UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Teorema de Pitágoras: una propuesta didáctica desde un enfoque geométrico incorporando material didáctico manipulable.

Tesis que presenta:

María Elena Martos Aguilera

para obtener el grado de:

Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Directora del trabajo:

MATI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Codirectores:

Dr. José Luis Lupiañez Gómez

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Diciembre, 2018

Constancia de revisión por parte de los asesores

A quien corresponda

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "**El Teorema de Pitágoras desde un enfoque geométrico incorporando material didáctico manipulable**" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. María Elena Martos Aguilera, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 31 de agosto de 2018

Asesores

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, a los 31 días del mes de agosto del año 2018, la que suscribe María Elena Martos Aguilera, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 36172239; manifiesta que es la autor intelectual del trabajo de grado titulado "**El Teorema de Pitágoras desde un enfoque geométrico incorporando material didáctico manipulable"** bajo la dirección de la MATI. Mónica Torres Ibarra en codirección con el Dr. José Luis Lupiañez Gómez y la Dra. Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Nombre y Firma de la estudiante

AGRADECIMIENTO AL CONACYT

Por medio del presenta agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría, así como la estancia de investigación realizada en los meses de mayo-julio del presente año en la ciudad de Granada, España.

Becario No. CVU
773784

AGRADECIMIENTOS

Contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Se realiza el diseño de una propuesta didáctica dirigida a alumnos de tercer grado de secundaria (alumnos entre 12 y 15 años), que tiene por objetivo la comprensión del Teorema de Pitágoras sustentada en la demostración geométrica del mismo; tras la revisión de bibliografía nos percatamos que uno de los problemas actuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos memorizan y repiten fórmulas, sin encontrar una completa comprensión del significado de las mismas.

Asimismo, tomamos como sustento teórico la Teoría de Situaciones Didácticas para que los alumnos a través de sus fases puedan ir creando su propio conocimiento pues es un modelo de enseñanza centrado en la producción de aprendizajes matemáticos y desde luego fundamentar la propuesta en dimensiones cognoscitivas, epistemológicas y didácticas que nos permitan contemplar los objetos matemáticos fundamentales, así como los errores y dificultades reportados en las investigaciones, con la finalidad de articular un tratamiento geométrico del Teorema con el uso de material didáctico manipulable, que en conjunto nos permitan lograr la comprensión por parte de los estudiantes por lo tanto, se utiliza la Ingeniería Didáctica para validar e implementar la propuesta.

Dentro de los principales resultados, podemos decir que el papel de la profesora-investigadora y el material didáctico fueron cruciales para la realización y aplicación de la propuesta, pero sobre todo, para guiar el aprendizaje en los alumnos, pues gracias a éstos, a la Teoría y Metodología los alumnos lograron apropiarse del aprendizaje.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, Comprensión, Geometría, Material Didáctico.

ABSTRACT

The design of a didactic proposal aimed at third grade students of secondary school (students between 12 and 15 years old), whose objective is the understanding of the Pythagorean Theorem based on the geometric demonstration of it, is carried out; After reviewing the bibliography we realized that one of the current problems in the teaching - learning of mathematics is that students memorize and repeat formulas, without finding a complete understanding of the meaning of them.

Likewise, we take as theoretical support the Theory of Didactic Situations so that students through their phases can create their own knowledge because it is a teaching model focused on the production of mathematical learning and of course to base the proposal on cognitive, epistemological dimensions and didactic that allow us to contemplate the fundamental mathematical objects, as well as the errors and difficulties reported in the investigations, in order to articulate a geometric treatment of the Theorem with the use of manipulable teaching material, which together allow us to achieve understanding by of the students, therefore, the Didactic Engineering is used to validate and implement the proposal.

Within the main results, we can say that the role of the teacher-researcher and the didactic material were crucial for the realization and application of the proposal, but above all, to guide the learning in the students, because thanks to these, to the Theory and Methodology the students managed to appropriate learning.

Keywords: Pythagorean Theorem, Comprehension, Geometry, Teaching Materials.

INTRODUCCIÓN

Actualmente la enseñanza y aprendizaje de la Geometría es de suma importancia en todos los niveles educativos, en la educación básica ayuda a que el alumno desarrolle la imaginación espacial y su capacidad de explorar, representar y describir su entorno físico. Por otro lado, les proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, también los prepara para comprender mejor las ideas relacionadas con el número, la medición y otras partes de las matemáticas. Por lo tanto es importante que los alumnos conozcan y utilicen con propiedad el lenguaje de la geometría.

Es por esto que se diseña una propuesta didáctica para la comprensión del Teorema de Pitágoras, sustentada en la demostración geométrica del mismo, dirigida a alumnos de tercer grado de secundaria de la educación básica; consideramos que uno de los problemas actuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas es que los estudiantes memorizan y repiten fórmulas, sin encontrar una completa comprensión del significado de las mismas, por lo que consideramos que un enfoque geométrico puede ayudar a la construcción de su propio conocimiento.

Se hace uso de la Teoría de Situaciones Didácticas como Marco Teórico, se analizan investigaciones y antecedentes para prevenir errores que se han cometido anteriormente y podernos orientar sobre cómo habrá de realizarse el estudio.

Se realiza un diseño con base en diferentes análisis que permiten la articulación de material didáctico que contribuya a nuestro objetivo, se implementa y valida la propuesta en el aula de clases y finalmente se analizan los resultados de la implementación esperando lograr una aprendizaje en los alumnos del Teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

Decidí elegir la rama de la Geometría porque siempre me ha motivado a lo largo de mis estudios y un factor importante es que considero muchas de las veces no se le da la importancia que ésta merece en su tratamiento en el aula a nivel secundaria con adolescentes de 12 a 15 años, pues se le da mayor peso curricular a los contenidos de pensamiento algebraicos que a los de pensamiento geométricos, los contenidos se dividen en tres ejes y el referente al estudio y comprensión de la Geometría es Forma, Espacio y Medida, este eje se divide en dos fases que son las Figuras y Cuerpos y por otro lado la Medida, como lo marca la Secretaria de Educación Pública en México.

La importancia que tiene la Geometría en la educación secundaria es que los alumnos podrán explorar, conocer las características, propiedades de las figuras y cuerpos geométricos así como la justificación de las fórmulas que se utilizan para el cálculo geométrico.

Al estar frente a grupo me he podido dar cuenta que cuando se trata de características y propiedades de objetos geométricos, el uso de material tangible puede ayudar a descubrir las propiedades geométricas al momento de que el alumno interactúa y se motiva por descubrir, por otra parte, he notado que se sienten motivados al trabajar con material didáctico pues se salen de lo común y ellos mismos son capaces de construir, deducir y experimentar.

Otro factor es que decidí elegir la introducción al Teorema de Pitágoras donde los alumnos deducen la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo y considero que sería provechoso para los alumnos trabajarlo con material didáctico y ponerlo en práctica en el aula.

El Teorema de Pitágoras tiene una infinidad de usos, y es importante que los alumnos lo comprendan, pues haciendo uso de él se puede determinar la trayectoria de una bala y esto es de gran ayuda para las investigaciones forenses, incluso se puede determinar de dónde salió el proyectil, dándoles a los investigadores mayor información de la trayectoria de la bala, otro uso del Teorema es que puede localizar o rastrear un terremoto pues los geólogos al determinar la distancia recorrida entre dos ondas pueden determinar el centro o la fuente del terremoto, también se pueden determinar distancias en el plano, mapas, longitudes, medidas, etc. Pues sirve para resolver muchísimos problemas, como la diagonal de una ventana, la altura de un árbol o la medida de una escalera.

El Teorema de Pitágoras a lo largo de los años ha tenido múltiples demostraciones y permite dar respuesta a un sinnúmero de fenómenos físicos, da pie al abordaje del álgebra y es un pilar fundamental en las funciones trigonométricas, entre otros aspectos.

1.2 ANTECEDENTES

En esta sección se presenta una revisión de bibliografía con algunas investigaciones realizadas con anterioridad y referentes al Teorema de Pitágoras, el objetivo principal de llevar a cabo esta revisión es encontrar el estado actual de las investigaciones alrededor del Teorema, lo que ocasionó que los autores efectuarán sus investigaciones, lo que hicieron y de lo que se percataron para poderlo tomar como referente al realizar nuestra propuesta.

Meavilla (1989) presenta dos demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras donde comenta que el alumno guiado por el maestro al realizar las actividades propuestas podrá descubrir el teorema.

El autor señala la importancia del estudio cuando menciona que "El teorema de Pitágoras formó parte del bagaje cultural de las civilizaciones más antiguas, en una época en la que la matemática comenzaba a dar sus primeros y vacilantes pasos." (Meavilla, 1989)

El teorema tiene una gran importancia tanto en la historia de las matemáticas como en la actualidad pues hay numerosas verificaciones de él, es por eso que lo que el autor desea es que el alumno conozca el teorema pero que también pueda hacer o descubrir una demostración de ser posible. Un punto muy importante a mi parecer que comenta el autor es que al salir de secundaria los alumnos son capaces de aplicar el teorema, pero desconocen su significado, también comenta que el profesor no debe ser un transmisor de conocimientos, sino que debemos orientar a los alumnos a que lo construyan.

"Desgraciadamente, la situación en la que se encuentran los alumnos al finalizar sus estudios de Educación General Básica es que son capaces de aplicar el teorema pero desconocen su significado. A las pruebas me remito." (Meavilla, 1989, p.40)

Las actividades que muestra el autor muestran una sucesión de figuras en las que determinados elementos cambian de forma, se dividen, se desplazan, etc. como se muestra en la figura 1. Y esto debe conducir al alumno a descubrir el teorema, sin embargo, nos parece un poco complejo pues en el trabajo no se presenta la secuencia de actividades que se realiza con ellas ni tampoco si se utiliza una serie de preguntas para guiar al alumno, lo cual es necesario en una secuencia didáctica pues se debe guiar al alumno para conseguir una reflexión de su pensamiento y así lograr un aprendizaje.

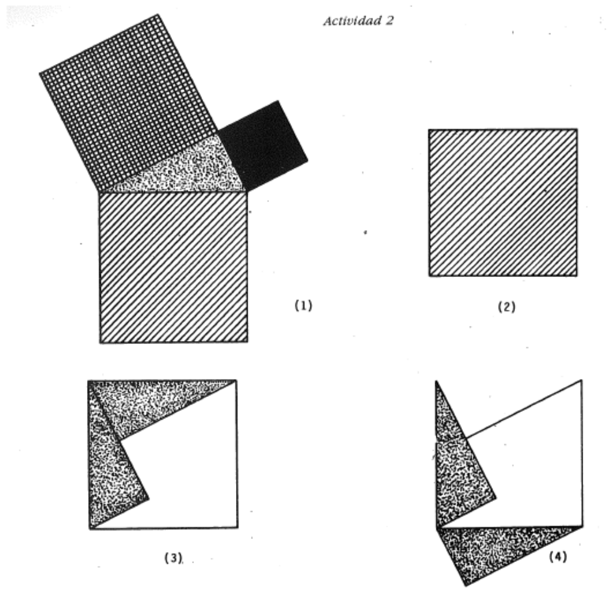


Figura 1. Propuesta de Meavilla (1989, p. 4)

Por otra parte, Perry (2000) realiza una propuesta para abordar el Teorema de Pitágoras en clase, ella considera que una de las cosas que más disfruta de ser docente es el poder diseñar tareas de enseñanza, pues lo ve como una oportunidad importante para la creatividad, y la propuesta de enseñanza que ella presenta es el resultado de la reflexión que hizo para lograr un desarrollo profesional para docentes de matemáticas.

La propuesta tuvo muchos cambios desde un inicio, pues se tomaron en consideración los comentarios de diferentes colegas, lo primero que realizó fue un análisis del contenido, para poder detectar los conceptos centrales y trabajar en ellos, y como resultado encontró cinco temas o conceptos que están estrechamente relacionados con el Teorema, como es el triángulo rectángulo, cuadriláteros convexos, segmentos de recta y expresiones algebraicas.

Después de encontrar los aspectos del análisis que fueron características tanto del contenido matemático como consideraciones didácticas optó por enunciar el teorema en términos de medidas de área y no en términos de cuadrados, lo cual nos podría servir como sugerencia en el diseño, también analizó y consideró los errores típicos de los estudiantes al conocer y aplicar el teorema para así poder prever posibles coincidencias, sin embargo, la autora no comenta cuales fueron.

Al momento de plantear las actividades, ella se cuestionó lo siguiente, “¿qué se quiere que los estudiantes vean?, ¿qué se espera que ellos noten?, ¿Cómo se puede averiguar con cierta confianza si se lograron los propósitos establecidos?” (Perry, 2000)

Lo primero que trabajó con los estudiantes fue la desigualdad triangular para que los estudiantes se percataran que hay una relación entre las medidas de las longitudes de los lados de cualquier triángulo y se sientan familiarizados con ella, después trabajó la relación pitagórica donde su objetivo fue que los alumnos observaran que tal relación únicamente se cumple con el triángulo rectángulo y así pudiesen percatarse de que el teorema se demuestra con las áreas de los cuadrados y las expresiones algebraicas implicadas.

Como conclusión la autora nos hace saber que el éxito de la propuesta no muchas de las veces depende de las actividades, ni de si es benéfica o no, sino realmente del contexto tales como características propias del grupo.

Por otra parte, Osorio (2013) diseñó una propuesta didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del Teorema de Pitágoras y centrada en el uso de un juego didáctico “PITAGORAS_MANIA”, el cual fue diseñado con la intención de estimular la creatividad y socialización entre los estudiantes, así como la puesta en práctica del contenido matemático y su comprensión.

Uno de los objetivos principales era que el juego propiciara el aprendizaje significativo de los alumnos, y argumenta que algunos docentes suelen dar prioridad a otros contenidos descuidando la importancia de la Geometría y dicho descuido no les permite a los alumnos ver la relación de los contenidos geométricos con su vida cotidiana. Comenta que el estudio de la matemática suele ser rechazado por los estudiantes, pues carecen de motivación, la forma de enseñar de los maestros no es la apropiada, o no les encuentran el sentido a los contenidos matemáticos y por último la falta de hábitos de estudio y materiales didácticos apropiados.

La propuesta que presenta Osorio se divide en 6 aspectos principales, los cuales consisten en: el primero la fundamentación teórica donde se aborda la definición, la importancia y la demostración del Teorema de Pitágoras, el segundo es el desarrollo histórico el cual trata de conocer los aportes de Pitágoras y como es que conocen el Teorema en otras civilizaciones como podría ser Babilonia, Egipto, China, etc. el tercero es el mundo real y otros tópicos donde se estudian los temas Pitagóricos, relaciones con otros teoremas y la propuesta didáctica, el cuarto son las exploraciones gráficas, donde se estudian la demostración tradicional y otras demostraciones que Osorio considera relevantes, después el quinto trata de ejercicios, donde el alumno realiza cálculos y dibuja y por último el juego y la matemática recreativa, el cual consiste en un rompecabezas pitagórico y en juegos lúdicos y tecnológicos.

Osorio decidió utilizar la identificación de habilidades con los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele, pues este modelo ayuda a entender la forma como se aprende Geometría y propicia un aprendizaje significativo de los contenidos geométricos.

Siguiendo con investigaciones del Teorema de Pitágoras, Cañadas (2001), realiza una investigación de distintas demostraciones del Teorema, y comenta que su investigación se basa en dos pilares fundamentales, que es la gran diversidad de la muestra con la que se realiza la actividad que se presenta y la importancia de la demostración en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se realizó una actividad con personas que hace mucho dejaron de estudiar o no tenían relación con las matemáticas. Se les explicó la relación entre los enunciados analítico y geométrico del teorema de Pitágoras, y se les dio un cuadernillo para trabajar. Éste tiene dos partes: en la primera se les propone reconstruir la demostración geométrica del teorema de Pitágoras en tres propuestas distintas. En la segunda deben contestar a un cuestionario en el que se les pregunta por la demostración en general y por los tres casos que han trabajado y que demuestran a continuación:

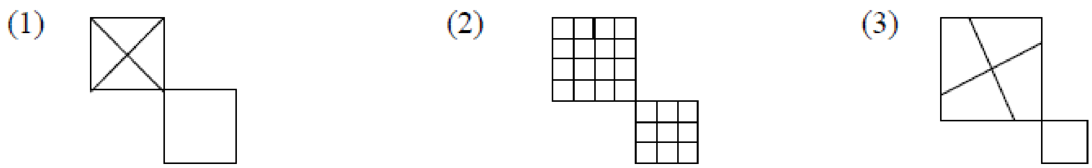


Figura 2. Actividad propuesta por Cañadas (2001).

> "Las tres demostraciones presentadas se pueden analizar desde distintos puntos de vista y se encuentra que pertenecen al mismo conjunto de demostraciones: no formales, ya que están hechas por medio de dibujos, sin otro tipo de justificación, con lo que en principio, su generalización y validez son discutibles; son geométricas porque se basan en la comparación de áreas; y son demostraciones por casos, ya que en el razonamiento que se sigue, no hace referencia a cualquier triángulo rectángulo ya que son unas figuras geométricas prefijadas." (Ibáñez y Ortega, 1997, citado en Cañadas, 2001, p.3)

Respecto a los resultados obtenidos, la autora comenta que a pesar de haber trabajado previamente con los enunciados analítico y geométrico del Teorema, presentan dificultad, o bien, una nula comprensión de la relación de éstos con la actividad o bien, con el Teorema.

1.2.1 Material Didáctico Manipulable

Después de haber visto y analizado algunas propuestas realizadas por diferentes autores es importante analizar alguna investigación referente al material didáctico, pues es un factor primordial en nuestra propuesta y la que nos llama la atención es la realizada por Valenzuela en el 2012.

Su investigación se basa en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica, hace hincapié en el conocimiento y utilización de materiales manipulativos, para poder hacer frente a las dificultades en la vida docente para encontrar el uso de herramientas útiles para el diseño de unidades didácticas. Dentro de su investigación se percató de que la mayoría de los profesores estudiados conocen y hacen uso de los materiales didácticos, sin embargo, esto no influye en la calidad de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues no garantizan que mejore el aprendizaje del alumno, pero sí que es una herramienta útil y necesaria para las unidades didácticas. Algo importante que nos recalca es que debe ser una herramienta presente en la formación de docentes y es parte importante de la formación.

Además, Cascallana (1988), clasifica los materiales en estructurados y no estructurados. Los materiales estructurados son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas. No son figurativos y suponen una mayor capacidad de abstracción, pero son previos al uso exclusivo de los signos numéricos. Los materiales no estructurados son todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creado con fines matemáticos, como por ejemplo juguetes. Además, Cascallana, se refiere a la palabra manipulativa como la primera fase para la adquisición de conceptos matemáticos, en donde el alumno debe observar diferentes materiales y tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismos el resultado de sus acciones.

Por otra parte, Barreto (2009), realiza una investigación donde muestra extensiones del Teorema en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que están sobre los lados de un triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta condición.

> "En el estudio de esta generalización o extensión del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a cuadrar triángulos equiláteros con regla y compás (tal y como lo hacían los propios griegos según está escrito en la historia de la matemática) aplicando la teoría dada en la cuadratura de un rectángulo o en la cuadratura de un triángulo de los Elementos de Euclides". (Barreto, 2009. p. 12).

De igual manera, García & Buitrago (2012), realizan una serie de situaciones didácticas haciendo uso de material concreto pues consideran que puede ser de gran ayuda para el aprendizaje de un tópico matemático ya que pueden interactuar con el objeto de estudio, ellos concluyen que este tipo de actividades manifiestan interés y entusiasmo por parte de los estudiantes, pues se salen de lo convencional y posibilita el desarrollo del proceso de aprendizaje.

