

EL CEPSTRUM Y UN ESQUEMA SIMPLE PARA DECONVOLUCIÓN

Juan García López,
José Ismael de la Rosa Vargas

Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital (CITEDI)
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Av. del Parque 1310 Mesa de Otay
Tijuana, B.C. N., México C.P. 22510

Tel. (66) 623-1344, fax. (66) 623-1388 e-mail: jgarcial@citedi.mx; ismael@citedi.mx

RESUMEN.- En este artículo se propone el estudio de un método para la deconvolución monodimensional conocido como deconvolución homomórfica, el cual se fundamenta en la teoría del cepstrum. Se demuestra que la convolución en el dominio del tiempo equivale a una suma en un dominio " *quefrecial* ", ésto significa que en dicho dominio se puede obtener la separación de las señales $x(t)$ y $h(t)$ que fueron convolucionadas. El artículo presenta la terminología y el análisis matemático para obtener una expresión cerrada del cepstrum, mencionando algunas de sus propiedades. Se obtiene un esquema simple de deconvolución homomórfica, cuando la secuencia de excitación x es un ruido blanco y la respuesta al impulso h es una secuencia de fase mínima. El análisis teórico es validado con varios ejemplos de simulación.

I. INTRODUCCIÓN

Bogert, Healy y Tukey [1] introdujeron en 1963 el cepstrum como herramienta para el procesamiento digital de señales presentando la siguiente terminología :

frequency.....quefrecy
spectrum.....cepstrum
phase.....saphe
amplitude.....gamnitude
filtering.....liftering
harmonic.....rahmonic
period..... repiod

sin embargo, sólo los términos cepstrum, quefrecy y liftering son los que prevalecen. La idea principal es trabajar en el dominio de la frecuencia aprovechando las propiedades algebraicas de los logaritmos, lo cual es un punto muy interesante en el análisis de señales y que permite trabajar en un nuevo marco teórico en el cual podemos dar solución a la deconvolución (proceso inverso a la convolución).

II. TEORÍA

Sea $y(n)$ una secuencia discreta cuya transformada z es $Y(z)$, el cepstrum de $y(n)$ se define como :

$$c_y(n) = Z^{-1}[\hat{Y}(z)] \quad (1)$$

donde,

$$\bar{Y}(z) = \log Y(z) \quad (2)$$

$\log []$ representa el logaritmo natural del argumento. Dado $c_y(n)$, $y(n)$ se obtiene de las Ecs. (1) y (2) como :

$$y(n) = Z^{-1}\left[\exp\left(Z[c_y(n)]\right)\right] \quad (3)$$

Para un sistema discreto lineal e invariante con el desplazamiento, la salida $y(n)$ está dada como la convolución de la entrada $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$, es decir :

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (4)$$

obteniendo la transformada z de la Ec. (4), tomando logaritmos y usando las Ecs. (1) y (2) se obtiene :

$$c_y(n) = c_x(n) + c_h(n) \quad (5)$$

La Ec. (5) muestra que la convolución en el dominio del tiempo equivale a una suma en el dominio " quefrecial. " En señales sísmicas y de voz, las secuencias cepstrales $c_x(n)$ y $c_h(n)$ son suficientemente diferentes de modo que pueden separarse usando " lifters " de paso corto o de paso largo. El sistema que utiliza el cepstrum para deconvolucionar señales, se conoce como sistema homomórfico, éste se

muestra en la figura 1. Las señales $x_e(n)$ y $h_e(n)$ son las estimaciones de $x(n)$ y $h(n)$ respectivamente.

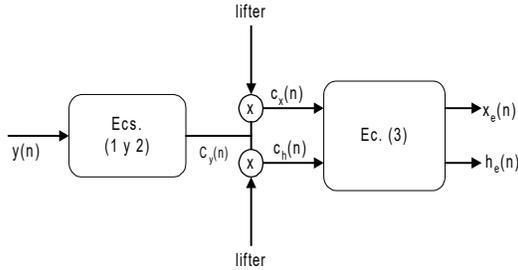


Fig. 1.- Sistema homomórfico para deconvolucionar $x(n)$ y $h(n)$.

