripción de las acciones que los caracterizan, si no, hágalo a nivel general.

6- ¿Cómo motiva (acciones) al grupo de alumnos que participa en los entrenamientos?

7- ¿Cómo promover desde el entrenamiento el empleo de estrategias heurísticas clave, "de uso recurrente", en el proceso de solución de tipologías de problemas relacionados con temas matemáticos específicos? (Sea para el diseño del plan para atacar un problema, la ejecución de éste o cualquier otra fase del proceso de solución). Ejemplifique con un caso.

8- ¿Cómo evalúa el desarrollo del aprendizaje de los alumnos que entrena?

9- Desde su perspectiva sobre el talento matemático, éste ¿nace o se hace?

10- ¿Considera que este tipo de trabajo (RP de Olimpiadas) favorece el desarrollo del talento matemático? ¿Por qué?

11- ¿Qué diferencias aprecia entre la enseñanza tradicional de matemáticas y los entrenamientos de olimpiada (contestar ya sea desde su experiencia como docente, o bien, como estudiante)?

12- ¿Ha trabajado/trabaja como docente en la enseñanza secundaria? ¿Desde su concepción cree que sea conveniente trabajar algunos problemas de niveles introductorios de olimpiadas en las clases de manera regular?

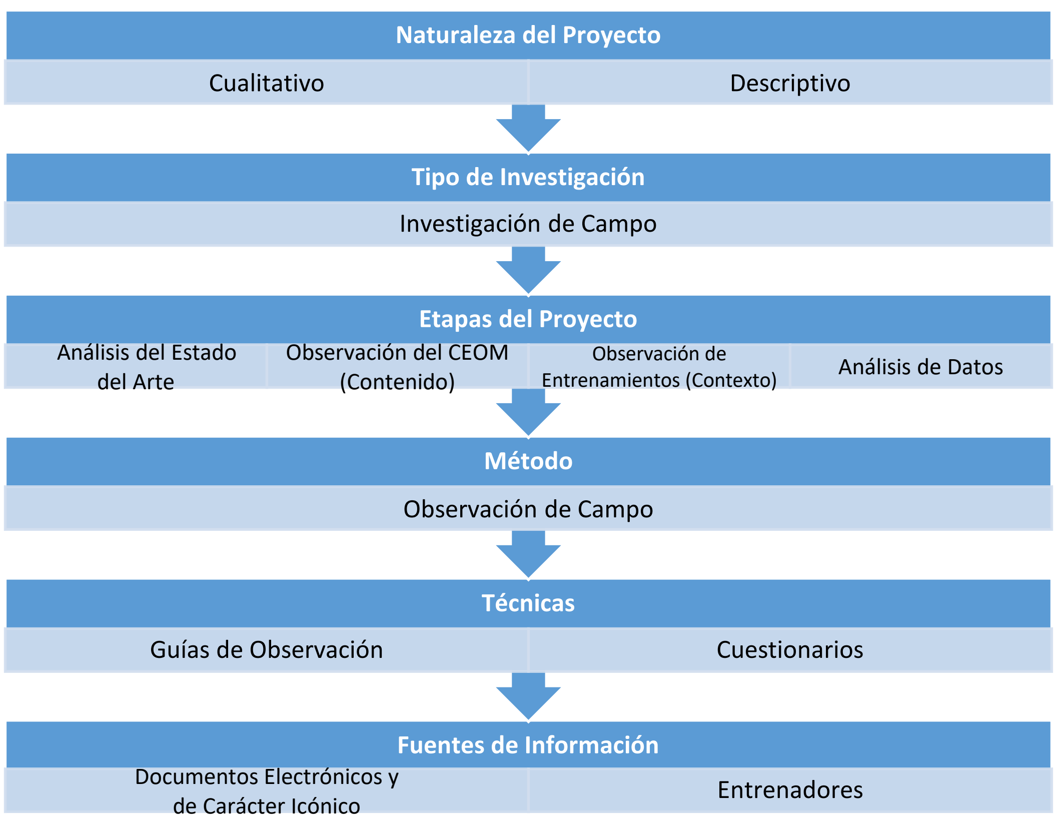
Gracias por su colaboración.

En el análisis de los datos recopilados con la aplicación del instrumento se consideran todas las aportaciones del entrenador, evaluando, en algunos casos, su viabilidad para el contexto áulico de la secundaria mexicana de hoy. Además, como se mencionó anteriormente, los datos se comparan de forma más o menos explícita, con las regularidades emanadas de las observaciones en el campo.

En síntesis, la metodología implementada en esta investigación puede resumirse en la siguiente tabla:

Tabla 4.

Descripción general de la Metodología.



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En el siguiente apartado se presentan los datos obtenidos con la aplicación de los instrumentos y su correspondiente análisis. Según Hernández *et al*. (2010) "el análisis cualitativo implica organizar los datos recogidos, transcribirlos a texto cuando resulta necesario y codificarlos" (p. 406).

Estos procedimientos, mencionados por Hernández *et al.*, tienen lugar en los epígrafes y subepígrafes que se determinan en el presente capítulo atendiendo a los escenarios que dan origen a los datos y una buena parte de ellos a la par de su obtención.

4.1 Análisis del *contenido* en el CEOM de CARMA, 2019

El Curso para Entrenadores de Olimpiadas de Matemáticas en su segunda edición se inició en la fecha prevista (1 de octubre de 2019) bajo la conducción del Lic. Eugenio Daniel Flores Alatorre, director de CARMA.

La interacción entre el experto entrenador y sus discípulos se dio de manera virtual en el marco de 16 sesiones formales y 8 talleres, que tuvieron lugar a lo largo de 17 semanas de trabajo que en total abarcó el curso; promediando 150 min de clases en vivo por semana, a través de la plataforma Zoom, con micrófonos, chats y cámaras abiertas para todos los participantes. Además, de manera permanente se creó un grupo en Facebook que, junto al de *Hangouts*, actuaron como foro y permitieron compartir dudas, comentarios y en correspondencia recibir retroalimentación. Hay que señalar que el acceso al material no expira ya que queda expuesto permanentemente en la plataforma del curso con sus correspondientes enlaces al canal de "Uge Saurio" en YouTube.

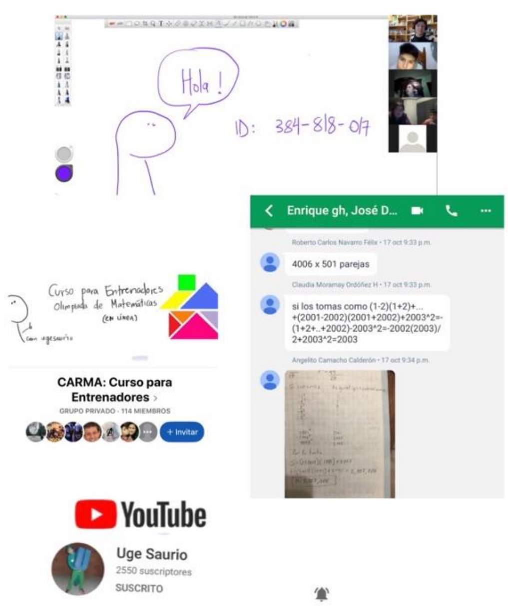


Figura 9. Plataformas de interacción para la segunda generación del CEOM de CARMA 2019.

Cabe resaltar que, según se refiere en uno de los videos introductorios del Curso, específicamente en (S_0V_1, min: 5) [también constatado en la experiencia propia], la forma de trabajo implementada difiere de lo acostumbrado para los primeros acercamientos introductorios a los entrenamientos, donde, habitualmente, se proponen listas de problemas variados y sencillos, en ocasiones de opción múltiple, seleccionados de los exámenes de las etapas preliminares aplicados en cursos anteriores y, transcurrido cierto tiempo, se analizan las soluciones tratando de resaltar algunas ideas que se repiten una y otra vez. La dinámica del curso opta por el trabajo con problemas relacionados por temáticas, mismos que giran alrededor de una idea, un concepto o una estrategia. Las temáticas cubiertas por el curso se organizan en cinco módulos como se muestra en la siguiente imagen de la plataforma:

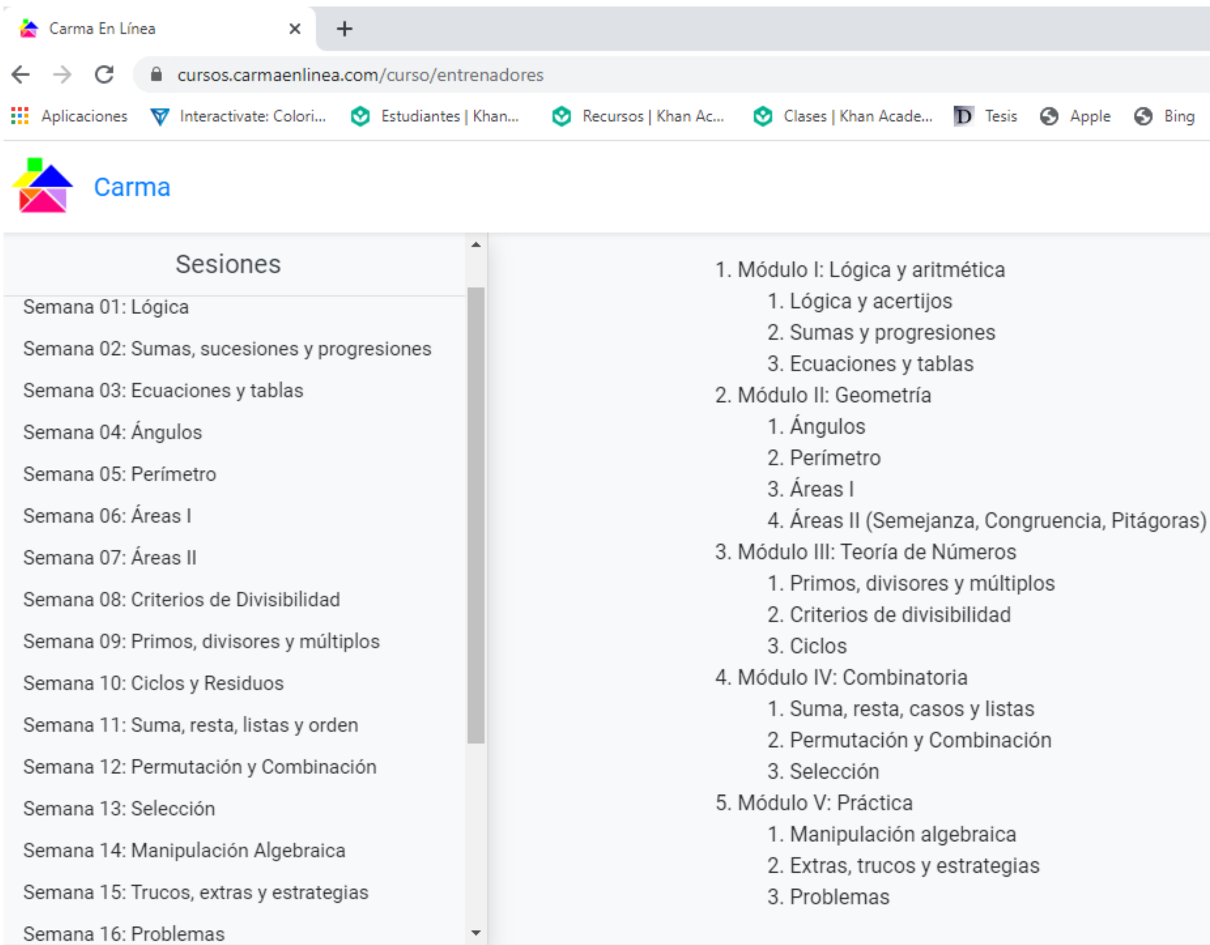


Figura 10. Organización del CEOM de CARMA 2019, por semanas, temas y módulos.

Los documentos electrónicos se ofrecen organizados por temas. Contienen una breve introducción para cada uno que deja ver, implícita o explícitamente, el propósito de su concepción, así como aspectos importantes de la teoría inherente al tema. La parte central de los documentos la constituyen vastas listas de problemas que, según se ratifica en el actual video de presentación del curso, CARMA (2020), "han sido extraídos, principalmente, de los temarios de olimpiadas estatales y nacionales, cubriendo todos los temas para tener una buena participación, al menos, en la primera de las instancias mencionadas" (min: 2). Las listas de problemas incluyen diferentes categorías, observándose en total 13 juegos, 23 acertijos, 278 problemas, 19 ejercicios, 10 ejemplos y 99 retos, estos últimos entendidos como problemas en su mayoría de olimpiadas nacionales con mayor grado de dificultad. Cabe señalar que en dichos documentos no se presenta una solución para los problemas enlistados, a excepción de los que se presentan en la categoría de ejemplos.

Además de los documentos descritos, una fuente para el análisis de suma importancia la constituyen los videos que acompañan a cada tema ($total\ 36\frac{1}{2}h$), los cuales sirven para introducir la teoría necesaria, que es complementada y enriquecida en las sesiones en vivo ($total\ 31h$). Estas sesiones que, como se mencionó anteriormente, pasan a formar parte del material disponible en la plataforma junto a las impartidas a la primera generación, son utilizadas para ejemplificar estrategias e ideas importantes a partir del análisis de algunos de los problemas paradigmáticos del material, según la experiencia del entrenador. Por su parte, con los talleres en vivo ($total\ 11\frac{1}{2}h$) se busca ampliar la interacción a través de las aclaraciones de dudas puntuales planteadas por los receptores del curso con relación a los problemas del material. En general, para la segunda generación del CEOM, se dispuso de aproximadamente de 79*h* de material audiovisual. A continuación, se presenta una captura de la plataforma en la que se muestra la organización del material disponible respecto a la semana 2:

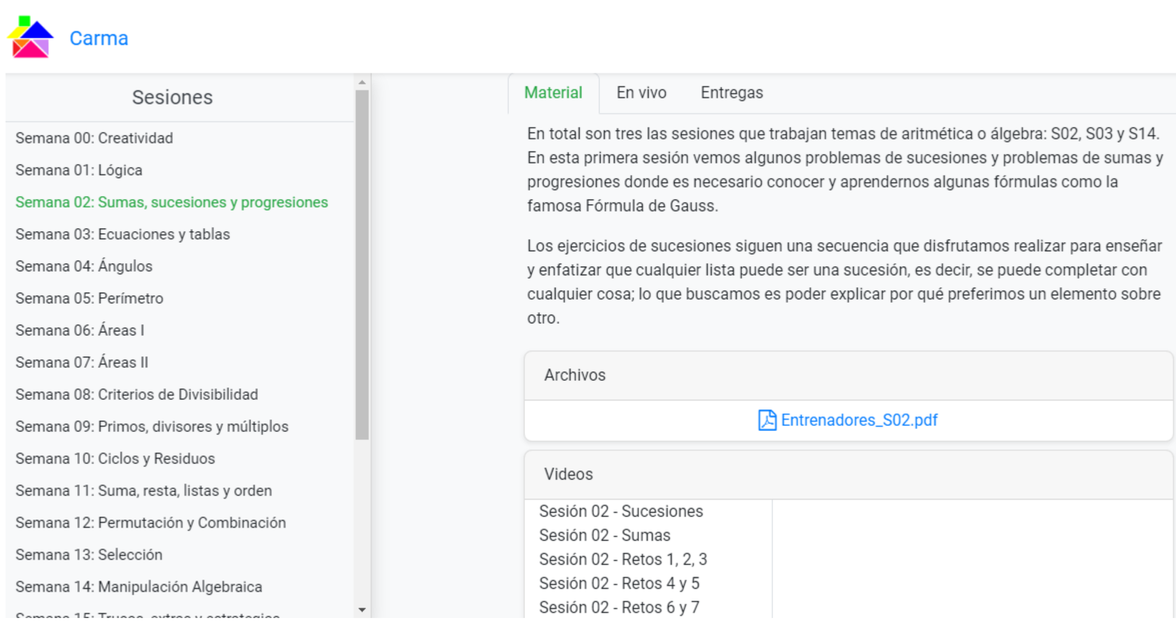


Figura 11. Material en la plataforma del curso para la semana 2.

Seguidamente se presenta como parte central del análisis en este apartado las principales ideas del *contenido específico* de las olimpiadas matemáticas en el material disponible para cada tema. Para ello, se transcriben análisis de problemas que resultan representativos para ejemplificar estas ideas. El criterio de selección de los problemas es la posibilidad de evidenciar las principales estrategias y aspectos teóricos asociados a cada uno de los temas a través de soluciones comentadas. Es importante añadir que en muchas ocasiones se reorganiza el discurso del experto entrenador y se presenta con forma propia en aras de que sea más comprensible para el lector.

4.1.1. Módulo I: Lógica y aritmética.

4.1.1.1. Sesión 1: Lógica

Tabla 5.

Fuentes de información disponibles para el tema "Lógica".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S1	Juegos lógicos. Acertijos y problemas. Acertijos.	Ia, Ib, Ic J1, J2, …, J13 P1, P2, …, P12 R1, R2, …, R4 A1, A2, …, A23	Sesión en vivo	V1	94
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	81
			Lógica con juegos, acertijos y problemas	V3	9
			3 en fila	V4	5
			Rascacielos	V5	5
			Puentes	V6	4
			Juegos en parejas	V7	11
			Tipos de acertijos	V8	10
			Problemas con básculas	V9	14
			Problemas de surtidos	V10	24
			Problema 5	V11	8
			Retos	V12	32
	Totales	52			297 min

Propósito general en el tema:

Promover el razonamiento deductivo a partir de las implicaciones lógicas en juegos, acertijos y problemas que despierten el interés del estudiante (S_1V_1, min: 1).

Descripción:

Se proponen, como forma de iniciación de los estudiantes en la realización de deducciones lógicas, el método lúdico. Esta sugerencia didáctica parte de la consideración de juegos y acertijos lógicos como actividades amenas y divertidas que, por su carácter retador intrínseco, despiertan el interés de los estudiantes. Este tipo de actividades posibilita el desarrollo de capacidades inherentes al talento matemático y por tanto al éxito de un competidor de olimpiadas de la disciplina, por lo que suelen ser usadas por muchos entrenadores como calentamiento al iniciar las sesiones.

Entre las capacidades cognitivas que se promueven con esta práctica está la de "*verbalizar*", dicho de otra manera "*comunicar información*". En este sentido, en (S_1I_a) se explica la ganancia está dada en que constituye un primer paso para atacar el "por lógica", "yo me entiendo" o "no sé cómo lo hice, pero lo hice", que con frecuencia dan los estudiantes al explicar, e irlo convirtiendo, en la medida en que aumente su grado de familiarización con estos problemas, en soluciones más claras para los demás. En (S_1V_1, min: 16) el entrenador relaciona la importancia que le atribuye a los juegos. La figura 12 captura lo escrito en su exposición:

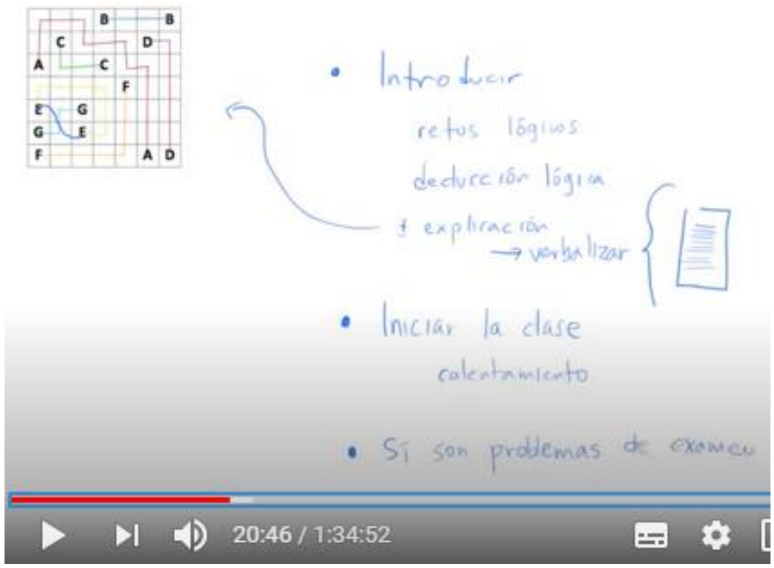


Figura 12. Importancia de los juegos lógicos.

De la misma forma, en la introducción de uno de los documentos dados como parte del material de la semana (S_1I_a) se explica que sobre todo en los juegos, donde la dinámica impone que, siguiendo sus propias reglas y dadas las condiciones iniciales, la decisión tiene que ser la correcta, generalmente es muy sencillo explicar cuál es esa regla que hace una decisión necesaria (no se pueden repetir números, no se pueden poner cuatro en fila, los números tienen que estar ordenados, etc.). Esto llevaría a que, con la práctica, pudiese hacerlo en un problema de Olimpiada de forma natural. Esta capacidad de los olímpicos deseable y necesaria en todo el ámbito escolar, e inclusive, extraescolar, se refiere en (S_1V_1, min: 23) como la capacidad de *seguir instrucciones.* (Figura 13).

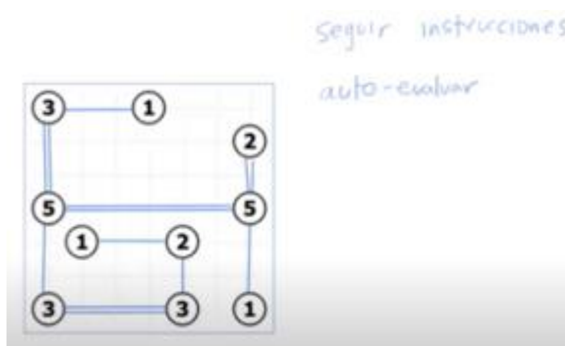


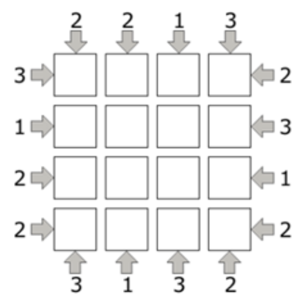
Figura 13. Beneficios de los juegos lógicos.

Otro de los beneficios que propicia la práctica es que, una vez conocidas las instrucciones y la dinámica a seguir, los estudiantes pueden ser capaces de decidir si lo pudieron resolver o no, es decir, pueden *autoevaluarse* conscientemente con independencia del profesor/entrenador.

Material: Juegos.

Se presentan varios juegos, en su mayoría de origen japonés, según se dice en ($S_1 I_a$), que pueden ser utilizados para los fines aquí enunciados. En ($S_1 V_2$, min: 25) el entrenador complementa la información, añadiendo además que haciendo uso de la red de redes podemos encontrar una gran variedad de ellos con distintos niveles de dificultad listos para descargar e imprimir, incluso, como aplicaciones gratuitas para móviles. Un ejemplo de este tipo de juegos presentado en el material ($S_1 J_7$), a raíz de que apareciera en una IMC se, presenta a continuación:

<u>*Rascacielos*</u> (Skyscrapers)



Cada cuadrícula es una ciudad. En cada fila o columna hay cuatro (o cinco) edificios de distintas alturas: 1, 2, 3, 4 (y 5). Desde cada orilla, se alcanzan a ver algunos edificios, tantos como indica el número. Un edificio más alto tapa a los edificios de menor altura. Por ejemplo, si los edificios estuvieran ordenados 2 1 3 5 4, entonces desde la izquierda se alcanzarían a ver 3 edificios (2, 3 y 5) y desde la derecha se alcanzarían a ver solo 2 edificios (4 y 5).

Acomoda los edificios con ayuda de las pistas en las orillas. Recuerda que no se pueden repetir alturas en la misma fila o en la misma columna.

En el video ($S_1 V_5$, min: 2) se ejemplifica la manera en que tenemos que ir estudiando las pistas que cada número indica la cantidad de edificios que se ven y los edificios más altos tapan a los más bajos, por lo que, en cada uno de los lugares donde está puesto el 1, sólo se ve el que está enfrente de ti, pero ese siempre se ve y el otro que siempre se ve es el edificio más alto de todos (4), como sólo se ve uno, quiere decir que el que está en frente es el más alto.

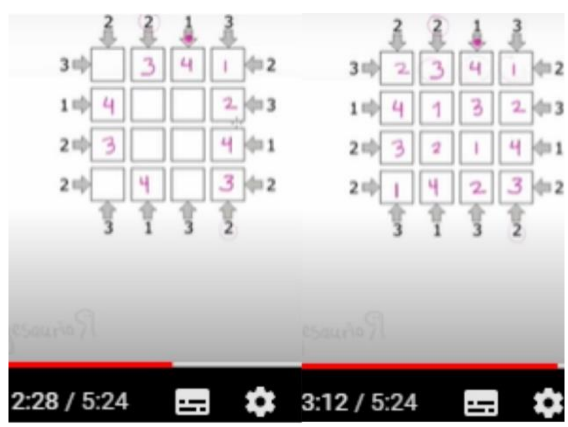


Figura 14. Análisis y solución del juego Rascacielos.

Por la misma razón cuando ves dos edificios, dado que siempre se ve el de enfrente y el más alto (4), si este último está al final, el de enfrente debe ser el anterior más alto (3) para que tape a los otros dos (Figura 13 a la izquierda). En adelante es posible seguir completando con la regla base del Sudoku implícita en las reglas de este juego, la cual impide que se repitan números en filas y columnas. En la Figura 15 se captura una solución completa.

Algunos de estos juegos también pueden jugarse entre dos o más jugadores de forma competitiva. Entre los que se mencionan en el material para este fin se encuentran el Conway/Paterson´s Sprouts y el Gato Extremo. Este último, según se explica en (S_1V_7, min: 2), es una viariante del juego del Gato Tradicional que lo lleva al extremo. El Gato Tradicional es un juego poco entretenido ya que siempre que sea jugado entre dos que conozcan el juego y presten la suficiente atención termina en empate. En el Gato Extremo por su parte, se considera un "gato" grande con uno pequeño en cada uno de los nueve cuadrantes que se determinan como se muestra en la Figura 15. Para ganar, un jugador deberá ganar 3 cuadrantes (en fila, columna o diagonal) en el gato grande.

Figura 15. Juego en parejas. Gato Extremo.

Una variante interesante entre sus reglas es que, dependiendo de dónde haga cada jugador su "jugada", será el lugar donde el siguiente en turno podrá hacerla. Por ejemplo, en la Figura 15 se muestra que el primer jugador marcó en la primera columna, segunda fila, (0), lo que obliga al segundo jugador a concretar su jugada en el gato que se encuentra en esta posición (x). Por la jugada que se visualiza en la figura, el siguiente (0) deberá tomar la 2da columna de la primera fila; y así, sucesivamente. Otro elemento importante de regla se pacta previamente entre los participantes y es para cuando un jugador manda al otro hacia un cuadrante ya decidido, en cuyo caso se opta por una de dos variantes. La primera, conocida como la "obligada", determina que de forma invariable deba jugar en este cuadrante, por lo que en la práctica estaría perdiendo su turno. En la variante "libre" lo pactado es que, en estos casos, el jugador en turno tenga la libretad de dicidir en qué cuadrante jugar, tal y como ocurre cuando la jugada anterior te lleva a un cuadrante donde ya no hay lugar para marcar.

Otros de los juegos que se recomiendan en el material (S_1I_a) se presentan también por su nombre para facilitar su búsqueda en Internet. Ellos son: Hidato, Numberlink, Afuera luces (Light Up), Puentes (Bridges), Dominosa, Picross, 3 en fila, Camino ABC, Vecinos, Nurikabe, Kakuro y Slitherlink. A continuación, se presentan ejemplos de variantes de los primeros cinco juegos aquí relacionados, tal y como aparecen en el referido material, y como muestra de éste:

<u>Hidato</u> (S_1J_1)

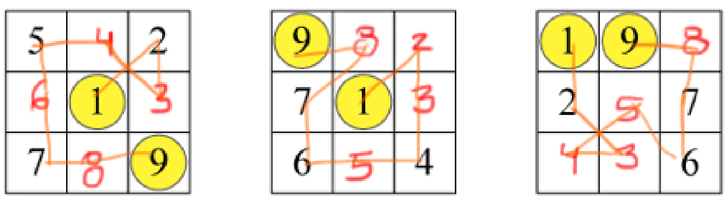
Tenemos un tablero en donde se deben colocar los números del 1 al 9, del 1 al 16 o del 1 al (…), según el tamaño del tablero. La finalidad es que, después de que coloques los números, puedas hacer un camino ininterrumpido desde el primer número hasta el último. El camino se puede conectar de manera horizontal, vertical o diagonal pero únicamente a un cuadrito de distancia.

5		2
	1	
7		9

9		
7	1	
6		4

1	9	
2		7
		6

Solución: (en ocasiones no es única).



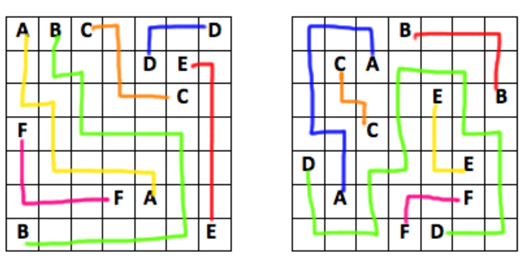
.<u>*Numberlink*</u> (también conocido con otros nombres) (S_1J_2)

La idea es unir cada pareja de números o letras con caminos que no se crucen entre sí. Los caminos ocupan el cuadro completo y todos los caminos deben llenar el tablero completo.

A	B	C				D
				D	E	
					C	
F						
			F	A		
B						E

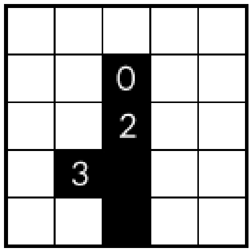
			B			
	C	A				
				E		B
		C				
D					E	
	A				F	
			F	D		

Solución:

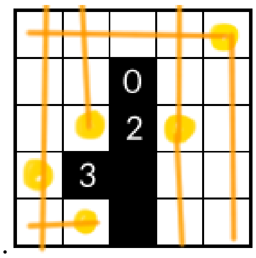


<u>*¡Afuera luces!*</u> (Light Up) (S_1J_3)

Se trata de iluminar todos los cuadritos del tablero (excepto los que están pintados de negro). Las pistas son los cuadritos con número, que indican cuántos de los cuadros que comparten lado (vertical u horizontal) tienen un foco; es posible agregar focos (cantidad mínima necesaria). Un cuadro está iluminado si está en la misma fila o columna que un foco, excepto si un cuadro negro se interpone entre ellos.

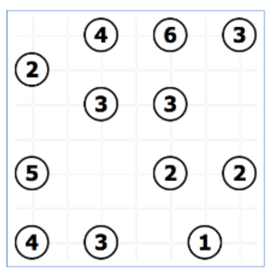


Solución: (no es única).

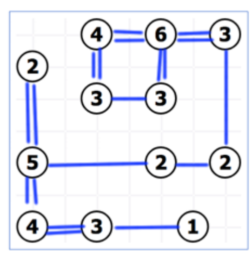


Puentes (Bridges) (S_1J_4)

Los círculos representan ciudades y el número adentro es la cantidad de puentes que conecta esa ciudad con las demás, sólo que los puentes no están dibujados; ésa es la tarea. Restricciones: Los puentes no pueden ir en diagonal, sólo pueden ir completamente verticales u horizontales. Los puentes no se pueden cruzar entre sí. Puede haber 1 o 2 puentes que conecten una pareja de ciudades, no más. Un puente cuenta para las dos ciudades que conecta (y nada más para ellas dos).



Solución:

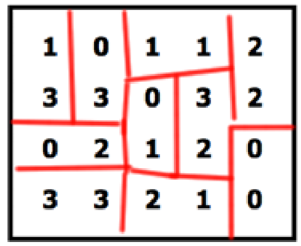


Dominosa (S_1J_6)

En cada tablero están "escondidas" todas las fichas de dominó hasta cierto número. Por ejemplo, en un tablero de 3x3 están las fichas 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 1-1, 1-2, 1-3, 2-2, 2-3, 3-3, cada una exactamente una vez. Debes dividir el tablero de manera correcta para que las fichas "aparezcan".

Nota: las fichas están sólo horizontales o verticales, no es válido en diagonal. Las fichas son las mismas sin importar el orden; por ejemplo: 1-3 y 3-1 es la misma ficha.

1	0	1	1	2
3	3	0	3	2
0	2	1	2	0
3	3	2	1	0

Solución: 

Material: acertijos.

En el material ($S_1 I_b$) se deja ver que, de forma similar que para el caso de los juegos y con la misma intencionalidad didáctica, los acertijos lógicos "no capciosos" (no son adivinanzas, no se están dados por juego de palabras, dobles significados, etc. ($S_1 V_8$, min: 1) constituyen una herramienta con mucho potencial para inducir las deducciones lógicas de los discentes. La Internet también es una fuente prácticamente inagotable de acertijos variados muchos de ellos ya clásicos. Entre los más conocidos existen algunos con ciertas similitudes que los hacen corresponder a tres grandes grupos según se explica en $S_1 V_8$, (Figura 16), siendo éstos: algorítmicos, de verdadero o falso y los de conocimiento perfecto.

Figura 16. Tipos de acertijos.

Acertijos Algorítmicos: ($S_1 V_8$, min: 3)

Son aquellos donde la solución pasa por encontrar una manera de hacer lo que se pide, ejemplos tradicionales de estos acertijos son los de *básculas*, con las cuales miden pesos exactos y los de *balanzas* que, a diferencia de las primeras, permiten hacer comparaciones inclinándose del lado más pesado. Por lo general, en ambos casos, el número de pesadas es limitado. Otros ejemplos de acertijos algorítmicos son los que aluden a *cubetas de agua* o *relojes de arena* cuya regla impone realizar mediciones con estos objetos carentes de medidas parciales y donde a veces se tiene acceso a una llave (puedes rellenar) y a veces no, tampoco es posible calcular un litro "al tanteo" y, en los segundos, puedes medir el tiempo exacto que dice, pero de la misma forma no puedes "adivinar" el parcial. También conocidos dentro de este grupo se ubican los acertijos de *cruzar el río* donde la dinámica condiciona algunas cargas o cantidades incompatibles usando un puente o una embarcación.

Para tener éxito ante este tipo de acertijos ayuda mucho la *intuición*, vista como la capacidad de anticipar lo que ocurriría al tomar alguna decisión. De igual forma se debe hacer presente una dosis de *ingenio* que haga aflorar ideas que permitan acercarse al propósito. Cuestiones medulares en el trabajo con los acertijos algorítmicos son la *paciencia* y el *orden* ya que en ocasiones pueden ser tediosos por repetitivos y extensos por lo que puede ser demorado el hallazgo de la solución. Es recomendable la utilización de *listas*, *tablas* o *diagramas* para registrar los movimientos que se van haciendo y los nuevos resultados que se van obteniendo.

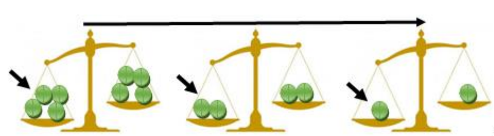
Ejemplos de acertijos algorítmicos:

<u>Balanza</u> ($S_1 A_9$)

Tienes 8 pelotas idénticas en forma, tamaño, color y textura. La diferencia es que una de las pelotas pesa más que el resto. Usando una balanza nada más 2 veces, ¿cómo puedes saber cuál es?

Análisis inicial: ($S_1 V_1$, min: 54)

Advertir que es un ejercicio perfectamente posible, cuya dificultad está dada por la condición que establece que la balanza solo puede usarse <u>2 veces</u>, de otra forma, sería muy sencilla su solución, ejemplo:



Búsqueda de variantes para atacar el problema: ($S_1 V_1$, min: 56)

- Colocando 4 pelotas en cada brazo de la balanza necesito 3 pesadas.
- Colocar cantidades distintas en cada brazo de la balanza es muy probable que no arroje una información determinante.
- Lo anterior me lleva a probar colocando otras cantidades iguales en cada brazo de la balanza, ejemplo con 3:

Solución: ($S_1 V_1$, min: 56; figura 17 a la izquierda, a la derecha se presenta con forma propia el mismo algoritmo).

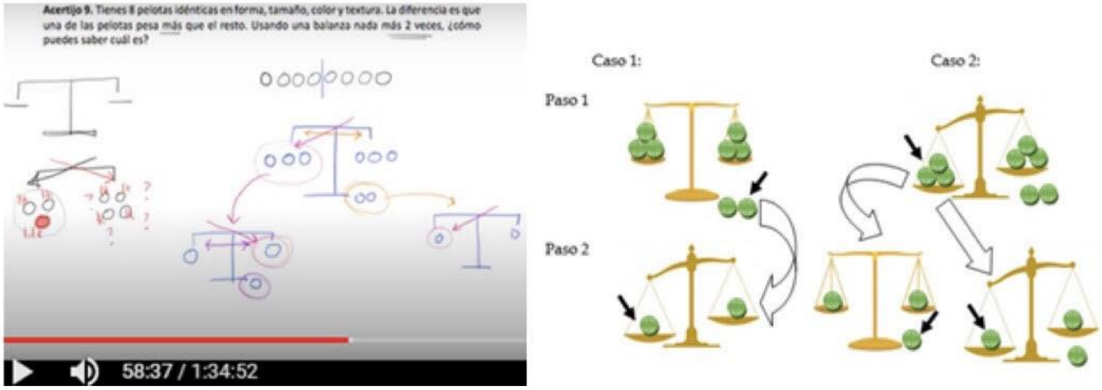


Figura 17. Solución del acertijo 9.

<u>*Báscula*</u> (S_1A_{10})

Tienes una báscula y 10 bolsas con 1000 monedas cada una. Una de las bolsas está llena de monedas falsificadas mientras que las otras 9 están llenas de monedas genuinas. Las monedas falsificadas y genuinas son idénticas en forma, tamaño, textura, color, etcétera, con la diferencia de que las genuinas pesan 10g y las falsificadas pesan 11g cada una. Usando la báscula nada más 1 vez, ¿cómo puedes saber cuál es la bolsa que tiene monedas falsificadas?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Total

= 10

Análisis inicial: (S_1V_9, min: 2)

- La bolsa más pesada contiene las monedas falsificadas.

Búsqueda de variantes para atacar el problema: (S_1V_9, min: 3)

- ¿Si pesara las bolsas juntas qué? R/Irrelevante.
- ¿Con cuántos pesajes como mínimo se puede asegurar que se encontraría la bolsa más pesada? R/ Con 9 (incompatible por condición de pesaje único).
- Conclusión, no es posible hacerlo a partir del pesaje de las bolsas.
- ¿Qué puedo hacer si tomo monedas de las bolsas?, ¿cómo las identifico con cada bolsa?

Solución: (S_1V_9, min: 4)

Se toman cantidades de monedas en correspondencia con el número de orden de cada bolsa:

+1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 =45

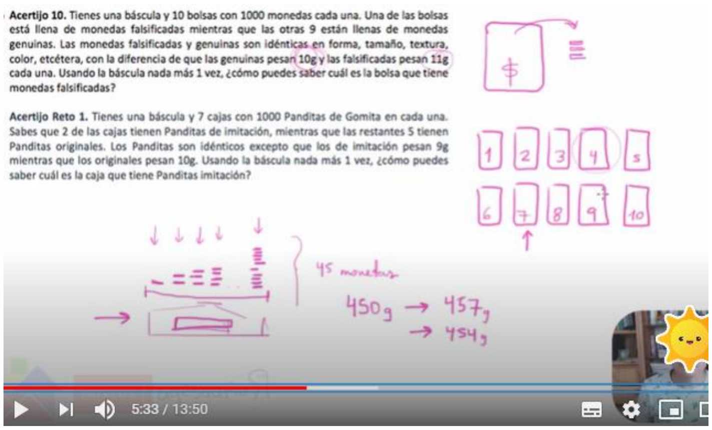


Figura 18. Procedimiento de solución del acertijo 10.

Supuesto: todas genuinas $45 \cdot 10 = 450$g
Realidad: 45 monedas = 450g + X; (X = exceso en g = cantidad de monedas falsas).
Ejemplo:
La báscula dice que el peso es de 457g.
Como el exceso es de 7g puede asegurarse que hay 7 monedas falsificadas y por tanto la bolsa que las contiene es la 7.

<u>*Cubetas de Agua*</u> (S_1A_5)

Con una cubeta de 5 y otra de 3 litros que no tienen marcas de medidas parciales y acceso a una llave, ¿cómo puedes medir 4 litros?

Análisis inicial: (S_1V_1, min: 30)

- No puedo determinar con exactitud hasta donde hay 1L, 2L, 4L o la mitad de alguna de las cubetas directamente.

Búsqueda de variantes para atacar el problema: (S_1V_2, min: 32)

- Puedo realizar operaciones (llenado y vaciado de una en la otra).

Solución: (S_1V_2, min: 32)

▲= 1L

1^{ero}	▲▲▲▲▲	⟶		
	▲▲		▲▲▲	⟶ se tiran
2^{do}		⟶	▲▲	
3^{ero}	▲▲▲▲▲	⟶		
4^{to}	<u>▲▲▲▲</u>		▲▲▲	

La solución anterior constituye una versión más clara y detallada de la expuesta por el entrenador (figura 19).

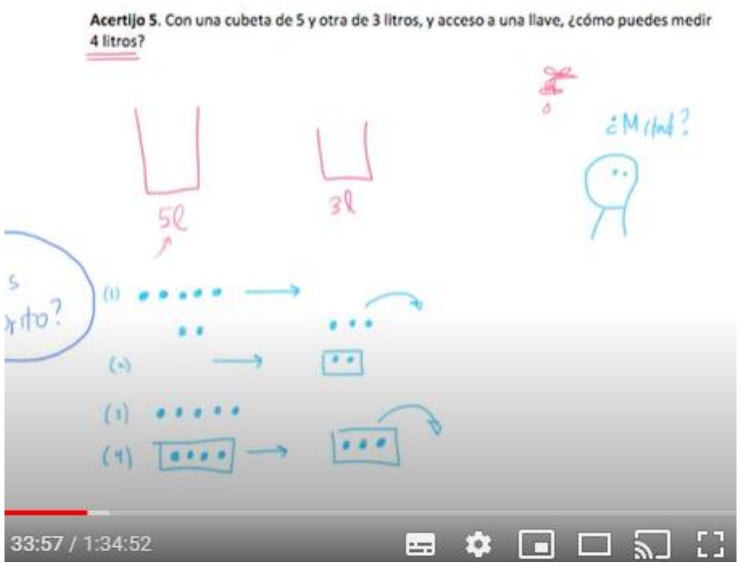


Figura 19. Solución del acertijo 5.

<u>*Relojes de Arena*</u> (S_1A_7)

¿Cómo se pueden medir exactamente 15 minutos utilizando dos relojes de arena de 11 y 7 minutos respectivamente?

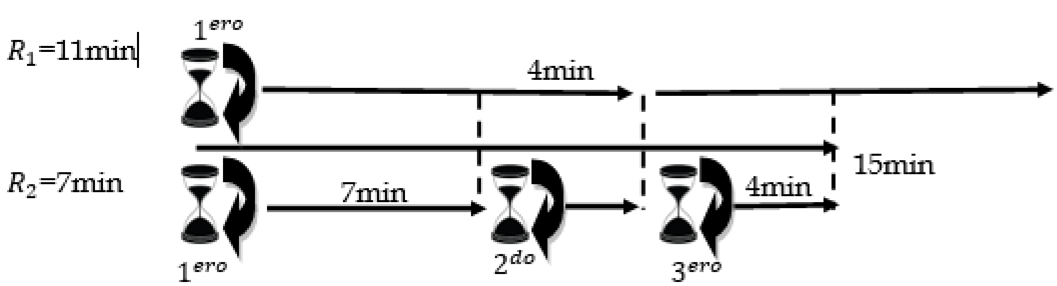
Análisis inicial: (elaboración propia)

- El tiempo no se detiene.
- Directamente ninguno de los dos relojes me permite hacer la medición.

Búsqueda de variantes para atacar el problema:

- Puedo realizar operaciones (mediciones parciales con la utilización individual o simultánea de los relojes).

Solución: (Propia)



<u>*Cruzar el Río*</u> (S_1A_{12})

Hace mucho tiempo, un granjero compró un lobo, una cabra y una col. Para volver a su casa tenía que cruzar un río. La única manera de cruzar el río es con una barca, pero en la barca solo caben él y una de sus compras. Además, si el lobo se queda solo con la cabra, se la come; si la cabra se queda sola con la col, se la come. Después de algunos viajes, el granjero logró cruzar del otro lado con sus compras intactas. ¿Cómo lo hizo?

Análisis inicial: (S_1V_2, min: 28)

- La barca sólo tiene espacio para dos.
- Los animales ni la col pueden cruzar por sí solos.
- Por cadena alimenticia el lobo se come la cabra y ésta a su vez a la col si el granjero no está presente.

Búsquedas de variantes para atacar el problema: (S_1V_2, min: 28)

- Se trata de que queden a un mismo lado el lobo y la col en ausencia del grajero.

Solución: (Adecuación propia que toma como base el algoritmo presentado en (S_1V_2, min: 32)).

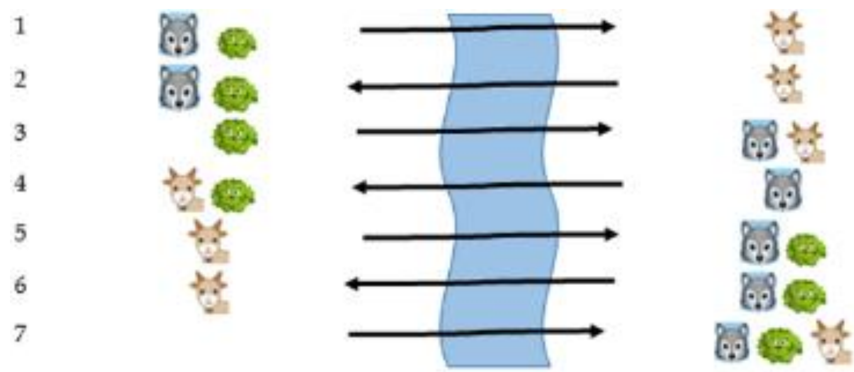


Figura 20. Solución del acertijo 12.

Acertijos de Verdadero y Falso: (S_1V_8, min: 5)

La clasificación que utiliza el nombre de acertijos de Verdadero o Falso para referir acertijos peculiares que como el propio nombre lo indica contienen argumentos "ciertos y falsos". Entre ellos se pueden distinguir algunos que utilizan diversos tipos de etiquetas como los de *Caballeros y Bribones*, e inclusive podemos encontrar dentro de este tipo de acertijos el *verdadero y falso* tal cual.

Un elemento muy importante para considerar al trabajar con estos acertijos es la *referencialidad*, ya que las cosas del problema están conectadas entre sí, es decir, una afirmación hace referencia a otra afirmación y así sucesivamente. En general, esta tipología de acertijos se ataca a partir del análisis de *casos* en busca de la *contradicción* por lo que también se necesita trabajar con paciencia y orden, puede simplificar el trabajo la *identificación de contrarios*, entendido como afirmaciones diametralmente opuestas para lo cual la *observación* es clave. Dado lo anterior, muchas veces es conveniente utilizar *tablas de valores de verdad*, consistentes en asignar un valor de verdad (verdadero o falso) a una proposición y a partir de ahí deducir los valores de verdad de las demás proposiciones y seguidamente analizar los casos en busca de identificar las que no arrojen contradicciones.

Ejemplos de acertijos de Verdadero y Falso:

<u>*Caballeros y Bribones*</u> (S_1A_{1b} y S_1A_3)

En cierta isla alejada del resto de la sociedad viven dos pueblos en paz: Caballeros y Bribones. Los Caballeros siempre dicen la verdad y los Bribones siempre dicen mentiras. A partir de ciertos dichos, tienes que decidir si las personas son Caballero o Bribón.

Te encuentras con dos habitantes de la isla: A y B.

A1b) A: B es un Bribón.
B: A y yo somos ambos Bribones.
A3) A: Entre B y yo, exactamente uno es un Caballero.
B: Solo un Bribón diría que A es un Bribón.

¿Puedes determinar quién es Caballero y quién es Bribón en cada caso?

Con la intención de hacerlo más ilustrativo, en el ejemplo anterior se fusionaron dos de los acertijos propuestos en el material, los cuales se presentan aquí a manera de incisos. En (S_1V_1, min: 43) se analiza el A_3 como se muestra en la Figura 21.

Solución:

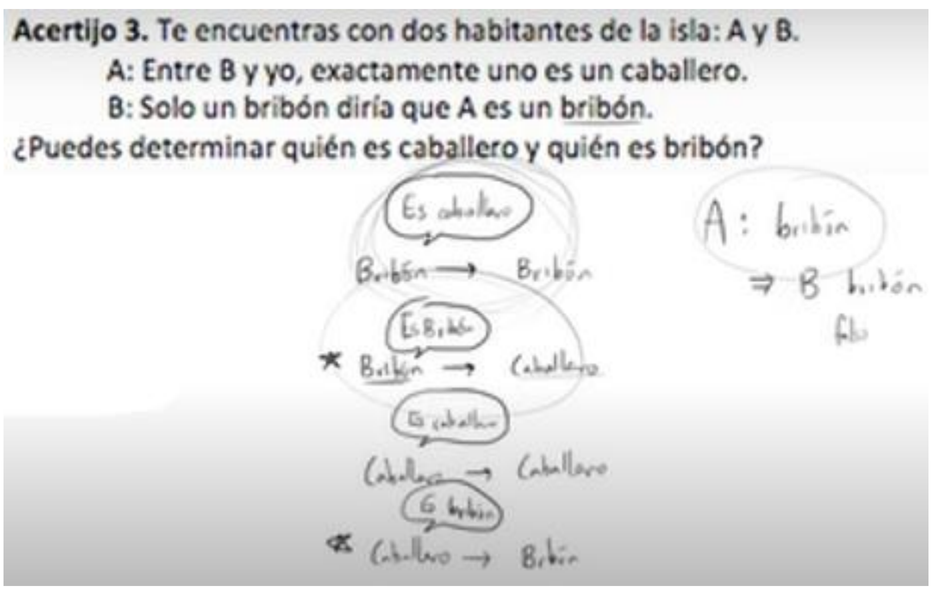


Figura 21. Solución del acertijo 3.

La explicación dada en este análisis se sintetiza de forma organizada en la segunda parte, en la primera parte se expone un análisis similar para el A_{1b}.

	Casos	1	2	3	4
	A	C (V)	B (F)	C (V)	B (F)
	B	B (F)	C (V)	C (V)	B (F)
A1b)	Análisis	<u>Observando B</u> ¿Quién puede decirse a sí mismo Bribón? R/ Sólo un Bribón.			

		B-Bribón Dice que lo es y miente cuando se refiere a A. A-Caballero Dice verdad al referirse a B. <u>No hay Contradicción</u>	B-No puede ser Caballero.	B-No puede ser Caballero.	B-Bribón. Dice que lo es y miente cuando se refiere a A. A-Bribón Pero dice la verdad. <u>Hay contradicción</u>
A3)	Análisis	<u>Observando A</u> ¿Qué puede decirse de B? R/B-Bribón			
		B-Bribón Miente cuando se refiere a A. <u>Hay contradicción</u>	B-No puede ser Caballero.	B-No puede ser Caballero.	B-Bribón Miente cuando se refiere a A. <u>No Hay contradicción</u>

<u>*Mañana mienten*</u> (S_1P_2)

Eduardo miente los miércoles, jueves y viernes y dice la verdad el resto de la semana, Andrés miente los domingos, lunes y martes y dice la verdad el resto de la semana. Si ambos dicen "mañana es un día en el que yo miento" ¿Qué día de la semana será mañana?

Análisis: (elaboración propia)

Observando la afirmación "mañana es un día en el que yo miento"

- El día se obtiene cuando el valor de verdad de ambos se cambia al día siguiente

Solución:

	L	M	M	J	V	S	D
Eduardo	V	V →	F	F	F	V	V
Andrés	F	F →	V	V	V	V	F

R/ Mañana será miércoles.

<u>*Policías y ladrones*</u> (S_1P_3)

Se comete un delito y la policía arresta a 4 sospechosos que al ser interrogados formulan las declaraciones siguientes:

Andrés: "Eduardo es el culpable".
Eduardo: "Jesús es el culpable".
Jesús: "Eduardo miente cuando dice que yo soy el culpable".
Rafael: "Yo no soy el culpable".

Conociendo que sólo uno de ellos dice la verdad, ¿Quién es el culpable?

Solución: (elaboración propia)

Sean: F-falso V–verdadero I-inocente C–culpable.

Casos	1	2	3	4
Andrés	V-I	F-I	F-I	F-I
Eduardo	F-C	V-I	F-I	F-I
Jesús	F-I-C	F-C-C	V-I-I	F-I-C
Rafael	F-C	F-C	F-C	V-I

Análisis

Andrés dice la verdad, es inocente, entonces Eduardo y Rafael son culpables y Jesús sería inocente y culpable a la vez, lo que es imposible. Hay contradicción	Eduardo dice la verdad, es inocente al igual que Andrés, entonces Jesús y Rafael serían culpables y como es uno solo el culpable Hay contradicción	Jesús dice la verdad, se deduce fácilmente que Andrés, Eduardo y Jesús son inocentes y solo Rafael es el único culpable. No hay contradicción	Rafael dice la verdad, es inocente, peo Jesús sería inocente y culpable a la vez. Hay contradicción

¿Cumpleaños? (S_1P_{10})

Si sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera, ¿cuándo es el cumpleaños?

a) El cumpleaños es el martes.
b) El cumpleaños no es el miércoles.
c) El cumpleaños es el jueves.
d) El cumpleaños no es el martes.
e) El cumpleaños es el viernes.

Análisis: Observando a) y d) como contrarios se simplifican los casos. Una de las dos afirmaciones es V. Este análisis se puede ver en (S_1V_1, min: 69)

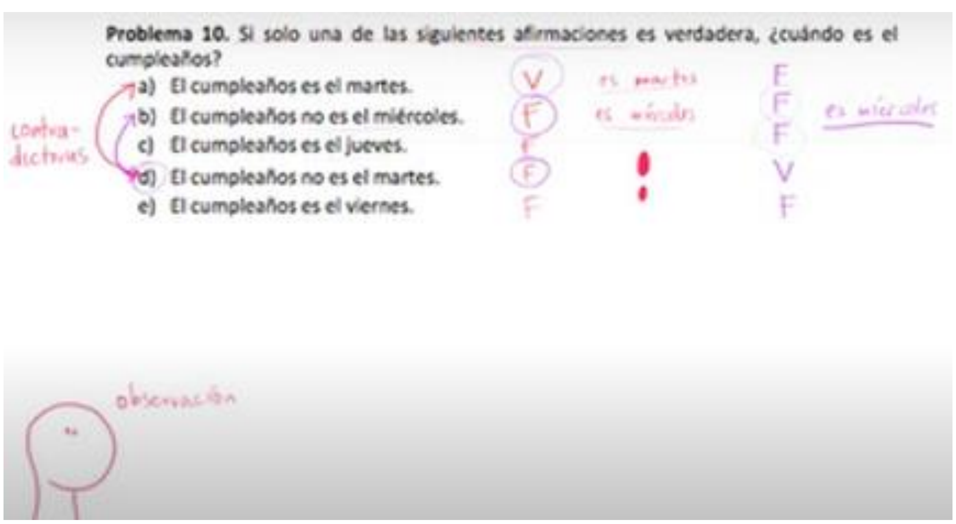


Figura 22. Análisis y solución de S_1P_{10}.

Esta solución se presenta claramente a continuación:

	Caso 1	Caso 2
a)	V- es martes	F-no es martes
b)	F-es miércoles	F-**es miércoles**
c)	F	F-no es jueves
d)	F	V-no es martes
e)	F	F-no es viernes

Acertijos de Conocimiento Perfecto: (S_1V_8, min: 7)

Éstos quizás son los más complicados en comparación con los relacionados anteriormente. Se identifican porque generalmente hay una persona que dice "*no sé*", y luego de que sus interlocutores también afirman no saber la persona, la primera persona dice que ya sabe. Otra de las características significativas de estos acertijos es que sus personajes son ideal e intencionalmente inteligentes, capaces de deducir toda la información posible a partir de lo que tienen, por lo que llegan a conclusiones de manera inmediata, antes que los que intentan resolver e acertijo, ello da cuenta de su grado de dificultad.

Para atacar estos acertijos, como es natural no saber en las situaciones planteadas, podríamos hacernos cuestionamientos como: *¿por qué es relevante que no sepan?, ¿hay alguna manera de que sí sepan?, ¿qué tendría que pasar para que sepan?*

Ejemplos de acertijos de Conocimiento perfecto:

Los prisioneros y sus árboles (S_1A_{15})

Anita y Benito fueron encarcelados por un lógico malvado. Anita ve 12 árboles desde su celda y Benito ve 6; no saben cuántos ve la otra persona, pero saben que entre ellos ven todos los árboles y que no hay un árbol que sea visto por los dos.

Todos los días, el lógico malvado le pregunta a Anita si hay 18 o 20 árboles en total. Si Anita sabe, puede responder; si no, puede pasar y ahora el lógico malvado le pregunta a Benito. Si Benito sabe, puede responder; si no, el proceso se repite al día siguiente.

Si alguna vez uno de ellos contesta correctamente, ambos pueden salir libres; si alguna vez alguien contesta incorrectamente, permanecerán encerrados para siempre.

¿Hay manera en que puedan salvarse? Tanto Anita como Benito son personas sumamente inteligentes.

Análisis (S_1V_{10}, min: 9): observar valor de "no sé" a partir de cuestionarnos si hay alguna condición que se deba cumplir para que sepa y, de esa manera, el "no sé" nos permite saber (también a los personajes) que la condición no se cumple. Parte de este análisis escrito se puede ver en la Figura 23.

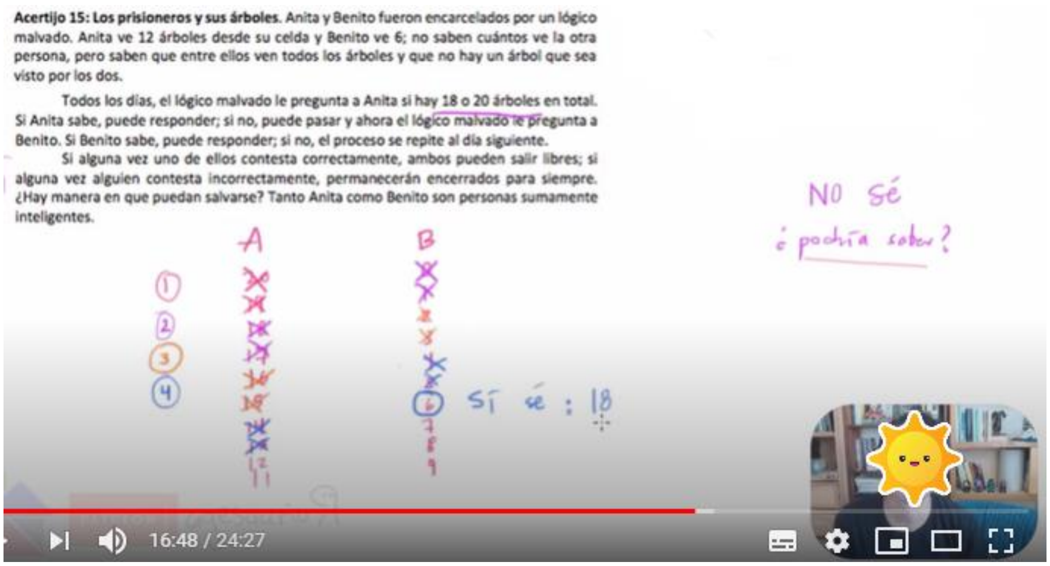


Figura 23. Análisis y solución de S_1A_{15} realizada en S_1V_{10}.

