

# Comparación de Cuatro Algoritmos que dan Solución Numérica a la Deconvolución en Sistemas Monodimensionales

## *A Comparative Evaluation of four Algorithms for Numeric Solution of the Deconvolution on Unidimensional Systems*

José I. De la Rosa Vargas, Gerardo Miramontes de León, Ernesto García Domínguez,  
María A. Esquivel, y Jesús Villa Hernández  
Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales  
Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ)  
Av. López Velarde, Zacatecas, Zac., C.P. 98064  
ismaelrv@ieee.org, gmiram@ieee.org, egarcia@uaz.edu.mx,  
araizama@uaz.edu.mx, y jvillah@uaz.edu.mx

*Article received on September 15, 2004; accepted on February 02, 2007*

### Resumen

En el presente trabajo se presenta la comparación de un algoritmo de deconvolución con respecto de otros tres algoritmos clásicos utilizados para deconvolución unidimensional de señales. El algoritmo fue propuesto y analizado en el laboratorio de procesamiento digital de señales de la UAZ. Durante las últimas tres décadas se han desarrollado nuevas ideas sobre soluciones a problemas de deconvolución o restauración de señales n-dimensionales, la idea sigue siendo la misma que se plantea en la literatura de la ingeniería que data de los años 50s "restaurar señales o aproximarlas a su forma original para realizar un análisis de las mismas con errores relativamente pequeños". Cuando una señal  $x(t)$  se origina tiene que pasar por algún medio para poder ser captada, durante este proceso se realiza una operación llamada convolución entre  $x(t)$  y otro tipo de señales, en el momento en que captamos la señal, ésta ya no es  $x(t)$  sino la convolución de  $x(t)$  con una función  $h(t)$  mas componentes de ruido existentes en el medio. Para obtener la señal  $x(t)$  es necesario resolver un problema inverso el cual al final nos proporciona una estimación de  $x(t)$  o  $\hat{x}(t)$ . El propósito final del trabajo es evaluar y clasificar la capacidad de restauración de señales de cada uno de los cuatro métodos.

**Palabras clave:** Deconvolución, Problema Inverso, Análisis Homomórfico, Iterativo.

### Abstract

The present paper presents the comparison of a deconvolution algorithm with other three classical approaches for one-dimensional deconvolution of signals. The algorithm was proposed at the digital signal processing laboratory at UAZ. During the last three decades, the development of new ideas on the solution about deconvolution or n-dimensional signal restoration methods, have become to a new meaning to this problem, the idea remains the same since the 50's in the engineering literature, that is "signal restoration or approximation to it's original form with the purpose of a better analysis". When a signal  $x(t)$  is generated, the only way to be picked up is by a sensor. During the sensing process the convolution of  $x(t)$  with another type of signals occurs. Then, a new signal is generated by the convolution of  $x(t)$  with a function  $h(t)$  and other noisy components. To obtain the original signal  $x(t)$ , we have an inverse problem and the solution will deliver an estimation of  $x(t)$  or  $\hat{x}(t)$ . The final purpose of this work is to evaluate and classify the signal restoration capacity of each method.

**Keywords:** Deconvolution, Inverse Problem, Homomorphic Analysis, Iterative Procedure.

## 1 Introducción

Desde principios de siglo se ha estudiado la deconvolución, primero fue una novedad y ahora es una herramienta muy valiosa dentro del análisis de señales. Las primeras aproximaciones se hicieron con grandes medidas de escepticismo. Durante el proceso de análisis y límites de evaluación prácticos de la deconvolución, se ha ganado una cierta confiabilidad debido a sus resultados. Gran parte del trabajo realizado en 1990 sobre deconvolución, se centra en la espectroscopia de absorción en infrarrojo (Jansson, 1984).

Matemáticamente, la deconvolución se refiere al método o métodos utilizados para resolver la integral de convolución (Demoment, 1987), (Twomeyl, 1962), en donde el sistema se supone como lineal e invariante en el tiempo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = h(t) * x(t) \quad (1)$$

en donde \* es el símbolo de la convolución. En óptica por ejemplo, se busca una función  $x(t)$  cuando se dispone de los datos de la imagen  $y(t)$  y la función de dispersión  $h(t)$  del sistema óptico involucrado. Si se está observando un espectro  $x(t)$  con la ayuda de un instrumento que tiene una función de respuesta característica  $h(t - \tau)$ , entonces  $y(t)$  representa los datos adquiridos. Si el instrumento tiene una resolución perfecta, entonces  $h(t - \tau)$  es una función de Dirac (impulso unitario), y  $y(t)$  representa el espectro exacto de  $x(t)$ , en este caso no es necesario realizar la deconvolución. Se podría observar una línea espectral excesivamente angosta, ya que  $y(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$ . Se considera que la integral de convolución es un caso particular de la ecuación integral de Fredholm de primera especie. En la ecuación (1), el núcleo de la integral puede ser expresado como una función más general de la forma  $h(t, \tau)$ , esto es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau + r(t) \quad (2)$$

en donde se considera a  $r(t)$  como una componente de ruido aditivo. La discretización de la deconvolución parte de la consideración de que el sistema es invariante con el tiempo, entonces (2) puede representarse como la convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau + r(t) = h(t) * x(t) + r(t) \quad (3)$$

la discretización de (3) nos lleva a:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) + r(n) \quad (4)$$

en donde  $n = n\Delta t$ ,  $m = m\Delta \tau$ ,  $\Delta t$  es el periodo de muestreo para  $t \in (0, \infty)$ ,  $\Delta \tau$  es el periodo de muestreo para  $\tau \in (0, \infty)$  y  $r(n)$  es ruido aleatorio con valor promedio igual a cero, que representa no solamente los errores de discretización, sino que también incluye los errores experimentales relacionados con la observación de  $y(n)$ . El término deconvolución se utiliza generalmente para indicar un problema inverso el cual es la estimación de una señal de entrada  $x(n)$  a un sistema, a partir de una señal de observación (medición)  $y(n)$  y el conocimiento a priori de la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema, esto se ilustra en la Figura 1, donde  $x_e(n)$  es la estimación de  $x(n)$ . Algunas técnicas para solucionar el problema de la deconvolución, también se adaptan para el caso más general de la integral de Fredholm. Los métodos de relajación o de regularización, por ejemplo el de Van Cittert (Bandzuch *et al*, 1997), (Van Cittert, 1931), Jansson y otros (Crilly, 1991), (Jansson, 1984) se pueden adaptar tomando en cuenta cierto tipo de datos.

El interés sobre el estudio de algoritmos numéricos de deconvolución crece día a día, esto se debe a la evolución tan importante dentro de los sistemas digitales, permitiendo agilizar algunos procesos operativos y de transmisión de información digital. El incremento en las velocidades de procesamiento de datos permite que algunas operaciones sean realizadas en microsegundos. Las aplicaciones de la deconvolución se encuentran en áreas tan variadas como la astronomía, la ingeniería mecánica, las comunicaciones (Lee *et al*, 1995), en sistemas de control, en ingeniería biomédica, en instrumentación nuclear (Bandzuch *et al*, 1997), (García *et al*, 1999), en radio-astronomía, etc.

Dependiendo de la aplicación, se trabaja con señales monodimensionales  $x(t)$  o bidimensionales  $x(t, u)$ , las cuales determinan el tipo de método ha ser usado durante el proceso de deconvolución. La teoría de sistemas lineales ha sido usada desde hace muchos años para el diseño de filtros eléctricos analógicos, antes de que se popularizara el procesamiento digital de señales. Se ha aplicado ampliamente en óptica, procesamiento digital de señales, y en otros

campos. La deconvolución se ha empleado por mucho tiempo para el diseño de filtros eléctricos y análisis de series en el tiempo (Hua *et al*, 1990), como por ejemplo, el estimador de mínimos cuadrados promedio sobre el cual trabajó Norbet Wiener (1942) (Castelman, 1991), (Gonzales *et al*, 1989), (Jain, 1989). Así pues, muchas de las técnicas que se aplicaron por primera vez en la restauración de señales digitales como lo son las imágenes, fueron generalizaciones de métodos monodimensionales que aún se usan en el procesamiento de señales analógicas y digitales.

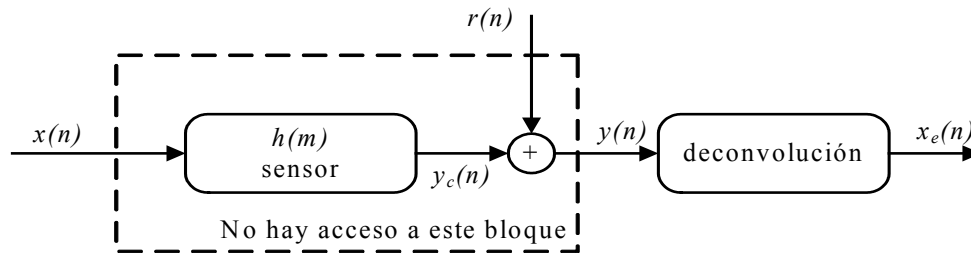


Fig.1. Restauración de  $x(n)$  usando deconvolución

El resto del trabajo está organizado como sigue; en la segunda sección se presentan de manera resumida los cuatro algoritmos a compararse, haciendo un particular énfasis en el método propuesto en el laboratorio de PDS de la UAZ. En la tercera sección se presentan algunos resultados de comparación y finalmente en la cuarta sección se brindan algunas conclusiones.

## 2 Métodos de deconvolución considerados

Existen muchos métodos y diferentes formas de dar solución a la deconvolución. En este trabajo el interés fundamental es exponer algunos métodos que se emplean para sistemas monodimensionales, para los cuales ya se tiene experiencia en aplicaciones específicas. La mayoría de los métodos están restringidos a cierto tipo de datos. Los investigadores tratan de encontrar métodos más flexibles que no estén tan restringidos al tipo de datos que serán procesados, hasta ahora no se ha alcanzado esta meta pero se sigue trabajando en ello.