Sea un sistema de fase mínima (sistema cuyos polos y ceros están dentro del círculo unitario) cuya función de salida está dada por :

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{A(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_m)}{(z - b_1)(z - b_2)\dots(z - b_p)}$$

$$Y(z) = \frac{Az^r \prod_{i=1}^m (1 - a_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^p (1 - b_i z^{-1})} \quad (6)$$

donde, $r = m - p$, $|a_i| < 1$, $|b_i| < 1$ para un sistema de fase mínima, tomando el valor absoluto de A y desplazando la secuencia $y(n)$ (dado que estas operaciones no eliminan información importante del cepstrum), la Ec. (6) puede expresarse como :

$$Y(z) = \frac{|A| \prod_{i=1}^m (1 - a_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^p (1 - b_i z^{-1})} \quad (7)$$

si $y(n)$ es de fase máxima, puede hacerse de fase mínima multiplicando la salida $y(n)$ por un factor exponencial, es decir :

$$y_w(n) = y(n) w^n \quad (8)$$

La transformada z de la secuencia ponderada $y_w(n)$ es :

$$Y_w(z) = Z[w^n y(n)]$$

$$Y_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n y(n) z^{-n} = Y(w^{-1}z) \quad (9)$$

la Ec. (9) implica que los polos y ceros de $Y(z)$ se desplazan radialmente por el factor w^{-1} . El factor w debe ser menor que uno (pero cercano a ese valor). Ulrich [2] recomienda que w debe estar en el rango $0.96 \leq w \leq 0.99$. Entre más se acerque $Y(z)$ a una secuencia de fase máxima, más debe reducirse el factor w .

De la Ec. (9),

$$Y_w(z) = Y(w^{-1}z) = X(w^{-1}z)H(w^{-1}z),$$

entonces

$$y_w(n) = x_w(n) * h_w(n)$$

$$y_w(n) = w^n x(n) * w^n h(n) \quad (10)$$

es decir, una convolución ponderada da origen a una convolución de dos secuencias ponderadas.

De la Ec. (10)

$$x(n) = w^{-n} x_w(n) \quad (11)$$

$$h(n) = w^{-n} h_w(n) \quad (12)$$

de las Ecs. (7) y (9),

$$\bar{Y}_w(z) = \log(wz^{-1})$$

$$= \log|A| + \sum_{i=1}^m (1 - a_i w z^{-1}) - \sum_{i=1}^p (1 - b_i w z^{-1}) \quad (13)$$

utilizando la siguiente igualdad,

$$\log(1 - \beta z^{-1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n z^{-n}}{n}; |z| > |\beta| \quad (14)$$

de las Ecs. (13) y (14) el cepstrum ponderado $c_{y_w}(n) = Z^{-1}[\bar{Y}_w(z)]$ está dado por :

$$c_{y_w}(n) = \log|A| = \log|y_w(0)|; n=0 \quad (15)$$

$$c_{y_w}(n) = \sum_{i=1}^p \frac{w^n b_i^n}{n} - \sum_{i=1}^m \frac{w^n a_i^n}{n} \quad (16)$$

Las Ecs. (15) y (16) dan el cepstrum exacto de una secuencia $y(n)$ ponderada dada por la Ec. (6), él cual es útil para evaluar

varios esquemas de deconvolución. Se observa que el cepstrum decrece en forma proporcional a $(1/n)$ y es una secuencia infinita aunque la secuencia temporal $x(n)$ sea finita. Por otro lado, se demuestra en [3] que :

$$y(n) = c_{yw}(n)y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} c_{yw}(k)y(n-k) \quad (17)$$

$$y(0) = \exp[c_{yw}(0)] \quad (18)$$

de las Ecs. (17) y (18) puede observarse que aunque $c_{yw}(n)$ sea infinita, $y(n)$ puede recuperarse usando sólo N muestras si $y(n)$ es una secuencia finita o truncada.

La teoría desarrollada, se implementa en la práctica por medio de la transformada discreta de Fourier (TDF), es decir:

$$\bar{Y}_w(k) = \bar{Y}_w(z) ; z = \exp(j2\pi kn/N) \quad (19)$$

La transformada rápida de Fourier (TRF) se utiliza para obtener la TDF la cual asume periodicidad fuera del intervalo de observación, por esta razón el cepstrum obtenido usando la TDF es una versión trasladada del cepstrum deseado, o sea :

$$\begin{aligned} c_{yw}^p(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Y}(k) \exp(j2\pi kn/N) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{yw}(n+kN) \end{aligned} \quad (20)$$

sin embargo, dado que $c_{yw}(n)$ decrece más rápido que una secuencia exponencial, el cepstrum periódico tiende a $c_{yw}(n)$ para valores grandes de N . Asimismo, puede ser necesario agregar ceros a la secuencia de entrada para reducir el problema del traslape.

Dado que $c_{yw}(n)$ es real, ésto implica que la parte real de su TDF debe ser una función par y la parte imaginaria debe ser una función non, asimismo, su transformada z debe ser analítica dentro de una región que incluya el círculo unitario.