El análisis detallado bajo las consideraciones expuestas por el entrenador en S_1V_{10} se transcribe y organiza en la siguiente forma:

Día	Anita			Benito		
1	No sé		20	0	No sé	Pero sabe que Anita no ve ni 19 ni 20.
			19	1		
2		Pero Benito sabía que yo no veo ni 19 ni 20, por lo que, si él hubiese visto 0 o 1 sabría que la respuesta es 18, por lo que él ve al menos 2.	18	2		Pero Anita sabe que yo no veo ni 0 ni 1, por lo que, si ella viera 17 o 18 sabría que la respuesta es 18, por lo que ella ve menos de 16
			17	3		
3		Pero Benito sabía que yo veo cuando más 16, por lo que, si él viera 2 o 3 sabría que la respuesta es 18, por lo que él ve más de 3.	16	4		Pero Anita sabe que yo veo más de 3, si ella viera 15 o 16 podría responder 20, por lo que ella ve menos de 15.
			15	5		
4		Pero Benito sabía que yo veo menos de 15, por lo que, si él viera 4 o 5 sabría que la	14	6		Pero Anita sabe que yo veo más de 5, por lo que, si ella viera 13 o 14 podría

		respuesta es 18, por lo que él ve más de 5.	13 /	7		responder 20, por lo que ella ve menos de 13. Como él ve 6 puede asegurar que Anita ve 12 y que por tanto hay 18 árboles.

<u>Censo</u> (S_1R_1)

Un encargado del censo visita una casa. Le pregunta a la señora de la casa si tiene hijas y contesta que tiene 3. Cuando le pregunta sus edades, la señora le dice que si multiplicas sus edades te da 36, pero si las sumas te dan el número de la casa. El encargado del censo voltea a ver el número de la casa y contesta: "No tengo suficiente información". La señora dice: Tiene razón, perdón. La mayor toca el piano". ¿Qué edad tienen las tres hijas?

Análisis inicial: (S_1V_{12}, min: 2)

- 3 hijas.
- ¿Por qué para el encargado no es suficiente la información?
- ¿Cuántas tríadas de números enteros tienen como producto a 36?
- ¿Qué le dice al encargado que la hija mayor toca el piano?

Solución: (S_1V_{12}, min: 3)

Sean A; B; C; edades respectivas de las 3 hijas.

$A \cdot B \cdot C = 36$

A B C

$1 + 1 + 36 = 38$

$1 + 2 + 18 = 21$

$1 + 3 + 12 = 16$

$1 + 4 + 9 = 14$

$\underline{2 + 2 + 9 = 13}$

$1 + 6 + 6 = 13$

$2 + 3 + 6 = 11$

$3 + 3 + 4 = 10$

Rta/ Dos de las hijas tienen 2 años y la mayor tiene 9.

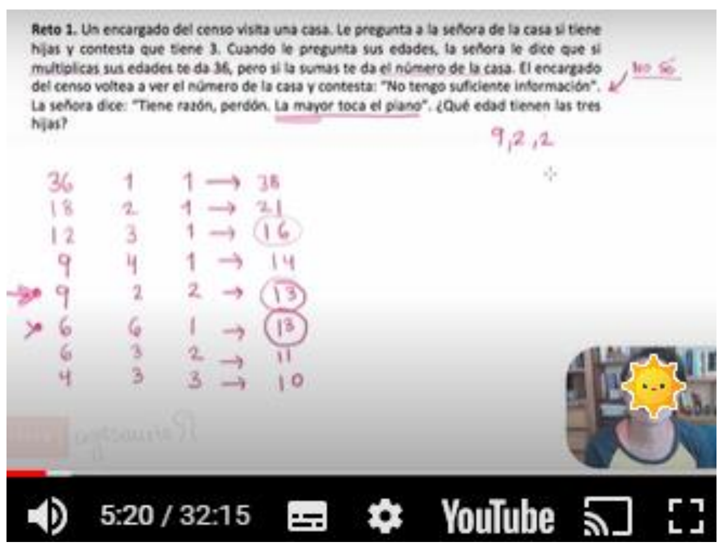


Figura 24. Análisis y solución de S_1R_1 realizado en S_1V_{12}.

En resumen, tal y como se expresa en (S_1V_3, min 7), todos estos juegos y acertijos se resuelven "por lógica" a partir su cabal comprensión. Es decir, dadas las condiciones iniciales, siguiendo las reglas que plantean, se debe ser consecuente con ellas trabajando con orden y paciencia para que las decisiones que se vayan tomando sean las correctas. Muchos profesores / entrenador utilizan este tipo de actividades como calentamiento en las sesiones de entrenamiento o inclusive para atraer el talento matemático hacia la Olimpiada.

Los aspectos principales expuestos en el análisis del tema se sintetizan en la Tabla 6.

Tabla 6.

Síntesis del análisis del tema "Lógica".

<table>
<tr><td colspan="3">Módulo: Lógica y aritmética</td><td colspan="3">Tema: Lógica.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Objetivo(s): Promover el razonamiento lógico-deductivo a partir de las implicaciones lógicas en juegos, acertijos y problemas que despierten el interés del estudiante (S_1V_1S, min: 1).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Unidades de análisis</th><th>Recursos</th><th>Estrategias</th><th>Habilidades</th><th>Tips</th></tr>
<tr><td colspan="2">Juegos</td><td>-Observar.-Cumplir reglas.</td><td>-Deducciones lógicas.</td><td rowspan="4">-Comunicar información (verbalizar).
-Seguir instrucciones.
-Autoevaluase.</td><td rowspan="4">En general se puede partir de la identificación de lo que se está pidiendo y seguidamente analizar los casos que son posibles para determinar cuáles de ellos o contradicen las reglas o no nos permiten avanzar y quedarnos con la que sí lo permite.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Acertijos</td><td>Algorítmicos</td><td>-Intuición.
-Ingenio.
-Paciencia.
-Orden.</td><td>- Construir tablas y/o diagramas para registrar los movimientos que se van haciendo y los nuevos resultados que se van obteniendo.</td></tr>
<tr><td>Verdadero y falso</td><td>-Observar.
-Paciencia.
-Orden.</td><td>- Considerar la referencialidad.
- Buscar la contradicción.
-Identificación de contrarios.
-Utilizar tablas de valores de verdad.
-Analizar casos.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento perfecto</td><td>-Interpretar el "no sé".</td><td>-Cuestionarse:
¿por qué es relevante que no sepan?; ¿hay alguna manera de que sí sepan?; ¿qué tendría que pasar para que sepan?
-Hacer listas</td></tr>
</table>

(Elaboración propia).

4.1.1.2. Sesión 2: Sumas, sucesiones y progresiones.

Tabla 7.

Fuentes de información disponibles para el tema "Sumas, sucesiones y progresiones".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S2	Sucesiones, Sumas, Progresiones.	Ia, Ib E1, E2, …, E6 P1a, P2a, …, P8a P1b, P2b, …, P11b R1, R2, …, R7	Sesión en vivo	V1	116
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	91
			Sucesiones	V3	11
			Sumas	V4	15
			Retos 1, 2 y 3	V5	10
			Retos 4 y 5	V6	10
			Retos 6 y 7	V7	13

	Totales	32		266 min

Propósito:

Describir estrategias que permiten reconocer el término que sigue en una sucesión, así como calcular la suma de sus términos (S_2V_3, min: 1).

Descripción:

Sucesiones y progresiones:

Los problemas de sucesiones son bastante comunes en el marco de las olimpiadas matemáticas y, por lo general, suelen ser complicados, según se afirma en (S_2I_a). En este propio material se plantea que su complejidad está dada porque básicamente cualquier lista puede ser una sucesión y, con frecuencia, se nos da sólo unos pocos de sus términos con la encomienda de "escribir el siguiente término de la sucesión", cuando en realidad cualquier número completa la sucesión. Esta explicación es complementada en el (S_2V_1, min: 2) y en (S_2V_3, min: 2), donde se enfatiza en que, a menos que nos den la regla que la genera, no hay una única manera de continuar una sucesión.

Para evidenciar esta dificultad implícita en los problemas de sucesiones en (S_2V_1, min: 4) se propone introducir el tema a partir de la siguiente dinámica de grupo:

> Siguiendo determinado orden entre los estudiantes del salón, por ejemplo, su ubicación; hemos de pedirle que vayan diciendo su número favorito por su orden e irlos anotando en el pizarrón. En determinado momento, antes que el estudiante en turno enuncie su número, preguntar: ¿cuál sigue?

Esta dinámica fue implementada por el entrenador, a modo de ejemplo, con algunos de los que formamos parte del curso, interactuando mediante el chat de Hangouts. Su exposición se muestra en la Figura 25.

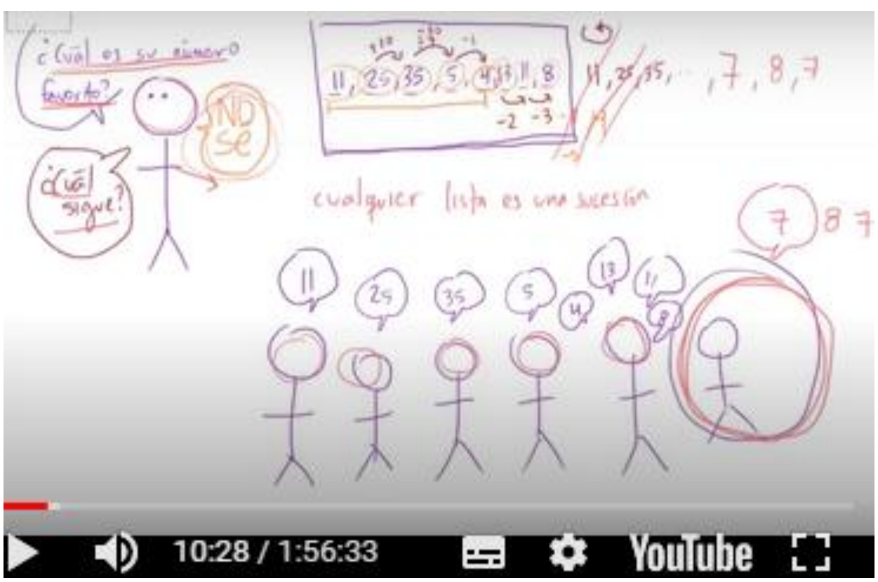


Figura 25. Dinámica de grupo para introducir el tema de sucesiones (S_2V_3).

La dinámica propuesta evidencia que ante el cuestionamiento se podrán producir múltiples respuestas atendiendo a diversos razonamientos, unos aparentemente "más lógicos" que otros, pero la realidad es que sólo la persona en turno conoce cuál es el término que sigue.

Por ello, se deja claro en (S_2I) que la pregunta implícita en esta tipología de problemas es algo más, como: "escribe el término que mejor complete la sucesión", donde, a decir del entrenador en (S_2V_1, min: 14), el foco va más allá de encontrar al término que sigue y pasa a centrarse en el por qué sigue. Para encontrar respuestas a este segundo cuestionamiento es importante buscar la explicación más simple y completa posible, es decir, aquella que sea capaz de minimizar la subjetividad y de explicar perfectamente la sucesión, tanto para atrás, como en lo adelante. Añade además que esta explicación, expuesta en plenaria, por lo general se traduce en sentimiento cuya expresión verbal es un "¡aaah!", lo que implica que le encontramos un sentido que es claro para todos (Figura 26).

A continuación, se presentan algunos de los problemas seleccionados del material por el entrenador para ejemplificar los elementos hasta aquí expuestos:

Problema 1.

Escribe el término que sigue:

a) 1; 2; 4; __

(No enlistado en el PDF, tomado de: (S_2V_1, min: 34).

En este punto se explica que la sucesión, así como se presenta es muy ambigua, ya que podríamos responder que el siguiente es el 8, argumentando que cada término es el duplo del anterior:

$2 \cdot 1 = 2; 2 \cdot 2 = 4;$ siguiendo $2 \cdot 4 = n,$ donde $n = 8$

Figura 26. Cualidades de la explicación de una sucesión.

De igual forma, podríamos decir que es 7 sumando, es decir, si observamos la forma en que crece la diferencia de la progresión:

$2 - 1 = 1; 4 - 2 = 2;$ siguiendo $n - 4 = 3,$ donde $n = 7$

Se argumenta además en (S_2V_1, min: 35) que en este caso no podríamos decir que alguno de estos razonamientos que nos llevan a cada respuesta es más sencillo y completo que el otro, ya que ambas explicaciones describen perfectamente los términos anteriores y posteriores de la sucesión. La ambigüedad se genera por la escasa información que se tiene, en general, mientras más términos de la sucesión conozcamos más clara nos quedará la regla de su formación. Los siguientes ejemplos así lo demuestran.

b) L, M, M, J, __ (S_2E_1)

Las sucesiones de letras que se proponen a modo de ejercicios independientes en el material pdf se analizan son analizadas en varios de los videos disponibles como parte del material de la semana. Por ejemplo, en el propio (S_2V_1, min: 12) el entrenador asegura que son menos familiares para la mayoría de las personas y que afortunadamente son múltiples los razonamientos que utilizan para tratar de encontrarle su sentido. Entre las más comunes, considerando el caso b), está el tratar de cambiarlas por números y analizar qué sucede. Tomando el número de orden alfabético quedaría:

$L = 12; M = 13; J = 10$; por lo que la sucesión se traduciría a la forma: 12, 13, 13, 10, __

En esta perspectiva a partir del (min: 13) analiza múltiples variantes para responder con cierta base lógica, por ejemplo, refiere que algunos se centran en la búsqueda de patrones que describan la forma en que se va comportando la diferencia en la sucesión (+1, +0, -3), y al no encontrar un algoritmo que lo determine, optan por responder que sería una sucesión periódica en la que se repetiría el ciclo (+1, +0, -3), por lo que su respuesta sería que sigue ($12 = L$), razonamiento al que pueden arribar también los que parten en su análisis de las propias letras. Plantea además que, aunque esta forma de entender la sucesión explica su continuidad, se ve poco estructurada y hasta cierto punto forzada. Añade que de igual forma se pudiera pensar, dado que se repite (M, M), que lo que sigue sería (J, J), respuesta no disparatada pero que no explica en lo adelante como sigue la sucesión.

En el (min: 17) presenta una manera que explica perfectamente el qué hacen cada una de esas letras en su lugar y el cómo continúa la sucesión entendiéndola como L-lunes, M-martes, M-miércoles, J-jueves, a lo que seguiría V-viernes, S-sábado, D-domingo y, de continuar, iniciaría un nuevo ciclo. Una explicación similar se presta para los ejemplos que siguen:

c) E, F, M, A, M, __ (S_2E_2)

Si entendemos E-enero, F-febrero, M-marzo, A-abril, M-mayo, claramente seguiría J-junio, J-julio, …, D-diciembre, y a partir de allí el nuevo ciclo. (S_2V_1, min: 18).

d) U, D, T, C, C, S, S, __ (S_2E_3)

En (S_2V_1, min: 19) se parte de considerar las letras como las iniciales, en el lenguaje verbal, de los números cardinales por su orden, lo que se expresaría en la siguiente forma: U-uno, D-dos, T-tres, C-cuatro, C-cinco, S-seis, S-siete, a lo que seguiría O-ocho, N-nueve, D-diez, (…). La propia escritura del numeral constituye una pista importante para buscarle significado a la sucesión siguiente.

e) 3, 3, 4, 6, 5, 4, __ (S_2E_5)

También en (S_2V_1, min: 19) se atiende el ejemplo anterior, dando como explicación sencilla y completa para la secuencia que cada número expresara la cantidad de letras que tiene la escritura verbal (el numeral) de cada número comenzando por uno, es decir, en la siguiente forma: uno-(3), dos-(3), tres-(4), cuatro-(6), cinco-(5), seis-(4), a lo que seguiría siete-(5), ocho-(4), nueve-(5), (…). De la misma forma, se refiere a que la pista para el siguiente ejemplo se asocia a la escritura y sobre todo a la pronunciación de los números dados en la sucesión.

f) 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, __ (S_2E_4)

En $(S_2V_1$, min: 26) nos comenta que para esta sucesión una respuesta bastante común sería que sigue (20), pero que, si observamos bien, esta carece de sentido ya que aritméticamente no nos lleva a ningún lado y no nos describe otra implicación particular que explique cómo seguiría en lo adelante. Sin embargo, al pronunciar los términos de la sucesión uno por uno podemos caer en cuenta que todos comienzan con (d). Entendido de esta forma, tendríamos: 2-dos, 10-diez, 12-doce, 16-dieciséis, 17-diecisiete, 18-dieciocho, 19-diecinueve, a lo que seguiría 200-doscientos, 201-doscientos uno, (…).

g) 1, 4, 9, 61, 52, 63, 94, 46, 18, 1, 121, ___ (S_2E_6)

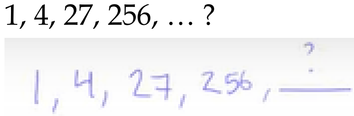
En $(S_2V_1$, min: 31) refiere que la sucesión puede parecer complicada a primera vista sobre todo por la presencia del 1 en la penúltima posición conocida, pero que si realizamos la *observación* con detenimiento, podemos *reconocer* que la sucesión está "emparentada" con otra, dada por los cuadrados perfectos, apreciación que desde su punto de vista es posible dado que tenemos (1, 4, 9,… , 121); y si comparamos esta nueva sucesión con la anterior no parece difícil percatarse de que estas comparten en cada término los mismos dígitos pero en orden inverso:

1	4	9	61	52	63	94	46	18	1	121	--
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	--

Desde esta perspectiva la explicación sería que el cuadrado perfecto que sigue a (121) es (144) el cual tiene por inverso a (441) y sería este el término que seguiría en la sucesión original.

Seguidamente se presenta otro ejemplo donde la observación de la sucesión es clave para reconocer otras pistas que la misma puede proporcionar. Se advierte que estas pistas pueden estar más o menos explícitas.

h) 1, 4, 27, 256, … ?



(No enlistado en el PDF, tomado de: $(S_2V_1$, min: 43)

Análisis: (min: 45)

1 , 4, 27, 256, …
+3 +23 +229 +? ⇑
+20 +206 +? ⇑

En (min: 46) se plantea que el análisis expuesto se da de manera natural cuando intentamos encontrar el término que completa una sucesión dada, es decir que, por lo general, se inicia la búsqueda partiendo del análisis del *crecimiento entre sus términos*, ya que en muchas ocasiones se hace conveniente conocer otras sucesiones que pueden ser derivarse porque nos explican la regla de formación de manera más clara. Sin embargo, enfatiza en que este procedimiento no siempre es útil y esto pone bajo foco en el análisis anterior, donde las sucesiones derivadas no nos dejan pautas evidentes. Entre tanto, subraya que la debida observación de la sucesión puede llevarnos a comenzar reconociendo que el (4) (cuadrado perfecto) es su segundo término y podemos pensar que pudiera ser la sucesión de los cuadrados perfectos, pero, en ese caso, le seguiría (9) y, en su lugar está el (27). Como el ($27 = 3^3$) y está emparentado con el ($9 = 3^2$), podríamos probar si ($256 = 4^4$), obteniendo así una explicación perfecta para la sucesión:

1 4 27 256 (3125)
1^1 2^2 3^3 4^4 5^5

El ejemplo que se presenta a continuación evidencia la utilidad de la estrategia de considerar el análisis del crecimiento entre los términos de la sucesión, como procedimiento aritmético inicial.

i) 2, 3, 6, 15, 42, …? (S_2P_1)

Análisis: (S_2V_1, min: 38)

2 , 3, 6, 15, 42, …
+1 +3 +9 +27 +81 ⇑

Como se puede observar, el análisis presentado arroja una nueva sucesión que, siendo descriptiva del crecimiento de la sucesión original, conducen a la obtención de (123), como el siguiente término buscado.

Análogamente al ejemplo anterior presenta y procede en el siguiente caso:

Problema 2. (S_2P_2)

¿Cuál es el término que ocupa la posición 8 en la siguiente sucesión?:

a. 2, 3, 5, 9, 17, … ?

Análisis: (S_2V_1, min: 40)

1 2 3 4 5 … 8
2 , 3, 5, 9, 17, …, (129)
+1 +2 +4 +8 +16 +32 +64 ⇑

De la misma manera el entrenador hace ver que también el enésimo término de la sucesión anterior puede expresarse como $a_n = 2^n + 1$ y, por consiguiente, la sucesión constituye una progresión, ya que existe una fórmula que nos permite hallar cada uno de sus elementos. De esta forma se profundiza en lo expuesto en (S_2I_b) donde se definen las progresiones como sucesiones donde siempre la ley de formación constante puede expresarse mediante una fórmula, evidenciando además en su explicación que en la búsqueda de los términos que mejor las completen son determinantes los análisis aritmético-algebraicos. Más adelante ejemplifica lo anterior apoyándose en el siguiente ejemplo.

Problema 3. (S_2P_3)

En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x? (Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante).

				21
	16			
		27		
				X

Análisis: (S_2V_1, min: 50)

$27 - 16 = 11$
$27 + 11 = 38$
$38 + 11 = 49$

$49 = 21 + 4d$
$28 = 4d$
$d = 7$

$X = 49 - d$

$X = 49 - 7 \quad X = 42$

				21	
	16				+d
		27			+d
			38	**X**	+d
				49	+d

Sumas:

El tema de las sumas tiene que ver con las maneras que empleamos para calcular sumas que, "convencionalmente", se harían muy extensas.

En (S_2I_b) se explica que de la misma manera que la presencia de puntos suspensivos que por lo general acompañan al planteamiento de estos problemas constituye una evidencia de que no es viable escribir todos los números que se quieren sumar, tampoco se espera que se haga la suma, adicionando todos los números uno a uno.

En este tenor, la sugerencia inicial (S_2V_1, min: 55) apunta nuevamente hacia la *observación* con detenimiento de los términos implicados puesto que no pocas veces es posible *emparejarlos (asociarlos)* convenientemente (atendiendo al signo que lo precede, fracciones con igual denominador, a que se obtienen sumas constantes, etc.) para viabilizar y reducir el procedimiento. Seguidamente se muestran situaciones problemas para ejemplificar lo anteriormente expuesto.

Problema 4.

Calcula el resultado de la suma:

a) $999999999 - 99999999 + 9999999 - \cdots + 999 - 99 + 9$ (tomado de: S_2P_{2b})

En el análisis en (S_2V_1, min: 55) se deja ver que el efectuar las sumas por su orden tomaría un tiempo considerable y, por el contrario, si se percatan de que asociando convenientemente las diferencias se pueden cancelar la cantidad de nueves que tiene el sustraendo en el minuendo en cada caso, el problema se hace muy sencillo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 9 & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 9 & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 9 & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \dots$$

Lo que llevaría a obtener 909090909 como resultado de la suma.

b) $2016 - 2014 + 2012 - 2010 + \cdots + 8 - 6 + 4 - 2$ (Tomado de: S_2P_{4b})

Una estrategia similar se aplica en (S_2V_1, min: 57) para calcular esta suma, donde nuevamente el asociar y determinar las diferencias individualmente facilita el camino para llegar a la suma total.

$2016 - 2014 = 2; 2012 - 2010 = 2; \dots$

El problema se reduce a determinar cuántas diferencias se tienen y, para ello, se comienza por definir la cantidad de sumandos que tiene la operación, considerando que se involucran los números pares hasta 2016, se tienen ($2016/2 = 1008$) sumandos y, por tanto, (504) diferencias, cada una de las cuales arroja como resultado el (2). Para finalizar, se toma a cuenta (504) veces el (2), es decir, ($504 \cdot 2 = 1008$), lo cual sería el resultado de la suma. Evidencia de estos análisis se presentan en la figura 27.

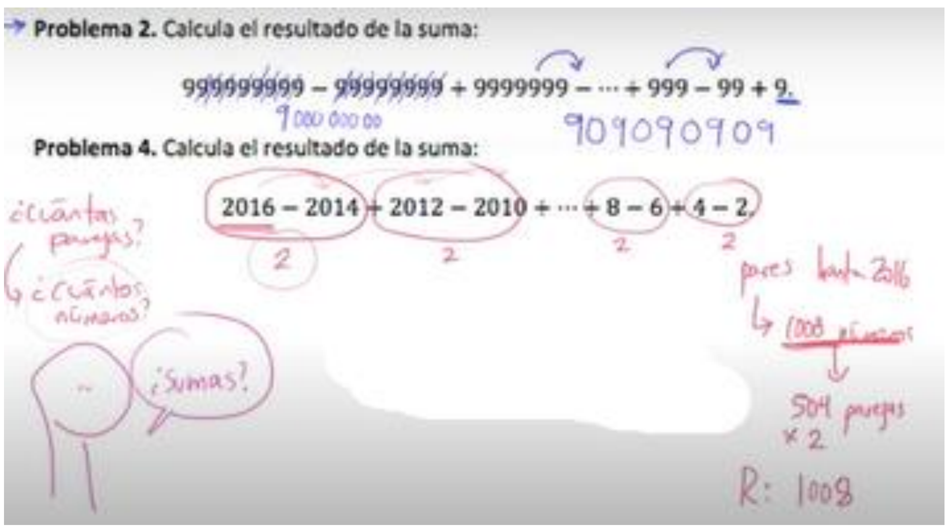


Figura 27. Análisis y solución de S_2P_{2b} y S_2P_{4b} en S_2V_1, min: 58.

Para resaltar la aplicabilidad de la estrategia de asociar convenientemente los sumandos se ejemplifica nuevamente con los dos problemas que siguen:

Problema 5. (S_2R_2)

Una niña calcula la suma $\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \cdots + \frac{2011+2012}{2013}$ y un niño calcula la suma de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{671}$. ¿Cuál es la suma de sus resultados?

Un elemento para tener en cuenta al atacar este problema según se explica en (S_2V_1, min: 98) es que no se piden la suma del niño y la niña por separado, sólo la suma conjunta, esto puede constituir una pista para inducir la estrategia de emparejamiento. En la exploración para la elección de las parejas de sumandos pertinentes se puede advertir que los denominadores de la segunda suma son la tercera parte de los denominadores de la primera y, por tanto, si se amplían multiplicando por $\left(\frac{3}{3}\right)$ las fracciones que sumó el niño, se obtienen denominadores respectivamente iguales, lo que facilitaría la suma de los términos del mismo orden en cada suma. El procedimiento descrito se representa a continuación.

$\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\cdots+\frac{2011+2012}{2013}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{671}$ ampliado la segunda: $\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots+\frac{3}{2013}$

Sumando los términos del mismo orden en cada expresión:

$\frac{1+2}{3}+\frac{3}{3}=2;\frac{4+5}{6}+\frac{3}{6}=2;\ldots\Rightarrow 671\cdot 2=1342$

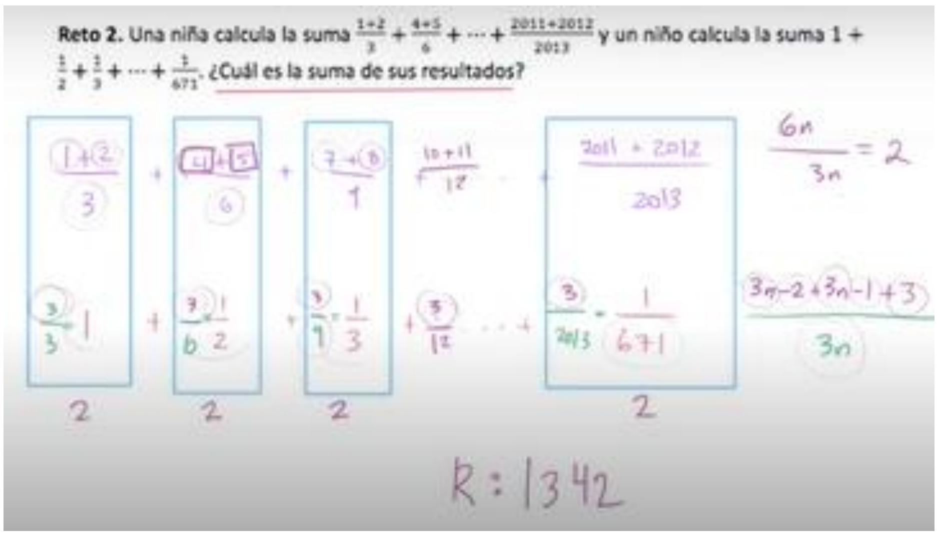


Figura 28. Análisis y solución de S_2R_2 en S_2V_1, min: 103.

Problema 6. (S_2R_4)

¿Cuál es el entero más cercano al valor de $x-y$ si:

$$x=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{50^2}{99} \qquad y=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{50^2}{101}$$

En (S_2V_6, min: 2) se explica cómo emparejando las fracciones de x e y con igual denominador y generalizando las diferencias que quedan determinadas se obtiene lo siguiente:

$\frac{(n+1)^2-n^2}{2n+1}=\frac{n^2+2n+1-n^2}{2n+1}=\frac{2n+1}{2n+1}=1 \Rightarrow 50$; por lo que:

$x-y=50-\frac{50^2}{101}=\frac{5050-2500}{101}=25,\overline{2475}$

Siendo el entero más cercano sería 25.

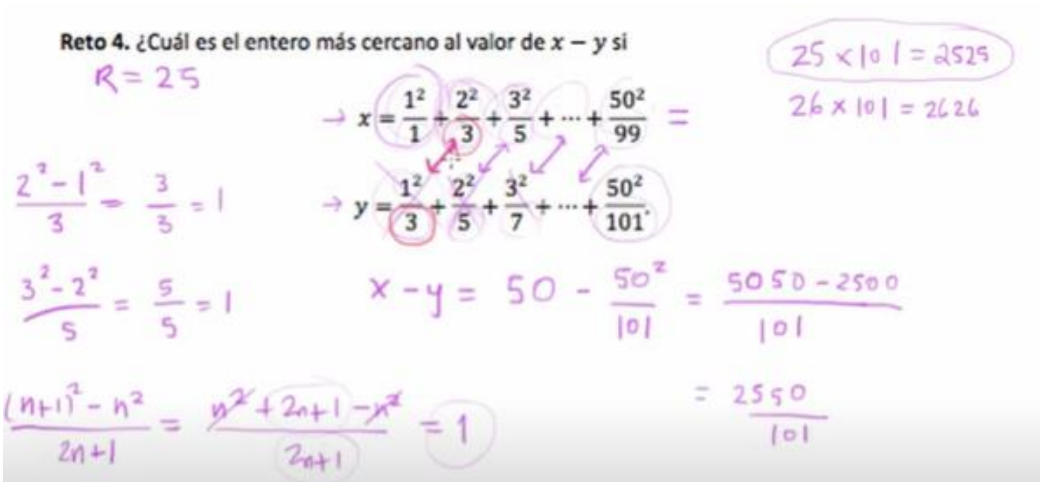


Figura 29. Análisis y solución de S_2R_4 en S_2V_6, min: 6.

En (S_2V_4, min: 1) se explica que también existen varias fórmulas muy útiles para calcular sumas cuando se trata de progresiones, siendo la más conocida y de uso recurrente la que permite calcular de manera simplificada la suma de los primeros $n \in \mathbb{N}$, e implícitamente, la suma de los primeros números triangulares, la cual ha sido atribuida al célebre matemático alemán Carl Friedrich Gauss, por lo que también es conocida como fórmula de Gauss. Esta útil herramienta se plantea como sigue:

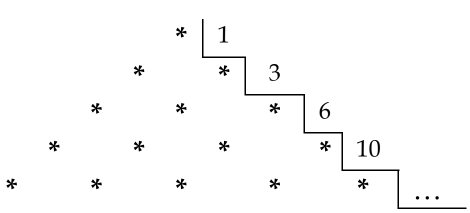
$$\sum_{x=1}^{n} x = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Entre las múltiples vías que se proponen para la demostración de esta fórmula explica la del siguiente análisis que considera la suma de los primeros 100 números naturales:

1	+2	+3	+…	+100
+	+	+	+	+
100	99	98	…	1
101	101	101	101	101

Se expone en (S_2V_4, min: 2) que enlistando los primeros 100 números naturales y volviéndolos a escribir de bajo de la fila inicial, pero en orden inverso, para que en lugar de tomar como sumandos todos los de la fila, se sumen las 100 columnas que quedarían determinadas, se evidencia que en todos los casos la suma es 101. Como se tiene 100 veces 101 pero repetidos dos veces la lista de números, la pretendida suma puede escribirse como: $\frac{100 \cdot (101)}{2}$.

De la misma forma se refiere en (S_2V_4, min: 6) que esta suma vista de forma gráfica explica la existencia de los números triangulares:



A continuación, se presentan algunos problemas donde se combinan estrategias para obtener las sumas de las progresiones, siendo la *factorización* que se apoya en la *fórmula de Gauss* y los *arreglos triangulares*, piedras angulares en los procedimientos aplicados:

Problema 7. (S_2R_7)

En una escuela se tienen 2011 grupos, cada uno con 2011 alumnos. Cada grupo tiene una caja en donde los alumnos en orden consecutivo colocan pelotas siguiendo una progresión aritmética como se muestra en la tabla:

	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	…
Grupo 1	1	2	3	4	…
Grupo 2	2	4	6	8	…
Grupo 3	3	6	9	12	…
Grupo 4	4	8	12	16	…
…	…	…	…	…	…

Encuentra los grupos que en algún momento logran acumular exactamente 1265 pelotas dentro de su caja.

En el análisis de este problema (S_2V_7, min: 8) se puede ver que la progresión que determina se puede escribir de la forma siguiente:

$n + 2n + 3n + 4n + \cdots + kn$; donde (n)=grupos y (k)=alumnos.

Considerando la estrategia de factorización que se apoya en la fórmula de Gauss, se tiene que:

$$n(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k) = \frac{n \cdot k(k+1)}{2} = 1265$$

$n \cdot k(k+1) = 2530$ evidencia la presencia de 3 factores, dos de ellos consecutivos. Para encontrarlos se descompone en factores a 2530.

$$\begin{aligned} n \cdot k(k+1) &= 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \\ &= 1265 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 23 \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 5 \cdot 22 \cdot 23 \end{aligned}$$

R/ Ocurre en el primer alumno del grupo 1265, en el décimo alumno del grupo 23 y en el alumno 22 del grupo 5.

Problema 8. (S_2R_1)

Como se muestra en la figura de abajo, hemos acomodado los enteros positivos en un arreglo triangular, de manera que los números arriba o a la izquierda deben ser menores que los números abajo o a la derecha, y cada línea tiene más números que la línea superior. Supongamos que a_{ij} representa el número que está en la i−enésima fila de arriba hacia abajo, y es el j−enésimo número de la izquierda a la derecha. (Por ejemplo, a_{43} = 9.) Si a_{ij} = 2009, ¿cuál es el valor de i + j?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

En (S_2V_5, min: 1) se explica que habría que comenzar reconociendo que es un arregle triangular, donde la cantidad de números en cada renglón coincide con el número del renglón en el que se encuentran, propiciando que el último en cada renglón sea un número triangular, ejemplo: cuarto renglón $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4\,(5)}{2} = 10$, siendo este el cuarto número triangular.

Por tanto, el primer paso para atacar el problema y su avance más significativo estaría dado por buscar cuál es el número triangular más cercano a 2019. Para ello, se podría acotar primero considerando la mitad de algunos cuadrados prefectos, por ejemplo: $\frac{60^2}{2} = 1800$ y $\frac{70^2}{2} = 2450$, lo que lleva a determinar que el número buscado está en algún renglón entre el 60 y el 70 $(1800 < 2019 < 2450)$. Por lo que probando algunos casos con la herramienta de Gauss:

$$a_{61\,61} = \frac{61 \cdot 62}{2} = 1891$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{62\,62} = \dfrac{62 \cdot 63}{2} = 1953 \\[2ex] a_{63\,63} = \dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016 \end{array}\right\} 2009$$

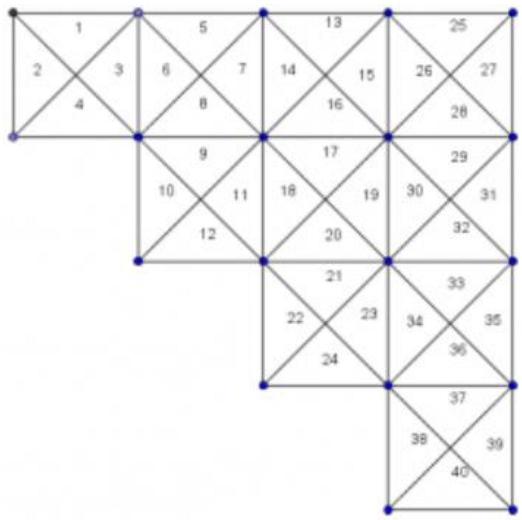
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 3 & & & \\ & & 4 & & 5 & & 6 & & \\ & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & \\ \iddots & & & & \cdots & & & & \ddots \\ & & & & & & 2009 & \Leftarrow & 2016 \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & a_{63\,(63-7)} & & a_{63\,63} \\ & & & & & & \parallel & & \\ & & & & & & \boxed{a_{63\,56}} & & \end{array}$$

Como 2009 se ubica 7 lugares antes del número triangular 2016, y este último ocupa el lugar 63 del reglón 63, el 2009 estaría en el mismo reglón (63) pero en el lugar (56). Por lo que sólo restaría plantear:

$i + j = 63 + 56 = 119$

Problema 9. (S_2R_6)

Observa el siguiente arreglo: ¿Cuál es la suma del primer y último términos de la columna 2008? (Por ejemplo, el primer y último términos de la columna 3 son 13 y 24, su suma $13 + 24 = 37$



Este problema se analiza en (S_2V_7, min: 1) con el siguiente enfoque:

Como las cajitas presentan un acomodo triangular se puede decir que en la columna 2008 habrá 2008 cajitas. Otra pista importante para observar es que todas las columnas terminan en un múltiplo de 4. Por tanto, el último número de la columna 2008 será:

$$4(1+2+3+\cdots+2008) = 4\left(\frac{2008\cdot(2009)}{2}\right)$$
$$= 8068144$$

El primero de la misma columna se puede entender como el sucesor del último de la columna 2007, para lo cual se plantea:

$$4(1+2+3+\cdots+2007)+= 4\left(\frac{2007\cdot(2008)}{2}\right)+1 = 8060113$$

Con lo cual la suma quedaría definida: $8068144 + 8060113 = 16128257$.

Desde (S_2V_4, min: 10) se explica que para toda progresión aritmética se puede derivar una fórmula que permita calcular su suma sin tener que memorizarla, teniendo en cuenta que en este tipo de progresión la diferencia entre sus términos es constante, por lo que se hace suficiente conocer la suma del primer y último término de la progresión (n+1) y la cantidad de términos (n) que la forman.

Como casos particulares de uso frecuente derivados de la fórmula original de Gauss, en (S_2V_4, min: 11) se mencionan la que permite sumar los primeros números naturales pares e impares, presentando una de las múltiples demostraciones en cada caso.

La primera de ellas puede escribirse y demostrarse de la forma siguiente:

$$\sum_{x=1}^{n} 2x = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

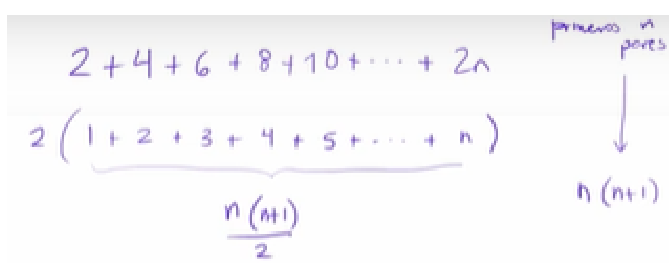


Figura 30. Demostración de la fórmula para calcular la suma de los primeros números naturales pares.

Los procedimientos implícitos en la demostración se relacionan a continuación:

Factorizando: $2(1+2+3+\cdots+n) = 2+4+6+\cdots+2n$

Por consiguiente, el miembro izquierdo es: $2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Cancelando en el miembro izquierdo: $n(n+1)$.

De la misma forma, se explica que para calcular la suma de los primeros n impares es posible sustraer la suma de los pares a la suma total o directamente hacer uso de la expresión que seguidamente se presenta acompañada de su demostración geométrica:

$$\sum_{x=1}^{n}(2x-1) = 1+3+5+\cdots+(2x-1) = n^2$$

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
1	3	5	7

Gráficamente se evidencia que la suma determina un cuadrado.

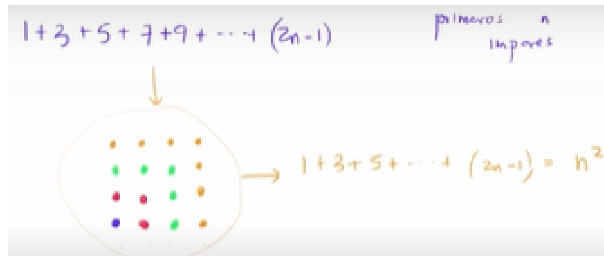


Figura 31. Demostración de la fórmula para calcular la suma de los primeros números naturales impares.

Un ejemplo de problema sencillo en el que se deja ver la valía de estas herramientas es el siguiente:

Problema 10. (S_2R_3)

¿Para qué entero positivo n se satisface la ecuación siguiente?

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{2006}{2007}$$

Análisis y solución en (S_2V_5, min: 9):

Como en el denominador se tiene la suma de números pares y esta no puede ser impar, lo que se busca es una fracción equivalente, sustituyendo numerador y denominador por las expresiones demostradas anteriormente queda como sigue:

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Llegando a la conclusión que el número (n) que satisface la ecuación es 2006 y su consecutivo $n+1 = 2007$

Las fórmulas hasta aquí presentadas y demostradas se relacionan junto a otras tres que se dicen útiles para el cálculo de sumas en progresiones a partir de (S_2V_1, min: 72). Dicha relación se muestra en la Figura 32.

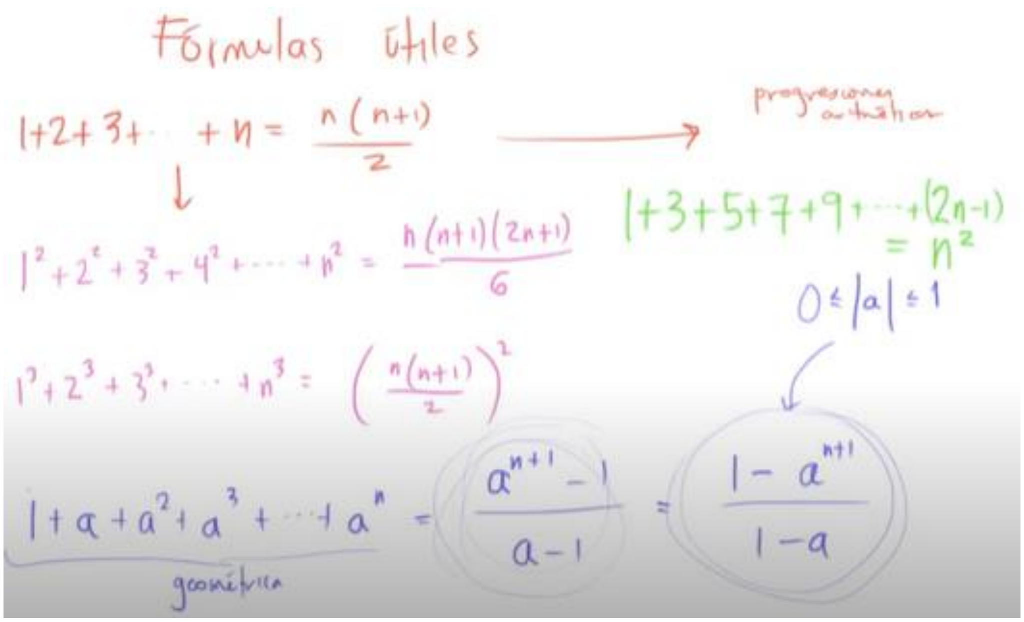


Figura 32. Relación de fórmulas útiles para calcular la suma de progresiones.

Las tres fórmulas referidas, visibles en la figura anterior, viabilizan el cálculo de las siguientes sumas:

La suma de los cuadrados de los primeros naturales:

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La suma de los cubos de los primeros naturales:

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

La suma de las primeras potencias de un número dado:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

En resumen, aunque ciertamente las sucesiones pueden ser muy diversas atendiendo a su constante o sentido de formación, generalmente es posible encontrar una forma simple y competa que explique su comportamiento. Para ello, es muy importante la observación, la intuición que se desarrolla conforme crece el espectro de analogías y una mente abierta que permita ser creativos, principalmente cuando el análisis de las diferencias en la sucesión y los tecnicismos aritméticos-algebraicos que permiten manipularlas no proporcionan una idea clara.

Por lo general, en la suma de progresiones aritméticas intervienen una gran cantidad de sumandos, dificultad esta que por sí misma constituye un *hint* para intuir que no se requiere, ni es lógico o conveniente, un planteamiento convencional para calcularla.

En tal sentido, la estrategia de emparejar los términos convenientemente, según su signo, sus características considerando diversos tipos de notación y otros, puede facilitar y simplificar en gran medida el procedimiento. De igual forma, la estrategia de expresar esas extensas sumas como producto (factorizar) permite economizar tiempo y esfuerzo. Para tal fin, resulta una herramienta clave la conocida fórmula de Gauss y sus diversas variantes según las características de los términos de la progresión, por ejemplo, las dadas por números pares o impares.

La cantidad de problemas tomados principalmente de ONMAPS disponibles en el material para trabajar el tema, constituyen evidencia de que los problemas de sucesiones son bastante frecuentes dentro de las competiciones matemáticas para alumnos de primaria y secundaria. Los aspectos más relevantes del análisis realizado se presentan en la Tabla 8:

Tabla 8.

Síntesis del análisis del tema "Sumas, sucesiones y progresiones".

<table>
<tr><td colspan="2">Módulo: Lógica y aritmética</td><td colspan="3">Tema: Sumas, sucesiones y progresiones.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo(s): Describir estrategias que permiten reconocer el término que sigue en una sucesión, así como calcular la suma de sus términos.</td></tr>
<tr><th>Unidades de análisis</th><th>Recursos</th><th>Estrategias</th><th>Habilidades</th><th>Tips</th></tr>
<tr><td>Sucesiones y progresiones</td><td>-Observación.
-Creatividad.
-Comprensión del lenguaje algebraico.
-Aritmética básica.</td><td>-Observar.
- Pronunciar los términos.
-Hallar diferencias entre los términos y entre las propias diferencias.
-Transformar la notación de los términos y/o las diferencias (escribir como potencia, leguaje verbal, etc.).</td><td rowspan="2">-Analizar y comparar términos.
-Reconocer pistas o analogías.
-Predecir y anticipar comportamientos.
-Discriminar, modelar y argumentar procedimientos de cálculo.
-Desarrollar pensamiento creativo.</td><td rowspan="2">En general se puede partir de la observación de las sucesiones para reconocer en ellas pistas propias o análogas a las de problemas anteriormente resueltos, de forma tal que podamos predecir su comportamiento (constante de formación o sentido de la formación) y discriminar los procedimientos de suma más ventajoso para resolver el problema.</td></tr>
<tr><td>Sumas</td><td>-Observación.
-Tecnicismos aritmético-algebraico.
- Conocimiento de sucesiones específicas (ejemplo: números triangulares).</td><td>-Observar progresiones.
-Emparejar (asociación conveniente de términos).
- Factorizar (expresar sumas como producto a partir de las variantes de la fórmula de Gauss).
- Realizar acomodos (triangulares, cuadrados, etc.).</td></tr>
</table>

(Elaboración propia).

4.1.1.3. Sesión 3: Ecuaciones y tablas.

Tabla 9.

Fuentes de información disponibles para tema "Tablas y ecuaciones".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S3	Tablas y ecuaciones	I P1, P2, …, P20 R1, R2, …, R4	Sesión en vivo	V1	106
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	81
			Retos	V3	21
	Totales	24			208min

Propósito:

Promover el empleo de estrategias creativas para atacar problemas algebraicos en aquellos alumnos que se inician dentro del contexto olímpico-matemático y que cursan el nivel primario o secundario en la enseñanza general, fomentando la construcción de significados y el desarrollo general de las bases para el estudio de nociones más formales del álgebra (S_3V_1, min: 5).

Descripción:

Según se hace explícito en (S_3I) el material que se presenta está pensado como una especie de pre-álgebra. Recalcando la idea anterior se plantea que la mayor parte problemas que se incluyen, si bien podrían resolverse de manera sencilla con un buen manejo del álgebra, también se pueden resolver con otros métodos más al alcance de estudiantes en sus primeras etapas. Como ejemplo, en (S_3V_2, min: 7) se sugiere partir de la construcción de *tablas ordenadas* sobre la base de las *observaciones* de las condiciones de los problemas y el *análisis de casos*. En (S_3V_1, min: 21) se deja claro que lo anterior, lejos de sugerir un método preferente y "negar" al álgebra, tiene fines introductorios respecto a ella. De hecho, en (S_3I) se refiere que los últimos problemas que se presentan en el documento ya requieren poder plantear ecuaciones, para lo cual en (S_3V_1, min: 78) se dice que es de gran ayuda la *intuición* que se va de desarrollando en la medida en que el resolutor vaya incorporando a su haber problemas resueltos.

El primer problema que se analiza es bastante conocido y su análisis puede considerarse un ejemplo paradigmático de la intensión de este apartado según el experto entrenador.

Problema 1. (No enlistado en el pdf, tomado de: (S_3V_1, min: 3)

Un granjero tiene vacas y pollos. Todas sus vacas tienen 4 patas y todos sus pollos tienen 2 patas. El granjero cuenta 22 cabezas y 64 patas. ¿Cuántos animales tiene de cada tipo?

En el análisis de este problema en (S_3V_1, min: 18), se explica que un resolutor con suficiente el conocimiento de álgebra podría plantear y resolver "fácilmente" el sistema de ecuaciones que conduce a la solución única:

p-pollos Como todos los pollos y vacas tienen una sola cabeza: $p + v = 22$
v-vacas Como los pollos tienen 2 patas y todas las vacas 4: $\underline{2p + 4v = 64}$

$$\begin{array}{rl} p + v = 22 & /\cdot 4 \\ \underline{2p + 4v = 64} & \\ 4p + 4v = 88 & \end{array} \qquad \begin{array}{c} 12 + v = 22 \\ v = 22 - 12 \\ \boxed{v = 10} \end{array}$$

$$\frac{2p + 4v = 64}{2p = 24}$$
$$\boxed{p = 12}$$

Como este proceder difícilmente esté al alcance de alumnos de primaria e inicios de la secundaria, la alternativa para su tratamiento con estos discentes que se sugiere en (S_3V_1, min: 5) es el uso de la estrategia de *prueba y error* a través la construcción de una tabla ordenada, estrategia que, según se afirma más adelante en esta fuente (min: 38), permite ir avanzando de forma segura hacia la solución a partir de una secuencia de pasos u operaciones.

Para ello, en (S_3V_1, min: 9) se debe cuidar una de las dos características (ecuaciones), es decir, que siempre se cumpla la suma de "22 cabezas" o "64 patas", e ir probando hasta que se cumpla la otra característica. El procedimiento considerando las 22 cabezas como referente se presenta seguidamente:

V	P	C	PV	PP	P
22	0	**22**	88	0	88
21	1	**22**	84	2	86
20	2	**22**	80	4	84
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	6	**22**	64	12	76
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	10	**22**	48	20	68
11	11	**22**	44	22	66
10	**12**	**22**	**40**	**24**	**64**
9	13	**22**	36	26	62

V- vacas PV- patas de vaca
P- pollos PP- patas de pollo
C- cabezas P- patas

En (S_3V_1, min: 10) se precisa que si se quiere hacer todo puede intentarse, pero en este punto es posible darse cuenta (observar) de que está disminuyendo la cantidad de patas a un ritmo muy lento, por lo que se puede animar a bajar un poco más. De esta forma se llega a obtener que para 10 vacas y 12 pollos se cumple que siempre tenemos 22 cabezas y 64 patas.

Antes, e inmerso en la explicación anterior, específicamente a partir de (S_3V_1, min: 8), se enaltecen algunas de las ganancias de este proceder, aludiendo que la propia construcción de la tabla permite ir introduciendo a los alumnos hacia la *notación algebraica* mediante el sentido práctico que tiene la utilización de letras para la identificación de las columnas de la tabla en lugar de la palabra que nombra lo que en cada una de ellas se representa. Más adelante, en la propia fuente (min: 13), se argumenta además que favorece que el estudiante ejercite su capacidad de *verbalizar*, argumentado sobre la tabla que la respuesta es única, advirtiendo que si tiene $V > 10$, entonces $P > 64$ y, si tiene $V < 10$, entonces $P < 64$.

En (S_3V_1, min: 23) se busca resaltar el papel clave que juega la observación cuando este tipo de tabulaciones. Para ello se hace ver que en el problema anterior sólo se tienen 22 animales, pero pensando en configuraciones del problema con cantidades de (120; 2000;

1000000) animales, ciertamente la tabulación ordenada perdería utilidad. En estos casos la observación permite *acotar el rango de la tabulación* a realizar oportunamente.

Seguidamente se presentan otros problemas y distintas vías de solución para seguir evidenciando que sí hay mucho que se puede hacer de forma prácticamente intuitiva, al margen de los procedimientos algebraicos más formales.

Problema 2. (S_3P_3)

La edad promedio de los miembros de la familia Quintos es de 18 años. Si sabemos que el papá tiene 38 años y que el promedio de las edades de los miembros de la familia sin contarlo a él es de 14 años, ¿cuántos miembros tiene la familia Quintos?

Nuevamente se insiste en (S_3V_1, min: 40) que un resolutor con la suficiente práctica pudiera atacar el problema por métodos algebraicos. Como ejemplos de planteamientos apegados al abstracto mundo del álgebra se presentan los siguientes:

Solución 1. (S_3V_1, min: 40)

Sea n – cantidad de integrantes

$$\frac{38+14(n-1)}{n}=18$$
$$38+14(n-1)=18n$$
$$38+14n-14=18n$$
$$24=4n$$
$$\boxed{n=6}$$

<u>Siendo:</u>
38 la edad del padre
$14(n-1)$ suma en años del resto de los integrantes de la familia
R/La familia tiene 6 integrantes.

Solución 2. Solución de un participante, compartida por Hangouts y comentada en (S_3V_1, min: 44).

Sea:
X – suma de las edades
Y – total de integrantes

$$\frac{X}{Y}=18$$
$$\frac{X-38}{Y-1}=14$$
$$X=18Y$$
$$X-38=14(Y-1)$$
$$X=18Y$$
$$X-38=14Y-14$$
$$38=4Y+14$$
$$24=4Y$$
$$\boxed{Y=6}$$

<u>Sistema de ecuaciones:</u>
Ecuación I: promedio que incluye al padre.
Ecuación II: promedio que excluye al padre.

R/La familia tiene 6 integrantes.

Como se había adelantado, se puede hallar una solución al problema sin tener que recurrir al álgebra. Para ello, se propuso en (S_3V_1, min: 36) la estrategia de ver el "*promediar* "como "*emparejar*" (promediar igualando).

Solución 3.

En esta perspectiva el punto de partida del análisis que se inicia en el propio (min: 36) está dado porque no se sabe cuántos integrantes tiene la familia, pero sí, los valores que toma el promedio de sus edades incluyendo y excluyendo al padre. En tal sentido, las ideas fundamentales que se propone considerar son, en primer lugar, que con independencia de la cantidad de integrantes que no se conocen, dado que su promedio de edades es 14 años, cediendo años de un integrante a otro es posible igualar sus edades a 14 años. En segundo lugar, se debe advertir que para que el promedio aumente a 18 años el padre debe ceder, de sus años, a cada uno de los integrantes hasta llegar al promedio. Como el emparejamiento inicial permite tener a todos los integrantes restantes con 14 años, para que alcancen el promedio el padre deberá ceder 4 de sus años a cada uno de ellos. Siguiendo esta especie de tabulación ordenada se puede encontrar de forma segura la solución buscada. El procedimiento descrito se presenta en la Figura 36.

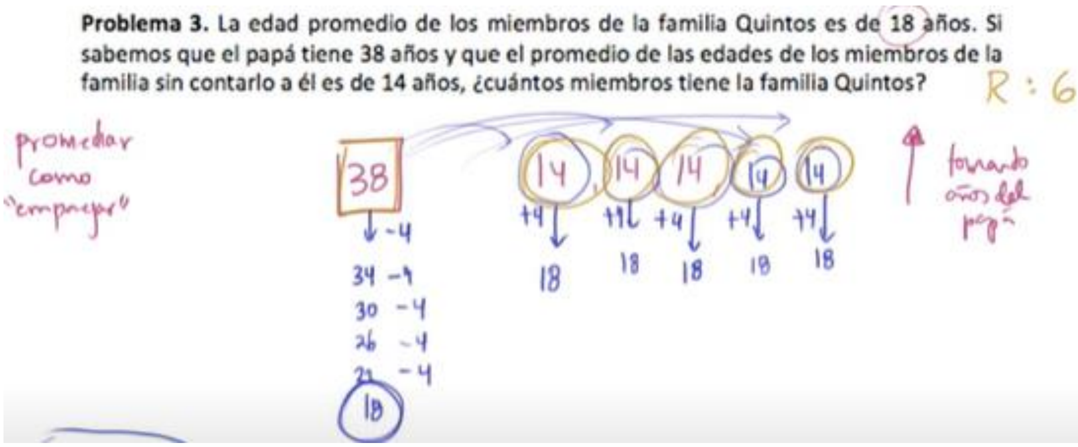


Figura 33. Análisis y solución de S_3P_3 en (S_3V_1, min: 38).

De forma más detallada, en aras de su mejor comprensión, se presenta el procedimiento anterior con forma propia.

38	**14**	2 integrantes			
- 4	+4				
=34	=18	**14**	3 integrantes		
- 4		+4			
=30		=18	**14**	4 integrantes	
- 4		+4			
=26		=18	**14**	5 integrantes	
- 4			+4		
=22			=18	**14**	6 integrantes
- 4				+4	
=18				=18	

Problema 3. (S_3P_7)

Un conejo da 5 saltos en el mismo tiempo que un perro que lo persigue da 4. Sin embargo, 8 saltos del perro miden lo mismo que 11 saltos del conejo. Si el conejo le lleva 66 saltos de ventaja, ¿cuántos saltos tiene que dar el perro para alcanzar al conejo?