Los algoritmos que se consideran en este trabajo resultan de una búsqueda de información sobre métodos que dan solución a la deconvolución en forma numérica y rápida. Una de las finalidades es establecer cual es el mejor y proponer su posterior implantación en algún sistema digital. La selección se realizó de acuerdo a la clasificación de algoritmos capaces de trabajar en la restauración de señales en tiempo real. Un método eficaz para la deconvolución aún en ambientes ruidosos es el filtro de Wiener, que brinda una solución óptima, pero no es fácilmente utilizable en aplicaciones de análisis rápido o aplicaciones de tiempo real, ya que involucra cálculos o estimaciones de la densidad espectral de potencia y de matrices de correlación de la señal y del ruido. Los métodos en los que están basados los algoritmos seleccionados son los siguientes:

1. Método para deconvolución en línea (muestra a muestra).
2. Método para deconvolución homomórfica (basado en la teoría del cepstrum).
3. Método para deconvolución en forma iterativa (Jansson).
4. Método para deconvolución basado en un modelo para identificación de sistemas (método propuesto).

Aún cuando sólo se consideraron cuatro algoritmos, es importante mencionar que el algoritmo de deconvolución homomórfica no entra como algoritmo propio para trabajar en la restauración de señales en tiempo real debido a su estructura, sin embargo, se consideró como referencia de comparación de resultados y número de cálculos necesarios.

### 2.1. Método para deconvolución en línea

En esta sección se introduce un algoritmo en el cual se realizan operaciones de tipo sencillo que permiten que dicho algoritmo tenga una estructura de solución en línea (procesamiento muestra por muestra). Se sabe que el término “tiempo real” es relativo, éste tipo de algoritmos cumplen con una estructura cuyos cálculos rápidos permiten decir que son para procesamiento en tiempo real. Este primer método de deconvolución cae dentro de los conocidos como métodos de inversión generalizada, aunque en éste caso no es necesario el cálculo directo de una matriz inversa. El concepto principal consiste en tratar las observaciones  $y(n)$  en forma secuencial o muestra por muestra, lo cual hace de éste un proceso recursivo. Precisamente, la ventaja de no realizar cálculos matriciales y otro tipo de cálculos arduos como la transformada de Fourier, son las principales características a partir de las cuales se obtiene cierto beneficio dentro de este tipo de métodos.

El algoritmo analizado en esta sección para dar solución numérica a la deconvolución, fue propuesto por Posca en 1979 y utilizado por Seara en 1984, y Ciro A. Martínez en 1987 (Martínez, 1988) y cumple con las características de procesamiento en línea, este algoritmo se fundamenta en la minimización de una distancia de entrada la cual está definida por una norma cuadrática del espacio de las entradas (estimada  $\hat{x}_e^p(n)$  y verdadera  $x_e(n)$ ) y su fundamento analítico es tratado por Guy Demoment (Demoment, 1987), la solución se lleva a cabo en el dominio temporal. La norma cuadrática usada se define con la siguiente ecuación:

$$D = \|\hat{x}_e^p(n) - x_e(n)\|_M^2 \quad (5)$$

en donde  $M$  es una matriz de ponderación simétrica y definida positiva. Las diferentes muestras de la señal observada  $y(n)$  están presentes sucesivamente en la entrada del esquema de deconvolución. Después de un tiempo de aprendizaje  $p$ , los diferentes valores estimados  $x_e(n-p)$  obtenidos a partir de la entrada  $y(n)$  deconvolucionada, son obtenidos uno a uno en un ritmo que va de acuerdo al de las muestras de entrada  $y(n)$  (ver Fig. 2).

Durante el desarrollo del algoritmo se lleva a cabo un determinado número de cálculos los cuales se repiten para cada recursión, estos son :

- a) cálculo de la salida estimada  $y_o(n)$ ,
- b) cálculo del error del sistema  $e(n) = y(n) - y_o(n)$ ,
- c) cálculo del vector actualizado  $\hat{x}_e^p(n)$ ,
- d) actualización del vector  $\hat{x}_e^p(n)$ ,
- e) extracción de la estimación  $x_e(n-p)$ .

Los parámetros más relevantes para este algoritmo son :

1. La frecuencia de muestreo de la señal,
2. La longitud de la respuesta al impulso en forma discreta del instrumento,
3. El valor estimado del ruido que fija un vector de ponderación  $L_M^p$ ,
4. El valor  $p$  que fija las características del pivote.

En la Figura 2 se muestra un diagrama de bloques del algoritmo para deconvolución en línea, el cual está representado por las siguientes ecuaciones :

$$y_o(n) = h^T \hat{x}_e^p(n-1) \quad (6)$$

$$e(n) = y(n) - y_o(n) \quad (7)$$

$$\hat{x}'_e(n) = \hat{x}'_e(n-1) - e(n)L_M \tag{8}$$

$$\hat{x}'_e(n) = A\hat{x}'_e(n) \tag{9}$$

$$x_e(n-p) = P\hat{x}'_e(n) \tag{10}$$

en donde:  $n$  es el instante de muestreo,  $A$  es una matriz de peso de dimensiones  $N \times N$  utilizada para actualizar el vector  $\hat{x}'_e(n)$  (De la Rosa, 1998).

El producto  $A\hat{x}'_e(n)$  equivale a un desplazamiento de las coordenadas de  $\hat{x}'_e(n)$  debido a la dirección de los índices de mayor peso y la repetición de la primer coordenada, ver la ecuación (12),  $\hat{h}^T$  es un vector lineal formado a partir de la transpuesta del vector de la respuesta al impulso del sistema,  $T_m$  es el retardo correspondiente a un período de muestreo.  $\hat{P}^T$  es el vector de pivoteo utilizado para la extracción de la coordenada correspondiente para  $\hat{x}'_e(n)$ . Dicha extracción se realiza después de un determinado número de iteraciones del lazo del algoritmo para el cual la estimación  $\hat{x}'_e(n)$  es casi precisa cuando el vector  $\hat{P}^T$  es :

$$\hat{P}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \tag{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0K & 0 \\ 1 & 0 & 0K & 0 \\ M & M & M & M \\ 0 & 0K & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Un valor grande para  $i$  tal que  $P_i = 1$ , mejora la calidad de la estimación pero introduce un retardo considerable en la salida con respecto a la entrada del esquema de deconvolución.  $L_M$  es un vector de ponderación del error, la selección de éste es muy importante pues de él depende la mayor parte de las características del algoritmo. Éste debe ser calculado antes de la ejecución del algoritmo y sólo depende de la respuesta al impulso. Este vector se calcula utilizando la siguiente ecuación :

$$L_i = \frac{1}{m_{ii}} \frac{h_i}{\sum_{j=1}^{N-1} \left( h_j^2 \frac{1}{m_{jj}} \right)} \tag{13}$$

$m_{ii} = i^m$ , donde  $m = 2$  o bien  $m = 1.5$ .

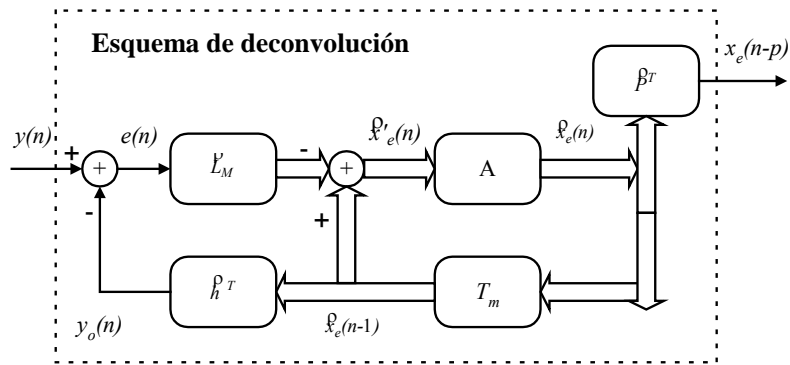


Fig. 2. Esquema para deconvolución en tiempo real.

**2.2. Método para deconvolución homomórfica**

Los sistemas de deconvolución homomórfica fueron introducidos por Bogert, Healy, Tukey (1963), Oppenheim y Schafer (Borget *et al*, 1963), (Oppenheim, 1965), (Oppenheim *et al*, 1975), (Oppenheim *et al*, 1989). La teoría homomórfica generalizada y el concepto del logaritmo del cepstrum han sido tratados durante varias décadas con cierto éxito. El análisis cepstral tiene sus orígenes en el problema de la deconvolución de dos o más señales, y se propone como método para separar señales que han sido combinadas por convolución.

Para una señal de excitación  $x(n)$  que es una secuencia de ruido blanco (SRB o white noise sequence WNS de sus siglas en inglés) y  $h(n)$  una secuencia de fase mínima, se puede obtener un esquema simple para dar solución a la deconvolución. Por otro lado, si  $y(n)$  es de fase máxima, puede hacerse de fase mínima multiplicando la salida  $y(n)$  por un factor exponencial, es decir :

$$y_w(n) = y(n) w^n \tag{14}$$

La transformada  $z$  de la secuencia ponderada  $y_w(n)$  es :

$$Y_w(z) = Z[w^n y(n)] \tag{15}$$

$$Y_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n y(n) z^{-n} = Y(w^{-1}z) \tag{16}$$

la ecuación (16) implica que los polos y ceros de  $Y(z)$  se desplazan radialmente por el factor  $w^{-1}$ . El factor  $w$  debe ser menor que uno (pero cercano a ese valor). Se recomienda que  $w$  debe estar dentro del rango  $0.96 \leq w \leq 0.99$ . Entre más se acerque  $Y(z)$  a una secuencia de fase máxima, más debe reducirse el factor  $w$ . De la ecuación (16),

$$Y_w(z) = Y(w^{-1}z) = X(w^{-1}z) H(w^{-1}z) \quad (17)$$

entonces

$$y_w(n) = x_w(n) * h_w(n) \quad (18)$$

$$y_w(n) = w^n x(n) * w^n h(n) \quad (19)$$

es decir, una convolución ponderada da origen a una convolución de dos secuencias ponderadas. De la ecuación (19),

$$x(n) = w^{-n} x_w(n) \quad (20)$$

$$h(n) = w^{-n} h_w(n) \quad (21)$$

de las ecuaciones (14) y (16),

$$\hat{Y}_w(z) = \log Y_w(wz^{-1}) = \log |A| + \sum_{i=1}^m \log(1 - a_i wz^{-1}) - \sum_{i=1}^p \log(1 - b_i wz^{-1}) \quad (22)$$

utilizando la siguiente igualdad,

$$\log(1 - \beta z^{-1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n z^{-n}}{n}; |z| > |\beta|, \quad (23)$$

de las ecuaciones (22) y (23) el cepstrum ponderado  $c_{yw}(n) = Z^{-1}[\hat{Y}_w(z)]$  está dado por :

$$c_{yw}(n) = \log |A| = \log |y_w(0)|; n = 0, \quad (24)$$

$$c_{yw}(n) = \sum_{i=1}^p \frac{w^n b_i^n}{n} - \sum_{i=1}^m \frac{w^n a_i^n}{n}, n > 0. \quad (25)$$