De la Ec. (2),

$$\bar{Y}_w(k) = \log|Y_w(k)| + j\text{ang}[Y_w(k)] \quad (21)$$

$Y_w(k)$ son muestras de la función continua $Y(e^{jw})$ a $w=(2\pi k/N)$, y $\text{ang}[Y_w(k)]$ son muestras de una función discontinua que varía entre $-\pi$ y $+\pi$. Existen varios métodos para tratar el problema de discontinuidad causado por el logaritmo complejo, tales como, el desdoblamiento de la fase y la derivada del logaritmo.

III. ESQUEMA SIMPLE PARA OBTENER LA DECONVOLUCIÓN

Para una señal de excitación $x(n)$ que es una secuencia de ruido blanco (WNS) y $h(n)$ una secuencia de fase mínima, se puede obtener un esquema simple para dar solución a la deconvolución.

De la Ec. (10),

$$Y_w(k) = X_w(k) H_w(k) \quad (22)$$

también,

$$Y_w(-k) = X_w(-k) H_w(-k) \quad (23)$$

de la cual,

$$|Y_w(k)|^2 = |X_w(k)|^2 |H_w(k)|^2 \quad (24)$$

o también,

$$S_{yy}(k) = S_{xx}(k)S_{hh}(k) \quad (25)$$

usando el teorema Wiener-Khinchine en la Ec. (25), se obtiene:

$$R_{yy}(\alpha) = R_{xx}(\alpha) * R_{hh}(\alpha) \quad (26)$$

en las Ecs. (25) y (26), $S_{ii}(k)$ y $R_{ii}(\alpha)$ representan la densidad espectral de potencia y la autocorrelación respectivamente.

Dado que $x(n)$ es una WNS, $S_{xx}(k) = \sigma^2$, de la Ec. (24) se obtiene,

$$|Y_w(k)|^2 = \sigma^2 |H_w(k)|^2 \quad (27)$$

tomando logaritmos,

$$\log|Y_w(k)| = \log|H_w(k)| \quad (28)$$

el término $\log \sigma$ es una constante y fué eliminado sabiendo que sólo afecta a la componente cepstral para $n=0$, asimismo, σ puede hacerse igual a la unidad.

De ecs. (27) y (28) puede concluirse que $\log|H_w(k)|$ es una función real y par, así, la parte par de $c_{hw}(n)$ se obtiene como la TDF inversa (TDFI) de $\log|H_w(k)|$, es decir :

$$c_{hw}^e(n) = D^{-1} \left[\log|H_w(k)| \right] \quad (29)$$

el cepstrum $c_{hw}(n)$ puede recuperarse a partir de su parte par como :

$$c_{hw}(n) = c_{hw}^e(n) u^+(n) \quad (30)$$

donde el " lifter " $u^+(n)$ es

$$u^+(n) = \begin{cases} 2; & 1 \leq n < L/2 \\ 1; & n = 0, L/2 \\ 0; & L/2 < n \leq (L-1) \end{cases} \quad (31)$$

L es la longitud de la TDF y debe ser mayor o igual a $N=N_1+N_2-1$, donde N_1 y N_2 son las longitudes de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ respectivamente.

La condicion de que $H(z)$ es de fase mínima, implica que existe un sistema estable y causal tal que,

$$H_w^{-1}(z) H_w(z) = 1 \quad (32)$$

tomando logaritmos y antitransformado, se obtiene :

$$c_{hw}^{-1}(n) = -c_{hw}(n) \quad (33)$$

asimismo,

$$H_w^{-1}(k) = \exp \left\{ D[c_{hw}^{-1}(n)] \right\} \quad (34)$$

usando las Ecs. (11), (12), (22), (28), (29), (30), (31), (33) y (34), el diagrama a bloques para obtener la deconvolución se muestra en la figura 2.

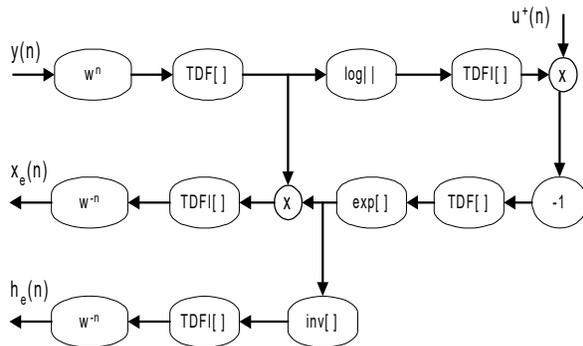


Fig. 2.- Sistema para obtener la deconvolución cuando $x(n)$ es una WNS y $h(n)$ es de fase mínima.