1.2.2 El Razonamiento

Anteriormente se han analizado antecedentes de secuencias didácticas, sin embargo, consideramos que todavía hace falta analizar investigaciones referentes a la comprensión y razonamiento de los alumnos, qué es lo que funciona y qué es lo que no funciona para poder tener una mejor visualización de dónde se quiere llegar, es decir, entender como darnos cuenta de que el alumno esta razonando y entendiendo lo que se les está enseñando.

Haciendo una búsqueda bibliográfica exhaustiva se encontró una investigación sobre "El razonamiento inductivo puesto en manifiesto por alumnos de Secundaria". Uno de los estándares para la Educación Secundaria presenta las matemáticas como razonamiento. "Se afirma que, en este nivel educativo, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento." (Cañadas, 2002, p. 5).

También se plantean distintos objetivos para que los alumnos puedan tener un razonamiento exitoso, el primero es que todos los estudiantes tengan una experiencia con actividades para que lleguen a considerar el papel que desempeñan los modos de razonamiento inductivo y deductivo, tanto en las matemáticas como en otros escenarios fuera de ellas.
El segundo objetivo es aumentar el papel del razonamiento para que se subraye su valor en todos los cursos de matemáticas y para todos los alumnos. El tercer objetivo plantea prestarle una mayor vigilancia a la justificación por inducción.

Cañadas (2002), nos comenta que la investigación en educación matemática pone de manifiesto, a través de los trabajos de distintos investigadores del ramo, el interés que tiene para los profesores y para la enseñanza en general, de conocer los razonamientos que siguen los alumnos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, en este caso se habla del razonamiento en general y no de un tópico en específico. También, la importancia de inducir a los alumnos al razonamiento, ya sea con ejercicios o ejemplos que los vayan guiando o con contenidos que los anticipen.

Londoño y Acosta (2012) realizan una estrategia de intervención para desarrollar el pensamiento espacial de los alumnos con la intención de lograr un aprendizaje significativo del Teorema de Pitágoras.

Presentan una serie de situaciones didácticas referentes al desarrollo del pensamiento espacial y el aprendizaje significativo, donde los estudiantes a través de la experimentación con el material concreto identificaron las características y propiedades de los triángulos, y conceptualizaron varias nociones para construcción de un aprendizaje significativo dentro del área de geometría.

Un aprendizaje significativo es "entendido como un proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal" (Rodríguez, 2004). Por lo que entiendo el alumno tendrá un aprendizaje significativo cuando haga uso de ese conocimiento en una situación distinta.

Las actividades desarrolladas de Londoño y Acosta mostraron que los estudiantes manifiestan gran interés y motivación por las nuevas propuestas de enseñanza de la geometría, diferentes a las convencionales, como la utilización de material concreto que posibilita el desarrollo del proceso de aprendizaje.

La teoría de las situaciones didácticas fue una herramienta que posibilitó el planteamiento y desarrollo de las actividades propuestas, favoreciendo el aprendizaje significativo en los estudiantes permitiéndoles explorar, afianzar y reconocer elementos los conceptos geométricos trabajados durante las actividades.

1.3 REFLEXIÓN

En este apartado se realiza una reflexión de todos los antecedentes revisados, lo que se trata de mostrar aquí son los puntos relevantes que se tomarán en consideración y de igual manera, también, lo que puede considerarse una base relevante para incluir en nuestra propuesta.

Considero que los propósitos de Meavilla (1989) son muy optimistas para las actividades que presenta, pues solo utiliza material visual (imágenes) y en el artículo comenta que los alumnos serán guiados por el maestro, pero no da ejemplos de cómo podría guiarlos ni la serie de pasos que se podrían seguir, considero que esto sirve para tomar en cuenta todos los aspectos que se deben plantear en la propuesta y no dejar detalles sin especificar.

Además, una modificación podría ser en vez de mostrar las figuras en papel podría hacerse uso de algún material didáctico de modo que los alumnos puedan manipular y observar de manera más detallada, es por esto que yo deseo hacer uso del material didáctico, para que los alumnos al manipular los cuadrados y el triángulo puedan deducir por su propia cuenta la relación que existe y más adelante comprendan el teorema.

Referente a la propuesta de Perry (2000), me agrada el proceso que le da y los pasos mediante los cuales plantea llegar a la comprensión del Teorema, sin embargo, a mi parecer la propuesta podría fortalecerse haciendo uso de algún material didáctico para que los alumnos puedan comprobar físicamente la relación que existe entre las áreas de los cuadrados de los catetos y no únicamente por cálculos, aunque con esto no me refiero a dejar los cálculos, por un lado, sino hacerlo conjuntamente.

Respecto a la propuesta de Osorio (2013), considero que es un trabajo bien realizado, reúne todos los aspectos que una propuesta pudiera abarcar, desde la historia, distintas representaciones hasta la propia representación y ejecución por parte del alumno, sin embargo, considero lamentable que el autor no hable sobre sus resultados, pues no es posible verificar si la propuesta es funcional o no lo es, lo cual tiene que tomarse en consideración, sobre todo al abarcar distintas representaciones, pues es un arma de dos filos, puede ayudar a los alumnos o los puede confundir. Sin embargo, lo que sí comenta el autor es la gran ayuda que puede ser utilizar material manipulable, ya que propicia que los alumnos se motiven en el contenido.

Cañadas (2001) presenta una actividad para demostrar el Teorema de Pitágoras, y a pesar de haber inducido a los alumnos en el contenido parece haber una nula comprensión pues por las imágenes que muestra los alumnos no encuentran una relación con el Teorema, ellos únicamente lo memorizaron pero al momento de querer aplicarlo no pudieron, así que considero debo tener cuidado con las actividades que quiero plantear para propiciar la comprensión.

Valenzuela (2012) nos habla sobre los materiales didácticos los cuales considero son muy importantes en la planeación de un profesor ya que constantemente llaman la atención del alumno, los motivan y ayudan a generar conocimiento, sin embargo, hay ciertos factores que no me quedan claros, como podría ser, como saber en qué contenidos es factible usar el material o en qué momento de la clase, al inicio o al final y hubiera sido más llamativo si se investigara el conocimiento que pueden ayudar a generar y no el conocimiento que tienen los profesores sobre el material. Otro punto importante, es que el material debe ser una herramienta presente en nuestra formación como docentes, debemos conocer todo aquello que implique innovar o motivar, ya que es importante siempre contar con estrategias para lograr un aprendizaje en nuestros alumnos.

Respecto a la investigación de Cañadas (2002), consideró que lograr el razonamiento en los estudiantes no es algo sencillo, pues es necesario considerar con anticipación que es lo que se desea lograr para poder tomar “nuestras precauciones” y darles las herramientas necesarias a los alumnos para que ellos puedan crear sus propias conjeturas.

A lo largo de la revisión de los antecedentes me he podido percatar de aspectos que son relevantes para la investigación, y me parece importante hacer una recapitulación de ellos. Se comenta que los alumnos son capaces de aplicar el teorema pero desconocen su significado, como podría ser la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los catetos de una triángulo rectángulo y la hipotenusa o la relación de las áreas, lo cual es complejo, pues si no conocen o entienden el significado del Teorema cómo es posible que lo puedan aplicar, considero que los alumnos únicamente memorizan el proceso. Otro factor importante que debemos tomar en consideración para la investigación es que hay temas que están estrechamente relacionados con el Teorema, o bien, conceptos de los cuales los alumnos deben tener conocimiento, y algo que podría funcionar para nuestra investigación sería enunciar el Teorema en términos de medida de área y no en términos de cuadrados. Por último es de mucha importancia mencionar que ninguno de los autores realizó alguna actividad donde el alumno relacionará un conocimiento nuevo con el que ya poseía, reajustando y reconstruyendo ambos conocimientos para verificar que el alumno tuviera un aprendizaje significativo, lo cual demuestra que existe una falta de comprensión del Teorema, lo cual nos servirá al momento de planear y llevar a cabo nuestra propuesta didáctica.

1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo al análisis de antecedentes, encontramos que algunos alumnos de Educación Secundaria muestran falta de comprensión al aplicar el Teorema de Pitágoras como lo menciona Meavilla (1989), pues desconocen la relación que existe entre los cuadrados construidos entre los catetos y la hipotenusa, ya sea en términos de área o de cuadrados, por lo tanto, se diseñará una propuesta para facilitar el aprendizaje del conocimiento matemático.

"Los profesores de Matemática requieren diseñar, desarrollar o simplemente gestionar estrategias didácticas que den respuesta a las necesidades formativas de los estudiantes y, por ende, de la sociedad, teniendo en cuenta los fines de la Educación Matemática" (Osorio, 2013). Considero que todos los profesores debemos estar capacitados para poder realizar nuestras propias actividades dando respuesta a las necesidades que presenten nuestros alumnos, y así generar un mejor aprendizaje por parte ellos fomentando la realización de propuestas atractivas y motivadoras para ellos.

En mi experiencia como maestra de secundaria me he podido percatar de la falta de comprensión que tienen los alumnos del Teorema, en la mayoría de los casos están acostumbrados a recitarlo de memoria, sin ninguna comprensión, y esto no les brinda ningún beneficio, lo cual se sustenta en el siguiente apartado.

Al momento que se les presenta una situación o una problemática con otras variables no representativas del teorema, es decir, ya no es c ni a ni b, sino son por ejemplo, m, a y p los alumnos no saben qué hacer siendo que las variables lo único que están haciendo es representarlo, es por esto que considero que los alumnos si llegaran a manipular y experimentar con material tendrían una mejor comprensión, pues me parece que hay que darle un sentido al aprendizaje para que los alumnos le encuentren una manera más sencilla de entenderlo.

Entonces, el problema de investigación consiste en que los alumnos suele memorizar el Teorema de Pitágoras de manera algebraica y no suelen relacionarlo con la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados de los catetos de un triángulo rectángulo, es por eso que no pueden aplicar el Teorema en distintas situaciones.

1.5 PROBLEMÁTICA

Al momento de ver el contenido del Teorema de Pitágoras en secundaria, los alumnos suelen memorizarlo mecánicamente, es decir, no hay una comprensión, no saben de dónde surge y por lo tanto no pueden demostrarlo. Hay una falta de sentido en lo que respecta al teorema de Pitágoras.

Osorio (2013) “Los docentes de Matemática suelen enfatizar en los contenidos aritméticos y algebraicos, descuidando el estudio de la Geometría; situación que no les permite a los estudiantes percatarse de la relación existente entre los contenidos geométricos con el mundo que nos rodea”.

Barrantes (2004) establece que en las últimas décadas la enseñanza de la geometría se ha visto caracterizada por una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades que muchas veces se basan en conceptos previos, así también como la resolución irreflexiva de problemas y una supresión de la intuición como acceso al conocimiento geométrico.

Lo cual no parece apropiado de un profesor, por lo que es importante investigar y conocer que es lo que realmente se espera de un profesor en nuestro país, y se encontró que en ocasiones los docentes optan por únicamente fomentar la memorización de fórmulas o contenidos matemáticos por el poco tiempo que cuentan para cumplir con las fechas de los planes y programas y no atrasarse con el bloque que marca el programa de la Secretaría de Educación Pública (SEP), y esto suele suceder porque suelen dar más importancia a otros bloques o a otros ejes. Sin embargo, esto no lo que se plantea la SEP, pues en sus planes y programas se describen los propósitos, organización de aprendizajes, enfoques y estándares de matemáticas. Mediante el estudio de las matemáticas en Educación Básica se pretende que los niños y los adolescentes:

> Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos; Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución; Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo. (SEP, 2011, p. 88)

Entonces, los profesores debemos tener habilidades y conocimientos necesarios que nos permitan transmitir nuestro conocimiento de una forma innovadora, que no sea tediosa para los alumnos, motivarlos a que ellos creen su propio conocimiento, resuelvan, formen conjeturas, etc. Y también, como profesores de Matemáticas debemos estar conscientes de las necesidades de los alumnos pero de igual manera darle importancia a todos los ejes matemáticos y no a unos más que otros.

Anteriormente en mi experiencia frente a grupo me pude percatar de que los alumnos batallan para poder comprender el Teorema, en un inicio se realizaron las actividades pertinentes para llevar a cabo el contenido previo, se propusieron situaciones contextualizadas y dinámicas para motivar a los alumnos, el contenido previo es la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, en primera instancia nos pudimos percibir que los alumnos necesitan tiempo y ejercicios sencillos para percatarse de tal relación y aun así no les parece tan sencillo relacionarla.

Al pasar al siguiente contenido que es en sí la resolución de problemas con el uso del Teorema de Pitágoras, los alumnos al principio batallaron para darse cuenta del Teorema, sin embargo, una vez que se institucionalizó tal relación fue difícil que pudieran trabajar con otras variables, pues únicamente lo detectaban si se trabajaba con las literales como a, b y c. Y al momento de tener que resolver un problema haciendo uso del Teorema los alumnos no pudieron resolverlos siendo que únicamente se trataba de visualizar y determinar cuál era la variable para encontrar un resultado. Entre los dos contenidos se llevó un tiempo de 10 clases, es decir, 5 clases del contenido anterior y 5 clases del contenido posterior.

Para explorar la problemática, se realizó una prueba piloto con alumnos de primero de preparatoria, (se eligió este grado escolar por qué ya vieron anteriormente el Teorema) el objetivo principal fue que se percataran de la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y después pudieran mencionar que se trata del Teorema. Se hizo una compilación de cuatro actividades propuestas por distintos libros de texto de tercero de secundaria con algunas modificaciones, y el objetivo era evidenciar el aprendizaje de los alumnos en distintos aspectos relacionados, las actividades se llevaron a cabo con un grupo de 38 alumnos para evidenciar si existe alguna problemática como la encontrada en los antecedentes.

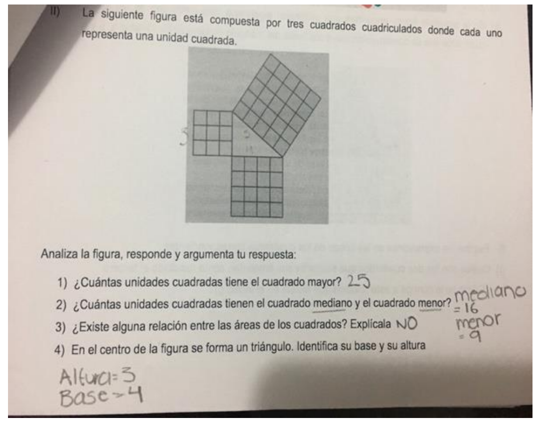


Figura 4. Alumna que no pudo percatarse de la relación entre las áreas de los cuadrados

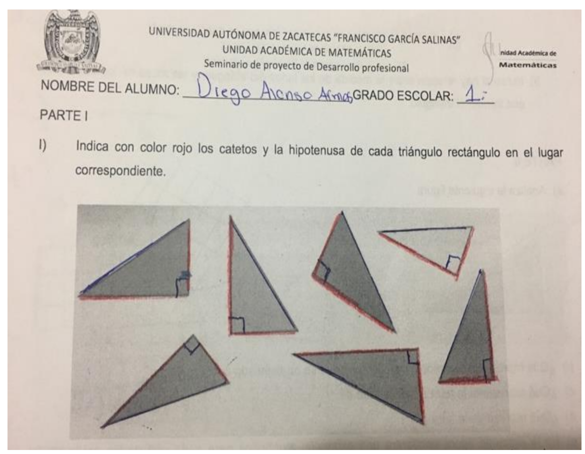


Figura 3. Alumno que logró identificar catetos e hipotenusa

La prueba consistía principalmente en identificar los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, aproximadamente un 98% de los alumnos pudo hacerlo (ver figuras 3 y 4), después se les presentaron tres cuadrados cuadriculados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, se les pidió que calcularán las áreas y después se les cuestionó sobre alguna posible relación entre los cuadrados, a lo cual únicamente un 5% de los alumnos pudieron percatarse que al sumar el área de los cuadrados construidos sobre los catetos dan el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Después se les pidió que reconocieran tal relación, (la suma de las áreas de los cuadrados que dan como resultado el área del tercer cuadrado) y únicamente el 26 % del total de los alumnos se percataron que a tal relación se le conoce como el Teorema de Pitágoras (figuras 5, 6 y 7).

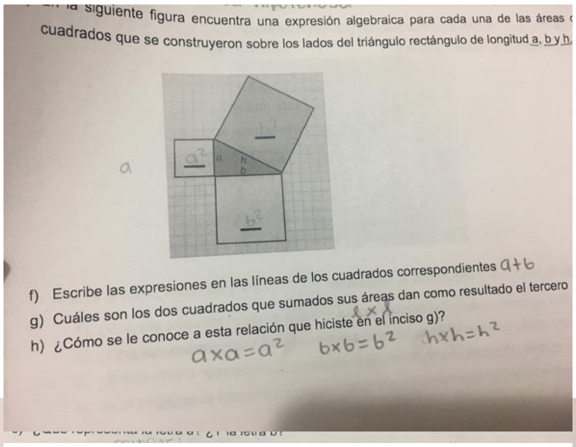
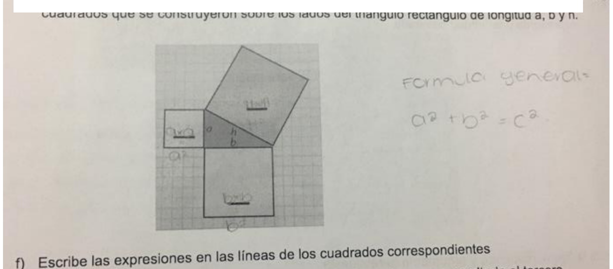


Figura 5. Alumna que no identifica la relación



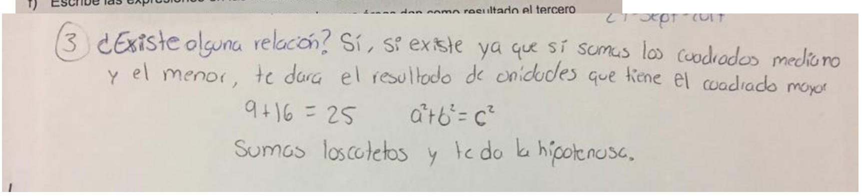
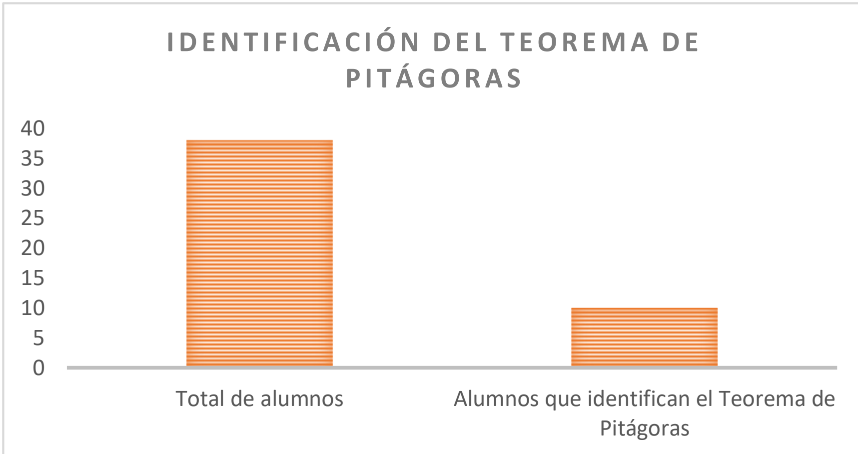
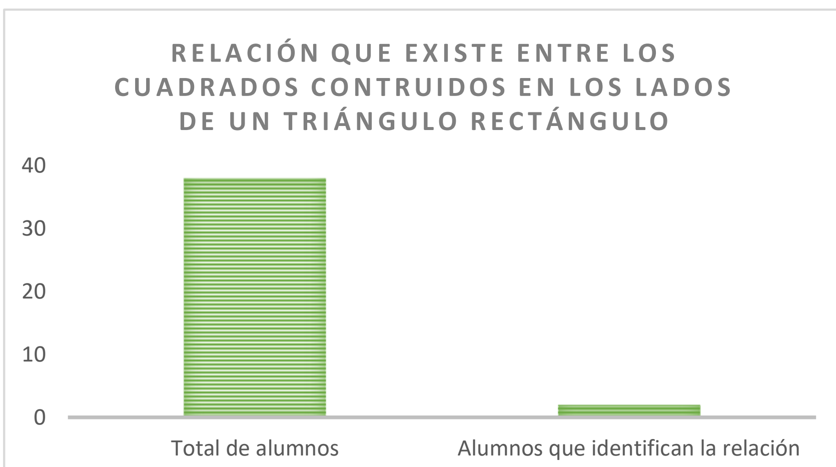


Figura 7. Alumno que identifico la relación entre las áreas.