Solución 1. (Solución algebraica, elaboración propia)

X saltos para <u>descontar</u> 66 saltos
p- Saltos del perro
c- Saltos de conejo

$8p = 11c$

$p = \frac{11}{8}c \ \ / \cdot 4 \ \ 4p = \frac{11}{2}c \ \ 4p = 5{,}5c$

$5{,}5c - 5c = 0{,}5c$ (descuento por c/4 saltos del perro)

$\frac{x}{4} = \frac{66}{0{,}5} \quad 0{,}5x = 4 \cdot 66 \quad 0{,}5x = 264$

$x = \frac{264}{0{,}5} \quad x = 528$

R/El perro deberá dar 528 saltos para alcanzar al conejo.

Solución 2. (Solución gráfica-aritmética, análisis en S_3V_1, min: 56)

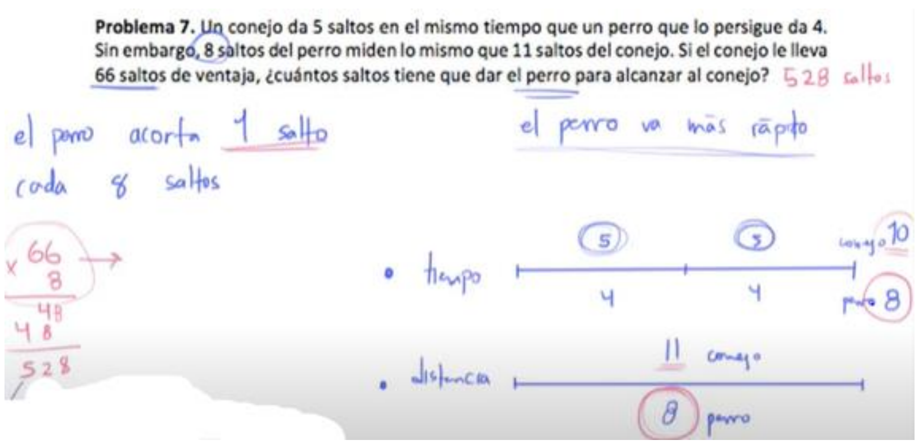


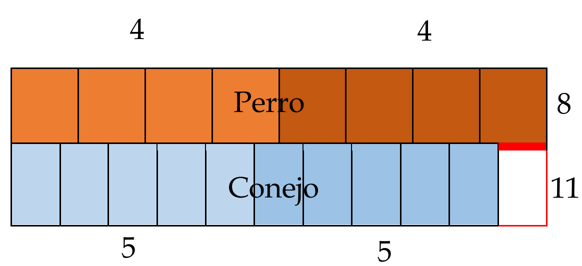
Figura 34. Análisis y solución de S_3P_7 en (S_3V_1, min: 61).

Solución 3. (Adecuación propia del análisis gráfico)

Saltos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tiempo} \\ \text{Distancia} \end{array} \right.$

Análisis inicial:

Si el perro alcanza al conejo es porque va más rápido.



Por lo que el perro acorta 1 salto de conejo cuando da 8 saltos.

$66 \cdot 8 = 528$

R/El perro deberá dar 528 saltos para alcanzar al conejo.

La solución anterior se apoya en la estrategia de *hacer un diagrama* con forma de tabla cuya coloración propicia la comparación de las magnitudes implicadas de forma lógica e intuitiva, permitiendo el reconocimiento de los factores que determinan la cantidad de saltos que serán necesarios para que el perro le dé alcance al conejo.

Seguidamente, se presenta un problema que generalmente se aborda como un caso particular de planteo de ecuaciones, el caso de edades, pero, en esta oportunidad, se enfoca de una forma alternativa al álgebra, siendo cardinal una vez más, la construcción de una tabla para el análisis de los datos y las condiciones del problema

Problema 4. (S_3P_8)

Lolo le dijo a Elvira: "Yo tengo 3 veces la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será de 35 años". ¿Cuál es la edad de Elvira?

Solución (Demostración cognitiva, analizado en S_3V_2, min: 32)

Análisis: Procedimientos:

¿Cuántos sujetos hay? ¿Quiénes son?

Lolo
Elvira

¿Qué tiempos están presentes en esta comunicación?

	Pretérito	Presente	Futuro
Lolo			
Elvira			

¿Quién habla en la conversación?

(yo) Lolo

Yo tengo 3 veces la edad que tú tenías

	Pretérito	Presente	Futuro
Lolo		$\mathbf{3} \cdot (\ )$	
Elvira	$\mathbf{1} \cdot (\ )$		

Cuando yo tenía la edad que tú tienes (*La suma de medios y extremos, en edades, son iguales*)

	Pretérito	Presente	Futuro
Lolo	$\mathbf{2} \cdot (\ )$	$3 \cdot (\ )$	
Elvira	$1 \cdot (\ )$	$\mathbf{2} \cdot (\ )$	

Cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será de 35 años. *(Considerando la suma de extremos y medios)*

	Pretérito	Presente	Futuro
Lolo	$2 \cdot (\ )$	$3 \cdot (\ )$	$\mathbf{4} \cdot (\ )$
Elvira	$1 \cdot (\ )$	$2 \cdot (\ )$	$\mathbf{3} \cdot (\ )$
Suma			**35**

$$\mathbf{4} \cdot (\ ) + \mathbf{3} \cdot (\ ) = \mathbf{35}$$

$$\mathbf{7 \cdot (\,) = 35}$$

Rta/ Elvira tiene 10 años.

$$\mathbf{7 \cdot 5 = 35}$$
$$\mathbf{2 \cdot 5 = 10}$$

En lo siguiente, se presentan otros problemas de álgebra con idéntico propósito, ya que si bien en algunas de las soluciones que se exponen se plantean ecuaciones, estas se construyen y resuelven, según se resume en (S_3V_1, min: 85), más de una manera visual, es decir, sobre la base de observaciones, de prueba y error o la propia construcción de tablas, que por una interpretación algebraica rigurosa.

Problema 5. (S_3P_9)

En una caja hay canicas rojas, verdes y azules. Las rojas son el triple de las azules y las azules, el triple de las verdes, en total hay 65 canicas. ¿Cuántas canicas rojas hay?

Solución: (Solución algebraica que se apoya en la observación, presentada en S_3V_1, min: 64)

¿De cuántos colores hay canicas en la caja?	Rojas (R)	Verdes (V)	Azules (A)

¿ Cuántas canicas hay en la caja?		$R + V + A = 65$
¿Cuántas canicas hay de cada tipo?	Las rojas son el triple de las azules	$R = 3A$
	Las azules, el triple de las verdes	$A = 3V$
Observación importante: ¿Qué relación hay entre las rojas y las verdes?		$R = 9V$
Sustituyendo		$9V + 3V + V = 65$
Reduciendo		$13V = 65$
Despejando		$V = 65 : 13$
Calculando		$V = 5$
Sustituyendo		$R = 9 \cdot 5$
Calculando		$R = 45$

Rta/ En la caja hay 45 canicas rojas.

En (S_3V_1, min: 66) se deja claro que el problema anterior, al igual que otros analizados, puede ser resuelto utilizando una tabla ordenada en la que se cuide las relaciones de cantidades entre las distintas canicas dadas, hasta encontrar una tríada de valores que satisfaga la condición que fija el total.

El siguiente problema que aquí se presenta tiene como elemento distintivo, según se refiere en (S_3V_1, min: 80), que en él aparecen condiciones simétricas, las que define como condiciones en la que se relacionan por pares, en las que cada elemento aparece dos veces, pero siempre en distintas relaciones cada uno de ellos.

Problema 6. (S_3P_{17})

Chocoreta, Chiqui y Dimi fueron a pesarse. Como no querían ver sus pesos, se pesaron en parejas. Dimi y Chocoreta pesaron 18 kilos juntas, Chiqui y Chocoreta pesaron 20 kilos juntas, Dimi y Chiqui pesaron 12 kilos juntas. ¿Cuánto pesa cada una?

Solución: (Solución algebraica que se apoya en la observación, presentada en S_3V_1, min: 81)

<u>Lenguaje común:</u>	<u>Lenguaje algebraico:</u>
Dimi y Chocoreta pesaron 18 kilos juntas	$D + CHo = 18$
Chiqui y Chocoreta pesaron 20 kilos juntas	$CHi + CHo = 20$
Dimi y Chiqui pesaron 12 kilos juntas	$D + CHi = 12$
Sumando los términos	$2D + 2CHo + 2CHi = 50$
Simplificando en ambos miembros	$D + CHo + CHi = 25$

Observaciones:

Como: $D + CHo = 18$ y $D + CHo + CHi = 25$, entonces $Chi = 7$

Como: $CHi + CHo = 20$ y $D + CHo + CHi = 25$, entonces $D = 5$

Como: $D + CHi = 12$ y $D + CHo + CHi = 25$, entonces $CHo = 13$

Rta/ Chiqui pesa 7 kg, Dimi 5 kg y Chocoreta 13 kg.

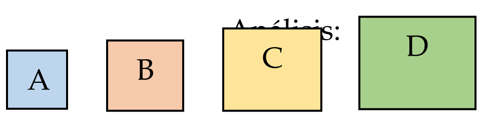
Otro problema de pesajes donde la observación es suficiente para hallar una solución:

Problema 7. (S_3P_{18})

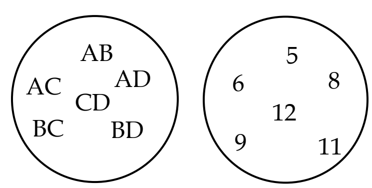
En una oficina postal tienen 4 paquetes. Desgraciadamente, su báscula no aguanta los cuatro paquetes juntos. Los pesaron por parejas en todas las posibles combinaciones y los pesos fueron 5, 6, 8, 9, 11, 12 kilos de cada pareja. ¿Cuánto pesan los cuatro paquetes juntos?

Solución: (Solución sobre la base de observaciones dada en S_3V_1, min: 86).

Paquetes:



Análisis:



Observaciones:

Se explica en (S_3V_1, min: 87) que no es posible hacer corresponder arbitrariamente las 6 parejas pesadas con los pesos obtenidos, pero se puede advertir que al pesaje de los dos paquetes menos pesados le deberá corresponder el menor peso, es decir, 5Kg y, al pesaje de los dos paquetes más pesados le corresponderá el mayor peso, siendo este de 12kg. De lo anterior se deduce que el peso de los 4 paquetes será de $5 + 12 = 17$kg.

Problema 8. (S_3R_2)

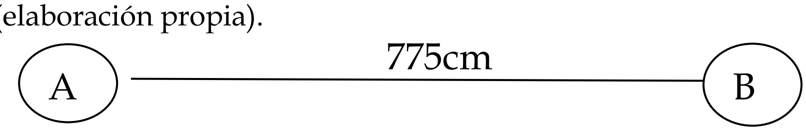
En el juego de "PAN Y QUESO" dos chicos dicen PAN, QUESO, en forma alternada y van uno al encuentro del otro por la línea pintada, poniendo cada vez un pie pegadito al otro.

Al decir PAN, el primer jugador adelanta un pie; al decir QUESO, lo hace el segundo. Gana el que pisa primero al otro. En el recreo armaron dos equipos de tres chicos para jugar. En el equipo de Aníbal, los tres calzan 40 (40cm); en el equipo de Blas, uno calza 33 (33cm), otro calza 34 (34cm) y el tercero calza 35 (35cm). La línea pintada mide 775 cm. Cada equipo elige un chico para jugar. Si inicia el juego el equipo de Aníbal, ¿a quién elige Blas para ganar? Si inicia el juego el equipo de Blas, ¿a quién elige Blas para ganar?

Solución: (Solución a partir de la construcción de una tabla y el análisis de casos, presentada a partir de S_3V_3, min: 8, como se muestra en la figura 35).

Figura 35. Análisis y solución de S_3R_2 en (S_3V_3, min: 12).

Una presentación más detallada y representativa del discurso se presenta seguidamente (elaboración propia).



	Jugadores				
	Aníbal	Blas	Par de pisadas $(A + B)$	$10\ (A + B)$	Faltante
J_1	40cm	33cm	73cm	730cm	45cm
J_2	40cm	34cm	74cm	740cm	35cm
J_3	40cm	35cm	75cm	750cm	25cm

Caso 1. (Inicia Aníbal)

Como todos los jugadores de Aníbal $J_1 = J_2 = J_3 = 40cm$ y este dará un paso más, deberá ser el faltante $> 40cm$, por lo que Blas elegiría $J_1 = 33cm$ para ganar.

Caso 2. (Inicia Blas)

Considerando que luego de los 10 pares de pisada estará en turno Blas, deberá ser el faltante < 35, por lo que Blas elegiría para ganar a su jugador $J_3 = 35cm$.

A modo de resumen puede decirse que muchos problemas algebraicos no rutinarios pueden ser abordados con alumnos aventajados de la enseñanza primaria y con aquellos que se inician en la secundaria evadiendo, en buena medida, el uso de las nociones más abstractas y formales de esta importante área del saber matemático.

Con tal fin, estrategias como la construcción de tablas ordenadas, el análisis de casos, prueba-error y la observación de las condiciones del problema, resultan de suma utilidad. Tal y como se pudo ver en las soluciones ejemplificadas, no se requiere proponer problemas con alto grado de complejidad, el éxito, al igual que con otras tipologías, está determinado por la cantidad y variedad de problemas que se resuelvan.

La ganancia de esta práctica como introducción al álgebra está dada, entre otras, porque además de proporcionar herramientas "simples" para resolver problemas y construir analogías que desarrollan la intuición ante nuevos problemas, permite ir adentrando al alumno en el mundo de la notación algebraica. De la misma forma, permite evidenciar los distintos usos que pueden tener las variables, cuya comprensión constituye base fundamental de este campo de la Matemática. Los aspectos centrales de este análisis se sintetizan en la Tabla 10.

Tabla 10.

Síntesis del análisis del tema "Tablas y ecuaciones".

Módulo: *Lógica y aritmética*	Tema: *Tablas y ecuaciones*			
Objetivo(s): *Promover el empleo de estrategias creativas para atacar problemas algebraicos en aquellos alumnos que se inician dentro del contexto olímpico-matemático y que cursan el nivel primario o secundario en la enseñanza general, lo que les permite la construcción de significados y el desarrollo general de las bases para el estudio de nociones más formales del álgebra.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas pre-algebraicos	*-Observación. -Creatividad. -Orden.*	*-Observar las condiciones del problema. -Construir tablas ordenadas. -Prueba y error. -Analizar casos.*	*-Traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. -Interpretar variables en sus diferentes usos. -Desarrollar el pensamiento lógico.*	*Los problemas de pre-álgebra vistos desde un enfoque creativo no requieren de la aplicación de procedimientos rigurosos. Muchas veces la simple observación de las condiciones del problema y el trabajo ordenado nos permite resolver el problema y, a la vez, dotar de sentido conceptos básicos introductorios del álgebra.*

(Elaboración propia).

4.1.2. Módulo II: Geometría

4.1.2.1. Ángulos

Tabla 11.

Fuentes de información disponibles para el tema "Ángulos".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S4	Ángulos	I E1, E2, …, E7 P1, P2, …, P18 R1, R2, …, R9	Sesión en vivo	V1	115
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	75
			Ángulos	V3	7
			Ejemplo	V4	10
			Retos 1, 2 y 3	V5	14
			Retos 5 y 6	V6	8
	Totales	34			229min

Propósito

Calcular ángulos entre rectas, polígonos y circunferencias a través de la resolución de ejercicios y problemas que evidencian la utilidad de encontrar triángulos isósceles escondidos en la figura para su solución.

Descripción

Este extenso material de la semana contiene una amplia recopilación de ejercicios y problemas de cálculo de ángulos. En S_4I se plantea que los ejercicios que se proponen tienen la intención de ejercitar los conocimientos previos necesarios para tener éxito ante los problemas que le siguen. En este sentido en dicho material se refiere que el conocimiento de las relaciones que se establecen para los ángulos de vértice común, los ángulos entre paralelas, además de los determinadas entre los ángulos de polígonos y circunferencias, constituyen *recursos* claves para el éxito. Además, en (S_4V_1, min: 6) se explica y ejemplifica como muchas veces estas relaciones nos permiten plantear ecuaciones y sistemas de ecuaciones que nos permiten llegar a la solución de un problema.

También en S_4I se deja saber que este material introductorio al módulo de Geometría se orienta hacia el desarrollo de *habilidades* en la identificación el cálculo de ángulos, lo que el experto entrenador denomina "cacería de ángulos". En este tenor, en (S_4V_1, min: 31) se sugiere la *estrategia* de buscar triángulos isósceles escondidos en la figura, como la más útil para resolver problemas de cálculo de ángulos y, mayormente en este sentido, giran los problemas contenidos en el material.

Argumentando la justificación de la presencia de los siete primeros ejercicios en el material y sus posibles usos dentro del entrenamiento, en (S_4V_1, min: 49, figura 36) refiere que este tipo de ejercicios son una muy buena opción de calentamiento, ya permiten practicar las propiedades y el cálculo de ángulos. También subraya que estos ejercicios son muy fáciles de construir apoyándose en algún software, por ejemplo, el GeoGebra.

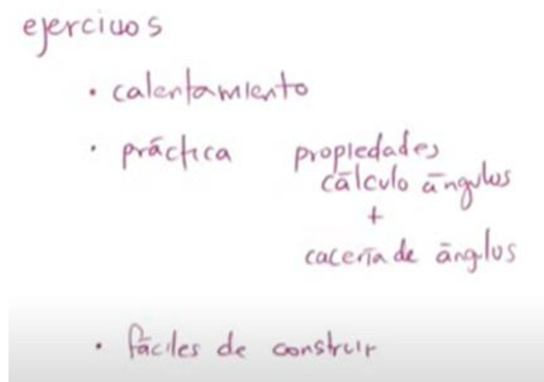
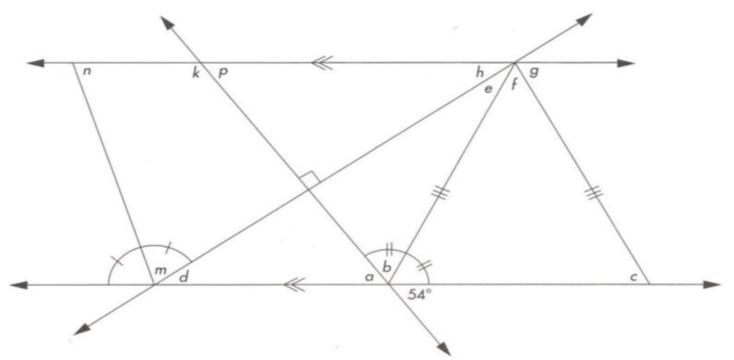


Figura 36. Finalidad de los ejercicios de cálculo de ángulos en el entrenamiento.

Entre los disponibles en el material, se presenta el que sigue para ejemplificar lo anteriormente expuesto:

Ejercicio 1. (S_4E_4)

Encuentra todos los ángulos de la figura marcados con una letra. Las rectas marcadas con el mismo par de flechitas son paralelas; mismo par de palitos son iguales.



El entrenador, previo al análisis del ejercicio presentado en (S_4V_1, min: 43), recalca que en muchos problemas de olimpiadas hallar la amplitud de un ángulo no es el fin, pero es un elemento importante dado la figura dada está expresada en términos de ángulos que nos permiten encontrar otras relaciones. Ya adentrándose en el análisis del ejercicio, primeramente, esclarece la notación implícita en la figura y luego procede a comentar la relación de los ángulos solicitados a partir de la amplitud conocida. Cabe resaltar que los planteamientos de las relaciones establecidas y sus correspondientes fundamentaciones no se hicieron de la manera más formal, por lo que la solución que seguidamente aquí se presenta (también para el resto de los problemas), sigue el orden llevado por el entrenador, pero incorpora lenguaje propio.

Solución:

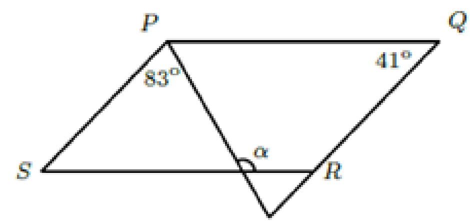
$\sphericalangle a = 54°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
$\sphericalangle a = \sphericalangle p = 54°$ por ser ángulos alternos entre paralelas.
$\sphericalangle k + \sphericalangle p = 180°$ por ser ángulos adyacentes.
$\sphericalangle k + 54° = 180°$; $\sphericalangle k = 126°$.
$\sphericalangle h + \sphericalangle p = 90°$ por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$\sphericalangle h + 54° = 90°$; $\sphericalangle h = 36°$.
$\sphericalangle d = \sphericalangle h = 36°$ por ser ángulos alternos entre paralelas.
$\sphericalangle 2m + \sphericalangle d = 180°$ por ser ángulos consecutivos sobre una recta.
$\sphericalangle 2m + 36° = 180°$; $\sphericalangle m = 72°$.
$\sphericalangle n = 72°$ por ser ángulos alternos entre paralelas.
$\sphericalangle 2b + \sphericalangle a = 180°$ por ser ángulos consecutivos sobre una recta.
$\sphericalangle 2b + 54° = 180°$; $\sphericalangle b = 63°$.
$\sphericalangle c = 63°$ por ser ángulos bases de un triángulo isósceles.
$\sphericalangle f + 2 \cdot 63° = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
$\sphericalangle f + 126° = 180°$; $\sphericalangle f = 54°$.
$\sphericalangle g = \sphericalangle c = 63°$ por ser ángulos alternos entre paralelas.
$\sphericalangle e + \sphericalangle h + \sphericalangle f + \sphericalangle g = 180°$ por ser ángulos consecutivos sobre una recta.
$\sphericalangle e + 36° + 54° + 63° = 180°$; $\sphericalangle e = 27°$.

Los primeros problemas que se enlistan pueden ser considerados también ejercicios con la misma finalidad del tipo ejemplificado anteriormente, e incluso, más sencillos que el anterior dado que en estos casos por lo general sólo se pide hallar la amplitud de uno o dos ángulos. Un ejemplo de estos se analiza en (S_4V_1, min: 53) .

Problema 1. (S_4P_3)

En la figura siguiente PQRS es un paralelogramo. ¿Cuánto vale α? Los ángulos marcados miden 83º y 41º.



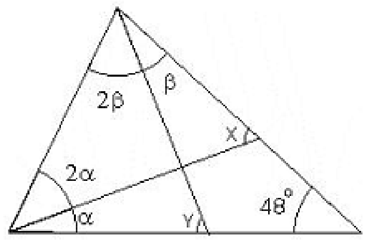
Solución:

$\sphericalangle S = \sphericalangle Q = 41°$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo.
$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle S + 83°$ por suma de ángulos exteriores de un triángulo.
$\sphericalangle \alpha = 41° + 83°$; $\sphericalangle \alpha = 124°$.

Subiendo el grado de dificultad y adelantándonos un poco en el curso de la sesión, en (S_4V_1, min: 84) encontramos un buen ejemplo presentado por el entrenador para evidenciar como las relaciones entre ángulos nos permiten plantear ecuaciones y sistemas de ecuaciones, siendo posible en el mismo múltiples variantes.

Problema 2. (S_4P_{14})

Encuentra el valor de $x + y$ en la figura:



Solución:

$x = \alpha + 48°$ por suma de ángulos exteriores

$\underline{y = \beta + 48°}$ de triángulos.

$x + y = \alpha + \beta + 96°$

$\alpha + 2\alpha + 2\beta + \beta + 48° = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$3\alpha + 3\beta + 48° = 180°$; $3\alpha + 3\beta = 132°$; $\alpha + \beta = 44°$

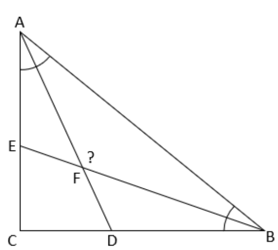
$x + y = 44° + 96°$; $x + y = 140°$.

En (S_4V_1, min: 97) llama la atención también sobre la necesidad que sienten muchos estudiantes de hallar los valores de x, y, α, β individualmente, a pesar de que en el problema no se le solicite, por lo que frecuentemente en este propósito hacen inferencias arbitrarias e insostenibles.

Otro problema similar en el que la relación entre sus ángulos constituye un factor determinante para el planteamiento de una ecuación que nos acerque a la solución se presenta en (S_4V_6, min: 1). El aumento del grado de dificultad en este problema está dado, además de la presencia de rectas notables, porque el mismo no se hace acompañar de una figura de análisis, por lo que esta debe construirse a partir de la información del enunciado.

Problema 3. (S_4R_5)

Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sean D, E los pies de las bisectrices desde A, B hacia BC, CA, respectivamente. Supongamos que AD, DE se cruzan en F. Calcula $\angle AFB$.



Solución:

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$ por ser $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ bisectrices de los

$\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC$ ángulos $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle ABC$ respectivamente.

$\sphericalangle C + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABE + \sphericalangle EBC = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$\sphericalangle C + X + X + Y + Y = 180°$; $90° + 2X + 2Y = 180°$; $X + Y = 45°$

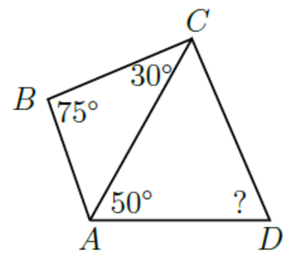
$X + Y + \sphericalangle AFB = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$45° + \sphericalangle AFB = 180°$; $\sphericalangle AFB = 135°$

Regresando y yendo directamente a la estrategia de encontrar triángulos isósceles escondidos, calificada como principal desde la introducción del tema dada su recurrente aplicabilidad en estos problemas de cálculo de ángulos, se presenta el siguiente problema como modelo. Cabe resaltar que el entrenador asegura en (S_4V_1, min: 58) que este es un clásico y que ha estado presentes en varias competiciones.

Problema 4. (S_4P_7)

En la figura se muestra un cuadrilátero ABCD. Si sabemos que BC = AD, ¿cuánto mide el ángulo ADC?



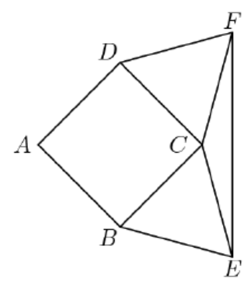
En el análisis de este problema (S_4V_1, min: 59) el entrenador insiste en la importancia de no dejarse llevar totalmente por la apariencia de la figura, si bien en ocasiones esta puede dar pistas de utilidad. Como ejemplo hace referencia a que muchas personas asumen paralelismo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, lo cual es comprobablemente incierto una vez conocida la siguiente solución:

Solución:

$\overline{BC} = \overline{AD}$ por datos.
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
$75° + 30° + \sphericalangle CAB = 180°$; $\sphericalangle CAB = 75°$.
$\overline{BC} = \overline{AC}$ por oponerse a ángulos iguales en un triángulo ($\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 75°$).
$\overline{AD} = \overline{AC}$ por transitividad de la igualdad de lados **($\varDelta \boldsymbol{ACD}$ isósceles de base $\overline{\boldsymbol{CD}}$).**
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD$ por ser ángulos bases de $\varDelta ACD$ isósceles.
$\sphericalangle 2ADC + \sphericalangle CAD = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
$\sphericalangle 2ADC + \sphericalangle 50° = 180°$; $\sphericalangle ADC = 65°$.

Problema 5. (S_4P_8)

En la figura siguiente, $ABCD$ es un cuadrado, y DFC y BCE son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo CEF?



En la previa del análisis de este problema (S_4V_1, min: 66) se refiere que muchos problemas se construyen de esta manera, colocando figuras regulares sobre otras regulares y en el material de la semana aparecen varios ejemplos de ello.

Solución:

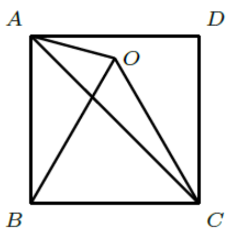
$\sphericalangle BCD = 90°$ por ser ángulo interior de un cuadrado.
$\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCF = 60°$ por ser ángulos interiores de triángulos equiláteros.
$\sphericalangle BCD + 2\ \sphericalangle BCE + \sphericalangle ECF = 360°$ por suma de ángulos consecutivos que forman un completo.
$90° + 2 \cdot 60° + \sphericalangle ECF = 360°$; $\sphericalangle ECF = 150°$.
$\overline{BC} = \overline{CD}$ por ser lados de un cuadrado.

$\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{CD} = \overline{CF} = \overline{DF}$ por ser lados de triángulos equiláteros iguales.
$\boldsymbol{\triangle CEF}$ **es isósceles de base** $\boldsymbol{\overline{EF}}$ ($\overline{CE} = \overline{CF}$)
$\sphericalangle CEF = \sphericalangle CFE$ por ser ángulos bases de un triángulo isósceles.
$2\sphericalangle CEF + \sphericalangle ECF = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
$2\sphericalangle CEF + 150° = 180°$; $\sphericalangle CEF = 15°$.

El problema que a continuación seleccionamos para seguir evidenciando la estrategia de encontrar isósceles escondidos se analiza en (S_4V_1, min: 74) y a la vez constituye otra muestra de problemas que contienen figuras regulares sobre otras regulares.

Problema 6. (S_4P_{15})

En la figura ABCD es un cuadrado y OBC es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?



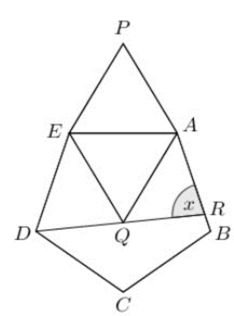
Solución:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BO} = \overline{CO}$ por ser lados de un cuadrado y un triángulo equilátero con un lado en común.
∴ $\boldsymbol{\triangle ABO}$ **es isósceles de base** $\boldsymbol{\overline{AO}}$ ($\overline{AB} = \overline{BO}$).
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 90°$ por ser ángulos interiores de un cuadrado.
$\sphericalangle CBO = 60°$ por ser ángulo interior de un triángulo equilátero.
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBO$ por diferencia de ángulos consecutivos de vértice común.
$\sphericalangle ABO = 90° - 60°$; $\sphericalangle ABO = 30°$.
$\sphericalangle BAO = \sphericalangle AOB$ por ser ángulos bases del $\triangle ABO$ isósceles de base $\overline{AO}$.
$2\sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
$2\sphericalangle BAO + 30° = 180°$; $\sphericalangle BAO = 75°$.
$\sphericalangle BAC = \frac{\sphericalangle BAD}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$ porque las diagonales de un cuadrado son bisectrices de los ángulos cuyos vértices une.
$\sphericalangle OAC = \sphericalangle BAO - \sphericalangle BAC$ por diferencia de ángulos consecutivos de vértice común.
$\sphericalangle OAC = 75° - 40°$; $\sphericalangle OAC = 30°$.

Otro problema paradigmático de las ideas que se comparten en esta sesión se presenta en (S_4V_4, min: 2), mismo que el entrenador hace saber que fue el problema 10 de la ONMAPS 2019, es decir, el primer problema del segundo día para los alumnos de la enseñanza primaria.

Problema 7. (No enlistado en el doc., tomado de (S_4V_4, min: 2).

En la figura se tiene ABCDE un pentágono regular y APE un triángulo equilátero. Q es un punto en el interior del pentágono de manera que PAQE es un rombo. Sea R la intersección de las rectas DQ con AB. Encuentra el valor del ángulo $\sphericalangle QRA$.



Solución:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EP} = \overline{PA} = \overline{AE} = \overline{EQ} = \overline{QA}$ por ser lados de un pentágono regular, un triángulo equilátero y un rombo con lados comunes.

$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(5-2)}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$ por ser ángulos interiores de un pentágono regular.

$\sphericalangle QEA = 60°$ por ser ángulo interior del $\varDelta AQE$ equilátero.

$\sphericalangle DEQ = \sphericalangle DEA - \sphericalangle QEA$; $\sphericalangle DEQ = 108° - 60°$; $\sphericalangle DEQ = 48°$ por diferencias de ángulos consecutivos de vértice común.

$\varDelta DEQ$ es isósceles de base $\overline{DQ}$ ($\overline{DE} = \overline{EQ}$).

$\sphericalangle EDQ = \sphericalangle DQE$ por ser ángulos bases de un triángulo rectángulo.

$2\sphericalangle EDQ + \sphericalangle DEQ = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$2\sphericalangle EDQ + 48° = 180°$; $\sphericalangle EDQ = 66°$

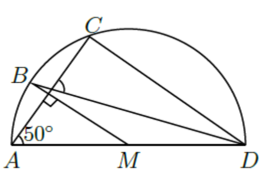
$\sphericalangle EDQ + \sphericalangle DEA + \sphericalangle EAB + \sphericalangle QRA = 360°$ por suma de ángulos interiores de un cuadrilátero convexo.

$66° + 2 \cdot 108° + \sphericalangle QRA = 360°$; $\sphericalangle QRA = 78°$.

Finalmente, el último problema que se presenta para ejemplificar las principales ideas que el entrenador promueve en torno a la temática en cuestión se analiza en (S_4V_5, min: 10). La novedad en este está dada por la presencia de una semicircunferencia de la que también se deben visualizar relaciones importantes. No obstante, a pesar de que existen otros caminos de solución, lo que explica la presencia de este problema en la selección, sigue siendo la posibilidad de evidenciar la utilidad de encontrar el triángulo isósceles escondido en la vía de solución que se presenta.

Problema 8. (S_4R_3)

En la figura anterior, AD es diámetro y M es el centro de la semicircunferencia. Los puntos B y C están en la semicircunferencia de forma que AC y BM son perpendiculares y el ángulo A mide 50º. Determine el ángulo marcado entre las rectas AC y BD.



Solución:

$\sphericalangle AMB + \sphericalangle A = 90°$ por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$\sphericalangle AMB + 50° = 90°$; $\sphericalangle AMB = 40°$.

$\overline{BM} = \overline{MD}$ por ser radios de una semicircunferencia.

$\varDelta BMD$ es isósceles de base $\overline{BD}$ ($\overline{BM} = \overline{MD}$).

$\sphericalangle BDM = \sphericalangle MBD$ por ser ángulos bases de un triángulo isósceles.

$2\sphericalangle BDM = \sphericalangle AMB$ por teorema del ángulo exterior de un triángulo.

$2\sphericalangle BDM = 40°$; $\sphericalangle BDM = 20°$.

$\sphericalangle ACD = 90°$ por ser un ángulo inscrito sobre un diámetro (Teo. de Tales).

$\sphericalangle CDA + \sphericalangle A = 90°$ por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$\sphericalangle CDA + 50° = 90°$; $\sphericalangle CDA = 40°$.

$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CDA - \sphericalangle BDM$ por diferencia de ángulos consecutivos de vértice común.

$\sphericalangle CDB = 40° - 20°$; $\sphericalangle CDB = 20°$.
$\sphericalangle DBC + \sphericalangle CDB = 90°$ por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
$\sphericalangle DBC + 20° = 90°$; $\sphericalangle DBC = 70°$.

A modo de resumen puede decirse que los problemas analizados a pesar de no contener una gran complejidad suponen un desafío que pone a prueba la capacidad de visualización y el conocimiento de principios básicos de la geometría plana. Debe subrayarse que entendemos que el cálculo de ángulos constituye para la Geometría, lo que el cálculo de las operaciones básicas es para la Aritmética. En este sentido, el desarrollo de la habilidad de calcular ángulos constituye piedra angular para escalar en el conocimiento geométrico, por citar ejemplos dentro del currículo de la enseñanza secundaria, es una habilidad imprescindible en el propósito de demostrar la congruencia o semejanza entre polígonos.

La idea central que transmite el entrenador experto es la de partir de la hipótesis de que en la figura puede haber un triángulo isósceles escondido cuyas propiedades pueden ser claves en el camino a la solución. Los aspectos principales en nuestra visión a partir del análisis de las fuentes de información disponibles para el tema se recogen en la tabla 12.

Tabla 12.

Síntesis del análisis del tema "Ángulos".

Módulo: *Geometría*	Tema: *Ángulos*			
Objetivo(s): *Calcular ángulos entre rectas, polígonos y circunferencias a través de la resolución de ejercicios y problemas que evidencian la utilidad de encontrar triángulos isósceles escondidos en la figura para su solución.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas de cálculo de ángulos.	*-Ángulos entre rectas.* *-Ángulos entre paralelas.* *-Ángulos en polígonos.* *-Ángulos en circunferencias.*	*-Encontrar el triángulo isósceles escondido.*	*-Calcular ángulos, "Cacería de ángulos".*	*Partir de la hipótesis de que en la figura hay un triángulo isósceles escondido.*

(Elaboración propia).

4.1.2.2. Perímetros

Tabla 13.

Fuentes de información disponibles para el tema "Perímetros".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S5	Perímetro	P1, P2, …, P11 R1, R2, …, R4	Sesión en vivo	V1	99
			Taller en vivo	V2	70
			Sesión en vivo Gen. 1	V3	72
			Retos	V4	21
	Totales	15			262 min

Propósito:

Calcular perímetros de polígonos y longitudes de circunferencias en problemas no rutinarios.

Descripción:

En (S_5I) se plantea que, de manera similar a los problemas de ángulos, muchas veces encontraremos problemas de perímetro en olimpiadas donde estos no son más que nada una excusa para plantear ecuaciones lineales. No obstante, la idea o *estrategia* principal que se refuerza en los materiales del CEOM relativos al tópico, descansa en la consideración de la invarianza de los perímetros de polígonos regulares y los paralelogramos.

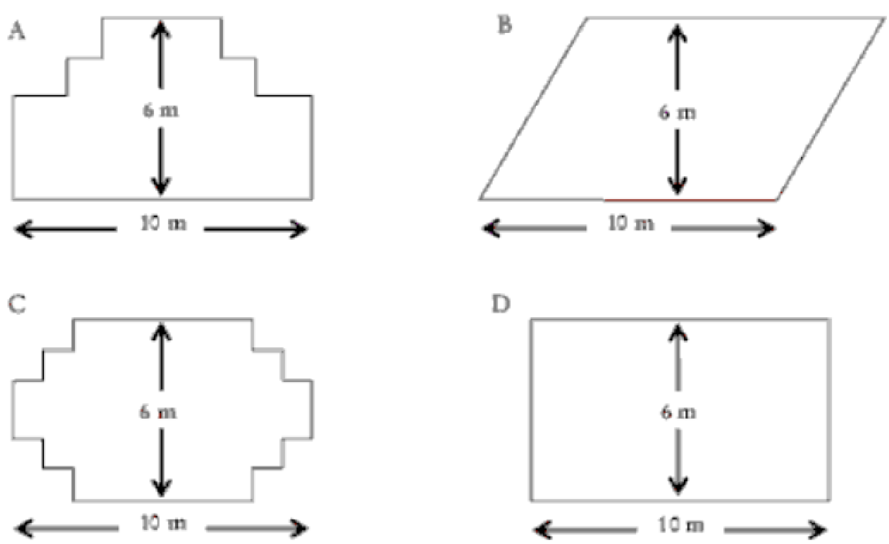
Dado la anterior, constituyen *recursos* vitales para el éxito ante la mayor parte de los problemas que se analizan, el dominio de las propiedades de estas figuras que permiten reconocer los segmentos con igual longitud, aunque el uso más recurrente se evidencia específicamente en el caso de los rectángulos.

El experto entrenador comenta en (S_5V_1, min: 8) que esta idea rompe la concepción de que la única manera de calcular el perímetro de un polígono sea conociendo las medidas individuales de los segmentos que lo determinan, idea que (en nuestra opinión), habitualmente se refuerza en la clase regular, donde para hallar el valor de tal magnitud se tiende a no prescindir del planteamiento aritmético-algebraico a manera de fórmulas.

Para ejemplificar lo anteriormente expuesto de manera sencilla se presenta el primer problema, el cual se enuncia como sigue:

Problema 1. (S_5P_{12})

¿Cuáles de las siguientes figuras tienen el mismo perímetro?



En el análisis de este cuestionamiento realizado a partir de (S_5V_1, min: 9) se enfatiza en que a pesar de no conocer las medidas individuales de los segmentos determinados en las figuras A y C, esto no impide que se pueda encontrar una solución. Para ello, el entrenador hace ver la posibilidad de considerar los segmentos verticales que van de abajo a arriba y que, por tanto, suman la longitud de la altura. Análogamente se procede con los segmentos horizontales para determinar la longitud total de lo que serían las bases del rectángulo. Este análisis se deja ver en la figura 37 a la izquierda.

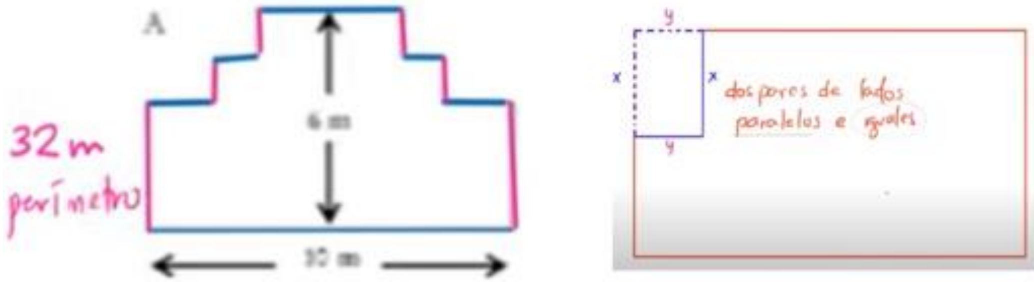


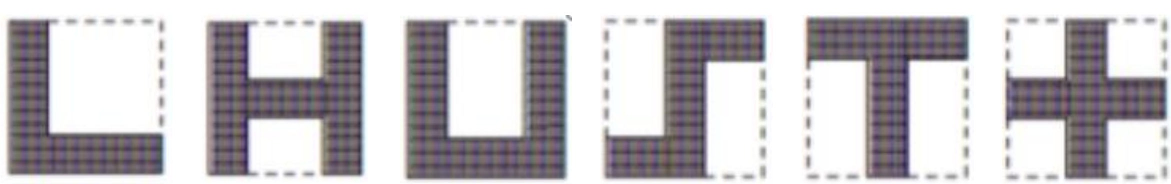
Figura 37. Estrategia para hallar el perímetro de polígonos.

De esta forma se puede concluir que las figuras A, C y D tienen el mismo perímetro. Con la figura 37 (a la derecha) se presenta la manera en que en (S_5V_1, min: 14) se fundamenta esta idea usando la propiedad de los rectángulos (también de todo paralelogramo) de tener los lados opuestos iguales. La invarianza del valor del perímetro está dada porque las figuras contempladas podemos verlas como un rectángulo total al que se le han quitado algunos rectángulos más pequeños. En tal sentido y, dada la propiedad de estos enunciada anteriormente, se consideran los lados opuestos de los rectángulos más pequeños para "reconformar" el rectángulo total ideal.

Seguidamente, a partir de (S_5V_1, min: 17) se analiza el segundo problema, mismo que es muy similar al anterior, pero sirve para reforzar y ampliar esta idea.

Problema 2. (S_5P_{13})

De 6 hojas de papel se recortan las siguientes figuras. ¿Cuáles tienen el mismo perímetro que la hoja de papel?



En este caso puede asegurarse que, exceptuando los recortes realizados a la segunda y tercera hojas, en los restantes el perímetro se mantiene invariable dado que en cada caso se extrajo 1, 2 o 4 rectángulos, siempre de las esquinas de las hojas, por lo que los lados que se "pierden" con el recorte rectangular, se sustituyen por sus opuestos. En la segunda y tercera figura, a pesar de que también las cercenaduras fueron rectangulares, el perímetro aumenta dado que no fueron hechas en las esquinas y el lado que se pierde es remplazado en la nueva figura que se obtiene por su paralelo e igual, además de otros dos perpendiculares a estos.

A partir de esta misma situación problémica, en (S_5V_1, min: 19), dándole continuidad a la relación de las esquinas con el perímetro, establece el paralelo entre la hoja de papel una cancha e hipotéticos recorridos de un “presumido tramposo” que intenta sacar ventaja desplazándose según se indica en cada uno de los recortes anteriores. De esta forma subraya que de optar por el segundo o tercer recorrido sería la peor persona para hacer trampas, ya que es muy intuitivo, para sí hacer menos, cortar una de las esquinas. La fundamentación de este conocido principio permite traer a colación el importante teorema de desigualdad triangular, también de suma utilidad en muchos de los problemas de perímetro.

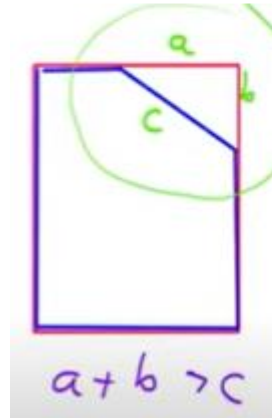
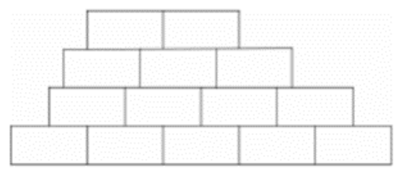


Figura 38. Teorema de desigualdad triangular.

Profundizando en la misma línea de pensamiento en (S_5V_1, min: 34) presenta el análisis de lo que, en su opinión, es una de las variantes más creativas de este tipo de problemas que se pueden entender como rectángulos al que se le quitan sus esquinas.

Problema 3. (S_5P_{15})

Cada ladrillo de la barda mide 15cm por 30cm. ¿Cuántos metros mide el perímetro de la barda?



Solución:

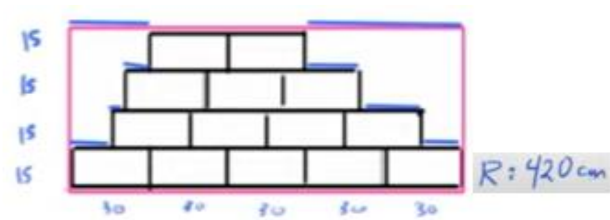


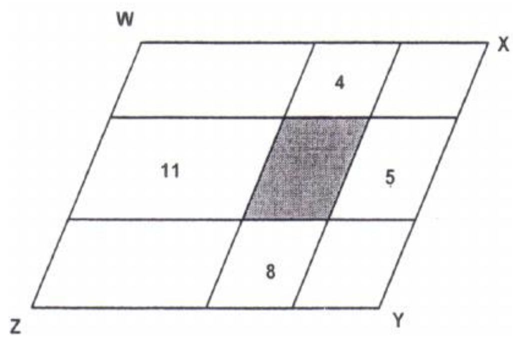
Figura 39. Solución del problema (S_5P_{15}) en (S_5V_1, min: 36).

Aquí la novedad está dada en que no se conocen las dimensiones totales del rectángulo, pero sí la de las partes iguales que las determinan. Por lo que, multiplicando el largo de un ladrillo (30cm), por los cinco que determinan el ancho y, su altura (15cm), por los cuatro sobrepuestos en esta dirección, puede conocerce que este es un rectángulo de 150×60, considerando que hay dos parejas de lados como estos, se resuelve que $2(150 + 60) = 420$ cm de perímetro tiene la barda.

Esta misma idea de considerar los lados opuestos de rectángulos también puede aplicarse a problemas que involucran a paralelogramos. Para ejemplificarlo se presentan los dos problemas que siguen, siendo el primero de ellos un ejemplo representativo de la idea presentada en la descripción inicial del tema cuando se planteaba que el perímetro constituye en ocasiones la excusa para plantear determinadas ecuaciones.

Problema 4. (S_5R_4)

El paralelogramo WXYZ ha sido dividido en nueve paralelogramos más pequeños. En la figura se muestran los perímetros, en cm, de cuatro de los paralelogramos pequeños. El perímetro del paralelogramo WXYZ es 21 cm. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo sombreado?



Solución:

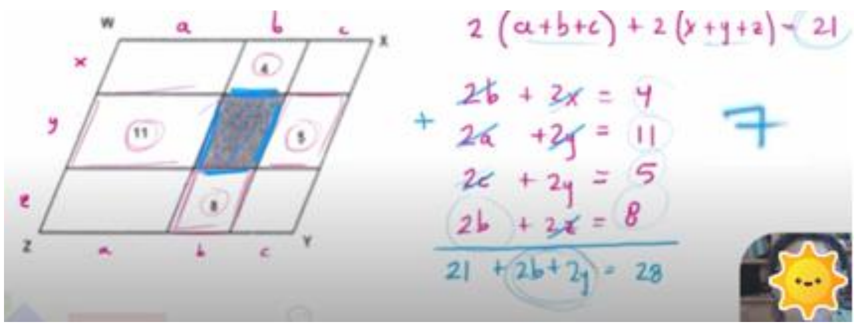


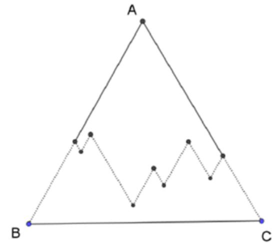
Figura 40. Solución al (S_5R_4) en $(S_5V_4$, min: 11).

Para complementar los procedimientos que se muestran en la figura 40 debe explicarse que el entrenador experto comienza asignando las variables a, b, c, x, y, z a las longitudes desconocidas de los lados de los paralelogramos pequeños que se determinan en la figura, recalcando que sus opuestos tienen la misma longitud, propiedad que vuelve a ser clave para la solución que se presenta. Seguidamente se plantea algebraicamente el perímetro del paralelogramo WXYZ y, de la misma forma, el de los paralelogramos más pequeños cuyo perímetro es conocido, en ambos casos función de las variables asignadas a las longitudes desconocidas. Otro punto clave en esta vía de solución el entrenador lo hace ver al percatarse de que, en las sumas planteadas para los perímetros de los paralelogramos pequeños, se tiene como sumandos 2a, 2b, 2c, 2x, 2y, 2z, mismos términos que determinan el perímetro del paralelogramo WXYZ, el cual se conoce que es 21 cm por datos y, además, quedan otros dos términos, 2b y 2y, cuya suma determina el perímetro del polígono sombreado buscado. Como la suma de todos los perímetros conocidos es de 28 cm, $2x + 2y = 7$.

Otro problema cuya solución se viabiliza con la advertencia de la referida propiedad de los paralelogramos: $(S_5V_4$, min: 18).

Problema 5. (S_5R_5)

El siguiente triángulo ABC es equilátero. El camino punteado es tal que sus picos forman ángulos de 60º y los extremos del camino coinciden con los lados del triángulo. Si la longitud del camino es 2018, ¿cuál es el perímetro del triángulo?



Solución:

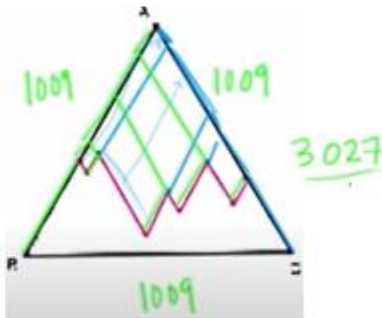


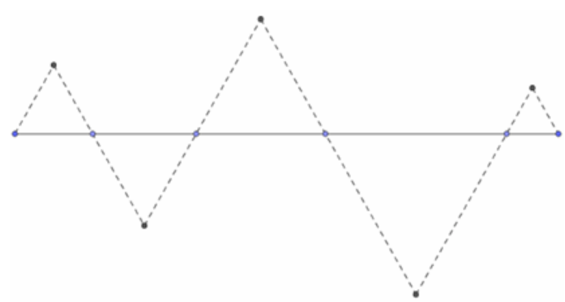
Figura 41. Solución de (S_5R_5) en (S_5V_4, min: 20).

Partiendo de la información que se tiene donde $\triangle ABC$ es equilátero y los picos del camino forman ángulos de 60º, puede demostrarse que al trazar las paralelas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ desde cada uno de los vértices (picos del camino), quedan determinados paralelogramos. Nuevamente la igualdad de sus lados opuestos permite "trasladar" las poligonales que conforman el camino sobre los lados $\overline{AB}$ (poligonales crecientes) y $\overline{AC}$ (poligonales decrecientes). En consecuencia, dado que el camino tiene una longitud de 2018 y se hace corresponder con $\overline{AB} + \overline{AC}$ y, además, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ por ser $\triangle ABC$ equilátero, entonces $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 1009$ y $P = 3027$.

Aunque el problema anterior se plantea en términos del perímetro de un triángulo, la estrategia principal en la solución se apoya en las propiedades del paralelogramo, pero la base de esta idea también se aplica a los triángulos, fundamentalmente, en equiláteros. Los siguientes dos problemas lo ejemplifican.

Problema 6. (S_5P_7)

Un segmento de longitud 2019 se partió en 5 pedazos de distinto tamaño. Sobre (o debajo) de cada uno de ellos se construyó un triángulo equilátero. Calcula la longitud de la línea punteada.



Solución:

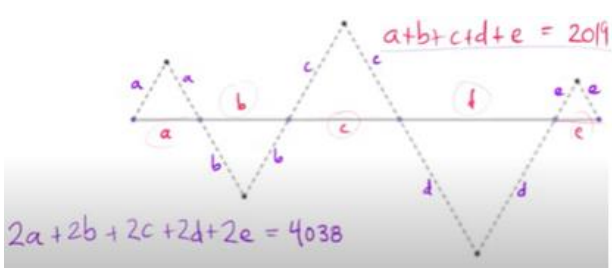


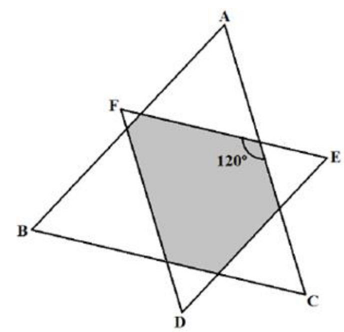
Figura 42. Solución del (S_5P_7) en (S_5V_1, min: 65).

Como los cinco triángulos construidos son equiláteros con un lado en común con el segmento dado, situándose sucesivamente a lo largo de toda su longitud, y camino punteado está formado por los otros dos lados de cada triángulo equilátero, el camino punteado tendrá el doble de la longitud del segmento conocido.

Al introducir el siguiente problema en (S_5V_4, min: 1) el entrenador refiere que este salió en la ONMAPS de 2012 y posteriormente en un examen de invitación de la OMM. Con ello subraya la necesidad de mantenerse "en forma", refiriéndose a que los entrenadores deben actualizar constantemente el material que utilizan en la preparación de sus estudiantes para estas lides, idea que sostiene agregando que los problemas envejecen, se hacen muy conocidas las ideas que ponen en juego y, lo que fue un problema de competición nacional, se convierte en un problema de opción múltiple o de primeras instancias en una olimpiada. Como se había adelantado ya, este problema que sigue también ejemplifica la equivalencia entre segmentos que forman parte de triángulos equiláteros.

Problema 7. (S_5R_1)

Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 36 cm y 27 cm respectivamente, están sobrepuestos, formando un ángulo de 120º como se muestra en la figura. Calcula el perímetro del hexágono sombreado.



Solución:

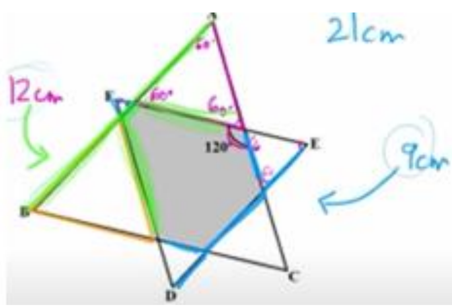


Figura 43. Solución del (S_5R_1) en (S_5V_4, min: 7).

Como $\varDelta ABC$ y $\varDelta DEF$ son equiláteros, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F = 60$º.

El ángulo adyacente (en el sentido de A) al ángulo de 120º es igual a 60º.

Como el $\sphericalangle A = 60$º el tercer ángulo del triángulo pequeño (de arriba) también es de 60º.

Análogamente se procede con el triángulo pequeño de la derecha con uno de sus vértices en E.

De los restantes triángulos pequeños (4), es conocido ya que tienen un ángulo de 60º ($\sphericalangle C, \sphericalangle D, \sphericalangle B\ y\ \sphericalangle E$) y, en el caso del más pequeño, situado a la izquierda de la figura con vértice en E, tiene otro opuesto por el vértice a uno de los del triángulo de arriba y por tanto también con 60º de amplitud. Por lo que su tercer ángulo también tendría 60º.

Análogamente se procede con los triángulos pequeños que cuentan entre sus vértices a B, D y C.

∴ Todos los triángulos de la figura son equiláteros.

Por ello, el tener sus lados iguales permite asociar la longitud de los tres lados de la izquierda del hexágono con el lado $\overline{AB}$ del triángulo (relación en verde). De la misma forma, los otros tres lados del hexágono, los de la derecha, se hacen corresponder con el lado del triángulo $\overline{ED}$ (relación en azul).

∴ El $P_{hexágono} = \overline{AB} + \overline{ED}$

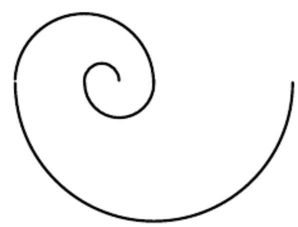
$\overline{AB} = \frac{P_{\triangle ABC}}{3} = \frac{36\ cm}{3} = 12\ cm$ y $\overline{ED} = \frac{P_{\triangle DEF}}{3} = \frac{27\ cm}{3} = 9\ cm$

$P_{hexágono} = 12\ cm + 9\ cm$; $P_{hexágono} = 21\ cm.$

Como se menciona en la introducción de este tema, en los problemas de olimpiadas también se presentan problemas relacionados con el perímetro (longitud) de circunferencias o de arcos de circunferencias. Los dos problemas que siguen constituyen ejemplos de lo anterior y también de que la noción de perímetro es el fundamento para plantear ecuaciones.

Problema 8. (S_5P_8)

La espiral de la figura está formada por cuatro semicircunferencias, siendo la más pequeña de radio 1 cm, y el radio de las otras duplica al de la anterior. ¿Cuál es la longitud de la espiral, en centímetros?



Solución: (S_5V_1, min: 54).

$L_{sc} = \frac{2\pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$

$L_{espiral} = \pi \cdot r_1 + \pi \cdot r_2 + \pi \cdot r_3 + \pi \cdot r_4$; $L_{espiral} = \pi\ (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$;

$L_{espiral} = \pi\ (1 + 2 + 4 + 8)$; $L_{espiral} = 15\pi$; $L_{espiral} = 47{,}1\ cm$

En (S_5V_1, min: 80), previo al análisis del siguiente problema, el entrenador experto plantea que a pesar de no contener un alto grado de dificultad muchos estudiantes “se asustan” debido a la escasa familiarización que tienen con figuras determinadas por segmentos y arcos de circunferencia.

Problema 9. (S_5P_9)

¿Cuál es el perímetro del área sombreada si el lado del cuadrado mide 7 cm, el radio de cada círculo mide 3,5 cm, y los centros de estos círculos están en los vértices del cuadrado?

Solución: (S_5V_1, min: 81)

Como los lados del cuadrado miden 7 cm y el radio de los círculos cuyos arcos limitan el área sombreada miden 3,5 cm, siendo coincidentes, las poligonales que determinan el área sombreada también miden 3,5 cm.

Como los ángulos centrales correspondiente a los arcos de los círculos son ángulos de un cuadrado miden 90º, por lo que esta será la amplitud de cada uno de los arcos y, sumados, conforman una semicircunferencia.

