

Comparación de cuatro algoritmos que dan solución numérica a la deconvolución en sistemas monodimensionales

J. I. De la Rosa, *IEEE member*, G. Miramontes de León, *IEEE member*,
E. García Domínguez, Ma. A. Esquivel, y J. Villa Hernández

Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales
Universidad Autónoma de Zacatecas
Zacatecas, Zac., C.P. 98064

E-mail: ismaelrv@ieee.org, gmiram@ieee.org, egarcia@cantera.reduaz.mx, arazama@cantera.reduaz.mx,
y jvillah@cantera.reduaz.mx

Resumen: En este trabajo se presenta la comparación de tres algoritmos clásicos utilizados para deconvolución unidimensional con respecto a un cuarto algoritmo, el cual ha sido propuesto y analizado en el laboratorio de Procesamiento Digital de Señales de la UAZ. Durante las últimas tres décadas se han desarrollado nuevas ideas sobre soluciones a problemas de deconvolución o restauración de señales n-dimensionales. La idea sigue siendo la misma que se plantea en la literatura de la ingeniería que data de los años 50s. Cuando una señal $x(t)$ tiene que pasar por algún medio para poder ser captada, se realiza una operación llamada convolución entre $x(t)$ y otro tipo de señales. En el momento en que captamos la señal, ésta ya no es $x(t)$ sino la convolución de $x(t)$ con una $h(t)$ más componentes de ruido existentes en el medio. Entonces, se propone un problema inverso, el cual nos proporciona una estimación de $x(t)$ o $\hat{x}(t)$. El propósito de este trabajo fue la evaluación y clasificación de la capacidad de restauración de señales de cuatro métodos, siendo el algoritmo basado en un modelo para identificación de sistemas el que mostró una mejor respuesta.

Introducción

Desde principios de siglo se ha estudiado la deconvolución. Primero fue una novedad y después una herramienta muy valiosa dentro del análisis de señales. Gran parte del trabajo realizado en deconvolución, se centra en la espectroscopia de absorción en infrarrojo [1].

Matemáticamente, la deconvolución se refiere a los métodos utilizados para resolver la integral de convolución [2], [3], en donde el sistema se supone lineal e invariante en el tiempo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = h(t)*x(t) \quad (1)$$

en donde "*" es el símbolo de la convolución.

En óptica, por ejemplo, se busca una función $x(t)$ cuando se dispone de los datos de la imagen $y(t)$ y la función de dispersión $h(t)$ del sistema óptico involucrado. Si se está observando un espectro de $x(t)$ con la ayuda de un instrumento que tiene una función de respuesta característica $h(t-\tau)$, entonces $y(t)$ representa los datos adquiridos. Si el instrumento tiene una resolución perfecta, entonces $h(t-\tau)$ es una función de Dirac, y $y(t)$ contiene el espectro exacto de $x(t)$, en este caso no es necesario realizar la deconvolución.

La discretización de la deconvolución parte de la consideración de que el sistema es invariante con el tiempo, entonces puede representarse como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau + r(t) = h(t)*x(t) + r(t), \quad (2)$$

la discretización de (2) nos lleva a:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) + r(n) \quad (3)$$

en donde $r(n)$ es ruido aleatorio con valor promedio igual a cero, que representa no solamente los errores de discretización, sino que también incluye los errores experimentales relacionados con la observación de $y(n)$. El término deconvolución se utiliza generalmente para indicar un problema inverso el cual es la estimación de una señal de entrada $x(n)$ a un sistema, a partir de una señal de observación (medición) $y(n)$ y el conocimiento a priori de la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema, esto se ilustra en la Figura 1, en donde $\hat{x}_c(n)$ es la estimación de $x(n)$. Algunas técnicas de solución también se adaptan para el caso más general de la integral de Fredholm. Los métodos de relajación o de regularización, por ejemplo el de Van Cittert [4], [5], Jansson *et al* [1], [6] se pueden adaptar tomando en cuenta cierto tipo de datos.

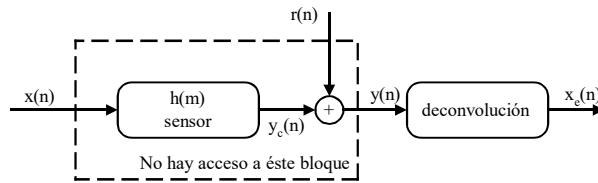


Fig. 1. Restauración de $x(n)$ usando deconvolución.