Representación gráfica de los resultados de la prueba piloto



Gráfica 1. Comparación de alumnos que identifican el Toerema



Gráfica 2. Alumnos que encontraron la relación existente entre las áreas

El haber realizado la prueba nos sirvió para verificar la problemática antes mencionada en los antecedentes, pudimos percatarnos de que la mayoría de los alumnos no razonan la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, y tampoco se percatan que se trata del Teorema de Pitágoras.

Considero que unos de los problemas actuales en la enseñanza-aprendizaje es que los alumnos ya no quieren construir su conocimiento, están acostumbrados a que los profesores les den todas las herramientas necesarias como fórmulas, teoremas, deducciones, etc. y las respuestas a sus preguntas pues ellos ya no buscan ni investigan.

Los alumnos no encuentran motivación para ver más allá de lo que se les enseña, aporta y pide el profesor, limitándose únicamente a hacer lo que se les solicita, y es por esto que proponemos que los alumnos, comprendan, deduzcan y construyan su propio conocimiento.

Porque al momento de esforzarse, comprender, investigar y hacer uso de su conocimiento en otro ámbito estarán obteniendo un aprendizaje significativo, otro foco importante es cuando los alumnos están memorizando conocimiento para poder pasar una prueba de conocimiento y no están comprendiendo el contenido, no están adquiriendo un conocimiento ni teniendo una comprensión del tema.

1.6 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo propiciar el aprendizaje del significado del Teorema de Pitágoras en términos de medidas de áreas en alumnos de educación básica haciendo uso de material didáctico?

1.7 OBJETIVO GENERAL

Elaborar y validar una propuesta con el uso de material didáctico que permita a los alumnos tener un aprendizaje significativo del Teorema de Pitágoras desde un enfoque geométrico, es decir, que comprendan el significado del teorema en términos de medidas de áreas.

1.7.1 Objetivos Particulares

- Analizar secuencias didácticas para el estudio del Teorema de Pitágoras identificando actividades que faciliten el aprendizaje por parte de los alumnos.
- Seleccionar o diseñar el material didáctico que se utilizará en la situación didáctica y diseñar un instrumento que permita recabar información.
- Experimentar una secuencia didáctica con la utilización de material didáctico manipulable en el contenido del Teorema de Pitágoras desde un enfoque geométrico.

1.8 Hipótesis

La manipulación de figuras geométricas creadas como material didáctico en torno a los lados de un triángulo rectángulo puede facilitar el aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

1.9 Justificación.

Durante el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas que contemplan los contenidos de Geometría, surge la problemática de cómo lograr que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo, considerando que el uso de materiales manipulativos puede contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la rama de las matemáticas antes mencionada, es por eso que se diseñará una propuesta didáctica que englobe todas las características necesarias para lograr un aprendizaje exitoso.

García y Buitrago (2012) comentan que en el contexto educativo existen varias estrategias que ayudan a los profesores a subsanar las dificultades que se le puedan presentar en la escuela; una de estas herramientas son las situaciones didácticas, que ayudan a los estudiantes a interactuar con el medio físico y tomar un papel activo en la construcción del conocimiento permitiendo modificar el lenguaje habitual adecuándolo al área de matemáticas y geometría con el fin de comunicar sus ideas o afirmaciones.

Consideramos que lo que los autores comentan es muy asertivo pues de hecho, Brousseau comenta que el alumno no hace matemáticas si no plantea y no resuelve, es por esto que como profesores debemos guiar a los alumnos a través de las situaciones para que ellos mismos puedan ir construyendo su propio conocimiento y así logren adquirir un aprendizaje significativo.

“Estas situaciones didácticas combinadas con material concreto, aumentan las posibilidades de los estudiantes de desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; ya que el material concreto permite que los estudiantes indaguen, manipulen y puedan construir representaciones mentales de los conceptos geométricos” (García y Buitrago, 2012, p.11).

Por lo tanto, lo que se pretende es crear una serie de situaciones didácticas implementando el uso de material didáctico, pues consideramos que puede ser una herramienta benéfica para lograr nuestros objetivos.

Valenzuela (2012) Menciona que el uso de materiales y recursos en el aula es uno de los organizadores del currículo, es de suma importancia para el campo de la didáctica de la matemática investigar sobre el conocimiento y uso del material didáctico para ver la prioridad y el papel que juega en el diseño, desarrollo y evaluación de los contenidos. Otro aspecto importante es que el material didáctico ayuda a los procesos de enseñanza y aprendizaje de forma manipulativa “permitiéndoles a los alumnos conocer, comprender e interiorizar las nociones estudiadas, por medio de sensaciones”.

Con esta propuesta se pretender que los estudiantes no vean el Teorema de manera tradicional o algorítmica la cual se ha implementado a lo largo de los años, es necesario que no quede como una simple fórmula, sino que los alumnos sean capaces de relacionarlos con su entorno, su vida diaria, lleguen a tener la comprensión necesaria para ellos mismos puedan generar un aprendizaje y después desarrollar el Teorema a través de distintas demostraciones.

> “Cuando se plantea un problema a los estudiantes generalmente lo resuelven con sus propios procedimientos, lo que implica procesos de búsqueda, diversos ensayos y posiblemente algunos errores. Por lo general, al principio no usan los procedimientos

> convencionales, sino sus propias estrategias a partir de los recursos que ya poseen" (SEP, 2001, pp.23)

Es necesario proponer una secuencia didáctica, para que los alumnos logren tener un aprendizaje significativo, es necesario que ellos mismos aprendan los procedimientos convencionales a partir de estrategias utilizadas por ellos mismos, esto quiere decir que hay que proponerles una serie de problemas que vayan aumentando el grado de dificultad para que les exija el uso de procedimientos cada vez más eficaces; esto se puede lograr cambiando la estructura del problema, imponiendo alguna condición o variando las cantidades que se les dan, pues se dice que mientras los alumnos no encuentren una forma sistemática o bien un algoritmo para resolver los problemas que se le plantean hará que se esfuerce y busque alguna similitud entre ellas hasta encontrar un procedimiento convencional.

> "En algunas ocasiones los estudiantes no llegarán por sí mismos al procedimiento convencional, pero estarán muy cerca como para que puedan vincularlo con sus propios recursos y no les resulte ajeno, en estos casos el profesor puede proponerlo como una forma eficaz para encontrar la solución". (SEP, 2001, pp. 23)

Es por eso que se eligió el Teorema de Pitágoras, pues una vez que los alumnos lo conozcan podrán ver la cantidad de usos que tiene en la actualidad y como es que puede facilitar muchos de los cálculos en matemáticas.

La SEP describe para la asignatura de matemáticas el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de la materia misma que consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a la reflexión, a descubrir las diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y las habilidades que se quieren desarrollar.

Es importante que los alumnos conozcan y utilicen con propiedad el lenguaje de la geometría, pero no basta con que se aprendan y recuerden los nombres de las figuras, o las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, etc. Es necesario que puedan explorar e investigar las propiedades geométricas de las figuras y objetos; que tengan numerosas oportunidades de utilizarlas para resolver problemas; y que se planteen situaciones muy variadas de sus aplicaciones concretas.

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

2.1 MARCO TEÓRICO

En este apartado se describe el referente teórico utilizado para esta investigación, se analizará y se expondrá la teoría, investigaciones y antecedentes para prevenir errores que se han cometido anteriormente y podernos orientar sobre cómo habrá de realizarse el estudio.

El marco Teórico que trabajaremos son las bases y fundamentos referentes a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) porque esta teoría está pensada para generar y diseñar propuestas y por el tipo de dinámicas que queremos elaborar creemos que las etapas que la componen congenian con nuestra propuesta tratando de explicar sus conceptos y así facilitar la comprensión del Teorema de Pitágoras. La teoría se crea con el objetivo de que el alumno aprenda, y en proponer un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. La TSD propone cuatro situaciones las cuales guiarán al alumno y fomentarán una comprensión del contenido elegido.

"La teoría de las situaciones didácticas fue una herramienta que posibilitó el planteamiento y desarrollo de las actividades propuestas, favoreciendo el aprendizaje significativo en los estudiantes permitiéndoles explorar, afianzar y reconocer elementos los conceptos geométricos trabajados durante las actividades". (García & Buitrago, 2012, pp. 71)

Como se menciona, la TSD puede favorecer el aprendizaje significativo, lo cual es uno de nuestros principales objetivos pues el alumno al comprender el Teorema y trabajar con el podrá adquirir el aprendizaje a través de las situaciones.

El apartado se dividirá en referentes teóricos (TSD) y referentes matemáticos del Teorema de Pitágoras, todos los conceptos involucrados, algunas demostraciones y creencias.

2.2 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD).

La teoría de situaciones didácticas es la principal contribución teórica de Guy Brousseau a la didáctica de la matemática y es fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana. Es una teoría de la enseñanza, basada en la hipótesis de que los conocimientos matemáticos no se construyen espontáneamente y busca las condiciones para una génesis artificial de los mismos.

En los orígenes de la teoría de las situaciones la enseñanza es entendida como las relaciones entre el sistema educativo y el alumno vinculadas a la transmisión de un saber dado y siendo así la relación didáctica se comprende como una comunicación de informaciones, y en todo esto el profesor organiza el saber a enseñar en una serie de mensajes y de éstos el alumno solo toma lo que debe adquirir o de lo que debe apropiarse.

La teoría de las situaciones propone una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden. Una de las cualidades que he podido encontrar en la teoría es que se puede integrar con los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y regulación de la enseñanza de las matemáticas.

Algunas de las situaciones requieren que el alumno tenga los conocimientos previos necesarios, sin embargo, hay otras situaciones que le dan la posibilidad al alumno de que él mismo construya su propio conocimiento en un proceso de génesis ficticia.

El conocimiento matemático o bien, el saber matemático no es como lo conocemos ni como nos lo han enseñado, pues para poder ser guiado en las aulas ese conocimiento pasa por ciertas transformaciones para poder ser orientado y aprendido, pues de no ser así sería prácticamente imposible de concebirlo por sus orígenes creado como un saber sabio, que difícilmente puede ser comprendido por otras personas, así este conocimiento para poder llegar hasta las aulas tiene que dejar a un lado todos los aspectos, raíces y sucesos que lo hicieron surgir.

"La génesis ficticia para hacer más fácil su enseñanza, aísla ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en el cual tuvieron su origen, su sentido, su motivación y su empleo". (Brosseau, 1986).

Se considera importante comprender lo que es una situación para tener claro lo que se quiere realizar; una **situación** es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un conocimiento favorable. Algunas situaciones requieren el uso "anterior" de todos los conocimientos necesarios, pero hay otras que les ofrecen a los alumnos la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo, entonces, una situación es un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que se utiliza como una herramienta.

"La misma palabra situación sirve, en su sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como uno de los modelos (eventualmente formales) que sirven para estudiarla". (Brousseau, 2007)

Uno de los factores importantes de trabajar con esta teoría, es porque considera importante la relación que se construye entre el estudiante, el profesor y el medio, todo alrededor de un saber. La TSD nos permite crear esas condiciones que se parecen a la realidad que se vive en el salón de clases y su principal intención es de que el alumno logre apropiarse de un conocimiento, lo cual es el objetivo número uno de un profesor.

Por otra parte, el paradigma de aprendizaje de la TSD es que el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, desequilibrios, pudiera decirse que un poco como lo ha hecho la sociedad humana a lo largo del tiempo y este saber que es un resultado de la adaptación del alumno se manifiesta por respuestas que son la prueba del aprendizaje (Brosseau, 1986).

Así mismo, se entiende que el **medio** es el escenario que prepara el profesor con intenciones didácticas que se destinan al alumno y este medio puede estar acercado a la realidad. La interacción entre el alumno y el profesor se lleva a cabo en dicho medio, el cual puede incluir un problema, un texto, un ejercicio o el material didáctico utilizado, cuyo objetivo es crear esas condiciones necesarias que el alumno requiere para construir el conocimiento.

En la TSD no solo se habla de situaciones didácticas, sino que también hace diferencia entre dos tipos de dimensiones en las situaciones, las didácticas y las a-didácticas, es por eso que debemos tener muy claro en que consiste cada una de ellas.

2.1.1 Situación Didáctica y A-didáctica

Una situación didáctica es la que se entabla entre profesor y los alumnos alrededor del saber a enseñar, dentro del aula. En ella se muestra la intención de enseñar y aprender, y está regida por el contrato didáctico, el cual se define de la siguiente manera:

"El contrato didáctico es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, permite entonces obtener situaciones nuevas". (Brousseau, 1986, p. 15).

"La situación a-didáctica es aquella en la cual el profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independientemente del sistema educativo" (Panizza, 2004, pp. 63-65), permite que el alumno construya su conocimiento basado en sus conocimientos previos.

> El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (Panizza, 2004, pp. 63-65)

En una situación didáctica el profesor, deja al alumno que solucione un determinado problema, pero responsabilizándose de su propio aprendizaje; pero esto no quiere decir que el profesor se deslinde de la responsabilidad de enseñar, sino que se mantiene al margen, pero al pendiente y funge como observador para analizar los procedimientos de sus alumnos, el profesor puede hablar y hacer comentarios de ser necesario, pero cuidando que estos sean pertinentes y permitan a los alumnos realizar por sí solos la actividad, sin darles pistas o indicaciones sobre lo que deben hacer.

Entonces, la situación a-didáctica es considerada como un momento de aprendizaje y no de enseñanza.

> El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (Brousseau, 1986, citado por Panizza, 2004. p. 62)

La situación a-didáctica considera tres aspectos importantes que son parte fundamental de dichas situaciones (Panizza, 2004):

1. El carácter de necesidad de los conocimientos: la "situación" se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación "(...) no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende (...)". La comprensión de esta idea es fundamental para el análisis didáctico de una situación, y en particular para identificar en una secuencia de enseñanza los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa (…).

2. La noción de "sanción": no debe entenderse como "castigo" por una "culpa, o equivocación". La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción. Que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción, y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones son criterios fundamentales para que por sí mismo establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene.

3. La "no intervención" del maestro con relación al saber.

Esta última relacionada con la situación a-didáctica, ya que en este momento se requiere que el profesor no intervenga, y en caso de tener que dar alguna indicación debe cuidar lo que dice, de tal modo que evite dar pistas que puedan orientar a los alumnos al resultado.

> “Éstos tres aspectos pueden ser considerados desde el análisis didáctico, ya que el profesor debería ser consciente de que la situación planteada a sus estudiantes habría de estar encaminada a lograr que los alumnos tengan esa necesidad de utilizar el conocimiento que se quiere que construyan, para ello requerirá movilizar sus conocimientos previos”. (Hernández, 2016, pp.15)

Es importante generar un ambiente donde los alumnos tengan la capacidad de elegir un procedimiento pertinente pues esto nos permitirá que los podamos cuestionar sobre esa elección y su resultado, y así ellos mismos puedan decidir y analizar si su procedimiento es el indicado o deben seguir buscando para obtener el resultado idóneo.

2.1.2 La Devolución

Anteriormente en la situación a- didáctica definimos la no intervención del profesor y es necesario saber que la entrada a una situación a- didáctica es algo que debe gestionar el maestro es por eso que Brousseau desarrollo el concepto de la devolución.

> La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia. (Panizza, 2004, p. 65)

Una parte importante que menciona Brousseau es que las situaciones a-didácticas no se destacan por el silencio del profesor sino por lo que él dice, y el profesor no debe retirarse o actuar como un simple espectador, pues en la devolución el profesor renuncia de la parte de responsabilidad que es específica del saber a enseñar.

> Se concluye entonces, que la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (...). El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del

> alumno en una relación a-didáctica con el problema (...).
>
> Al comienzo de la formación en didáctica, al docente puede resultarle difícil encontrar intervenciones que permitan esta relación del alumno con el problema, sin hacer indicaciones sobre cómo resolverlo. Si no es el silencio del maestro lo que caracteriza estas fases, sino lo que él dice, el maestro se pregunta ¿qué se puede decir? Lo que se puede es alentar la resolución, decir que hay diferentes maneras de resolverlo, anunciar que luego se discutirán, recordar restricciones de la consigna (por ejemplo, si están trabajando sobre las propiedades de un cuerpo, decir "recuerden que no vale armarlo"), etc. Las intervenciones estarán pensadas como para instalar y mantener a los alumnos en la tarea.
>
> (Panizza, 2004, p. 65)

Brousseau (1986) comenta que la devolución puede pasar por varias etapas y no únicamente al inicio de la situación, en la primer etapa de la devolución se da un acercamiento lúdico donde el profesor permite que el alumno este en contacto con el medio, operando los objetos que están a su disposición, y el alumno aún no se percata de la necesidad de encontrar ciertas características que le permiten el deducir que lo está haciendo de manera correcta o incorrecta.

En la segunda etapa (devolución de una preferencia) los alumnos comprenden que para todo efecto existe una causa, por lo que si ellos manipulan un objeto, habrá una causa para esa acción, es decir un resultado.

La tercera etapa (evolución de una responsabilidad y una causalidad) consiste en que de todos los posibles procedimientos el alumno elije uno, por lo que debe aceptar que fue responsable de esa elección y sobre todo que ello arrojó un resultado que él mismo causó. También es donde los alumnos piensan sobre el hecho de que hubieran podido elegir otro procedimiento, ya que el que ellos eligieron es una posibilidad de varias para llegar al resultado, así como pensar en cada una de las acciones que siguió, en cómo mejorarlas o sustituirlas. Es entonces cuando se logra que el alumno acepte que es el responsable de ese resultado.

En una cuarta etapa (devolución de la anticipación), es donde el alumno se da a la tarea de pensar antes de actuar, considerando la relación que existirá entre la decisión que él pueda tomar y el resultado, lo cual tiene que ver con aspectos cognitivos.

Por último en la quinta etapa (devolución de la situación a-didáctica), el alumno debe poder identificar las situaciones en las cuales lo que aprendió le puede ser útil, pero también debe considerar que hay diversas posibilidades de resolverlas, por lo que "la devolución no se hace sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que los caracterizan" (p. 17).

(Brousseau, 1986. pp. 16-17)

2.2.3 Variable Didáctica

> Dentro de las situaciones existen las **variables didácticas**, es importante conocer esa definición puesto que más adelante las elegiremos para lograr nuestros objetivos, el docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes Brousseau (s. f. citado por Gálvez, 1994, pp. 43-44)
>
> Las Situaciones Didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (Bartolomé y Fregona citados por Panizza, 2004 , p. 66)

Hernández (2016) comenta que las variables didácticas permiten controlar hasta qué punto quiere el profesor que sus alumnos utilicen los conocimientos; pues el profesor puede propiciar las condiciones necesarias para que los alumnos puedan resolver un problema haciendo uso de sus conocimientos previos y después, modificando las variables didácticas se pueda favorecer a que el problema sea más complicado o sencillo logrando que sus conocimientos deban ser reestructurados de tal manera que permitan enfrentarse a dicho problema.