Las ecuaciones (24) y (25) dan el cepstrum exacto de una secuencia  $y(n)$  ponderada, él cual es útil para evaluar varios esquemas de deconvolución. Se observa que el cepstrum decrece en forma proporcional a  $(1/n)$  y es una secuencia infinita aunque la secuencia temporal  $x(n)$  sea finita. Por otro lado, se demuestra en (Oppenheim A. V., 1975) y (Oppenheim A. V., 1989) que :

$$y(n) = c_{yw}(n)y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} c_{yw}(k)y(n-k) \quad (26)$$

$$y(0) = \exp[c_{yw}(0)], \quad (27)$$

de las ecuaciones anteriores puede observarse que aunque  $c_{yw}(n)$  sea infinita,  $y(n)$  puede recuperarse usando sólo  $N$  muestras si  $y(n)$  es una secuencia finita o truncada. La teoría desarrollada, se implementa en la práctica por medio de la transformada discreta de Fourier (DFT), es decir :

$$\hat{Y}_w(k) = \hat{Y}_w(z); z = \exp(j2\pi kn/N). \quad (28)$$

La transformada rápida de Fourier (FFT) se utiliza para obtener la DFT la cual asume periodicidad fuera del intervalo de observación, por esta razón el cepstrum obtenido usando la DFT es una versión traslapada del cepstrum deseado, o sea :

$$c_{yw}^p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{Y}_w(k) \exp(j2\pi kn/N) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{yw}(n+kN), \quad (29)$$

sin embargo, dado que  $c_{yw}(n)$  decrece más rápido que una secuencia exponencial, el cepstrum periódico tiende a  $c_{yw}(n)$  para valores grandes de  $N$ . Asimismo, puede ser necesario agregar ceros a la secuencia de entrada para reducir el problema del traslape. Dado que  $c_{yw}(n)$  es real, ésto implica que la parte real de su DFT debe ser una función par y la parte imaginaria debe ser una función non, asimismo, su transformada  $z$  debe ser analítica dentro de una región que incluya el círculo unitario. Entonces, se tiene que,

$$\hat{Y}_w(k) = \log|Y_w(k)| + j \text{ang}[Y_w(k)], \quad (30)$$

en donde  $Y_w(k)$  son muestras de la función continua  $Y(e^{jw})$  a  $w=(2\pi k/N)$ , y  $\text{ang}[Y_w(k)]$  son muestras de una función discontinua que varía entre  $-\pi$  y  $+\pi$ . Existen varios métodos para tratar el problema de discontinuidad causado por el logaritmo complejo, tales como, el desdoblamiento de la fase y la derivada del logaritmo.

El desarrollo del algoritmo para obtener la deconvolución es el siguiente(segundo método). Para una señal de excitación  $x(n)$  que es una secuencia de ruido blanco (SRB o WNS) y  $h(n)$  una secuencia de fase mínima, se puede obtener un esquema simple para dar solución a la deconvolución. De la ecuación (14) se obtiene :

$$Y_w(k) = X_w(k)H_w(k), \quad (31)$$

también se puede escribir como

$$Y_w(-k) = X_w(-k)H_w(-k), \quad (32)$$

de la cual,

$$|Y_w(k)|^2 = |X_w(k)|^2 |H_w(k)|^2, \quad (33)$$

o también,

$$S_{yy}(k) = S_{xx}(k)S_{hh}(k) \quad (34)$$



usando el teorema Wiener-Khinchine, se obtiene :

$$R_{yy}(\alpha) = R_{xx}(\alpha) * R_{hh}(\alpha) \tag{35}$$

en las ecuaciones (34) y (35),  $S_{ii}(k)$  y  $R_{ii}(\alpha)$  representan la densidad espectral de potencia y la autocorrelación respectivamente. Dado que  $x(n)$  es una secuencia WNS,  $S_{xx}(k) = \sigma^2$ , de la ecuación (33) se obtiene :

$$|Y_w(k)|^2 = \sigma^2 |H_w(k)|^2 \tag{36}$$

tomando logaritmos en ambos lados de la igualdad,

$$\log|Y_w(k)| = \log|H_w(k)|, \tag{37}$$

el término  $\log \sigma$  es una constante y fue eliminado sabiendo que sólo afecta a la componente cepstral para  $n = 0$ , asimismo,  $\sigma$  puede hacerse igual a la unidad. De las ecuaciones (36) y (37) puede concluirse que  $\log|H_w(k)|$  es una función real y par, así, la parte par de  $c_{hw}(n)$  se obtiene como la DFT inversa (IDFT) del  $\log|H_w(k)|$ , es decir:

$$c_{hw}^e(n) = D^{-1}[\log|H_w(k)|], \tag{38}$$

el cepstrum  $c_{hw}(n)$  puede recuperarse a partir de su parte par como :

$$c_{hw}(n) = c_{hw}^e(n)u^+(n), \tag{39}$$

donde el "lifter"  $u^+(n)$  es :

$$u^+(n) = \begin{cases} 2 ; 1 \leq n < L/2 \\ 1 ; n = 0, L/2 \\ 0 ; L/2 < n \leq (L-1) \end{cases}, \tag{40}$$

$L$  es la longitud de la DFT y debe ser mayor o igual a  $N = N_1 + N_2 - 1$ , donde  $N_1$  y  $N_2$  son las longitudes de las secuencias  $x(n)$  y  $h(n)$  respectivamente. La condición de que  $H(z)$  es de fase mínima y propia, implica que existe un sistema estable y causal  $H^{-1}(z)$  tal que,

$$H_w^{-1}(z) H_w(z) = 1, \tag{41}$$

tomando logaritmos y anti-transformado, se obtiene :

$$c_{hw}^{-1}(n) = -c_{hw}(n), \tag{42}$$

asimismo,

$$H_w^{-1}(k) = \exp \{D[c_{hw}^{-1}(n)]\}. \quad (43)$$

Usando las ecuaciones (14) – (21), (31), (37) – (40) y (42) – (43), se obtiene el diagrama a bloques para obtener la deconvolución, éste se muestra en la figura 3.

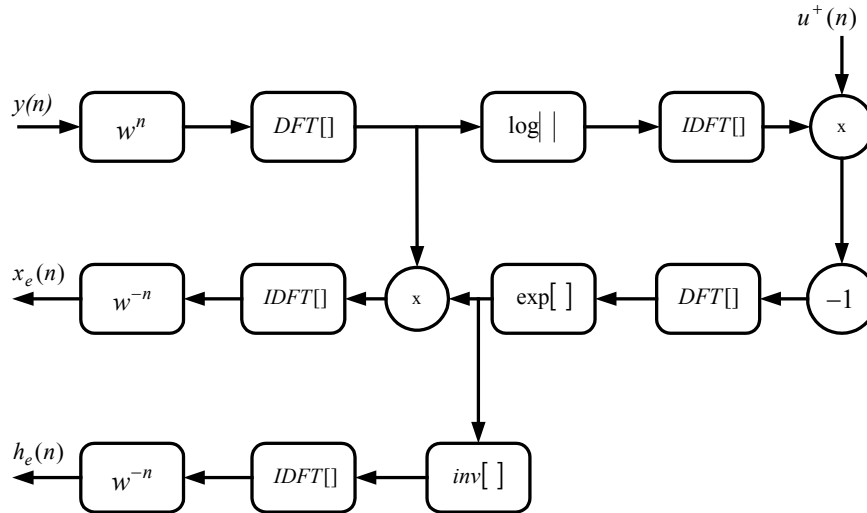


Fig. 3. Sistema para obtener la deconvolución cuando  $x(n)$  es una secuencia de ruido blanco y  $h(n)$  es de fase mínima.

### 2.3. Método para deconvolución iterativa

Desde 1930 muchos investigadores se han dedicado a buscar métodos iterativos que den solución al problema de la deconvolución, uno de los pioneros dentro de este tipo de métodos es sin duda Van Cittert (Van Cittert, 1931) quien propuso un método iterativo lineal para la deconvolución de señales, el cual es base fundamental de toda una serie de métodos iterativos lineales y no lineales (Bandzuch *et al*, 1997), (Crilly, 1991), (Jansson, 1984). Varios de los métodos de deconvolución iterativa se usan con frecuencia para la restauración de “picos” cromatográficos o espectroscopios distorsionados, lo cual los ubica como métodos principalmente explotados y examinados en el área de espectroscopia.

En la Figura 4 se muestra un diagrama de bloques del proceso de deconvolución en forma iterativa. El algoritmo propuesto por Jansson se descompone en las siguientes ecuaciones:

$$\hat{y}^k(n) = h(n) * \hat{x}^k(n) \quad (44)$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}^k(n) \quad (45)$$

$$r^k(n) = r_o \left[ 1 - \frac{2}{C} \left| \hat{x}^k(n) - \frac{C}{2} \right| \right] \quad (46)$$

$$\hat{x}^{k+1}(n) = \hat{x}^k(n) - r^k(n)e(n) \quad (47)$$

$$x_e(n) = \hat{x}^k(n) = \hat{x}^{k+1}(n) \quad (48)$$

en donde:  $\hat{y}^k(n)$  es la  $k$ -ésima estimación de una observación basada en la convolución de  $h(m)$  y  $\hat{x}^k(n)$ , en el caso en el que  $k = 0$ ,  $\hat{x}^0(n) = y(n)$  {  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  },  $h(m)$  es el vector de la respuesta al impulso acotada por  $m$  muestras,  $e(n)$  es el criterio de error mínimo entre la salida observada y una estimación de la misma,  $r^k(n)$  es el  $k$ -ésimo valor para la función de relajación la cual depende de  $r_o$ ,  $C$  y  $\hat{x}^k(n)$ ,  $\hat{x}^{k+1}(n)$  es la  $k+1$  estimación de  $x(n)$  y  $x_e(n)$  es la estimación final de  $x(n)$  {  $k = 0, 1, 2, \dots, K$  }.