Dado lo anterior se puede plantear lo siguiente:

$$P_{AS} = 4 \cdot 3{,}5 + \frac{2\pi \cdot r}{2}\ ;\ P_{AS} = 4 \cdot 3{,}5 + \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5}{2}\ ;\ P_{AS} = 14 + 10{,}99\ ;\ P_{AS} = 24{,}99\ ;\ P_{AS} \approx 25\ cm.$$

Los problemas anteriormente resueltos no siguen un orden en cuanto a dificultad, ni su secuenciación se corresponde con el orden en que aparecen en el documento electrónico o en su análisis en los videos observados. En este sentido se aclara que la selección de los problemas y su ubicación en este documento va encaminada a la asociación de tipologías de problemas en correspondencia con las propiedades que se ponen en juego para su solución. Los aspectos cardinales relativos al tema se sintetizan en la tabla 14.

Tabla 14.

Síntesis del análisis del tema "Perímetros".

Módulo: *Geometría*	Tema: Perímetros.			
Objetivo(s): *Calcular perímetros de polígonos y longitudes de circunferencias en problemas no rutinarios.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas de perímetros.	*-Noción del perímetro. -Propiedades de polígonos regulares. -Lados iguales de los paralelogramos. -Relación entre el ángulo central y su arco correspondiente. -Relación entre el radio y/o el diámetro y la longitud de la circunferencia.*	*-Relacionar los lados del polígono con las longitudes conocidas.*	*-Calcular perímetros de figuras no prototípicas.*	*-No definir longitudes por apreciación. -No forzar la búsqueda de las longitudes individuales de los segmentos, también ayuda el conocer cuánto suman varios de ellos.*

(Elaboración propia).

4.1.2.3. Áreas

Tabla 15.

Fuentes de información disponibles para el tema de "Áreas".

Sem.	**Tema**	**Documento Electrónico**	**Videos**	**Código**	**Tiempo (min)**
S6	Áreas I	I P1, P2, …, P16 R1, R2, …, R6	Sesión en vivo	V1	105
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	86
			Retos 1, 2 y 3	V3	16
			Retos 4, 5 y 6	V4	15
S7	Áreas II	I P1, P2, …, P12 R1, R2, …, R7	Sesión en vivo	V1	123
			Taller en vivo	V2	104
			Sesión en vivo Gen. 1	V3	71
			Retos 1, 2, 3 y 4	V4	37
			Retos 5, 6 y 7	V5	29

	Totales	41		586 min

Propósito:

Calcular áreas a partir de razones conocidas y otras estrategias creativas.

Descripción:

Al tema de áreas se dedican dos semanas del CEOM porque también engloba otros contenidos matemáticos que no se alcanzan a trabajar con la profundidad necesaria. En la primera sesión, según se refiere en (S_6I), se trabajan las ideas más sencillas asociadas a problemas de áreas. Las *estrategias* principales se basan en la manipulación de áreas y su búsqueda por complementos, primando la idea de partir las figuras complicadas en figuras más simples o compuestas.

En la segunda semana, tal y como se deja saber desde (S_7I), se integran nociones geométricas importantes como la semejanza y congruencia de triángulos, de la mano con otros teoremas relevantes como por ejemplo el teorema de Tales, el teorema de Pitágoras y otros abriendo así el panorama de lo que se incluye de la Geometría en el marco de las olimpiadas matemáticas (*recursos*). La *estrategia* más recurrente en el material de la sesión está dada por encontrar el área de figuras a partir de razones entre segmentos conocidos.

Cabe señalar que, en general, las conocidas fórmulas de áreas se usan indistintamente en la resolución de los problemas que se analizan, pero como el foco principal radica en la aplicación de las estrategias anteriormente mencionadas, estas quedan relegadas a un segundo plano.

Los elementos hasta aquí descritos son comentados por el entrenador a partir de (S_6V_1, min: 5) y resumidos como se muestra en la figura 44. Aclara también que otros temas como concurrencia, colinealidad, potencia de un punto y relativo a los cuadriláteros cíclicos (parte de debajo de la figura) y otros muchos, no se incluyen en el curso porque estos van más allá del nivel estatal pensado para el CEOM.

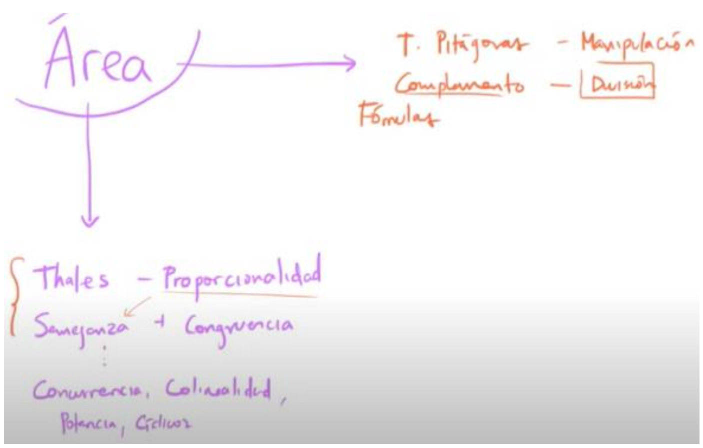


Figura 44. Alcance del tema de Áreas a nivel estatal en la olimpiada de matemáticas.

A partir del (S_6V_1, min: 10) introduce la definición de área como el valor que expresa la cantidad de unidades cuadras (cuadraditos) que una superficie puede contener (figura 51, "1"). A esta explicación le sigue el repaso de las expresiones que permiten determinar el área de los polígonos más comunes, en cada caso, presentando un fundamento matemático para las mismas como muestran las capturas que se presentan aunadas en la figura 45.

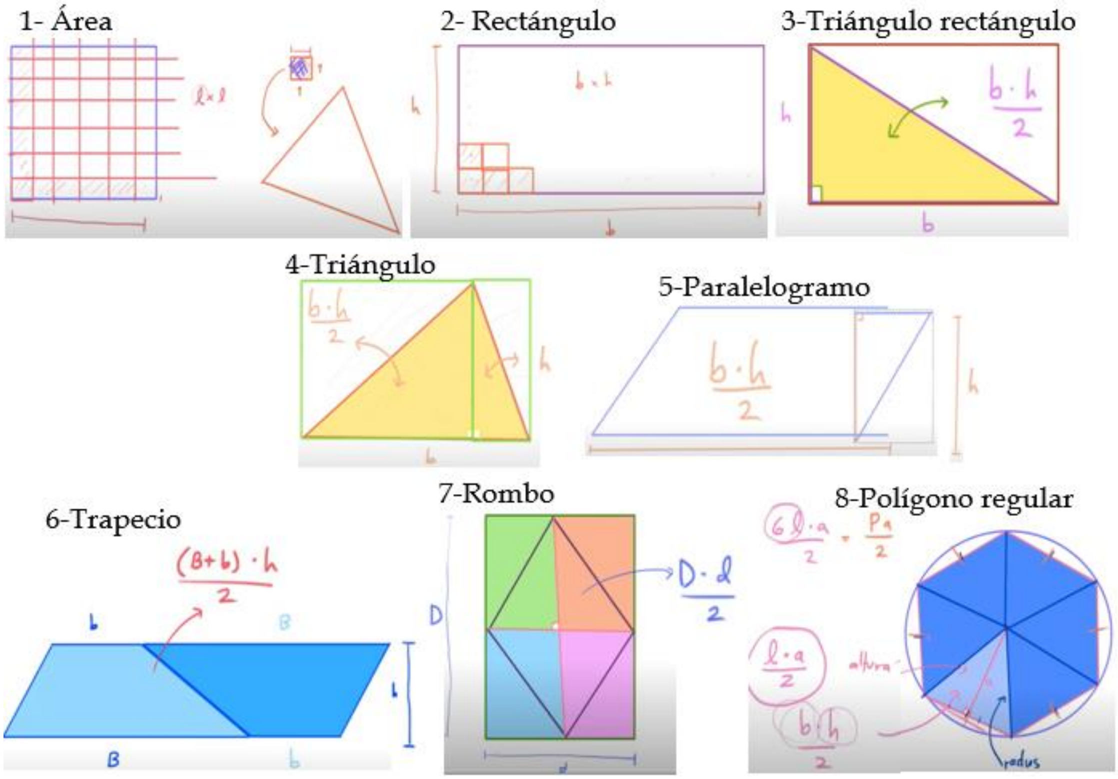
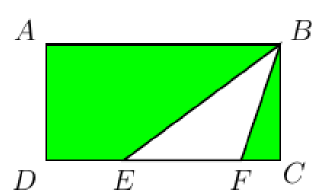


Figura 45. Definición y fundamento del área de polígonos comunes (S_6V_1, min: 14-38).

Entre los problemas del material que en lo adelante se analizan para ejemplificar las ideas hasta aquí expuestas se encuentran los que siguen. Los primeros que retomamos para este análisis son ejemplos relativamente sencillos que, según se refiere en (S_6V_1, min: 48) se corresponde con la tipología de problemas que se presentan en las primeras instancias de las olimpiadas. Su secuenciación en este documento es rectorada por el tipo de estrategia que ponen de manifiesto, comenzando por la más tradicional, la aplicación de la fórmula.

Problema 1. (S_6P_2)

En la figura se muestra un rectángulo ABCD de 6×3. Si el área sombreada es el doble del área del $\triangle EBF$, ¿cuánto mide $\overline{EF}$?

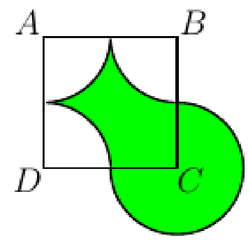


Solución: (S_6V_1, min: 50)

$$A_{ABCD} = a \cdot b$$
$$A_{ABCD} = 6 \cdot 3$$
$$A_{ABCD} = 18$$
$$A_{\Delta EBF} = \frac{18}{3} = 6$$
$$A_{\Delta EBF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{BC}}{2}$$
$$6 = \frac{\overline{EF} \cdot 3}{2}$$
$$12 = \overline{EF} \cdot 3$$
$$\overline{EF} = 4$$

Los dos problemas que siguen ponen a relieve la estrategia de manipulación de áreas. El entrenador comenta en (S_6V_1, min: 52), refiriéndose al primero de ellos, que tal y como es frecuente en los problemas de niveles introductorios de olimpiadas, en el enunciado se da muy poca información por lo que hay que confiar en la figura.

Problema 2. (S_6P_7)



El área del cuadrado ABCD es 1. ¿Cuánto mide el área sombreada?

Solución: (S_6V_1, min: 52)

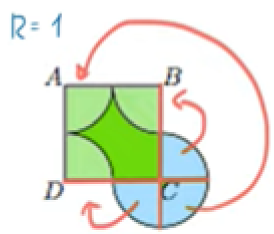
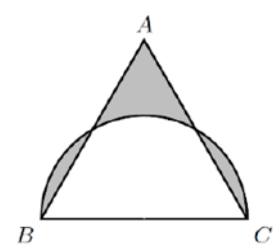


Figura 46. Solución del problema (S_6P_7) en (S_6V_1, min: 52).

Prolongando $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ a partir de C se determinan tres cuartos de círculo, cada uno de los cuales se puede "mover", como se muestra en la figura 46, para cubrir los cuartos de círculos no sombreados dentro de ABCD.

El siguiente problema apareció en una semifinal en el año 2003, fue enunciado como sigue:

Problema 3. (S_6R_4)



En la siguiente figura el ΔABC es equilátero, tiene lado 2 y la semicircunferencia diámetro $\overline{BC}$. ¿Cuánto vale el área sombreada?

Solución: (S_6V_4, min: 1)

Se trazan los radios de la semicircunferencia hasta las intersecciones de los arcos con los lados del ΔABC y la cuerda que une estos dos puntos, quedando dividido el ΔABC en cuatro triángulos equiláteros iguales.

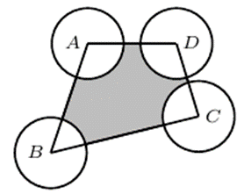
Reacomodando la figura de manera tal que las áreas sombreadas determinadas por los lados del ΔABC y los arcos originados en B y C respectivamente (lunitas), se sitúen convenientemente acomodadas a partir del área sombreada que contiene al vértice A, pero hacia el interior de la semicircunferencia. El área sombreada ocupa la tercera parte de la semicircunferencia.

Entonces:

$$A_{sombreada} = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{2}}{3} = \frac{\frac{\pi \cdot 1^2}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Con el siguiente problema se pone de manifiesto la utilidad de la estrategia de calcular áreas por complemento. Según la define el entrenador en (S_6V_1, min: 58), esta se basa en el cálculo del área de forma indirecta, es decir, a partir de una diferencia de dos áreas conocidas.

Problema 4. (S_6P_8)
En la figura ABCD es un cuadrilátero de área 5. Si los 4 círculos tienen radio 1 y centro en los vértices del cuadrilátero, ¿cuánto mide el área sombreada?

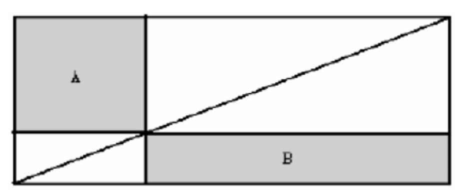


Solución: (S_6V_1, min: 58)

Observaciones importantes:
$A_{ABCD} = 5$
La superficie contenida en el cuadrilátero no sombreada son sectores de círculos iguales ($A; B; C; D$, centros y $r = 1$).
Entonces: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^{\circ}$ por suma de ángulos interiores de un cuadrilátero. (Los cuatro sectores conforman un círculo).
$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$; $A_{círculo} = 3{,}14 \cdot 1^2$; $A_{círculo} = 3{,}14\ u^2$
$A_{sombreada} = A_{ABCD} - A_{círculo}$
$A_{sombreada} = 5 - 3{,}14$; $A_{sombreada} \approx 1{,}86\ u^2$

La razón que explica la selección de los dos problemas que a continuación se presentan, gira en torno la posibilidad de evidenciar a través de ellos cómo pueden resultar útiles nociones muy intuitivas sobre la igualdad de triángulos para resolver problemas de áreas.

Problema 5. (S_7P_1)
¿Cuánto mide el área sombreada A entre el área sombreada B en la siguiente figura?



Solución: (S_7V_1, min: 11)

Dado que no es necesario por condiciones del problema conocer el valor de las áreas por separado, conviene encontrar una relación entre ellas, para lo cual, el punto clave en este problema es reconocer que las diagonales de un rectángulo determinan dos triángulos iguales.

De esta forma el rectángulo total queda dividido en dos triángulos iguales y, de la misma forma, la propia diagonal divide los rectángulos no sombreados que tienen vértice común.

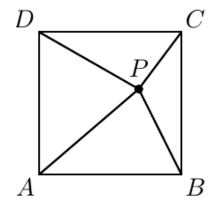
∴ Simplificando los triángulos iguales a cada lado de la diagonal se tiene que:

$A_A = A_B$; por lo que $\frac{A_A}{A_B} = 1$

En el siguiente problema se puede llegar a la solución apelando a los cálculos, pero la vía solución aquí se presenta es otra aplicación de lo visto en el problema anterior de forma algo más creativa. Una sugerencia importante ante problemas como este que presentan un punto interor al cuadrado (también rectángulo, etc.), es la de trazar las paralelas a los lados de dicho polígono que pasen por este punto interior.

Problema 6. (S_7P_2)

El cuadrado ABCD de la figura tiene 100 cm^2 de área. El punto P está dentro del cuadrado y sabemos que el área del triángulo ABP es 32 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo CDP?



Solución: (S_7V_1, min: 15)

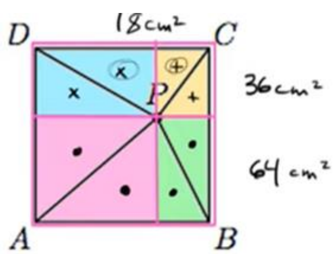


Figura 47. Solución del problema (S_7P_2) en (S_7V_1, min: 17).

Se trazan las paralelas a los lados del cuadrado que pasan por el punto P, quedando determinados cuatro rectángulos hacia el interior de ABCD y, $\overline{AP}$, $\overline{BP}$,$\overline{CP}$ y $\overline{DP}$ como sus respectivas diagonales.

Teniendo presente que las diagonales determinan parejas de triángulos iguales:

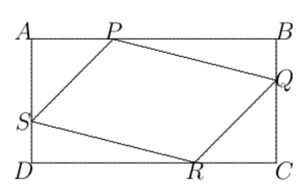
ΔABP = rosa+verde = 32 cm^2; luego 2 rosas + 2 verdes = 64 cm^2

Entoces, de la paralela horizontal trazada hacia arriba el área es de 100 $cm^2 - 64\ cm^2 = 36\ cm^2$ y como dicha región está conformada por 2 parejas de triángulos iguales y el ΔCDP ocupa exactamente la mitad de esta superfice , $A_{\Delta CDP} = 18\ cm^2$.

Como se manejaba desde la introducción de este tema, otra de las estrategias para resolver problemas de áreas es la de utilizar las razones entre segmentos conocidas. Seguidamente retomamos las principales ideas que se ponen de manifiesto en problemas analizados para ejemplificarlo.

Problema 7. (S_7P_4)

En la figura, los puntos PQRS dividen cada lado del rectángulo en razón 1 : 2. ¿Cuál es el cociente del área del paralelogramo PQRS entre el área del ABCD?



Solución: (S_7V_1, min: 40)

$\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un rectángulo.

$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{DR}} = \frac{1}{2} = \frac{X}{2x}$ y $\frac{\overline{DS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{1}{2} = \frac{X}{2x}$ por datos.

$A_{ABCD} = (2x + x) \cdot (y + 2y); A_{ABCD} = 3x \cdot 3y\ ; A_{ABCD} = 9xy$

$A_{\Delta APS} = A_{\Delta QCR} = \frac{2y \cdot x}{2} = xy\ ; A_{\Delta PBQ} = A_{\Delta RDS} \frac{2x \cdot y}{2} = xy$

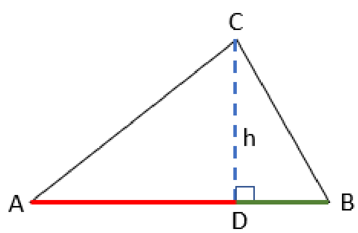
$A_{\Delta APS} + A_{\Delta QCR} + A_{\Delta PBQ} + A_{\Delta RDS} = 4xy$

$A_{PQRS} = A_{ABCD} - (A_{\Delta APS} + A_{\Delta QCR} + A_{\Delta PBQ} + A_{\Delta RDS})$

$A_{PQRS} = 9xy - 4xy = 5xy$

$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{5xy}{9xy} = \frac{5}{9}$

Antes de abordar la solución del problema que a continuación se expone, el cual, tal y como se adelantaba anteriormente, también se apoya en estrategia de atender la razón entre segmentos conocidos para llegar a la solución, se considera conveniente destacar que a través de él, se introduce lo que el experto presenta en (S_7V_1, min: 47) como una de las ideas más importantes para resolver problemas de áreas debido a su gran utilidad. Dicha relación se enuncia de la siguiente forma:



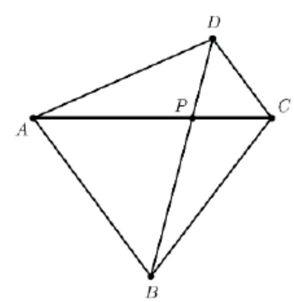
Si dos triángulos tienen un vértice en común y sus bases colineales (sobre la misma recta), entonces la razón entre sus áreas será igual a la razón entre sus bases.

Algebraicamente puede plantearse que:

$\frac{A_{\Delta ACD}}{A_{\Delta DCB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$

Ejemplo de problema para la aplicación (apareció en la semifinal de 2016):

Problema 8. (S_7P_5)



Encuentra el área de del siguiente cuadrilátero, si se sabe que las áreas de los triángulos APD y BPC son iguales a $4u^2$ y $\overline{AP} = 2\overline{PC}$.

Solución: (S_7V_1, min: 47)

$\frac{A_{\Delta PCD}}{A_{\Delta APD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}; \frac{A_{\Delta PCD}}{4} = \frac{1}{2}; A_{\Delta PCD} = 2u^2$

$\frac{A_{\Delta BPC}}{A_{\Delta APB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP}}; \frac{4}{A_{\Delta APB}} = \frac{1}{2}; A_{\Delta APB} = 8u^2$

$A_{ABCD}{=}A_{\Delta APD} + A_{\Delta BPC} + A_{\Delta PCD} + A_{\Delta APB}$

$A_{ABCD}{=}2 \cdot 4 + 2 + 8\ ; A_{ABCD}{=}18u^2$

Utilizando esta misma propiedad sucesivamente dos veces, posteriormente, en (S_7V_1, min: 100) el experto define otra relación entre la razón de segmentos y el área de triángulos que, según este afirma, encuentra aplicaciones frecuentemente en problemas de la International Mathematics Competition (IMC), en cuyas soluciones se refiere como teorema del ángulo común.

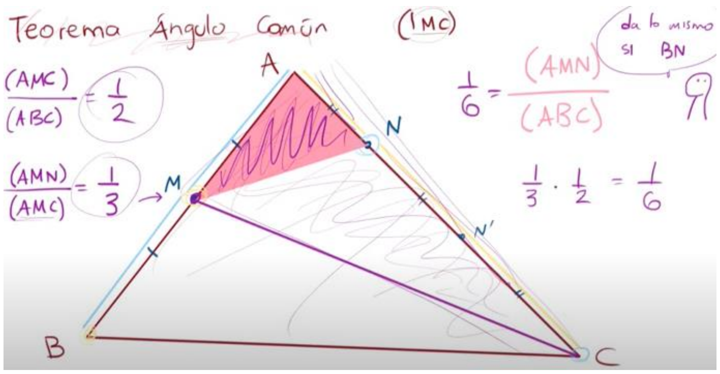


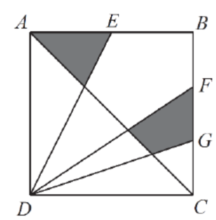
Figura 48. Teorema del ángulo común en (S_7V_1, min: 100).

Parafraseando este teorema con base en lo expuesto por el entrenador, en este plantea que, si tenemos dos triángulos con un ángulo en común, entonces la razón entre sus áreas va a ser igual al producto de las razones determinadas entre los lados colineales de los triángulos.

En (S_7V_1, min: 65) se llama a la atención de la semejanza de triángulos tanto, como una manera de determinar la razón de proporcionalidad en la que se encuentran sus lados, como para conocer la razón entre sus áreas, para lo cual resulta muy útil el teorema fundamental de semejanza y el teorema de las transversales (ambos de Tales), además de los criterios de semejanza (aa; pap, ppp). Un ejemplo de problema en el que se puede poner una parte de este conocimiento en uso es el siguiente:

Problema 9. (S_7R_1)

En el cuadrado de la figura, el lado AB = 6 cm. El punto E es punto medio del segmento AB, y F, G son puntos tales que BF = FG = GC. Encuentra cuándo mide el área sombreada.



Solución: (S_7V_4, min: 1)

Denotando la figura de la siguiente forma:

$\overline{AC} \cap \overline{DE} = H$; $\overline{AC} \cap \overline{DF} = I$; $\overline{AC} \cap \overline{DG} = J$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un cuadrado.

$\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados de un cuadrado.

$\Delta AHE \sim \Delta DHC$ porque la paralela un lado de un triángulo forma con los otros dos lados o sus prolongaciones un triángulo semejante al triángulo dado (Teo. Fundamental de semejanza.

$K = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{1}{2}$ por ser E punto medio de $\overline{AB}$.

$\frac{h_{\Delta AHE}}{h_{\Delta DHC}} = \frac{1}{2}$ por ser alturas de triángulos semejantes.

$\frac{h_{\Delta AHE}+h_{\Delta DHC}}{h_{\Delta AHE}} = \frac{3}{1}$; $\frac{6}{h_{\Delta AHE}} = \frac{3}{1}$; $h_{\Delta AHE} = 2$

$A_{\Delta AHE} = \frac{\overline{AE} \cdot h_{\Delta AHE}}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ cm^2$

Análogamente: $\Delta AID \sim \Delta CIF$ y $\Delta AJD \sim \Delta GJC$

En $\Delta AID \sim \Delta CIF$ se cumple que:

$\frac{h_{\Delta AID}+h_{\Delta CIF}}{h_{\Delta CIF}} = \frac{5}{2}$; $\frac{6}{h_{\Delta CIF}} = \frac{5}{2}$; $h_{\Delta CIF} = 2{,}4$; $A_{\Delta CIF} = \frac{\overline{FC} \cdot h_{\Delta CIF}}{2} = \frac{4 \cdot 2{,}4}{2} = 4{,}8\ cm^2$

En $\Delta AJD \sim \Delta GJC$ se cumple que:

$\frac{h_{\Delta AJD}+h_{\Delta GJC}}{h_{\Delta GJC}} = \frac{4}{1}$; $\frac{6}{h_{\Delta GJC}} = \frac{4}{1}$; $h_{\Delta GJC} = 1{,}5$; $A_{\Delta GJC} = \frac{\overline{GC} \cdot h_{\Delta GJC}}{2} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = 1{,}5\ cm^2$

$A_{IFGJ} = A_{\Delta CIF} - A_{\Delta GJC}$; $A_{IFGJ} = 4{,}8 - 1{,}5$; $A_{IFGJ} = 3{,}3\ cm^2$

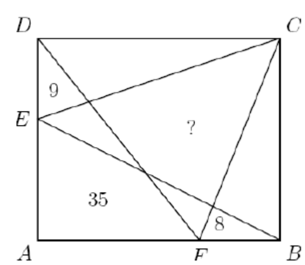
$A_{sombreada} = A_{\Delta AHE} + A_{IFGJ}$; $A_{sombreada} = 3 + 3{,}3 = 6{,}3\ cm^2$

Otro de los teoremas útiles en la intensión de calcular áreas es presentado en (S_7V_1, min: 85) como teorema de los tapetes (también conocido como teorema de las alfombras). El entrenador sugiere como condición para en el uso de este teorema en torno a la selección de los tapetes que los seleccionados deben cubrir toda la superficie y deben estar incluidos, es decir, no deben salirse de la figura. También señala que no importa que los tapetes se traslapen y, de la misma forma, explica que hay tapetes que no proporcionan información relevante para el problema. El teorema en sí expresa lo siguiente:

"Si se tienen dos o más tapetes que cubren toda la superficie, el área que estos no cubren es igual al área que comparten"(S_7V_1, min: 97).

Un ejemplo de aplicación se puede ver a través de siguiente problema:

Problema 10. (S_7P_{12})



Los segmentos $\overline{EC}$; $\overline{EB}$; $\overline{DF}$; $\overline{FC}$ dividen el rectángulo ABCD en ocho regiones. En tres de ellas se ha escrito un número que representa su área. ¿Cuál es el área de la región en a que se encuentra el signo de interrogación?

Solución:

$¿ = 9 + 35 + 8 = 52u^2$ porque la superficie que se traslapa es igual a la superficie que queda al descubierto.

En general, se pudo constatar que el tema de áreas dentro del marco de las olimpiadas matemáticas es muy amplio, ya que integra buena parte de los contenidos geométricos que se trabajan desde el currículo de la educación regular. Dada la variedad de estrategias y recursos que se ponen en juego el entrenador experto asegura que con mucha frecuencia se proponen problemas de áreas sobre todo en el nivel estatal de la olimpiada y para los alumnos de primaria y segundaria también suelen aparecer en la instancia nacional.

Tabla 16.

Síntesis del análisis del tema "Áreas".

<table>
<tr><td colspan="2">Módulo: Geometría</td><td colspan="3">Tema: Áreas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo(s): Calcular áreas a partir de razones conocidas y otras estrategias creativas.</td></tr>
<tr><th>Unidades de análisis</th><th>Recursos</th><th>Estrategias</th><th>Habilidades</th><th>Tips</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Problemas de Áreas.</td><td rowspan="2">-Intuición.</td><td>-Manipulación geométrica.</td><td rowspan="3">-Calcular la longitud de segmentos.
-Calcular áreas</td><td>Partir las figuras "complicadas" en figuras más simples o compuestas.</td></tr>
<tr><td>-Búsqueda por complemento.</td><td>-Pensar no sólo en el área buscada, sino en el área de la que la figura forma parte.</td></tr>
<tr><td>-Relación del área de triángulos con un vértice en común con la razón entre las bases colineales.
-Teorema del ángulo común.
-Teoremas de semejanza.
-Teorema de Pitágoras.
-Teorema de las alfombras.</td><td>-Buscar relaciones con la razón entre segmentos conocidos.</td><td>-¿Puedes saber en qué razón se encuentran las áreas?</td></tr>
</table>

(Elaboración propia).

4.1.3. Módulo III: Teoría de Números

4.1.3.1. Criterios de divisibilidad

Tabla 17.

Fuentes de información disponibles para el tema "Criterios de divisibilidad".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S8	Criterios de Divisibilidad	I P1, P2, …, P20 R1, R2, …, R8	Sesión en vivo	V1	127
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	104
			Retos 1, 2 y 3	V3	27
			Retos 4 y 5	V4	39
	Totales	28			297min

Propósito:

Reconocer dígitos faltantes de números utilizando los criterios de divisibilidad.

Descripción:

En la introducción del material de la semana (S_8I) se plantea que en el estudio del módulo de Teoría de Números se revisarán las propiedades de la divisibilidad entre enteros, sobre todo entre números primos.

De la misma forma se pone en conocimiento desde las notas introductorias que en esta primera sesión se les da un repaso a los criterios de divisibilidad más básicos y conocidos. Se recalca además que el foco prioritario es su utilidad para ayudarnos a extraer información adicional, principalmente dígitos faltantes, más que como herramientas de verificación.

Los criterios de divisibilidad se definen de forma general en el material como "atajos para saber si un número es divisible entre otro, es decir, una manera de saber si el residuo al dividir sería 0 o no, sin necesidad de hacer la división" ($S_8I, p. 1$), lo que se complementa a partir de (S_8V_1, min: 9) como se muestra en la figura 49.

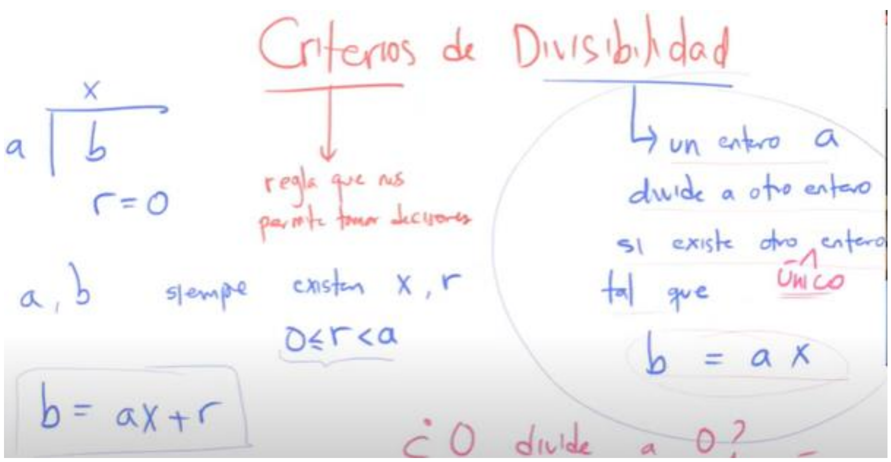


Figura 49. Complemento a la definición de "Criterios de Divisibilidad" en (S_8V_1, min: 14).

En lo que sigue se presentan, ejemplifican y demuestran los criterios básicos agrupados por lo que tienen en común. La manera en que los expone este documento (S_8I) se reproduce textualmente a continuación por considerarlo una valiosa recopilación de *recursos* vitales para la resolución de los problemas. Cabe mencionar que estos criterios fueron presentados y explicados detalladamente con la misma secuenciación en (S_8V_1, min: 15 – 73min:).

> <u>Criterio Universal</u>: Existe un criterio que siempre funciona para saber si un número es o no divisible entre otro número dado. Se trata de realizar la división y revisar su residuo. Si el residuo es 0, entonces es divisible; de lo contrario, no lo es.
>
> <u>Criterios Especiales</u>:

Criterio del 1: Sí. Todos los números son divisibles entre 1; el 1 divide a todos los números. En cambio, ningún número, excepto el 1, divide al 1.

Criterio del 0: No. Ningún número es divisible entre 0; el 0 no divide a ningún número. En cambio, todos los números dividen a 0.

Última Cifra: 2, 5, 10.

Un número es divisible entre 2, 5 o 10, si la última cifra del número es divisible entre 2, 5 o 10, respectivamente.

El 2 divide a las cifras 0, 2, 4, 6, 8. Un número divisible entre 2 lo llamamos par.

El 5 divide a las cifras 0 y 5.

El 10 únicamente divide a la cifra 0.

Últimas Cifras: 4, 25, 100. Luego 8, 125, 1000. Luego 16, 625, 10000, etc.

Un número es divisible entre 4, 25 o 1000 si el número formado por las últimas dos cifras es divisible entre 4, 25 o 1000, respectivamente. Este criterio se puede extender a las potencias de 2, de 5 y de 10 de manera análoga: si queremos verificar la n−ésima potencia, hay que revisar el número formado por las últimas n cifras.

Suma de Cifras: 3, 9, 11.

Criterio del 3 y 9: Un número es divisible entre 3 o 9 si el número resultado de la suma de sus cifras es divisible entre 3 o 9, respectivamente.

Ejemplo: el número 18594 es divisible entre 9 pues 1 + 8 + 5 + 9 + 4 = 27, que es un múltiplo de 9.

Criterio del 11: Un número es divisible entre 11 si el resultado de la suma y resta alternada de los dígitos del número es divisible entre 11.

Ejemplo: el número 18594 no es divisible entre 11 pues 4 − 9 + 5 − 8 + 1 = −7 no es un múltiplo de 11. El número 88594 sí es múltiplo de 11 pues 4 − 9 + 5 − 8 + 8 = 0, y 0 es múltiplo de 11. Observa que el resultado podría ser negativo también.

Las demostraciones de estos criterios vienen de la expresión desarrollada de un número en unidades más decenas más centenas más etcétera. Es decir,

$\overline{abcde} = e + 10d + 100c + 1000b + 10000a$

para un número de 5 dígitos. Por supuesto funciona también en general. Lo que hacemos no es difícil de seguir, aunque nos estemos aprovechando de propiedades de la divisibilidad que no hemos revisado.

Para los criterios de 2, 5 y 10, por ejemplo, basta ver que 10, 100, 1000, ..., y en general, 10^n es múltiplo de 2, 5 y 10, de modo que $10^n x$ también lo es, donde x es el valor de cualquier dígito. Eso quiere decir que para ver si el número es o no múltiplo de 2, 5 o 10, basta con verificar si el dígito de las unidades lo es.

El caso del 4 es muy parecido. La diferencia es que 10 no es múltiplo de 4, pero 100, 1000 y todas en adelante lo son. Por lo tanto, solo basta verificar $10d + e$.

Con 3 y 9 pasa algo divertido. Si reescribimos:

$$e + 10d + 100c + 1000b + 10000 = e + 9d + d + 99c + c + 999b + b + 9999a + a$$

podemos ver que 9d + 99c + 999b + 9999a son todos múltiplos de 9 y de 3, de modo que su suma también lo es. Para que el número original sea múltiplo de 3 o de 9, hay que verificar si el resultado de:

$e + d + c + b + a$

es decir, la suma de los dígitos del número sea un múltiplo de 3 o de 9, según sea el caso.

El criterio del 11 es parecido, pero todavía más divertido. La reescritura es un poco diferente:

$$e + 10d + 100c + 1000b + 10000a = e + 11d - d + 99c + c + 1001d - d + 9999a + a$$

donde $11d + 99c + 1001d + 999a$ son todos múltiplos de 11, de modo que también lo es su suma. Para saber si el número original es múltiplo de 11, habría que verificar si:

$e - d + c - b + a$

es un múltiplo de 11, y de ahí obtenemos la manera tan singular de expresar el criterio del 11 que a veces lo emparentan más con el del 7, pero es tan sencillo como el del 3 o el 9. El criterio del 11 es mixto entre la suma y la posición. Entender cómo funcionan los criterios nos ayuda a saber cuándo usarlos.

<u>*Algorítmicos: 7 y 13*</u>.

Algunos números tienen criterios de divisibilidad que consisten en revisar el resultado de ciertas operaciones aparentemente sin relación alguna. Sin embargo, todos estos criterios tienen algo en común: quitan la última cifra del número y luego la restan multiplicada cierta cantidad de veces. En caso del 7, esta cantidad es 2.

Ejemplo: Veamos si 18594 es divisible entre 7.

Paso 1: $18594 \rightarrow 1859 - 8 = 1851$.

Paso 2: $1851 \rightarrow 185 - 2 = 183$.

Paso 3: $183 \rightarrow 18 - 6 = 12$.

Si cualquiera de estos números al principio o al final de los pasos resulta ser múltiplo de 7, entonces el número original también lo es. Como es sencillo determinar que 12 no es múltiplo de 7, el número original tampoco lo es. Números más grandes requieren más pasos y hay trucos aritméticos para reducir pasos.

Todos los criterios que tengan esta forma tienen la misma justificación. Vamos a escribir el número n como sus unidades más la cantidad de decenas que tenga, en total. Por ejemplo, $18594 = 1859\ 10 + 4$. En general,

$n = 10a + b, 0 \leq b \leq 9$

Ahora, buscamos un múltiplo de 10 que sea uno más que un múltiplo de 7 –que es el número de interés ahora–. En este caso: 50. La siguiente reflexión abusa de propiedades de la divisibilidad que no hemos revisado, pero es importante: si un número no es múltiplo de 7, multiplicarlo por 5 no lo convierte en múltiplo de 7; si un número es múltiplo de 7, multiplicarlo por 5 no le quita esa propiedad.

Vamos a considerar entonces el número:

$5n = 50a + 5b = 49a + a + 5b$

Como ya pasó antes, el 49a ya es múltiplo de 7, de modo que podemos ignorarlo. Si el número total es o no múltiplo de 7 no es culpa de 49a, que ya hizo su parte.

Para la parte final, otro pequeño experimento. Imagina que te dan 19 pesos. Un ratero matemático llega y te dice "Dame 5 pesos para que te quedes con un múltiplo de 7". En ese caso, podrías contestarle "Mejor tú dame 2 pesos para que me quede con un múltiplo de 7". Es decir, para obtener un múltiplo de 7 es lo mismo que te sobren 5 a que te falten 2. Lo que nos queda es:

$a - 2b$

Y la conclusión a la que llegamos es que $10a + b$ es múltiplo de 7 si $a - 2b$ también lo es. Eso es, tal cual, el criterio del 7.

Podemos practicar esta habilidad recién descubierta para construir un criterio para el 13, similar al que tenemos para el 7. Escribimos $n = 10a + b.$ Buscamos un múltiplo de 10 que sea una unidad más que un múltiplo de 13; es 40, que es uno más que $39 = 3 \times 13$. Brevemente, la misma reflexión: si n no es múltiplo de 13, multiplicarlo por 4 no lo convierte en uno; si lo es, no se lo quita.

Consideramos $4n = 40a + 4b$ y reescribimos $40a + 4b = 39a + a + 4b$. Nuevamente, podemos ignorar 39a que ya es múltiplo de 13 y, finalmente, podríamos convertir 4b en −9b, porque en el mundo del 13, es lo mismo que te sobren 4 a que te falten 9. Obtenemos:

$10a + b \to a - 9b$

que es el criterio del 13: quitar la última cifra y restarla nueve veces.

Compuestos: 6, 10, 12, 18, 24, 72, etcétera.

Para números compuestos es posible construir un criterio como la unión de los criterios de números más simples que los componen. Por ejemplo: para que un número sea múltiplo de 6, debe ser múltiplo de 2 y de 3; es decir, su última cifra es par y la suma de sus dígitos es divisible entre 3. También vimos que para que un número sea múltiplo de 10 hay que verificar que sea múltiplo de 2 y de 5; básicamente: que termine en 0.

Sin embargo, no cualquier división entre números más simples funciona, aunque la multiplicación sea el número que buscamos. Por ejemplo: aunque $2 \times 6 = 12$, hay números que son divisibles entre 2 y entre 6 pero no entre 12, como 6, 18, 30, (...). Se pone peor con números más compuestos como $24 = 6 \times 4 = 12 \times 2$, donde varias factorizaciones posibles no son útiles en realidad.

Lo que debemos hacer es dividir el número en divisores que no compartan factores. Esto será un poco más claro cuando veamos primos, en unos momentos. Pero, para el caso del 12, debemos tomar 3 y 4; para el caso del 24, tomamos 3 y 8; para el caso del 30 podríamos tomar 2, 3 y 5 (pp. 2-5).

Para ejemplificar el uso de estos criterios en los problemas propuestos en el material se analiza el siguiente:

Problema 1. (S_8P_7)

El número d456d es divisible entre 18. Si d es un dígito, ¿cuál es su valor?

Solución: (S_8V_1, min: 74).

Criterio de 18: divisible por 2 y 9 a la vez.

(9)

$d + 4 + 5 + 6 + d = 15 + 2d \to 18; 27; 36; ...$

$2d = 12\ ;\ d = 6$

(2)

Dividir en casos: $15 + 2d$

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
(d=0)	(d=2)	(d=4)	(d=6)	(d=8)
15	19	23	27	31

Rta./ d=6.

Tomando el ejercicio anterior como modelo, se generaliza en (S_8V_1, min: 76) que la *estrategia* en el ataque a estos problemas se apega a esta secuenciación, donde primero se identifica qué criterio se va a usar; luego se decide por dónde empezar, aunque, tal y como ocurrió en el problema anterior, esto no siempre es relevante; para finalmente, casi de forma inevitable, *considerar casos*.

Otro problema similar:

Problema 2. (S_8P_8)

El número de seis dígitos $5m562n$ es múltiplo de 44. Encuentra la suma de todos los valores de m, n que hacen que sea posible.

Solución: (S_8V_1, min: 80)

Criterio de 44: divisible por 4 y 11 a la vez.

Para decidir por dónde es más conveniente empezar es importante notar que el criterio para del 4 involucra sólo una de las dos variables, en tanto, en el del 11, participan las dos incógnitas, lo que hace que la primera opción sea más pertinente.

(4)

$(2n) \rightarrow$ Caso 1 Caso 2 Caso 3

$n = 0$ $n = 4$ $n = 8$

(11)

$+n - 2 + 6 - 5 + m - 5 = n + m - 6$

Caso 1	Caso 2	Caso 3
$(n = 0)$	$(n = 4)$	$(n = 8)$
$0 + m - 6$	$4 + m - 6$	$8 + m - 6$
$m = 6$	$m = 2$	$m = 9$

Entonces la suma de los valores que lo hacen posible está dada por: $6 + 4 + 2 + 8 + 9 = 29$

El problema que sigue es presentado en (S_8V_1, min: 86) como un problema interesante, con un buen nivel en cuanto a dificultad.

Problema 3. (S_8P_{18})

El número de ocho dígitos, $7448x24y$, es divisible entre 72. (En este número, x, y están en lugar de un número del 0 al 9.) Si $x \neq y$, encuentra cuánto vale la resta $-y$.

Solución: (S_8V_1, min: 87)

Criterio de 72: divisible por 8 y 9 a la vez.

Es más conveniente empezar por el 8 porque la regla involucra una única variable.

$24y \rightarrow$ (8)

Caso 1	Caso 2
$y = 0$	$y = 8$

$29 + x + y \rightarrow$ (9)

$29 \leq 29 + x \leq 38$
$x = 7$

$29 + x + 8$
$37 \leq 37 + x \leq 46$
$x = 8$

Rta./Como por condición $x \neq y$, entonces $x = 7$ y $y = 0$, por lo que $x - y = 7$.

El entrenador recalca en ($S_8 V_1$, min: 94) que el procedimiento anterior es la base de todos los problemas de criterios dispuestos en el material. Seguidamente, a solicitud de discentes en el CEOM, se analiza el que sigue:

Problema 4. ($S_8 P_{16}$)

La leyenda del monstruo de Ranaballo dice que se despierta cada de vez en cuando y se come a todas las personas que están resolviendo este problema, y se vuelve a dormir tantos años como la suma de los dígitos del año en que despertó. Por ejemplo, si se despierta en el año 1234 entonces se duerme $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ años y despierta en el año 1244. El monstruo atacó por primera vez en el año 234 de nuestra era. ¿Estamos a salvo este año?

Solución: ($S_8 V_1$, min: 96)

$2 + 3 + 4 = 9; 9 + 234 = 243$
$2 + 4 + 3 = 9; 9 + 243 = 252$
$2 + 5 + 2 = 9; 9 + 252 = 261$
$2 + 6 + 1 = 9; 9 + 261 = 270$
$2 + 7 + 0 = 9; 9 + 270 = 279$
$2 + 7 + 9 = 18; 18 + 279 = 297$
¿Es múltiplo de 9 este año?

$2 + 0 + 2 + 0 = 4$

Rta./ 2020 no es múltiplo de 9, por lo que sí estamos a salvo este año.

Concluido el problema en ($S_8 V_1$, min: 102) el experto hace la observación retomando el año en el que atacó el monstruo por primera vez (234) de que este es un múltiplo de (9), y que cuando a un múltiplo de (9) le sumamos la suma de sus cifras básicas siempre obtenemos otro múltiplo de (9), lo que define como un caso de invarianza.

De la misma manera que el problema anterior, el que sigue se analiza a solicitud de los participantes en el Curso.

Problema 5. ($S_8 P_{13}$)

Sabemos que 45a es un entero positivo que tiene todos sus dígitos iguales. ¿Cuánto vale a?

Solución: ($S_8 V_1$, min: 106)

$45a \rightarrow$ es múltiplo de 5 y de 9.

$45a \rightarrow$ (5)

Termina en 0 o 5

Caso 1 (0)

$$\underbrace{\dots 00000}_{\text{No es posible}}$$

Caso 2 (5)

$$\underbrace{\dots 55555}_{\text{¿Primer múltiplo de 5 y 9?}}$$

$$555555555 : 45 = a$$
$$111111111 : 9 = a$$
$$a = 1234579$$

A manera de resumen, los aspectos claves en estos problemas se sintetizan en la tabla 18.

Tabla 18.

Síntesis del análisis del tema "Criterios de divisibilidad".

Módulo: *Teoría de Números*	Tema: *Criterios de divisibilidad*			
Objetivo(s): *Reconocer dígitos faltantes de números utilizando los criterios de divisibilidad*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas de divisibilidad.	*Criterios de divisibilidad para los primeros enteros (0-13).*	*Analizar casos.*	*Reconocer números que cumplen condiciones dadas.*	*¿Qué criterio resulta útil? ¿Por dónde es conveniente empezar? ¿Cuáles son los casos posibles?*

(Elaboración propia).

4.1.3.2. Primos, divisores y múltiplos

Tabla 19.

Fuentes de información disponible para el tema "Primos, divisores y múltiplos".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S9	Primos, múltiplos y divisores	I P1, P2, …, P18 R1, R2, …, R8	Sesión en vivo	V1	133
			Taller en vivo	V2	117
			Sesión en vivo Gen. 1	V3	117
			Retos 1, 2 y 3	V4	17
			Retos 4, 5 y 6	V5	26
			Retos 7 y 8	V6	17
	Totales	26			427 min

Propósito:

Encontrar números enteros dadas sus propiedades de producto y/o divisibilidad.

Descripción:

Con el pretexto de que los criterios de divisibilidad no bastan para abordar todas las situaciones, en (S_9I) se refiere que se hace necesario pasar de los criterios de divisibilidad hacia las propiedades de la divisibilidad. En tal sentido se destaca la importancia de la descomposición en factores primos como un procedimiento básico para ver la divisibilidad de números con factores muy grandes. Entre las herramientas con las que se trabajan en la sesión se encuentran las combinaciones lineales y varias de las propiedades de los números primos con la divisibilidad de un producto.

A continuación, se reproduce a manera de "acordeón", tal y como se presenta en (S_9I), las propiedades de la divisibilidad que constituyen reglas y estrategias útiles:

Recordemos que $a \mid b$, que se lee "a divide a b" si existe un único x ∈ Z tal que $b = ax$.

Además, acordamos las siguientes reglas:

1. $n \mid 0$ para todo $n \neq 0$.
2. $0 \nmid n$ para ningún $n \in Z$.
3. $1 \mid n$ para todo $n \neq 0$.
4. $n \mid 1$ únicamente para $n = 1, -1$.
5. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Agregamos la última que definen una propiedad importante del conjunto de los números enteros. Decimos que en los enteros no hay divisores de 0.

Existen algunas propiedades importantes de la divisibilidad según el tamaño de los números que estamos dividiendo; estas propiedades son mucho más claras cuando trabajamos únicamente con enteros positivos o no negativos.

6. Si $a \mid b$, entonces $|a| \leq |b|$. En particular, si $a, b > 0$ y $a|b$, entonces $a < b$.
7. $a \mid b$ si y solo si $|a| \mid |b|$.

Teorema. Si $n > m \geq 0$, $n \mid m$, entonces $m = 0$.

Este último teorema va a ser relevante a veces. Sobre todo, puede revelar casos que no son tan fáciles de ver. Ya habíamos usado esto al definir el criterio de divisibilidad del 10.

Las siguientes propiedades tienen nombres porque son así de importantes.

8. Propiedad Reflexiva. Si $a \neq 0$, se cumple que $a \mid a$.
9. Propiedad Transitiva. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.
10. Propiedad no simétrica. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $|a| = |b|$.

De las siguientes propiedades, la combinación lineal es el camino para construir las matemáticas que siguen, varias sesiones más adelante.

11. Si $c \neq 0$, entonces $a \mid b$ si y solo si $ac \mid bc$.
12. Si $a \mid b$, entonces $a \mid bc$ para todo c entero.
13. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid bx + cy$ para cualesquiera x, y enteros. Esto es, a divide a cualquier combinación lineal de sus múltiplos.

Teorema. Si $a \mid b + c$ y $a \mid b$, entonces $a \mid c$. De manera más general, si $a = b + c$ y dos de ellos cualesquiera tienen un divisor común, entonces el tercero también.

Esta será una de las herramientas más utilizadas en los retos y la segunda parte de los problemas. La construcción de una combinación lineal útil es una habilidad muy útil y varios de los problemas la requieren.

Finalmente, otros teoremas importantes que habíamos enunciado antes cuando vimos primos y tienen que ver tanto con primos como con primos relativos.

Teorema. Si p es un divisor de a, entonces $p \mid b$ es una condición necesaria para que $a \mid b$. Esto equivale a decir que si $p \mid a$ y $p \nmid b$, entonces no es posible que $a \mid b$.

Teorema. Si $a \mid bc$ y $a, b = 1$, entonces $a \mid c$. (pp. 1-2).

La sesión en vivo como tal, inicia el tratamiento del contenido en (S_9V_1, min: 9) con el repaso del procedimiento para descomponer un número en factores primos, recalcando el entrenador su gran utilidad está dada porque cada número tiene una descomposición única. Con posterioridad, en (S_9V_1, min: 12) se comienza el análisis de los problemas y, en este sentido, el entrenador añade que para los primeros problemas del material basta con conocer algunas cosas que se pueden hacer conociendo la descomposición en primos. Como ejemplo de estos primeros problemas se analizan los que siguen:

Problema 1. (S_9P_1)

Encuentra el mayor entero menor a 10000 que es cubo y cuadrado perfecto a la vez. Por ejemplo, 64 es cubo y cuadrado perfecto pues $64 = 4^3 = 8^2$.

Solución: (S_9V_1, min: 14)

Ejemplo: $64 = 2^6 \rightarrow (2^2)^3$

$\rightarrow (2^3)^2$

Por lo que se requiere que para que el número pueda ser expresado en "grupitos" de a dos y también de a tres, el número debe poderse expresar de la forma: n^6.

Algebraicamente puede plantearse: $n^6 = x^2 + y^2$

Considerando que las sextas potencias crecen muy rápido se puede hacer la lista:

$2^6 = 64$
$3^6 = 729$
$4^6 = 4096$
$5^6 = 15625$ Rta./El mayor entero menor a 10000 que es cubo y cuadrado perfecto a la vez es 4096.

En la previa del problema que sigue, (S_9V_1, min: 18), el experto adelanta que dicho problema ya involucra una de las propiedades más importantes de la divisibilidad.

Problema 2. (S_9P_2)

Un número yuca es un entero positivo tal que al multiplicarlo por 104 se obtiene un número múltiplo de 39 que termina en 6. Encuentra los tres números yucas más pequeños.

Solución: (S_9V_1, min: 18)

$104x = 39 \cdot$ __ termina en 6

Primero se debe garantizar que sea múltiplo de 39. Para ello descomponemos en factores primos a 39 y a 104, para identificar qué factor se debe incluir en x para obtener múltiplos de 39.

$$\left(\begin{array}{c|c} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 104 & 2 \\ 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}\right)$$

$39 = \mathbf{3} \cdot 13$ $\qquad 104 = 2^3 \cdot 13$

La descomposición muestra que el factor que se necesita para garantizar que $104x$ sea múltiplo de 39 es el 3. Por lo que:

$$x = 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; \ldots$$

Luego se cuida la otra condición, que termine en 6. Para ello hay que buscar números en la lista de los posibles valores de x que multiplicados por 4 terminen en 6. Como por condición deben ser los 3 primeros $x = 9; 24\ y\ 39$.

Otro problema que puede resultar divertido cuya base en la solución es la descomposición en factores primos es el siguiente:

Problema 3. (S_9P_3)

Encuentra el menor entero positivo tal que el producto de sus cifras es 189000.

Solución: (S_9V_1, min: 26)

Se sugiere que siempre que se hable de productos en este tipo de problemas bebe considerarse la posibilidad de hacer una descomposición.

$$(189000|1000)$$
$$1000 = 2^3 \cdot 5^3$$
$$\left(\begin{array}{c|c} 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}\right)$$
$$189000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Por lo que se tiene como punto de partida las cifras:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

En este punto se aclara que no hay un número mayor que cumpla la condición dada porque podemos agregar infinitos factores 1 sin que se altere el producto. Pero tal y como lo solicita el problema, sí podemos hallar un menor número que se ajuste a la condición.

En esta línea, el pensamiento más natural cuando se requiere comparar números es el de cuantificar las cifras que tienen, por ello, la estrategia es tratar de reducir las cifras multiplicando convenientemente aquellas cuyo producto tiene una única cifra.

La forma que mejor cumple con lo anterior está dada por:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{8} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Reordenando las cifras tenemos que el número buscado es 3555789.

Otro problema con puntos en común con el anteriormente resuelto es el siguiente:

Problema 4. (S_9P_7)

Encuentra el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2004 y el producto de sus cifras es 2^{753}.

Solución: (S_9V_1, min: 35)

¿Qué factores multiplicados me pueden dar como producto una potencia de 2? Sólo potencias de 2.

Por ello se pueden usar como dígitos del número que buscamos: 1; 2; 4 y 8.
Nuevamente se busca la menor cantidad de dígitos, por lo que convendría tener la mayor cantidad de 8 posible. La cantidad específica puede definirse a partir de la condición que establece que la suma de estos 8 tendría que ser 2004. Con tal fin:

$$2004 = \underbrace{250(8)+4}_{\text{satisface la suma}} \rightarrow 250\cdot 3+2 = \underbrace{752}_{\text{no satisface el producto}}$$

$$2004 = \underbrace{249(8)+3(4)}_{\text{satisface la suma}} \rightarrow 249\cdot 3+6 = \underbrace{753}_{\text{satisface el producto}}$$

$\therefore$ El menor número estero positivo que cumple la condición es $444\underbrace{888888\ldots}_{249}$

Se señala en (S_9V_1, min: 44) refiriéndose al siguiente problema, que su tipología es muy frecuente en el marco de la olimpiada y, es a la vez, es un representante de los problemas más simples que trabajan con ciclos.

Problema 5. (S_9P_8)

¿Cuánto suman los últimos 2005 dígitos del número $2004^{2005} \times 2005^{2004}$?

Solución: (S_9V_1, min: 47)

Se inicia con la descomposición conveniente para las bases de estas potencias:

$$2004^{2005} = 4^{2005}\cdot 501^{2005} = 2^{4010}\cdot 501^{2005}$$

$$2005^{2004} = 5^{2004}\cdot 401^{2004}$$

Multiplicando las potencias:

$$2^{4010}\cdot 5^{2004}\cdot 401^{2004}\cdot 501^{2005}$$

$$10^{2004}\cdot 2^{2006}\cdot 401^{2004}\cdot 501^{2005}$$

Observación importante:

El hecho de tener como factor a 10^{2004} determina que en el producto las últimas 24 cifras sean 0. Como se busca conocer 2005 cifras, es decir, la que sigue después de los 0, y las potencias con base 401 y 501 siempre terminan en 1, entonces la cifra que sigue dependerá del factor 2^{2006}.

$$\left(2^{2006} \left| \begin{array}{c} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 \\ \text{repite el ciclo} \end{array} \right. \right)$$

$2006 = 501\cdot(4)+2$

Lo que quiere decir que este ciclo se repite 501 veces completo y quedan 2 de un nuevo ciclo, por lo que 2^{2006} termina en 4.

Pudiendo concluir que los últimos 2005 dígitos del número serán:

$4\,\underbrace{0000000\ldots}_{2004}$

Para ir entrando de lleno en las propiedades de la divisibilidad el entrenador propone en (S_9V_1, min: 57) el análisis del duodécimo problema del material.

Problema 6. (S_9P_{12})

(1)

a. ¿Cuántos 0's hay al final de 26!?
b. ¿Cuántos hay al final de 200!?
c. ¿Cuántos al final de 2015!?

Solución: (S_9V_1, min: 57)

Inicia cuestionando el valor de la información de tener un o más 0 al final.

(1a)

A partir de este análisis del problema se puede formular de forma equivalente en la siguiente forma: ¿Cuál es la mayor potencia de 10 que divide a 26!?

Para que sea divisible por 10 tiene que serlo por 2 y por 5.

Como $26!$ es el producto de los números naturales desde 1 a 26, el problema se reduce a reconocer cuantos dos y cinco se pueden juntar para formar en múltiplo de 10. Como en este rango (1-26) hay menos factores 5 que 2 es conveniente cuantificar los primeros. Así tenemos:

$1\,; 2; 3; 4; \mathbf{5}; 6; 7; 8; 9;\ \underbrace{10}_{2\cdot\mathbf{5}}; 11; 12; 13; 14;\ ;\ \underbrace{15}_{3\cdot\mathbf{5}}; 16; 17; 18; 19;\ ;\ \underbrace{20}_{4\cdot\mathbf{5}}; 21; 22; 23; 24;\ ;\ \underbrace{25}_{\mathbf{5}\cdot\mathbf{5}}; 26$

Como hay seis factores 5 y más de seis factores 2, entonces podemos juntar seis veces $(2 \cdot 5)$, lo mismo que 10^6 y, por tanto, puede decirse que 26! termina en 6 ceros.

(1b)

Análogamente al problema anterior, un problema equivalente en este caso sería buscar cuál es la mayor potencia de diez que divide a $200!$, que a su vez puede entenderse como la mayor potencia de cinco que divide a 200!

Para determinar cuántos múltiplos de 5 hay hasta el 200 puede plantearse:

$200 : 5 = 40$; pero en estos 40 múltiplos de 5 hay más factores 5 escondidos.