IV. ALGUNAS SIMULACIONES

El código Barker de longitud 13 se escogió como la secuencia de excitación, la autocorrelación de esta secuencia es:

$$R_{xx}(0) = 1$$

$$R_{xx}(\alpha) = 0; \alpha = 1, 3, 5, 7, 9, 11$$

$$R_{xx}(\alpha) = 0.0769; \alpha = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

Se observa que insertando n ceros entre las muestras binarias del código Barker, se interpolan $2n+1$ ceros entre las muestras de la autocorrelación, la amplitud para $\alpha=0$ es de $1/(n+1)$ y para $\alpha \neq 0$ la amplitud es de $R_{xx}(0)/13$.

El factor de peso w se escogió de 0.99. En [4] se presenta un análisis teórico para obtener el valor óptimo del factor w .

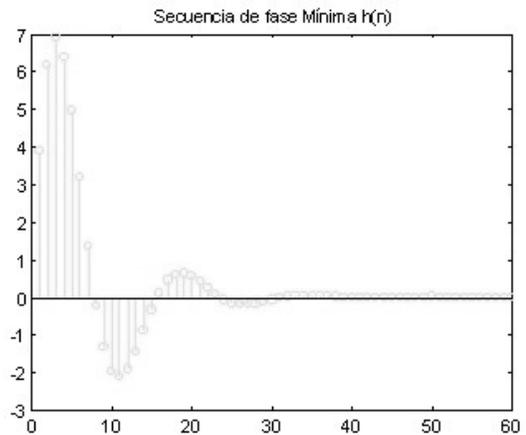
En la figura 3 se muestran las señales a convolucionar y las señales deconvolucionadas, cuando :

$$h(n) = 10 \exp(0.15) \sin(0.4n + 0.4); n = 0, 1, \dots, 119.$$

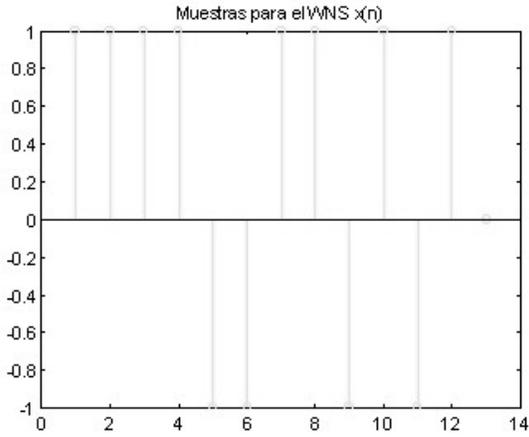
Las señales deconvolucionadas aparecen como versiones escaladas de las señales a convolucionar.

En las figuras 4 y 5 se muestra la identificación de un filtro FIR pasa bajas y un filtro pasa banda respectivamente. El orden de cada filtro es de 50 y la salida se pasó por una ventana Hamming para reducir el chorro. Las respuestas a la frecuencia identificadas aparecen como versiones escaladas de las respuestas a la frecuencia exactas.

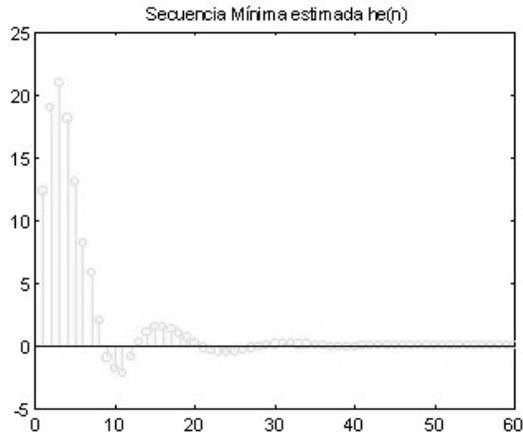
Aunque en estas simulaciones se utilizó el cepstrum para identificar un sistema, existen aplicaciones del cepstrum en ingeniería sísmica, procesamiento de voz e imágenes, radar, etc.