Las ecuaciones (46.a) – (46.c) se utilizaron como funciones de relajación para la restauración tres tipos de señales consideradas en este trabajo: la suma de senoides, onda cuadrada y diente de sierra respectivamente, pues estas fueron las funciones con las que se obtuvieron los mejores resultados.

$$r_S^k(n) = 0.021 \left[ 1 - \frac{2}{6} \left| \hat{x}^k(n) - \frac{6}{2} \right| \right], \# \ i = 3 \tag{46.a}$$

$$r_C^k(n) = 0.051 \left[ 1 - \frac{2}{6} \left| \hat{x}^k(n) - \frac{6}{2} \right| \right], \# \ i = 4 \tag{46.b}$$

$$r_D^k(n) = 0.01 \left[ 1 - \frac{2}{6} \left| \hat{x}^k(n) - \frac{6}{2} \right| \right], \# \ i = 4 \tag{46.c}$$

en donde  $i$  representa el número de iteraciones realizadas.

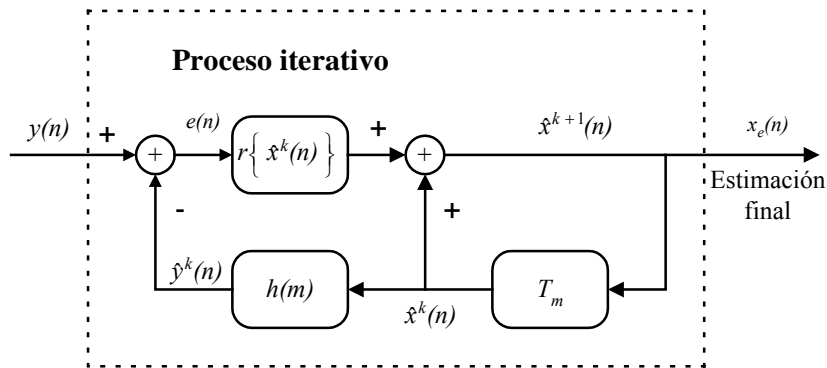


Fig. 4. Esquema para deconvolución iterativa.

**2.4. Deconvolución basada en un modelo de identificación y resistente al ruido**

Muchos algoritmos de deconvolución se basan en propiedades matemáticas. En ocasiones, se introducen artificios matemáticos, como en el caso de la regularización, y se agregan parámetros de control sin que éstos necesariamente estén relacionados con el problema físico. Sin embargo, la literatura y algoritmos de identificación de sistemas son más conocidos y muchos de ellos están relacionados con aplicaciones de ingeniería (McBride *et al*, 1966), (Steiglitz *et al*, 1965). Teniendo esto en cuenta, se propuso invertir el papel de la función del sistema  $h(t)$  y de la entrada  $x(t)$ . El

problema se convierte en un problema de identificación de sistemas, siendo ahora la entrada  $h(t)$  y el “sistema” a estimar  $x(t)$  (Miramontes *et al*, 1998). La función representativa de un sistema se obtiene por medio de la respuesta al impulso del sistema en el dominio del tiempo o como función de transferencia en el dominio de la frecuencia. En la mayoría de las ocasiones las señales de entrada y las funciones de los sistemas no están definidas analíticamente, lo cual es un gran problema, sin embargo la convolución es una operación fácil de aproximar por medio de métodos numéricos de integración (Twomey, 1962). Por otro lado, el problema inverso es la determinación de una función de entrada desconocida, dada una señal de salida conocida y la función representativa de un sistema acotado en ancho de banda. Otro factor importante que debe ser considerado es la existencia de ruido de medición el cual se presenta en los problemas prácticos y lo cual complica más el problema de deconvolución.

Se pueden usar diferentes funciones ortogonales como componentes de  $\hat{x}(t)$ . Usualmente los valores de  $x(t)$  pueden ser localizados sobre un intervalo finito de tiempo,  $\hat{x}(t)$  puede ser considerada cero fuera de dicho intervalo, o en algunos casos puede ser representada de forma periódica y sin pérdidas considerables. Las representaciones de funciones ortogonales en un tiempo finito incluyen las funciones de Walsh con longitud  $\Delta t$  (como en la reconstrucción muestra-retención), funciones sinc ( $\sin(t)/t$ ), segmentos de senos y/o cosenos que son cero fuera del intervalo de interés, las ondículas, y muchas otras funciones ortogonales. La selección obvia para una representación periódica son las series de Fourier (senos y cosenos). Estas series, y otras tienen, la propiedad de que al incrementar el número de términos también incrementan la representación en frecuencia de  $\hat{x}(t)$ . Si el número de elementos es suficiente y está relacionado con la frecuencia de corte del sistema, la señal estimada  $\hat{x}(t)$  óptima no contendrá componentes espurias debidas sólo al ruido. Por ello no se necesita iteración alguna para realizar la reducción del ruido; el conjunto óptimo puede ser calculado mediante la inversión matricial y en un sólo paso antes de iniciar el proceso de deconvolución (Miramontes *et al*, 1998).

A continuación se describe el cálculo de los parámetros necesarios para poder realizar la deconvolución, empleando el algoritmo (ver la Figura 5) de identificación de sistemas de (McBride *et al*, 1966). En donde:  $p=1,2,K,P$ , siendo  $P$  el valor óptimo de componentes base,  $n=1,2,K,N$ ,  $N$  es el número máximo de muestras de  $y(n)$  y  $m=1,2,K,N$ . Nótese que si se desea realizar nuevamente la deconvolución solo se realizarán algunos pasos. Los pasos en su totalidad no son necesarios, ya que se estableció una serie de componentes fijas.

De la ecuación (3) y aplicando un criterio cuadrático al error entre  $h(t)$  y  $\hat{h}(t)$ ,

$$Q = \overline{[x^*(h - \hat{h})]^2} + 2r \overline{[x^*(h - \hat{h})]} + \bar{r}^{-2} \quad (49)$$

en donde \* denota la convolución (descrita ampliamente en (McBride *et al*, 1966)). Puesto que la operación de convolución es simétrica, entonces la ecuación (49) puede ser reescrita como en (50), se puede ver que si la entrada  $x(t)$  fuese desconocida y  $h(t)$  fuese una función de respuesta al impulso conocida, por simetría, el problema de deconvolución se convierte en un problema de identificación de sistemas:

$$Q = \overline{[h^*(x - \hat{x})]^2} + 2r \overline{[h^*(x - \hat{x})]} + \bar{r}^{-2} \quad (50)$$

La mayoría de los algoritmos de identificación se han desarrollado desde diferentes puntos de vista. El sistema desconocido, puede ser representado por una función  $h(t)$  desconocida, luego se modela como una función conocida, ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia, cuyos parámetros serán determinados (Van Cittert, 1931), (Steiglitz, 1965). La salida aproximada de  $\hat{y}(t)$  está expresada como una función de  $h(t)$  y un conjunto de  $p$  parámetros  $a_k$ . Los algoritmos de identificación calculan un conjunto de parámetros los cuales minimizan una función de error (error cuadrático medio  $Q$ ). Esta filosofía de identificación puede ser aplicada al problema de deconvolución si se selecciona un modelo representativo de  $\hat{x}(t)$  en términos de un conjunto de parámetros  $a_k$  y calculando otro conjunto el cual minimice a  $Q$ . Si el modelo es una función lineal de  $a_k$  (una suma de funciones  $\varphi_k(t)$  multiplicadas por coeficientes  $a_k$ )

se puede calcular un conjunto óptimo de parámetros sin necesitar de iteración alguna. La selección de un algoritmo debe hacerse de tal modo que se tenga un conjunto apropiado de funciones base  $\phi_k(t)$ .

En su notación vectorial la entrada reconstruida está representada con la siguiente ecuación :

$$\hat{x}(t) = \mathcal{A}^T \mathcal{P}(t) \tag{51}$$

donde  $\mathcal{A}$  es el vector de parámetros y  $\mathcal{P}(t)$  el vector de funciones base. Después se define el vector :

$$\mathcal{X}(t) = h(t) * \mathcal{P}(t) \tag{52}$$

y

$$\hat{y}(t) = \mathcal{A}^T \mathcal{X}(t) \tag{53}$$

y el error cuadrático medio  $Q$ , de la ecuación

$$Q = \overline{[y(i) - \hat{y}(i)]^2} = \sum_i [y(i) - \sum_j h(i-j)\hat{x}(j)]^2 \tag{54}$$

es mínimo cuando:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathcal{A}} = -2 \left[ y(t)\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^T(t)\mathcal{A} \right] = 0 \tag{55}$$

donde  $\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^T(t)$  es la matriz de coeficientes que será invertida para dar solución a la ecuación (55) y así encontrar el vector de parámetros  $\mathcal{A}$ , la matriz sólo depende de  $h(t)$  y de  $\mathcal{P}(t)$ , y no de  $y(t)$  por esto es que sólo se calcula una sola vez y antes de iniciar el proceso de deconvolución; conociendo  $\mathcal{A}$  y la respuesta al impulso de algún sistema para el cual se desea realizar la deconvolución es posible restaurar más de una señal de medición. Si  $\hat{x}(t)$  está representada por series de Fourier, las funciones  $\phi_k(t)$  son senos y cosenos continuos, la matriz  $[\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^T(t)]^{-1}$  es diagonal y el cálculo se simplifica grandemente; sólo  $p$  elementos de la matriz deben ser calculados, en lugar de  $p^2$ .

Con base a la ecuación (55) se establece la solución para los parámetros  $a_k$ , es decir:

$$\mathcal{A} = [\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^T(t)]^{-1} \mathcal{X}(t)y(t) \tag{56}$$

en donde  $\mathcal{X}(t)y(t)$  son los coeficientes ortogonales representativos de la señal  $y(t)$  y  $[\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^T(t)]^{-1}$  la matriz de coeficientes de las funciones base (ortogonales) utilizadas.