Para encontrar otros factores 5 se puede pensar en que los múltiplos de 25 contienen dos factores y estos aparecen cada cuatro múltiplos de 5, por lo que se pueden encontrar planteando:

$40 : 5 = 8$; así se tienen 8 factores más.

Por último, también hay que percatarse de que en el rango (1-200) está 125 que tiene 3 factores 5, con lo cual se agregaría otro factor.

Por tanto, hay 49 factores 5 en $200!$ lo que permite asegurar que la mayor potencia de 10 que divide a $200!$ es 10^{49}, lo que conlleva a decir que $200!$ termina en 10^{49} ceros.

(1c)

El problema se reformula de la misma forma que en los dos casos anteriores. Por lo cual se plantea:

$2015 : 5 = 403$ múltiplos de 5. Para encontrar los factores de 5 escondidos en estos 403 múltiplos:

$403 : 5 = 80, \ldots$, por lo que hay 80 múltiplos que tienen dos factores 5.

$80 : 5 = 16$ por lo que hay 16 múltiplos que tienen 3 factores 5.

$16 : 5 = 3, \ldots$, por lo que hay 3 múltiplos que tienen 4 factores 5.

Por tanto, en $2015!$ hay $403 + 80 + 16 + 3 = 502$ factores 5. Con ello se puede afirmar que la mayor potencia de 10 que divide a $2015!$ es 10^{502}, por lo que $2015!$ termina en 10^{502} ceros.

En (S_9V_1, min: 76) menciona el experto que hay problemas que se le hacen más interesantes, refiriéndose a los que tienen que ver con las combinaciones lineales. Para ejemplificar uno de los usos clásicos de las combinaciones lineales se analiza el siguiente problema.

Problema 7. (S_9R_1)

Cuando la edición N de ONMAPS se realiza en un año divisible por N, diremos que es un año "superolímpico". Por ejemplo, el año 2005 es superolímpico porque se realiza la edición 5 de la ONMAPS y 2005 es divisible por 5 (porque 5 divide exactamente al 2005). Determina todos los años superolímpicos, sabiendo que la ONMAPS se realiza anualmente a partir de 2001 y suponiendo que se seguirá realizando cada año.

Solución: (S_9V_4, min: 1)

1 era edición: 2001

2da edición: 2002

3ra edición: 2003

⋮ ⋮

N edición: $N + 2000$

$$\left(\begin{array}{r|l} 2000 & 2 \\ 1000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\right)$$

Por lo que lo que se busca es:

$\frac{N+2000}{N} = \frac{N}{N} + \frac{2000}{N}$; donde $\frac{N}{N}$ ya es entero, entonces la búsqueda se reduce a: $n \mid 2000$

Para encontrar los divisores de 2000 se realiza la descomposición en factores primos:

Entonces, para generar los divisores a partir del 2 se pueden tomar de 5 formas, incluyendo la opción de no tomar ninguno. Para el caso del factor 5 se tienen 4 posibilidades. Dado lo anterior en total serían:

$5 \cdot 4 = 20$ divisores.

Haciendo la lista:

1	2	4	8	16
5	10	20	40	80
25	50	100	200	400

125 250 500 1000 2000

Rta./ Estos serán los 20 años superolímplicos.

El siguiente problema nos deja ver cómo la estrategia de probar casos puede ayudar a encontrar soluciones:

Problema 8. (S_9R_3)

Encuentra todos los números n tales que la suma 1 + 2 + 3 + ⋯ + n es un número de tres dígitos iguales.

Solución: (S_9V_2, min: 65)

Primero se evidencia que la búsqueda por tanteo sería extenuante.

Planteando como suma de Gauss se tiene que:

$\frac{n(n+1)}{2} = \overline{ddd}$

Observación importante:

Todos los números $\overline{ddd}$ son múltiplos de 111, por tanto:

$\frac{n(n+1)}{2} = 111d$

Descomponiendo en primos a 111 se tiene que:

$\frac{n(n+1)}{2} = 3 \cdot 37 \cdot d$

$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot d$

Como 37 es primo y es un factor en el miembro derecho, se necesita también en el miembro izquierdo. Para ello, dado que no saltan a la vista otras posibles observaciones, hay que probar casos:

Caso 1 ($n = 37$)
$37 \cdot (38) = 37 \cdot 2 \cdot 19$
imposible $3 \cdot d \neq 19$; $d \in \mathbb{Z}$

Caso 3 ($n = 73$)
$73 \cdot (74) = 37 \cdot 2 \cdot 73$
imposible $73 \cdot (74) > 1000$

Caso 2 ($n = 36$)
$36 \cdot (37) = 37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$
posible $d = 6$
Entonces:
$\frac{n(n+1)}{2} > 1000$ para todo múltiplo de 37 que sea mayor que este.
∴ El único número que cumple la condición es 666.

Con el próximo problema refuerza la idea de la utilidad de hacer casos y también el camino de solución que se expone ejemplifica el uso de argumentos de paridad en la búsqueda de contradicciones.

Problema 9. (S_9R_5)

Reto 5. Sea N un número entero positivo y a, b, c, d los divisores positivos más pequeños de N, en donde $a < b < c < d$. Encuentra todos los valores posibles de N para los cuales $\mathrm{N} = \mathrm{bc} + \mathrm{d}$.

Solución: (S_9V_5, min: 9)

Como a; b; c; d son los divisores más pequeños de N:

$a = 1$; b es primo y c es un primo $\neq b$ o es b^2

Probando la paridad:

Supuesto: N es impar

Entonces: b; c; d son impares; $b \cdot c =$ impar y $b \cdot c + d =$ par, pero $\mathrm{bc} + \mathrm{d} = \mathrm{N}$. Hay contradicción por lo que N es par y $b = 2$.

Como: $b \mid N$; también $b \mid bc + d$ Como: c $\mid N$; también c $\mid bc + d$

Como: $b \mid bc$; también $b \mid d$ Como: c $\mid bc$; también c $\mid d$

Lo anterior reduce las opciones y es posible probar casos:

Caso 1	Caso 2
(c es un primo $\neq 2$)	($c = b^2 = 4$)
$\mathrm{N} = \mathrm{bc} + \mathrm{d}$	Como: $b \mid d$; c $\mid d$ y $d \neq 4$, entonces $d = 8$
$\mathrm{N} = 2\mathrm{c} + 2\mathrm{c}$	Luego: $N = 2 \cdot 4 + 8$
$\mathrm{N} = 4\mathrm{c}$, lo que nos dice que $4 \mid N$, siendo	$N = 16$
$c = 3$ y N= 12 ; pero, $2 \cdot 3 + 4 = 10$	Rta./ El valor de N es 16.
No es posible	

Con el problema que continúa se ejemplifica la importancia de usar una notación efectiva y escoger la combinación lineal que resulta más útil.

Problema 10. (S_9R_7)

Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre las cifras de las unidades y de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

Solución: (S_9V_6, min: 1)

Se tiene:

$k = \overline{ab} \rightarrow m = \overline{a0b}$ de manera que: $k \mid m$

Es conveniente transformar el planteamiento de la notación anterior que refleja cifras y posiciones, a otra que permita hacer algo de álgebra.

En esta dirección es posible alcanzar a observar que las unidades no se mueven, pero sí de las decenas en adelante al insertar el 0. Por tanto, k puede escribirse de la forma:

$k = 10A + b$, siendo A todos los dígitos a partir del lugar de las decenas; entonces m sería:

$m = 100A + b$

Y lo que se quiere es que:

$10A + b \mid 100A + b$

Pero $k \mid m$ si, y sólo si $k \mid m - k$, como $m = 100A + b$ y $k = 10A + b$, entonces:

$100A + b - (10A + b) = 90A$

Pero $k \nmid A$ porque $k > A > 0$, entonces $k \mid 90$, lo que determina las siguientes opciones:

$k = 1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90$

Como k tiene al menos dos cifras, entonces los números son $k = 10; 15; 18; 30; 45; 90$.

Como se puede percibir a partir de los problemas analizados, las estrategias a implementar en los problemas en su mayoría parten de la descomposición canónica en factores primos de los números enteros, pero pueden tener múltiples variantes. No obstantes, a pesar de la diversidad, es posible identificar ciertas estrategias típicamente útiles en el proceso de resolución de estos problemas. Algunos de los aspectos más importantes relativos al tema se sintetizan en la tabla 20.

Tabla 20.

Síntesis del análisis del tema "Primos, divisores y múltiplos".

Módulo: *Teoría de Números*	Tema: *Primos, divisores y múltiplos.*			
Objetivo(s): *Encontrar números enteros dadas sus propiedades de producto y/o divisibilidad.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas de encontrar números enteros.	*-Procedimiento para descomponer en factores primos.* *-Propiedades de la divisibilidad.*	*-Descomponer en factores primos.* *-Contar factores.* *-Encontrar ciclos.* *-Hacer listas.* *-Analizar casos.* *-Escoger una notación efectiva.* *-Suponer y buscar contradicción.* *-Formular un problema equivalente.*	*Encontrar números enteros a partir de ciertas condiciones.*	*¿Por dónde es conveniente empezar?* *¿Qué podemos suponer, podemos probarlo?* *¿Permite hacer algebra tal notación, como podemos escribir lo equivalente?* *¿Dadas las condiciones, cuál podría ser el equivalente a buscar?* *¿Qué combinación lineal resulta útil?* *¿Cuáles son los casos posibles?*

(Elaboración propia).

4.1.3.3. Ciclos y residuos

Tabla 21.

Fuentes de información disponibles para el tema "Ciclos y residuos".

Sem.	**Tema**	**Documento Electrónico**	**Videos**	**Código**	**Tiempo (min)**
S10	Residuos y ciclos	I P1, P2, …, P17 R1, R2, …, R8 Ejem: 1, 2, …, 4 E1	Sesión en vivo	V1	126
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	109
			Reto 1	V3	9
			Reto 3	V4	7
			Retos 4, 5, 6 y 7	V5	25
			Reto 8	V6	13
	Totales	30			289 min

Propósito:

Encontrar números dentro de una lista de elementos que ciclan con periodicidad conocida.

Descripción:

En ($S_{10}I$) el tema se presenta como la introducción a la aritmética modular o aritmética de reloj como también es conocida, que está en el corazón del trabajo de residuos y congruencias en Teoría de Números y que permite hacer operaciones en un mundo más "pequeño" que los enteros completos. Dicho de forma más simple, lo que se hace es encontrar ciertos números en una lista de elementos que se cicla con periodicidad conocida.

La base de este trabajo con congruencias descansa en la expansión de las herramientas y propiedades de la divisibilidad a casos donde el residuo es distinto de 0, es decir, para sacar información de estos números que no son múltiplos o divisores.

Los primeros problemas del material refuerzan la idea (*estrategia*) de que los residuos funcionan muy bien para agrupar números y darle cierta identidad. Ejemplos de estos se reproducen y analizan seguidamente.

Problema 1. ($S_{10}P_1$)

Justo ahora son las $11{:}02$ horas. ¿Qué hora será dentro de 2019 horas? ¿Qué hora será dentro de 2019 minutos?

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 8)

Como cada 24 h vuelve a ser la misma hora ($11{:}02$):

$2019 : 24 = 84$ con $r = 3$

Lo que se debe entender como 84 ciclos de 24 h (días) y sólo 3 h de un nuevo ciclo que son las que sí afectan la hora:

$11{:}02h + 3h = 14{:}02h$, por lo que dentro de 2019 h serán las $14{:}02h$.

Para encontrar qué hora será transcurridos 2019 min, habría que pensar en dos ciclos, uno cuyo residuo afecta las horas y otro que incide sobre los minutos.

Para ello planteamos:

$2019 : 60 = 33$ con $r = 39$

Lo que se debe entender como 33 h y 39 minutos.

Como 33 h rebasa el ciclo que determina un día:

$33 : 24 = 1$ con $r = 9$

Lo que se debe entender como un ciclo (1 día) y 9 h, que son las que afectan la hora.

$\therefore$ $11 + 9 = 20\ h$ y $2 + 39 = 41 min$, serán las $20{:}\,41$ de mañana.

Otro problema sencillo para reforzar la idea de agrupar en unidades que permitan hacer conteos más rápido, dado que lo único importante por contexto es el residuo, se presenta a continuación:

Problema 2. ($S_{10}P_2$)

Hoy es lunes. ¿Qué día será dentro de 2019 días?

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 14)

Pensar en:

¿Cuál es el ciclo que le corresponde a los días de la semana? Rta./7.

¿Cuántos grupos de 7 se pueden hacer?

$2019 : 7 = 288$ con $r = 3$

Lo que se debe entender como 288 semanas y 3 días.

Por lo que dentro de 288 semanas sería lunes (ciclos completos no afectan) y sólo se deben tener en cuenta los 3 días restantes que, contados a partir del lunes, nos lleva a que:

Rta./ En 2019 días será jueves.

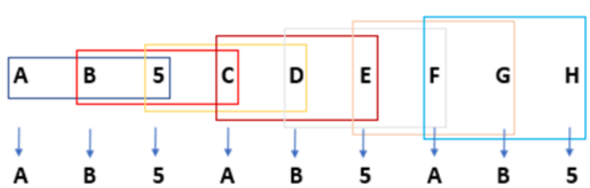
Como se ejemplifica a través de los dos anteriores la clave en estos problemas está en encontrar un ciclo que facilite el conteo, pero dicho ciclo no siempre es tan evidente. Con los dos problemas que siguen se puede notar.

Problema 3. ($S_{10}P_5$)

Los números A, B, 5, C, D, E, F, G, H cumplen que la suma de cualesquiera tres consecutivos en la lista suman 30. ¿Cuánto vale A + G?

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 25)

Analizar:



Ver que de la primera a la segunda suma se cambia la A por la C y no se afecta la suma, lo que significa que $C = A$.

De la misma forma se puede pensar para $D = B$; $E = 5$; $F = C = A$; $G = D = B$ y $H = E = 5$

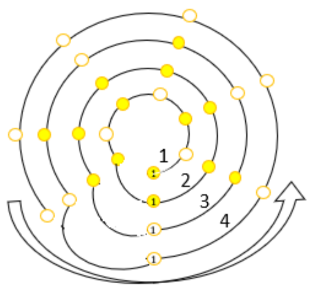
Por lo que:

$A + G = A + B$, como $A + B + 5 = 30$; entonces $A + B = A + G = 25$

Problema 4. ($S_{10}P_6$)

Hay 7 focos en un círculo, cada uno con su apagador. Samuel da vueltas alrededor del círculo, alternando el estado de un foco sí, un foco no. Si al principio todos están apagados, después de dar 2017 vueltas, ¿cuáles focos están prendidos?

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 29)



El análisis del dibujo deja ver que luego de 4 vueltas completas todos los focos vuelven a estar apagados, tal cual antes de comenzar. Para la quinta volverán a estar como en la primera, la sexta igual a la segunda y así sucesivamente. Por lo que cada ciclo es de 4 vueltas.

Planteando:

$2017{:}\,4 = 504$ con $r = 1$

Por lo que se tiene 504 ciclos completos y la primera vuelta del que sigue.

Rta./ Quedan prendidos los focos impares.

El siguiente problema que aquí se expone es bastante común dentro del trabajo con ciclos en la olimpiada y en apartados anteriores ya se han dado muestras de ello.

Problema 5. ($S_{10}P_{11}$)

Calcula el dígito de las unidades de:

$2015^{2015} + 2016^{2016} + 2017^{2017} + 2018^{2018}$

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 37)

Como solo se ocupa el dígito de las unidades basta con encontrar en qué terminan cada una de las potencias de cada sumando.

$2015^{2015} \rightarrow$ dado que la base es múltiplo de 5 y el exponente impar, termina en 5.

$2016^{2016} \rightarrow$ Toda potencia cuya base termine en 6, termina en 6.

$2017^{2017} \rightarrow$	Las potencias cuya base termina en 7, terminan en:	$7^1 = 7$ $7^2 = \cdots 9$ $7^3 = \cdots 3$	$7^4 = \cdots 1$ $7^5 = \cdots 7$	Ciclo de 4 terminaciones. $2017 : 4 = 504$ con $r = 1$

Serían 504 ciclos completos de terminaciones 7; 9; 3; 1, y una más, por lo que termina en 7.

$2018^{2018} \rightarrow$	Las potencias cuya base termina en 8, terminan en:	$8^1 = 8$ $8^2 = \cdots 4$ $8^3 = \cdots 2$	$8^4 = \cdots 6$ $8^5 = \cdots 8$	Ciclo de 4 terminaciones. $2018 : 4 = 504$ con $r = 2$

Serían 504 ciclos completos de terminaciones 8; 4; 2; 6, y dos más, por lo que termina en 4.

Entonces: $5 + 6 + 7 + 4 = \cdots 2$. Rta./ La cifra de las unidades es 2.

Las herramientas utilizadas en el problema anterior constituyen es la antesala para atacar problemas como el que sigue:

Problema 6. ($S_{10}P_{17}$)

Demuestra que: $7|2222^{5555} + 5555^{2222}$

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 76)

Primero se halla el residuo que deja cada sumando al dividirlo por 7.

$2222^{5555} \rightarrow 2222 : 7 = 317$ con $r = 3$, entonces: $2222^{5555} = \Big(\underbrace{7 \cdot 317}_{\text{múltiplo de 7}} + 3\Big)^{5555}$

Como ya $(7 \cdot 317)$ es múltiplo de 7, se busca el ciclo en los residuos que deja 3^{5555}, al dividir por 7.

$3^{5555} \rightarrow$	$3^1 \rightarrow 3$ $3^2 \rightarrow 2$ $3^3 \rightarrow 6$ $3^4 \rightarrow 4$ $3^5 \rightarrow 5$ $3^6 \rightarrow 1$	Ciclo de 6 residuos (3; 2; 6; 4; 5; 1). Para encontrar en cual "cae" 3^{5555} se plantea: $55555 : 6 = 925$ con $r = 5$. Por lo que deja residuo 5.

Análogamente se procede:

$5555^{2222} \rightarrow 5555 : 7 = 793$ con $r = 4$, entonces: $5555^{2222} = \Big(\underbrace{7 \cdot 793}_{\text{múltiplo de 7}} + 4\Big)^{2222}$

Como ya $(7 \cdot 793)$ es múltiplo de 7, se busca el ciclo en los residuos que deja 4^{2222}, al dividir por 7.

$4^{2222} \rightarrow$	$4^1 \rightarrow 4$ $4^2 \rightarrow 2$ $4^3 \rightarrow 1$	Ciclo de 3 residuos (4; 2; 1). Para encontrar en cual "cae" 4^{2222} se plantea: $2222: 3 = 740$ con $r = 2$. Por lo que deja residuo 2.

$\therefore \frac{2222^{5555}+5555^{2222}}{7} = \frac{2222^{5555}}{7} + \frac{5555^{2222}}{7} =$ residuo 5 $+$ residuo 2 $= 7$ y como se hace un múltiplo de 7, el resto es 0 y la suma es divisible por 7.

Con el problema que sigue se ejemplifican dos estrategias muy útiles para resolver muchos problemas, usar la notación efectiva y la búsqueda de contradicción.

Problema 7. ($\mathrm{S_{10}Ejem_3}$)

Sean a, b, c tres enteros tales que forman una terna pitagórica, es decir,

$a^2 + b^2 = c^2$

Demuestra que alguno de ellos debe ser múltiplo de 3.

Solución: ($S_{10}V_1$, min: 90)

Se supone que a, b, c, ninguno es múltiplo de 3.

Categorías posibles de los enteros al dividirlos por 3

Múltiplo de 3 — No son múltiplos de 3 — ¿Qué residuo dejan los cuadrados de estos números al dividirlos por 3?

$3k$ — $3k + 1\,;\, 3k + 2 \;\Longleftarrow$

$\downarrow \quad \downarrow$

$r = 1 \qquad r = 1$

Dejan residuo 1 al dividir entre 3. Entonces, se tendría $1 + 1 \not\equiv 1$

$\therefore$ Hay contradicción y alguno tiene que ser múltiplo de 3.

Algunas de las ideas principales ejemplificadas a través de los problemas anteriores se muestran en la tabla 22.

Tabla 22.

Síntesis del análisis del tema "Ciclos y residuos".

Módulo: *Teoría de números*	Tema: *Ciclos y residuos*			
Objetivo(s): *Encontrar números dentro de una lista de elementos que ciclan con periodicidad conocida.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas con ciclos.	*-Aritmética. -Reglas de divisibilidad. -Propiedades de la divisibilidad.*	*-Encontrar el ciclo y el residuo. -Hacer dibujos. -Usar la notación efectiva para operar y/o establecer categorías. -Buscar contradicción. -Analizar casos.*	*-Abreviar conteos. -Probar divisibilidad*	*¿Qué elementos se repiten periódicamente? ¿Cuántos elementos tiene este ciclo? ¿Afecta este ciclo el conteo? ¿Quedan elementos fuera del ciclo?*

(Elaboración propia).

4.1.4. Módulo IV: Combinatoria

4.1.4.1. Suma, producto, casos y listas

Tabla 23.

Fuentes de información disponibles para el tema "Suma, resta, listas y orden".

Sem.	**Tema**	**Documento Electrónico**	**Videos**	**Código**	**Tiempo (min)**

S11	Suma, producto, casos y listas	I Ejem: 1, 2, …, 5 P1, P2, …, P16 R1, R2, …, R9	Sesión en vivo	V1	135
			Sesión en vivo Gen. 1	V2	92
			Retos 1, 2, 3 y 4	V3	28
			Retos 5, 6 y 7	V4	28
			Retos 8 y 9	V5	14
	Totales	30			297 min

Propósito:

Calcular eventos posibles, dada una cantidad de decisiones con un número determinado de opciones.

Descripción:

En $(S_{11}I)$ se presenta el tema como la introducción al bloque de Combinatoria aludiendo que se trabajan con los rudimentos de conteo: la regla de la suma y la regla del producto. Complementando lo anterior en ($S_{11}V_1$, min: 5) se precisa que la regla de la suma se utiliza para *separar en casos* y que se puede leer como un "o", es decir, cuando se pueden tomar decisiones de ciertas maneras "o " de otras ciertas maneras y estas se suman. Por su parte la regla del producto aplica cuando se trata de *elecciones sucesivas*, dicho de otra forma, cuando se tiene que hacer algo "y" una cosa más "y" otra cosa más, etc.

También, en $(S_{11}I)$ se refiere que el tema se acerca a las habilidades básicas para hacer listas ordenadas y diagramas de árbol, para lo cual con frecuencia se usa el método de las "rayitas" que puede ayudar visualmente a distinguir claramente los pasos en el proceso de conteo antes de aplicar la regla del producto, es decir, a reconocer cuántas decisiones debo tomar y cuántas opciones tengo en cada una.

Los principales temas y estrategias que se ven a lo largo de todo el módulo y en el tema de la semana específicamente el experto los presenta como se muestra en la figura 50.

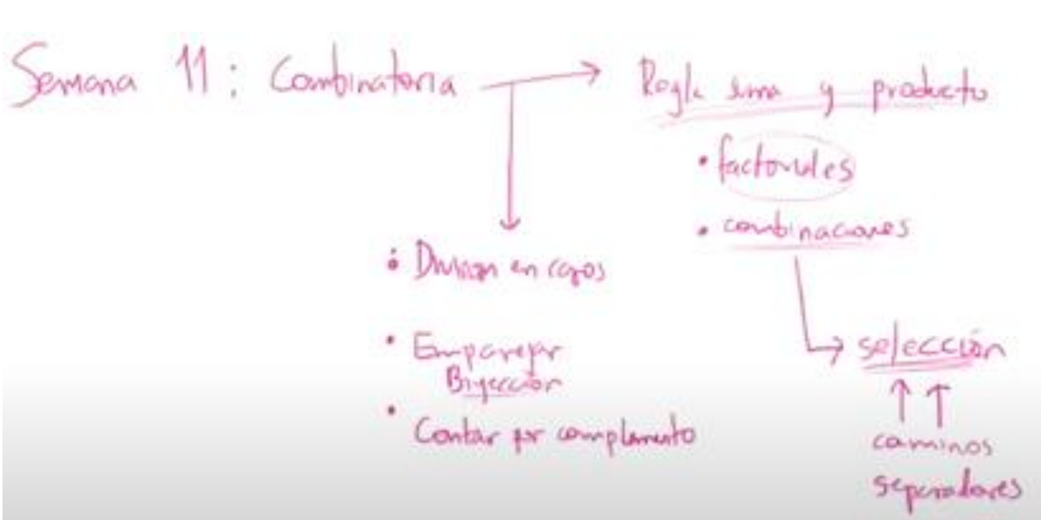


Figura 50. Temas y estrategias centrales dentro del módulo "Combinatoria", presentado en ($S_{11}V_2$, min: 6).

Con el primer problema que se analiza en ($S_{11}V_2$, min: 7) el entrenador explica que es muy común utilizar lo que denomina método de las rayitas en problemas simples de regla del producto, recalcando además que el significado de las rayitas puede cambiar según el problema, siendo más claro en aquellos donde se trabaja con filas. Por lo general, encima de cada rayita se colocan las posibilidades, siempre y cuando las no dependan de las anteriores.

Problema 1. ($S_{11}P_1$)

Se tienen 8 piezas de ajedrez: 2 peones, 2 caballos, 2 torres y 2 alfiles, uno de cada color. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en una fila de modo que no queden dos piezas del mismo color juntas?

Solución: ($S_{11}V_2$, min: 10)

Ideas para considerar:

8 piezas → 8 decisiones → 8 rayitas

Son sucesivas elecciones (regla del producto)

La cantidad de posibilidades en cada caso no se afecta con las decisiones anteriores.

$$\underline{8}\quad\underline{4}\quad\underline{3}\quad\underline{3}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{1}\quad\underline{1}$$

$8 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 1152$

Rta./ Se pueden acomodar las piezas de 1152 modos sin que queden juntas dos de un mismo color.

El siguiente problema pone a prueba el mismo conocimiento que el anterior:

Problema 2. ($S_{11}P_2$)

Hay tres equipos cada uno de ellos con tres personas. Se quieren sentar alrededor de una mesa redonda con sillas numeradas del 1 al 9. ¿De cuántas formas se pueden sentar las 9 personas en las sillas, de tal manera que cualesquiera dos personas consecutivas del mismo equipo estén separadas entre sí por la misma cantidad de sillas?

Solución ($S_{11}V_2$, min: 14)

Como las sillas están numeradas no es necesario considerar la redondez de la mesa para el análisis.

Al ser 9 sillas y 3 personas por equipo, dada la condición del problema, los integrantes de un mismo equipo estarán separados a dos sillas. Por lo que considerando el orden de las sillas de izquierda a derecha quedarían:

$$\underline{9}\quad\underline{6}\quad\underline{3}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{1}\quad\underline{1}\quad\underline{1}$$

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Explicación:

1. Cualquiera de las 9 personas.
2. Cualquiera de las 6 personas que no pertenecen al equipo (■).
3. Cualquiera de las 3 personas del equipo restante (■).
4. Seguidamente se sienta una persona de cada equipo en el mismo orden (■), (■), (■) y como ya hay uno sentado de cada equipo quedan 2 posibilidades para cada equipo.
5. Análogamente se repite el proceso, quedando una única persona elegible para cada equipo.

Regla del producto:

$9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2^3 = 1296$

Rta./ Las 9 personas se pueden sentar de 1296 formas que cumplen la condición dada.

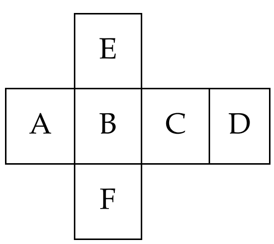
Según comenta el experto en ($S_{11}V_2$, min: 32) el siguiente problema refuerza la misma idea y fue propuesto en una olimpiada nacional para primero de secundaria.

Problema 3. ($S_{11}P_8$)

Se tiene un cubo con las seis caras de diferente color y deseamos colocar los números del 1 al 6 en las caras del cubo (uno en cada cara). ¿De cuántas formas podemos realizar el acomodo, si deseamos que la suma de los números que están en caras opuestas sea 7?

Solución: ($S_{11}V_2$, min: 32)

Se sugiere, para evitar tener que pensar en las posibles rotaciones del cubo, considerar su desarrollo en el plano.



$A + C = 7$

$B + D = 7$

$E + F = 7$

$$\underset{A}{\underline{\;6\;}} \quad \underset{B}{\underline{\;4\;}} \quad \underset{C}{\underline{\;1\;}} \quad \underset{D}{\underline{\;1\;}} \quad \underset{E}{\underline{\;2\;}} \quad \underset{F}{\underline{\;1\;}}$$

$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

Rta./ El acomodo se podrá realizar de 48 formas.

Los dos problemas que continúan son ejemplos en que las decisiones se pueden tomar "dependiendo de", es decir, en los que hay varios casos posibles y por tanto hay que hacer uso de la regla de la suma.

Cabe mencionar que, refiriéndose a la estrategia de separar en casos, en ($S_{11}I$) se describe como la más elemental elemental de todas con las que se trabaja. Se subraya además que para aplicar esta estrategia correctamente es necesario que los casos cumplan las siguientes condiciones:

1. Que sumen el total, es decir, que cada solución posible esté considerada en alguno de los casos.
2. Que sean posibles de contar.

Problema 4. ($S_{11}P_{12}$).

Daniel, Demian, Diana, Dolores y Dumbo corren una carrera que no puede terminar empatada. De todos los resultados posibles, ¿en cuántos se cumple que Dolores llegue antes que Diana?

Solución: ($S_{11}V_2$, min: 68).

Caso 1:	Do	4	3	2	1	$= 4! = 24$
Caso 2:	3	Do	3	2	1	$= 3^2 \cdot 2 = 18$
Caso 3:	3	2	Do	2	1	$= 3 \cdot 2^2 = 12$
Caso 4:	3	2	1	Do	1	$= 3 \cdot 2 = 6$

Por lo que $24 + 18 + 12 + 6 = 60$

Rta./De todos los resultados posibles Dolores llega antes que Diana en 60 de ellos.

Problema 5. ($S_{11}P_{15}$).

En un libro de 2014 páginas se reescribieron todos los números de las páginas. ¿Cuántos dígitos 8 se usaron?

Solución: ($S_{11}V_2$, min: 73).

Para resolverlo de manera sencilla se implementa un pequeño truco, consistente en contar los números que cumplen la condición en el rango (0-1999), toda vez que los que siguen son pocos y sólo uno (2008) posible.

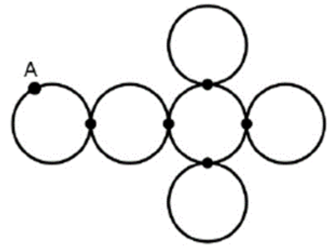
Caso 1 (8 en las unidades).	2	10	10	1	$= 200$
Caso 2 (8 en las decenas).	2	10	1	10	$= 200$
Caso 3 (8 en las centenas).	2	1	10	10	$= 200$

Por lo que $200 + 200 + 200 + 1 = 601$

Rta./ Se usaron 601 números 8.

Finalmente, para cerrar esta idea de combinatoria como sucesión de decisiones se presenta lo que fuera el problema 1 para categoría primaria en la ONMAPS de 2017 efectuada en Jerez. Cabe señalar que dicho problema fue formulado por el entrenador principal de este CEOM.

Problema 6. ($S_{11}R_1$)



Yareli pasea a Dimi en un circuito formado por seis círculos, como se muestra en la figura. Están paradas en el punto A y quieren recorrer todo el circuito con la condición de no pasar dos veces por el mismo arco. ¿De cuántas formas pueden hacer su paseo?

Solución: ($S_{11}V_3$, min: 2).

En cada punto, de cada uno de los seis círculos, se tienen dos opciones y como por condición no se puede regresar por el camino elegido para la ida, el regreso queda determinado.

Por lo que el paseo puede hacerse de $2^6 = 64$ formas.

Los aspectos para resaltar en esta tipología de problemas se presentan sintetizado en la tabla 24.

Tabla 24.

Síntesis del análisis del tema "Suma, resta, listas y orden".

<table>
<tr><td colspan="2">Módulo: Combinatoria</td><td colspan="3">Tema: Suma, producto, casos y listas</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo(s): Calcular eventos posibles dada una cantidad de decisiones con un número determinado de opciones.</td></tr>
<tr><td>Unidades de análisis</td><td>Recursos</td><td>Estrategias</td><td>Habilidades</td><td>Tips</td></tr>
<tr><td>Problemas de conteo</td><td>-Hacer listas y diagramas de árbol.
-Método de las rayitas.
-Regla del producto.
-Regla de la suma.</td><td>-Separar en casos.
-Aplicar regla del producto hacia el interior de los casos.</td><td>(Conteo)
-Calcular el total de opciones posibles.</td><td>-¿Cuántas decisiones debo tomar?
-¿Cuántas opciones tengo en cada una?</td></tr>
</table>

(Elaboración propia).

4.1.4.2. Permutación y combinación

Tabla 25.

Fuentes de información disponibles para el tema permutación y combinación.

Sem.	**Tema**	**Documento Electrónico**	**Videos**	**Código**	**Tiempo (min)**
S11	Permutación y Combinación		Sesión en vivo	V1	135
S12		I	Sesión en vivo	V2	144

		P1, P2, …, P23 R1, R2, …, R8	Taller en vivo	V3	94
			Sesión en vivo Gen. 1	V4	96
			Reto 1	V5	6
			Retos 2, 3 y P. 16	V6	19
			Retos 4 y 5	V7	8
	Totales	31			502 min

Propósito:

Calcular la cantidad de formas posibles de hacer una lista o conformar un equipo.

Descripción:

Según se refiere en la introducción del tema ($S_{12}I$), la discusión principal para la mayoría de los problemas en esta sección está en la diferencia entre lista y equipo. Tal diferenciación se explica a partir de ($S_{11}V_1$, min: 7) partiendo del siguiente análisis:

Permutación $\longrightarrow$ Listas $AB \neq BA$

orden

Combinación $\longrightarrow$ Equipos $\{A;\ B\} = \{B;\ A\}$

Lo que equivale a decir que en la lista es importante el orden, pero en el equipo no. De manera más detallada se presentan en ($S_{12}I$) como se reproduce a continuación textualmente.

> Permutaciones: (listas)
> Para n objetos tenemos que si tomamos el elemento n entonces en el siguiente lugar podemos colocar cualquiera de los $n-1$ y en el tercero los $n-2$ … y así sucesivamente por tanto tenemos que:
> $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ o sea $P_n = n!$
> Se llama permutaciones de los n objetos a todo conjunto ordenado formado por dichos n objetos. Dos permutaciones se distinguen una de otra solamente por el orden de colocación de sus elementos.
> En toda permutación se cumple que: el número de elementos coincide con los que se toman, influye el orden en que se tomen y no se repiten los elementos.
> Permutaciones con repetición:
> Si algunos de los objetos permutados son iguales se obtendrán menos permutaciones, pues algunas de ellas serán iguales entre sí, o sea: $PR_n^{a,b} = \frac{n!}{a!b!}$

Un par de problemas sencillos para ejemplificar los conteos en este tipo de lista se analizan seguidamente:

Problema 1. ($S_{12}P_1$)

¿Cuántos números de tres lugares se pueden formar con las cifras 1, 2, 3 si cada cifra básica debe aparecer exactamente una vez? ¿Cuáles son?

Solución: ($S_{11}V_1$, min: 28).

Estamos en presencia de una permutación de las tres cifras por lo que se pueden formar $P_3 = 3! = 6$ números de tres lugares. Ellos son 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Problema 2. ($S_{12}P_3$)

¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse con las letras de la palabra MATEMÁTICA?

Solución: ($S_{11}V_1$, min: 33).

La palabra MATEMÁTICA tiene 10 letras, pero, 3 son A, 2 son M y 2 son T por lo que tenemos una permutación con repetición:

$PR_n^{a,b} = \frac{n!}{a!b!} = P_{10}^{3,\,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{302400}{2}$ =151200

Rta./ Se pueden formar 151200 palabras.

Las combinaciones o equipos se definen en ($S_{12}I$) como se reproduce textualmente a continuación:

> Combinaciones:
> Para n objetos tenemos que para la primera se toma n, para la segunda $n-1$ ... y así sucesivamente y donde no influye el orden y tenemos que:
> $C\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
> Se llama combinación de los n objetos tomados p a p (o combinaciones de orden p) a todo conjunto de p objetos elegidos entre ellos de tal modo que dos conjuntos se diferencian al menos en un objeto.
> En toda combinación se cumple que: el número de objetos que se toma es menor que el número de objetos del conjunto no influye el orden y no se pueden repetir los elementos.
> Combinaciones con repetición: Se deben distribuir los elementos según los tipos, hay que numerar todos los elementos de la combinación, pero a los números de los del segundo tipo debe agregársele 1, a los del tercero 2 y así sucesivamente.
> $CR\binom{n}{p} = CR\binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Problemas paradigmáticos y a la vez sencillos de conteos de las maneras de conformar equipos se presentan a continuación:

Problema 3. ($S_{12}P_6$)

¿De cuántos modos se pueden escoger tres pinturas diferentes de las cinco que existen?

Solución: ($S_{11}V_1$, min: 40).

Para escoger tres pinturas de las cinco existentes, debemos tener en cuenta que no se pueden repetir y que cada elección se diferencia de otra si al menos una de ellas es diferente sin importar el orden en que se tomen entonces estamos en presencia de una combinación:

$C\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Rta./Las pinturas se pueden escoger de 10 formas diferentes.

Problema 4. ($S_{12}P_8$)

En una oficina de correos se venden estampillas postales de 10 tipos. ¿De cuántas formas se pueden comprar en ella 12 estampillas postales?

Solución: ($S_{11}V_1$, min:)

Para comprar 12 estampillas postales de los 10 tipos que existen debemos combinar los tipos existentes hasta completar los que queremos y estamos en presencia de una combinación con repetición:

$$CR\binom{10}{12} = CR\binom{10+12-1}{12} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$$

Rta./Pueden comprarse las 12 estampillas postales de 293930 de formas diferentes.

Una estrategia muy útil en muchos problemas de elegir equipos (combinaciones) es la de contar por complemento. El problema que sigue así lo evidencia.

Problema 5. ($S_{12}P_{11}$)

¿De cuántas maneras se puede tomar 4 números del conjunto {1, 2, 3, ..., 20} de modo que su producto sea par?

Solución: *(*$S_{11}V_1$*,* min: 68)

La idea que pude hacer fluir la estrategia parte de la separación en casos considerando garantizar al menos un factor par para que el producto sea par:

Caso 1 (1 par; 3 impares) $\binom{10}{1}\binom{10}{3}$

Caso 2 (2 pares; 2 impares) $\binom{10}{2}\binom{10}{2}$

Caso 3 (3 pares; 1 impar) $\binom{10}{3}\binom{10}{1}$

Caso 4 (4 pares, 0 impar) $\binom{10}{4}$

Los casos en los que se cumple son más que aquellos donde no se cumple, existiendo la posibilidad únicamente cuando:

(4 impares) $\binom{10}{4}$.

Por tanto, es conveniente contar por complemento:

$$\binom{20}{4} - \binom{10}{4}$$

$$C\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\,16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2} = 4845$$

$$C\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$$

$$4845 - 210 = 4635$$

Rta./Los números se pueden tomar de 4635 maneras distintas.

Otra estrategia que se promueve desde el material es la de contar emparejando. Con el siguiente problema se ejemplifica su utilidad:

Problema 6. ($S_{12}P_{16}$)

Se escriben todos los números posibles de 7 dígitos usando puros 1's y 2's. ¿Cuántos de ellos tienen más 1's que 2's?

Solución: *(*$S_{11}V_3$*,* min: 18)

Si se tiene un número de 7 dígitos que solo está compuesto por 1´s y 2´s cualquiera:

$$\underline{1}\quad \underline{2}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{1}$$
$$\downarrow\quad \downarrow\quad \downarrow\quad \downarrow\quad \downarrow\quad \downarrow\quad \downarrow$$

Le podemos asociar el número "volteado", es decir, si tengo un 1, escribo un 2, y si tengo un 2, escribo el

2 1 1 2 1 2 2 — 1. El emparejamiento queda determinado de forma única ya que si vuelvo a revertir el segundo me regreso a primero

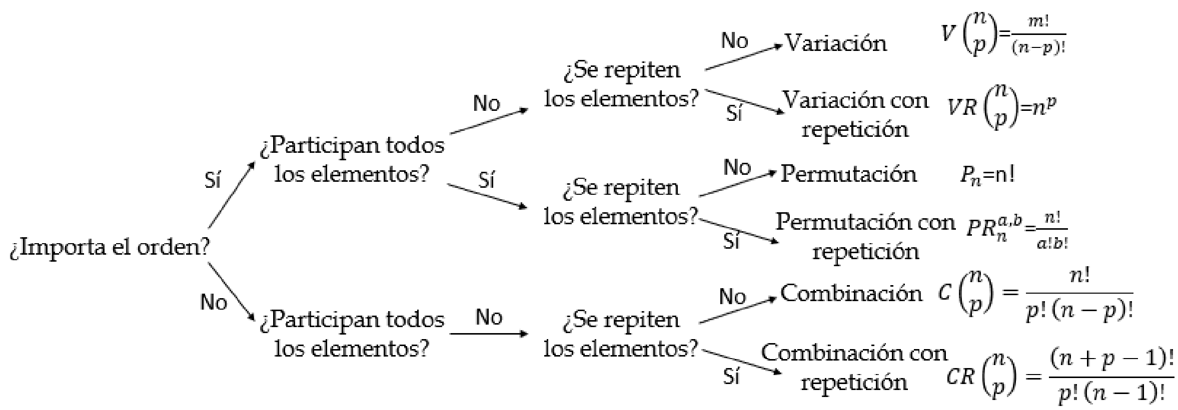
Por tanto, la cantidad total de números que se pueden hacer se pueden emparejar y de cada pareja sólo me sirve uno.

Entonces la cantidad de números posibles es:

$$\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2}\quad\underline{2} = 2^7 = 128$$

Y, con base al razonamiento anterior, la mitad de ellos (64) tienen más 1´s que 2´s.

Para finalizar, seguidamente se presenta la manera en que el experto inicia recordando en ($S_{11}V_3$, min: 1) las formas posibles de contar listas o equipos, precisa además que en las sesiones que siguen se profundizará en las aplicaciones de estas herramientas.



Los aspectos centrales inherentes al tema se presentan sintetizados en la tabla 26.

Tabla 26.

Síntesis del análisis del tema "Permutación y combinación".

<table>
<tr><td colspan="2">Módulo: Combinatoria</td><td colspan="3">Tema: Permutación y combinación.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo(s): Calcular la cantidad de formas posibles de hacer una lista o conformar un equipo.</td></tr>
<tr><td>Unidades de análisis</td><td>Recursos</td><td>Estrategias</td><td>Habilidades</td><td>Tips</td></tr>
<tr><td>Problemas de conteos de listas o equipos</td><td>-Notación (factorial, coeficiente binomial)
-Aritmética.
-Permutación=listas
-Combinación=equipos</td><td>-Separar en casos
-Contar por complemento.
-Contar emparejando.</td><td>(Conteo)
-Calcular el total de opciones posibles para una lista u equipo</td><td>-¿Cuántas decisiones debo tomar?
-¿Cuántas opciones tengo en cada una?
-Importa el orden?
-¿Participan todos los elementos?
-¿Se repiten los elementos?</td></tr>
</table>

(Elaboración propia).

4.1.4.3. Selección

Tabla 27.

Fuentes de información disponibles para el tema "Selección".

Sem.	Tema	Documento Electrónico	Videos	Código	Tiempo (min)
S12	Selección: multinomial, caminos, orden y separadores.	I Ejem:1, 2, …, 6 P1, P2, …, P10 R1, R2, …, R8	Sesión en vivo	V1	144
S13			Taller en vivo	V2	76
			Sesión en vivo Gen. 1	V3	101
			Retos 1, 2 y 3	V4	13
			Retos 4 y 5	V5	12
			Reto 7	V6	4
	Totales	24			350 min

Propósito:

Elegir elementos buscados utilizando caminos, conteo como palabras y separadores.

Descripción:

En la introducción del tema que ocupa la semana ($S_{13}I$) se refiere que las herramientas de conteo vistas en la semana anterior (permutación y combinación) son las principales armas para resolver los problemas de combinatoria de este apartado, mismos que piden encontrar, principalmente, cuántos elementos indistinguibles hay en determinado conjunto. De la misma forma se deja saber que lo que se hace en este apartado es refinar las herramientas de combinación y evidenciar cómo los coeficientes binomiales aparecen en muchos otros lugares de manera natural (caminos, palabras y separadores) si se cambia la manera de entender los problemas. También se acota que el cambio de perspectiva toca también la forma de entender el método de "rayitas", dado que en lugar que cada línea represente una decisión y la cantidad de opciones que se tienen, acá se debe pensar en "elecciones", es decir, elegir los elementos que se buscan.

Esta manera de mirar los problemas se explica en la ($S_{13}I$) en tres subapartados como se reproduce parcialmente a continuación:

> Los problemas de palabras de letras distintas pueden resolverse de dos maneras distintas a partir de las herramientas con las que ya contamos. Seguro puedes anticipar ambos.
>
> Si tenemos k conjuntos disjuntos con $C_i \geq 0$ elementos indistinguibles cada uno, de manera que $c_1 + c_2 + \cdots c_k = n$ y queremos ordenarlos en una fila, esto se puede hacer de:
>
> $$\frac{n!}{c_1!\, c_2! \dots c_k!}$$
>
> si lo que pensamos es en eliminar las repeticiones en el orden de los elementos de cada conjunto. Si, en cambio, escogemos los lugares en la fila de los elementos de cada conjunto, esto se puede hacer de:
>
> $$\binom{n}{c_1}\binom{n-c_1}{c_2}\binom{n-(c_1+c_2)}{c_3}\dots\binom{n-(c_1+c_2+\cdots c_{k-1})}{c_k}$$

Para ejemplificar las concepciones anteriores en ($S_{12}V_1$, min: 6) el entrenador comenta que hay muchos problemas donde hay que permutar las letras de cierta palabra para formar nuevas palabras, tengan o no un significado conocido. Para caer en el tema en cuestión seguidamente propone analizar algunas de las palabras del ejemplo 1.

Ejemplo 1. ($S_{13}Ejem_1$)

Encuentra cuántas palabras distintas se pueden hacer con las letras de cada una de las siguientes palabras: (1) LIBRO, (2) OSO, (3) LEERE, (4) PERRO, (5) PAPAA.

Análisis: (1)

Como todas las letras son distintas:

$$\underline{5}\quad \underline{4}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{1} \;=\; 5! \;= 120$$

Análisis (3)

La E se repite tres veces, por lo que al contar las palabras habrán repetidas. En estos casos hay que eliminar las repeticiones.

$$\frac{5}{\mathrm{L}}\quad \frac{4}{E_1}\quad \frac{3}{E_2}\quad \frac{2}{\mathrm{R}}\quad \frac{1}{E_3} \;=\; 5! \;= 120$$

La manera en que estas 3 letras pueden permutar es 3!, por lo que para eliminar las repeticiones se calcula $\frac{120}{6} = 20$.

Análisis (5)

Aquí una letra tiene dos repeticiones y la otra 3, por lo que con la factorial se obtienen palabras repetidas. Para eliminarlas:

$$\frac{5}{P_1}\quad \frac{4}{A_1}\quad \frac{3}{P_2}\quad \frac{2}{A_2}\quad \frac{1}{A_3} \;=\; 5! \;= 120$$

Se plantea: $\frac{5!}{2!3!} = 5$

En este punto ($S_{12}V_1$, min: 21) el entrenador explica que, además de esta idea de eliminar las repeticiones, el problema puede reinterpretarse como una elección. Continuando con el ejemplo anterior:

$$\frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Lo que significa que de los 5 lugares que se tienen para poner las letras, se seleccionan 3 para poner las "P", o dos para colocar las "A", quedando en cada caso los lugares vacíos para las otras letras. En consecuencia, por cada manera de elegir los lugares se puede construir una única palabra, por lo que sería lo mismo elegir estos lugares que hacer la palabra. Concluye así que la estrategia de modificar situaciones en problemas equivalentes a estos de "dos letras" es de suma utilidad.

Continuando con la teoría expuesta en $(S_{13}I)$, seguidamente se reproducen las ideas centrales en torno a los problemas de caminos.

> Existe un pequeño conjunto de problemas al que llamamos "Caminos". Es un conjunto tan específico que es ligeramente extraño que le normalmente se le dedique una sección. La estructura básica de uno de estos problemas es como sigue: Tenemos una cuadrícula de $n \times m$ y queremos contar los caminos que van sobre las líneas de la cuadrícula, desde la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha, únicamente en dirección arriba derecha. La parte de "arriba y derecha" ayuda a que la respuesta no sea "infinitos", pues de esta manera no es posible hacer ciclos.
>
> Vamos a ver dos maneras diferentes de llegar a la fórmula general de caminos en una cuadrícula: como palabras de dos letras y de manera recursiva. Para verlo como un problema de palabras de dos letras, piensa que estás en la esquina inferior izquierda y alguien te pide indicaciones para llegar a la esquina superior derecha. El camino que ofrezcas es una sucesión de "derecha" y "arriba"; si alguien te acompaña, a lo mejor piensa en una sucesión distinta. La idea es reconocer que cada sucesión distinta se corresponde con un camino diferente. Sin importar el camino, éste debe tener n derecha y m izquierda. Si sustituimos por D e I, un camino específico podría verse como:
>
> $$\underbrace{DDD \dots D}_{n\ veces}\ \underbrace{III \dots I}_{m\ veces}$$
>
> que es el camino que va por la orilla inferior. En general, esto se puede hacer de:
>
> $$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$$
>
> maneras diferentes, resolviéndolo como sabemos hasta ahora. Es posible llegar a esta misma explicación de manera recursiva, apoyándonos del triángulo de Pascal.

Para trabajar esta ideal en *($S_{12}V_1$*, min: 62) se propone un problema con la estructura básica que se refiere en el texto citado de $(S_{13}I)$. La cuadrícula utilizada para el análisis fue de 5×4.

El primer análisis para el conteo de los caminos el entrenador lo dirigió por el método recursivo con apoyo en el Triángulo de Pascal como se muestra en la Figura 51.

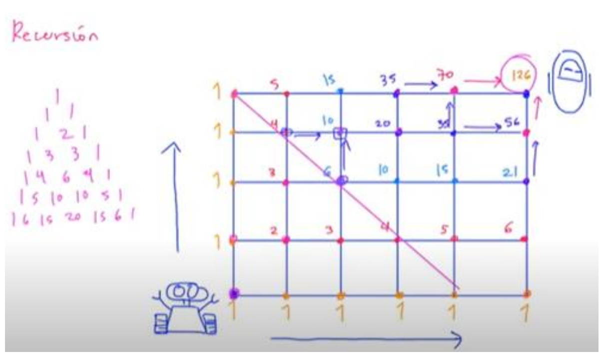


Figura 51. Conteo de caminos por el método recursivo en ($S_{12}V_1$, min: 75).

Seguidamente los 126 caminos posibles se escriben de manera equivalente como coeficiente binomial $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$, a partir de contar los niveles en el Triángulo de Pascal y las dimensiones de la cuadrícula.

Con posterioridad el entrenador pide pensar en una interpretación que directamente conduzca a esta notación, dando lugar a la explicación de $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$, que para el caso en cuestión está dada por $\binom{4+5}{4} = \binom{4+5}{5}$.

De la misma forma, dado que se puede pensar como listas de comandos de 9 indicaciones, pero solo dos letras (I, D), se puede entender como 9 indicaciones en total, con "D" repetida 5 veces y "I" repetida en otras 4, lo que se puede escribir como $\frac{9!}{4!5!}$, o lo que es lo mismo, de los 9 lugares que tiene la indicación se escogen en qué momentos se dan las 4 derechas "D" $\binom{9}{4}$ y colocando las "I" en los restantes determina una palabra de dos letras que se corresponde con un camino.

A continuación, se reproducen de forma parcial, pero textual, las principales ideas del material ($S_{13}I$) relativas al uso de los separadores en estos problemas de conteo:

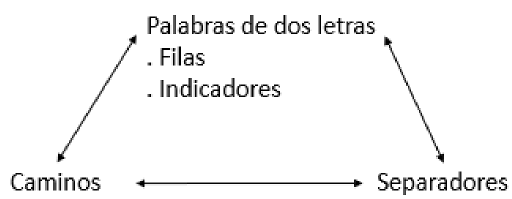
> La herramienta de Separadores nos ayuda a repartir objetos indistinguibles. Visto como un problema de palabras de dos letras, tenemos n objetos indistinguibles que queremos repartir entre k personas. Si los objetos estuvieran en línea, bastaría con que k – 1 personas dibujaran una línea entre los objetos de manera que "de aquí para acá" sea suyo. Esas líneas son los separadores.
>
> Por ejemplo, si queremos repartir 10 paletas entre 4 personas, ponemos las paletas acomodadas en línea:
>
> $$P\ P\ P\ P\ P\ P\ P\ P\ P\ P$$
>
> y basta con que tres personas dibujen líneas entre las paletas, separando en 4 conjuntos en total. Por ejemplo, si las líneas que marcan son como sigue:
>
> $$P\ P\ /\ P\ P\ P\ /\ /\ P\ P\ P\ P\ P$$
>
> el reparto fue 2 – 3 – 0 – 5, pues es la cantidad de paletas entre cada pareja de separadores consecutivos. En un principio teníamos n objetos a repartir y agregamos $k-1$ líneas o letras que separan en k conjuntos. Visto como palabra de dos letras, hay en total:
>
> $$\binom{n+k-1}{k-1}$$
>
> acomodos diferentes. Lo que hemos hecho antes es mostrar que hay una relación $k-1$ entre cada una de estas palabras y un reparto. Esto es lo que llamamos Separadores.
>
> De una manera muy general, usando Separadores podemos encontrar de cuántas maneras distintas es posible elegir enteros $k_1, k_2, \dots, k_x$ de manera que:
>
> $$k_1 + k_2 + \cdots + k_x = n$$
>
> con n entero positivo y $k_i \geq 0$ enteros. Con pequeños cambios, Separadores nos ayuda a contestar también la misma pregunta para el caso en que $k_i \geq m_i$ con m_i entero no negativo.

Para ejemplificar lo anterior en ($S_{12}V_1$, min: 87) se analiza una situación "improvisada" por el entrenador donde se pregunta de cuántas formas se pueden repartir 52 fotos entre 5 personas. Con este fin se dibujan en el pizarrón los 52 puntos que representativos de las fotos en la siguiente forma:

Luego de escuchar algunos criterios sobre posibles planteamientos, propone separar "arbitrariamente" las fotos en cinco partes (personas) (13, 10, 0, 15, 14) como se muestra a continuación:

Entonces hace ver que el problema, al igual que los anteriores puede verse como una permutación de todos los elementos (fotos más separadores) donde hay que eliminar las repeticiones (52 fotos) y (4 separadores). De la misma forma puede entenderse como un camino o como palabra de dos letras, siendo 56 la cantidad total de letras y 4 posiciones para una y las restantes 52 para la otra. En consecuencia, la situación anterior queda determinada por $\binom{56}{4} = \binom{56}{52}$.

Visto lo anterior en el ($S_{12}V_1$, min: 105) se concluye que estos problemas pensados como problemas de palabras, caminos o separadores son equivalentes y mostrar todas las herramientas y los cambios de registros que cada una implica puede ayudar a entender de mejor forma un problema.



Seguidamente se exponen algunos de los problemas disponibles en el material de la semana para ejercitar el trabajo tales estrategias.

Problema 1. ($S_{13}P_4$)

¿De cuántas maneras se puede llegar de esquina a esquina opuesta en un cubo de $4 \times 4 \times 4$ si solo es posible caminar en direcciones positivas en cada uno de los tres sentidos?

Solución: ($S_{13}V_2$, min: 10)

El entrenador pregunta:

¿Te recuerda algún tipo de problema? (Problema de caminos, cuadrícula).

Los posibles caminos están compuestos por 12 direcciones de tres tipos y en cualquier orden:

A-arriba AAAADDDDIIII

D-derecha

I-izquierda

Por tanto, $\frac{12!}{4!4!4!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{19958400}{13824} = 144375$

Rta./ Se puede llegar de 144375 formas.

Problema 2. $(S_{13}P_{10})$

Tenemos 6 cajas numeradas y 20 pelotas idénticas. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las pelotas en las cajas sin restricciones? ¿Y si queremos que cada caja tenga al menos una pelota?

Solución: $(S_{12}V_1$, min: 109)

Para responder la primera pregunta del problema por separadores se puede plantear:

$$\binom{25}{5} = \frac{25!}{5!20!} = \frac{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = 53130$$

Rta./Se pueden repartir las 20 pelotas en las 6 cajas sin restricciones de 53130 formas.

Con relación al segundo cuestionamiento:

Para que no queden cajas vacías, se considera, desde el punto de partida, una pelota por caja, por lo que ahora se tienen 14 pelotas para 6 cajas. Con los separadores el planteamiento sería:

$$\binom{19}{5} = \frac{19!}{5!14!} = \frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{23256}{2} = 11628$$

Rta./Teniendo cada caja al menos una pelota se pueden repartir de 11628 formas.

Problema 3. $(S_{13}R_1)$

Yareli tiene 20 monedas de 10 centavos, 20 monedas de 20 centavos, 20 monedas de 50 centavos y 20 monedas de 1 peso. ¿De cuántas maneras se pueden tomar 20 monedas de estas 80?

Solución: $(S_{12}V_1$, min: 125)

Se puede pensar en 20 monedas en balco y los separadores son los que determinan el tipo:

$$\underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare}_{10\ centavos} | \underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare}_{20\ centavos} | \underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare}_{50\ centavos} | \underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare}_{1\ peso}$$

De esta forma las maneras de tener estas 20 monedas, es lo mismo que las maneras en que se pueden tener las 20 de las 80 monedas.

$$\binom{23}{3} = \frac{23!}{3!20!} = \frac{23\cdot22\cdot21}{3\cdot2} = 1771$$

Rta./ Las 20 monedas se pueden tomar de 1771 formas.

En ($S_{12}V_1$, min: 141) el entrenador resume que la estrategia de usar separadores se utiliza únicamente para contar los elementos de un conjunto siempre que sean indistinguibles, es decir, que no importe cuales elementos correspondan sino cuántos son.

Para finalizar se presenta la tabla 28 con una síntesis de los aspectos centrales relativos al tema:

Tabla 28.

Síntesis del análisis del tema "Selección".

Módulo: *Combinatoria*	Tema: *Selección*			
Objetivo(s): *Elegir elementos buscados utilizando caminos, conteo como palabras y separadores.*				
Unidades de análisis	Recursos	Estrategias	Habilidades	Tips
Problemas de conteo (¿Cuántos?)	*-Notación (factorial, coeficiente binomial -Permutaciones. -Combinaciones*	*-Contar caminos. Contar como palabras. -Usar separadores*	*-Elegir elementos de un conjunto. -Contar elementos indistinguibles en un conjunto.*	*-¿Cuántas decisiones debo tomar? -¿Cuántas opciones tengo en cada una? -Importa el orden? -¿Participan todos los elementos? -¿Se repiten los elementos?*

(Elaboración propia).