El resto del artículo está organizado como sigue; la segunda sección introduce de manera resumida los cuatro algoritmos en comparación. En la tercera sección se presentan algunos resultados de comparación y finalmente en la cuarta sección se dan algunas conclusiones.

Métodos de deconvolución considerados

Los algoritmos que se evaluaron son cuatro y resultan de una búsqueda de información sobre métodos que dan solución a la deconvolución en forma numérica y rápida, con el fin de establecer cuál es el mejor según un criterio de error y su posible desempeño en tiempo real. Los métodos en los que están basados los algoritmos son los siguientes:

- Método para deconvolución en línea (muestra a muestra).
- Método para deconvolución homomórfica (basado en la teoría del cepstrum).
- Método para deconvolución iterativa (Jansson).
- Método para deconvolución basado en un modelo para identificación de sistemas (método propuesto).

Es importante mencionar que el algoritmo de deconvolución homomórfica no es apropiado para la restauración de señales en tiempo real debido a su estructura, sin embargo, se consideró como referencia de comparación de resultados y número de cálculos necesarios.

Método para deconvolución en línea

Este método cae dentro de los conocidos como métodos de inversión generalizada, aunque en este caso no es necesario el cálculo directo de una matriz inversa. El concepto principal consiste en tratar las

observaciones $y(n)$ en forma secuencial o muestra por muestra, lo cual hace de éste un proceso recursivo. La ventaja de no realizar cálculos matriciales y otro tipo de cálculos como la transformada de Fourier, son los principales beneficios dentro de este tipo de métodos.

El algoritmo analizado fue propuesto por Posca en 1979 y utilizado por Seara en 1984, Ciro A. Martínez en 1987 [7] y cumple con las características de procesamiento en línea. Este algoritmo se fundamenta en la minimización de una distancia de entrada la cual está definida por una norma cuadrática del espacio de las entradas (estimada $\bar{x}_e(n)$ y verdadera $\bar{x}(n)$) y su fundamento analítico es tratado por Guy Demoment [2], la solución se lleva a cabo en el dominio temporal. La norma cuadrática usada se define con la siguiente ecuación:

$$D = \|\bar{x}_e(n) - \bar{x}(n)\|_M^2 \quad (4)$$

en donde M es una matriz de ponderación simétrica y positiva definida. En la Figura 2 se muestra un diagrama a bloques del algoritmo para deconvolución en línea (Las ecuaciones completas están incluidas en [8]), en donde: n es el instante de muestreo, A es una matriz de peso de dimensiones $N \times N$ utilizada para actualizar el vector $\bar{x}'_e(n)$.

El producto $A\bar{x}'_e(n)$ equivale a un desplazamiento de las coordenadas de $\bar{x}'_e(n)$ debido a la dirección de los índices de mayor peso y la repetición de la primera coordenada, ver (II.2.7) en [8], \bar{h}^T es un vector lineal formado a partir de la transpuesta del vector de la respuesta al impulso del sistema, T_m es el retardo correspondiente a un período de muestreo.

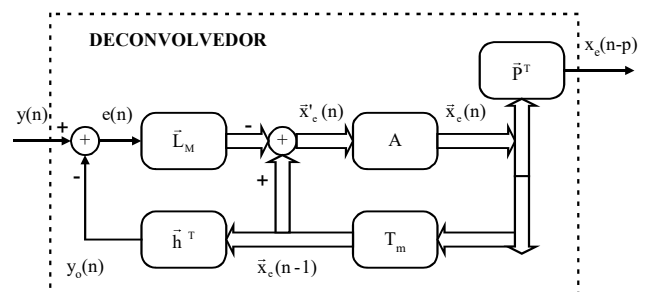


Fig. 2. Esquema para deconvolución en tiempo real.



\bar{P}^T es un vector de pivoteo utilizado para la extracción de la coordenada correspondiente para $\bar{x}_e(n)$. Dicha extracción se realiza después de un determinado número de iteraciones del lazo del algoritmo para el cual la estimación $\bar{x}'_e(n)$ es casi precisa. \bar{L}_M es un vector de ponderación del error. La selección de éste es muy importante pues de él depende la mayor parte de las características del algoritmo (ver [7] y [8]).