Resumen para la implementación del algoritmo, y el cálculo de los parámetros necesarios para poder llevar a cabo la deconvolución:

1. Obtención del vector de funciones componentes:

$$C_o(n,p) = \cos \left[ \frac{n\pi p}{N} \right] \tag{57}$$

2. En seguida se calcula la relación entre las funciones componentes y la respuesta al impulso del sistema :

$$C_h(n,p) = C_o(n,p) * h(m) \tag{58}$$

3. En base a esta última expresión se obtiene la matriz de coeficientes:

$$M_{hh}(p,p) = C_h(n,p)^T C_h(n,p) \tag{59}$$

4. Se calcula la inversa de la matriz de coeficientes:

$$M_{hh}^{-1} = \text{inv}(M_{hh}) \tag{60}$$

5. En esta etapa se inicia la deconvolución, puesto que ya se conoce la inversa de la matriz de coeficientes, la cual sólo depende de  $p$  y de  $h$ , se calcula el vector de parámetros de  $y(n)$ :

$$C_y(p) = C_h(n, p)^T y(n) \tag{61}$$

6. Posteriormente se calcula el vector de los parámetros  $a(p)$ :

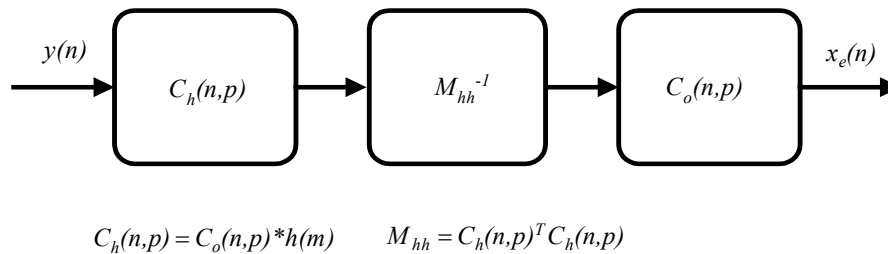
$$a(p) = M_{hh}^{-1}(p, p) C_y(p) \tag{62}$$

7. Finalmente se obtiene la estimación de  $x(n)$ :

$$x_e(n) = C_o(n, p) a(p) \tag{63}$$

### 3. Resultados de comparación

El propósito final de este trabajo es evaluar y clasificar la capacidad de restauración de señales de cada uno de los cuatro métodos, para ello se seleccionó una medida de distorsión la cual es el Error Cuadrático Medio (MSE) y el tiempo de procesamiento bajo varias condiciones de Señal a Ruido (SNR). En los mejores casos se pretende un error cuadrático medio mínimo (que tiende a cero) y una sensibilidad casi nula al ruido por parte de los algoritmos, esto es complicado sobre todo cuando no se conocen las fuentes de ruido o peor aún, cuando no son controlables. La plataforma de simulación utilizada es MATLAB 5.1. Se diseñó un filtro IIR-Butterworth pasa bajas (FPB) de cuarto orden y con frecuencia de corte normalizada de 0.2, se sabe que en instrumentación la mayoría de los sistemas tienen una respuesta al impulso similar a la de los filtros pasa bajas, por ello se hace la selección de un FPB para simular la respuesta al impulso  $h(n)$  de un sistema.



**Fig.5.** Esquema para deconvolución resistente al ruido.

Es importante observar que cuando las relaciones señal a ruido son relativamente altas el porcentaje del error cuadrático medio (%MSE) es mínimo con respecto de cada una de las señales, esto también depende del tipo de señal (qué tan rica es en componentes frecuenciales) pues es muy importante obtener una buena aproximación de la señal original (deseada), entre más componentes frecuenciales contenga la señal será más difícil obtener una buena estimación o aproximación y por lo tanto el %MSE no será tan pequeño (ver figura 6). Se puede decir que la parte más importante es cuando se presentan relaciones SNR intermedias (entre 30 dB y 15 dB) de la señal de observación, pues ésta está contaminada por un ruido considerable el cual se podría presentar con mayor frecuencia en instrumentación. Cuando la SNR es muy baja se dispara drásticamente el %MSE mostrando que la estimación  $\hat{x}(n)$  es una pobre aproximación a  $x(n)$ . En las Figuras 6, 7 y 8 se ilustra con mayor claridad la relación entre %MSE y SNR. Es evidente lo que ya se comentó anteriormente acerca del incremento del %MSE a bajas SNR, en el caso de la Figura 6 se muestra la suma de senoides, en donde para el cuarto método se tomaron 256 muestras de  $y(n)$  y 56 parámetros ortogonales, bajo esta condición se obtuvieron los mejores resultados según el %MSE. En los demás métodos se utilizaron 3000 muestras de la

señal de observación  $y(n)$ . Para el caso del algoritmo propuesto por Jansson (método 3) se planteó una función de relajación óptima, de tal modo que ésta ofrece los mejores resultados.

En la Figura 6 se comparan gráficamente los resultados obtenidos por los cuatro métodos para la suma de senoides. Es evidente que a SNR relativamente altas y cuando la señal de observación no es muy rica en componentes frecuenciales, el %MSE tiende a cero. Sin embargo, se notan diferencias entre los cuatro métodos: se observa que el método 4 brinda los mejores resultados, de manera un tanto contrastante se observa que el método 2 es un poco inconsistente, sin embargo como ya se sabe, es un método donde se realiza la separación de señales (deconvolución ciega) y a diferencia de los otros tres métodos no es tan necesario el conocimiento a priori de la respuesta al impulso del sistema, sin embargo sí es necesario incorporar algunas características del mismo. De igual forma si se observan gráficamente los resultados obtenidos por los cuatro métodos cuando se trata de la restauración de una onda cuadrada (ver Figura 7) se obtiene una representación o comportamiento similar al presentado en la Figura 6, la excepción aquí es que el %MSE no se logra minimizar tanto, ya que este tipo de señales son ricas en componentes frecuenciales y por lo tanto no se alcanza la recuperación de todas las frecuencias originales.

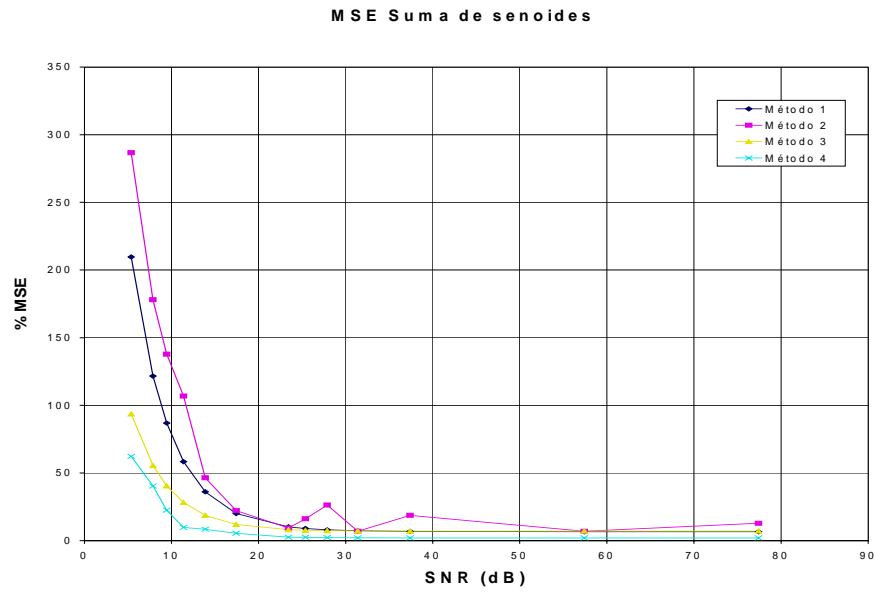
Asimismo, se observan ciertas variaciones para el caso del método 2, cabe hacer notar que se utilizan diversas funciones de relajación para los diferentes tipos de señales en el procesado con el método 3. Por ejemplo, en este caso la función de relajación es diferente a la utilizada para la suma de senoides. De igual modo para el método 4 se propone el uso de 68 parámetros ortogonales y 256 muestras de la señal de observación. En la figura 8 se observan los resultados obtenidos cuando se restaura una señal diente de sierra, se sabe que este tipo de señales también son ricas en componentes frecuenciales, sin embargo, es evidente que la restauración para este tipo de señales puede alcanzar un %MSE aceptable y la estimación  $\hat{x}(n)$  es una buena aproximación a  $x(n)$ . Para la obtención de los resultados presentados en la Figura 8 nuevamente se incorpora una nueva función de relajación (para el método 3) y se corrige el número de parámetros utilizados por el método 4 a una cantidad de 64 parámetros, manteniendo las 256 muestras de observación dentro del mismo método.

Las ecuaciones empleadas para obtener tanto el MSE como la SNR son las siguientes :

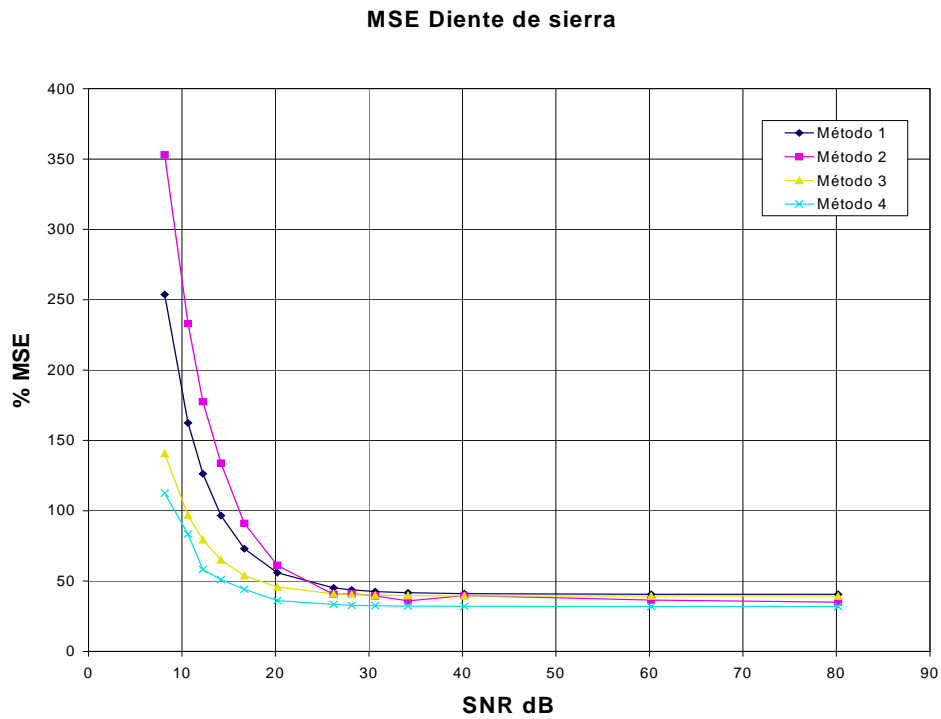
$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{x}(i) - x(i)]^2 \quad (64)$$

$$SNR = 10 \log_{10} \left[ \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i)^2}{\sigma^2} \right], \quad \sigma = \frac{V_{pp}}{6} \quad (65)$$

en donde  $V_{pp}$  es la amplitud pico a pico del ruido con distribución Gaussiana y media cero.