4.1.5 Algunas generalidades relevantes

En general los temas tratados en el Curso fueron muy amplios y enriquecedores a pesar de que el mismo fue concebido para tratar principalmente tipologías de problemas que se presentan en los niveles básicos e intermedios de las competiciones matemáticas en México para los alumnos que atraviesan por la educación básica. En este tenor se puede dar fe de la naturaleza retadora de los problemas que fueron analizados y, en consecuencia, de la importancia de acumular y diversificar las experiencias como resolutor para potenciar el desarrollo de la intuición en la búsqueda de caminos de solución.

En el mismo sentido puede decirse que a pesar de la diversidad en los problemas cuando se analizan por temas se pueden encontrar ciertas regularidades más o menos evidentes pero que pueden servir como tips para explorar caminos de solución si se tiene suficientemente desarrollado el ingenio, la creatividad y la capacidad de razonamiento ante futuros problemas "tipo".

4.2 Análisis del *contexto* en los entrenamientos del preselectivo zacatecano de primaria y secundaria para las ONM de 2020.

Según informa el Mtro. J. Tiscareño (comunicación personal, 16 de febrero de 2020) presidente del Comité Ejecutivo Estatal (CEE) de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Asociación Civil, Zacatecas (ANPM A.C. ZACATECAS), el entrenamiento a los estudiantes olímpicos matemáticos de las enseñanzas primaria y secundaria en el estado de Zacatecas ha sido una tarea asumida por la organización que preside desde que esta última viera la luz en 1999 bajo la presidencia del profesor Leopoldo Barragán Trueba y el maestro Huberto Meléndez Martínez fungiendo como su delegado.

Continúa el citado profesor refiriendo que estos funcionarios de la ANPM fueron sucedidos en 2007 por el maestro Huberto Meléndez Martínez como presidente y el también maestro Luis Fernando Ojeda Ánimas como delegado, los cuales ocuparon sus respectivos cargos hasta el año 2009. Añade también que por aquel entonces los entrenamientos se desarrollaban con frecuencia quincenal, en una única sede y estaban a cargo de los propios maestros de la ANPM.

De la misma forma relata como el primer oro olímpico nacional llegó para el estado en 2001, pero asegura que con esta metodología de entrenamiento el retroceso era muy significativo y palpable, lo que fundamenta a partir de que Zacatecas ocupaba puestos en torno a la media entre los 30 estados participantes.

Prosigue informando que en el año 2009 asume la presidencia de la ANPM el maestro Luis Fernando Ojeda Ánimas y las labores de delegado recaen en sus manos (José Tiscareño Bermúdez) hasta el año 2013, que pasa a ocupar el puesto de presidente, responsabilidad que lo ocupa hasta el presente.

En su discurso el profesor explica que, en 2010, cuando todavía se desempeñaba como delegado, impulsó varios cambios radicales en la organización de la Olimpiada Estatal de Matemáticas en Zacatecas, implementando los entrenamientos semanales; cambiando el formato de los exámenes; cambiando a los entrenadores, de maestros a exolímpicos, cuestión esta que, a su decir, fue difícil de entender para los maestros. Agrega en su relación de los cambios impulsados que también se hizo itinerante la sede de cada entrenamiento semanal, llevándolos, en la medida de lo posible, a las escuelas de los mismos alumnos preseleccionados y, por lo general, en los municipios de Zacatecas, Guadalupe, Jerez o Fresnillo, por su ubicación estratégica en el centro del estado. De la misma forma refiere que las escuelas sede proporcionan las instalaciones y los materiales, además de alimentos y hospedaje de los alumnos que lo soliciten, y para ello, han contado con el apoyo de los padres de familia de la misma escuela.

En la propia comunicación Tiscareño exalta que luego de los cambios cualitativos y estructurales que tuvieron los entrenamientos, se alcanzó el segundo oro nacional en 2013, al que continuó el del 2014 y así hasta la fecha, siendo el logro más reciente la inclusión del fresnillense Rodrigo Saldívar Mauricio en el equipo nacional que tomará parte en la International Mathematics Competition (IMC) para alumnos de primaria, a efectuarse en Indonesia en julio del presente año.

Como constancia de lo anteriormente expuesto, el profesor concluye haciendo ver que los resultados alcanzados con este sistema de trabajo han ubicado a Zacatecas entre los 5 estados más exitosos en olimpiada de matemáticas en el país, disputando con potencias nacionales de mayor población como son los casos del Estado de México, Nuevo León, Jalisco y Guanajuato, las posiciones de privilegio en cada competición.

Cabe señalar que 36 de los estudiantes que participan en estos entrenamientos forman parte del preselectivo para conformar la delegación estatal que asistirá a la XX ONMAPS y a la IV OMMEB a realizarse en los meses de mayo y junio de 2020, tal y como se establece desde la convocaría estatal de la olimpiada (SEP-Zacatecas y ANPM-Zacatecas, 2019). Además de estos 36 alumnos preseleccionados participan de manera regular en los entrenamientos otros alumnos en calidad de invitados, como estrategia para promover el talento de estos estudiantes. En el propio documento se deja en conocimiento que la preselección estaría compuesta por 6 estudiantes de cada una de las 6 categorías determinadas desde la convocatoria, es decir, estudiantes que cursan desde el cuarto de primaria hasta el tercero de secundaria.

La selección para las referidas competiciones nacionales quedaría constituida por 8 alumnos en cada caso, siendo para la ONMAPS 2 de primaria y 6 de secundaria y para la OMMEB se constituyen dos equipos de cuatro olímpicos, el primero, estará conformado por 4 alumnos de cuarto y quinto de primaria, y el segundo, por 2 que podrán ser de sexto de primaria o primero de secundaria y 2 de segundo de secundaria. La distribución descrita se detalla en la tabla 29.

Tabla 29.

Distribución de los alumnos de la selección zacatecana a participar olimpiadas nacionales de 2020.

DISTRIBUCIÓN DE ALUMNOS SELECCIONADOS QUE REPRESENTARÁN A ZACATECAS EN LAS OLIMPIADAS NACIONALES, DE ACUERDO A LOS RESULTADOS DE LOS EXÁMENES DEL PRESELECTIVO ESTATAL DE PRIMARIA Y SECUNDARIA DE ZACATECAS 2020

GRADO	ONMAPS	OMMEB
CUARTO DE PRIMARIA	El Primer Lugar entre las DOS CATEGORÍAS DE CUARTO Y QUINTO GRADO DE PRIMARIA 1 ALUMNO	El Primer Lugar, el Segundo Lugar, el Tercer Lugar y el Cuarto Lugar entre las DOS CATEGORÍAS DE CUARTO GRADO Y QUINTO GRADO DE PRIMARIA. 4 ALUMNOS EQUIPO I
QUINTO DE PRIMARIA		
SEXTO DE PRIMARIA	El Primer Lugar de SEXTO GRADO DE PRIMARIA 1 ALUMNO	El Primer Lugar y el Segundo Lugar entre las DOS CATEGORÍAS DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA Y PRIMER GRADO DE SECUNDARIA 2 ALUMNOS EQUIPO II
PRIMERO DE SECUNDARIA	El Primer Lugar y el Segundo Lugar de PRIMER GRADO DE SECUNDARIA 2 ALUMNOS	
SEGUNDO DE SECUNDARIA	El Primer Lugar y el Segundo Lugar de SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA 2 ALUMNOS	El Primer Lugar y el Segundo Lugar de SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA 2 ALUMNOS EQUIPO II
TERCERO DE SECUNDARIA	El Primer Lugar y el Segundo Lugar de TERCER GRADO DE SECUNDARIA 2 ALUMNOS	
TOTAL	8 ALUMNOS	8 ALUMNOS

(Elaborada por ANPM, 2020).

Para el entrenamiento 'los olimpiquitos' se dividen en 3 grupos que son entrenados en salones independientes. A uno de ellos se incorporan los que cursan el cuarto y quinto de primaria, en otro los pertenecientes a sexto de primaria y primero de secundaria y en el tercero se entrenan los de segundo y tercero de secundaria. Las sesiones se vienen desarrollando a partir del 10 de enero y se extenderán hasta el 10 de abril alternando sus sedes cada fin de semana en horarios fijos. El calendario de entrenamientos programados para el preselectivo se muestra en la Tabla 30.

Por fines de nuestro Proyecto, se decidió poner bajo foco de las dinámicas implementadas por los entrenadores en el salón donde se entrenan a los adolescentes de segundo y tercero de secundaria. Los datos recopilados mediante las observaciones realizadas a partir de la sexta semana de entrenamientos se presentan íntegramente en los anexos 2 -11, organizado por semana de entrenamiento y sesiones desarrolladas en ellas. En el siguiente apartado se exponen las regularidades más significativas en estas observaciones.

Tabla 30.

Calendario de entrenamiento del preselectivo zacatecano para las olimpiadas nacionales de 2020.

CALENDARIO DE ENTRENAMIENTOS PRIMERA ETAPA DEL PRESELECTIVO ESTATAL DE MATEMÁTICAS RUMBO A LAS OLIMPIADAS NACIONALES DE MATEMÁTICAS 2020

NO.	ACTIVIDAD	LUGAR	FECHA	ESCUELA	PUNTO DE REFERENCIA	MTRO(A). RESPONSABLE
1	Entrenamiento de Nivelación SIN EXAMEN	ZACATECAS	10 y 11 enero	PRIMARIA BENITO JUÁREZ	CALLE PERPENDICULAR Y FRENTE AL ISSSTE, CALLEJÓN DE RUIZ ESQUINA CON AV. MORELOS	ALMA NELY IBARRA GARCÍA
2	Entrenamiento de Nivelación SIN EXAMEN	JEREZ	17 y 18 enero	ESC. SEC. GRAL. FRANCISCO GARCÍA SALINAS	CERCA DE CLÍNICA DEL ISSSTE EN LA COLONIA GUADALUPE	WALTER ERNESTO VERA MEDINA Y GUILLERMO RODRÍGUEZ CASTAÑÓN
3	Entrenamiento de Nivelación SIN EXAMEN	FRESNILLO	24 y 25 enero	COLEGIO CULTURA Y EDUCACIÓN DE FRESNILLO	BOULEVARD HOMBRES ILUSTRE, CENTRO	ROBERTO PACHECO MÉNDEZ
4	Entrenamiento y EXAMEN 1	GUADALUPE	31 enero y 01 febrero	INSTITUTO EDUCATIVO AMMADEUS	VIALIDAD VETA GRANDE 468, CERCA DE AVENIDA SOLIDARIDAD	SWHAIL JAZMINE PÉREZ MARTÍNEZ
5	Entrenamiento y EXAMEN 2	JEREZ	07 y 08 febrero	COLEGIO DANIEL MÁRQUEZ MEDINA	SALIDA A TLALTENANGO, COLONIA MODELO	IVÁN FLORES ESTRADA
6	Entrenamiento y EXAMEN 3	GUADALUPE	14 y 15 febrero	INSTITUTO MIGUEL AGUSTÍN PRO, IMAP	VIALIDAD ARROLLO DE LA PLATA RUMBO AL HOSPITAL DE LA MUJER	SUBDIRECTOR FRANCISCO
7	Entrenamiento y EXAMEN 4	ZACATECAS	21 y 22 febrero	ESC. SEC. TÉC. 34 FRANCISCO TENAMAXTLE	AV. JESÚS REYES HEROLES A UN COSTADO DE LA CENTRAL CAMIONERA	MIGUEL ÁNGEL SERRANO SÁNCHEZ
8	Entrenamiento y EXAMEN 5	JEREZ	28 y 29 febrero	PRIMARIA MARGARITA MAZA DE JUÁREZ	CARRETERA SALIDA A TLALTENANGO	ROSA ISELA GARCÍA DE LA TORRE
9	Entrenamiento y EXAMEN 6	GUADALUPE	06 y 07 marzo	INSTITUTO EDUCATIVO DE ZACATECAS, IEZ	CALZADA SOLIDARIDAD 1000 CERCA AL POLIDEPORTIVO	YUSELIM JUÁREZ RÍOS
10	Entrenamiento y EXAMEN 7	ZACATECAS	13 y 14 marzo	LICEO ESL GUADALUPE	FRENTE A SEDESOL - CFE BOULEVARD LÓPEZ MATEOS	BERNARDA JIMÉNEZ SANDOVAL
11	Entrenamiento y EXAMEN 8	JEREZ	20 y 21 marzo	PRIMARIA GENARO BORREGO ESTRADA	INFONAVIT EL CORTIJO A ESPALDAS DE COLONIA LAGUNITA	JULIA ESCAÑUELA ESTRADA
12	Entrenamiento y RESULTADOS	GUADALUPE	27 y 28 marzo	CEBAARE	FRENTE A LA ZONA MILITAR	JULIO CESAR DE SANTIAGO QUINTANAR
13	INTENSIVO	JEREZ	06 al 10 abril	ESC. SEC. GRAL. CONSTITUYENTES DE 1917	ATRÁS DE LOS PANTEONES MUNICIPALES	JOSÉ TISCAREÑO BERMÚDEZ

(Elaborado por ANPM, 2020).

4.2.1. Escenario general observado

Las observaciones realizadas se identifican ordinalmente desde el 6to hasta el 10mo entrenamiento, con un total de 10 sesiones observadas. Las mismas tuvieron lugar en las escuelas de alumnos preseleccionados participantes, de los municipios de Guadalupe, Jerez y Zacatecas. Estas se desarrollaron entre el 14 de febrero y el 14 de marzo de 2020, última fecha en la que se pudieron desarrollar los entrenamientos, suspendidos a causa de la contingencia sanitaria en el país por el azote de la pandemia de Covid-19.

Las actividades programadas para cada entrenamiento estuvieron concebidas para un total de 13 h, las cuales se distribuyeron entre los viernes y sábado, durante semanas consecutivas. El itinerario de trabajo determinó el inicio de las actividades para los viernes a las 3:00 pm, donde, a la llegada de los estudiantes, pasaban al comedor a disfrutar de la comida cortesía de la escuela anfitriona con el concurso de su consejo de padres de familia, a lo que seguía, hasta las 4:00 pm, la sana convivencia. Entre las 4:00 pm y las 8 pm se desarrollaron, invariablemente, las actividades centrales del entrenamiento para este día en los salones previstos por los administrativos del centro de estudios.

La dinámica para los sábados fijaba la entrada para las 8:00 am directo a los salones para iniciar los entrenamientos que se extendían hasta las 11:00 am, teniendo 1 h para comida y receso, en la que frecuentemente los alumnos y el entrenador, a solicitud de los primeros, se hacían partícipes de juegos de rol que estimulan las deducciones lógicas, de preferencia el conocido como "Asesino". A partir de la 12:00 m se incorporaban nuevamente a los salones para realizar el examen selectivo correspondiente a la semana de trabajo, por lo general compuesto de 3 problemas, culminando con esta actividad a las 3:00 pm.

La membresía de estudiantes del grupo de entrenamiento observado (segundo y tercero de secundaria) de manera formal estuvo constituida por 12 estudiantes, 6 de segundo y 6 de tercero, pero la asistencia a las sesiones en la mayoría de las ocasiones fue de 13 o 14 alumnos, ya que se incorporaron de forma permanente una estudiante de segundo de secundaria que participó en calidad de invitada y, un estudiante de quinto de primaria que por su alto desempeño estratégicamente se entrenó con este grupo, además, su padre de manera sistemática se insertaba en la dinámica del salón como se muestra en la figura 52.

Figura 52. Integrantes del preselectivo zacatecano y un padre en salón de entrenamientos.

Considerando la cantidad de estudiantes de secundaria convocados en este preselectivo estatal luego de haber sobrepasado todos los filtros establecidos desde la base y que, según los datos del ciclo escolar 2019-2020 publicados por la SEP[8] de Zacatecas, el curso inició en con una matrícula de 88143 estudiantes en este nivel educativo, puede decirse en cuanto a la prevalencia del talento participante que es de 1: 4639, lo que ubica a estos discentes siguiendo los niveles de Gagné entre los niveles 3 y 4 del desarrollo del talento, lo que equivale a decir que están entre las categorías de "altamente talentosos" y "extremadamente talentosos". Como entrenador principal de este grupo de discentes fungió el más experimentado entre los 6 entrenadores que de forma sistemática asumieron el entrenamiento del preselectivo estatal zacatecano.

[8] seduzac.gob.mx

Durante el proceso de las observaciones se pudo constatar que, por lo general, cada sesión de entrenamientos se enfoca hacia un tema matemático en particular, según la dosificación predeterminada por los entrenadores. Estos temas matemáticos son variados, pero a grandes rasgos se pueden clasificar en 3 categorías, recogidas en el formulario como indicativas del "módulo". La relación de estos con los temas respectivos tal cual fueron presentados por los entrenadores se recogen en la siguiente tabla 31:

Tabla 31.

Temas matemáticos tratados en los entrenamientos del preselectivo zacatecano que fueron observados.

Entrenamiento	Sesión	Módulo	Temas y contenidos
6to	1	Geometría	Cuadriláteros cíclicos.
	2	Geometría	RP de cuadriláteros cíclicos.
7mo	1	Teoría de números	Álgebra y teoría de números.
	2	Teoría de números	Álgebra y teoría de números. Continuación.
8vo	1	Combinatoria	Coloraciones.
	2	Combinatoria	Separadores.
9no	1	Geometría	Líneas y puntos notables en un triángulo.
	2	Geometría	Líneas y puntos notables en un triángulo. Continuación.
10mo	1	Geometría, Teoría de números, Combinatoria	Resolución de problemas variados.
	2	Geometría, Teoría de números, Combinatoria	Resolución de problemas variados.

(Elaboración propia).

Cabe señalar que al momento de la suspensión de los entrenamientos a causa de la referida contingencia ya se habían cubierto todos los temas previstos para el ciclo de entrenamientos del preselectivo rumbo a las olimpiadas nacionales de 2020, quedando pendiente la sistematización concebida para las siguientes sesiones, incluida la semana de entrenamiento intensivo pensada para los días comprendidos entre el 6 y el 10 de abril. Como alternativa, asegura Soriano (2020), que ante la posibilidad de que la ONMAPS (2020) se realice en el mes de septiembre de forma virtual o presencial, según la evolución de la pandemia, los preseleccionados continúan su entrenamiento en línea mediante clases virtuales a través de distintas plataformas en línea. En el propio post se añade la figura 53 que evidencia el desarrollo de la nueva estrategia para los entrenamientos. También es importante precisar que este escenario alternativo no se estudia en el Proyecto a causa del cumplimiento con los tiempos.

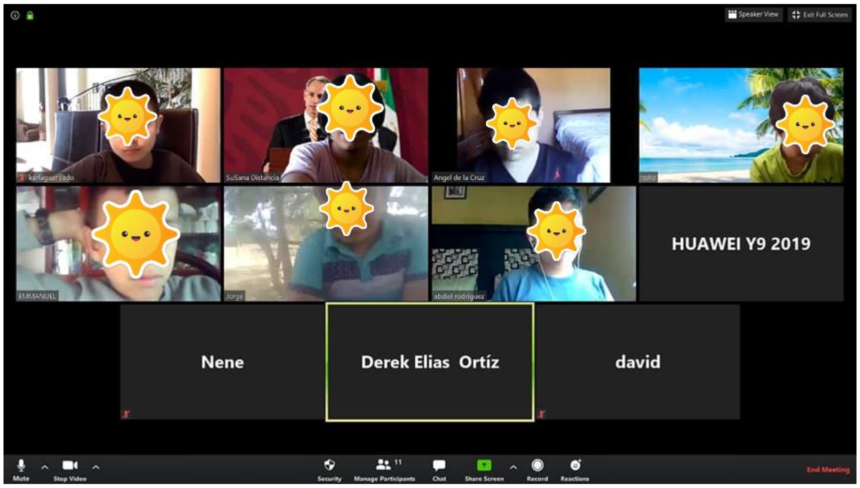


Figura 53. Entrenamiento alternativo del preselectivo zacatecano a partir de la emergencia sanitaria por Covid-2019.

4.2.2. Dinámica de los entrenamientos

En este apartado se pone bajo foco las dinámicas que caracterizan la actividad del entrenador. El centro lo constituye las cualidades de su planeación, organización y conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje al mediar la interacción de los estudiantes con el contenido durante los entrenamientos. En tal sentido, no es difícil definir regularidades, dado que, como se refirió anteriormente, el protagonismo estuvo marcado en un entrenador, presente en todos los entrenamientos, asumiendo todo el proceso en 8 de ellos y compartiendo el rol con otros colegas en los dos restantes. Como estaba previsto las regularidades detectadas en torno a cada uno de los aspectos puestos bajo foco en el marco de las observaciones realizadas se presentan seguidamente a modo de categorías.

a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento?

Tabla 32.

Categorías determinadas para el cuestionamiento a).

Trae textos específicos como guía para cubrir la teoría y/o con problemas seleccionados	Se vale de su experiencia y selecciona in situ los problemas que propone
6	4

Anotaciones representativas de estas categorías fueron las siguientes:

E_7S_1- *Una selección de problemas tomados del cuarto apartado de "Problemas Avanzados", perteneciente a la serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas; y de exámenes aplicados en competiciones de años anteriores en instancias estatales y nacionales.*

$E_{10}S_1$- *Selecciona y propone problemas de temas variados conforme se van resolviendo los anteriormente propuestos.*

Con relación a la planeación de los temas a tratar puede decirse que fue poco detallada y en ocasiones inexistente, ya que fundamentalmente trabaja desde los propios textos seleccionados, percibiéndose en más de una oportunidad, que la elección de los problemas propuestos fue realizada "en el momento". Las fuentes preferentes fueron la Serie de Cuadernos de Olimpiadas, que se presentan en la sección "Prepárate" de la página web de la OMM, en los apartados de "Nivel Estatal", "Nivel Nacional" y "Bibliografía Avanzada", según el tema a abordar, con la excepción de los contenidos relativos a la geometría, para los que el entrenador manifiesta su preferencia por lo expuesto en Jerónimo (2010). Con independencia de la planeación concebida, la cantidad de problemas a resolver en cada sesión siempre fue subordinada al ritmo de trabajo de los estudiantes.

b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento?

Tabla 33.

Categorías determinadas para el cuestionamiento b).

Introducción	Desarrollo		Conclusiones
Presenta o recuerda teoría y/o estrategia	Propone problemas	Se revisan los problemas	Retoma propiedades y/o estrategias importantes
8	10	9	2

Las categorías determinadas como acciones representativas del plan didáctico no son excluyentes y pueden verse representadas en las siguientes anotaciones:

E_6S_1- *Comienza recordando el contenido abordado en entrenamientos precedentes como recursos para el nuevo contenido.*

- Presenta la definición, propiedades y demostración de los cuadriláteros cíclicos según Jerónimo (2010).

- Propone problemas afines a la temática entre los que difiere el nivel de dificultad seleccionados de Jerónimo (2010). Los problemas se van revisando a nivel general luego de transcurrido un tiempo prudencial y de anotados en el pizarrón los nuevos problemas para resolver.

- Concluye retomando las propiedades de los cuadriláteros cíclicos.

E_6S_2- *La sesión se desarrolla como una continuación de la anterior. Esta queda limitada a la resolución de problemas con mayor grado de dificultad que giran en torno a la temática. Los problemas se anotaron en el pizarrón por pares y en la misma forma fueron revisados con protagonismo del entrenador.*

E_7S_2- *Propone problemas acompañados por ciertas pistas (hints, en el lenguaje utilizado tanto por el entrenador como por sus estudiantes).*

- Refiere analogías con otros problemas anteriores.

- Destaca propiedades implícitas en la situación dada.

- Generaliza dichas propiedades.

- Demuestra la generalización.

- Propone problemas análogos de los cuales se revisaron solo algunos de ellos.

- Resume aspectos relevantes del tema tratado en esta séptima semana de entrenamientos

La Tabla 33 deja ver que en las acciones que típicamente condujeron los entrenadores dentro de cada momento de los entrenamientos y cuyas cualidades estuvieron estrechamente ligadas a la forma en que se conciben en los textos tomados como referencia, el epicentro lo constituye la propuesta y resolución de problemas, lo que tiene total correspondencia con las ideas de Halmos (1980) recogidas en el Capítulo 2 de este Proyecto cuando plantea que "en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones". En este sentido se puede destacar que generalmente los problemas se propusieron por pares (unos 8 × sesión en total) e indistintamente se hicieron acompañar o no de ciertos hints para encaminar su proceso de resolución. En su revisión fundamentalmente el protagonismo recayó en la figura del entrenador, quien en general apostó por la atención diferenciada por puestos de trabajos a lo que seguía la revisión a nivel general como se muestra en la Figura 54:

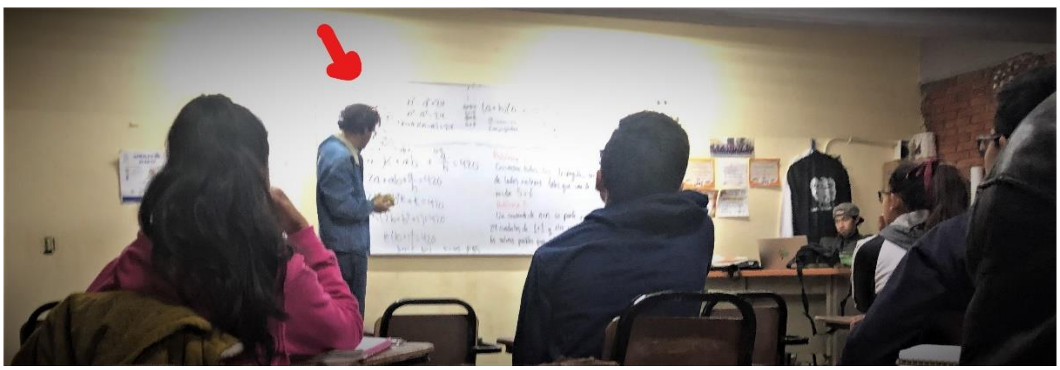


Figura 54. Forma predominante en la revisión de los problemas en los entrenamientos del preselectivo zacatecano.

Continuando con el análisis puede decirse que en el 80% de las sesiones observadas iniciaron con la introducción de la teoría y/o estrategia referente al tema, lo que no pocas veces también se hizo a partir del análisis de uno o varios problemas. Sólo en el 20% de los casos se pudo identificar un cierre formal articulado con lo visto en la sesión. Por lo general el tiempo previsto para su desarrollo fue aprovechado al máximo en función de la resolución de problemas, por lo que, con la revisión del último, se daba por concluida la sesión.

c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento?

Tabla 34.

Categorías determinadas para el cuestionamiento c).

No se presentan	Sólo el tema y/o el módulo	Aprendizajes esperados
1	7	2

Las categorías que se manifestaron se recogieron en la siguiente forma:

$E_{10}S_2$- *No se refiere ni el tema ni los propósitos de aprendizaje que se persiguen con la sesión. Se infiere que la misma es una continuación de la sesión de entrenamiento anterior.*

E_1S_1- *"Hoy vamos a trabajar con cuadriláteros cíclicos".*

E_7S_1- *Presenta el módulo como tema general, enfatizando seguidamente en que "el centro está en el trabajo con el binomio al cuadrado y con los binomios conjugados".*

Los aprendizajes esperados, vistos como las habilidades o capacidades que en función de las tipologías de problemas propias a la temática se deben promover para tener un buen desempeño en la Olimpiada, por lo general, no fueron declarados. En este aspecto la regularidad (70%) tuvo su expresión en que la orientación de los entrenadores se limitó al tema a tratar durante la sesión, incluyendo las ocasiones donde solamente se refirieron al área del saber matemático (módulo) en el que dicho tema se incluye.

d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)?

Tabla 35.

Categorías determinadas para el cuestionamiento d).

Música	Protagonismo estudiantil	Juegos	Tipo clase tradicional (flexible)
2	1	1	6

Se identificaron 3 tipos de estrategias motivacionales:

E_6S_1- *Se pasa una hoja donde los estudiantes anotan su canción de preferencia para escuchar, en un volumen moderado, mientras resuelven los problemas propuestos.*

E_8S_2- *Fomenta el protagonismo estudiantil en la revisión general de los problemas.*

$E_{10}S_1$- *A mitad del entrenamiento y durante 20 minutos, promueve y participa y en un juego de rol que favorece las deducciones lógicas, conocido de varias formas, entre ellas como el "Juego del Asesino".*

Sin incluir el empleo de materiales didácticos o el trabajo colaborativo; acciones estas que pueden tener, bien la finalidad desde su concepción, o bien la repercusión en la práctica, de elevar el grado de motivación de los estudiantes; se identificaron estrategias motivacionales en el 40% de las sesiones de entrenamientos observadas. No obstante, es muy importante señalar que a pesar de que la regularidad en el desarrollo de dichas sesiones fue un cierto parecido al tipo de clase tradicional, el entrenador irradió en todo momento el interés por la materia por el que abogara Pólya con el fin de no aburrir a toda la clase. Ello, unido al ambiente relajado imperante donde los estudiantes hacen bromas, conversan y retoman la concentración por sí solos, contribuyó a que los estudiantes mantuvieran de forma prácticamente invariable un alto grado de motivación y colaboración con el aprendizaje.

e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar?

Tabla 36.

Contenidos previos retomados por el entrenador.

Módulo	Sesión	Recursos	C/S
Geometría	E_6S_1	Ángulos entre paralelas Ángulos en polígonos Ángulos en circunferencias Semejanza y congruencia	4
	E_6S_2	Definición y propiedades de los cuadriláteros cíclicos.	
	E_9S_1 E_9S_2	Definición y propiedades de los triángulos y puntos notables.	
Teoría de Números	E_7S_1	Números primos Reglas de divisibilidad Productos notables/factorización $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	2
	E_7S_2	Propiedades tales como: Teorema fundamental de la aritmética $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a-b)\|(a^n - b^n)$ $(a+b)\|(a^n + b^n)$; para n-impar $(a^d - b^d)\|(a^n - b^n)$; para $d\|n$ $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$	
Combinatoria	E_8S_1	Coloración de ajedrez	2
	E_8S_2	Principio fundamental del conteo Expresión general de separadores que permite repartir N elementos en r subconjuntos $\binom{N+r-1}{r-1}$	

En la tabla 36 se han agrupado por áreas del conocimiento los recursos revitalizados de diversas formas y en distintos momentos de las sesiones de entrenamientos. En este sentido, puede recalcarse que en el 80% de las sesiones observadas los entrenadores implementaron en su práctica alguna estrategia para evocar los conocimientos previos necesarios para resolver los problemas propuestos (Figura 55) y sólo en las dos de ejercitación variada no se hicieron evidentes tales recordatorios. Hay que destacar que en la concepción de Schoenfeld (1985) los recursos juegan un papel determinante a la hora de resolver un determinado problema, afirmación que descansa sobre el precepto de que, si el individuo no cuenta con las herramientas necesarias para encontrar la solución, entonces, no va a funcionar.

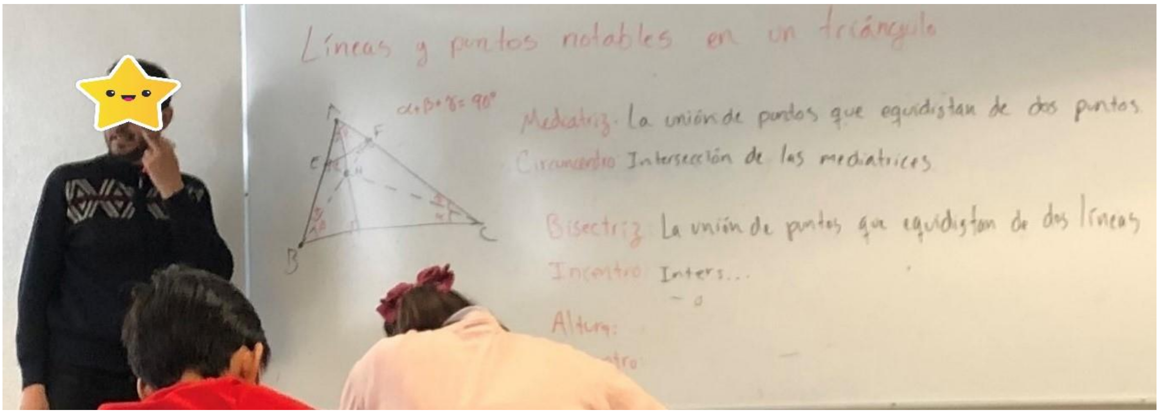


Figura 55. Imagen del entrenado retomando conocimientos previos.

f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo?

Tabla 37.

Categorías determinadas para el cuestionamiento f).

Trabajo en equipos	Trabajo independiente
7	3

Se implementaron los dos métodos de trabajo que se presentan en la tabla 37 con aristas diferenciadas:

E_6S_1- *Propicia la conformación de equipos (según preferencia de los alumnos) donde se elaboren planes para atacar y resolver la segunda mitad de los problemas propuestos en la sesión.*

E_6S_2 - *A mitad de la sesión y, ante las dificultades que hacen explícitas los estudiantes para resolver los problemas, forma dúos de trabajo (de forma dirigida) para que intercambien razonamientos que conlleven a la solución.*

E_7S_2 - *El entrenador asume el protagonismo en los primeros problemas del entrenamiento y ante problemas análogos, los olímpicos trabajan de forma independiente.*

En este punto la regularidad (70%) estuvo marcada por el desarrollo de sesiones cuyo método principal fue el trabajo en equipos. Como se muestra en los ejemplos presentados, la conformación de estos equipos fue en ocasiones dejada a la voluntad de los estudiantes por afinidad, pero debe decirse que la mayor parte de las veces esta se realizó de manera dirigida por el entrenador teniendo en cuenta las características psicopedagógicas de los discentes. De preferencia el aprendizaje colaborativo se organizó en parejas como se muestra en la figura 56.

Figura 56. Evidencia de trabajo colaborativo.

El aprendizaje colaborativo en pequeños grupos también es recomendado por Schoenfeld según refiere Barrantes (2006) como una actividad que puede desarrollar las habilidades para el control de las personas que aprenden a resolver problemas haciendo que cada uno pueda aprender sobre la forma en que los demás controlan su trabajo. En este marco también se favoreció la confrontación del pensamiento de los alumnos, la cual emergió constantemente de manera natural en el seno de cada dúo, elemento este deseable desde la perspectiva del INEE.

g) ¿Explica en qué consisten los problemas?

El énfasis realizado fue muy diverso incluso en una misma sesión para los distintos problemas propuestos. En tal sentido, las anotaciones se limitaron a registrar la tendencia general para la sesión observada. De esta forma los datos se pueden agrupar en las siguientes tres categorías:

Tabla 38.

Categorías determinadas para el cuestionamiento g).

No da explicaciones	Lee los problemas, esclarece vocabulario y notaciones implícitas.	Profundiza en el reconocimiento de la incógnita, los datos y la condición.
2	3	5

Como se puede inferir de la tabla 38 otro elemento concebido desde la teoría de la resolución de problemas que primó en el desarrollo de las sesiones es el énfasis realizado por los entrenadores en aras de la comprensión del enunciado. Cabe notar que en el 80% de las observaciones, para la mayor parte de los problemas presentados, se hizo algún tipo de aclaración con mayor o menor nivel de profundidad, y sólo en dos sesiones; una cuya dinámica estuvo marcada por la escritura en el pizarrón de los problemas por pares mientas los estudiantes resolvían los anteriormente propuestos, problemas que además no presentaban dificultades significativas de vocabulario o notación; y la otra, donde los entrenadores rotaron constantemente por el salón, no se percibió la actuación en correspondencia.

Tal proceder va en sintonía con las ideas de Schoenfeld (citadas en Barrantes, 2006) quien asegura que es muy importante cerciorarse si los estudiantes entienden el vocabulario utilizado en la redacción de un ejercicio o de un problema, y de Pólya (1989), para quien sólo la casualidad podría llevar al resultado a quien no ha comprendido el enunciado de un problema.

h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes?

De la misma forma que para el cuestionamiento anterior las anotaciones realizadas expresan generalidades dentro de las sesiones observadas ya que los niveles de ayuda dados ante los distintos problemas de una misma sesión no responden necesariamente a una misma categoría como se presentan a continuación:

Tabla 39.

Categorías determinadas para el cuestionamiento h).

Sin ayuda	Const. Figura	Tips/hints	Preguntas
1	2	4	5

Ejemplos de la expresión de estas categorías en los registros primarios en el campo se muestran a continuación:

E_7S_1- *Como apoyo a las explicaciones que da a algunos dúos de alumnos y en la revisión general del problema, por ejemplo:*

¿Qué punto notable cumple tal condición?

¿En qué razón se encuentran determinados segmentos?

¿Nos ayudaría encontrar triángulos semejantes?

E_8S_2 - *El entrenador no ofrece ningún nivel de ayuda*

$\mathrm{E}_{10}\mathrm{S}_2$ - *Los entrenadores presentan el problema acompañados de hints. Ejemplo:*

Problema 1 (hints: semejanza de triángulos).

Problema 4 (hints: principio de las casillas)

Problema 5 (hints: cambios de paridad).

En este punto se percibió un apego casi total (90%) a la metodología clásica de la resolución de problemas donde se plantea que el estudiante "redescubre" el conocimiento bajo la guía del profesor. Se debe destacar que la guía del entrenador fundamentalmente tuvo lugar al momento de la concepción del plan para atacar el problema, teniendo su principal manifestación en las preguntas reflexivas que de forma sistemática formulaba cuando los estudiantes, después de batallar un tiempo razonable, no lograron avanzar, o para invitarlos a evaluar el procedimiento que estos proponen. Otra tendencia marcada notoriamente en la intención de enrumbar el planteamiento de los alumnos fue el acompañar los problemas de determinados hints, indistintamente desde la propuesta del problema o, al igual que los cuestionamientos reflexivos, después de dejarlos pensar. De manera particular, ante problemas geométricos cuyo enunciado no se hacía acompañar de la correspondiente figura, en algunas ocasiones también la ayuda se proyectó en este sentido, esbozándole la figura que cumpliera con las relaciones dadas.

i) ¿Modela cómo se realizan los problemas?

Al presentar teoría/estrategias	En la revisión de los problemas	En ambos momentos
1	9	3

Tabla 40. Categorías determinadas para el cuestionamiento i).

En este punto se evidenció un total apego a la metodología teórica de la resolución de problemas que promueve que el profesor resuelva problemas como modelo y discuta las soluciones con el grupo de alumnos. Esta actividad se vio representada en las 10 sesiones de entrenamiento observadas, predominando (90%) al momento de la revisión general de los problemas, en 2 de ellas (E_7S_2 y E_8S_1) también se introdujo la estrategia clave para la tipología de problemas a través de un problema modelo. El único entrenamiento (E_8S_2) donde el entrenador no condujo la revisión general de algunos problemas (los modelos lo hicieron los alumnos en el pizarrón) también se había partido de un problema inicial como modelo para conectarlos con la teoría.

Un ejemplo de estos modelos de pensamiento presentado y discutido con los estudiantes se detalla en las observaciones generales del E_8S_1 en la siguiente forma:

E_8S_1- *El enfoque para introducir la temática de "Coloración" como estrategia para atacar algunos problemas de combinatoria se basa en su carácter sugestivo, ya que la asociación de colores (ejemplo: ciclos de 2, 3 o más colores, filas, columnas, diagonales, etc.) a los elementos del conjunto propicia una visualización del problema que no pocas veces contribuye a solucionarlo.*

Partiendo de esta idea se presentó, de forma parafraseada, la situación descrita por Engel, 1998, p. 25 relacionada con el tablero de ajedrez y las fichas de dominó. La esencia de esta introducción fue la siguiente:

Se ha demostrado que un tablero de ajedrez (8×8) *puede ser cubierto con fichas de dominó* (2×1) *de:* $2^4 \cdot 901^2 = 129888116$ *formas, ocupando cada ficha en todos los casos la región de dos casillas contiguas, lo que le hace corresponder a cada una de estas casillas de la ficha dominó colores distintos del tablero.*

Seguidamente:

Si se cortan las dos casillas de una misma diagonal, no es posible cubrir el tablero exactamente, es decir, sin que se sobresalga o se traslape una casilla de la ficha del dominó de ninguna manera. Lo anterior se explica sobre la base de que las "esquinas" cortadas tienen el *mismo color y, en consecuencia, de las 62 casillas que quedan, a 32 le correspondería un color y sólo a 30 el otro, por lo que de cualquier forma quedarían, como mínimo, dos casillas descubiertas, pero de un mismo color.*

j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo?

Los estudiantes tuvieron en todo momento la libertad de cometer errores que recomienda Pólya para crear un buen clima en el salón. En el tratamiento al error por parte del entrenador se realizó de diferentes formas, inclusive ante su detección en los problemas de una misma sesión, por lo que la cuantificación que se presenta también tiende a la generalidad. En este sentido en la tabla 41 se presenta la manifestación de la estrategia cuestionada con relación a la cantidad de sesiones que incluyeron problemas de cada uno de los módulos que son objeto de estudio.

Tabla 41.

Categorías determinadas para el cuestionamiento j).

Geometría	Teoría de número	Combinatoria
$^{0}/_{6}$	$^{2}/_{4}$	$^{1}/_{4}$

Como ejemplo de esta acción por parte del entrenador se puede citar el tratamiento dado a algunos planteamientos parcialmente ineficaces ante el siguiente problema:

E_7S_1- Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, ¿cuánto vale $a^3 + b^3$?

El entrenador detecta que la primera intención de los alumnos es la de relacionar las sumas conocidas a través de un sistema de ecuaciones y desarrolla en el pizarrón uno de estos procedimientos en la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 2 \\ \underline{(a+b)^2 = 1^2} \\ a^2 + b^2 = 2 \\ \underline{a^2 + b^2 = 1 - 2ab} \\ 2a^2 + 2b^2 = 3 - 2ab \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2(a^2 + b^2) = 3 - 2ab \\ 2 \cdot 2 = 3 - 2ab \\ 1 = -2ab \\ ab = -1/2 \end{array}$$

Explica que, aunque se obtiene una nueva relación que puede ser útil ($ab = -1/2$), esta se puede obtener de forma más simple, además no constituye un avance significativo dado que no se ha progresado en cuanto a la obtención de expresiones cúbicas

Esta acción de tomar las equivocaciones como modelo, es decir, escoger una estrategia que se sabe que no va a llevar a un término y ver en qué momento se decide que esa no permite seguir avanzando, es deseable desde la concepción de Schoenfeld (1985) para promover el control en los estudiantes. En este sentido puede decirse que por lo general el tratamiento al error se realizó de forma puntal con cada estudiante o equipo donde tuvo lugar, principalmente a través de preguntas reflexivas que invitan a evaluar el procedimiento empleado. La socialización del error a partir de su modelación a nivel general en el sentido de Schoenfeld tuvo mayor presencia en problemas de Teoría de números y combinatoria, ya que en geometría los equívocos estuvieron mayormente asociados a la inferencia de relaciones entre elementos sin realizar la correspondiente demostración (muchas veces rebatidas a partir de la presentación de contraejemplos o demostraciones por reducción al absurdo) y básicamente a la visualización, con la no ocurrencia de trazos auxiliares que facilitaran el camino.

k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?

Tabla 42.

Categorías determinadas para el cuestionamiento k).

<table>
<tr><th colspan="2">Sí</th><th rowspan="2">No</th></tr>
<tr><th>Profesor</th><th>Alumno</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
</table>

En la tabla 42 se muestra la presencia o ausencia de este recurso didáctico en el desarrollo de las sesiones observadas. El análisis en esta dirección es limitado dado que solamente en una ocasión el entrenador hizo gala de este apoyo deseable desde la visión del INEE en la mediación entre el contenido a tratar y los alumnos. La práctica fue desarrollada por el entrenador y tuvo la expresión que se seguidamente se presenta:

E_9S_1*-Demostraciones con material concreto (Triángulos en papel para demostrar propiedades de la mediana y el baricentro).*

Propiedades que se demuestran:
La mediana determina dos triángulos con la misma área.
El baricentro como centro de gravedad del triángulo.

Las hipótesis nuestras para explicar la exigua presencia de esta práctica van en la dirección de la formación no pedagógica del entrenador y, retomando nuestros antecedentes, Benavides & Maz-Machado (2012) plantean que estos estudiantes logran abstraer de una manera significativamente mejor que la media de los otros alumnos, razón en la que también puede descansar la forma en que el entrenador concibe la instrucción.

l) *¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos?*

Tabla 43.

Categorías determinadas para el cuestionamiento l).

<table>
<tr><th>Forma</th><th colspan="2">Escrita</th><th colspan="2">Oral</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Con el entrenador</td><td>Exámenes selectivos</td><td>4</td><td rowspan="2">Muestras de la aplicación de una buena estrategia (avances parciales)</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Soluciones de problemas desarrolladas en el cuaderno</td><td>10</td></tr>
<tr><td>En el colectivo</td><td colspan="3">Exposición de soluciones en el pizarrón</td><td>2</td></tr>
</table>

El entrenador gestionó evidencias de aprendizaje en el 100% de las sesiones observadas. El mecanismo más habitual fue el de pasar por los puestos de trabajo y constatar avances en el camino a la solución o una versión completa de la misma, escuchando la explicación de alumnos y pasándole la vista a sus anotaciones en los cuadernos. También, con principio en la voluntariedad, en 2 de las sesiones los alumnos presentaron sus estrategias de solución en plenaria en el pizarrón. Durante el período observado se aplicaron, como estaba previsto, los 4 instrumentos formales para evaluar el progreso en el aprendizaje, siendo constituidos los mismos por 3 problemas para resolver en un máximo de 3h. Las principales dificultades y logros manifiestos en estos exámenes escritos por lo general se socializaron en el entrenamiento siguiente.

m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)?

Tabla 44.

Estrategias heurísticas gestionadas por el entrenador.

Geometría	Teoría de números	Combinatoria
Hacer dibujos: -Prolongar segmentos. -Trazar perpendiculares o paralelas. -Trazar circunferencias. -Trazar tangentes y cuerdas comunes. -Trazar líneas y puntos notables. Argumentar por contradicción (reducción al absurdo).	Escoger la notación efectiva: -Notaciones específicas: ejemplo N.º primo >3 = 6k±1 Manipular algebraicamente: -El uso de los productos notables. -Factorización de trinomios cuadrados perfectos. -Transformación de potencias. Perseguir la paridad y residuos. Dividir en casos Generalizar	Hacer una coloración de ajedrez. -Hacer uso del principio de Casillas, paridad o invarianza (algo que no cambia). Dividir en casos Considerar casos extremos y argumentar por contradicción -Hacer una coloración de acuerdo con el peor de los casos o intentar de llegar a lo contrario a lo que pide el problema (llegar a una contradicción). Utilizar separadores (combinaciones con repetición).

En este punto se pudo constatar que la soluciones de prácticamente todos los problemas que fueron propuestos en los entrenamientos, con independencia de a qué área del saber matemático pertenecieran, estuvieron permeadas por la utilización de las estrategias generales presentadas en la tabla 44 para allanar el camino a la solución. En todo momento los entrenadores evidenciaron que el éxito en el proceso de resolución por lo general no depende la aplicación aislada de una de ellas, sino de su combinación e integración consecuente y juiciosa, con base en la intuición que desarrolla la práctica.

El comportamiento observado en este tenor va de la mano también con los principios teóricos metodológicos que promueven los clásicos de en la investigación educativa de la resolución de problemas quienes abogan por la familiarización con estas operaciones típicamente útiles para este proceso, sin imponer, sin lacerar la libertad de pensar por sí mismos y de elegir su propio método de resolución.

n) ¿Cómo?

Se apuesta a la construcción de suficientes analogías para tener un buen desempeño sobre la base de experiencias propias del alumno resolviendo problemas y de su observación del cómo otros lo hacen, incluyendo a los compañeros y entrenadores. El detonante para concientizar su razón de uso fue la ganancia implícita: vencer un obstáculo que no les permite seguir avanzando o proporcionar mayor economía en los procedimientos.

En la práctica los métodos principales utilizados por los entrenadores para gestionar su utilización fueron la ejemplificación de las estrategias utilizando problemas análogos y las sugerencias directas a manera de hints. Ejemplos de estas sugerencias del entrenador asociadas a la estrategia general de *hacer un dibujo* fueron las siguientes:

E_6S_1-*Al prolongar ciertos segmentos encuentran algunos detalles que facilitan la solución del problema ya que se relacionan nuevos ángulos y se determinan polígonos cuyas propiedades se usan o demuestran.*

Trazar una perpendicular o una paralela a algún segmento para obtener triángulos que poseen propiedades útiles en la entre solución del problema.

Trazar circunferencias circunscritas a determinados polígonos conociendo que son cíclicos para evidenciar relaciones entre estas los ángulos.

Ante dos circunferencias tangentes, ya sea la tangencia interior o exterior, trazar la línea tangente a las dos circunferencias la cual pasa por el punto común de ellas y siempre que se tengan dos circunferencias tangentes se debe considerar la cuerda común.

La construcción de la figura de análisis en cada problema debe hacerse lo más correcta posible con relación a los datos y del tamaño adecuado (más bien grande), ya que la información visual que se percibe puede proporcionar pistas útiles.

Finalmente, en la figura 57 se presenta un gráfico que relaciona las frecuencias porcentuales (atendiendo a las generalidades descritas) de la mayoría de las acciones cuestionadas y en cierto grado cuantificables en los datos registrados a lo largo de todo el proceso de observación, excluyendo sólo aquellas netamente cualitativas cuyo foco estuvo en la descripción o caracterización de algunas de estas acciones, específicamente los cuestionamientos b) (ED) y n) (CGE). En dicha gráfica también se puede ver, gracias a la distinción cromática, los elementos del formato de observación que de alguna manera se promueven o caracterizan desde la teoría de la RP expuesta en el epígrafe 2.2 de este Proyecto.

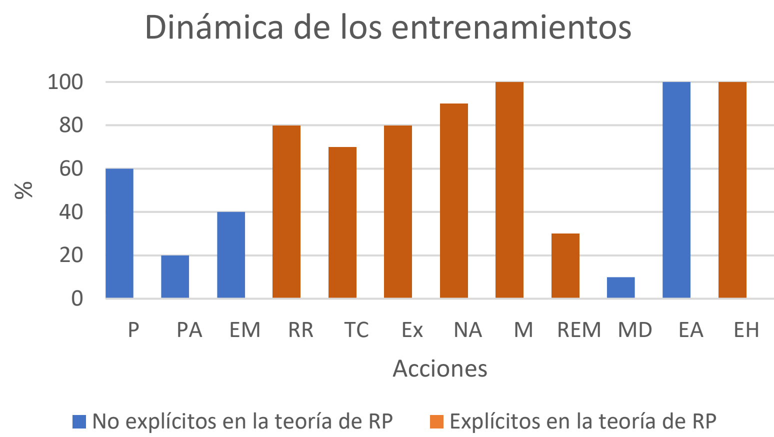


Figura 57. Dinámica de los entrenamientos.

Un golpe de vista a este gráfico permite reconocer que de las acciones seleccionadas del formato original con los elementos del INEE, tuvieron porcentajes de frecuencia más elevados en el exitoso *contexto* de aprendizaje de este proceso de desarrollo estudiado, aquellos que se incluyen en los lineamientos teóricos clásicos de la RP. Ello nos permite reafirmar qué acciones son consideradas claves por los entrenadores y, por tanto, pueden ser dignas de réplica en el marco de la transposición didáctica para la enseñanza de la RP retadores en el contexto escolar, como recurso de atención a estudiantes con aptitudes sobresalientes.

4.3 Criterios de un entrenador

Seguidamente se presenta el conjunto de preguntas y las respuestas correspondientes dadas por el director y entrenador principal de CARMA cuya sede, como se ha referido anteriormente se encuentra ubicada en el estado de San Luis Potosí y quien también ocupa la responsabilidad de delegado de la OMM en dicha entidad federativa. La intención primordial es la de complementar la información recopilada desde los campos observados, a la vez que permite la triangulación, comprobando la validez de los datos obtenidos a partir de la noción de convergencia.

Estado: San Luis Potosí **Municipio:** San Luis Potosí

Nombre del Entrenador(a): Eugenio Daniel Flores Alatorre

Formación Académica: Lic. Matemática Educativa

Experiencia como competidor(a): 2 años.

Experiencia como entrenador(a): 16 años.

1- ¿Qué temas matemáticos (a nivel general) considera indispensables dentro de los entrenamientos a participantes en Olimpiadas Matemáticas de la Educación Secundaria? Escríbalos en el orden en que los abordaría y exponga algunas ideas acerca del por qué el orden que propone.

Anexo los temarios de los entrenamientos de verano la OMM en San Luis Potosí y el temario de la OMM en Tamaulipas. (Anexos 12 y 13 respectivamente).

2- ¿Cómo estructura (si lo hace) la planeación de la sesión de entrenamiento?

Normalmente intento que incluya (1) Calentamiento, (2) Ejercicios de motivación, (3) Exposición, (4) Problemas (5) Puesta en común, pensando en sesiones de entrenamiento intensivo de 5 horas, con un par de recesos. La parte central es la lista de problemas que debería poder funcionar como material autodidacta.

Durante el Calentamiento (opcional) vemos acertijos o juegos no necesariamente relacionados con el tema. La intención es despertar, empezar en ritmo y posponer el inicio de la sesión hasta que estén todas las y los participantes. Los Ejercicios de Motivación se entregan sin mucha descripción; la idea es que nos permitan acercarnos a la idea que vamos a trabajar. Alterno entre material impreso y escribir en el pizarrón pues cada una tiene sus ventajas (ahorrar tiempo vs la lectura previa que supone la transcripción), hay tiempo de trabajo individual con pistas, seguido de una puesta en común.

La parte de la Exposición consiste en presentar el tema central de la sesión: una herramienta, un concepto, una estrategia. Según el caso, se pueden incluir anécdotas históricas, evolución, demostración y ejemplificar su aplicación con un par de ejercicios, mostrando su alcance y límites.

Finalmente, una lista de Problemas a resolver de manera individual, pero sin limitar la comunicación entre participantes. El espacio de trabajo tiende a ser muy abierto y no muy estructurado, anteponiendo la comodidad colectiva. Este tiempo de trabajo se puede intercalar con pistas, tips, observaciones o correcciones según se crea necesario. Al final, los participantes exponen los problemas que hayan resuelto. Hay problemas que se pueden dejar sin exponer, otros tienen que exponerse porque muestran ideas o estrategias que serán muy importantes más adelante.

En todo momento se resuelven dudas y al final se hace una recapitulación. Es posible que la sesión termine extendiéndose en otros momentos.

3- ¿Qué criterios toma en cuenta para la selección de los problemas que trabajará durante la sesión de entrenamiento?

Hay varios problemas clásicos que repito cada vez que imparto la misma sesión por considerar que son muy representativos y útiles. En general, los problemas van de la aplicación directa de la herramienta o concepto, a problemas en donde es solo un paso en la solución y ya no el centro.

Sin embargo, es muy importante actualizar la lista de problemas y al menos darle una revisión anual -pensando que en general es un proceso anual cíclico- porque en el corazón de la Olimpiada está enfrentarse a problemas nunca vistos, de modo que todo el tiempo se generan problemas nuevos.

4- ¿Qué tipo de actividades recomendaría trabajar con los alumnos que se inician (novatos) en el contexto de las Olimpiadas Matemáticas dentro de la Educación Secundaria?

Acertijos, juegos de lógica como Sudoku, Bridges, Skyscrappers, Numberlink, Slitherlink, etcétera. Actividades parecidas a las que se hacen en divulgación de las matemáticas. Finalmente, problemas introductorios como los que aparecen en exámenes de primeras etapas.

5- ¿Cuál es la dinámica de trabajo que suele emplear en los entrenamientos? Si en ella distingue momentos (inicio-desarrollo-cierre) realice una breve descripción de las acciones que los caracterizan, si no, hágalo a nivel general.

Ver respuesta a pregunta 2.

6- ¿Cómo motiva (acciones) al grupo de alumnos que participa en los entrenamientos?

Depende. Hay distintos tipos de entrenamiento en distintos momentos. En los entrenamientos más largos y estructurados, es en general un grupo que ya tiene una motivación propia para estar ahí y trabajar, lo que hay que hacer es "romper el hielo" que les permita ganar confianza para participar y hacer preguntas. Hay distintas actividades de integración, además de las básicas de presentación, pero casi todas están en función del juego o el deporte. Nadie que no tenga su propia motivación (aprender cosas nuevas, pasar el verano, ganar una competencia) llega muy lejos en la Olimpiada y es difícil que las y los entrenadores la provean, más allá de presentar las oportunidades que se pueden abrir derivadas de la Olimpiada.

7- ¿Cómo promover desde el entrenamiento el empleo de estrategias heurísticas clave, "de uso recurrente", en el proceso de solución de tipologías de problemas relacionados con temas matemáticos específicos? (Sea para el diseño del plan para atacar un problema, la ejecución de este o cualquier otra fase del proceso de solución). Ejemplifique con un caso.

No respondió.

8- ¿Cómo evalúa el desarrollo del aprendizaje de los alumnos que entrena?

A partir de preguntas directas o los ejercicios que logran resolver; cada sesión es necesario reconocer si hubo dudas que hay que atender y sobre la marcha es necesario recalibrar las explicaciones, ofrecer mejores ejemplos o contraejemplos. Los "exámenes" dentro de la Olimpiada no tienen, por lo general, una función de evaluación del aprendizaje en el mismo sentido que un partido de fútbol en un torneo de eliminación directa no lo tiene tampoco: evidentemente puedes aprender y recibir retroalimentación, pero no es la razón por la que tomas el examen.

9- Desde su perspectiva sobre el talento matemático, este ¿nace o se hace?

Una mezcla. Nadie nace sabiendo matemáticas; las matemáticas se aprenden, no tengo duda. Los muy complejos resultados y teoremas que se ven en la Olimpiada se aprenden. Sin embargo, sí creo que hay personas con ciertas habilidades especiales que son difíciles de explicar de otra manera: no tiene que ser un "talento" especial, puede ser simplemente una dedicación, una capacidad extra para concentrarse o para dedicar tiempo y trabajar.

10- ¿Considera que este tipo de trabajo (RP de Olimpiadas) favorece el desarrollo del talento matemático? ¿Por qué?

Sí. Hay mucha gente que llegará a ser matemático, ingeniero o científico muy exitoso sin haber conocido la Olimpiada, y muchos que lo son y no le encuentran necesidad. Pero sí creo que la Olimpiada es muy valiosa en su búsqueda y captación de estudiantes jóvenes que disfrutan y destacan en la matemática, y en su preparación, formación y presentación de un panorama más amplio de éstas –sobre todo si se separa de la parte que es meramente un concurso.

11- ¿Qué diferencias aprecia entre la enseñanza tradicional de matemáticas y los entrenamientos de olimpiada (contestar ya sea desde su experiencia como docente, o bien, como estudiante)?

Creo que la mayor diferencia va en que en la Olimpiada se trabaja con grupos reducidos de estudiantes que desean estar ahí para aprender más. Esta es la principal diferencia con el aula, además de que se trata de un escenario no formal en donde la presión es muy distinta. Fuera de eso, creo que la Olimpiada tiene grupos muy heterogéneos en nivel, pero tiene una mayor disposición de sus participantes de continuar su preparación de manera individual. Además, las y los entrenadores de Olimpiada suelen ser personas muy preparadas que disfrutan de compartir lo que han aprendido, y si bien normalmente no reciben una compensación, tienen muy pocas presiones institucionales dentro de la Olimpiada.