> Pueden ser ejemplos de variables didácticas, las cantidades involucradas en un problema y la redacción (la cual puede modificarse con el fin de considerar que los alumnos tengan la necesidad de dejar a un lado los procedimientos anteriores que ahora no resulten convenientes para la resolución). (Hernández, 2016, pp. 17)

2.3 TIPOS DE SITUACIONES

Ahora bien, la teoría (TSD) distingue tres tipos de situaciones, los primeros tres se refieren a situaciones a- didácticas, mientras que el último es un tipo de situación didáctica: (Brousseau, citado por Gálvez, 1994, pp. 4-5).

2.3.1 SITUACIÓN DE ACCIÓN:

- El alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.
- Son aquellas en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

Al llevar a cabo el desarrollo de una situación de acción, los alumnos deberán de hablar y argumentar, familiarizándose con el medio.

“Entonces, si la situación demanda que los alumnos actúen, se trata de una situación de acción, aunque los alumnos intercambien informaciones en el momento de resolver el problema.” (Panizza, 2004, p.7).

2.3.2 Situación de Formulación:

- Un alumno (o grupo de alumnos) debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.
- Son aquellas situaciones cuyo propósito es la comunicación e información entre alumnos. Los alumnos modifican su lenguaje, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que desean comunicar. (Hernández, 2016, pp. 17-18)

Esto se podrá lograr solamente después de que los alumnos hayan llevado a cabo la situación de acción, pues podrán argumentar y llevar a cabo la resolución de un problema, incluso con ayuda de sus compañeros o bien, siendo ellos los que los guíen a la resolución correcta.

2.3.3 Situación de Validación:

- Dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones (Hernández, 2016, pp. 17)
- Son aquellas cuyo objetivo es convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. Los alumnos elaboran demostraciones formales.

Es aquí donde los alumnos ponen en juego su conocimiento, pues después de haber formulado, deben validar, es decir, deben demostrar como resolvieron su problema, y esto no siempre es sencillo, pues el alumno debe ser capaz de explicar y demostrar el procedimiento utilizado para lograrlo.

2.3.4 Situación de Institucionalización:

- “La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.” (Brousseau, 1994)
- Son destinadas a establecer convenciones sociales. Se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber, producto de las situaciones de acción, formulación y validación.

La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución. Brousseau (1986) reconoce en estos dos procesos los roles principales del maestro, y afirma:

> “(...) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo-a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status. (...)”.
>
> Esta descripción pone a la luz uno de los aspectos teóricos y prácticos más delicados de la articulación entre ambos procesos: los comportamientos o las producciones “libres” del alumno durante las fases a- didácticas de aprendizaje son constitutivos del sentido de los conocimientos que los alumnos construyen; definir las relaciones entre esos comportamientos o producciones y el saber cultural o científico significa que la institucionalización supone preservar el sentido de los conocimientos construidos por los alumnos en las fases a-didácticas de aprendizaje. (Panizza, 2004, pp. 14- 15).

Entonces, la institucionalización establece las relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural, es decir, el conocimiento construido por el alumno a través de las situaciones de acción, formulación y validación se pone en contrapeso con el contenido o los aprendizajes matemáticos que se quieren lograr.

“Durante la institucionalización se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etc., a fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.” (Panizza, 2004, pp. 15-16).

Un malentendido fundamental es la creencia de que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente primero por una situación de acción, luego por una situación de formulación y luego por una situación de validación. Aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos no se trata de una regla general.

"Estas situaciones favorecen la motivación y la discusión de los saberes y conocimientos en vía de construcción, permitiendo comunicar, razonar, y argumentar, las ideas, planteamientos, y formulaciones entre los mismos alumnos, este tipo de situaciones favorece notoriamente el proceso de aprendizaje" (García y Buitrago, 2012).

Ahora bien, el contrato didáctico es el conjunto de reglas implícitas de juego establecidas en relaciones sociales, teñidas por la cultura, entre profesores y alumnos alrededor del saber a enseñar y es especifico de un saber, por otra parte, también se habla del contrato pedagógico el cual es un conjunto de reglas que determinan los roles y el estatus de los profesores y alumnos dentro de la estructura social. Reglamenta los cambios por un periodo limitado y supone el principio de un consentimiento mutuo de las partes debido a que cada una de las partes debe someterse libremente.

> "La importancia de que el profesor establezca las reglas que giran en torno a una situación didáctica y en relación a un conocimiento matemático puesto en juego, es porque deben cumplir tanto lo que el profesor espera que los alumnos realicen, como también las pruebas que los alumnos esperan del profesor, esto porque se considera que dicho contrato didáctico ayuda a que cada personaje involucrado se haga responsable de sus actuaciones" (Hernández, 2016, pp. 19-20)

Para poder comprender las implicaciones de cada situación involucradas en la construcción del conocimiento se mostrará un ejemplo tomando como referencia la actividad planteada por Mancera y Basurto (2013) en el libro de Saberes Matemáticos 3, a la cual se le realizaron algunas modificaciones:

2.4 ACTIVIDAD DE EJEMPLO TSD

Reunidos en parejas lean, realicen lo que se les indica y después respondan.

1. Toma una hoja de papel y traza un cuadrado de tamaño mediano (entre 4 y 8 cm de lado)
2. Traza sus diagonales
3. Corten el cuadrado y luego recorten por la diagonal para formar dos triángulos
4. Formen ahora un triángulo isósceles y construyan un cuadrado para cada uno. Corten esos cuadrados de la manera más sencilla que puedan.
5. Con estas piezas traten de formar el cuadrado cuyo lado sea la base del triángulo.

a) ¿De qué manera acomodaron los triángulos para cubrir la superficie del cuadrado mayor?
b) ¿De qué tipo de triángulo se trata?
c) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos?
d) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor?
e) ¿Qué relación hay entre los lados de mayor tamaño de cada triángulo con el ángulo opuesto de cada uno?
f) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

Esta actividad, realizada mediante situaciones didácticas espera que los alumnos determinen las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, mediante la superposición de superficies y el cálculo de áreas. También es necesario dejar claro el contrato didáctico, donde los alumnos tendrán que cumplirlo, éste podría consistir: en una buena disciplina, no levantarse de su lugar, no copiar, argumentar sus respuestas, socializar con sus compañeros sus respuestas, etc.

Para que los alumnos puedan iniciar la actividad se les entregará el material necesario (hojas de colores, tijeras, pegamento, regla), después de realizar los pasos 1, 2, y 3 iniciarán con la manipulación del material didáctico (construido por ellos mismos), observaran las herramientas que tienen y exploraran el material, lo cual generará que estén interactuando con el medio, y es en ese momento que los estudiantes estarán en una situación de acción.

Después el profesor podrá leer o indicar que lean la siguiente indicación la cual consiste en que los estudiantes con las piezas recortadas traten de formar el cuadrado construido en la base del triángulo, tendrán que elegir la estrategia que utilizarán para empezar a realizarlo, y cuando encuentren como embonar todas las figuras en el cuadrado de manera que queden perfectamente acomodadas, es decir, que no sobresalgan pedazos ni realicen dobleces, podrán explicarle a su compañero (pareja de equipo) como fue que lo realizaron y de qué manera acomodaron las figuras para lograrlo, en este momento ellos se encontrarán en la situación de formulación. En esta parte algunos alumnos pueden hacer más recortes para poder acomodarlos sin dejar ningún pedazo o figura fuera o simplemente hacer dobleces a las figuras lo cual muestra que pueden presentarse formulaciones buenas y equivocadas. Ésta situación se cubrirá con las actividades 4, 5 y el inciso a).

En la situación de validación, los alumnos después de haber resuelto la actividad, deben convencer a los demás (compañeros y profesor) de que sus respuestas son correctas, con argumentos y explicaciones válidas que le permitan sustentar su respuesta, es decir, que los alumnos se percaten que los triángulos pueden cubrir la superficie del cuadrado mayor y sobre todo del tipo de triángulo con el que se está trabajando. En esta parte se espera que ellos se den cuenta de la medida de los ángulos internos de los triángulos y así puedan percatarse de que se tratan de triángulos rectángulos. También es importante que los alumnos concluyan la relación que existe entre los lados de mayor tamaño de cada triángulo con el ángulo opuesto de cada uno. Ésta situación se llevará a cabo con los incisos b), c), d) y f).

Después de ir y venir por los tres tipos de situaciones (de acción, de formulación y de validación) el profesor debe retomar las experiencias presentadas en el aula y dar a conocer a los alumnos el concepto matemático con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (es pertinente concluir que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”, al mismo tiempo, recalcar que es pertinente que los alumnos comprendan que los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.), es entonces cuando se llega a la situación de institucionalización, ya que es muy importante que el alumno pueda identificar dicho concepto independientemente de la situación planteada. En esta situación el profesor deberá retomar el inciso e) y f), podrá explicar en incluso retomar algunos comentarios de los alumnos y por último podrá realizar un ejemplificación con Geogebra de modo que sea más visual para los alumnos.

> "Los alumnos pueden dar buenas respuestas y también podrían cometer algunos errores, todo esto apoya al profesor en el desarrollo de la clase. El profesor por su parte debe aprovechar todas estas respuestas de la mejor manera posible, proporcionando a los alumnos algunas libertades que hagan ver de manera explícita, que gracias a esas respuestas se lo han ganado". (Hernández, 2016, pp. 20)

Como comenta la autora, es importante aprovechar todas las posibles respuestas de los alumnos, pues estas pueden guiarnos a una institucionalización, sin embargo, la profesora deberá tener la preparación suficiente para poder tomar todos los referentes de los alumnos y utilizarlos para guiarlos, ya sean acertados o no lo sean.

Una vez descrito como los alumnos pueden pasar por las diferentes situaciones es preciso cuestionarnos si será posible adaptar todas las actividades para que los alumnos pasen por las situaciones o de no ser así es importante pensar sobre las características que deben tener en específico las actividades para poderlas plantear así desde un inicio, o bien el tipo de preguntas que debemos plantearlos, sin embargo, a pesar de esto consideramos que las situaciones que se plantean son de mucha ayuda para ayudar al alumno a que construya su propio conocimiento, y no sólo esto sino que consideramos que si hacemos uso de estas situaciones podremos lograr con ayuda de un buen diseño que el alumno adquiera y comprenda un tópico matemático en específico.

Anteriormente hemos comentado el contrato didáctico, es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, que permite entonces obtener situaciones nuevas (Brousseau, 1986, p. 15).

Es necesario que el profesor determine y establezca las reglas que rodean a una situación didáctica y que están en relación a un conocimiento matemático, pues se debe determinar qué es lo que el profesor espera de los alumnos y también lo que los alumnos esperan del profesor esto porque se considera que dicho contrato didáctico ayuda a que cada personaje involucrado se haga responsable de sus actuaciones. También es importante mencionar que el contrato didáctico puede ser modificado por el profesor, esto respecto a las intenciones que tenga con relación a un saber específico.

2.5 MATERIAL DIDÁCTICO MANIPULABLE

Actualmente estamos en una época donde los profesores debemos buscar innovar nuestra forma de enseñar, pues los alumnos constantemente se aburren de únicamente tomar notas en su libreta o de escuchar al profesor, es por eso que debemos buscar recursos que motiven a los alumnos a construir su propio conocimiento. Un recurso podría ser el material didáctico.

El material didáctico o recurso, puede definirse como un medio facilitador de un objetivo, es decir, los recursos materiales son todos los elementos que podemos utilizar para el proceso de enseñanza/aprendizaje de los alumnos, desde el punto de vista de componente activo del aprendizaje y como herramienta que contribuye y facilita la consecución de los fines educativos según Moreno (2013).

Otra interpretación se da a todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones. (Valenzuela, 2012). Primero, debemos estar conscientes que es lo que queremos que los alumnos aprendan o descubran con el material y así, poderlo diseñar de tal manera que el alumno manipulándolo pueda acercarse al aprendizaje.

El material manipulativo facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, pues los alumnos experimentan situaciones de aprendizaje de forma manipulativa, que les permite conocer, comprender e interiorizar las nociones estudiadas, por medio de sensaciones (Área, 2010).

La rama que trabajaremos es la Geometría, y considero se facilita mucho el uso del material en esta área, pues los alumnos pueden llegar a comprender mejor características de figuras, como se miden, o ángulos, planos, relaciones entre puntos, etc. Con la investigación realizada nos hemos podido percatar de que hay profesores que no le dan la importancia que deberían darle y únicamente la abarcan superficialmente, sin dedicarle tiempo como para elaborar algún material que facilite su comprensión por parte de los alumnos.

Es por eso que la investigación de Chamorro (2003) nos parece tan llamativa pues para superar las dificultades que presenta la enseñanza de la geometría de manera estática y con el exclusivo uso del cuaderno y libro del texto, fundamenta una "didáctica específica para la geometría". En dichos fundamentos se justifica el uso de material didáctico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Doménech y Viñas (1997), están de acuerdo en que la función básica de los materiales es la de complementar y servir de base a la actividad educativa que se desarrolla en cualquier espacio educativo. La función innovadora y motivadora ayudará en el itinerario educativo de la adquisición de los nuevos conocimientos. Bautista (2010), apunta sobre la función de los materiales como base y complemento en la actividad educadora, por tener éstos varias características que contribuyen a ello, como:

• Carácter motivador; ya que según la forma, textura, color y características particulares del material, despertara el interés y curiosidad para su utilización.

• Carácter polivalente; los materiales pueden ser utilizados como elementos en varias actividades escolares y como elementos de diferentes juegos.

• Carácter colectividad; su utilización puede ser individual o colectiva.

• Carácter de accesibilidad; estar organizado y disponible para la libre elección de los alumnos.

Por su parte, Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J. (1998, pp. 14-16), clasifican los materiales didácticos de acuerdo su funcionalidad:

1. Materiales dedicados a la comunicación audiovisual: pizarra, diapositivas, cine, retroproyector y videos.
2. Materiales para dibujar. Aquí podemos considerar todos los instrumentos de dibujo: reglas, compases, escuadras, cartabones, etc.

3. Materiales para leer. Tradicionalmente los libros, cuentos o cómics…, se han presentado como elementos autosuficientes, alternativos y a veces complementarios, respecto a los materiales de otro tipo.
4. Materiales para hacer medidas directas o indirectas: reglas graduadas, metros… que tienen como finalidad hacer medidas de todo tipo.
5. Materiales que son modelos. La simple presentación de los modelos como poliedros, polígonos, mosaicos,… constituyen una actividad de interesante para concretar conceptos y estudiar propiedades.
6. Materiales para el descubrimiento de conceptos. Aquí podemos considerar todos los materiales estructurados que están elaborados para trabajar conceptos o relaciones matemáticas, por ejemplo: bloques lógicos, regletas, geo planos, etc.
7. Materiales para mostrar aplicaciones. Son aquellos instrumentos que permiten hacer evidentes nuevas aplicaciones de conceptos ya asumidos, consolidando con esto los propios conceptos previos, así como sus posibilidades. Sirvan como ejemplo los diversos juegos planos y espaciales, en donde las figuras y las transformaciones son protagonistas.
8. Materiales para resolver problemas: los clásicos rompecabezas, las piezas de mecano, el plegado de papel, llevan a resolver problemas interesantes.
9. Materiales para resolver demostraciones y comprobaciones. Usados principalmente en Geometría, ayudan a presentar teoremas relativos a áreas de polígonos, el teorema de Pitágoras…

Por otra parte nos parece de suma importancia encontrar alguna clasificación donde se indique que tipo de material se podría usar en una situación en específico.

Cascallana (1988) clasifica los materiales en estructurados y no estructurados. Los materiales estructurados son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas. No son figurativos y suponen una mayor capacidad de abstracción, pero son previos al uso exclusivo de los signos numéricos. Los materiales no estructurados son todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creado con fines matemáticos, como por ejemplo juguetes. Además, Cascallana, se refiere a la palabra manipulativa como la primera fase para la adquisición de conceptos matemáticos, en donde el alumno debe observar diferentes materiales y tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismos el resultado de sus acciones.

Por último es de gran importancia recalcar que en la enseñanza de la geometría los materiales didácticos proporcionan al alumno la oportunidad de manipular, experimentar e investigar, ayudándole a desarrollar gradualmente la visualización espacial y es por eso que deberemos ser cuidadosas y pertinentes al momento de la selección y a organización de los materiales pues estos serán los recursos que puedan ayudar a fomentar el aprendizaje en los alumnos. Es por eso que se decidió hacer una investigación sobre el material didáctico, pues es un factor importante, tanto para el alumno como para el maestro, y aún más para nuestra secuencia, pues es importante conocer con lo que más adelante trabajaremos.

2.6 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

En este apartado consideramos importante el tener presente algunos de los conceptos matemáticos del contenido a trabajar, incluso para considerar todos los tópicos matemáticos que pudieran necesitarse o bien, únicamente para tener presente algunos de los conceptos que deben conocer los alumnos o que pudieran desarrollar durante la situación. También puede ser de utilidad para nosotros, pues como docentes debemos tener a la mano todas las definiciones matemáticas que se pueden llegar a utilizar, es por eso que en este apartado decidimos presentar algunas, las cuales consideramos pueden ser necesarias para el nivel en el que se aplica.

En la Educación Secundaria el Teorema de Pitágoras es un contenido matemático que se ve en tercero de secundaria en el Segundo Bloque, en el Eje Forma, Espacio y Medida. En este apartado lo que se pretende es describir los contenidos estrechamente con el Teorema de Pitágoras, o bien, las definiciones que pueden influir en su resolución.

El Teorema de Pitágoras es un contenido que tiene mucha importancia, es algo que los alumnos verán a lo largo de sus estudios, en distintas situaciones o problemas, también se dice que este teorema es el más conocido y útil para la vida escolar, es por esto que es necesario que los alumnos tengan los cimientos de este contenido bien construidos.

El Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo que se encuentra en un plano, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Algebraicamente, si a y b son las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y c es la longitud de su hipotenusa, entonces se cumple: $a^2 + b^2 = c^2$ (Soto, 2011).

Hay muchísimas aplicaciones y demostraciones de este teorema, libros de texto como el de Ramírez (2011), lo manejan de la siguiente manera:

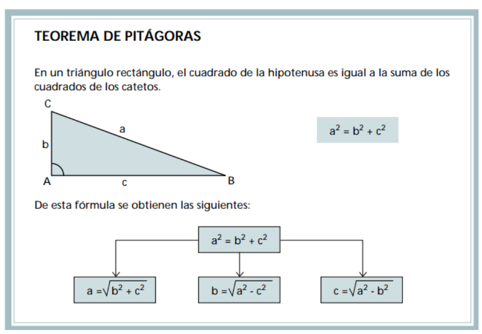


Figura 8 Teorema de Pitágoras. (Ramírez, 2011).

Como bien se sabe, el Teorema únicamente se aplica con triángulos rectángulos y es por eso que es importante conocer sus características y propiedades.

Triángulo rectángulo: Los triángulos son polígonos que cuentan con tres lados y tiene un ángulo de 90° (Soto, 2011).

Cuando un triángulo dispone de un ángulo recto (que mide noventa grados), se lo clasifica como un triángulo rectángulo. Los otros dos ángulos del triángulo rectángulo siempre son agudos (miden menos de noventa grados).