**Fig. 6.** Gráfica del %MSE contra la SNR para el caso de la señal representada por una suma de senoides.



**Fig. 7.** Gráfica del %MSE contra la SNR para el caso de la señal representada por una onda cuadrada.



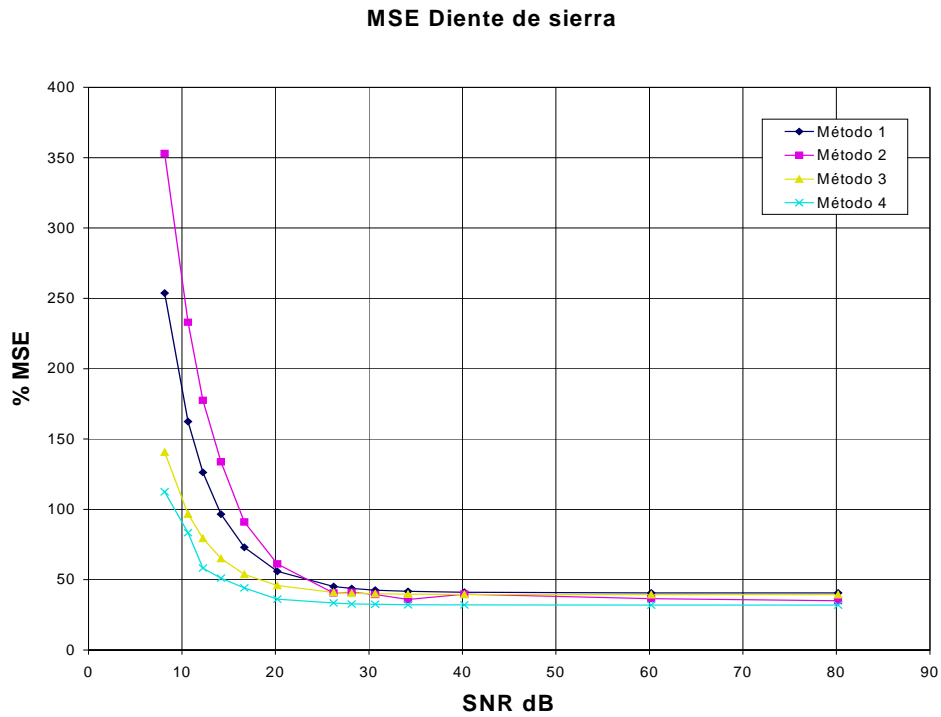


Fig. 8. Gráfica del %MSE contra la SNR para el caso de la señal representada por un diente de sierra.

### 3.1 Comparación en términos de tiempo

En la Tabla 1 se muestran los tiempos de procesamiento requeridos por el CPU para cada uno de los cuatro métodos. Estos tiempos pueden variar dependiendo del tipo de procesador utilizado (se utilizó un pentium II). Sin embargo, el porcentaje de variación de los tiempos de procesamiento debe de mantenerse.

Tabla 1 Tiempos de simulación para los cuatro métodos.

Tiempos obtenidos (en seg) durante la simulación en MATLAB						
Señal	SNR dB	Método 1 (N=3000)	Método 2 (N=3000)	Método 3 (N=3000)	Método 4 (N=256)	
SS	30	20,024	24,33	16,53	0,05999	
SS	20	20,274	23,95	15,16	0,06	
SS	15	19,723	22,98	15,12	0,06	
OC	30	19,389	24,5	15,13	0,06	
OC	20	19,5	23,73	14,98	0,06	
OC	15	19,56	23,62	15,05	0,05999	
DS	30	19,94	23,83	15,1	0,05999	
DS	20	19,58	22,97	15,16	0,06	
DS	15	19,6	23,46	14,79	0,06	

Puesto que el método 1 es recursivo (método implementable en tiempo real), el tiempo promedio de procesamiento es 6.577 mseg. por muestra, siendo este método el más rápido. Para el método 4 la variación del tiempo de procesamiento para una buena restauración depende tanto del número de muestras a procesar como del número de coeficientes utilizados.

### 3.2. Resultados obtenidos variando los valores de $p$ y $N$ en el cuarto método.

En las Tablas 2, 3 y 4 se presentan las variaciones del %MSE en función de la SNR, en donde se varía el número de parámetros ortogonales ( $p$ ) para el caso específico del cuarto método. Tomando en cuenta dos valores pequeños de  $p$ , se tiene  $N = 128$ , y para tres valores grandes de  $p$ , se tiene  $N = 256$ .

**Tabla 2** Comparación de la SNR y el porcentaje del MSE cuando se restaura una suma de senoides, utilizando diferentes valores de  $p$  y con diferente  $N$ .

Para $p$ parámetros ortogonales diferentes Señal representada por una suma de senoides (Método 4)						
SNR dB		$p = 92$ $N = 256$	$p = 68$ $N = 256$	$p = 46$ $N = 256$	$p = 23$ $N = 128$	$p = 28$ $N = 128$
		% MSE	% MSE	% MSE	% MSE	% MSE
77,4088		0,45	0,97	5,94	8,06	3,06
57,4088		0,46	0,97	5,93	8,06	3,06
37,4088		1,81	1,02	5,94	8,15	3,07
31,3882		2,37	1,25	6,08	8,22	3,25
27,8664		8,83	1,6	6,17	8,11	3,23
25,3676		11,09	2,02	6,21	8,29	3,67
23,4294		23,49	2,96	6,35	8,26	3,93
17,4088		98,09	8,82	7,81	9,57	5,17
13,887		231,54	18	12,29	12,93	12,93
11,3882		335,03	20,77	15,38	15,73	9,68
9,45		336,49	28,53	16,37	23,83	12,24
7,8664		808,85	58,99	22,13	22,91	35,49
5,3676		1143,9	117,01	32,06	35,63	37,86

Se observa que el %MSE tiende a ser independiente de la SNR para  $SNR \geq 30$  dB, asimismo, para  $N$  fija y  $SNR \geq 30$  dB, el %MSE es menor para los valores de  $p$  mayores. Sin embargo para los valores menores de  $p$  se tiene una buena aproximación en la restauración es decir que el %MSE es aceptable, es importante lo anterior pues sabemos que si se reduce el número de parámetros, se reduce el tiempo de procesamiento pues se tienen menos parámetros y el tamaño de la señal de observación también se reduce. En las figuras 9 a la 11, se comparan las señales restauradas por cada uno de los cuatro métodos, y para tres valores de SNR (30 dB, 20 dB y 15 dB), en particular se seleccionaron estos tres valores diferentes de SNR pues se encuentran dentro de un rango crítico en el cual los métodos empiezan a diferir y asimismo, son relaciones que realmente se encuentran en la práctica. Obsérvese que para una  $SNR = 15$  dB, las señales restauradas tienden a diferir significativamente de la señal deseada, notándose que el cuarto método proporciona los mejores resultados.

## 4. Conclusiones

Bajo el análisis del %MSE contra el SNR y mediante una tabla comparativa de tiempos, se concluye que el método más rápido es el de deconvolución en línea (método 1), pero el mejor método, hablando cuantitativa y cualitativamente, es