Método para deconvolución homomórfica

Los sistemas de deconvolución homomórfica fueron introducidos por Bogert, Healy, Tukey (1963), Oppenheim y Schafer [9] - [12]. El análisis cepstral tiene sus orígenes en el problema de la deconvolución de dos o más señales, y se propone como método para separar señales que han sido combinadas por convolución.

Usando las ecuaciones (III.2.15 - 16), (III.3.1), (III.3.7 - 10) y (III.3.12 - 13) descritas en [8] y [13], se obtiene el algoritmo (diagrama a bloques) para obtener la deconvolución que se muestra en la Figura 3.

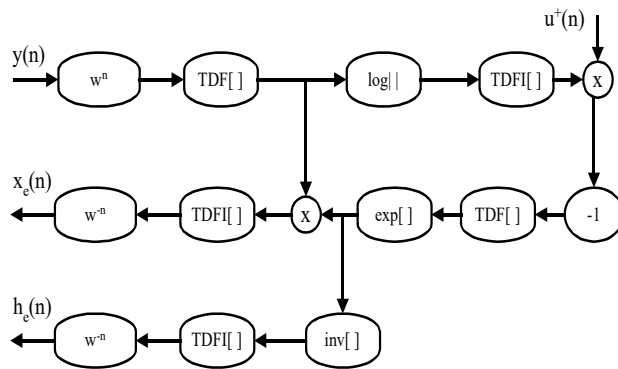


Fig. 3. Sistema para obtener la deconvolución cuando $x(n)$ es una WNS y $h(n)$ es de fase mínima.

Las señales $x_e(n)$ y $h_e(n)$ son las estimaciones de $x(n)$ y $h(n)$ respectivamente.

Método para deconvolución iterativa

Van Cittert [5] propuso un método iterativo lineal para la deconvolución de señales, el cual es la base fundamental de toda una serie de métodos iterativos lineales y no lineales [1], [4], [6].

En la Figura 4 se muestra un diagrama a bloques de cómo se realiza la deconvolución de forma iterativa. El algoritmo propuesto por Jansson se descompone en las siguientes ecuaciones [1], [6]:

$$\hat{y}^k(n) = h(m) * \hat{x}^k(n) \tag{5}$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}^k(n) \tag{6}$$

$$r^k(n) = r_o \left[1 - \frac{2}{C} \left| \hat{x}^k(n) - \frac{C}{2} \right| \right] \tag{7}$$

$$\hat{x}^{k+1}(n) = \hat{x}^k(n) - r^k(n)e(n) \tag{8}$$

$$x_e(n) = \hat{x}^{k+1}(n) \tag{9}$$

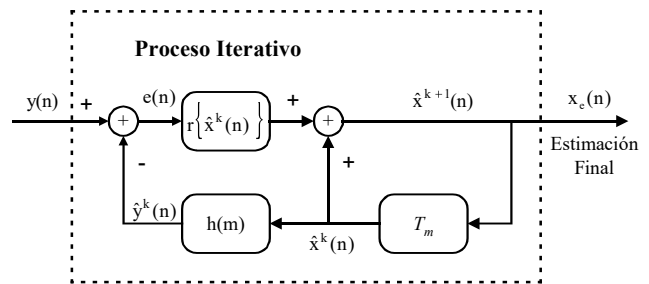


Fig. 4. Esquema para deconvolución iterativa.

en donde: $\hat{y}^k(n)$ es la k-ésima estimación de una observación basada en la convolución de $h(m)$ y $\hat{x}^k(n)$, en el caso en el que $k=0$, $\hat{x}^0(n) = y(n) \{ n=1,2,3,\dots,N \}$, $h(m)$ es el vector de la respuesta al impulso acotada por m muestras, $e(n)$ es el criterio de error mínimo entre la salida observada y una estimación de la misma, $r^k(n)$ es el k-ésimo valor para la función de relajación la cual depende de r_o , C y $\hat{x}^k(n)$, $\hat{x}^{k+1}(n)$ es la k+1 estimación de $x(n)$ y $x_e(n)$ es la estimación final de $x(n) \{ k=0,2,3,\dots,K \}$.