El ángulo recto en el triángulo rectángulo está formado por los dos lados de menor longitud, conocidos como **catetos**, mientras que el tercer lado (el de mayor extensión) recibe el nombre de **hipotenusa.** Las propiedades de estos triángulos señalan que la longitud de la hipotenusa siempre resulta menor que la suma de los catetos. La hipotenusa, por otra parte, siempre es más extensa que cualquiera de los dos catetos, este contenido se aborda en segundo año, por lo que los alumnos lo conocen previo a este tema

Ángulos: Figura plana formada por dos segmentos de recta que se cortan en un punto. El punto donde se cortan se llama vértice. Los segmentos son los dos lados del ángulo. La medida de un ángulo indica la abertura entre sus lados.

Es importante que de igual manera, el alumno se percate que únicamente en el triángulo rectángulo a sus lados se les conoce de la siguiente manera:

En el contenido previo al Teorema de Pitágoras es importante que el alumno pueda percatarse de la necesidad de conocer como calcular el área de un cuadrado.

Área de cuadrados: Superficie que cubre un cuerpo o figura geométrica. Sus unidades se miden en unidades cuadradas como centímetros cuadrados (cm^2), metros cuadrados (m^2), hectáreas (ha), etc. (Soto, 2011).

El área de un cuadrado se calcula a partir de uno de sus lados. Es el producto de la base por la altura del cuadrado, ya que al ser ambas iguales, el área será un lado al cuadrado.

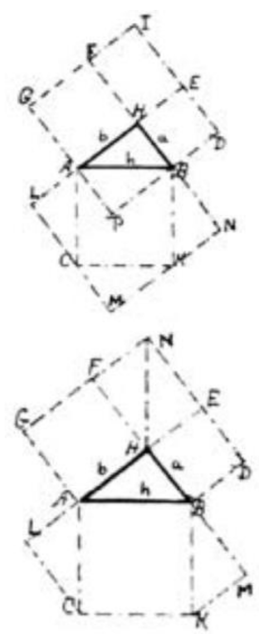
Desigualdad triangular: Tal concepto establece una relación entre las medidas de las longitudes de los lados de cualquier triángulo, en particular, de un triángulo rectángulo. Se puede encontrar una contradicción con dicha relación cuando se deduce $a + b = c$, a partir del hecho de que $a^2 + b^2 = c^2$, en el contexto de los triángulos rectángulos. (Perry, 2000)

Relación pitagórica: La relación pitagórica se cumple en todos los triángulos rectángulos y sólo en ellos. La relación que establece el enunciado del Teorema es entre las medidas de las áreas de los cuadrados de lados respectivamente congruentes a los lados del triángulo rectángulo y que en dicha relación se puede deducir la correspondiente relación entre las medidas de longitud de los lados del triángulo. (Perry, 2000)

Ahora, hablando sobre el Teorema de Pitágoras, hay gran número de demostraciones sobre él, las cuales han llevado a cabo a través de los años, Loomis en 1935 reunió 255 pruebas geométricas basadas en la demostración de áreas.

Gonzáles, 2018 hace una recopilación de distintas demostraciones y entre ellas realiza una clasificación de pruebas tipo Pitágoras y tipo Euclides.

En las demostraciones tipo Pitágoras el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo dado junto con ciertos triángulos congruentes con el dado o rectángulos formados por dos triángulos congruentes con el dado, determina una figura, que resulta también a partir de la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo dado con los mismos triángulos o rectángulos, de donde se obtiene mediante una prueba de congruencia por sustracción que "el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos". Las múltiples demostraciones tipo Pitágoras se diferencian únicamente en las posiciones relativas de los triángulos y rectángulos aludidos. La diferencia de estas demostraciones con la original de Pitágoras se reduce a que esta utiliza dos figuras mientras que aquellas con una única figura resuelven la demostración.



El cuadrado ACKB construido sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, completado con cuatro triángulos rectángulos congruentes con el dado, determina el cuadrado HLMN, que es igual al cuadrado GPDI, el cual a su vez se puede obtener al completar los dos cuadrados sobre los catetos, AHFG, HBDE, con sendos rectángulos iguales entre sí e iguales en área a los cuatro triángulos anteriores.

Por tanto: ACKB = AHFG + HBDE.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

Los polígonos HMKCL y NDBAG son congruentes.

El polígono HMKCL se obtiene al completar el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, ABKC, con tres triángulos rectángulos congruentes con el dado.

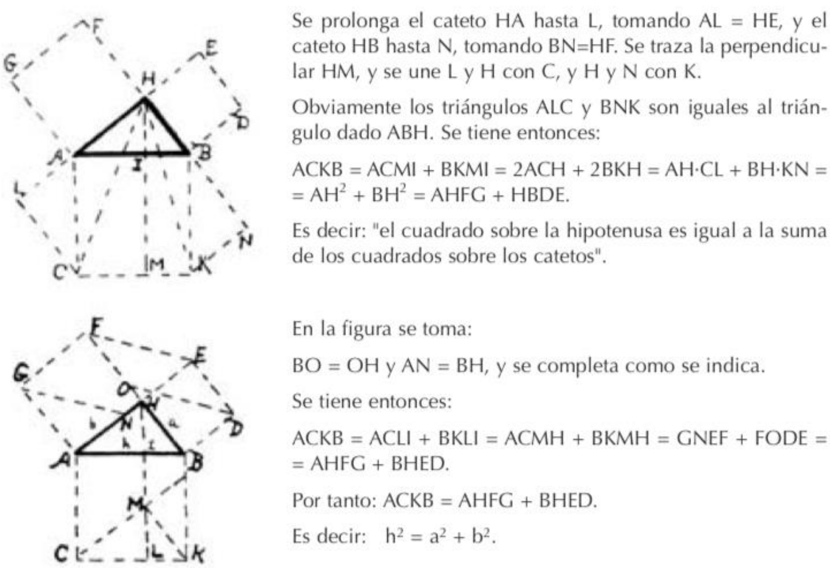
El polígono NDBAG se obtiene al completar los dos cuadrados sobre los catetos del triángulo dado ABH, HBDE y HAGF, con tres triángulos rectángulos congruentes también con el dado.

Por tanto: ABKC = HAGF + HBDE.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

Figura 9. Pruebas tipo Pitágoras realizadas por (González, 2008, pp. 122)

Ahora, respecto a las demostraciones tipo Euclides se utiliza la relación entre las áreas de los paralelogramos y triángulos situados entre las mismas paralelas.



Se prolonga el cateto HA hasta L, tomando AL = HE, y el cateto HB hasta N, tomando BN=HF. Se traza la perpendicular HM, y se une L y H con C, y H y N con K.

Obviamente los triángulos ALC y BNK son iguales al triángulo dado ABH. Se tiene entonces:

$ACKB = ACMI + BKMI = 2ACH + 2BKH = AH \cdot CL + BH \cdot KN =$
$= AH^2 + BH^2 = AHFG + HBDE.$

Es decir: "el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos".

En la figura se toma:

BO = OH y AN = BH, y se completa como se indica.

Se tiene entonces:

$ACKB = ACLI + BKLI = ACMH + BKMH = GNEF + FODE =$
$= AHFG + BHED.$

Por tanto: $ACKB = AHFG + BHED$.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

Figura 10. Pruebas tipo Euclides en (González, 2008, pp. 123)

Un factor importante, es conocer todos los elementos que puedan estar relacionados con el Teorema, en este caso mencionamos algunas definiciones que creemos podrían ser importantes para el alumno al momento de llevar a cabo la secuencia didáctica, es preciso comentar de igual manera, que de acuerdo con los planes y programas los alumnos ya tienen noción de la mayoría de los conceptos, sin embargo, es pertinente reiterarlos de ser necesario pues todos estos elementos se verán involucrados implícita o explícitamente dentro de la secuencia en sus diferentes fases.

Frecuentemente como profesores nos cuestionamos y buscamos estrategias de enseñanza que nos permitan crear las condiciones necesarias para que los alumnos construyan su propio conocimiento, es por eso que la Teoría de Situaciones Didácticas nos brinda los medios necesarios para hacerlo, pues pone a nuestro alcance los factores necesarios para describir los fenómenos que tienen lugar en las aulas y esto se vuelve un apoyo para nosotros para poder lograr el proceso de enseñanza – aprendizaje, pues gracias a sus situaciones podemos guiar al alumno, considerar todos los aspectos necesarios para lograrlo y así alcanzar nuestros objetivos.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA.

En este apartado se describirá la metodología que utilizaremos en la investigación, Ingeniería Didáctica, la cual es un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje en situación escolar.

Anteriormente estudiamos la TSD y pudimos percatarnos que para enseñar un conocimiento determinado se utilizan ciertos medios ya sean textos, materiales o algún otro recurso y la Ingeniería Didáctica es quien estudia y produce dichos medios.

Decidimos utilizar esta metodología porque está diseñada para la aplicación en el aula y nos permite hacer un análisis entre lo que se espera de una secuencia y los resultados que realmente surgen pues nos otorga los aspectos necesarios antes de elaborar la secuencia didáctica, da las pautas para hacerlo de la mejor manera, nos guía por sus fases de tal manera que vayamos considerando los aspectos más importantes y los que no lo son, de igual manera, también nos permite preparar el medio adecuado para orientar al alumnos en la construcción de su conocimiento, que es nuestro principal objetivo, lograr que al alumno construya un aprendizaje significativo.

La noción de ingeniera didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta y trata de:

> Por un lado, desprenderse de relaciones entre investigación y acción, pensadas en términos de innovación, sea con la intermediación de la noción de investigación-acción, para afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos. Y del otro, resaltar la importancia de la "realización didáctica" en clase como práctica investigativa, tanto por razones vinculadas al estadio de juventud de la investigación didáctica, como para responder

> a necesidades permanentes de poner en práctica las construcciones teóricas elaboradas. (Artigue, 1995. pp. 36).

Esta metodología permite considerar los aspectos necesarios antes de elaborar la secuencia didáctica, da las pautas para hacerlo de la mejor manera, permite preparar el medio adecuado para orientar al alumno en la construcción de su conocimiento (Hernández, 2016).

“Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.” (Artigue, 1995).

La Ingeniería Didáctica en su proceso experimental, se caracteriza por tener cuatro fases, las cuales son análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

3.2 ANÁLISIS PRELIMINAR

La Ingeniería Didáctica manifiesta el realizar los análisis preliminares con el objetivo de que se indague para la obtención de aspectos en específico que nos permitan contar con las herramientas necesarias para elegir o diseñar la situación didáctica que se implementará.

Para ello, se debe tomar en cuenta: el conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así como su devenir en saber, esto en el denominado *análisis epistemológico*; las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada, en el llamado *análisis cognitivo*; por último, la enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela, dentro del *análisis didáctico*.

> En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente

adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (Didáctico).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (Cognitivo).
- El análisis del campo de restricciones en las que se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

(Artigue, 1995, p. 36)

3.2.1 ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

El análisis epistemológico, asociado a las características del saber en juego, considera dar un paso por la historia referente a la geometría, enfocado en el Teorema de Pitágoras, por ser el contenido que trabajaremos, esto para indagar en lo que respecta al surgimiento de dicho contenido matemático, explicar un poco cómo surgió y qué necesidades o problemas de nuestros antepasados dieron paso a la construcción de este conocimiento. También para conocer distintas representaciones que se fueron dando a lo largo del tiempo y cómo fue que el Teorema fue evolucionando para ser enseñado como lo conocemos hasta ahora.

3.2.2 ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este análisis se engloba lo relacionado con el proceso de enseñanza – aprendizaje del contenido matemático específico al que está orientado al estudio. Para llevarlo a cabo, en primer momento se eligió el contenido y después se ubicó en los planes y programas de Secundaria propuesto por la SEP para considerar los estándares, aprendizajes esperados y objetivos del contenido, en seguida, lo que se pretende es realizar un análisis de los libros de texto para considerar la manera en que lo abordan, el tipo de actividades que proponen y como es la secuencia que los libros proponen, así como los materiales con los que lo trabajan, ya sea visual, manipulable o únicamente si se limitan con resolución de problemas sin uso de algún recurso.

3.2.3 Análisis Cognitivo

En este análisis lo que se pretende es considerar los posibles obstáculos, dificultades y concepciones que enfrentan los estudiantes respecto al conocimiento que construirán con la implementación de la secuencia didáctica. De igual manera, percatarnos de los conocimientos previos que pueden llegar a tener los estudiantes sobre el contenido elegido para tomarlos en consideración antes de implementar la situación didáctica con los estudiantes.

3.3 Concepción y Análisis a priori

En este análisis se determinan las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. Se establecen los propósitos de la situación, es decir, qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, entre otros. Una vez caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma.

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando:

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería, y
- Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

(Artigue, 1995, p. 42)

Las variables pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza, en éste caso, las variables didácticas son aquellas cuyo efecto didáctico se ha corroborado, es decir, se debe saber lo que se pretende lograr con ellas, siendo así las variables didácticas a considerar deben modificar la situación de tal forma que los alumnos hagan una reestructuración sobre sus conocimientos, para que de esa forma apliquen nuevos procedimientos que los orienten hacia el concepto que se quiere construir. En esta investigación las variables estarán ligadas a la aplicación de propiedades de los triángulos, los tamaños de los lados y su relación con el material.

El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego con la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

> Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor y también se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.
>
> (Artigue, 1995, p. 45)

Como antes hemos estudiado, sabemos que en todo proceso de enseñanza – aprendizaje siempre existe un discurso o un “contrato” entre profesor y alumno, resultado del conjunto de códigos y pactos implícitos y explícitos que regulan los comportamientos, interacciones y relaciones de los docentes y el alumnado.

El tipo de contrato didáctico que se establecerá es el contrato constructivista, que es uno de los contratos que describe Ávila (2001):

> Aquí, las situaciones que conducen al alumno al aprendizaje no son “naturales”. El profesor debe organizar el medio. La organización deriva esencialmente del saber previsto y del conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se les delega

> la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se manifiestan como prerrequisitos, es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación. En estos contratos el alumno es considerado racional o al menos coherente y económico: se adapta al medio para minimizar sus esfuerzos o sus riesgos y para acrecentar su placer (p. 14).

"Este tipo de contrato didáctico es el que sostiene la teoría de las Situaciones Didácticas, por lo que consideramos muy importante que las responsabilidades, tanto del profesor como del alumno, giren en torno a él" (Hernández, 2016).

3.4 EXPERIMENTACIÓN

En esta etapa se procede a la "puesta en escena" de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

En esta fase se establece el grupo de trabajo, el número de sesiones pertinentes para llevar acabo la secuencia y tiempos para cada una de las fases que se realizarán, de igual manera se establecerá el contrato didáctico y el registro óptimo de los resultados.

Para la recogida de datos, se utilizarán grabaciones en vídeo, bitácora, fotografías y los trabajos realizados por los alumnos para poder tener una amplia visualización y así poder generar una buena perspectiva sobre los procedimientos, comentarios y resultados por parte de los alumnos. Esto para poder precisar al momento de concientizar y concluir sobre lo logrado en cada actividad.

Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contrato investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes de la investigación. La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.

- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

(De Faria, 2006, p.52)

3.5 Análisis a posteriori y Validación

Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos ocurridos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis *a priori* y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba. De esta confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori* surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma.

> (…) se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se contemplan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante el transcurso. (…) en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue, 1995, p. 48).

Lo que se realizará en esta fase, es observar con detenimiento cada uno de esos datos, de tal manera que se pueda reflejar en ellos lo que realmente pasó, así como identificar cuáles fueron los factores que dieron lugar a esos resultados y por qué pasó de esa forma, contrastando los análisis (el a priori y el a posteriori). Por consiguiente, la validación será para aprobar nuestras hipótesis que fueron consideradas antes de experimentar la situación didáctica.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS PRELIMINAR, CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI.

4.1 ANÁLISIS PRELIMINAR:

En este capítulo se presentan los análisis preliminares que se llevarán a cabo, el didáctico, epistemológico y el cognitivo, relacionando lo que pudimos rescatar de cada uno de ellos para el diseño de la secuencia didáctica. Se establecen los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos.

4.1.1 ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO:

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego considerado el primero matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría y la aritmética.

Es una figura extremadamente importante en el desarrollo de las matemáticas aunque a diferencia de muchos matemáticos griegos posteriores, de los que al menos se tienen algunos de los libros que escribieron, no tienen ninguno de los escritos de Pitágoras. Pitágoras creía que todas las relaciones podían ser reducidas a relaciones numéricas.

Se dice que el Teorema de Pitágoras pudo haberse creado o conocido mucho antes de que naciera el matemático Pitágoras, pero no fue hasta el siglo VI a. de C. que fue demostrado por Pitágoras.

"Según se dice en la historia de este teorema que tiene este nombre porque su demostración, sobre todo, es esfuerzo de la mística escuela pitagórica. Anteriormente, en Mesopotamia y el Antiguo Egipto se conocían ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los citados triángulos, tal como se indica en algunas tablillas y papiros. Sin embargo, no ha perdurado ningún documento que exponga teóricamente su relación. La pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a. C., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3-4-5 que corresponden al triángulo perfecto". (Strathern, 1999) que es lo que actualmente conocemos como triángulo rectángulo.

Se sabe que este Teorema es el que mayores demostraciones tienen pues son muchos los estudiosos que lo han probado para comprobar o bien para desmentirlo, pero hasta la actualidad ningún filosofo o matemático ha podido demostrar que este Teorema no es del todo cierto. Hay muchas demostraciones diferentes, incluso se utilizan métodos muy diversos, algunos autores afirman que hay hasta, más de mil demostraciones, pero hay un autor en específico que se llamaba E. S. Loomis el cual es estadounidense y el reunió 367 pruebas o demostraciones distintas en su llamado "The Pitagoream Proposition" en el año de 1927.

- **El teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas**

Tradicionalmente se atribuye el teorema de Pitágoras a la escuela pitagórica. Sin embargo, el análisis arqueológico de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, reveló que los babilonios conocían el teorema, o al menos algunos aspectos del mismo. Otras zonas de las que se tiene constancia del conocimiento del teorema son Egipto, India y China. Lo que no se han encontrado son pruebas del teorema por parte de estas civilizaciones prehelénicas, parece ser que la primera demostración del teorema fue aportada por Pitágoras.

Las referencias prehelénicas al Teorema no contienen pruebas del mismo, mientras que es generalizada la creencia de que fue Pitágoras el primero en proporcionar una demostración lógica del Teorema, lo que hará justo que éste haya pasado a la historia con su nombre.

> El análisis histórico de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se puede dividir en tres estadios de desarrollo matemático. En el estadio inicial, puramente aritmético y empírico práctico, se obtienen resultados numéricos concretos para los lados del triángulo. En el estadio siguiente, aritmético geométrico, se obtienen leyes

generales de formación de los lados. Finalmente se penetra en la profundidad del pensamiento matemático investigando las demostraciones de los resultados generales de los estadios precedentes. Las dos primeras etapas corresponden a las civilizaciones orientales aludidas, mientras que a la tercera etapa sólo contribuyeron los griegos, particularmente Pitágoras y Euclides. (González, 2008, p.104-105)

- **El teorema de Pitágoras en el mundo griego**

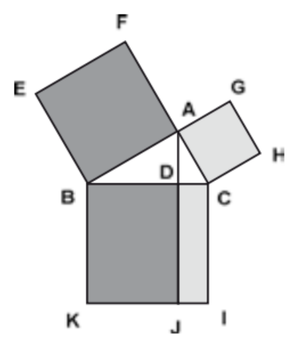
  Las demostraciones de Pitágoras.

Muchos historiadores afirman que la demostración de Pitágoras se basaría en su propia *Teoría de las Proporciones*, imperfecta por aplicarse sólo a cantidades conmensurables Buscando una forma de obtener ternas de números a, b, c que verificaran la relación, los pitagóricos encontraron que en las Ternas pitagóricas la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en una unidad. (González, 2008).