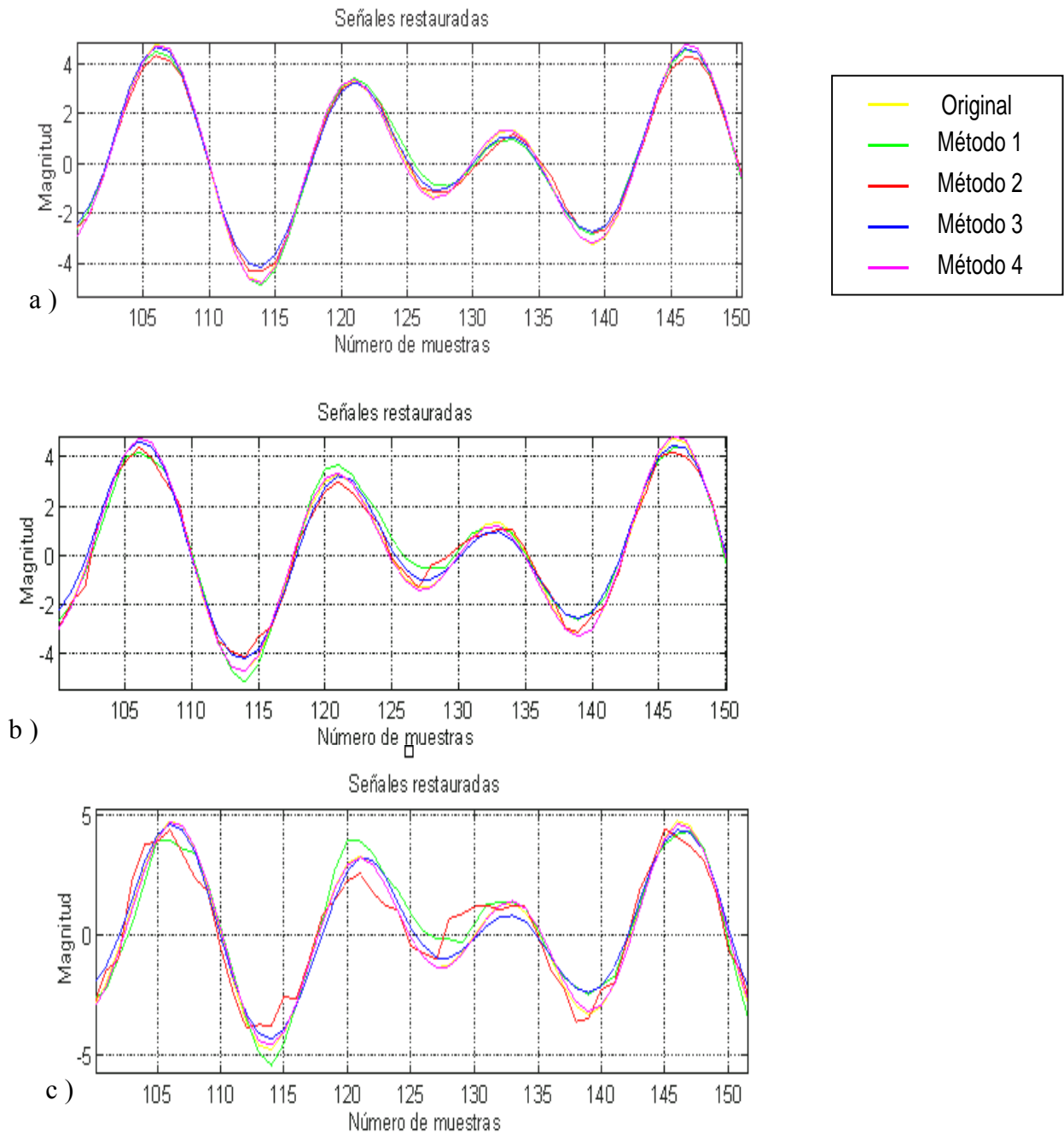
sin duda el método propuesto basado en identificación de sistemas (método 4). En lo que se refiere a trabajo futuro, se pretende modificar el algoritmo propuesto a una versión bidimensional, para el caso de restauración de imágenes reales con aplicabilidad en problemas específicos de astronomía, y posteriormente su implantación en una tarjeta DSP.

**Tabla 3** Comparación de la SNR y el porcentaje del MSE cuando se restaura una señal cuadrada, utilizando diferentes valores de  $p$  y con diferente  $N$ .

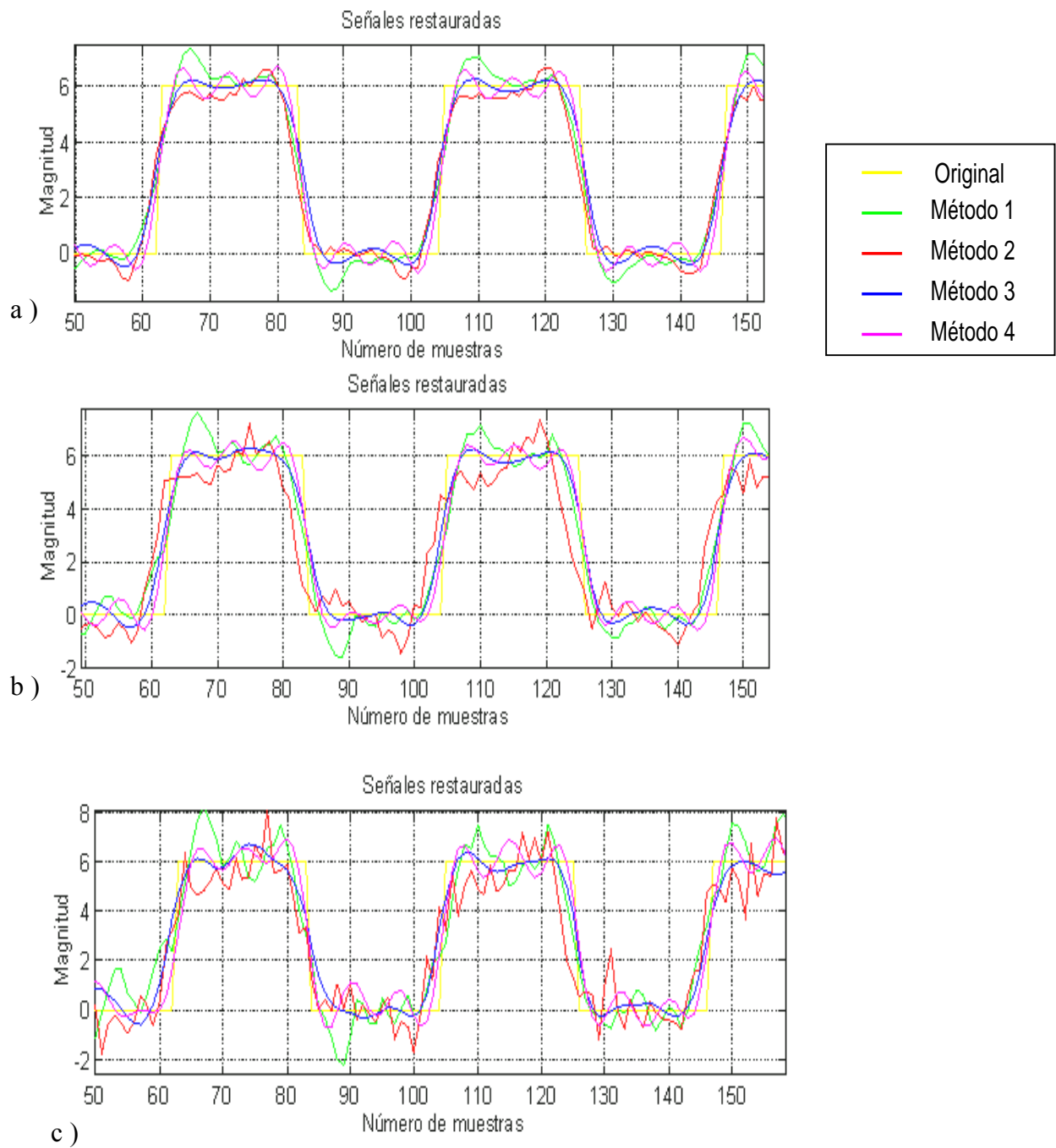
Para $p$ parámetros ortogonales diferentes Señal representada por una señal cuadrada (Método 4)					
SNR dB	$p = 92$ N = 256	$p = 56$ N = 256	$p = 46$ N = 256	$p = 23$ N = 128	$p = 34$ N = 128
	% MSE	% MSE	% MSE	% MSE	% MSE
81,842	40,94	89,6	85,9	96,6	67,25
61,842	40,91	89,6	85,9	96,6	67,26
41,842	41,97	89,6	85,91	96,64	67,15
35,8214	43,02	89,89	85,95	96,96	67,47
32,2995	49,42	89,9	85,95	96,69	68,18
29,8008	57,77	90,07	86,13	97,04	67,78
27,8626	58,21	90,26	86,25	97,13	70,82
21,842	134,41	94,97	88,13	97,31	74
18,3201	174,58	95,09	88,48	103,76	75,86
15,8214	344,94	104,46	94,04	106,68	92,84
13,8832	792,97	108,32	95,45	113,37	92,37
12,2995	820,34	123,79	102,75	115,29	117,37
9,8008	1258,06	133,08	109,26	134,81	172,03

**Tabla 4** Comparación de la SNR y el porcentaje del MSE cuando se restaura una señal diente de sierra, utilizando diferentes valores de  $p$  y con diferente  $N$ .

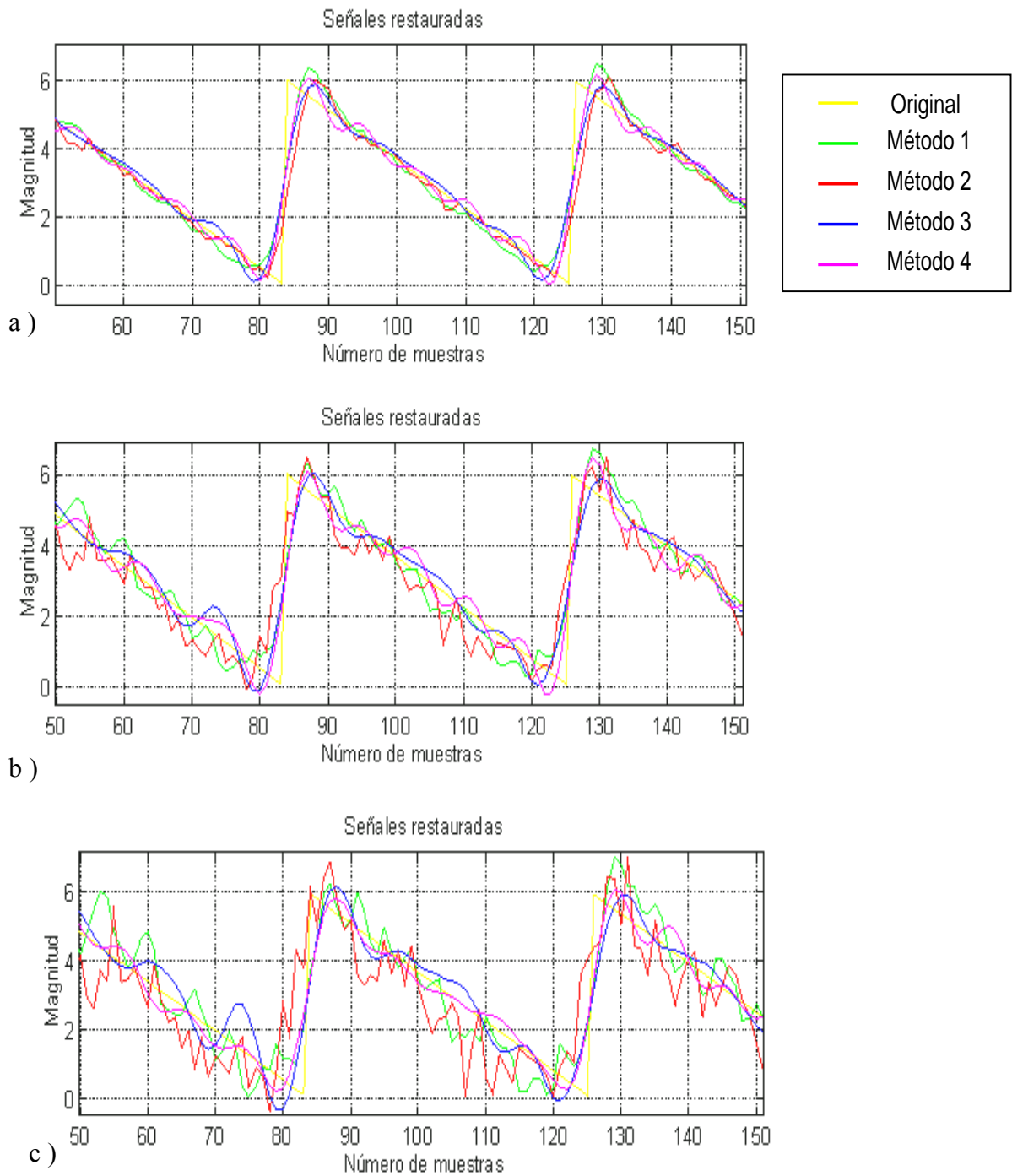
Para $p$ parámetros ortogonales diferentes Señal representada por una señal diente de sierra (Método 4)					
SNR dB	$p = 92$ N = 256	$p = 56$ N = 256	$p = 46$ N = 256	$p = 23$ N = 128	$p = 32$ N = 128
	MSE (92)	MSE (56)	MSE (46)	MSE (23)	MSE (32)
80,1983	22,2	39,69	53,51	52,85	33,42
60,1983	22,21	39,69	53,51	52,85	33,42
40,1983	23,3	39,72	53,52	52,88	33,44
34,1777	24,85	39,88	53,56	52,92	33,59
30,6559	29,97	40,05	53,74	53,02	33,73
28,1571	33,79	40,13	53,83	53,28	34,37
26,2189	44,97	40,65	53,89	53,54	34,51
20,1983	118,38	42,92	55,59	54,43	37,09
16,6765	179,99	47,67	57,07	60,08	41,95
14,1777	397,01	61,55	58,91	57,73	56,27
12,2395	389,54	55,17	64,57	58,33	59,41
10,6559	710,24	72,84	69,81	75,13	63,57
8,1571	1948,12	83,61	75,63	83,72	112,95