Deconvolución basada en un modelo de identificación y resistente al ruido

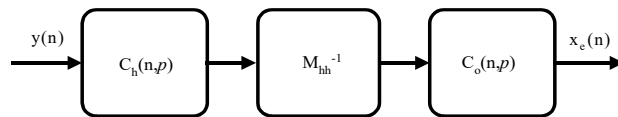
Un sistema se puede describir por medio de la respuesta al impulso, en el dominio del tiempo, o como una función de transferencia, en el dominio de la frecuencia,



la cual está acotada en su ancho de banda. Otro factor importante es la existencia de ruido de medición el cual se presenta en los problemas prácticos y lo cual complica más el problema.

En la reconstrucción de $x(t)$, se pueden usar diferentes funciones ortogonales como componentes de $\hat{x}(t)$. Usualmente, los valores de $x(t)$ pueden ser localizados sobre un intervalo finito de tiempo, o en algunos casos puede ser representada de forma periódica y sin pérdidas considerables. La selección obvia para una representación periódica son las series de Fourier. Estas series y otras tienen la propiedad de que al incrementar el número de componentes, también incrementan al máximo la representación en frecuencia de $\hat{x}(t)$. Si el número de elementos es el suficiente y están relacionados con el ancho de banda del sistema, la señal estimada $\hat{x}(t)$ óptima no contendrá componentes espurias debidas sólo al ruido. Por ello no se necesita de iteración alguna para realizar la reducción del ruido; el conjunto óptimo puede ser calculado mediante la inversión matricial y en un solo paso antes de iniciar el proceso de deconvolución [14] - [16].

En la Figura 5 se describe la implementación del algoritmo, y el cálculo de los parámetros necesarios para poder realizar la deconvolución propuesta según este último método [14]. En donde: $p = 1, 2, \dots, P$, siendo P el valor óptimo de componentes base, relacionados con el ancho de banda del sistema, $n = 1, 2, \dots, N$, N es el número máximo de muestras de $y(n)$ y $m = 1, 2, \dots, N$. Si se desea realizar nuevamente la deconvolución sólo se realizarán algunos pasos, ya que se estableció una serie de componentes fijas.



$$C_h(n, p) = C_o(n, p) * h(m) \quad M_{hh} = C_h(n, p)^T C_h(n, p)$$

Fig. 5. Esquema para deconvolución resistente al ruido.

Resultados de comparación

El propósito final es evaluar y clasificar la capacidad de restauración de señales de cada uno de los cuatro métodos, para ello se escogió una medida de distorsión, el Error Cuadrático Medio (ECM), y el tiempo de procesamiento bajo varias condiciones de Señal a Ruido (SNR). La plataforma de simulación utilizada es MATLAB [8]. En los mejores casos se pretende un error cuadrático medio mínimo (que tiende a cero) y una sensibilidad casi nula al ruido.

En las Figuras 6, 7 y 8 es evidente el incremento del %ECM cuanto menor es la SNR. En el caso de la Figura 6, para la suma de senoides, el %ECM para el caso del cuarto método se tomaron 256 muestras de $y(n)$ y 56 parámetros ortogonales, bajo esta condición se obtuvieron los mejores resultados. En los demás métodos se utilizaron 3000 muestras de la señal de observación $y(n)$. Para el método 3 se planteó una función de relajación óptima para cada una de las pruebas, de tal modo que ofreciera siempre los mejores resultados.

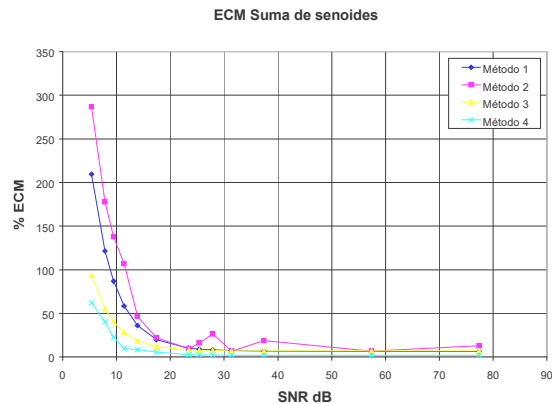


Fig. 6. Gráfica del %ECM contra la SNR para el caso de la señal representada por una suma de senoides (SS).