Sea ABC un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en A, y sea AD perpendicular al lado BC. Según la Proposición VI.8 de *Los Elementos* de Euclides, los triángulos DBA y DAC son ambos semejantes con el triángulo ABC y, por tanto, semejantes entre sí.

- Prueba 1. De la semejanza de los triángulos ABC, DBA y DAC resulta:

  BA/BD = BC/BA, AC/CD = BC/AC (*Elementos*, VI.4).



De aquí se obtienen las expresiones del llamado "Teorema del cateto":

$BA^2 = BD \cdot BC, \quad AC^2 = CD \cdot BC,$

de donde al sumar las dos expresiones, se obtiene:

$BA^2 + AC^2 = (BD+CD) \cdot BC = BC \cdot BC = BC^2,$

es decir: $BA^2 + AC^2 = BC^2$.

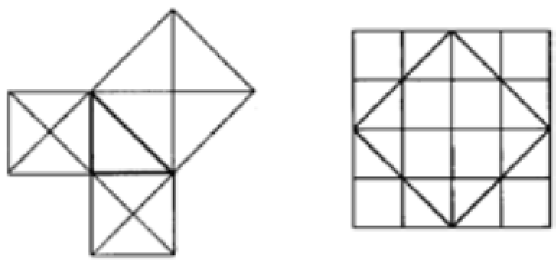
En esta demostración del *Teorema de Pitágoras* –basada en el *Teorema del cateto*–, se descompone, de forma implícita, el cuadrado sobre la hipotenusa, BCIK, en dos rectángulos, BDJK y DCIJ, cada uno de ellos con el mismo área que cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos –el rectángulo BDJK de área como el cuadrado ABEF sobre el cateto AB– ya que $BA^2 = BD \cdot BK$, y el rectángulo DCIJ de área como el cuadrado ACHG sobre el cateto AC –ya que $AC^2 = CD \cdot CI$–.

Figura 11. Construcción geométrica de Euclides (González, 2008, p.111).

- ### El Teorema de Pitágoras en la Academia de Platón

En el dialogo de Platón *El Menón* sobre el problema de la duplicación del cuadrado (el cual precedería al famoso problema de la duplicación del cubo) aparece el Teorema de Pitágoras en el caso de un triángulo rectángulo isósceles.

Platón encontró una ley que le permitía obtener ternas pitagóricas, basada en que la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en dos unidades.

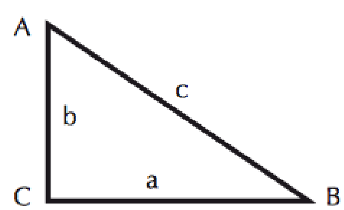


Curiosamente Platón utiliza el problema para sustentar la doctrina de la reminiscencia y la inmortalidad. Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo son de índole aritmética, pero "resultando la imaginación aritmética inexacta", Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico.

En la búsqueda de ternas pitagóricas, Platón encontró una ley de formación que se puede expresar en la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2m \\ b = (m^2 - 1) \\ c = (m^2 + 1) \end{array}\right\}$$

m	a	b	c
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37



Ternas pitagóricas de Platón

En las "Ternas pitagóricas de Platón" la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en dos unidades.

Figura 12. Elementos de la representación del Teorema de Pitágoras por Platón. (González, 2008, p.113).

- ### El Teorema de Pitágoras en Los Elementos de Euclides

El primer libro de *Los elementos de Euclides* termina con un enunciado que corresponde al Teorema de Pitágoras y su recíproco, proporcionando una demostración basada en elementos muy simples de geometría elemental. Por ejemplo, la construcción de cuadrados sobre segmentos o ángulos adyacentes que suman dos rectos. (González, 2008)

Euclides llega aún más lejos demostrando en el Libro I de Los Elementos el recíproco del Teorema de Pitágoras.

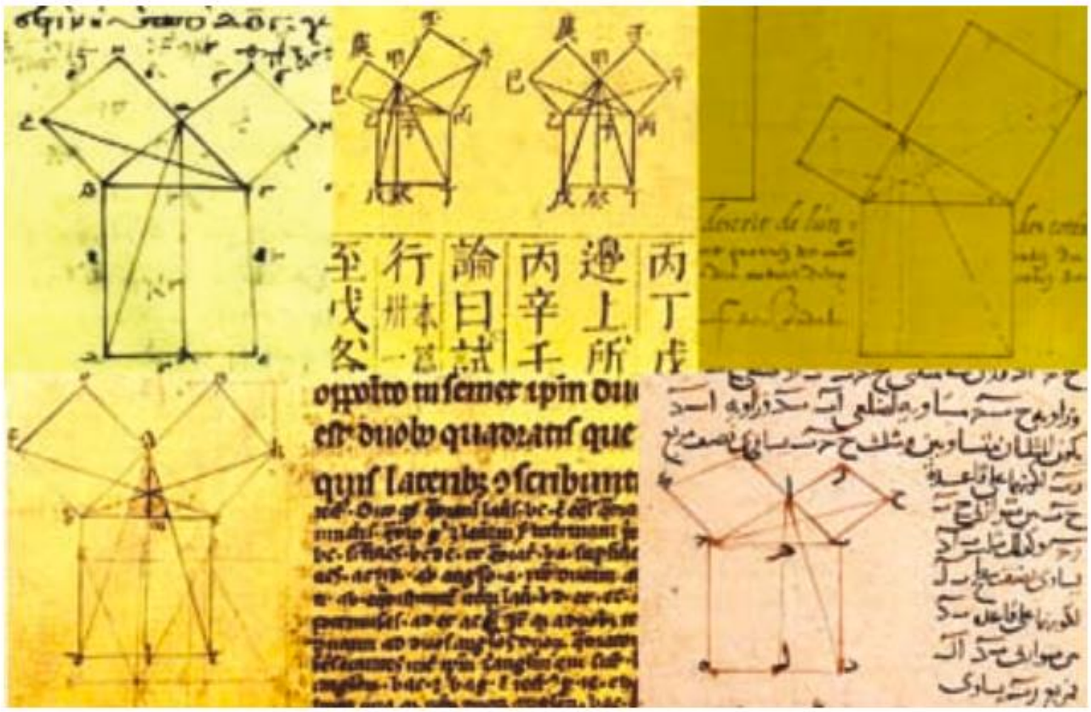


Figura 13. Ilustraciones históricas del Teorema de Pitágoras de Euclides.

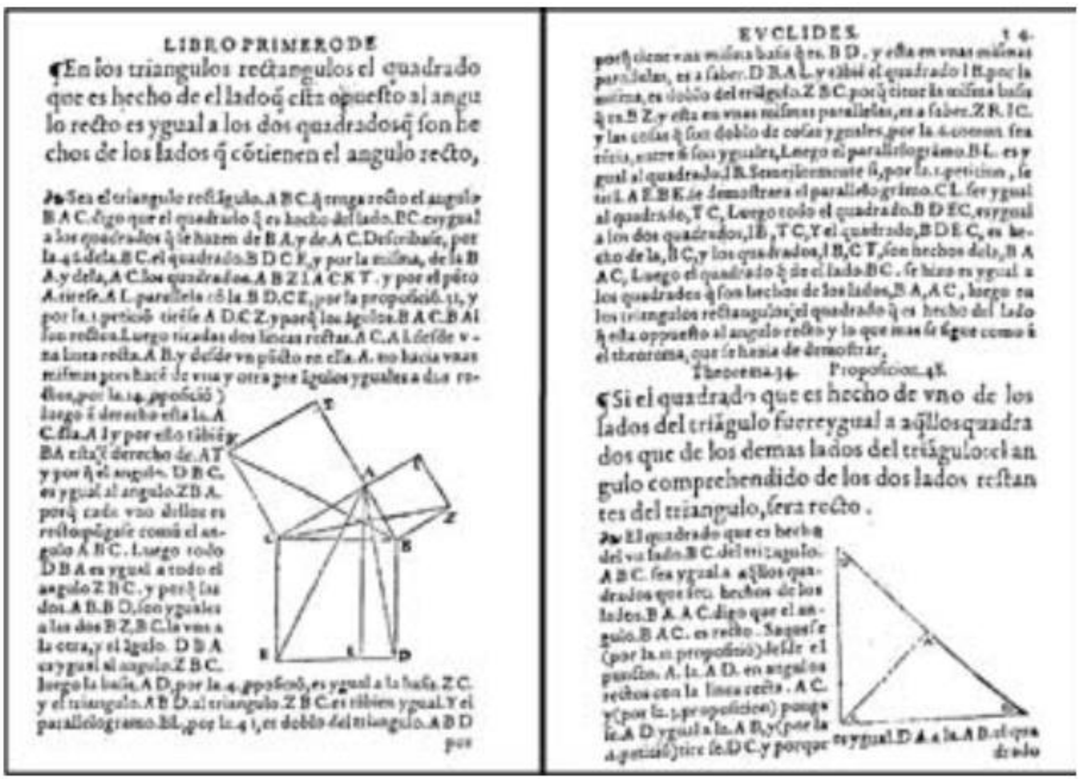
La Proposición I.47 marca la cumbre del Libro I de Los Elementos, pero el ingenio de Euclides va todavía más allá demostrando el resultado inverso del *Teorema de Pitágoras*, en la Proposición I.48, con una economía de recursos geométricos sorprendente (Euclides: Elementos. Gredos. Madrid, 1996. Libro I, p.263):

"Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto".

En la demostración Euclides traza un segmento $AD = AB$ y perpendicular a AC. De la hipótesis: $AB^2 + AC^2 = BC^2$, y al ser rectángulo el triángulo $\triangle ADC$, resulta: $AD^2 + AC^2 = DC^2$ (I.47, *Teorema de Pitágoras*). Pero como $AB = AD$, será: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AD^2 + AC^2 = DC^2$, por tanto $BC = DC$; de manera que los triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle CAB$ son congruentes, ya que al ser el lado AC común, los dos triángulos tienen los tres lados iguales.

Por tanto el ángulo $\measuredangle CAB$ que es igual al $\measuredangle CAD$ (Elementos, I.8), debe ser recto.

(González, 2008, p 116).


LIBRO PRIMERO DE

En los triangulos rectangulos el quadrado que es hecho de el lado q̃ esta opuesto al angulo recto es ygual a los dos quadrados q̃ son hechos de los lados q̃ cōtienen el angulo recto,

EVCLIDES. 14

Theorema 34. Proposicion 48.

Si el quadrado que es hecho de vno de los lados del triāgulo fuere ygual a aq̃llos quadrados que de los demas lados del triāgulo: el angulo comprehendido de los dos lados restantes del triangulo, sera recto.

Figura 14. El Teorema de Pitágoras y su inverso –Proposiciones I.47 y I.48 de Los Elementos de Euclides

Por otra parte, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asocio la formula $a^2 + b^2 = c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (*a* y *b* sobre las longitudes de los catetos y *c* sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logro formar el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa.

A lo largo del tiempo y de distintas demostraciones se han realizado distintas pruebas para comprobar el Teorema de Pitágoras.

- Se han realizado 109 pruebas algebraicas: basadas en relaciones entre lados y segmentos.
- Se han realizado 255 pruebas geométricas: basadas en comparaciones de áreas.
- 4 pruebas dinámicas basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc.
- Y pruebas cuaterniónicas basadas en operaciones vectoriales sólo 2.

Un ejemplo de las demostraciones geométricas, fue realizada por Barreto, 2009.

El Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica (comparación de áreas) dice que las áreas A B y C de los cuadrados que se forman sobre las longitudes de un triángulo rectángulo como el de la figura de abajo:

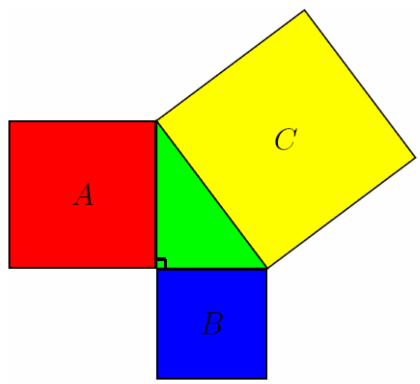


Figura 15. Acepción Geométrica del Teorema

Esto lo podemos ver analizando las siguientes formas de triángulos rectángulos, como los de la siguiente figura:

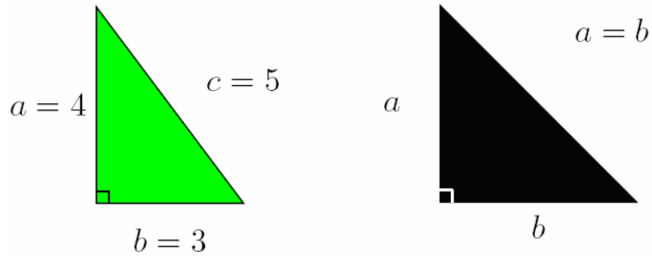
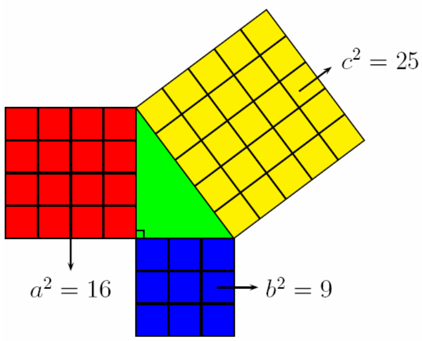


Figura 16. Triángulos base utilizados para la demostración

Luego, en la figura 17, a la izquierda vemos la división de cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo notable, aplicando una aprehensión operativa de cambio figura. A la derecha dividimos los dos cuadrados construidos sobre los lados del triángulo isorrectángulo, siguiendo las diagonales, para obtener ocho piezas de forma triangular, aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural* en el triángulo isorrectángulo:



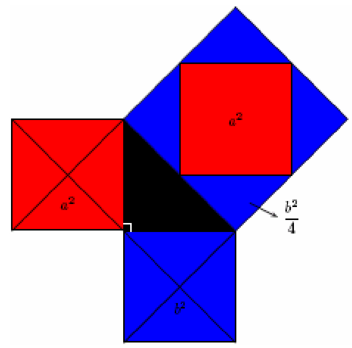


Figura 17. Demostración de las áreas sobre los triángulos originales

Así, tenemos que a la izquierda se tiene la siguiente igualdad numérica: $16 + 9 = 25$, o bien, se cumple que: $a^2 + b^2 = c^2$. Además a la derecha, nos queda que se cumple de nuevo lo siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$. Pero estos dos métodos geométricos no son mutuamente aplicables.

Ahora bien, si llamamos:

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

Donde este cuadrado lo formamos con un cuadrado de lado $(a - b)$ de color negro y cuatro triángulos rectángulos verdes que salen de los dos rectángulos verdes, como veremos en la figura 18 de abajo:

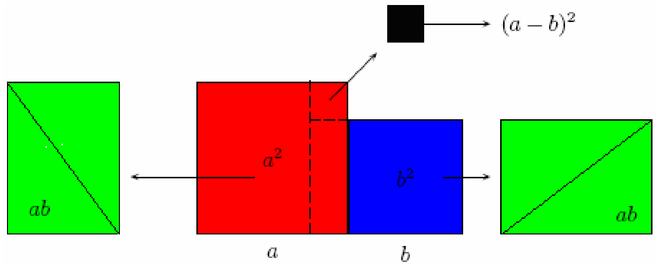


Figura 18. Vista geométrica del Producto notable de dos cantidades

Veremos que efectivamente c^2 es otro cuadrado de lado c, es decir, se puede formar de la suma de estas dos áreas (a^2 y b^2). Y este también es un cuadrado de lado c, mediante la construcción que se realizó. Es decir, colocando el cuadrado de lado $(a-b)$ de color negro y cuatro triángulos rectángulos verdes con el color amarillo buscado en la figura 19 de abajo se muestra:

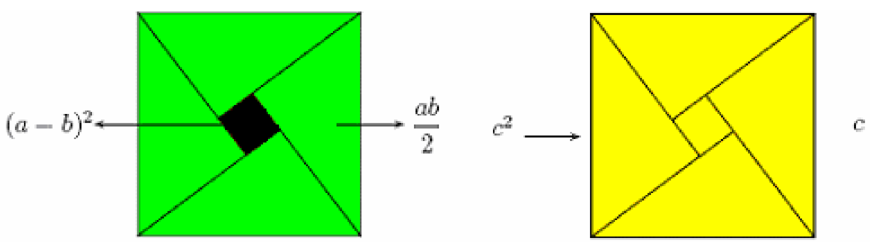


Figura 19. Aprehensión operativa de la reconfiguración del cuadrado

A la izquierda se muestra como se forma aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración* este cuadrado de lado c usando los cuatro triángulos rectángulos verdes y el cuadradito negro. En la derecha vemos que efectivamente este es el cuadrado de color amarillo de lado c buscado.

Y además, esa es la longitud del triángulo rectángulo que tiene en la hipotenusa longitud igual a c, así por el *razonamiento como un proceso configural*, nos queda el siguiente *truncamiento* mostrado en la figura 20 de abajo:

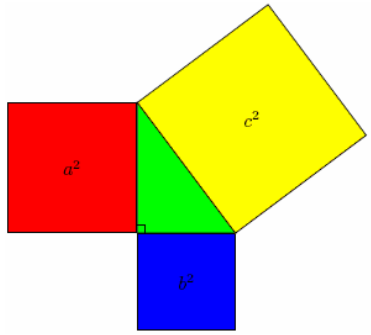


Figura 20. Conclusión de la acepción geométrica

(Barreto, 2009, p. 37-39)

Respecto a la construcción geométrica que utiliza Euclides en su demostración del Teorema de Pitágoras nos hemos podido percatar que se tratan de elementos conocidos en la actualidad, como podría ser los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y la descomposición de los mismos, el cual no nos parece complejo, ahora bien, consideramos que la demostración propuesta por Platón podría ser un poco más compleja para los alumnos, pues se trata de un triángulo isósceles y no del triángulo rectángulo, y en una primera instancia esto podría confundirlos. De igual manera, mostramos una demostración geométrica, que consideramos podría ser digerible para los alumnos en el nivel básico.

Después de haber realizado el análisis epistemológico nos hemos podido percatar de que el teorema de Pitágoras formó parte del bagaje cultural de las civilizaciones más antiguas, por tanto, nos parece importante que el teorema esté incluido en los programas de la enseñanza matemática de los niveles básicos, en los cuales el alumno podrá conocerlo, demostrar su importancia, resolver distintas situaciones, etc. El haber realizado esta investigación nos sirvió para indagar en lo que respecta al surgimiento de dicho contenido, explicar de dónde surgió y qué necesidades o problemas de nuestros antepasados dieron paso a la construcción de este conocimiento y así con ayuda de este análisis más adelante podremos determinar qué tipo de demostración se utilizará en el diseño de nuestra situación.

4.1.2 ANÁLISIS DIDÁCTICO.

Los contenidos que se revisarán son: El análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo y la Explicitación y uso del teorema de Pitágoras, ambos en el bloque 2, en el eje Forma, espacio y medida, en el tema Medida.

Libro de texto recomendado por la SEP, (Barrera, 2013).

En un inicio, antes de los contenidos, se comenta que el libro se desarrolló para apoyar y acompañar al estudiante en su trabajo escolar mediante planteamientos didácticos cercanos a su vida cotidiana, en los que se relacionan de manera dosificada los conocimientos previos con los nuevos, conforme al grado de complejidad matemática. Su propósito es generar reflexiones y argumentos para que el alumno desarrolle competencias matemáticas, habilidades de comunicación y una actitud crítica ante su entorno. Un punto importante es que se especifica que el libro se escribió con la intención de apoyar al profesor.