12- ¿Ha trabajado/trabaja como docente en la enseñanza secundaria? ¿Desde su concepción cree que sea conveniente trabajar algunos problemas de niveles introductorios de olimpiadas en las clases de manera regular?

Sí. Sí, si el tiempo lo permite, como retos adicionales y opcionales.

4.3.1 Criterios del entrenador v_s realidad observada

En los documentos que adjunta el entrenador encuestado (Anexos 12 y 13) para referir los temas matemáticos que considera indispensables dentro de los entrenamientos a participantes en Olimpiadas Matemáticas de la Educación Secundaria, se pudo constatar que los mismos son muy amplios y diversos, incluso, más que los abordados en el CEOM y en los entrenamientos del preselectivo zacatecano. De la misma forma que en estos dos escenarios, los temas se agrupan por áreas del saber matemático, pero a diferencia de los anteriores, en dichos temarios se presenta el área del álgebra como un módulo de estudio independiente a la teoría de números. Cabe señalar también que todos los contenidos abordados por los entrenadores en los dos escenarios observados están implícitos en los temarios anexados. Presumiblemente, el mayor alcance en cuanto a contenidos a tratar que en estos documentos obedece a que son temarios de entrenamiento para la OMM, donde tienen participación los alumnos de tercero de secundaria, pero el centro lo constituye los adolescentes de preparatoria.

Este experimentado entrenador también nos hace ver que la dinámica de un entrenamiento es muy flexible dado que tienen muy pocas presiones institucionales por ser un contexto menos formal, y puede ser muy variada atendiendo al momento en que se desarrolle. En esencia, aunque refiere estructuras didácticas más ricas, quizás debido a su formación pedagógica y experiencia docente, la línea central de los momentos que considera coincide con la regularidad observada durante el proceso de entrenamientos del preselectivo zacatecano.

Esta línea central que constituye la columna vertebral del entrenamiento el entrenador encuestado la ve en tres momentos: exposición, problemas y puesta en común. Con el primero se refiere a la presentación de la teoría (herramienta, concepto, estrategia) a abordar en el entrenamiento. Esto se hizo evidente también sobre todo en los inicios de la mayor parte de las sesiones observadas, donde el entrenador a cargo, o bien recordaba directamente elementos teóricos necesarios (recursos) en la solución de los problemas a trabajar, o partía del análisis de un problema modelo para ejemplificar dicha teoría.

El momento de resolver la lista de problemas es reconocido por el entrenador como el punto medular del entrenamiento, añadiendo además que los problemas deben poder funcionar como material autodidacta. En sus concepciones en torno al desarrollo de este momento también se encuentran convergencias importantes con la realidad observada. Por ejemplo, ambas fuentes de información se hacen eco de no limitar la comunicación entre los participantes, imperando un ambiente de trabajo flexible y placentero. Otra coincidencia radica en la posibilidad de ofrecer niveles de ayuda durante el proceso de resolución de los problemas, llámense tips, hints, pistas, observaciones, correcciones, etc., según se requiera.

La denominada puesta en común alude a la socialización de las soluciones y aquí también se hacen evidentes las intersecciones entre lo teórico y lo visto a nivel práctico. Desde ambas perspectivas se manifiesta que no necesariamente todos los problemas deben ser expuestos, el criterio de selección que refiere el entrenador encuestado es la medida en que el problema muestre una idea o estrategia de suma importancia para problemas posteriores. De la misma forma este entrenador asume la postura de que sean los estudiantes quienes expongan los problemas que hayan resuelto y en este sentido debe decirse que esta idea primó en la práctica observada a nivel individual, por puestos de trabajo, pero como generalidad, la exposición en plenaria de soluciones tuvo el protagonismo de los entrenadores.

Otros criterios del especialista dan fundamento explicativo del "por qué" la práctica observada tuvo tales regularidades. Un ejemplo de ellos nos permite entender la opcionalidad de la implementación de apartados o estrategias motivacionales dentro de la configuración de un entrenamiento. En este sentido el entrenador deja ver que tales acciones por lo general están ligadas a algún juego o deporte y su finalidad es la de integrar más al grupo, de tal forma que los integrantes se sientan más cómodos para participar y hacer preguntas. Por ello, concibe estas acciones como deseables en las primeras instancias, pero para un grupo de entrenamiento consolidado como fue el caso del observado, no son del todo imprescindibles porque estos alumnos ya tienen la experiencia y un alto grado de motivación para estar allí. Lo anterior explica por qué, a pesar de que como generalidad no se percibieron estrategias orientadas con este fin, los estudiantes en todo momento hicieron gala de deseos y consagración al trabajo.

Con relación a la obtención de evidencias de aprendizaje las fuentes manifestaron la importancia de reconocer y atender las dudas que puedan emerger en cada sesión. En la práctica estos procesos tuvieron lugar principalmente a través de la constatación, por puestos de trabajo, de soluciones o avances a parciales en el proceso. El experto consultado añade además que para evacuar dichas dudas se deben ofrecer mejores ejemplos y contraejemplos, recalibrando las explicaciones en general. De la misma forma esclarece que la función primordial de los exámenes de olimpiadas no radica en evaluar los aprendizajes, sino en su carácter competitivo. Estos exámenes también se hicieron presente en el marco de los entrenamientos observados corroborando esta idea, ya que, sobre todas las cosas, el desempeño de los estudiantes en el mismo era medido con fines eliminatorios, en aras de conformar la selección zacatecana que tomaría lugar en las instancias nacionales.

Por otra parte, la concepción del experto preparador para olimpiadas matemáticas respecto a la explicación del talento, no desentona de la postura del MDDT de Gagné asumida en este Proyecto. En tal sentido reconoce la existencia en los olímpicos de lo que denomina habilidades especiales, aludiendo al componente de las capacidades naturales del modelo. Aclara también que desde su perspectiva no tienen que ser dones intelectuales con un alto grado de expresión, ya que estos pueden suplirse a golpe de dedicación, con lo que se infiere la importancia que le concede a los catalizadores intrapersonales y especialmente a aquellos que tienen que ver con el manejo de los objetivos para el éxito del estudiante. Desde su enfoque cualifica las olimpiadas matemáticas como muy valiosas en la identificación de estudiantes con aptitudes sobresalientes para la disciplina y como contexto del proceso de desarrollo, aunque también deja ver que se puede desarrollar el talento sin sentir la necesidad de insertarse en ellas.

En cuanto a su parecer en torno a la utilización de los problemas introductorios de olimpiadas como parte del contenido a tratar en las clases de la enseñanza regular, señala la limitación en este escenario del factor tiempo, pero lo sugiere como retos adicionales y opcionales. A partir de su experiencia en ambos contextos, clase regular y entrenamiento de olimpiadas, reconoce las principales diferencias en la cantidad de alumnos a atender, la presión institucional sobre el profesor/entrenador, y en el mayor grado de disposición para el trabajo que manifiestan los estudiantes que se entrenan. De la misma forma señala una coincidencia cuando refiere que en los entrenamientos también hay grupos con un nivel muy heterogéneo.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1 Retomando los objetivos

La literatura consultada con relación a las dinámicas escolares en torno a los alumnos con aptitudes sobresalientes para la Matemática en el desarrollo de este Proyecto de Desarrollo Profesional nos permitió constatar que no abundan las propuestas de intervención con acciones concretas orientadas hacia la potencialización de sus capacidades naturales. En este tenor, dado que la mayor parte de los estudios señalan a la RP retadores como una opción viable para tal fin, principio que abraza la SEP como enfoque didáctico para la enseñanza de la disciplina en el nivel secundario de enseñanza y las olimpiadas de matemáticas constituyen el manantial natural de estos objetos matemáticos, con abundante material de fácil acceso; nuestro Proyecto se orientó hacia el objetivo primordial de "Identificar aspectos de las olimpiadas matemáticas como *actividad* transformadora de las altas capacidades naturales intelectuales y creativas en talento matemático".

Entre los aspectos que pudimos identificar pueden mencionarse que las competiciones matemáticas en México para el nivel básico son eventos que gozan de mucha popularidad. Hoy día existe una importante cantidad de estos certámenes que movilizan a miles de estudiantes, profesores, entrenadores, familias e instituciones de todo el país durante la mayor parte del año. Hacia el interior de lo estrictamente competitivo, con cada uno de estos eventos se persigue estimular el estudio de la Matemática y desarrollar talentos en esta ciencia, a la vez que ayudan a mejorar la práctica docente, apoyando la renovación y la innovación en la forma de hacer matemáticas.

La constante renovación e innovación en la forma de hacer matemáticas es inherente a las olimpiadas dado que sus tiempos de convocatoria son cíclicos, con etapas que van filtrando el talento longitudinalmente. Además, previendo que buena parte de los estudiantes con aptitudes sobresalientes que prueban el néctar de estas competiciones tienen participación en varios ciclos que consecuentemente se convierten en procesos de desarrollo del talento matemático y, en razón de que el corazón de la Olimpiada está enfrentarse a problemas nunca vistos, todo el tiempo se generan problemas nuevos que pueden ser reusados en clases y en otras actividades escolares tipo talleres o círculos de interés como alternativa de enriquecimiento al currículo de los alumnos con dones académicos naturales, evitando así la mecanización y la repetición que conlleva a su aburrimiento.

Adentrándonos con mayor profundidad, para la identificación de tales aspectos, profundizamos en el estudio de las categorías más importantes que permean la efectividad de las actividades de aprendizaje y práctica, médula espinal de los procesos de desarrollo que se definen desde el MDDT: los problemas propuestos en las competiciones matemáticas de la enseñanza secundaria (Contenido) y el proceso de enseñanza-aprendizaje en el entrenamiento de los estudiantes olímpicos (Contexto de enseñanza).

5.1.1 Respecto al contenido

La revisión del contenido matemático tradicionalmente exaltado en el marco de las olimpiadas matemáticas se centró, principalmente, en el análisis de la abundante información compartida desde la segunda edición del CEOM impartido por CARMA, puesto que el mismo estuvo concebido para un nivel intermedio, según el experto entrenador. El foco de este curso estuvo en el trabajo alrededor de conceptos, herramientas y estrategias necesarias para la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas con un enfoque teórico-práctico muy propio de la enseñanza de las matemáticas.

De esta forma se pudo corroborar que el contenido matemático en torno a los problemas olímpicos es muy amplio y variado, pero, incluso mirando más allá de la propuesta del curso, se hizo evidente la tendencia a agruparlos en tres categorías, siendo éstas: la Geometría, la Teoría de Números y la Teoría Combinatoria. Cabe señalar también que no se excluye la presencia de nociones de Álgebra, sin llegar a requerir de procedimientos rigurosos, sus aplicaciones se manifiestan, principalmente, como colofón de la implementación de reglas determinadas desde los tres campos referidos, más que en sus propias reglas.

Dentro de cada uno de estos campos o áreas del saber matemático se pueden encontrar problemas que pueden ser muy diversos, pero que se pueden asociar debido a que giran en torno a un tema, una idea o una estrategia en particular. Sobre los temas o contenidos específicos en los que descansan estos problemas puede decirse que, de manera general, por lo menos en los niveles introductorios e intermedios de las olimpiadas, no van más allá de lo que se norma desde el currículo general de la enseñanza para este nivel educativo, por lo que la teoría vista desde el aula regular construye los recursos necesarios para atacar estos problemas.

No obstante, dada la naturaleza retadora de estos problemas se pudo experimentar cómo, teniendo posesión de estos recursos necesarios, muchas veces resultaron insuficientes para encontrar caminos de solución. En la medida en que se fue incrementando la productividad de los análisis de problemas y soluciones, se fue enraizando la concepción de que la capacidad de movilizar estos recursos va de la mano con el grado de familiarización que se tenga con las distintas tipologías de problemas.

El entrenamiento como actividad de aprendizaje y práctica proporciona el complemento a los recursos cuando éstos no son suficientes para resolver los problemas. En este sentido, hay que distinguir que el contenido teórico matemático está presente en el aula regular, pero con enfoques generalmente estáticos, más directos y transparentes, con preponderancia de usos reproductivos y/o aplicativos. Las olimpiadas por su parte constituyen el hábitat natural de los retos matemáticos. En general, los problemas van de la aplicación directa de la herramienta o concepto, a problemas en donde es solo un paso en la solución y ya no el centro, pero cada uno de ellos supone una auténtica dificultad que desafía el ingenio, la creatividad y la capacidad de razonamiento.

La clave para el éxito está en el desarrollo de lo que los entrenadores llaman intuición, que no es más que hacerse de un arsenal voluminoso y concienciado de experiencias previas propias o ajenas ante problemas análogos. Por ello, nuestro análisis nos lleva a apreciar la creatividad y el ingenio como algo contextual ya que, si se resuelve por segunda ocasión algún problema o, incluso un problema similar, el elemento sorpresa e impredecible se pierde con la repetición. También la buena idea creativa se imita y, eventualmente, deja de parecer original.

Existe un gran cúmulo de estrategias generales ingeniosas que pueden ser útiles en el ataque de muchos tipos de problemas que por caminos más convencionales presuponen procedimientos engorrosos o no permiten avanzar. Aunque, como se mencionó anteriormente, la construcción de analogías abre el espectro de posibilidades, de variantes de ataque y "afina los sentidos" que prenden la chispa con relación al camino a tomar, en ninguna medida se puede pretender que tales estrategias puedan ser reproducidas como algoritmos mecánicos y rígidos. Ello está dado en que los problemas de olimpiadas son formulados y seleccionados de manera que no sea claro o evidente el camino a seguir para que el resolutor tenga la necesidad de pensar y explorar, diseñar su propia estrategia de ataque o readaptar una estrategia conocida para aplicarla a la nueva situación. Varias de estas estrategias típicamente útiles fueron ejemplificadas asociadas a cada uno de los temas analizados en el Capítulo 4 de este Proyecto.

En las aulas regulares hay muchos estudiantes que se sienten atraídos por la matemática, que tienen capacidades naturales para entenderla, para concentrarse y dedicarse y, sin embargo, por diversas razones no se insertan dentro de las actividades de las olimpiadas, por lo que se acota su conocimiento a la manera tradicional en que se interpreta el plan de estudios, con énfasis en las propuestas generalizadas contenidas en los libros de texto. Para la inclusión efectiva de los sobresalientes en esta disciplina hay que salirse de ese esquema.

En general, el contenido en los problemas de olimpiada no está disociado del aula regular, incluso tiene lugar a partir de una visión menos centralizada y esquemática dentro de la propuesta sugerida desde los documentos normativos para la enseñanza secundaria general, las diferencias más significativas se manifiestan en el enfoque con el que se presenta el contenido y, en correspondencia, con la forma de interacción que presuponen. Con lo anterior se quiere decir que la práctica sistemática de proponer problemas introductorios e intermedios en la escuela no implica la aceleración en el ritmo de los contenidos, sino una estrategia para enriquecer y transformar la capacidad en desempeño, a la vez esta forma desafiante de hacer matemáticas puede dar lugar a que se manifiesten habilidades naturales en estudiantes no identificados.

Esta línea de trabajo pensada en razón de proporcionar un camino de desarrollo práctico para el talento matemático desde la clase, no excluye que la propuesta pueda llegar a alumnos de rendimiento promedio e inclusive, a aquellos cuyas calificaciones oscilan por rangos más bajos, téngase en cuenta que las altas o bajas calificaciones no son directamente proporcionales al potencial del alumno, pero, en cualquier caso, el contenido de la olimpiada sirve para atraerlos e intentar enamorarlos hacia la Matemática. En este sentido cabe señalar que el vehículo para construir el conocimiento en la olimpiada no es exclusivamente la lucha productiva del estudiante con un problema formal, ya que también existe abundante material de juegos y acertijos lógicos atractivos y motivadores que desarrollan habilidades importantes de manera autodidacta.

Una de las ideas principales dentro de las que motivaron el desarrollo de este proyecto y el tipo de estrategia de intervención educativa que en sí se promueve fue su carácter práctico de implementación, dada la accesibilidad que tiene el docente a amplias colecciones de materiales muchas veces ya clasificados u organizados secuencialmente por nivel de dificultad, temas, estrategias o alguna idea en particular. Teniendo en cuenta que no hay intervenciones mágicas y tampoco abundan las propuestas concretas desde la investigación educativa para el trabajo desde el aula, pensando además en la carga laboral que tiene el profesor de matemáticas de la educación básica en la actualidad, los problemas de las olimpiadas matemáticas se presentan como recursos de oportunidad para profundizar los conocimientos y potencializar talentos a partir de la atención diferenciada a los estudiantes de la Educación Secundaria con aptitudes sobresalientes.

En los datos recopilados en esta investigación encontramos criterios de personas con experiencia tanto como entrenadores de olimpiadas, como en la docencia regular, que manifiestan su alineación con la perspectiva enfocada, también afín a la política educativa vigente y a los preceptos teóricos asumidos sobre la enseñanza de la Matemática.

5.1.2 Respecto al contexto

Los procesos de desarrollo que transforman las capacidades naturales manifiestas en estudiantes dentro de los dominios académicos y creativos en talentos matemáticos pueden tener lugar en diferentes contextos de aprendizaje. Como se mencionó en el apartado anterior, los problemas y soluciones que se producen en el marco de las olimpiadas matemáticas tienen la regularidad, debido a su naturaleza, de generar aprendizaje de forma prácticamente autodidacta, pudiendo prescindir de un contexto muy estructurado.

La realidad observada y los criterios dados por entrenadores dan lugar a pensar que el contexto menos formal y estructurado que permea los entrenamientos para olimpiadas matemáticas respecto a los tradicionales procesos de enseñanza que se desarrollan en la escuela, apartando el medular impacto del contenido, constituye una de las diferencias entre los escenarios con mayor impacto en los respectivos logros de aprendizaje.

Desde la experiencia propia y ajena se conoce la exigencia del sistema de educación básica general para con los profesores, con un volumen muy notorio de funciones delegadas a su responsabilidad con estructuras y tiempos inflexibles, tanto en parámetros a cumplir dentro de su clase, como fuera de ella. Por su parte el contexto en que tienen lugar los entrenamientos es, por mucho, más plácido. La casi total ausencia de presiones institucionales en este marco proporciona la autonomía necesaria a los entrenadores para la preparación, ejecución y posterior reflexión en torno al desarrollo de la sesión. De este exitoso contexto de aprendizaje se pudieron identificar aspectos y, entre ellos, algunos que parecen fortalezas que, consecuentemente adaptados, pudieran ser replicables en la escuela.

Respecto a la preparación de la sesión debe hacerse la distinción en dos sentidos, la preparación personal del entrenador y la preparación de la sesión en sí misma. En el ámbito de la educación formal, el profesor generalmente se siente dirigido a priorizar lo segundo, mientras que el contexto olímpico estimula lo primero. Los entrenadores son personas muy preparadas y, aunque muchos de ellos pueden carecer de formación pedagógica, logran transmitir sus experiencias resolviendo problemas de manera natural. Llama la atención que en la forma en que desarrollan su práctica se pueden identificar peculiaridades en cada uno, pero de manera general se percibe un apego casi literal a lo que se promueve desde la investigación en la Matemática Educativa con relación a la enseñanza de la RP. Más que a un formato de planeación rígido, el tiempo es invertido en favor de elaborar una buena lista de problemas autodidactas, que sean retadores pero posibles, que ayuden a introducir una generalización, un contraejemplo útil. La evidencia de esta planeación muchas veces se limita a una guía personal.

La puesta en práctica de lo planeado tiene diferencias más notorias en ambos contextos de aprendizaje. La escuela condiciona una inseparable conexión reguladora entre el tiempo y el plan didáctico que por lo general es gravitado sobre el profesor, mientras que, en la olimpiada, con independencia de la planeación, el ritmo lo determina, principalmente, el progreso de los estudiantes en términos de problemas vencidos. En tal sentido, a los alumnos que son entrenados se les da oportunidad de pensar y de escoger su propio camino de solución y, aunque muchas veces son guiados mediante preguntas reflexivas y sugerencias, no se les proporciona la solución completa de forma inmediata, no sin antes dejar que batallen con el problema en cuestión un tiempo razonable.

Ciertamente, en la olimpiada por lo general se trabaja con grupos más reducidos cuya membresía, por demás, está allí porque el manejo de sus objetivos se proyecta en función de aprender más, pero también hay que señalar que en este contexto los grupos también son heterogéneos en todos los aspectos, incluyendo el nivel de desempeño. Por ello, en la dinámica del proceso se antepone la comodidad del colectivo, creando un clima de confianza y respeto mutuo entre compañeros y para con el entrenador.

En este escenario se le da toda la importancia a que los alumnos no tengan miedo a preguntar, a exponer sus intentos de solución o a equivocarse enfrente de sus compañeros, la premisa es que todos tengan la oportunidad de expresarse, de equivocarse, incluido el entrenador y no pasa nada. Con esta finalidad, los entrenadores están prestos a intercalar chistes, anécdotas, juegos colectivos, promueven el trabajo colaborativo y hasta flexibilizan el control de la disciplina siempre y cuando los estudiantes sean capaces de regresarse al problema de forma autónoma y no interfiera en la concentración de otros compañeros. De la misma forma los entrenadores se proyectan con relación a la anticipación de dudas y errores comunes para atacarlos y subsanarlos.

Aunque la propia naturaleza institucional de la escuela prive la posibilidad de calcar este contexto de enseñanza, por ejemplo, se entiende que no puede validarse el hecho de que la planeación física sea prácticamente inexistente o en extremo informal, sí se aprecian otros elementos que se pueden incorporar a la práctica cotidiana de un profesor más allá del propio contenido. Para la transposición entre escenarios es preciso tener en cuenta las características de la institución, de los educandos, sus intereses y aspiraciones, partiendo de la selección de los problemas adecuados para ellos y ofreciéndolos indistintamente ya sea dentro de la propia clase, como tareas extra-clase, retos optativos, talleres, círculos de interés; en cualquier caso, sin imposiciones, con la naturalidad y flexibilidad que se abordan desde la olimpiada. La clase de matemáticas puede y debe adoptar el ambiente favorable de la olimpiada que hace que los adolescentes se sientan como que juegan a aprender. Los puntos claves a imitar y quizás los mayores desafíos para el docente por el manejo de tiempos, es el de darle a los estudiantes la posibilidad de pensar y, el darse a ellos mismos la oportunidad de escuchar los razonamientos emergidos.

Una sugerencia en esta dirección está en no recargar la clase con largas listas de actividades, puede que la lucha productiva con un único problema bien pensado un tiempo prudencial por el estudiante sea más aportadora que replicar en el cuaderno de forma irracional varias soluciones expuestas en el pizarrón, pensadas únicamente por el profesor.

5.2 Posibles perspectivas de investigación

Pensando en que las actividades de aprendizaje y práctica dentro de las olimpiadas matemáticas tienen lugar en un contexto extraescolar, se considera conveniente para viabilizar el trabajo de los profesores en aras de implementar la estrategia de intervención educativa por la que se apuesta en este proyecto en la atención a los estudiantes con aptitudes sobresalientes para la disciplina, que se puedan realizar propuestas didácticas con conexiones más concretas entre las categorías temáticas y tipologías de problemas que aporta la olimpiada y el currículo matemático de la enseñanza secundaria.

De la misma forma se percibe pertinente que en futuras investigaciones se exploren otras formas de materializar el enriquecimiento curricular para potencializar el talento matemático desde el aula regular.

Asimismo, se considera conveniente un análisis con mayor profundidad sobre las estrategias implementadas por los entrenadores y la relación con su conocimiento específico. Dada la versatilidad y capacidad de captar y mantener la atención de los estudiantes que participan en este tipo de actividades.

Otro tema que pudiera ser de interés, derivado de lo observado en esta práctica, sería la realización de un taller de matemáticas olímpicas en un contexto de educación regular, con estudiantes que tengan dificultades en torno al aprendizaje de esta asignatura.

5.3 Reflexión como docente

Como se relata en la introducción de este Proyecto de Desarrollo Profesional, la acogida de esta opción de titulación estuvo estrechamente ligada a las características que tuvo mi formación docente, la cual tuvo como escenario principal la práctica. Esta formación sobre la marcha, casi autodidacta, a partir de la experimentación propia durante los cinco cursos del programa formal de la licenciatura como Profesor General Integral de Secundaria Básica, y luego en la formación continua bautizada por nueve cursos posteriores en el ejercicio de la práctica, trajo consigo naturales aciertos y desaciertos que tributaron a mi experiencia y fueron el objeto contante para la reflexión personal.

El tipo de formación hizo posible que pudiera desarrollar algunas competencias del perfil profesional, pero otras quedaron estancadas en la rutina diaria, entre otras razones por la falta de orientación y el limitado acceso a la información a través de medios digitales que por entonces reinaba en la escuela cubana. En consecuencia, en ausencia de experiencias propias o ajenas ante situaciones novedosas, la improvisación se convirtió en un método de uso sistemático para salvar los obstáculos que se fueron presentando en el ejercicio de la práctica.

Disfrutaba tanto mi trabajo como profesor de matemáticas, como el de tutor de estos grupos de adolescentes, aun con el reto adicional que el cumplimiento de esta otra tarea supone. Las funciones establecidas para el trabajo como guía de grupo daban lugar a que pasara una buena parte de la jornada laboral frente al grupo tutorado y, por azar, generalmente tuve la dicha de contar entre los alumnos de mi salón a varios con mucha dedicación hacia el estudio y facilidades para el aprendizaje de la matemática. La reflexión sobre mi práctica impulsada por el comportamiento no deseado de algunos de estos alumnos pronto me hizo reconocer que simplemente se aburrían al terminar los ejercicios propuestos antes que sus compañeros de aula. En la búsqueda de alternativas para remediar tal situación, la improvisación con los recursos que tenía a disposición me llevó a insertar problemas de las olimpiadas matemáticas relacionados con la temática de estudio, dirigidos a estos alumnos. El impacto fue positivo desde lo inmediato y así se fue convirtiendo ésta en una práctica cada vez más sistemática.

No obstante, sentía que mi estrategia no era consistente puesto que en mis años de estudiante no tuve orientación para la participación en estas competiciones, ni había recibido posteriormente una formación matemática profunda, lo que me llevaba a hacer maromas para la selección de los problemas. A grandes rasgos, ésa es la historia detrás de este Proyecto.

A pesar de que desde el inicio estuvo presente la motivación empírica alrededor de esta línea de investigación para el trabajo de titulación, ya en la arrancada se dudó del rumbo y de la forma en que se desarrollaría, por un lado, resonaba la idea de las olimpiadas, por otro la atención a alumnos con aptitudes sobresalientes y, pujando con los dos, mi conocimiento como profesor para lidiar con ello. No fue hasta que le invertí horas a la lectura en estas direcciones que quedó por fin determinado el rumbo a seguir, pero seguía cojeando la forma. Con posterioridad, el estudio consciente de las teorías asociadas a los tres componentes ligados a la idea de investigación proporcionó las herramientas para estructurar el proyecto.

Primero, y con la vista puesta en los discentes para cuya atención deseaba capacitarme con el desarrollo desde el proyecto, se estudiaron varios modelos de caracterización del talento y optamos por el MDDT de Gagné por ser este un modelo cuidadosamente estructurado que incluye en lo que autodefine como "compleja coreografía del talento", como subcomponentes causales dentro de las actividades de aprendizaje y práctica que tienen lugar en los procesos de desarrollo, al contenido y al contexto de aprendizaje.

Dado que el contenido específico a implementar esencialmente desde la postura inicial eran problemas de olimpiada, idea que se fortaleció con la revisión de antecedentes, recurrimos a los aportes de los clásicos en la investigación de la Educación Matemática en el campo de la RP. Las concepciones de autores como Pólya y Schoenfeld afianzaron aún más nuestra seguridad como una práctica viable, pertinente y, además, influyeron en nuestra concepción de la didáctica para la enseñanza. Su idea de profesor como guía que orienta y encamina la lucha productiva, pero que no da adelanta soluciones completas dado que en su línea de pensamiento el aprendizaje se genera y la habilidad se desarrolla resolviendo problemas y viendo cómo otros lo resuelven. También es importante señalar que el problema se define en función del reto que supone para el resolutor. Estas ideas complementaron la visión de forma del proyecto, entendiendo que para alcanzar el pretendido desarrollo profesional en el campo la estructura debía considerar una disposición productiva a resolver problemas.

De todos es conocido que las olimpiadas de matemáticas desde sus primeras ediciones son el escenario natural de los retos matemáticos y buscan estimular el estudio de la disciplina. Estos eventos en México, en la actualidad, gozan de muy buena salud, existiendo una gran cantidad de convocatorias bien estructuradas y organizadas. Por ello, también se decidió profundizar en el conocimiento general de este exitoso contexto en la detección y desarrollo del talento, con el fin de determinar cuáles iban a ser en sí nuestras fuentes de información en las observaciones preconcebidas.

En tal sentido, atendiendo los logros relevantes alcanzados y las posibilidades de acceso al campo en un momento dado, se acogió como principal fuente de información para estudiar el contenido al Curso para Entrenadores de Olimpiadas, auspiciado por el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas de San Luis Potosí, cuyo entrenador principal y director cuenta con 14 años de experiencia como entrenador de olimpiada, actualmente ocupa la responsabilidad de delegado estatal para la OMM y además es parte del equipo de entrenadores que prepara la selección nacional de México del categoría primaria para la IMC. Por otra parte, la observación directa del contexto de enseñanza tuvo lugar en las jornadas de entrenamiento realizadas con motivo de la preparación del preselectivo zacatecano de secundaria para las olimpiadas nacionales de 2020. La relevancia de este escenario se justifica en el nivel de organización que tiene este proceso en el estado, contando con un equipo estable de entrenadores que lo han mantenido en los últimos años entre los cinco primeros estados del país en cuanto a resultados en los niveles de primaria y secundaria.

Sin lugar a duda, el curso de esta investigación primero me permitió conocer el panorama general de las olimpiadas en México y luego, paulatinamente, me ha servido para encontrar muchos "por qué" para mis experiencias de aula pasadas. Hoy soy un profesor mucho más consciente de lo que puede funcionar o no en un aula regular y con más recursos matemáticos y didácticos para atender dentro y fuera de esta al tipo de alumno que inspiró la realización de este estudio.

Ambas observaciones fueron muy enriquecedoras para mi crecimiento profesional y en la dirección de cumplimentar los objetivos propuestos en este Proyecto. El CEOM me sirvió para delimitar los contenidos de la olimpiada, para recopilar material organizado y sobre todo para nutrirme de muchos de los enfoques ingeniosos propios de esta forma de hacer matemáticas que me hacen un mejor resolutor de problemas no rutinarios. Hoy me siento en mejores condiciones para lidiar con estos problemas y para darle el mejor aprovechamiento en función del desarrollo del talento de mis educandos.

El estilo de enseñanza que se enarbola en el contexto de las olimpiadas también tendrá mucha influencia en mi práctica profesoral futura, incluso más allá de la atención a los alumnos sobresalientes. En este tenor, a mis tradicionales cuestionamientos en pos de la reflexión para la mejora continua como: *¿qué hice bien?, ¿qué pude haber hecho mejor?, ¿me entendieron?*, incorporaría otros estrechamente ligados a la forma en que se desarrolla un entrenamiento exitoso, con sustento además en lo deseable desde la teoría de la RP. Entre estos otros cuestionamientos que asumimos relevantes y necesarios pueden plantearse: *¿les di suficiente tiempo para pensar los problemas?; ¿terminé resolviendo yo los problemas?; ¿los problemas fueron muy difíciles o sencillos, demasiados o muy pocos?; ¿mis explicaciones fueron* *suficientes, mis ejemplos buenos?* Las respuestas a estas interrogantes, miradas desde cómo lo pudieron percibir cada uno de mis estudiantes, luego de cada clase, me permitiría autoevaluar mi práctica y hacerla más efectiva en términos de logros de aprendizaje.

En general, es difícil expresar en su exacta dimensión a través de este breve recuento y reflexión en torno al Proyecto de Desarrollo Profesional que se presenta todo lo aportador y enriquecedor que ha sido. Su alcance se puede ver incluso más allá del plano profesional para el cual fue pensado, ya que me permitió conocer lugares, recursos materiales y humanos con los que cuentan las instituciones educativas, socializar con entrenadores, profesores, alumnos, padres de familias, directivos de instituciones y asociaciones, aspectos que en mi condición de extranjero, alcanzan una dimensión de importancia mayor, dado que me dio la oportunidad de seguir ampliando y refinando mi visión del panorama de la educación en México y de su cultura en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, Y., & Alisina, A. (2017). Conocimientos del profesorado sobre las altas capacidades y el talento matemático desde una perspectiva inclusiva. *NÚMEROS, 94*, 71-92.

AMC. (2017). Competencia Primavera de Matemáticas. México: *Concurso de Primavera de Matemáticas.* Recuperado el 1 de junio de 2019 de: https://amc.edu.mx/amc/index.php?option=com_content&view=article&id=82&Itemid=319

Arguedas, V. (2012). George Pólya: el razonamiento plausible. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 12*(2), 1-11.

Arias, F. G. (2012). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica*. (6ta. Edición). Caracas, República Bolivariana de Venezuela: Editorial Episteme.

Artiles, C. (2006). La atención educativa al alumnado con altas capacidades intelectuales desde un programa institucional a largo plazo financiado y dirigido por la administración educativa de la comunidad autónoma de Canarias. En N. Rajadell, M. Valera, & L. Carreras (Eds.), *I Jornadas Nacionales sobre escuela y altas capacidades* [en línea], (pp. 18-33). Barcelona: Universidad de Barcelona. Recuperado de http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/23122

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 1, 1-9.

Barrera, F., Benítez, D., Reyes, A., Santos-Trigo, M. & Sepúlveda, A. (Eds.) (2008). *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Pachuca, Hidalgo.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España: Disponible en http://digibug.ugr.es/ bitstream/10481/1827/1/17349515.pdf.

Benavides, M., & Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? *IX Congreso Iberoamericano Superdotación, Talento y Creatividad* [en línea], (pp. 167-179) Buenos Aires, Argentina. Recuperado de http://www.uco.es/~ma1mamaa/publicaciones/Que%20deben%20conocer%20_porfesores_talento_ REV_IDEACCION.pdf

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Valencia, Valencia, España. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/32580.

Cabañas, M. G. (2000). *Los problemas… ¿Cómo enseño a resolverlos?* DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CARMA [Uge Saurio]. (2020, enero 7). Presentación: Curso en línea [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?time_continue=187&v=YF-uUn5lCWQ&feature=emb_logo

Carmona, O. (2020, 8 de junio). El error de asociar a los niños superdotados con el alto rendimiento escolar. *El País.* Recuperado de: https://elpais.com/elpais/2020/06/01/mamas_papas/1590992179_592191.html

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M, Matthew, W., & Silver, E. A. (1983). Result of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teachers, 76*(9), 652-659.

Carrillo, C., & Jiménez, O. (2015). El talento matemático. Un privilegio que requiere atención especial. En J.M. López-Mojica, & J. Cuevas (Coord.) *Educación Especial y Matemática Educativa*. México: Cenejus.

Castillo, S., L. (2019). *Descubre el talento matemático en tus estudiantes.* Monterrey, Nuevo León. México: Tecnológico de Monterrey. Recuperado de: https://observatorio.tec.mx

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faísca, 11*, 4-22.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-34). Badajoz: SEIEM.

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión, 16*, 123-140.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula, 21*, 85-104. doi: http://dx.doi.org/10.14201/aula20152185104

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education (6th ed.)*. London and New York, NY: Routledge Falmer.

Conejeros, M., & Gudenschwager, H. (2011). Formación de talentos y universidad: experiencias y desafíos de la intervención educativa con adolescentes. En M. Valadez, & S. Valencia (Eds.), *Desarrollo y educación del talento en adolescentes* (pp. 202-223). México: Editorial Universitaria.

Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos. (2019, 30 de septiembre). *Ley General de Educación*. http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/lge.htm

Curra, D. A. (2015). *Olimpiadas de Matemática en la Educación Superior Cubana: su relevancia en la formación del profesional*. Universidad de Holguín, Holguín, Cuba. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Dagnier_Curra_Sosa2/publication/323643674_Olympiads_of_Mathematics_in_Cuban_Higher_Education_its_relevance_in_the_training_of_professionals/links/5aa1b068aca272d448b4b924/Olympiads-of-Mathematics-in-Cuban-Higher-Education-its-relevance-in-the-training-of-professionals.pdf

De Losada, M. F. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 8*(1), 15-26.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., & Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Revista Faísca, 13*(15), 30-39.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. New York, USA: Springer.

Feldhusen, J. F., & Kroll, M. D. (1991). Boredom or challenge for the academically talented in school. *Gifted Education International, 7*, 80-81.

Flores, H. (2010). *Solución de problemas y temas iniciales para la Olimpiada de Matemáticas*. Nuevo León, México: Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de http://www.ommenlinea.org/

Fuertes, M. T. (2011). La observación de las prácticas educativas como elemento de evaluación y de mejora de la calidad en la formación inicial y continua del profesorado. *Revista de docencia universitaria, 9* (3), 237 – 258.

Gagné, F. (2000). Understanding the complex choreography of talent development through DMGT-based analysis. *International handbook of giftedness and talent*, 2, 67-79.

Gagné, F. (2010). Construyendo talentos a partir de la dotación: Breve revisión del MDDT 2.0. MD Valadez & S. Valencia (Comps.*), Desarrollo y educación del talento en la adolescencia*, 64-78.

Gagné, F. (2013, 22 de marzo). *Francoys Gagné en My Friends´ corner.* https://www.javiertouron.es/francoys-gagne-en-my-friends-corner/

Gagné, F. (s. f.). *Niveles de dotación y talento dentro del MDDT de Gagné*. Consultado 20 de noviembre de 2019. https://gagnefrancoys.wixsite.com/dmgt-mddt/spanish

García-Cedillo, I. (2018). La educación inclusiva en la Reforma Educativa de México. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 49-62.

Guinjoan, M., Gutiérrez, A., & Fortuny, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 29-46.

González-Senovilla, L. (2014). *Estrategias para la Resolución de Problemas*. (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid, España. Recuperado el 25 de septiembre de 2019 de: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/7617

Halmos, P. R., (1980) The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*(7), 519–524.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*, (5ª Edición). DF, México: McGraw-Hill/ Interamericana Editores, S. A. de C.V.

IE-Aguascalientes (2018). *Convocatoria para la selección de alumnos que representarán a Aguascalientes en la Fase Nacional de la XIX ONMAPS y la III OMMEB.* Recuperado el 5 de septiembre de 2019 de: http://www.ommags.com/CONV_MATEMATICAS_2018.pdf

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz, A. Arnal, P. Beltrán, M. Callejo, & J. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Jerónimo, J. (2010). *Geometría en Olimpiadas de Matemáticas (libro no publicado).* Universidad Autónoma de Guerrero, México. Recuperado el 14 de febrero de 2020 de: http://www.matetam.com/sites/default/files/libro_shuyriguin.pdf.

Jiménez, O. (2016). *El talento matemático. Estrategias de atención extracurricular.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.

Kothari, C. (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques*. Second Revised Edition. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Labarrere, A. F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la Escuela primaria*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Leikin, R. (2004). Towards High Quality Geometrical Tasks: Reformulation of a Proof Problem. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 209-216.

Miguel, A., & Moya, A. (2012). Conceptos generales del alumno con altas capacidades. En J. Torrego (Coord.). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. España: Fundación SM.

Mónaco, B. S., & Aguirre, M. I. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas algebraicos. Un estudio de casos.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México.

Möks, F. J. (1992). Development of gifted children: The issue of identification and programming. In F. J. Möks, & W. A. M. Peters (Eds.), *Talent for the future* (pp. 191-202). Assen, The Netherland: Van Gorcum.

Morelos, S., Londoño, N., & Salazar, I. (2016). Sobre la resolución de problemas en la olimpiada mexicana de matemáticas. En E. Mariscal. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 148-156). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Muñoz, T. G. (2003). *El cuestionario como instrumento de investigación/evaluación*. Centro Universitario Santa Ana. Recuperado el 1 de diciembre de 2019 de: http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MTE/Gen02/seminario_de_tesis/Unidad_4_anterior/Lect_El_Cuestionario. pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendation for school for mathematics of de 1980s*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of de 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, 3*, 431-438.

Nieto, J. H. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 2*(2), 37-45.

OMM (s. f.). *¿Qué es la OMM?* Recuperado el 27 de agosto de 2019 de: http://www.ommenlinea.org/presentación/objetivos/

Pérez, R. (1985). *Diseño experimental. Investigación educativa. Diccionario de Ciencias de la Educación*. Madrid, España: Anaya.

Pérez, M (2000). *Combinatoria.* DF, México: Creativa Impresores.

Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pólya, G. (1962). *Mathematical Discovery, 1962*. New York, EU: John Wiley & Sons.

Romagossa, M. (2013). *Las necesidades emocionales en niños con altas capacidades*. España: Aljibe

Rizo, C., & Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Relime, 2*(3), 31-45.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (2004). *Metodología de la investigación cualitativa*. La Habana: Editorial Félix Varela.

Rodríguez, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & R. Blanco (Eds.). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago de Chile, Chile: Trineo.

Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, A., & Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación matemática*, *29*(2), 159-186. https://dx.doi.org/10.24844/em2902.06

Santos, L. M. (1992). Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática, 4*(02), 16-24.

Schoenfeld, A. H. (1978). *Problem Solving Strategies in college-Level Mathematics*. Physics Department, University of California, Berkeley.

Schoenfeld A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, EUA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2016). *An introduction to the teaching for robust understanding (TRU)* Framework. Framework. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Recuperado de: http://truframework.org

SEP (2006). *Propuesta de Intervención: Atención educativa a alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes*. Recuperado el 10 de junio de 2019 de: https://www.educacionespecial.sep.gob.mx

SEP (2016). *Educación Especial. Aptitudes sobresalientes*. Recuperado el 20 de febrero de 2020 de: https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/2016/indexAS.html

SEP (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral*. Recuperado el 10 de junio de 2019 de: http://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACION INTEGRAL.pdf

SEP (2019). *Lineamientos para la acreditación, promoción y certificación anticipada de alumnos con aptitudes sobresalientes en educación básica 2019*. Recuperado el 20 de febrero de 2020 de: https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/

SEP (2019a). *Directorio de Recursos Zacatecas*. Recuperado el 20 de febrero de 2020 de: https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/2016/pdf/as/2019/Zacatecas.pdf

SEP-Zacatecas y ANPM-Zacatecas (2019). *Convocatoria a la XIX Olimpiada Estatal de Matemáticas para Alumnos de Primaria y de Secundaria. Recuperado el 3 de noviembre de 2019 de:* http://www.seduzac.gob.mx/portal/documentos/Publicaciones/Slider/Alumno/16102019_Olimpiada_Matematicas.pdf

SEP-Nayarit (2018). *Convocatoria a la XIX Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y de Secundaria*. Recuperado el 3 de septiembre de 2019 de: https://docs.wixstatic.com/ugd/d920c8_f9165883efb548c0852a15a4980de7a7.pdf

Soriano, R. [ANPM AC Delegación Zacatecas]. (2020, 7 de mayo). *Preseleccionados estatales zacatecanos entrenan en casa de manera virtual para las Olimpiadas Nacionales Matemáticas* [Post]. Facebook. https://www.facebook.com/ANPM-AC-Delegaci%C3%B3n-Zacatecas-1037854339568360/

Sowder, L. (1989). Choosing operations in solving routine story problems. In R. I. Charles, & E. A. Sliver (Eds.), *The teaching and assessing mathematical problem solving, 3* (pp. 148–158). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tannenbaum, A. J. (1997) "The Meaning and Making of Giftedness". En N. Colángelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of Gifted Education*, 2, 27-42.

Valadez, M., & Avalos, A. (2010) Atención educativa a Alumnos Sobresalientes y Talentosos en Escuelas Inclusivas. En Giraldo, J. y Núñez, C. (Eds.) *Inclusión y talento. Equidad en una educación de calidad* (pp. 25-35). Colombia: Ediciones Buinaima.

Valle, M., Juárez, M., & Guzmán, M. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista electrónica de investigación educativa*, *9*(2), 1-11. Recuperado en 11 de febrero de 2019, http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S160740412007000200009&lng=es&tlng=.

Anexo 1. Material para la Sesión 2

CARMA en línea
Curso para Entrenadores de Olimpiada de Matemáticas

Sesión 2
Sucesiones, Sumas, Progresiones

Los problemas de sucesiones son complicados. Por lo general, el problema enuncia únicamente "escribe el siguiente término de la sucesión". Sin embargo, como una sucesión es cualquier lista de números –o de cosas, para el caso- en realidad cualquier número completa la sucesión. En realidad, la pregunta implícita en todos los casos es algo más como "escribe el término que *mejor* complete la sucesión".

Es decir, estudiantes y docentes debemos tener en claro que –a menos que nos den la regla que la genera- no hay una única manera de continuar una sucesión. Para ilustrar esto, considera las siguientes sucesiones y escribe el término que mejor continúa la sucesión:

Ejercicio 1: L, M, M, J,

Ejercicio 2: E, F, M, A, M,

Ejercicio 3: U, D, T, C, C, S, S,

Ejercicio 4: 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19,

Ejercicio 5: 3, 3, 4, 6, 5, 4,

Ejercicio 6: 1, 4, 9, 61, 52, 63, 94, 46, 18, 1, 121, ____

Con lo anterior en mente, resuelve los siguientes problemas: hay muchas maneras de continuar la sucesión y todas son válidas; buscamos la manera que mejor complete la sucesión.

Problema 1. ¿Cuál es el término que sigue en la sucesión 2, 3, 6, 15, 42, …?

Problema 2. ¿Cuál es el término que ocupa la posición 8 en la siguiente sucesión:

2, 3, 5, 9, 17, … ?

Problema 3. En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x? (Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante).

				21
	16			
		27		
				x

Problema 4. La lista $(1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1000)$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores (por ejemplo, $x_4 = 1 + x_2 + x_3$). ¿Cuánto vale x_2?

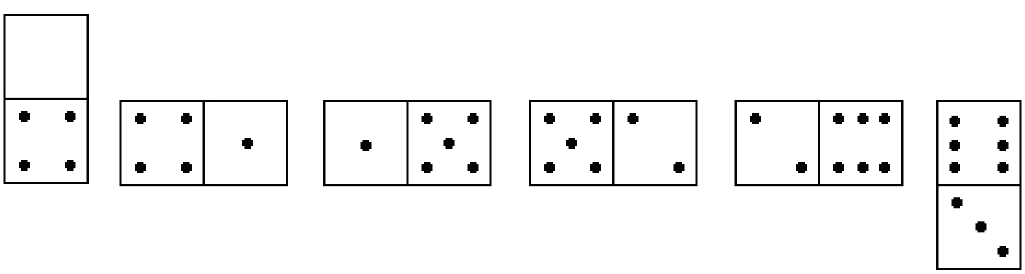
Problema 5. Considere la lista 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, …¿Cuál es el número escrito en la posición 2004?

Problema 6. Definimos una sucesión como $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y $t_{n+1} = t_n - t_{n-1}$ para $n \geq 2$.

Encuentra el valor de t_{2018}

Problema 7. Sean $a_1,\ a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ progresiones aritméticas tales que $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ y $a_{100} + b_{100} = 100$. Encuentra la suma de los primeros 100 términos de ambas progresiones.

Problema 8. Como se ve en la figura se han jugado seis fichas de dominó, de acuerdo con las reglas del juego, se une 4 con 4, 1 con 1, y así sucesivamente. Para el caso de la figura la suma de los puntitos de cada ficha son $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}$ y están en progresión aritmética; es decir, los números tomados en orden tienen una diferencia común, en este caso particular es 1.



¿De cuántos modos podemos jugar seis fichas de dominó, tomadas de una caja común de veintiocho, para que los números queden en progresión aritmética?

Uno de los mayores problemas con los problemas de sumas –sobre todo con estudiantes jóvenes o de primeras participaciones- es la presencia de puntos suspensivos. Ese es un punto que es necesario atender; pero la explicación es sencilla: en la suma

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2016 + 2018$

escribimos los puntos suspensivos de la misma manera en que no es viable para nosotros escribir todos los números que queremos que sean sumados, tampoco esperamos que hagan la suma sumando todos los números uno a uno.

Para resolver estos ejercicios vamos a apoyarnos de fórmulas para el cálculo de sumas, sobre todo progresiones aritméticas. Una progresión aritmética es la suma de una sucesión donde la diferencia entre término y término es constante. La fórmula más famosa la conocemos como "fórmula de Gauss", para la suma de los primeros n naturales, pero también usaremos fórmulas para la suma de los primeros impares, los primeros pares, los primeros cuadrados y los primeros cubos.

Problema 1. Para cada uno de los siguientes incisos, (i) calcula cuántos números se están

sumando y, (ii) calcula el resultado de la suma.

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 2019$

b) $4 + 7 + 10 + \cdots + 2017$

c) $3 + 6 + 9 + \cdots + 2016$

d) $8 + 13 + 18 + \cdots + 558$

e) $123 + 114 + 105 + \cdots + 9$

Problema 2. Yareli leyó un libro. La lectura le tomó exactamente 20 días. El primer día leyó 12 páginas y cada día siguiente leyó 5 páginas más que el día anterior. ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Problema 2. Calcula el resultado de la suma:

$999999999 - 99999999 + 9999999 - \cdots + 999 - 99 + 9.$

Problema 4. Calcula el resultado de la suma:

$2016 - 2014 + 2012 - 2010 + \cdots + 8 - 6 + 4 - 2.$

Problema 5. En una fiesta, todas las personas saludaron de mano a cada una de las demás.

Si en total fueron 32 personas a la fiesta, ¿cuántos saludos hubo?

Problema 6. Lulú sale a pasear a sus 1024 perritos, que son Dálmatas o San Bernardo, todos de distinta estatura. Durante el paseo se da cuenta de que el más pequeño de los San Bernardo es más alto que exactamente 9 de sus Dálmatas, hay otro San Bernardo que es más alto que exactamente 10 de sus Dálmatas, otro San Bernardo que es más alto que exactamente 11 de sus Dálmatas y así sucesivamente hasta llegar al último San Bernardo, que es más alto que todos los Dálmatas. ¿Cuántos de los perritos de Lulú son Dálmatas?

Problema 7. Los números 4, 7, 10, 13, 16, … donde cada número es tres unidades mayor que el número anterior, están escritos en orden, en un libro, cien números por página. El primer grupo de cien números empieza en la página 526. ¿En qué página está escrito el número 2005?

Problema 8. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $10^{2010} - 2010$?

Problema 9. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111 \ldots 11}_{2019} \times 101$?

Problema 10. Juan y Carlos se turnan para tomar dulces de una bolsa. Juan toma 1 dulce, Carlos 2 dulces, Juan 3 dulces, Carlos 4 dulces y así sucesivamente. Después de un tiempo, no quedan suficientes dulces para que sigan con la sucesión de modo que la persona en turno toma todos los dulces que quedan. Cuando se repartieron todos los dulces, Juan tiene 101 dulces en total. ¿Cuántos dulces había en la bolsa originalmente?

Problema 11. Calcula el resultado de $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2001^2 - 2002^2 + 2003^2$

Reto 1. Como se muestra en la figura de abajo, hemos acomodado los enteros positivos en un arreglo triangular, de manera que los números arriba o a la izquierda deben ser menores que los números abajo o a la derecha, y cada línea tiene más números que la línea superior. Supongamos que a_{ij} representa el número que está en la i–enésima fila de arriba hacia abajo, y es el j–enésimo número de la izquierda a la derecha. (Por ejemplo, a_{43} = 9.) Si a_{ij} = 2009, ¿cuál es el valor de i + j?

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 5 & & 6 & \\
7 & & 8 & & 9 & & 10 \\
 & & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Reto 2. Una niña calcula la suma $\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \cdots + \frac{2011+2012}{2013}$ y un niño calcula la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{671}$ ¿Cuál es la suma de sus resultados?

Reto 3. ¿Para qué entero positivo n se satisface la ecuación siguiente?

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}=\frac{2006}{2007}$$

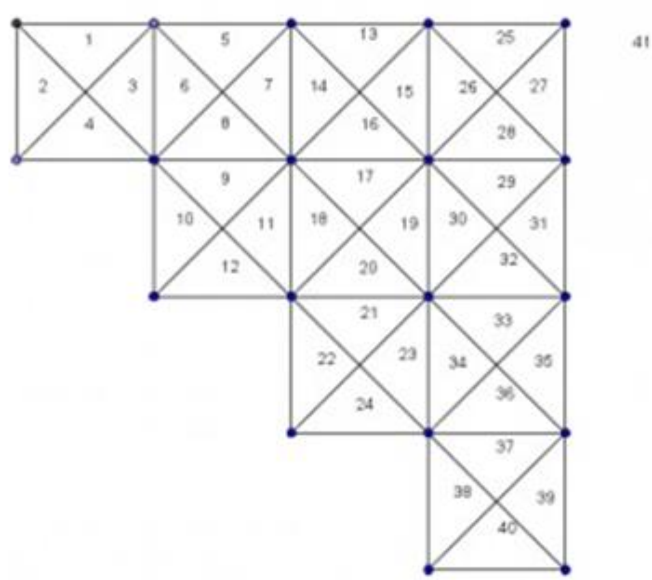
Reto 4. ¿Cuál es el entero más cercano al valor de $x-y$ si

$$x=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{50^2}{99}$$

$$y=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{50^2}{101}$$

Reto 5. En una fila hay 2017 galletitas, numeradas del 1 al 2017. Chocoreta se come las galletitas de la siguiente manera: se come una, se salta una; se come otra, se salta dos; se come otra, se salta tres y así sucesivamente hasta llegar al final de la fila. Regresa al inicio y repite el proceso con las galletitas que quedaron tantas veces sea necesario hasta que se las come todas. ¿Qué número tiene la última que se come?

Reto 6. Observa el siguiente arreglo:



¿Cuál es la suma del primer y último términos de la columna 2008? (Por ejemplo, el primer y último términos de la columna 3 son 13 y 24, su suma $13+24=37$.)

Reto 7. En una escuela se tienen 2011 grupos, cada uno con 2011 alumnos. Cada grupo tiene una caja en donde los alumnos en orden consecutivo colocan pelotas siguiendo una progresión aritmética como se muestra en la tabla:

	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	. . .
Grupo 1	1	2	3	4	. . .
Grupo 2	2	4	6	8	. . .
Grupo 3	3	6	9	12	. . .

Grupo 4	4	8	12	16	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Encuentra los grupos que en algún momento logran acumular exactamente 1265 pelotas dentro de su caja.

Anexo 2. Entrenamiento 6, sesión 1 (E_6S_1)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>6to ENTRENAMIENTO
SESIÓN: 1</td><td>FECHA:
14/2/2020</td><td>h: 4:03 – 8pm</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Instituto Miguel Agustín Pro</td><td>CIUDAD: Guadalupe</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1</td><td>ALUMNOS: 12</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Geometría</td><td colspan="2">TEMA: Cuadriláteros cíclicos</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>EL entrenador</th><th>SÍ</th><th>NO</th></tr>
<tr><td>a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento?
- Trata el tema según la propuesta de Jerónimo (2010) titulada: Geometría en Olimpiadas de Matemáticas, pero no tiene completamente definidas la selección de problemas y la cantidad a proponer en el entrenamiento, esto último queda subordinado al ritmo de trabajo de los estudiantes.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento?
- Comienza recordando el contenido abordado en entrenamientos precedentes como recursos para el nuevo contenido.
- Presenta la definición, propiedades y demostración de los cuadriláteros cíclicos según Jerónimo (2010).
- Propone problemas afines a la temática entre los que difiere el nivel de dificultad seleccionados de Jerónimo (2010). Los problemas se van revisando a nivel general luego de transcurrido un tiempo prudencial y de anotados en el pizarrón los nuevos problemas para resolver.
- Concluye retomando las propiedades de los cuadriláteros cíclicos.</td></tr>
<tr><td>c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento?
- Sólo menciona el tema a tratar, presentado como: “Hoy vamos a trabajar con cuadriláteros cíclicos”.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)?
- Se pasa una hoja donde los estudiantes anotan su canción de preferencia para escuchar, en un volumen moderado, mientras resuelven los problemas propuestos.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar?
- Ángulos entre paralelas; ángulos en polígonos; ángulos en circunferencias; semejanza y congruencia.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo?</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>

- *Propicia la conformación de equipos (según preferencia de los alumnos) donde se elaboren planes para atacar y resolver la segunda mitad de los problemas propuestos en la sesión.*		
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Por lo general minutos después de haber propuesto el problema haciendo énfasis en la comprensión de cuál es el punto de partida, que se quiere obtener o a dónde se quiere llegar y en el cómo se relacionan.*	X	
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *Proporciona tips cuando se hace evidente la dificultad para resolver el problema a nivel general, transcurrido un tiempo prudencial desde la propuesta del problema y de manera particular con los alumnos pasando por sus puestos de trabajo. Por ejemplo, les sugiere que* • *Empleen todos los datos* • *Contemplen la posibilidad de realizar construcciones*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Sólo en la revisión general del problema, cuando los alumnos han encontrado algunas soluciones o entiende que el tiempo transcurrido es el suficiente para haberlo resuelto.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *No, los corrige individualmente conforme los va detectando a partir de cuestionamientos.*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones orales del procedimiento que los condujo o no a una solución (individualmente, pasa por los equipos conformados).*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? <u>*Hacer dibujos:*</u> 1. *Prolongar segmentos.* 2. *Trazar perpendiculares o paralelas.* 3. *Trazar circunferencias.* 4. *Trazar tangentes y cuerdas comunes.* <u>*Argumentar por contradicción (reducción al absurdo)*</u>	X	
n) ¿Cómo? • *Ante la dificultad intrínseca del problema que supone un obstáculo para avanzar por caminos "más convencionales".* • *Por economía de procedimientos.* 1. *Al prolongar ciertos segmentos encuentran algunos detalles que facilitan la solución del problema ya que se relacionan nuevos ángulos y se determinan polígonos cuyas propiedades se usan o demuestran.* 2. *Trazar una perpendicular o una paralela a algún segmento para obtener triángulos que poseen propiedades útiles en la entre solución del problema.* 3. *Trazar circunferencias circunscritas a determinados polígonos conociendo que son cíclicos para evidenciar relaciones*		

entre estas y los ángulos.

4. *Ante dos circunferencias tangentes, ya sea la tangencia interior o exterior, trazar la línea tangente a las dos circunferencias la cual pasa por el punto común de ellas y siempre que se tengan dos circunferencias tangentes se debe considerar la cuerda común.*

Observaciones generales y apreciaciones personales

La sesión se desarrolla en un ambiente "relajado", donde los alumnos conversan entre ellos y con el entrenador. Los alumnos se motivan con el desafío que presupone cada problema.

Entre los tips que éste proporciona enfatiza en que no es bueno proporcionar la respuesta a los problemas de manera inmediata o luego de intentos breves por parte de los alumnos porque, a su decir, así como llega el conocimiento se va. De la misma forma, sugiere que la construcción de la figura de análisis en cada problema se haga lo más correcta posible con relación a los datos y del tamaño adecuado (más bien grande), ya que la información visual que se percibe puede proporcionar pistas útiles. Otra recomendación recurrente fue la de considerar en el análisis todas las premisas que se establecen desde el enunciado del problema.