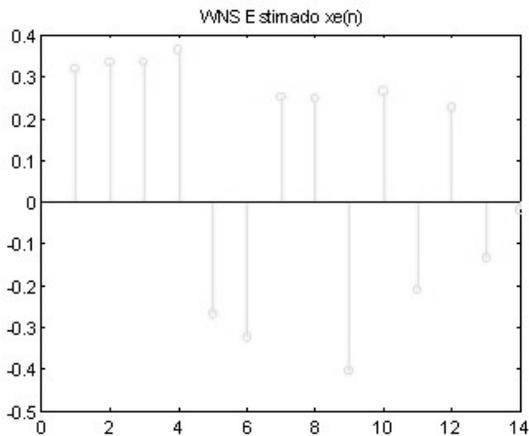
a)



b)



c)



d)

Fig. 3.- a) Secuencia $h(n)$, b) Secuencia $x(n)$, c) Deconvolución de $h(n)$ y d) Deconvolución de $x(n)$.

V. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Se ha presentado la teoría básica del cepstrum así como un esquema simple para obtener la deconvolución de dos señales, una de las cuales es una secuencia de ruido blanco y otra es una secuencia de fase mínima. De acuerdo con los resultados mostrados en las figuras 3, 4 y 5, se observa que el esquema proporciona resultados más o menos satisfactorios los cuales pueden mejorarse utilizando otra secuencia de excitación y/o obteniendo la longitud óptima del lifter $u^+(n)$ etc.

Asimismo, es necesario estudiar el comportamiento del esquema cuando se tiene ruido presente en la entrada del deconvolucionador y para el caso en el cual las señales a restaurar son periódicas o transitorias.

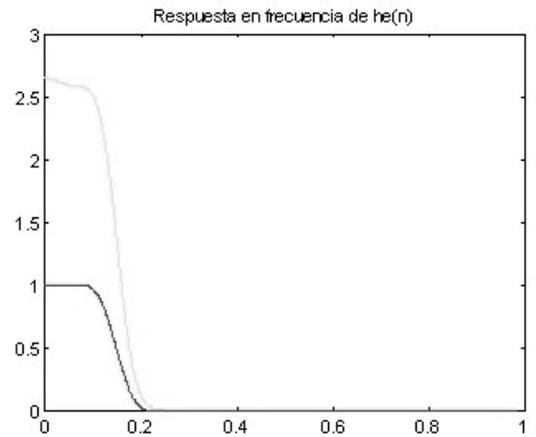


Fig. 4.- Respuestas a la frecuencia exacta e identificada, filtro pasa bajas.

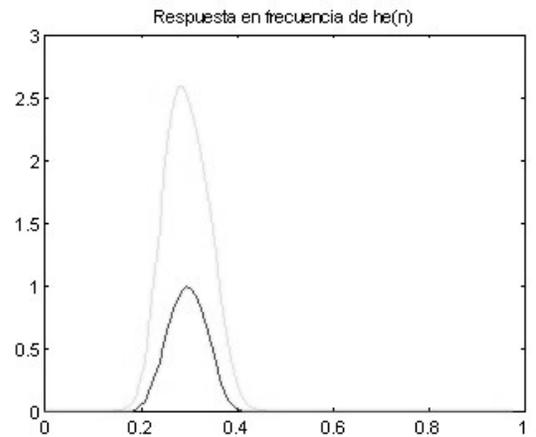


Fig. 5.- Respuestas a la frecuencia exacta e identificada, filtro pasa banda.

REFERENCIAS

- [1] B.P. Bogert, M. J. Healy, and J.W. Tukey, "The quefreny alalysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking," in *Time Series Analysis*, M. Rosenblatt, Ed. New York: Wiley, 1963, Chap. 15, pp. 209-243.
- [2] T. J. Ulrych, "Application of homomorphic deconvolution to seismology," *Geophysics*, vol. 36, no. 4, pp. 650-660, Aug. 1971.
- [3] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Digital Signal Processing*, NJ, Prentice-Hall, 1975.
- [4] I. Yamada and K. Sakaniwa, "An optimal design of homomorphic deconvolution system," *IEEE Trans. on signal processing*, vol. 40, No.9, september 1992.
- [5] A. Polydoros and A. T. Fam. "The differential cepstrum and its properties," in *Proc. 1981 IEEE Proc., Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS'81)* Apr. 1981, pp. 77-80.
- [6] D. G. Childers, D.P. Skinner, and R. C. Kemerait, "The cepstrum: A guide to Processing," *IEEE Proc.*, vol. 65, No. 10, Oct., 1977.
- [7] A. V. Oppenheim, "superposition in a class of nonlinear systems," *Tech. Rep. 432, Res. Lab. Electron., M.I.T., Cambridge, MA, Mar. 31, 1965.*
- [8] Zhao-Xiong Wu, "A new homomorphic deconvolution system," *IEEE ICASSP, Tokio 1986.*