



## NOMBRE DEL SUB-EVENTO

(Transmisión, Distribución y Utilización de la Energía Eléctrica)

### Título

Diseño del Controlador Adaptable Slotine-Li para Robot de 2 gdl y  
Simulación de Trayectoria Continua.

### Title

*Slotine-Li Adaptable Controller Design for 2 gdl Robot and Continuous  
Trajectory Simulation*

- 1- M. I Claudia Reyes Rivas. Universidad de Córdoba, España y Universidad Autónoma de Zacatecas, México. E-mail: [clausy\\_17@yahoo.com](mailto:clausy_17@yahoo.com)
- 2- Dra. María Brox Jiménez Universidad de Córdoba, España. E-mail: [mbrox@uco.es](mailto:mbrox@uco.es)
- 3- Dr. Héctor René Vega Carrillo. Universidad Autónoma de Zacatecas, México. E-mail:  
[rvega@uaz.edu.mx](mailto:rvega@uaz.edu.mx)
- 4-Dr. Andrés Gersnoviez Milla. Universidad de Córdoba, España. E-mail:  
[andresgm@uco.es](mailto:andresgm@uco.es)
- 5- Dr. Francisco Eneldo López Monteagudo. Universidad Autónoma de Zacatecas, México. E-mail: [eneldolm@yahoo.com](mailto:eneldolm@yahoo.com)
- 6- Dr. Jorge de la Torre y Ramos. Universidad Autónoma de Zacatecas, México. E-mail:  
[jorgetorre@uaz.edu.mx](mailto:jorgetorre@uaz.edu.mx)
- 7- Carlos Olvera Olvera. Universidad Autónoma de Zacatecas, México. E-mail:  
[olveraca@gmail.com](mailto:olveraca@gmail.com)

### Resumen:

En el presente documento se muestra el análisis del modelo matemático para obtener el modelo dinámico de un robot de dos grados de libertad (traslacional, rotacional), posteriormente se diseñó y aplicó un controlador adaptable de Slotine-Li. El propósito fundamental de esta investigación, es demostrar la eficacia del controlador adaptable de Slotine-Li, ya que permite que el sistema sea controlado a pesar de variaciones lentas en el tiempo o por desconocimiento de alguno de los parámetros del modelo matemático del robot. Además de que este tipo de controlador es capaz de estimar los parámetros que se desconocen con muy buena aproximación. También se realizó el



seguimiento de una trayectoria continua para verificar la eficiencia del controlador adaptable y la simulación del seguimiento de la misma, se realizó utilizando el software VisSim 6.0.

***Abstract:** This paper presents the analysis of the mathematical model to obtain the dynamic model of a robot with two degrees of freedom (translational, rotational), after which an adaptable Slotine-Li controller was designed and applied. In this investigation the fundamental purpose is to demonstrate the efficiency of Slotine-Li's adaptive controller since it allows the system to be controlled despite slow variations in time or due to ignorance of the parameters of the robot's mathematical model. In addition to that the controller is able to estimate the parameters that are unknown with very good approximation. We also programmed the follow-up of a continuous path in the form of an ellipse to verify the efficiency of the adaptive controller and the simulation of the tracking of the same was done using VisSim 6.0.*

**Palabras Clave:** Controlador Adaptable de Slotine-Li; Modelado Dinámico; Robot; Simulación; Trayectoria Continua.

**Keywords:** Slotine-Li Adaptable Controller; Dynamic Modeling; Robot; Simulation; Continuous Trajectory.

## 1. Introducción

La automatización de los procesos de producción mediante el uso de manipuladores robóticos, es una de las áreas tecnológicas de mayor progreso en las últimas décadas, puesto que brinda la posibilidad de una configuración versátil y automática de sistemas de manufactura y fábricas [1]. Los esfuerzos puestos de manifiesto en las áreas de ciencia y tecnología, vinculadas con los manipuladores robóticos, es un indicativo de cuán eficiente ha resultado la robótica para el mejoramiento de la calidad y confiabilidad de los productos manufacturados [1], [2] y [3].