**Fig. 9.** Restauración obtenida por los cuatro métodos cuando a) la SNR = 30 dB, b) la SNR = 20 dB y c) la SNR = 15 dB para una suma de senoides.



**Fig. 10.** Restauración obtenida por los cuatro métodos cuando a) la SNR = 30 dB, b) la SNR = 20 dB y c) la SNR = 15 dB para una señal cuadrada.



**Fig. 11.** Restauración obtenida por los cuatro métodos cuando a) la SNR = 30 dB, b) la SNR = 20 dB y c) la SNR = 15 dB para un diente de sierra.

## 5. Referencias

1. **Bandzuch P., Morhác M., and Krištiak J.**, "Study of the Van Cittert and Gold Iterative Methods of Deconvolution and their Application in the Deconvolution of Experimental Spectra of Positron Annihilation," Elsevier Science Publishers B. V., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, North-Holland, Section A, 1997, pp. 506-515.
2. **Bogert B.P., Healy M. J., and Tukey J.W.**, "The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-cepstrum and Saphe cracking," In Time Series Analysis, M. Rosenblatt, Ed. New York: Wiley, 1963, Chap. 15, pp. 209-243.
3. **Castleman K. R.**, "Digital Image Processing," NJ, Prentice-Hall, Chap. 16, 1996, pp. 387-430.
4. **Crilly P. B.**, "A Quantitative Evaluation of Various Iterative Deconvolution Algorithms," *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, Vol. 40, June 1991, pp. 558-562.
5. **Demoment G.**, "Déconvolution des Signaux," Cours, École Supérieure D'Électricité SUPELEC, 1987-1997, Chap. 5, pp. 51-76.
6. **De la Rosa J. I.**, "Evaluación Comparativa de Cuatro Algoritmos que dan Solución numérica a la Deconvolución de sistemas monodimensionales," Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, CITEDI, 1998.
7. **García J., and De la Rosa J. I.**, "El Cepstrum y un Esquema Simple para Deconvolución," *CIE '97 CINVESTAV-IPN*, Vol. 2, Septiembre 1997, pp. 329-334.
8. **García E., Vega H., Miramontes G., and McBride L.** "Noniterative Unfolding Algorithm for Neutron Spectrum Measurements with Bonner Spheres," *IEEE Trans. On Nuclear Science*, No. 6, Vol. 46. 1999.
9. **Gonzales R. C., and Wintz P.**, "Digital Image Processing," Addison Wesley, Chap. 5, 1989, pp. 205-253.
10. **Hua Y., and Sarkar T. K.**, "Matrix Pencil and System Poles," Elsevier Science Publishers B. V., Signal Proc. 21, 1990, pp. 195-198.
11. **Jain A. K.**, "Fundamentals of Digital Image Processing," NJ, Prentice-Hall, 1989, Chap. 8, pp. 267-341.
12. **Jansson P. A.**, "Deconvolution with Applications in Spectroscopy," Academic Press, 1984, Chap. 3, 4, 7, pp. 69-91, 96-132, 188-225.
13. **Lee G.-K., Gelfand S. B., and Fitz M. P.**, "Bayesian Decision Feedback Techniques for Deconvolution," *IEEE Journal on Selected areas of Commun.*, Vol. 13, No. 1, January 1995, pp. 155-165.
14. **Martínez C. A.**, "Conception D'une Architecture de Processeur de signal VLSI, Programmable en Langage Évolé et Optimale dans le Traitement D'algorithmes Rapides," These de Docteur en Science, Université de Paris-Sud Centre D'Orsay et École Supérieure D'Électricité, 1988, Chap. 2,5, pp. 28-33, 107-113.
15. **McBride L. E., Schaefgen H. W., and Steiglitz K.**, "Time-Domain Approximation by Iterative Methods," *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-13, December 1966, pp. 381-387.
16. **Miramontes G., McBride L. E., and García E.**, "Deconvolution with Noise as System Identification," *IEEE Workshop on Emerging Technologies, Intelligent Measurement and Virtual Systems for Instrumentation and Measurements - ETIMVIS'98* St. Paul, MN, USA May 15 -16, 1998.
17. **Oppenheim A. V.**, "Superposition in a Class of Nonlinear Systems," Tech. Rep. 432, Res. Lab. Electron., M.I.T., Cambridge, MA, March 31, 1965.
18. **Oppenheim A. V., and Schaffer R. W.**, "Digital Signal Processing," NJ, Prentice-Hall, 1975.
19. **Oppenheim A. V., and Schaffer R. W.**, "Discrete-Time Signal Processing," NJ, Prentice-Hall, 1989, Chap. 12, pp. 768-826.
20. **Steiglitz K., and McBride L. E.**, "A Technique for Identification of Linear Systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. AC-10, 1965, pp. 461-464.
21. **Twomey S.**, "On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of First Kind by the Inversion of Linear System Produced by Quadrature," *Journal Asso. Comp. Mach.*, Vol. 10, 1962, pp. 97-101.
22. **Van Cittert P. H.**, "Zum Einfluss der Spaltbreite auf die Intensitätswerteilung in Spektrallinien II," *Z. Phys.* Vol. 69, 1931, pp. 298-308.



**José Ismael de la Rosa Vargas:** Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones egresado de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) en 1995. Obtuvo el grado de Maestría en Sistemas Digitales en 1998 en CITEDI-IPN y Doctorado con especialidad en Procesamiento Digital de Señales (PDS) y Control en 2002 en la Universidad de Paris XI y SUPELEC, Paris, Francia. Se incorporó a la UAZ en 2003, como profesor-investigador en el laboratorio de PDS de la Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica. Actualmente pertenece al SNI (nivel 1) y es profesor con perfil PROMEP.

**Gerardo Miramontes de León:** es Ingeniero Electricista, egresado de la Universidad Autónoma de Zacatecas en 1983. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en 1988 en la FIME de la Universidad Autónoma de Nuevo León y el grado de Doctorado en el 2000 por parte de la Universidad de Dakota del Norte (NDSU) de Estados Unidos. Se incorporó a la Universidad Autónoma de Zacatecas en 1982, como profesor de cátedra en la facultad de Ingeniería, fue investigador en el CICESE de 1989 a 1990, y profesor visitante en la Universidad de California en Chico en 1993, actualmente es profesor – investigador y líder del laboratorio de Procesamiento Digital de Señales (PDS) de la Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica - UAZ. Es profesor con perfil PROMEP.

**Ernesto García Domínguez:** Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones egresado de la Universidad Autónoma de Zacatecas en 1989. Obtuvo el grado de Maestría en Ciencias en 1993 en el área de telecomunicaciones y electrónica del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE). Es cofundador del laboratorio de PDS de la UAZ. Las líneas de investigación que desarrolla son procesamiento digital de señales y voz, y problemas inversos. Es profesor con perfil PROMEP.



**Ma. Auxiliadora Araiza Esquivel:** obtuvo su Licenciatura de Electrónica en Sistema Digitales en la Facultad de Ciencias en 1994, su Maestría en Ingeniería Eléctrica (opción Control Automático) en la Facultad de Ingeniería en 1997 y su Doctorado en Ciencias Aplicadas en la Facultad de Ciencias en 2002, todos los estudios fueron realizados en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Actualmente es docente de base de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Zacatecas y miembro del cuerpo académico de Procesamiento Digital de Señales. Es profesor con perfil PROMEP y miembro del SNI.

**Jesús Villa Hernández:** Recibió en 1993 el grado de ingeniero en comunicaciones y electrónica en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Autónoma de Zacatecas, y en 1999 el grado de Doctor en Ciencias en el Centro de Investigaciones en Óptica (CIO). Realizó una estancia post-doctoral en la Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, España en el 2002. Sus líneas de investigación de interés son el procesamiento digital de patrones de franjas, la metrología óptica y la visión por computadora. Actualmente trabaja como profesor-investigador titular en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la UAZ. Es miembro del SNI (Nivel 1) y Profesor con perfil PROMEP.