En la Figura 6 se notan diferencias entre los cuatro métodos: el método 4 brinda los mejores resultados, y se observa que el método 2 es un poco inconsistente, ya que es un método donde se realiza la separación de señales (deconvolución ciega) y a diferencia de los otros tres métodos no es tan necesario el conocimiento a priori de la respuesta al impulso del sistema, sin



embargo sí es necesario incorporar algunas características del mismo.

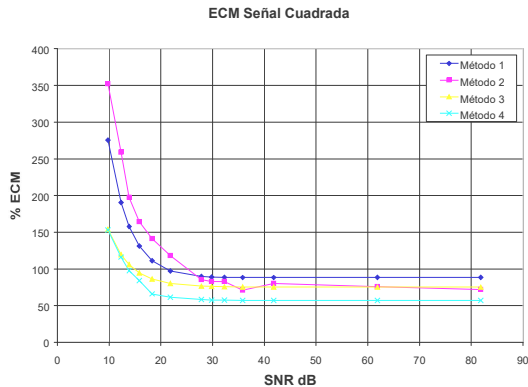


Fig. 7. Gráfica del %ECM contra la SNR para el caso de la señal representada por una onda cuadrada (OC).

Cuando se trata de la restauración de una onda cuadrada (Figura 7) se observa que el %ECM no se logra minimizar tanto, ya que la entrada es rica en componentes frecuenciales y no se alcanza la recuperación de todas las frecuencias originales. Para el método 4 se propuso el uso de 68 parámetros ortogonales y 256 muestras de la señal de observación.

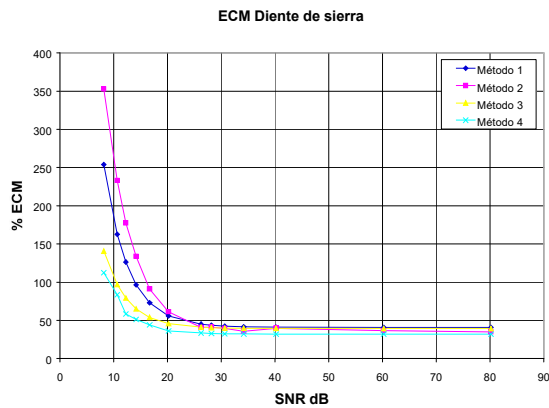


Fig. 8. Gráfica del %ECM contra la SNR para el caso de la señal representada por un diente de sierra (DS).

En la Figura 8 se muestran los resultados obtenidos cuando se restaura una señal diente de sierra. En esta prueba se corrigió el número de parámetros utilizados por el método 4 a 64 parámetros, manteniendo las 256 muestras de observación dentro del mismo método.

En la Tabla 1 se muestran los tiempos de procesamiento requeridos por el CPU para cada uno de los cuatro métodos. Estos tiempos pueden variar dependiendo del tipo de procesador utilizado. Sin embargo, el porcentaje de variación de los tiempos de procesamiento debe de mantenerse.

Tabla 1.- Tiempos de simulación para los cuatro métodos.

| Tiempos obtenidos (en seg) durante la simulación en MATLAB | | | | | |
|--|--------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| Señal | SNR dB | Método 1 (N=3000) | Método 2 (N=3000) | Método 3 (N=3000) | Método 4 (N=256) |
| SS | 30 | 20.024 | 24.33 | 16.53 | 0.05999 |
| SS | 20 | 20.274 | 23.95 | 15.16 | 0.06 |
| SS | 15 | 19.723 | 22.98 | 15.12 | 0.06 |
| OC | 30 | 19.389 | 24.5 | 15.13 | 0.06 |
| OC | 20 | 19.5 | 23.73 | 14.98 | 0.06 |
| OC | 15 | 19.56 | 23.62 | 15.05 | 0.05999 |
| DS | 30 | 19.94 | 23.83 | 15.1 | 0.05999 |
| DS | 20 | 19.58 | 22.97 | 15.16 | 0.06 |
| DS | 15 | 19.6 | 23.46 | 14.79 | 0.06 |

Para el método 1 se obtuvo un tiempo promedio de procesamiento de 6.577 mseg. por muestra, siendo éste método el más rápido. Para el método 4, el tiempo de procesamiento para una buena restauración depende tanto del número de muestras a procesar como del número de coeficientes utilizados.