En este trabajo se modeló un robot de dos grados de libertad; el primer eslabón traslacional y el segundo rotacional, se diseñó y aplicó un controlador adaptable Slotine Li, de manera ilustrativa y para comprobar la eficacia del controlador, se supone que se desconoce el valor de la masa del primer eslabón  $m_1$ , el controlador debe ser capaz de estimarla y permitir que el mecanismo siga una trayectoria dada por una elipse ubicada



**II Convención Científica Internacional 2019**  
**Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas**  
**CIENCIA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD. PERSPECTIVAS Y RETOS**

en el cuarto cuadrante del plano  $y-z$ . El robot debe iniciar en la posición de casa, es decir en  $q_1=0$  y  $q_2=0$  y después de terminar el seguimiento de la trayectoria debe regresar a la posición de casa.

Para observar el comportamiento del robot controlado se utilizó el programa VisSim, que permite simular el seguimiento de la trayectoria en tiempo real. De acuerdo con los resultados obtenidos se realizaron diversos ajustes a los parámetros del controlador hasta lograr una adaptación con respuesta rápida y con mínimas oscilaciones.

El desarrollo de controladores adaptables efectivos, representa un paso importante en el área de la robótica sobre todo en robots con aplicaciones de en donde se requiere de precisión [3] y [4], ya que el control asegura que cualquier diferencia entre el valor deseado y el error se hace cero rápidamente [4] y [5]. Los robots manipuladores son inherentes a los sistemas no lineales, para estos casos el control adaptable una buena opción, ya que tiene la característica de ser un control robusto [6] y [7].

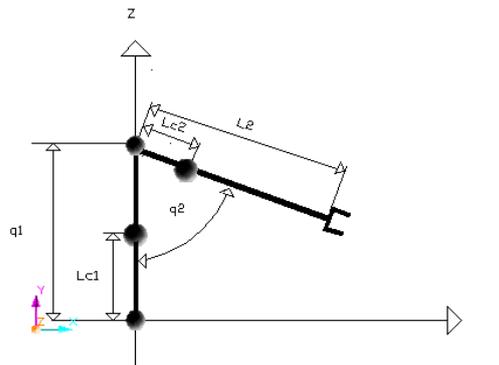
Las técnicas de control adaptable en el área de la robótica han demostrado ser una herramienta poderosa con respecto a otros controladores de movimiento, ya que estos últimos asumen que todos los parámetros del robot son conocidos, es por este motivo que el control adaptable ofrece mayores ventajas para el control de robot manipuladores [8], [9] y [10]. La justificación para realizar esta investigación es conocer y aplicar el método del control adaptable de Slotine-Li [11] y [12], discernir las ventajas de utilizarlo cuando no se conocen algunos datos del robot manipulador. El diseño de este tipo de controladores es en realidad muy sencillo con la ayuda de una computadora [13] y un simulador como el VisSim.

El objetivo principal de este proyecto es realizar el análisis completo de un robot de 2gdl, el cual consiste en obtener el modelo dinámico articular del sistema, modelo cinemático directo y cinemático inverso, además de realizar el diseño de un controlador adaptable Slotine-Li que permitirá conocer el valor de la masa del primer eslabón del robot, que para este trabajo se desconoce. Además de que, el controlador debe permitir que el mecanismo ejecute una trayectoria dada. Se simulará el sistema controlado para verificar el comportamiento del sistema.

Se analizó el caso de un robot manipulador de dos grados de libertad mostrado en la figura 1, el cual consiste en 2 eslabones conectados a través de una articulación traslacional y otra rotacional. La metodología utilizada para la realización de este proyecto se resume de la siguiente forma:



- Obtención de los modelos del robot: dinámico en forma matricial, cinemático directo y cinemático inverso.
- Diseño del control adaptable de Slotine-Li.
- Generación de trayectoria deseada en forma de elipse.



- Simulación en tiempo real utilizando el software VisSim.

Figura 1. Robot de 2 grados de libertad (translacional, rotacional).