Se inicia el primer contenido pidiéndoles a los alumnos que tracen en una circunferencia un triángulo rectángulo cuyo lado de mayor longitud sea el diámetro de la circunferencia, el cual debe medir 4cm. Se les cuestiona la medida de los lados del triángulo (ver figura 21).

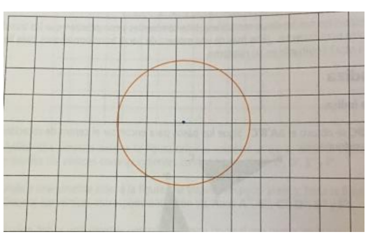
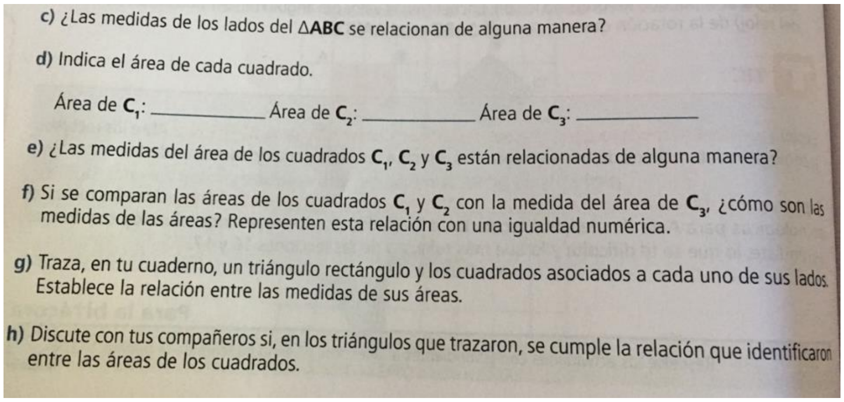


Figura 21. Circunferencia en la cual se les pide a los alumnos que tracen el triángulo rectángulo.

Después se les pregunta sobre las características del triángulo rectángulo y se les pide que tracen un cuadrado en cada uno de los triángulos, y se les pide que indiquen la longitud de cada lado y si encuentran alguna relación. Después se les indica lo siguiente:



c) ¿Las medidas de los lados del $\triangle$**ABC** se relacionan de alguna manera?

d) Indica el área de cada cuadrado.

Área de $\mathbf{C_1}$: __________ Área de $\mathbf{C_2}$: __________ Área de $\mathbf{C_3}$: __________

e) ¿Las medidas del área de los cuadrados $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ y $\mathbf{C_3}$ están relacionadas de alguna manera?

f) Si se comparan las áreas de los cuadrados $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ con la medida del área de $\mathbf{C_3}$, ¿cómo son las medidas de las áreas? Representen esta relación con una igualdad numérica.

g) Traza, en tu cuaderno, un triángulo rectángulo y los cuadrados asociados a cada uno de sus lados. Establece la relación entre las medidas de sus áreas.

h) Discute con tus compañeros si, en los triángulos que trazaron, se cumple la relación que identificaron entre las áreas de los cuadrados.

Figura 22. Actividad propuesta por el libro de texto.

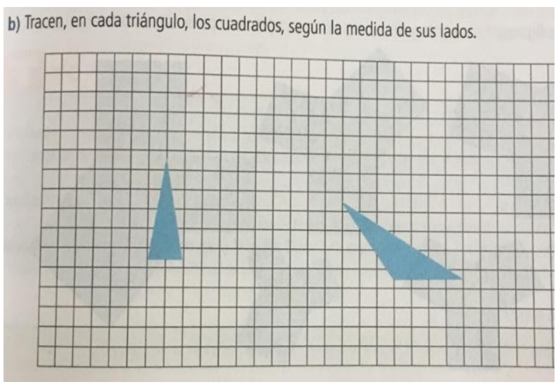


Figura 23. ¿Existe alguna relación a simple vista?

Lo relevante de esta primera actividad es que desde un inicio se espera que los alumnos se percaten de la relación que existe y que socialicen con sus compañeros sus respuestas y así puedan argumentar y deducir la relación.

Después presenta una actividad que nos parece bastante interesante, pues a simple vista el objetivo parece ser que los alumnos se percaten de que tal relación sólo existe en triángulos rectángulos.

En esta actividad se plantean preguntas sobre si existe una relación entre las áreas de los cuadrados trazados en cada triángulo, en caso de que no lo perciban, se les cuestiona nuevamente para que comparen las sumas de las áreas de los cuadrados y después se les pide que tracen un triángulo equilátero y analicen la relación entre los cuadrados construidos sobre sus lados para que los alumnos se percaten de que tal relación solo existe en un triángulo rectángulo.

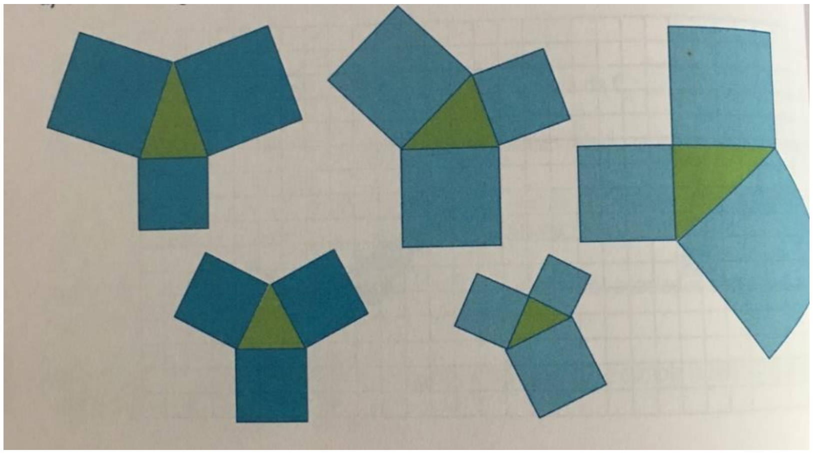
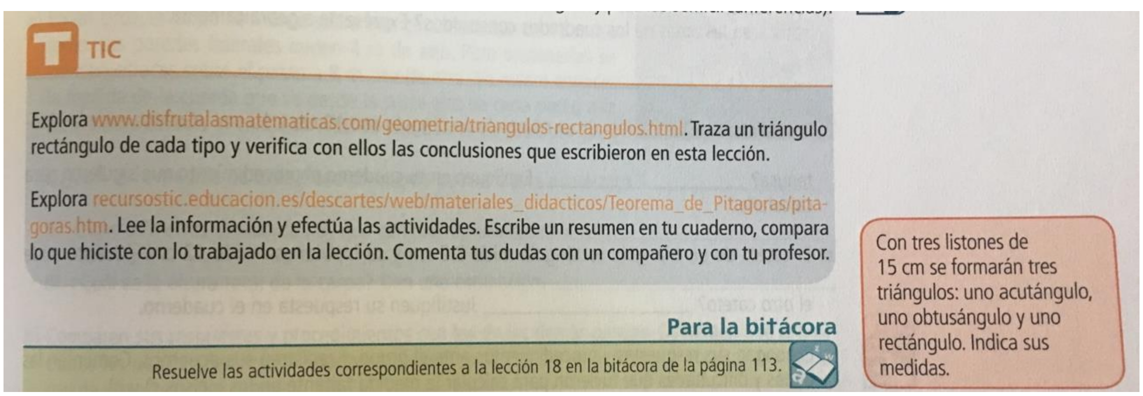


Figura 24. Actividad propuesta para propiciar el pensamiento matemático del alumno.

Se les pide a los alumnos que escriban una forma de caracterizar a los triángulos rectángulos a partir de la medida de sus lados. Como actividad final del contenido el libro propone que los alumnos construyan un triángulo rectángulo y, sobre cada lado tracen una semicircunferencia, las nombren y después calculen sus áreas y se percaten de si existe una relación entre las áreas de las semicircunferencias y expliquen su respuesta. Después se les pide que comparen sus conclusiones y que escriban una conclusión para cada una de las relaciones que encontraron para cada tipo de triángulo y para las semicircunferencias.

Como apoyo para el alumno el libro cuenta con recursos tecnológicos y didácticos. Ver Figura 25.



T TIC

Explora www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/triangulos-rectangulos.html. Traza un triángulo rectángulo de cada tipo y verifica con ellos las conclusiones que escribieron en esta lección.

Explora recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Teorema_de_Pitagoras/pitagoras.htm. Lee la información y efectúa las actividades. Escribe un resumen en tu cuaderno, compara lo que hiciste con lo trabajado en la lección. Comenta tus dudas con un compañero y con tu profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 18 en la bitácora de la página 113.

Con tres listones de 15 cm se formarán tres triángulos: uno acutángulo, uno obtusángulo y uno rectángulo. Indica sus medidas.

Figura 25. Recursos tecnológicos y didácticos propuestos por el libro de texto

En el primer enlace, lo único que aparece una página con un triángulo rectángulo isósceles y escaleno, pero no es una página interactiva pues únicamente aparecen las imágenes y las características pero no plantea preguntas ni actividades, es únicamente un recurso visual.

En el siguiente enlace, al abrir el link se da la impresión de que es sólo texto, al parecer la página tenía enlaces de demostraciones visuales e interactivas pero lamentablemente estos ya no funcionan y únicamente la página contiene solo el texto lo cual podría ser tedioso e incluso aburrido para los alumnos.

Sin embargo, consideramos que la propuesta que tiene para que el alumno manipule no es muy benéfica pues únicamente están considerando las características de los triángulos y no la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo. En conclusión nos pudimos percatar que la secuencia se presenta en inicio, desarrollo y cierre, llevando a los alumnos a cuestionarse y crear sus propios criterios para así poder cerrar con una actividad de nivel más elevado. Dentro de los apoyos a los alumnos únicamente se les muestra cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo. (Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa).

El siguiente contenido en el libro de texto es El Teorema de Pitágoras, el cual consta de 7 actividades, las cuales a simple vista parecen muy prometedoras.

La primera actividad se les muestra a los alumnos cuatro triángulos rectángulos de distintas medidas, se les pide que los midan y completen la siguiente tabla con las medidas:

Tabla 1. Actividad planteada en el libro de texto

	Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	$(\text{cateto } 1)^2$	$(\text{cateto } 2)^2$	$(\text{hipotenusa})^2$
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						
Triángulo 4						

Después de completar la tabla se les indica a los alumnos que representen las medidas de los catetos con literales, como como a, b y c. Y que la relación la expresen algebraicamente. Se les pide que comenten sus dudas y dificultades que se les presentaron con sus compañeros para así poder exponer sus respuestas y procedimientos.

Otra actividad que se les presenta y es bastante interesante es sobre una representación geométrica.

En esta actividad también se les pide a los alumnos que expliquen por qué los cuatro triángulos son congruentes y por qué se trata de triángulos rectángulos y por último se les pide que expresen el área del cuadrado P como la suma de las cinco figuras de su interior y después simplifiquen la expresión.

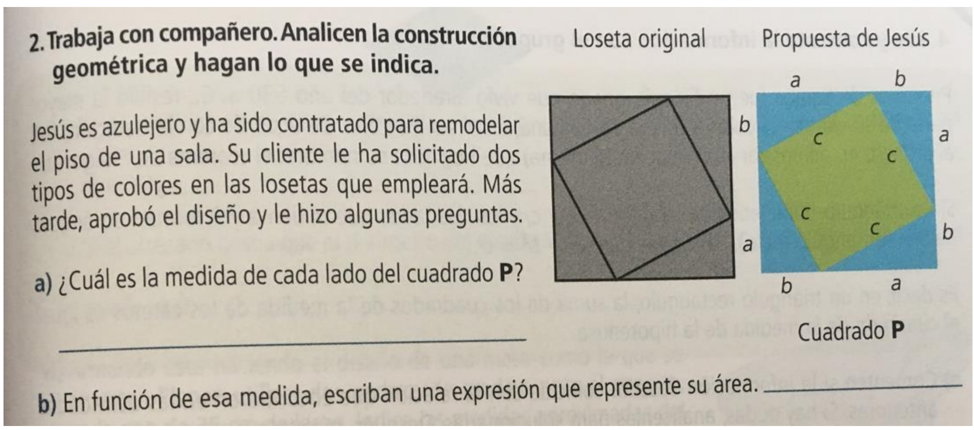
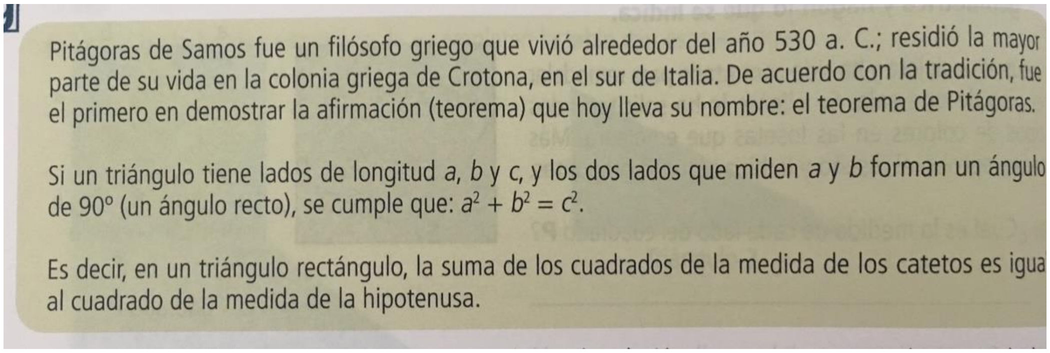


Figura 26. Actividad propuesta por el libro de texto para la comprensión del Teorema de Pitágoras.

Una parte importante es que antes de platearles más situaciones se les brinda la siguiente información, la cual contiene un poco de historia de Pitágoras y después se plantea el teorema.



Pitágoras de Samos fue un filósofo griego que vivió alrededor del año 530 a. C.; residió la mayor parte de su vida en la colonia griega de Crotona, en el sur de Italia. De acuerdo con la tradición, fue el primero en demostrar la afirmación (teorema) que hoy lleva su nombre: el teorema de Pitágoras.

Si un triángulo tiene lados de longitud *a*, *b* y *c*, y los dos lados que miden *a* y *b* forman un ángulo de 90° (un ángulo recto), se cumple que: $a^2 + b^2 = c^2$.

Es decir, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de la medida de los catetos es igua[l] al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Figura 27. Información propuesta por el libro de texto.

Pero, el libro no solo se queda ahí, sino que también le pide al alumno que comente en que se parece la información que se les presenta con lo que ellos habían deducido anteriormente en las actividades y también que indaguen sobre el significado del teorema. Después de esto se les plantean más situaciones contextualizadas a los alumnos, las cuales tienen que resolver haciendo uso del teorema.

Ahora bien, una vez analizado los contenidos necesarios, analizaremos nuevamente el contenido del teorema en otro libro de texto para ver como estructuran el contenido.

Libro de texto recomendado por la SEP, (De Icaza, 2014).

El libro se diseñó con la finalidad de ser una herramienta flexible que acompañe en todo momento al alumno, al profesor y a los padres de familia en el proceso de formación matemática de los alumnos. Se señala que en las actividades propuestas se consideraron los intereses de los alumnos de secundaria, las experiencias de profesores y el nivel de dificultad en el contenido, ya que las matemáticas son un factor importante para la formación de los estudiantes.

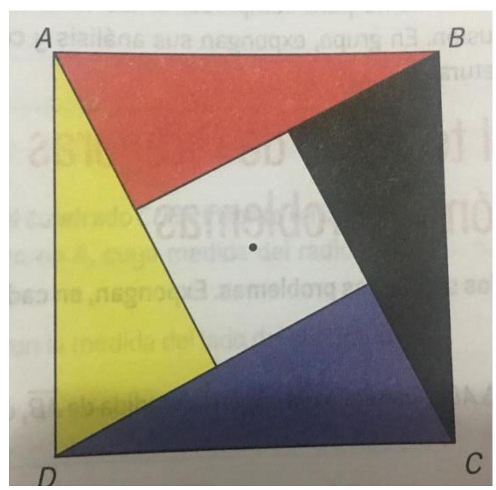
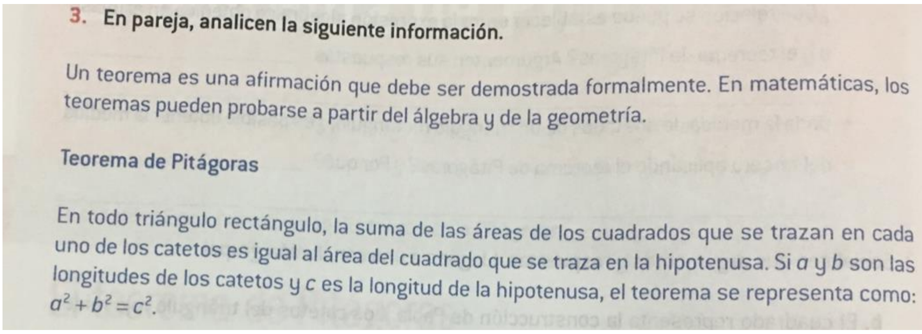


Figura 28. Figura que deben realizar los alumnos.

La secuencia inicia con una situación bastante dinámica, pues se les pide a los alumnos que en un cuadrado (ABCD) que viene en su libro obtengan el punto medio del segmento AB, tracen un segmento de recta que pase por el punto medio y por el vértice C… se le siguen dando al alumno una serie de indicaciones hasta que formen la siguiente figura 29:



3. En pareja, analicen la siguiente información.

Un teorema es una afirmación que debe ser demostrada formalmente. En matemáticas, los teoremas pueden probarse a partir del álgebra y de la geometría.

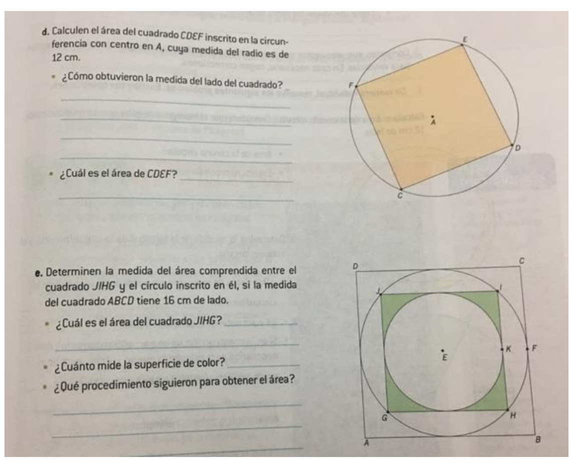
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados que se trazan en cada uno de los catetos es igual al área del cuadrado que se traza en la hipotenusa. Si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa, el teorema se representa como: $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 29. Información brindada por el libro de texto

Se les pide que completen una tabla y que sumen las áreas del cuadrado interior con las áreas de los cuatro triángulos y establezcan la igualdad entre el área del cuadrado original y la suma anterior y que simplifiquen la igualdad, después se les cuestiona sobre la expresión algebraica y el Teorema de Pitágoras, para que ellos se percaten que se trata del mismo.

Después se les proporciona la siguiente información y se les pide que la analicen, para que después de esto ellos puedan proponer un procedimiento para comprobar el teorema, lo apliquen y escriban una conclusión propia.



d. Calculen el área del cuadrado *CDEF* inscrito en la circunferencia con centro en *A*, cuya medida del radio es de 12 cm.

- ¿Cómo obtuvieron la medida del lado del cuadrado?
- ¿Cuál es el área de *CDEF*?

e. Determinen la medida del área comprendida entre el cuadrado *JIHG* y el círculo inscrito en él, si la medida del cuadrado *ABCD* tiene 16 cm de lado.

- ¿Cuál es el área del cuadrado *JIHG*?
- ¿Cuánto mide la superficie de color?
- ¿Qué procedimiento siguieron para obtener el área?