Conclusiones

Bajo el análisis del %ECM vs SNR y una tabla comparativa de tiempos, se encontró que sin duda el método más rápido es el de deconvolución en línea, pero el mejor método, hablando cuantitativa y cualitativamente, es sin duda el método propuesto basado en identificación de sistemas. En lo que se refiere a trabajo futuro, se pretende modificar el algoritmo propuesto a una versión bidimensional, para el caso de restauración de imágenes con aplicabilidad en problemas de astronomía, y posteriormente su implantación en una tarjeta DSP.

Referencias

[1] Jansson P. A., "Deconvolution with Applications in Spectroscopy," Academic Press, Chap. 3, 4, 7, pp. 69-91, 96-132, 188-225, 1984.



- [2] Demoment G., "Déconvolution des Signaux," Cours, École Supérieure D'Électricité SUPELEC, Chap. 5, pp. 51-76, 1987-1997.
- [3] Twomey S., "On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of First Kind by the Inversion of Linear System Produced by Quadrature," Journal Asso. Comp. Mach., Vol. 10, pp. 97-101, 1962.
- [4] Bandzuch P., Morhác M. and Křištiak J., "Study of the Van Cittert and Gold Iterative Methods of Deconvolution and their Application in the Deconvolution of Experimental Spectra of Positron Annihilation," Elsevier Science Publishers B. V., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, North-Holland, Section A, pp. 506-515, 1997.
- [5] Van Cittert P. H., "Zum Einfluss der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien II," Z. Phys. Vol. 69, pp. 298-308, 1931.
- [6] Crilly P. B., "A Quantitative Evaluation of Various Iterative Deconvolution Algorithms," IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 40, pp. 558-562, June 1991.
- [7] Martínez C. A., "Conception D'une Architecture de Processeur de signal VLSI, Programmable en Langage Évolué et Optimale dans le Traitement D'algorithmes Rapides," These de Docteur en Science, Université de Paris-Sud Centre D'Orsay et École Supérieure D'Électricité, Chap. 2,5, pp. 28-33, 107-113, 1988.
- [8] De la Rosa J. I., "Evaluación Comparativa de Cuatro Algoritmos que dan Solución numérica a la Deconvolución de sistemas monodimensionales," Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, CITEDI, 1998.
- [9] Bogert B.P., Healy M. J., and Tukey J.W., "The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-cepstrum and Saphe cracking," In Time Series Analysis, M. Rosenblatt, Ed. New York: Wiley, 1963, Chap. 15, pp. 209-243, 1963.
- [10] Oppenheim A. V., "Superposition in a Class of Nonlinear Systems," Tech. Rep. 432, Res. Lab. Electron., M.I.T., Cambridge, MA, March 31, 1965.
- [11] Oppenheim A. V. and Schafer R. W., "Digital Signal Processing," NJ, Prentice-Hall, 1975.
- [12] Oppenheim A. V. and Schafer R. W., "Discrete-Time Signal Processing," NJ, Prentice-Hall, Chap. 12, pp. 768-826, 1989.
- [13] García J. y De la Rosa J. I., "El Cepstrum y un Esquema Simple para Deconvolución," CIE'97 CINVESTAV-IPN, Vol. 2, pp. 329-334, Septiembre 1997.
- [14] McBride L. E., Schaefgen H. W. and Steiglitz K., "Time-Domain Approximation by Iterative Methods," IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-13, pp. 381-387, December 1966.
- [15] Miramontes G., McBride L. E. and García E., "Deconvolution with Noise as System Identification," IEEE Workshop on Emerging Technologies, Intelligent Measurement and Virtual Systems for Instrumentation and Measurements - ETIMVIS'98 St. Paul, MN, USA May 15 - 16, 1998.
- [16] Steiglitz K. and McBride L. E., "A Technique for Identification of Linear Systems," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-10, pp. 461-464, 1965.

José Ismael de la Rosa Vargas: Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones egresado de la Universidad Autónoma de Zacatecas en 1995. Obtuvo el grado de Maestría en Sistemas Digitales en 1998 en CITEDI-IPN y Doctorado en 2002 en la Universidad de Paris XI-SUPELEC, Paris, Francia. Se incorporó a la UAZ en 2003, como profesor-investigador en el laboratorio de PDS de la Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica.

Dirección del autor: Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica, Av. López Velarde, No. 801, Col. Centro, Zacatecas, Zacatecas.

email: ismaelrv@ieee.org , vargasj@cantera.reduaz.mx