Parámetros de la Articulación 1	Símbolo	Valor
Masa1	$m_1$	1.48 [Kg] Aunque se supone que este parámetro se desconoce.
Longitud máxima de la articulación $q_1$	$q_1$	0.35 [m]
Longitud al centro de masa1	$L_{c1}$	$1/2 q_1$ [m]
Inercia articulación 1	$I_1$	0.05 [Kg·m <sup>2</sup> ]
Fricción viscosa 1	$F_{v1}$	7.5 [N·m·seg/grado]
Fricción de Coulomb 1	$F_{c1}$	9.31 [N·m]
Parámetros de la Articulación 2	Símbolo	Valor
Masa2	$m_2$	3.88 [Kg]
Longitud articulación 2	$L_2$	0.3 [m]
Longitud al centro de masa2	$L_{c2}$	0.072[m]
Inercia articulación 2	$I_2$	0.095 [Kg·m <sup>2</sup> ]
Fricción viscosa 2	$F_{v2}$	0.175 [N·m·seg/grado]
Fricción de Coulomb 2	$F_{c2}$	1.734 [N·m]

Tabla 1. Parámetros de las articulaciones del robot.

## 2. Metodología

### Obtención de los modelos del robot en forma matricial

Para analizar el comportamiento de movimiento de un robot manipulador es necesario obtener los modelos cinemático directo e inverso y dinámico, por lo tanto, se procedió a determinar el análisis matemático que vincula las variables de entrada y salida del



sistema.

En primer lugar se obtuvo el modelo cinemático directo el cuál describe la relación entre la posición articular  $q$  y la posición y orientación en el plano de referencia coordinado cartesiano  $(x,y,z)$ .

### Modelo cinemático directo para cada articulación.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \text{sen}(q_2) \\ q_1 - L_2 \text{cos}(q_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde:  $q_2$  es la posición angular de la articulación 2 en [grados],  $q_1$  es la longitud de la articulación 1 en [m] y  $L_2$  la longitud de la articulación 2 en [m].

### Modelo cinemático inverso

$$q_{d1} = z + L_2 \text{cos}(q_2) \quad (3)$$

$$q_{d2} = \text{asen}\left(\frac{y}{L_2}\right) \quad (4)$$

Donde:  $q_{d2}$  representa la posición final de la articulación 2 en [grados],  $q_{d1}$  representa la posición final de la articulación 1 en [m].

### Modelo dinámico articular

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. La desventaja que se presenta al utilizar este método es que cuando el número de articulaciones del robot se incrementa el análisis se complica, por tal motivo es conveniente utilizar las **ecuaciones de movimiento de Lagrange** que se basan en la energía cinética y potencial del mecanismo. Además, que relacionan masa, inercia, fricción, longitud y coordenadas articulares para conocer la fuerza requerida en los actuadores.

### Ecuación de energía cinética

La energía cinética es la energía que se genera en un cuerpo en movimiento y depende directamente de la velocidad, por lo tanto:

Ecuación de energía cinética



$$K(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} m \cdot v^T \cdot v + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$$

Ecuación de energía potencial

$$U(q(t)) = m \cdot g \cdot Z_R$$

Cinemático de las articulaciones 1 y 2, referidos al centro de masa:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} q_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{c2} \text{sen}(q_2) \\ q_1 - L_{c2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

**La energía cinética** es la energía que se genera en un cuerpo en movimiento y depende directamente de la velocidad, por lo tanto:

### Energía cinética 1

$$K_1(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{8} m_1 \dot{q}_1^2 \quad (7)$$

### Energía cinética 2

$$K_2(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} m_2 [L_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 L_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2] + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 \quad (8)$$

**Energía potencial**, es la energía que genera la fuerza gravitacional. Ahora se muestra el resultado de la obtención de la energía potencial en ambas articulaciones.