Los problemas propuestos, en la mayoría de los casos desde la memoria y/o celular, fueron extraídos y resueltos a la manera de Jerónimo (2010):

Problema 1.

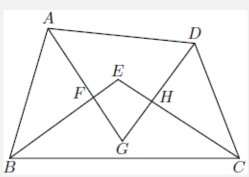
Demostrar el Teorema 1.5.1 pp. 28-29.

Teorema 1.5.1 Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a 180°.

Problema 2.

Problema 1.38 p. 34.

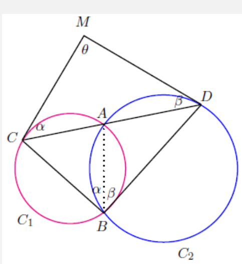
En la siguiente figura están trazadas las bisectrices 6 de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, las cuales se intersecan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es cíclico.



Problema 3.

Ejemplo resuelto: 1.5.1 p. 28.

Las circunferencias C1 y C2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C1 y C2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demuestra que el cuadrilátero MCBD es cíclico.



Problema 4.

Problema 1.39 p. 34. (se cambió la denotación original de la figura)

En un triángulo △ABC sean M, N y P, puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Se trazan las *circunferencias circunscritas a los triángulos △APN, △BMP y △CNM. Demuestra que las tres circunferencias tienen un punto en común. (Resultado conocido como teorema de Miguel)*

Problema 5.

Problema 1.50 p. 36.

Demuestra que, si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.

Problema 6.

Problema 1.44 p. 35.

Se toma un punto P en el interior de un rectángulo ABCD de tal manera que ∡APD + ∡BPC = 180◦. Encuentra la suma de los ángulos ∡DAP y ∡BCP.

Los problemas se fueron proponiendo de tal forma que antes de la revisión general de cada uno, el siguiente se copiaba en el pizarrón, así se impuso un ritmo de trabajo continuo.

Anexo 3. Entrenamiento 6, sesión 2 (E_6S_2)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>6to ENTRENAMIENTO
SESIÓN: 2</td><td>FECHA:
15/2/2020</td><td>h: 8:10 – 11am</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Instituto Miguel Agustín Pro</td><td>CIUDAD:
Guadalupe</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1.</td><td>ALUMNOS: 12</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Geometría</td><td colspan="2">TEMA: Resolución de problemas con cuadriláteros cíclicos</td></tr>
</table>

EL entrenador	SÍ	NO
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? *Se resuelven otros problemas seleccionados con cierto nivel de improvisación de la propuesta de Jerónimo (2010) titulada: Geometría en Olimpiadas de Matemáticas, pero, igualmente, sin definir la cantidad a proponer en la sesión, lo que una vez más se concreta en función del progreso de los estudiantes.*		X
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? *La sesión se desarrolla como una continuación de la anterior. En esta se inicia recordando la teoría y seguidamente se procede a la resolución de problemas con mayor grado de dificultad que giran en torno a la temática. Los problemas se anotaron en el pizarrón por pares y en la misma forma fueron revisados con protagonismo del entrenador.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? *Sólo el tema a tratar, presentado en la siguiente forma: "Vamos a resolver problemas con cuadriláteros cíclicos"*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? *Sólo se proponen sucesivamente los problemas.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? *Retoma definición y propiedades de los cuadriláteros cíclicos*	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? *A mitad de la sesión y, ante las dificultades que hacen explícitas los estudiantes para resolver los problemas, forma dúos de trabajo (de forma dirigida) para que intercambien razonamientos que conlleven a la solución.*	X	
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		

g) ¿Explica en qué consisten los problemas? *Da explicaciones mínimas a partir de la lectura del problema anotado en el pizarrón*	X	
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? *Los cuestionamientos los formula para anteceder los pasos que implementa en la vía de solución que expone en la revisión general en el pizarrón.* *¿Hemos visto un problema con una figura semejante?, ¿recuerdan qué fue lo que hicimos ese caso? ¿Qué necesitamos encontrar?*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? *Sólo en la revisión general de algunos de los problemas.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? *Reorienta en el camino a seguir a través de preguntas reflexivas por puestos, en el pizarrón se desarrollan las buenas ideas*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? *Pasa por los puestos comprobando los avances. La mayoría de los alumnos manifiestan abiertamente sus dificultades para avanzar en la resolución de los problemas propuestos, llegando a implementar una que otra estrategia, pero sin visionar la combinación necesaria de estas para llegar a la solución. Se aplica un examen formal como colofón de la sexta semana de trabajo.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? *Aplica las estrategias de manipulación geométricas introducidas en la sesión anterior (Hacer dibujos).*	X	
n) ¿Cómo? - *Presenta una combinación de estrategias al exponer la solución de los problemas.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

Al igual que en la sesión anterior se percibe un ambiente cómodo en el salón por parte de los alumnos, pero su dinámica estuvo matizada por constantes entradas y salidas del salón por parte del entrenador y la propuesta de problemas que, comparativamente a los de la sesión anterior, fueron más complejos, por lo que la sesión se vio limitada a la resolución de los sucesivos problemas que le fueron orientados a los alumnos, en los cuales manifestaron dificultades que les impidieron llegar a la solución, consiguiendo en los mejores casos, avances parciales. De igual forma se pudo apreciar que ante las dificultades los alumnos manifestaron determinadas tendencias irreflexivas como fue el caso del estudiante que sugería a sus compañeros: "si estamos viendo cíclicos, hay que buscar cíclicos". Lo anterior condicionó que en un final los problemas fueran resueltos con protagonismo del entrenador.

Los problemas propuestos fueron también seleccionados de las experiencias recogidas en Jerónimo (2010):

Problema 1.

Ejemplo resuelto 1.5.2. pp. 29-30.

Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre el arco de AC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Demuestra que BP = PQ + QC.

Problema 2.

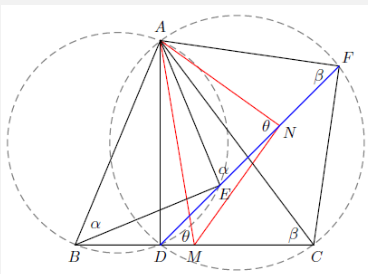
Ejemplo resuelto 1.5.3. pp. 30-31.

Sea △ABC un triángulo tal que AB > AC > BC. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que CD = BC, y sea M el punto medio del lado AC. Demuestra que BD = AC si y sólo si ∡BAC = 2∡ABM.

Problema 3.

Ejemplo resuelto 1.5.4. p. 31.

Sea △ABC un triángulo y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demuestra que AN es perpendicular a NM.



En la sesión de la tarde se aplica el examen correspondiente para evaluar la comprensión del contenido tratado en la sexta semana de entrenamientos, el cual se aplica con el mismo celo que cualquiera de las etapas formales de la Olimpiada ya que constituye el tercer examen selectivo.

Anexo 4. Entrenamiento 7, sesión 1 (E_7S_1)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>7mo ENTRENAMIENTO
SESIÓN: 1</td><td>FECHA: 21/2/2020</td><td>h: 4:10 – 8pm</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Esc. Sec. Técnica 34. Francisco Tenamaxtle</td><td>CIUDAD: Zacatecas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1.</td><td>ALUMNOS: 13</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Teoría de números</td><td colspan="2">TEMA: Álgebra y teoría de números</td></tr>
</table>

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Una selección de problemas tomados del cuarto apartado de "Problemas Avanzados", perteneciente a la serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas; y, de exámenes aplicados en competiciones de años anteriores en instancias estatales y nacionales.*	X	
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Presenta el tema a tratar.* - *Comienza recordando contenidos relativos al álgebra abordada desde el currículo general a partir del 3ro de secundaria y enfatiza en que el éxito ante los problemas a resolver durante la sesión dependerá en gran medida de su dominio.* - *Propone problemas afines a la temática que se entrelazan en el tiempo (antes de dar por resulto los anteriores, propone un nuevo grupo de problemas). En el nivel de dificultad de los problemas propuestos no se percibe una tendencia definida, esta es más bien es oscilatoria.* - *Interrumpe la concentración de los alumnos después de orientar el tercer problema para resolver los evaluados en los dos últimos exámenes aplicados en los entrenamientos (2 de Principio de las Casillas, 1 cuadriláteros cíclicos, 1 ángulos en la circunferencia).* - *Continúa con la propuesta de sucesivos problemas, mismos que se revisan fundamentalmente de forma particular por los puestos de trabajo.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Presenta el módulo como tema general, enfatizando seguidamente en que "el centro está en el trabajo con el binomio al cuadrado y con los binomios conjugados".*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *Música Instrumental en los tiempos dados para resolver problema.*	X	
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Al iniciar la sesión y al modelar soluciones a problemas* *Binomio al cuadrado* $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. *Binomios conjugados* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ - *Reglas de divisibilidad* - *Números primos*	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo?	X	

- *Deja a voluntad de los estudiantes el asociarse en parejas para resolver los problemas.*		
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Realiza preguntas a los alumnos acerca de si les queda claro lo que se le solicita en los enunciados y aclara las dudas puntualmente*	X	
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *De forma individualizada por puestos de trabajo como observaciones a respuestas parciales de los equipos de trabajo y como sugerencias de caminos a seguir. Por ejemplo:* *¿Cómo podemos platear las relaciones dadas en una sola expresión?* *¿Pueden expresarla como producto/suma?* *¿A qué problema se nos parece?*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Sólo en la revisión general de los problemas.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Hace ver en el pizarrón que el planteamiento no lleva a ningún lado.*	X	
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Obtiene explicaciones de alguno de los integrantes de los equipos conformados del procedimiento seguido por estos para llegar a la solución.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? *Escoger la notación efectiva:* - *Manipulación algebraica.* - *El uso de los productos notables:* $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *y/o factorización de trinomios cuadrados perfectos.* -	X	
n) ¿Cómo? - *Explícitamente, utilizando problemas análogos, luego de la primera revisión general de un problema en el pizarrón.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales
En la apreciación del observador, la ausencia de una planeación debidamente estructurada que guiara el proceso motivó que el entrenador, "al ritmo de su memoria", fuese incorporando apartados en la clase. Ejemplo de ello fue la exposición de soluciones que hiciera para evacuar dudas entorno los problemas que les había presentado en los dos últimos exámenes sabatinos, exámenes cuyo contenido evaluado no estaba directamente relacionado con la temática de la sesión de entrenamiento (Principio de Casillas, ángulos en circunferencias y cuadriláteros cíclicos) y, sin embargo, esta revisión se interpuso después de orientado el tercer problema de la sesión. De la misma forma se considera que el grado de improvisación fue el promotor de que la demanda cognitiva en las actividades propuestas fuese de "ida y regreso". No

obstante, sí se hizo explícita su separación en dos bloques, el primero (1-6), relacionando problemas relacionados con el binomio al cuadrado y, el segundo (7-9), ligado a binomios conjugados.

Cabe señalar que el grupo de alumnos se mantuvo durante toda la sesión trabajando con motivación, en un ambiente favorable donde no faltan comentarios, chistes, cantos de estribillos de canciones, etc., sin lacerar su desempeño, ya que en la mayoría de los casos lograron llegar a soluciones correctas buscando (también en voz alta) analogías con problemas que han resuelto anteriormente. Otro aspecto significativo fue que, aunque muchos alumnos tuvieron éxito ante los problemas utilizando diversos procedimientos, por ejemplo, la inducción, el entrenador fue incisivo con que encontraran soluciones utilizando estrategias de manipulación algebraica en la que contemplaran el empleo de los productos notables y/o la factorización.

Los problemas propuestos, por su orden, para la sesión fueron los siguientes:

Problema 1.

Si $a + b = 1$ *y* $a^2 + b^2 = 2$, *¿cuánto vale* $a^3 + b^3$*?*

Problema 2.

Si $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$, *¿cuánto vale* $x^3 + \frac{1}{x^3}$*?*

Problema 3.

Tenemos un triángulo rectángulo de área y perímetro 5. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Problema 4.

Identifiquen trinomios cuadrados perfectos y cuando lo sean factoricen:

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 + 2x + 25$

c) $x^2 + 10x + 5$

d) $4x^2 - 2xy + \frac{y^2}{4}$

e) $x^2 + y^2 - 2xy$

f) $n^2 - 8n + 16$

g) $n^2 + 4n + 8$

h) $m^2n^2 + 2 - \frac{1}{m^2n^2}$

i) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

j) $25 - 10 + 1$

Problema 5.

El cuadrado de un número más el doble de dicho número es 999999, ¿qué número es?

Problema 6.

La suma, la diferencia positiva, el producto y el cociente de dos números suman 420, ¿qué números son?

Problema 8.

Un cuadrado de $n \times n$ *se parte en 25 cuadrados, 24 cuadraditos de* 1×1 *y otro cuadrado. ¿Cuáles son los valores posibles para n?*

Problema 9.

Encuentra todos los enteros no negativos a y b tales que:

$3 \cdot 2^a + 1 = b^2$

Con la revisión de las últimas tres actividades concluye el entrenamiento.

Anexo 5. Entrenamiento 7, sesión 2 (E_7S_2)

7mo ENTRENAMIENTO **SESIÓN: 2**	**FECHA: 22/2/2020**	**h: 8:05 – 11am**
LUGAR: Esc. Sec. Técnica 34. Francisco Tenamaxtle		**CIUDAD: Zacatecas**
ENTRENADOR(A): Entrenador 1.		**ALUMNOS: 13**
MÓDULO: Teoría de números	**TEMA: Álgebra y teoría de números**	

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Trae aspectos del contenido claramente definidos (propiedades específicas) para ser expuestas a partir una selección de problemas del cuarto apartado de "Problemas Avanzados", perteneciente a la serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas; y, de exámenes aplicados en competiciones de años anteriores en instancias estatales y nacionales.*	X	
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Propone problemas acompañados por ciertas pistas (hints, en el lenguaje utilizado tanto por el entrenador como por sus estudiantes).* - *Refiere analogías con otros problemas anteriores.* - *Destaca propiedades implícitas en la situación dada.* - *Generaliza dichas propiedades.* - *Demuestra la generalización.* - *Propone problemas análogos de los cuales se revisaron solo algunos de ellos.* - *Resume aspectos relevantes del tema tratado en esta séptima semana de entrenamientos.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Inicialmente presenta sólo el módulo en el que se trabajaría, pero en varios momentos del entrenamiento, en el marco del análisis de cada problema, orienta hacia las propiedades y estrategias que constituyen el foco de la sesión.*	X	
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *Se desarrolla tipo clase tradicional.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *A manera de hint para algunos problemas:* *Propiedades tales como:* *Teorema fundamental de la aritmética.* $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ $(a-b)\|(a^n-b^n)$ $(a+b)\|(a^n+b^n)$; *para n-impar* $(a^d-b^d)\|(a^n-b^n)$; *para* $d\|n$ $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{a^n-1}{a-1}$ $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	X	

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$		
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *El entrenador asume el protagonismo en los primeros problemas del entrenamiento y ante problemas análogos, los olímpicos trabajan de forma independiente.*		X
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *No al momento de proponer el problema, deja que los alumnos hagan sus inferencias y seguidamente profundiza en la compresión del enunciado.*	X	
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *Desde su exposición explicativa general en el pizarrón ante las nuevas situaciones y de forma particular ante las dudas de los estudiantes para resolver los problemas análogos que propone.* *¿Qué sucede si n es par/impar?* *¿Cómo podemos escribir de forma general un primo mayor que tres?* *¿A qué caso de divisibilidad se corresponde?* - *De la misma forma los niveles de ayuda se manifiestan a través de hints que acompañan al planteamiento de la mayoría de los problemas. Ejemplos:* *Problema 1 (hints: usar paridad y residuos)* *Problema 4 (hints: manipulación de los exponentes y procedimiento de la raíz cuadrada para verificar número primo)*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Al presentar las "nuevas" propiedades y en la revisión general de algunos problemas.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Realiza cuestionamientos que llaman a la evaluación del procedimiento empleado de forma individual (por puestos) y realiza demostraciones en el pizarrón de estrategias que no permiten seguir avanzando*	X	
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones del procedimiento seguido por algunos estudiantes para avanzar (avances parciales) ante problemas análogos a los explicados por el entrenador.* - *Aplica exámenes formales escritos al término de la sesión.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? - *<u>Escoger la notación efectiva:</u>* *Notaciones específicas: ejemplo N.º primo >3 = 6k±1* *Manipulación algebraica*	X	

- *Perseguir la paridad y residuos.* - *Dividir en casos* - *Generalizar* .		
n) ¿Cómo? - *A partir de la ejemplificación en problemas análogos que por lo general demandan probar casos de divisibilidad.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

El entrenamiento transcurre de manera similar a una clase tradicional del tipo: problema-propiedades-generalización-demostración-problemas análogos. Los estudiantes mostraron tener los recursos necesarios para asimilar el nuevo contenido ("propiedades estratégicas para problemas específicos") y, con independencia de la referida dinámica que primó en el entrenamiento, se mostraron motivados y colaboradores con la construcción del saber novedoso.

A diferencia de las sesiones observadas anteriormente, el entrenador impuso un ritmo de trabajo para ir avanzando y alcanzar a tocar los elementos del contenido preconcebidos para la sesión. Entre las estrategias utilizadas con fines de agilizar el tránsito entre los focos prioritarios de abordaje para la sesión, algunos de los problemas propuestos en el pizarrón el entrenador los hizo acompañar de ciertas pistas (hints) que de alguna manera acotaban el razonamiento de los resolutores. Con idéntico propósito solo se realizó la revisión general de algunos problemas tipo seleccionados.

Los problemas propuestos y las pistas dadas se reproducen a continuación textualmente:

Problema 1.

Prueba que:

a) $2|n^2-n$
b) $6\,|\,n^3-n$ *(hints: usar paridad y residuos)*
c) $8\,|\,n^2-1$*; para n-impar* *(A partir de d) introduce primo>3=*$6k\pm1$)
d) $24\,|\,n^2-1$*; para (*$n>3, primo$*)*

Problema 2.

Demuestra que:

a) $2019|2020^{2020}-1$ *b) 2019* $|\,2020^n-1$ *(hints: Caso b) Ídem a) (usar estrategias de conteo)*

Problema 3.

Prueba que para cualquier $n\in\mathbb{N}>1$

a) $n^2-1|n^4-1$
b) $n-1|n^3-1$
c) $n^3-1|n^6-1$
d) $n-2|n^3-8$ *(hints: procedimiento análogo al de problemas anteriores)*

Problema 4.

El mayor factor primo <100 *de* 3^8-2^8 *(hints:* $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$*(manipulación de los exponentes)*

(procedimiento de la raíz cuadrada para verificar número primo)

Problema 5.

¿Para qué n entero positivo n^2-1 *es primo? (hints: paridad y diferencia de cuadrados)*

Problema 6.

¿Para qué n entero positivo n^2+1 *es primo?*

Problema 7.

Prueba que si $d|n$*; entonces* $a^d-b^d|a^n-b^n$

Problema 8.

Encuentra el mayor entero n tal que $3^n | (2^2)^{2020} - 1$

Para concluir, el entrenador resume los aspectos más importantes analizados en la sesión, pregunta dudas y procede, luego de un receso de 1h, a la aplicación de un examen formal para evaluar la comprensión del contenido, contemplado como el cuarto examen selectivo.

Anexo 6. Entrenamiento 8, sesión 1 (E_8S_1)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td>
<td>8vo ENTRENAMIENTO SESIÓN: 1</td><td>FECHA: 28/2/2020</td><td>h: 4:10 – 8:03pm</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Esc. "Margarita Maza de Juárez"</td><td>CIUDAD: Jerez de García Salinas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1.</td><td>ALUMNOS: 14</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Combinatoria</td><td colspan="2">TEMA: Coloraciones</td></tr>
</table>

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Una selección de problemas cuyo camino de solución demanda el empleo de diversos tipos de coloraciones.* *(Material básico: Engel, 1998, pp. 25-38 y de la serie de cuadernos de olimpiadas: "Combinatoria" y "Problemas avanzados).*	X	
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Introduce la temática a partir de un ejemplo con el tablero de ajedrez (según: Engel, 1998, p. 25).* - *Propone sucesivos problemas (dos a la vez).* - *Proporciona tips que llaman a la reflexión en torno a la comparación de sus condiciones (si son análogos o no) con los que anteriormente han venido resolviendo, para introducir la lógica de utilidad (pertinencia) de diferentes coloraciones* - *De la misma forma que fueron propuestos (dos a la vez) se revisan los problemas.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Únicamente el tema a tratar, al cual hace referencia de modo general como "Coloraciones".*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *Se desarrolla tipo clase tradicional.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Coloración de ajedrez.*	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *El entrenador orienta los problemas y los olímpicos trabajan de forma independiente.*		X
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *En cada problema propuesto insiste en la comprensión de lo que se da, lo que se pide y en cuál es la condición.*	X	

h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias preguntas guías inteligentes? - *Formula cuestionamientos dirigidos al colectivo de alumnos con relación a la comprensión del problema y, precisiones particulares sobre la estrategia de ataque de forma individualizada, por puestos, luego de escuchar el razonamiento del alumno.* *Ejemplos:* *¿Podemos intentar una coloración de ajedrez?* *¿Qué tipos de elementos tenemos en el conjunto con tal coloración?*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *A partir del ejemplo inicial y luego en la revisión general de los problemas propuestos.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Realiza demostraciones en el pizarrón de la inutilidad de coloraciones vistas anteriormente que fueron intentadas por algunos alumnos.*	X	
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones del razonamiento seguido por algunos estudiantes para encontrar soluciones. Los estudiantes manifiestan la dificultad del contenido con relación a la ocurrencia de la coloración adecuada para determinados problemas.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? *Hacer una coloración de ajedrez.* - *Hacer uso del teorema de las Casillas, paridad o invarianza (algo que no cambia).* *Considerar casos extremos y argumentar por contradicción* - *Hacer una coloración de acuerdo con el peor de los casos o intentar de llegar a lo contrario a lo que pide el problema (llegar a una contradicción).*	X	
n) ¿Cómo? - *A través de su ejemplificación en problemas de combinatoria que evidencian la utilidad de particionar un conjunto en subconjuntos disjuntos. Plantea que para que el problema salga se les debe ocurrir o conocer una coloración, la cual deberá tener cierto sentido.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

El entrenamiento transcurre en un ambiente favorable, donde los estudiantes tienen la oportunidad de hacer comentarios, bromas, etc., a la vez que tratan de resolver los problemas propuestos. El entrenador no impone un ritmo de trabajo, propone los nuevos problemas a resolver y realiza la revisión general una vez que ha transcurrido un promedio de 20min por problema y varios alumnos han encontrado alguna solución luego de haber trabajado individualmente. En ese lapso aclara dudas y proporciona "hints" a los alumnos que así lo requieren. En sentido general los alumnos encontraron la motivación en el desafío que le supuso cada problema.

El enfoque para introducir la temática de "Coloración" como estrategia para atacar algunos problemas de combinatoria se basa en su carácter sugestivo, ya que la asociación de colores (ejemplo: ciclos de 2, 3 o más colores, filas, columnas, diagonales, etc.) a los elementos del conjunto propicia una visualización del problema que no pocas veces *contribuye a solucionarlo.*

Partiendo de esta idea se presentó, de forma parafraseada, la situación descrita por Engel, 1998, p. 25 relacionada con el tablero de ajedrez y las fichas de dominó. La esencia de esta introducción fue la siguiente:

Se ha demostrado que un tablero de ajedrez (8×8) *puede ser cubierto con fichas de dominó* (2×1) *de:* $2^4 \cdot 901^2 = 129888116$ *formas, ocupando cada ficha en todos los casos la región de dos casillas contiguas, lo que le hace corresponder a cada una de estas casillas de la ficha dominó colores distintos del tablero.*

Seguidamente:

Si se cortan las dos casillas de una misma diagonal, no es posible cubrir el tablero exactamente, es decir, sin que se sobresalga o se traslape una casilla de la ficha del dominó de ninguna manera. Lo anterior se explica sobre la base de que las "esquinas" cortadas tienen el mismo color y, en consecuencia, de las 62 casillas que quedan, a 32 le correspondería un color y sólo a 30 el otro, por lo que de cualquier forma quedarían, como mínimo, dos casillas descubiertas, pero de un mismo color.

A partir del análisis de la situación anterior se presentaron de manera sucesiva los siguientes problemas:

Problema 1.

A un tablero de ajedrez se le quita una casilla de la esquina y se quiere tapizar con fichas de 1×3*. ¿Será posible?*

Problema 2.

A una cuadrícula de 10×10 *se le recorta la casilla de una de sus esquinas. ¿Será posible tapizarla con un tetraminós en forma de T?*

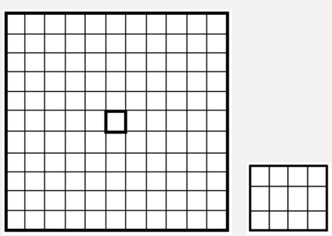
Problema 3.

Prob. 1, p. 26, (Engel, 1998).

Un suelo rectangular está cubierto por azulejos de 2×2 *y* 1×4*. Un azulejo quedó destrozado. Hay un azulejo del otro tipo disponible. Demuestra que el suelo no puede ser cubierto al cambiar los azulejos.*

Problema 4.

Se tiene un tablero de 11×11 *al que se le ha quitado el cuadradito del medio. ¿Cuál es la mayor cantidad de fichas de* 3×4 *que puedo colocar sin que se traslapen o se salgan del tablero?*



Problema 5.

Prob. 6 p. 26, (Engel, 1998).

Considera una cuadrícula de $n \times n$ *a la que se le quitan los cuadrados de las esquinas. ¿Para qué valores de n se puede cubrir la cuadrícula con tetraminós en forma de L?*

Problema 6.

Se tiene una cuadrícula de $n \times n$ *y se le quita una de las esquinas, se quiere cubrir con fichas de dominó de* 2×1 *de forma tal que la cantidad de fichas verticales y horizontales sea la misma. ¿Para qué valores de n se cumple?*

Problema 7.

Muestre que un rectángulo de $m \times n$ *se puede llenar con cuadrados de* 2×2 *si y sólo si m y n son pares.*

No se produce un cierre formal de la sesión.

Anexo 7. Entrenamiento 8, sesión 2 (E_8S_2)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>8vo ENTRENAMIENTO
SESIÓN: 2</td><td>FECHA: 29/2/2020</td><td>h: 8:10 – 11am</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Esc. “Margarita Maza de Juárez”</td><td>CIUDAD: Jerez de García Salinas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 2.</td><td>ALUMNOS: 14</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Combinatoria</td><td colspan="2">TEMA: Separadores</td></tr>
</table>

EL entrenador	SÍ	NO
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Una selección de problemas de combinatoria donde es posible implementar el uso de separadores como estrategia de conteo. Los problemas son tomados de Cuadernos de Olimpiadas: “Combinatoria” y “Problemas avanzados”.*	X	
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Recuerda definiciones.* - *Propone problemas.* - *Los alumnos exponen las soluciones halladas en el pizarrón a sus compañeros.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Presenta el tema como: “Uso de separadores en problemas de combinatoria”*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *Fomenta el protagonismo estudiantil en la revisión general de los problemas.*	X	
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? *Recuerda:* - *Principio fundamental del conteo* - *La expresión general de separadores que permite repartir N elementos en r subconjuntos* $\binom{N+r-1}{r-1}$	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *Se deja con carácter opcional y algunos se integran en equipo de a 3.*	X	
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Propone los problemas por parejas y los deja abierto a la comprensión de los discípulos.*		X
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes?		X

- *El entrenador no ofrece ningún nivel de ayuda*		
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Sólo para el primer problema propuesto.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Interviene poco durante la sesión. En este sentido se limita a señalar los errores detectados a su paso por los puestos de trabajo.*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Las producciones escritas en cuadernos de algunos alumnos.* - *Explicaciones en plenaria de alumnos voluntarios para exponer su razonamiento en el pizarrón.* - *Aplica examen formal en el cierre de la jornada de entrenamiento.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? - *Utilización de separadores en problemas de conteo.* - *Estrategias de conteo.*	X	
n) ¿Cómo? - *A partir de la ejemplificación de su utilidad para simplificar tiempo y esfuerzo en problemas cuyo análisis por casos demanda conteos muy extensos.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

La sesión transcurre en un ambiente favorable donde algunos alumnos trabajan de forma individual y otros en equipo a partir de que el entrenador presentara el tema a tratar y, seguidamente, presentara y ejemplificara $\binom{N+r-1}{r-1}$ *como la expresión general de separadores que permite repartir N elementos en r subconjuntos, visto como una permutación con repeticiones, siguiendo lo expuesto en Pérez, 2000, p. 76.*

Luego de esta breve introducción, el entrenador hizo recaer todo el protagonismo en los estudiantes, limitando sus intervenciones a nivel general a la propuesta de los nuevos problemas y a checar el trabajo de algunos alumnos en cada problema de manera particular. La modelación de una solución para cada problema propuesto fue expuesta por los propios alumnos que voluntariamente se brindaron para compartirla desde el pizarrón.

Algunos alumnos manifestaron abiertamente tener dificultades para resolver ciertos problemas propuestos, aún así, el entrenador los dejó trabajar de forma autónoma. La propuesta en sí fue la siguiente:

Problema 1.

Ejemplo 10.1 p. 75 Cuaderno: "Combinatoria". (Pérez, 2000).

¿De cuántas formas pueden comprarse 20 galletas de una tienda que vende galletas de 5 sabores?

Problema 2.

Noé quiere subir 30 escalones, pero sólo quiere pisar 7 de ellos. Si puede brincar todos los que sean necesarios, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

Problema 3.

Ejemplo 10.4 p. 76 Cuaderno "Combinatoria. (Pérez, 2000).

¿De cuántas formas pueden escogerse 8 enteros a_1, a_2,…, a_8, *no necesariamente distintos, tales que* $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$*?*

Problema 4.

Encuentra cuántas ternas (x; y; z) satisfacen: $x + y + z = 2020$.

Problema 5.

¿De cuántas maneras se pueden escoger 5 elementos, no consecutivos, del conjunto $\{1; 2; 3; \ldots; 15\}$*?*

Problema 6.

Se quieren repartir 35 naranjas en 6 cajas numeradas de tal manera que ninguna caja quede vacía. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

Problema 7.

¿Cuántas números menores a 10000 hay tal que la suma de sus dígitos es 9?

En el cierre de la sesión, el entrenador explica soluciones para los dos problemas evaluados como colofón de la semana anterior de entrenamientos.

Posteriormente, luego del receso de 1h, programado después de 3h de entrenamiento, se aplica un examen formal conformado por dos problemas con la finalidad de evaluar el aprendizaje con relación al contenido tratado en esta octava semana de entrenamientos el cual constituye el quinto examen selectivo.

Anexo 8. Entrenamiento 9, sesión 1 (E_9S_1)

9no ENTRENAMIENTO **SESIÓN: 1**	**FECHA: 6/3/2020**	**h: 4:07- 8pm**
LUGAR: Instituto Educativo de Zacatecas (IEZ)		**CIUDAD: Guadalupe**
ENTRENADOR(A): Entrenador 1.		**ALUMNOS: 13**
MÓDULO: Geometría	**TEMA: Líneas y puntos notables en un triángulo**	

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *El tratamiento del contenido se realiza según lo propuesto en el Capítulo 2 de Jerónimo (2010).*	X	
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Introduce la definición de mediana.* - *Se demuestran propiedades.* - *Define el baricentro.* - *Se demuestran propiedades.* - *Se realiza el mismo tratamiento respectivamente para mediatriz-circuncentro, bisectriz-incentro y altura-ortocentro.* - *Se proponen y resuelven problemas.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Escribe en el pizarrón el tema a tratar como: "Líneas y puntos notables en un triángulo"*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *La sesión se desarrolla de forma tradicional pero enriquecida con material didáctico.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Algunos de ellos, sólo los que tienen que ver con las definiciones y propiedades de las líneas y puntos notables.*	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *Trabajo en dúos.*	X	
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Enfatiza en la comprensión de los datos, la condición y lo que se busca en cada problema*	X	

propuesto.		
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *Proporciona ayuda para la construcción de figuras no dadas y,* - *Preguntas reflexivas como apoyo a las explicaciones que da a algunos dúos de alumnos y en la revisión general del problema, por ejemplo:* • *¿Qué punto notable cumple tal condición?* • *¿En qué razón se encuentran determinados segmentos?* • *¿Nos ayudaría encontrar triángulos semejantes?*	X	
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Transcurrido el tiempo dado para resolver el problema explica una solución en el pizarrón.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Le pide que realicen la demostración de su planteamiento de y en el pizarrón se presentan sólo ideas correctas.*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza? - *Demostraciones con material concreto (Triángulos en papel para demostrar propiedades de la mediana y el baricentro).*	X	
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones de uno de los alumnos de cada dúo de trabajo sobre los razonamientos que lo llevaron a la solución.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? <u>*Hacer dibujos*</u> - *Trazar líneas y puntos notables.* - *Prolongar segmentos.* - *Trazar paralelas y perpendiculares* <u>*Argumentar por contradicción*</u>	X	
n) ¿Cómo? - *A partir de la ejemplificación de su utilidad para determinar y relacionar nuevos ángulos, triángulos congruentes o semejantes y cuadriláteros cíclicos.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

La sesión se desarrolló en un ambiente favorable donde los alumnos se mostraron visiblemente motivados y colaborativos con el aprendizaje.

El entrenador, luego de presentar el tema a tratar, abordó las definiciones y propiedades de las rectas y puntos notables, proponiéndole la demostración de algunas de estas propiedades a los alumnos, mismas que posteriormente son analizadas en plenaria. Para la presentación de estos objetos matemáticos utiliza recursos didácticos, por ejemplo, la propiedad que tiene la mediana de determinar dos triángulos con la misma área y el baricentro como centro de gravedad del triángulo las evidencia a partir de triángulos construidos en papel. Para el caso de la mediatriz coloca dos puntos en el pizarrón y les pide a algunos alumnos sucesivamente que ubiquen puntos que equidisten de los puntos iniciales, con lo cual, pasado el tercer alumno, pudieron definirla como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

Presentada la teoría, esta se resume y se procede a formar dúos de trabajo para resolver los problemas siguientes, donde, por lo general, la demanda consiste en la realización de demostraciones, mismos que se anotaron en la pizarra de dos en dos:

Problema 1.

Problema 2.4 p. 73 (Jerónimo, 2010).

Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.

Problema 2.

Problema 2.5 p. 73 (Jerónimo, 2010).

Problema 3.

Sea ABC un triángulo rectángulo. Sea $\sphericalangle B = 90$*, M el punto medio de AC y H el pie de altura desde B. Prueba que la bisectriz de* $\sphericalangle B$ *bisecta a* $\sphericalangle MBH$*.*

Problema 4.

Demuestra que la bisectriz corta al lado opuesto en la misma razón de los lados que equidista.

Problema 5.

Adaptación del ejemplo 2.2.3 p. 77 (Jerónimo, 2010).

Sea I el incentro de ABC, sea J la intersección de AI con la circunferencia circunscrita de ABC. Prueba que J es el circuncentro de BIC.

Problema 6.

Problema 2.51 p. 89 (Jerónimo, 2010).

En un triángulo ABC sean H, O y M, el ortocentro, el circuncentro y el punto medio del lado BC, respectivamente. Demuestra que AH es el doble de OM.

Anotada cada pareja de problemas en el pizarrón el entrenador pasa por los puestos de trabajo escuchando el razonamiento seguido por algunos estudiantes y transcurrido un tiempo prudencial conduce su revisión a nivel general.

Anexo 9. Entrenamiento 9, sesión 2 (E_9S_2)

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>9no ENTRENAMIENTO
SESIÓN: 2</td><td>FECHA: 7/3/2020</td><td>h: 8:15 – 11am</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Instituto Educativo de Zacatecas (IEZ)</td><td>CIUDAD: Guadalupe</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1.</td><td>ALUMNOS: 13</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Geometría</td><td colspan="2">TEMA: Líneas y puntos notables en un triángulo (Continuación).</td></tr>
</table>

EL entrenador	SÍ	NO
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Selección de problemas "en el momento", utilizando como fuente básica los propuestos en el Capítulo 2 de Jerónimo (2010).*		X
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Recuerda definiciones y propiedades de las rectas y puntos notables.* - *Propone problemas (algunos de ellos acompañados de hints).* - *Realiza revisiones individuales sin adelantar estrategias claves* - *Realiza la revisión general del problema.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *Sólo el tema con el que se relacionan los problemas de la sesión aludiendo a que la sesión es una "continuación de lo visto en la anterior"*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *La sesión se desarrolla tipo clase tradicional.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Inicia retomando las definiciones y propiedades de las líneas y puntos notables.*	X	
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *Trabajo en dúos.*	X	
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Los anota en el pizarrón a la vez que le da lectura en voz alta haciendo hincapié en la comprensión del enunciado.*	X	
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *Esboza las figuras que cumplen las condiciones dadas*	X	

- *En el marco de las explicaciones que da a algunos dúos de alumnos no sin antes dejar que batallen con el problema y posteriormente en su revisión general, por ejemplo:* • *¿Qué punto notable cumple tal condición?* • *¿En qué razón se encuentran determinados segmentos?* • *¿Nos ayudaría encontrar triángulos semejantes?*		
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Transcurrido el tiempo dado para resolver el problema.*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *El tratamiento al error se realiza de forma individual en los dúos de trabajo en que tuvieron lugar y se presentan en el pizarrón sólo las buenas ideas*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones de alumnos sobre los razonamientos que lo llevaron a la solución.* - *Producciones escritas que tienen lugar durante la sesión y posteriormente con motivo de la aplicación del sexto examen selectivo.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? *Hacer un dibujo* - *Trazar líneas y puntos notables.* - *Prolongar segmentos.* - *Trazar paralelas y perpendiculares.*	X	
n) ¿Cómo? - *A partir de la ejemplificación de su utilidad para determinar y relacionar nuevos ángulos, triángulos congruentes o semejantes y cuadriláteros cíclicos.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

La sesión se presenta como una continuación de la desarrollada el día anterior. Los alumnos se manifiestan motivados y a gusto, pero desde los inicios dejan ver su preocupación por las características que puedan tener los problemas que componen el sexto examen selectivo que, relacionados con la temática presentada, deberán realizar al cierre de la jornada. Al respecto el entrenador refiere que con la teoría vista hasta ese momento es suficiente para resolverlos.

Partiendo de ello, antes de empezar con la propuesta de los problemas a resolver en el entrenamiento, mismos que fue seleccionando conforme fue avanzando la sesión utilizando como material básico nuevamente a Jerónimo (2010), retoma las definiciones y propiedades de las líneas y puntos notables. Esta introducción tuvo como colofón la presentación del primer problema en el entrenamiento. Dicho problema es de tipo portador de información lo que propició que el entrenador introdujera nuevos elementos teóricos, específicamente la definición de mediana de un cuadrilátero y su baricentro, generalizando para este último objeto matemático que, para cualquier polígono, es el promedio de los valores de abscisa y de ordenada de los vértices del polígono en el plano cartesiano.

Durante el entrenamiento se resolvieron por su orden los problemas siguientes:

Problema 1.

Problema 2.76 p. 73 (Jerónimo, 2010).

En un cuadrilátero convexo definiremos una mediana como la línea que une un vértice con el centroide del triángulo formado por los tres vértices restantes. Demuestra que las cuatro medianas en un cuadrilátero se intersecan en un punto y que además se dividen por este en la razón 3 : 1.

Problema 2.

Sea ABC un triángulo y H su ortocentro. Sea J, K y L los pies alturas desde A, B y C, respectivamente. Prueba que H es el incentro de JKL.

Problema 3.

Problema 2.51 p. 89 (Jerónimo, 2010).

Problema 4. (selectivo anterior)

Demuestra que los 3 puntos medios de un triángulo y un pie de altura determinan un cuadrilátero cíclico.

Los niveles de ayuda proporcionados por el entrenador ante cada problema se vieron reducidos a la construcción en el pizarrón de las figuras que cumplieran con las condiciones dadas en cada caso, acompañando estas de sugerencias tales como la de hacer la figura lo menos prototípica posible, es decir, que no conduzca a un caso específico. Esta ayuda fue complementada puntualmente con preguntas reflexivas a algunos dúos de trabajo

Los problemas en general demandaron para llegar a una solución la combinación de estrategias como la construcción de trazos auxiliares y prolongaciones, demostraciones de igualdad entre lados y/o ángulos, demostraciones de paralelismo entre segmentos y de semejanza entre triángulos.

La jornada cierra con la aplicación del sexto examen selectivo compuesto por dos problemas en los que se requiere habilidades en el manejo de las estrategias anteriores y el dominio de las propiedades de las líneas y puntos notables en triángulos.

Anexo 10. Entrenamiento 10, sesión 1 ($E_{10}S_1$)

10mo ENTRENAMIENTO **SESIÓN: 1**	**FECHA: 13/3/2020**	**h: 4:01 – 8pm**
LUGAR: Liceo E.S.L. Guadalupe		**CIUDAD: Zacatecas**
ENTRENADOR(A): Entrenador 1.		**ALUMNOS: 13**
MÓDULO: Geometría, Teoría de números, Combinatoria.	**TEMA: Resolución de problemas variados.**	

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *Selecciona y propone problemas de temas variados conforme se van resolviendo los anteriormente propuestos.*		X
b. ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Presenta sucesivos problemas.* - *Pasa por los puestos de los alumnos que trabajan individualmente escuchando razonamientos y haciendo señalamientos.* - *Manda al pizarrón a algunos alumnos para que expongan la solución encontrada.* - *Comenta otras vías de solución implementadas por alumnos, mismas que detectó a su paso por los puestos de trabajo.*		
c. ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *No refiere propósitos específicos, de modo general alude a "resolver problemas".*		X
d. ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *A mitad del entrenamiento y durante 20min promueve y participa y en un juego de rol que favorece las deducciones lógicas, conocido de varias formas, entre ellas como el "Juego del Asesino".*	X	
e. ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Va directamente al problema sin realizar recordatorios.*		X
f. ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *Los alumnos trabajan de forma independiente.*		X
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g. ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Al momento de su propuesta hace el énfasis necesario para dar a entender lo que se está pidiendo en los enunciados.*	X	

h. ¿Proporciona niveles de ayuda a través de preguntas guías inteligentes? - *Deja a los estudiantes que por sí solos lidien con el problema y, en los casos de “atoro”, da algunos hints que señalan por donde atacarlo, por ejemplo: “consideren argumentos de paridad”, “usen separadores”, etc.*	X	
i. ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *Transcurrido el tiempo dado para resolver el problema expone caminos de soluciones distintos a los explicados por el alumno en pizarra.*	X	
j. ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *El tratamiento al error se realiza de forma individual, se socializan sólo respuestas correctas.*		X
k. ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l. ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones de alumnos sobre los razonamientos que lo llevaron a la solución.*	X	
m. ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? - *Hacer trazos auxiliares.* - *Uso de separadores.* - *Principios de paridad.*	X	
n. ¿Cómo? - *A partir de sugerencias “hints” y la ejemplificación de su utilidad en problemas análogos.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

El entrenador presenta la sesión refiriendo que ya todos los temas matemáticos han quedado cubiertos (refiere a la teoría) con el transcurso de las nueve semanas de entrenamientos anteriores y que, por tal motivo, las sesiones restantes a partir de la presente serían dedicadas a la resolución de problemas variados relacionados con estos temas.

La dinámica del entrenamiento se caracterizó por la propuesta por parte del entrenador de problemas que requirieron estrategias relacionadas con distintas áreas del saber matemático, como es el caso de la teoría combinatoria, la teoría de números y la geometría. Seguidamente a la puesta bajo foco de determinado problema, el entrenador recorre el salón comprobando los avances de los alumnos a la vez que les va señalando, de manera individualizada, cuando la estrategia que está implementando el estudiante no lo llevará a obtener una solución correcta. Cuando el progreso del colectivo es insuficiente da hints que marcan el camino para atacar el problema.

Se percibieron manifestaciones de desconcentración en algunos estudiantes, expresada a partir de una constante conversación que fue advertida por el entrenador, llamándole la atención a los implicados en reiteradas ocasiones y llegando hasta el cambio de puestos de trabajo para algunos con la intensión de distanciarlos entre sí. Posteriormente el entrenador los llama a la reflexión haciéndoles ver que este tipo de conducta no sólo le afecta a los involucrados si no que hace que otros alumnos no puedan alcanzar adecuados niveles de concentración. De la misma forma subraya que en el entrenamiento si se puede conversar, pero siempre y cuando los estudiantes por si solos vuelvan al problema, es decir, sin que para ello tenga que intervenir el entrenador. Con el objetivo manifiesto de que la membresía de estudiantes del salón ponga el 100% de su esfuerzo en función de los problemas propuestos en el entrenamiento, el entrenador ofrece tomar un receso de 20min en el cual se involucra con los propios discentes en un juego de rol que *promueve las deducciones lógicas.*

Los problemas propuestos en la sesión fueron los siguientes:

Problema 1.

En una cuadrícula de 5×5 *en cada cuadrito se coloca un 1 o -1. Después se calcula el producto de los 5 números de cada fila y columna. ¿Puede la suma de esos 10 números ser igual a 0? (hints: paridad).*

Problema 2.

Encuentra todos los números primos p tales que existe $n \in \mathbb{N}$ *que cumple:* $p^n - 9n = n^p$. *(hin: paridad de n).*

Problema 3.

A una fiesta asisten n personas, cada uno saluda a exactamente 3 personas. Encuentra los posibles valores de n. (hints: paridad de n).

Problema 4.

Encuentra todos los p primos tales que $p^2 + 77$ *tiene exactamente 5 divisores. (hints: recuerda que todos los números de 5 divisores tienen la forma* p^4 *y generaliza que cuando un primo tiene una cantidad impar de divisores es una potencia de un primo).*

Problema 5.

Encuentra todos los p primos p, q y r tales que: $p^3 + q^3 = r^3$ *(hints: factorizar).*

Problema 6.

Sea ABC un triángulo con $\sphericalangle BAC < 90°$. *Sea O un punto interior al triángulo tal que* $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$ *y* $\overline{BO} = \overline{CO}$. *Prueba que O es el circuncentro de ABC.*

Problema 7.

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico. Sea $P = \overline{AD} \cap \overline{BD}$ *con* $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ *y M el punto medio de* $\overline{AB}$. *Prueba que* $\overline{MP} \perp \overline{CD}$.

Problema 8.

De cuántas maneras distintas podemos tomar 5 elementos del conjunto $\{1; 2; 3; \ldots; 12\}$ *de forma que no haya consecutivos. (hints: usar separadores).*

No se produce un cierre formal de la sesión, con la revisión del último de estos problemas se da por concluido el entrenamiento.

Anexo 11. Entrenamiento 10, sesión 2 ($\boldsymbol{E_{10}S_2}$)

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td>10mo ENTRENAMIENTO</td><td rowspan="2">FECHA: 14/3/2020</td><td rowspan="2">h: 8:40 – 11pm</td></tr>
<tr><td>SESIÓN: 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">LUGAR: Liceo E.S.L. Guadalupe</td><td>CIUDAD: Zacatecas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ENTRENADOR(A): Entrenador 1, Entrenador 2, Entrenador 3.</td><td>ALUMNOS: 13</td></tr>
<tr><td>MÓDULO: Geometría, Teoría de números, Combinatoria.</td><td colspan="2">TEMA: Resolución de problemas variados.</td></tr>
</table>

EL entrenador	**SÍ**	**NO**
a) ¿Tiene una planeación predeterminada para el entrenamiento? - *El entrenamiento es atípico , distintos entrenadores llegan y proponen un problema para resolver.*		X
b) ¿Cuál es la estructura didáctica del entrenamiento? - *Se presentan sucesivos problemas, algunos de los cuales posteriormente se revisan de forma general en el pizarrón.*		
c) ¿Presenta al grupo los propósitos (aprendizajes) esperados con la sesión de entrenamiento? - *No se refiere ni el tema ni los propósitos de aprendizaje que se persiguen con la sesión. Se infiere que la misma es una continuación de la sesión de entrenamiento anterior.*		X
d) ¿Utiliza estrategias motivacionales? ¿Cuál(es)? - *Ninguna, los distintos entrenadores proponen problemas.*		X
e) ¿Recupera saberes (recursos) de los alumnos sobre los contenidos a estudiar? - *Se va directamente al problema sin realizar recordatorios.*		X
f) ¿Fomenta el trabajo colaborativo al realizar las actividades de aprendizaje? ¿Cómo? - *Se da de manera natural en ausencia de los entrenadores en el salón.*	X	
Al mediar la interacción de los alumnos con los contenidos:		
g) ¿Explica en qué consisten los problemas? - *Sólo se anotan los problemas en el pizarrón y se deja a la comprensión de los estudiantes.*		X
h) ¿Proporciona niveles de ayuda a través de sugerencias o preguntas guías inteligentes? - *Los entrenadores presentan el problema acompañados de hints. Ejemplo:* *Problema 1 (hints: semejanza de triángulos).* *Problema 4 (hints: principio de las casillas)*	X	

Problema 5 (hints: cambios de paridad).		
i) ¿Modela cómo se realizan los problemas? - *En la revisión general de algunos problemas (no todos fueron resueltos en el pizarrón).*	X	
j) ¿Retoma los razonamientos erróneos expresados por los alumnos en sus explicaciones como modelo? - *Los entrenadores no se proyectan en función de la detección de los errores cometidos por los alumnos.*		X
k) ¿Se utiliza algún tipo de material didáctico? ¿Quién lo utiliza?		X
l) ¿Obtiene evidencias del aprendizaje de los alumnos? - *Explicaciones de algunos alumnos sobre el razonamiento seguido para resolver los problemas y exposiciones en el pizarrón.* - *Las producciones escritas como parte de la aplicación del séptimo examen selectivo.*	X	
m) ¿Gestiona la utilización de estrategias heurísticas para la resolución de los problemas? ¿Cuál(es)? - *Hacer trazos auxiliares.* - *Demostrar la semejanza de triángulos.* - *Buscar cuadriláteros cíclicos.* - *Uso de separadores.* - *Principio de las casillas.* - *Principios de paridad.*	X	
n) ¿Cómo? - *A partir de sugerencias "hints" y la ejemplificación de su utilidad en problemas análogos.*		

Observaciones generales y apreciaciones personales

El entrenamiento transcurre en circunstancias atípicas ya que el entrenador titular no llegó si no hasta los 40min antes del final de la sesión debido a problemas personales. La ausencia fue suplida con el concurso de otros 2 integrantes del grupo de entrenadores inmersos en la preparación del preselectivo zacatecano.

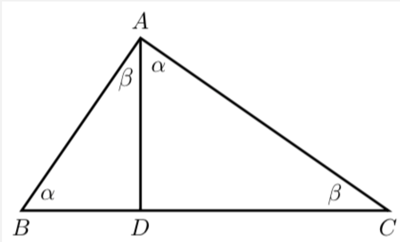
Con la entrada del primer entrenador comienza la actividad para los educandos, anotándole este en el pizarrón el primer problema a resolver. En general la dinámica que matizó la sesión fue el trabajo colectivo de los estudiantes en función de resolver los problemas que cada uno de los entrenadores le propuso.

Cabe destacar que, aún cuando durante la sesión no permaneció un entrenador en el salón a tiempo completo, los estudiantes mostraron motivación por resolver los problemas que le fueron propuestos. Varios de ellos se fueron al pizarrón a exponer sus razonamientos al resto de sus compañeros. De manera general, el grupo se fraccionó en varios grupos de trabajo en los que confrontaron sus argumentos y estrategias de solución. A la llegada de algún entrenador uno de los estudiantes le exponía la solución (o los avances) previamente acordados en el colectivo. El segundo de los problemas no pudo ser resuelto por los alumnos a pesar de invertirle todo el esfuerzo en conjunto por más de 1h.

Los problemas propuestos en la sesión fueron los siguientes:

Problema 1.

Demuestra que en triángulo ABC rectángulo en A se cumple que: $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ *(Teo. 1.7 p. 49, Jerónimo, 2010).(hints: semejanza de triángulos).*



Problema 2.

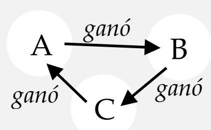
Sea $\overline{AB}$ *una cuerda de la circunferencia y M su punto medio. Otra cuerda* $\overline{CD}$ *en la misma circunferencia pasa por M, se construye una semicircunferencia con diámetro* $\overline{CD}$*. La recta perpendicular a* $\overline{CD}$ *que pasa por M interseca a la semicircunferencia en K. Demuestra que* $\overline{AM} = \overline{KM}$*. (hints: hacer trazos auxiliares, buscar cuadriláteros cíclicos).*

Problema 3.

Se quieren sentar 10 mujeres y 15 hombres en una mesa redonda. De cuántas maneras se podrán sentar sin que dos mujeres queden juntas. (hints: separadores).

Problema 4.

Hay 7 jugadores de ajedrez, todos jugaron contra todos. Cada uno ganó 3 partidas y perdió tres partidas. Prueba que podemos elegir tres tercias de Jugadores A, B, C de forma que:



(hints: principio de las casillas)

Problema 5.

Tienes 19 fichas azules, 2020 verdes y 2021 rojas. En cada paso vas a tomar 2 de colores distintos y deberás remplazarlas con una del otro color. Si al final te queda solo una ficha, ¿de qué color será?(hints: cambios de paridad).

No se produce un cierre formal de la sesión, con la revisión del último de estos problemas se da por concluido el entrenamiento y luego del programado receso de 1h se aplica el séptimo examen selectivo.

Anexo 12. Temarios de los entrenamientos de verano la OMM en San Luis Potosí

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en San Luis Potosí Escuela de Verano

Bloque 1

Temario

Geometría (G):

1. Ángulos
    a. Por amplitud, por relación
    b. Entre paralelas
    c. En triángulos, en polígonos
    d. En círculos
2. Áreas
    a. Fórmulas para polígonos
    b. Áreas compuestas
    c. Por complemento
    d. Teorema de los tapetes
3. Congruencia de triángulos
4. Semejanza de triángulos
    a. Teorema de Thales
    b. Teorema de Pitágoras
5. Rectas y puntos notables en un triángulo
6. Cuadriláteros Cíclicos
7. Potencia de un punto

Teoría de Números (TN):

1. Criterios de divisibilidad
2. Propiedades de la divisibilidad
    a. Teorema Fundamental de la Aritmética
    b. Factores primos
3. Algoritmo de la división
    a. Mínimo común múltiplo
    b. Máximo común divisor
4. Combinación lineal

5. Residuos

Combinatoria (C):

1. Conteo
2. Permutación y combinación
3. Separadores, caminos y multinomial
4. Cuenta de dos maneras
    a. Por complemento
    b. Inclusión – Exclusión
5. Inducción
    a. Algebraica
    b. Teoría de Números
    c. Geométrica
    d. Combinatoria

Álgebra

1. Introducción al álgebra
    a. Literales, variables e incógnitas
    b. Estructuras de números
    c. Sumas
    d. Leyes de exponentes
2. Manipulación algebraica
    a. Multiplicación y desarrollo
    b. Factor común
    c. Productos y factorizaciones notables

Calendario

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	
Bienvenida	G1	A1	C2	G3	Examen	Mañana
C1	TN1	G2	TN2			Tarde
G4	A2	G5	C4	C5	Examen	Mañana
C3	TN3	G5	TN4			Tarde
G6	TN5	Dudas	Examen	Examen		Mañana
G7	Problemas	Rally				Tarde

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en San Luis Potosí Escuela de Verano
Bloque 2

Temario

Geometría (G):

8. Eje radical
9. Trigonometría
10. Concurrencia
11. Colinealidad
12. Desargues + Pappus
13. Incírculos y excírculos
14. Áreas ++
15. Homotecia

Teoría de Números (TN):

6. Congruencias
    a. Definición
    b. Propiedades
7. Euler-Fermat y otros teoremas
    a. Máximo común divisor
    b. Inversos multiplicativos
    c. Campos y módulos primos
8. Problemas
9. Teoremas innecesarios

Congruencias (C):

6. Casillas
7. Invarianza
    a. Geométrica
    b. Teoría de Números
    c. Algebraica
    d. Combinatoria
8. Coloración
9. Juego
10. Grafos

11. Principio extremo

Álgebra (A):

3. Polinomios
    a. Vieta
    b. Raíces
4. Desigualdades
5. Sumas Telescópicas

Calendario

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	
C6	TN6	G10	C7	TN7	Examen	Mañana
G8	G9	G10	C8			Tarde
G11	C9	TN8	A5	G13	Examen	Mañana
G11	A3	A4	G12			Tarde
G14	TN9	C11	Examen	Examen		Mañana
C10	G15	Béisbol				Tarde

Anexo 13. Temarios de los entrenamientos de la OMM en Tamaulipas

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS
TAMAULIPAS

Álgebra	Combinatoria	Teoría de Números	Geometría
Ecuaciones de 1er grado	Principios Aditivo y Multiplicativo	Factorización en primos	Áreas de Triángulos I (Triangular áreas).
Suma de Gauss	Paridad	Criterios de divisibilidad	Áreas de Polígonos y Circunferencias.
Ecuaciones de 2º grado	Combinaciones y Permutaciones	Algoritmo de la división	Ángulos entre Paralelas y en circunferencias.
Progresiones Geométricas y Aritméticas	Principio de Inclusión y Exclusión	Divisibilidad	Ángulos en triángulos.
Sistemas de ecuaciones n x n	Principio de Casillas	Lema de Euclides	Teorema de Pitágoras.
Factorización y productos notables	Invarianza	Funciones aritméticas (mcd, mcm, d(n), n!)	Triángulos congruentes y semejantes.
Sistemas de ecuaciones con menos ecuaciones	Juegos de Estrategia Ganadora	Residuos	Cuadriláteros Cíclicos.
Desigualdad de medias	Problemas dinámicos	Congruencia (álgebra modular)	Teorema de Tales.
Desigualdad de Cauchy y Schwartz	Sucesiones	Pequeño Teorema de Fermat	Potencia del Punto.
Polinomios	Caminos	Función phi de Euler	Puntos y rectas notables del triángulo.
Desigualdad Útil y del Reacomodo	Inducción Matemática	Teorema de Euler	Áreas de triángulos II (Más fórmulas).
Funciones	Conjuntos	Teorema de Wilson	Trazos auxiliares.
	Recursiones	Teoremas de Orden	Trigonometría.
	Grafos	Raíces Primitivas	Teorema de Ceva y Menelao.
	Principio Extremo	Levantamiento de exponente	Ejes Radicales.
		Teorema Chino del Residuo	Teorema de Euler y Simson.
		Residuos Cuadráticos	Teorema de Ptolomeo.
			Circunferencia de los 9 puntos.
			Lugares geométricos.
			Homotecia.
			Teorema de Stewart.
			Simedianas.
			Inversión.
			Geometría Proyectiva (Desargues, Pappus, Pascal, Conjugados armónicos)

Examen Municipal
Examen Regional
Examen Estatal
Selectivos
Nacional
Opcional