### Energía potencial de la articulación 1

$$U_1(q(t)) = m_1 g \left( \frac{1}{2} q_1 \right) \quad (9)$$

### Energía potencial de la articulación 2

$$U_2(q(t)) = m_2 g (q_1 + L_{c2} - L_{c2} \cos(q_2)) \quad (10)$$

### Cálculo del Lagrangiano: $Lgn$

El Lagrangiano de un robot manipulador es la diferencia entre su energía cinética  $K$  y su energía potencial  $U$ , y se define por la siguiente ecuación:



$$Lgn(q(t), \dot{q}(t)) = K_1(q(t), \dot{q}(t)) + K_2(q(t), \dot{q}(t)) - U_1(q(t)) - U_2(q(t))$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange, para un robot de  $n$  grados de libertad, están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{q}_i} \right] - \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta q} = \tau_i$$

Donde  $i = 1, 2, 3, \dots$

### Ecuación para el par en el motor 1

$$\tau_1 = \left( \frac{1}{4} m_1 + m_2 \right) \ddot{q}_1 + (m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2)) \ddot{q}_2 + (m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2) \dot{q}_2 + \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) g + f_{c1} \tanh(\dot{q}_1) + f_{v1} \dot{q}_1 \quad (11)$$

### Ecuación para el par en el motor 2

$$\tau_2 = (m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2)) \ddot{q}_1 + (m_2 L_{c2}^2 + I_2) \ddot{q}_2 + (m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2) \dot{q}_1 - (m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1) \dot{q}_2 + (m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2)) g + f_{c2} \tanh(\dot{q}_2) + f_{v2} \dot{q}_2 \quad (12)$$

### Modelo dinámico representado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_1 + m_2 & m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2) \\ m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2) & m_2 L_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 L_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) g \\ (m_2 L_{c2} \text{sen}(q_2)) g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{c1} \tanh(\dot{q}_1) + f_{v1} \dot{q}_1 \\ f_{c2} \tanh(\dot{q}_2) + f_{v2} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

### Descripción del controlador adaptable de Slotine-Li

El control adaptable tiene como finalidad permitir que el sistema siga regulado a pesar de las variaciones lentas en el tiempo o por desconocimiento de alguno de los parámetros del modelo matemático.



**Del modelo de un robot:**  $\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q})$

Se supone que no se conocen algunos parámetros o que estos varían con el tiempo, entonces tales parámetros dinámicos se pueden describir por  $\theta$ .

$$\tau = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + g_0(q) + f_0(\dot{q}) + \Phi\theta$$

donde:  $\Phi$  son las funciones que involucran a los parámetros  $\theta$ .

Del control propuesto por Slotine-Li:

$$\tau = M(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g(q) + f(\dot{q}) + K_p\tilde{q} + K_v\dot{\tilde{q}} \quad (14)$$

**Ley de control de Slotine-Li adaptable**

$$\tau = M_0(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g_0(q) + f_0(\dot{q}) + K_p\tilde{q} + K_v\dot{\tilde{q}} + \Phi\hat{\theta} \quad (15)$$

donde  $\hat{\theta}$  = parámetros estimados o calculados.

**Ley de adaptación**

$$\hat{\theta} = \gamma \int_0^t \Phi^T [\dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q}] + \hat{\theta}(0)$$

Donde:  $\gamma$ =ganancia de adaptación mayor que cero y define la rapidez de adaptación.

$\hat{\theta}(0)$  = valores iniciales de los parámetros propuestos por el diseñador.

A continuación, se muestra el diagrama de bloques del controlador.

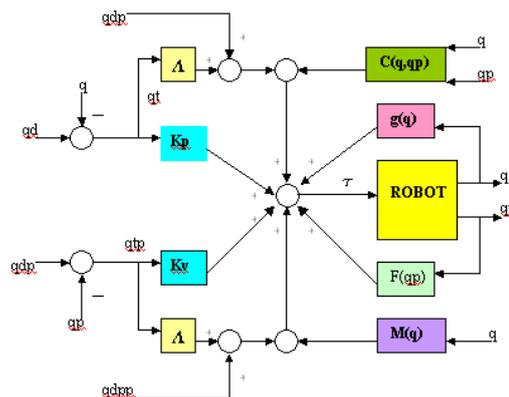


Figura 2. Diagrama de bloques del controlador adaptable.

Después de haber implementado el control adaptable de Slotine-Li y simulado en VisSim, se procedió a realizar el ajuste de las ganancias.

**Valores de las ganancias y variables**



$$\theta^*(0) = 1, \quad \gamma = 0.15; \quad K_{v1} = 5; \quad K_{p1} = 5; \quad K_{p2} = 5; \quad K_{v2} = 5$$

### 3. Resultados

Después de obtenido el modelo dinámico del robot, aplicarle el control adaptable de Slotine-Li y programarle una trayectoria continua, se observó que el resultado de la simulación en tiempo real.

A continuación, se muestra en la figura 3, la simulación de la trayectoria programada, la cual fue comparada con la trayectoria ejecutada por el robot con el control adaptable mostrada en la figura 4.

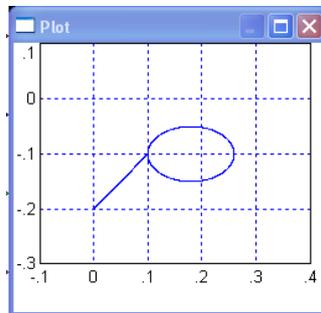


Figura 3. Trayectoria programada que debe ejecutar el robot.

En la figura 4, se muestra el proceso de adaptación para lograr ejecutar el desplazamiento programado. Se comprueba que el robot ejecuta la trayectoria de la elipse adecuadamente y cumple con las expectativas programadas, es decir realiza la trayectoria en forma de elipse, sin ningún problema y con gran exactitud, utilizando el controlador adaptable de Slotine-Li.

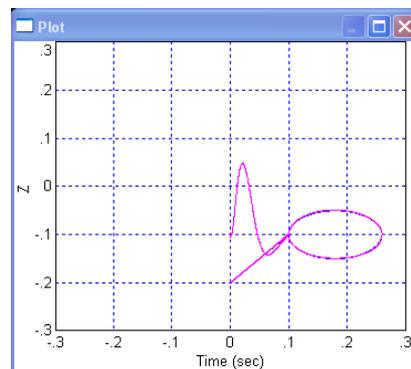


Figura 4. Trayectoria ejecutada por el robot manipulador con el controlador adaptable de Slotine-Li.



La figura 5, pertenece a la gráfica de aproximación del parámetro desconocido  $m_1$ , en este caso se aproxima al valor de 1.48 [Kg].

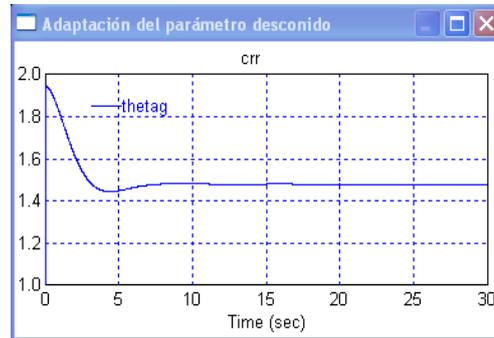


Figura 5. Gráfica de adaptación del parámetro desconocido  $m_1$ .

Para hacer más ilustrativa la simulación se muestran las gráficas de las coordenadas articulares con respecto al tiempo comparadas con las coordenadas articulares deseadas. Tal como se muestra en la figura 6, la coordenada articular  $q_1$  trata de ajustarse a la coordenada articular deseada  $q_{d1}$ , este proceso le lleva alrededor de diez segundos, para finalmente seguir el movimiento de la coordenada deseada  $q_{d1}$ .

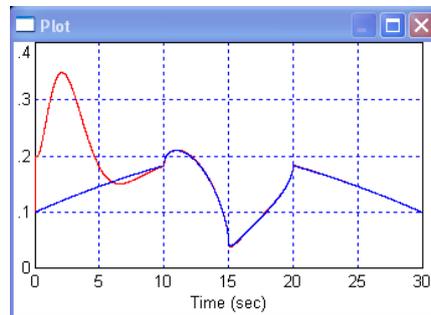


Figura 6. Gráfica de coordenada articular  $q_1$  comparada con la coordenada articular deseada  $q_{d1}$ .

En el caso de la figura 7, la coordenada articular  $q_2$  desde el inicio, se ajusta perfectamente al movimiento de la coordenada articular deseada  $q_{d2}$ .

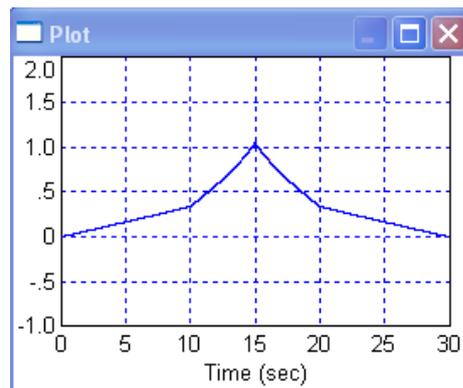




Figura 7. Gráfica de coordenada articular  $q_2$  comparada con la coordenada articular deseada  $q_{d2}$ .

#### 4. Conclusiones

Con este trabajo se demostró la importancia que tiene el control adaptable de Slotine-Li en la aplicación de robots manipuladores en donde se requiere de precisión. Como los robots son sistemas que tienen componentes no lineales en su modelo matemático, el control adaptable es una excelente alternativa para controlar el movimiento de robots, ya que ofrece óptimos resultados.

Una de las ventajas más importantes del control adaptable de Slotine-Li, es que permite que el sistema esté controlado aun cuando no se conozca algún parámetro del robot manipulador o en su caso cuando los objetos que mueve el robot tienen un peso variable.

Como se demostró el control adaptable es un control robusto ya que es capaz de adaptarse a cualquier cambio de peso en su carga, realizar un eficiente seguimiento de trayectoria, además de obtener una estimación adecuada de los parámetros que se desconocen.

Los resultados mostraron que al aplicar el control adaptable de Slotine-Li, se logra que el robot ejecute la trayectoria continúa programada con gran eficiencia, lo cual se verificó utilizando el software VisSim

Cabe hacer mención que el diseñador debe tener cuidado cuando realice el ajuste de las ganancias del controlador, así como del valor de gamma, ya que cuando se le seleccionan ganancias muy grandes el torque tiende a aumentar enormemente su valor, lo que en el sistema se vería reflejado en un daño a los motores que componen las articulaciones del robot manipulador.

El uso de VisSim para la simulación del comportamiento de robots, por sí solo representa un gran avance ya que permite realizar las simulaciones en tiempo real y en este caso el ajuste de ganancias se realiza muy fácilmente.

#### 5. Referencias bibliográficas

[1] Jing Yuan: Adaptive Control of Robotic Manipulators Including Motor Dynamics, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 11, (1995).



**II Convención Científica Internacional 2019**  
**Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas**  
**CIENCIA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD. PERSPECTIVAS Y RETOS**

- [2] Dubowsky S.: The Application of Model Reference Adaptive Control to Robotic Manipulators, *J. Dyn. Syst. Measure*, Vol. 101 (2002).
- [3] Eslami M.: Robust Adaptive Controller for Manipulator Systems: Theory, Simulation, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 3, (1987).
- [4] Kelly Martínez R.: Control de Movimiento de Robots Manipuladores, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, (2003).
- [5] Sciavicco L., Siciliano B.: Modeling and Control of Robot Manipulators, Mc. Graw Hill, Singapore, (1996).
- [6] Groover Mikell P., Weiss M.; Robótica Industrial Tecnología, Programación y Aplicaciones, Mc. Graw Hill, Madrid, España, (1998).
- [7] Boudy G. S. and León M. J., Estrada R. Y. "Sistema para el Control Inteligente de un Robot Manipulador" *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, Vol. 20, No. 2, (2011).
- [8] Craig Jonh J. "Robótica" Pearson Prentice-Hall, 3a. edición, (2006).
- [9] González V. S. and Moreno V. J. "Timescale Separation of a Class of Robust PD-type Tracking Controllers for Robot Manipulators". *ISA Trans*, Vol. 52, pp. 418–428, (2013).
- [10] Kelly R., Santibáñez V., Loría A., "Control of Robot Manipulators in Joint Space", Ed. Springer-Verlag, London, (2010).
- [11] Sciaviacco L. and Siciliano B., "Modeling and Control of Robot Manipulators" Springer-Verlag London, 3a. edición, (2008).
- [12] Seling J. M., "Introductory Robotics", Ed. Prentice Hall International, UK, (1992).
- [13] Slotine J.J, Li W, "On the Adaptive Control of Robot Manipulator" *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, pp.49-59, (1987).