Figura 30. Actividades de la aplicación del teorema

Enseguida se les pide a los alumnos que resuelvan problemas con la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Por último se les pone a los alumnos un reto, para que ellos puedan justificar el teorema de Pitágoras y de igual manera se les brinda un apoyo tecnológico en caso de que quisieran reafirmar conocimientos.

Para finalizar, podemos concluir que el libro muestra una buena secuencia de actividades, va subiendo el nivel de estas para que el alumno vaya teniendo retos. En un inicio la actividad que proponen me parece favorable sin embargo, las demás nos parece que tienen el nivel un poco más complejo para alumnos de tercero de secundaria. De igual manera, ambas dan apoyos tecnológicos pero no muestran material didáctico manipulable, lo cual podría ser favorecedor pues el contenido se presta para ello.

Dentro de las actividades que podemos rescatar, nos parecen llamativas donde se les cuestiona a los alumnos sobre la relación que pudiera existir en otros tipos de triángulos y no sólo rectángulos, pues es importante que ellos se percaten que tal relación solo se da en triángulos rectángulos. Otro punto importante es el dinamismo de las actividades, es importante plantear las actividades de tal manera que vayamos guiando al alumno a que encuentre una deducción matemática, en este caso, el teorema. De igual manera, ambos libros plantean información sobre Pitágoras y el Teorema lo cual es un punto que debemos considerar.

4.1.3 ANÁLISIS COGNITIVO

Consideramos importante conocer de donde surgen los errores y los obstáculos que se presentan en los alumnos, y también que de aquí es importante saber la importancia de la noción de obstáculos en la enseñanza por los problemas pues el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometerá ahí. Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo.

Empezaré por dar un concepto de error, "Los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". (Matz, 1980 en Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Los errores aparecen cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Se dice que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste y estos errores se sitúan en tres orígenes distintos: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales.

Respecto a la dificultad, el concepto hace referencia al problema o aprieto que surge cuando una persona intenta lograr algo. Las dificultades, por lo tanto, según su definición son inconvenientes o barreras que hay que superar para conseguir un determinado objetivo, en este caso sería superar la dificultad de comprender el Teorema de Pitágoras. Y por último un obstáculo "es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Y que cuando los utiliza fuera de ese contexto origina respuestas inadecuadas," según Socas, Ruana y Palarea en el 2008.

Los errores que aparecen en las tareas escolares de los estudiantes pueden producirse por causas muy diferentes, pero, en la mayoría de los casos es por los procesos cognitivos. Se considera que los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación.

Garciadiego (2002) escribe un ensayo donde su objetivo es considerar como un caso la demostración del teorema de Pitágoras y sobre la existencia de conflictos cognitivos que podrían dar en la práctica docente. Comenta que, cuando por fines didácticos se simplifica un concepto surgen confusiones que se convierten en barreras infranqueables para el estudiante y un punto importante que el autor comenta que tanto maestros como alumnos no sólo desconocen los orígenes y las causas de un conflicto de esta naturaleza en el aprendizaje de las matemáticas, sino que en ocasiones tan confusión es inadvertida.

Comentan que los estudiantes poseen información aislada de los conceptos como lo son el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos, por lo que no saben aplicarlos en la resolución de ejercicios. Esto pudiera entenderse como que los alumnos conocen los conceptos pero sin embargo no pueden relacionarlos. Ramírez, G., Chavarría, J. Barahona, C. Y Mora, M. (2009)

Realizan una investigación donde su objetivo es encontrar si los alumnos pueden utilizar el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos para encontrar la medida de dos segmentos.

Los estudiantes de tercero de secundaria muestran los siguientes errores al aplicar un problema haciendo uso del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos, los alumnos omiten el criterio por el cual los triángulos son semejantes, no son capaces de proponer las razones de manera correcta, calculan de manera incorrecta la suma del teorema, indican la medida de los segmentos sin ningún cálculo anterior y asumen que la medida de los segmentos son iguales.

Respecto a nuestra propia experiencia podemos constatar que una de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos es que confunden los catetos con la hipotenusa o bien, que no identifican cual es el cateto adyacente o el cateto opuesto pues no tienen claro cuál es la característica de cada uno.

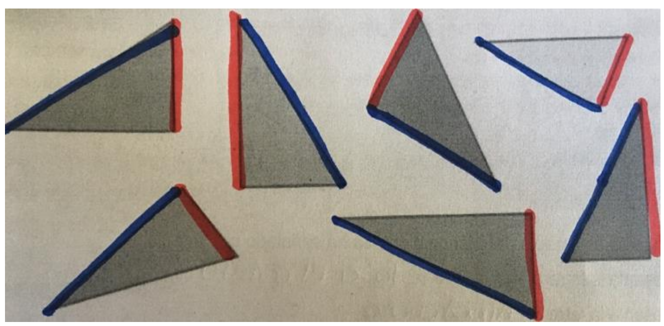


Figura 31. Alumno que considera que el triángulo rectángulo solo tiene un cateto y en ocasiones confunde la hipotenusa

Otro factor que no debemos pasar por alto es que algunos alumnos cometen el error de creer que el teorema se cumple con todos los triángulos y no solo con el triángulo rectángulo.

Perry (2000) encontró que uno de los errores sobresalientes en los estudiantes es:

$$(a^2 + b^2 = c^2) \longrightarrow (a + b = c)$$

Donde *a*, *b* y *c* representan respectivamente las medidas de las longitudes de los catetos y la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o en otros casos en los que no hay relación directa a cuestiones geométricas.

“Dicho error no es inherente al teorema de Pitágoras pues un estudiante que maneje apropiadamente las expresiones algebraicas podría no cometer el error mencionado sin necesidad de comprender el significado geométrico del teorema. Sin embargo, se tiene la hipótesis de que no reconocer aquella deducción como errónea refleja un manejo mecánico, no significativo, tanto del resultado del teorema como de su relación con otros hechos matemáticos”.

“En el desarrollo de las actividades se encontró una problemática en gran parte de los estudiantes sobre la comprensión y el uso adecuado de las unidades de medida de área y longitud, según sea el caso”. (García & Buitrago, 2012)

Consideramos que los errores que estos autores comentan son muy útiles para nuestro diseño, pues podemos prevenir o estar preparados para situaciones similares que se nos pudieran presentar. El análisis aquí realizado nos da a conocer información relevante del conocimiento de los alumnos sobre el contenido del Teorema de Pitágoras que nos permite tener una mayor visualización de dificultades, las cuales podemos prevenir con una mejor organización y diseño del contenido de tal manera que ayuden al alumno a darle sentido.

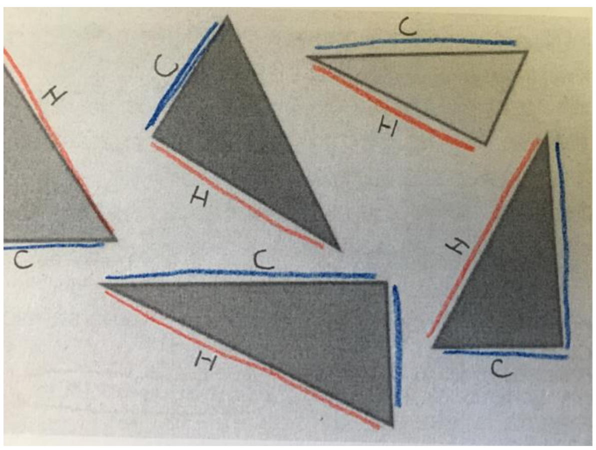


Figura 32. Alumno que confunde uno de los catetos con la hipotenusa o la hipotenusa con el cateto.

4.2 ANÁLISIS A PRIORI Y DISEÑO DE LA SITUACIÓN

Aquí se presenta el diseño de la situación didáctica, el cual es un diseño propio, aquí se describen los momentos de intervención que se realizarán en la secuencia didáctica, se le da un nombre a la actividad y también se plantea el objetivo de ésta. Es importante mencionar que en cada planteamiento se muestra en tablas de color verde en qué situación se encontrará el alumno haciendo uso del MT, pues es importante tener claro lo que estaremos generando con cada cuestionamiento. También se muestra el objetivo de cada cuestionamiento, con letra de color azul, o bien, por qué decidimos plantear la actividad de esa manera. Cabe destacar que en cada actividad damos a conocer de dónde nos surge la necesidad de plantearla así, por último se consideran los tiempos, se definen las variables didácticas y se da a conocer un análisis a priori.

4.3 SITUACIÓN 1 "TIPOS DE TRIÁNGULOS Y ÁREAS DE LOS CUADRADOS".

4.3.1 PROPÓSITO

Que los alumnos identifiquen y distingan las partes de un triángulo rectángulo y las características que se presentan únicamente en éste, que identifiquen el cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa y que se percaten que la medida de los lados del triángulo determinan la medida de los lados de los cuadrados. También se espera que los alumnos se den cuenta de "una relación".

Es importante comentar que nuestro objetivo no es que los alumnos conozcan las características de los tipos de triángulos si no percatarnos de que los alumnos no tienen dificultades para identificarlos, o para identificar los catetos y la hipotenusa en los triángulos rectángulos, de igual manera que sepan identificar los cuadrados que se construyen sobre sus lados y el calcular su área.

La idea de plantear esta actividad surge de la revisión realizada en el análisis didáctico pues (Barrera, 2013) diseña una actividad donde el objetivo es que los alumnos se den cuenta por ellos mismos que solo existe una relación en los triángulos rectángulos, sin embargo, decidimos modificarla y plantearla desde un inicio para que los alumnos tengan presentes sus características y propiedades. También se modifica haciendo uso del material didáctico para que sea de sentido más motivador para los alumnos, esta actividad tendrá secuencia en la próxima actividad para continuar con el objetivo principal del autor, que es que los alumnos se percaten que no en todos los triángulos existe una relación.

I) El profesor les entregará a los alumnos seis triángulos construidos en fomi pero reforzados con cartulina, todos los triángulos serán de distintas medidas y distintas características. Se les pedirá que los observen e identifiquen sus propiedades en cuanto a medidas de ángulos y de lados para que después unan el tipo de triángulo con la característica que le corresponde. Cabe mencionar que cada triángulo estará numerado previamente para que el alumno pueda relacionarlo

Triángulos	Características
1	a) Uno de sus ángulos mide 90°
2	b) Dos de sus lados tienen la misma medida
3	c) Tiene un ángulo obtuso, es decir mayor de 90° pero menor de 180°
4	d) Sus tres lados son de igual medida
5	e) Tiene tres ángulos agudos, es decir, menores de 90°

6	f) Sus tres lados son de diferente medida
	g) Triángulo que tiene catetos e hipotenusa

Los triángulos que aparecen en esta imagen son los que se entregarán a los alumnos, únicamente haciendo una modificación al triángulo número 1, pues será equilátero en lugar de isósceles.

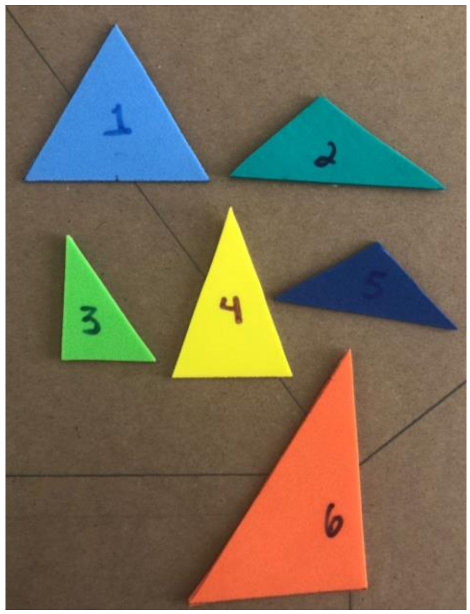


Figura 33. Figuras de fomi que se les entrega a los alumnos.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los alumnos empezarán a manipular el material didáctico de triángulos construidos en fomi y asociarán las características descritas con los triángulos.

Tabla 2. Situación de Acción y Formulación en la Situación 1

La idea de la realización de esta actividad surge del análisis cognitivo pues nos pudimos percatar de que algunos alumnos no identifican cuáles son los catetos y cuál es la hipotenusa, en este contenido no es necesario que los alumnos los reconozcan como cateto opuesto o adyacente, sin embargo, creemos que es bueno acostumbrar a los alumnos a que los conozcan desde este momento y más adelante en la continuación de otros contenidos matemáticos no tengan dificultad para reconocerlos, pero es preciso mencionar que en este contenido los alumnos deben tener bastante claro cuáles son los catetos y la hipotenusa y puedan diferenciarlos para así más adelante poder aplicar el Teorema. Cabe mencionar que en caso de que los alumnos no lo identifiquen en esta situación podrán hacerlo al momento de la institucionalización.

II) Después se les pedirá a los alumnos que le pongan una literal a cada lado del triángulo para que identifiquen los catetos (opuesto y adyacente), la hipotenusa y el ángulo recto.

Cateto opuesto = d

Cateto adyacente= r

Hipotenusa = t

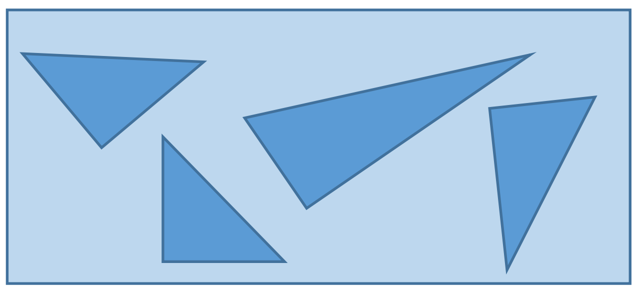


Figura 34. Actividad en la cual los alumnos deberán determinar cual es el cateto opuesto, adyacente y la hipotenusa.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	Los alumnos indicarán cuáles son los catetos y la hipotenusa haciendo uso de sus conocimientos previos individualmente, también deberán indicar cuál es el ángulo recto en cada uno de los triángulos.

Tabla 3. Situación de Formulación en la Situación 1

III) Una vez que hayan respondido a lo anterior, se les pedirá que se reúnan con dos de sus compañeros para que comparen sus respuestas, argumenten, se cuestionen y puedan dar respuesta a lo siguiente para evidenciar que efectivamente hubo una validación.

a) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Por qué?
b) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuáles sí y en cuales no? Argumenten su respuesta.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los alumnos en los equipos discuten y tratan de convencer a los demás integrantes de sus respuestas, esto mediante argumentos, de porque decidieron nombrar así a los triángulos y porque nombraron cateto o hipotenusa a cada lado según corresponda.

Tabla 4. Situación de Validación en la Situación 1

El propósito de darles a los alumnos estos triángulos y pedirles que lo identifiquen con una característica es para saber si los alumnos conocen la clasificación de los triángulos respecto a la medida de sus lados y a la medida de sus ángulos, para que más adelante puedan identificar que existe una relación únicamente en triángulos rectángulos, para evitar una posible confusión en los estudiantes se decide indicarles únicamente en que triángulos deben identificar los catetos y la hipotenusa e incluso se les pide que los identifiquen en los triángulos que vienen en el instrumento los cuales son solo triángulos rectángulos, esto para percatarnos de que no tienen ninguna dificultad en identificarlos y de ser así se podrá aclarar hasta la institucionalización.

IV) Después se les pedirá a los alumnos que separen los triángulos, (un rectángulo, isósceles y equilátero), a ellos sólo se les indicará el número de triángulo para que sea más rápido y no tengan que elegir, los alumnos tendrán que medir los lados de éstos y después se les entregarán los cuadrados los cuales tendrán que acomodar en los lados de cada triángulo, cuidando que la medida de los lados sea exactamente igual y una vez que ya lo hayan hecho se les pedirá que nombren a cada lado del triángulo (A, B y C) y que completen la siguiente tabla:

	LADO A	LADO B	LADO C
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			

Tabla 5. Actividad que se plantea en la situación 1, la cual deben responder los alumnos.

V) Una vez que los alumnos hayan completado la tabla se les pedirá que a simple vista analicen si encuentran alguna relación entre las áreas de los cuadrados con el siguiente cuestionamiento y después completen la información poniendo la letra o el signo que ellos consideren debe ir ahí.

- ¿Observas alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Encierra en cuál triángulo sí y tacha el que no tenga ninguna relación y argumenta por qué en cada caso.

1 ____

2 ____

3 ____

VI) Ahora, completa la siguiente información poniendo la letra y signo que corresponde (a, b, c, =, ≠).

- Triángulo equilátero:

Área ___ + Área ___ ◯ Área ___

- Triángulo rectángulo:

Área ___ + Área ___ ◯ Área ___

- Triángulo isósceles:

Área ___ + Área ___ ◯ Área ___

Se plantean la tabla con el propósito de conocer si los alumnos pueden identificar que los lados de los triángulos determinan la medida de los lados del cuadrado y en el caso del triángulo rectángulo, los catetos y la hipotenusa también indican y representan la medida de los lados del cuadrado construido en ellos. También se espera conocer si los alumnos tienen alguna dificultad al calcular el área de los cuadrados, pues deben saber que al multiplicar lado por lado estarán obteniendo el área del cuadrado, o bien elevar la medida de uno de los lados al cuadrado, y otra de las formas de obtener la medida del lado del cuadrado en caso de que no la tuvieran sería sacar la raíz cuadrada del área del cuadrado. Después, se les realizan los cuestionamientos a los alumnos de tal manera que ellos mismos puedan expresar y deducir si existe una relación y en que triángulo se está dando y a que creen que se deba, también se espera que los alumnos puedan expresarla.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los estudiantes acomodarán los cuadrados en cada lado según corresponda, determinarán las medidas de los cuadrados y obtendrán la medida de su área, según corresponda, después los alumnos deberán considerar si existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados y sobre todo en qué tipo de triángulo se está dando tal relación.

Tabla 6. Tipo de situación en la que se encontraran los alumnos en la Situación 1.

Una vez que los alumnos hayan realizado lo anterior, se les pedirá que se reúnan con dos de sus compañeros, comparen sus respuestas y después respondan lo siguiente:

a) En la tabla, ¿estuvieron de acuerdo en todas las respuestas?, ¿Por qué?
c) ¿Todos encontraron una relación? ¿En cuál triángulo y por qué?
d) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.

La actividad aquí planteada surge del análisis preliminar didáctico pues (Barrera, 2013) plantea una actividad en el libro de texto donde su principal objetivo es que los estudiantes se percaten de que únicamente existe una relación en los cuadrados construidos en torno a los lados del triángulo rectángulo y que esta relación no se da en los demás triángulos, decidimos modificar la actividad como anteriormente ya se había comentado y es hasta este momento donde se pretende que los alumnos se percaten de esa relación, también es importante mencionar que el autor únicamente nos dio la idea de la actividad y no retomamos sus ejercicios, sino que creamos la actividad de tal manera que se cumpla el mismo objetivo haciendo uso del material didáctico manipulable.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán de los cálculos que realizaron para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto.

Tabla 7. Situación de validación en la que se encontraran los alumnos en la Situación 1.

VII) Ahora, elige un triángulo en el que hayas encontrado una relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados, comprueba la relación y justifica tu respuesta, muéstraselo a un compañero, comparen respuestas y respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Ambos encontraron la misma relación? ¿Cuál?

b) ¿La comprobaron de la misma manera? ¿Por qué?

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN	Los alumnos deberán elegir el triángulo donde consideran existe una relación y comprobarla para después compararlo con un compañero y definir si ambos encontraron la misma relación y en cuál de los triángulos.

Tabla 8.Situación de formulación en la que se encontraran los alumnos en la Situación 1.

VIII) APORTE DEL PROFESOR

En este apartado inicia la institucionalización, es pertinente concluir y decirles a los alumnos que únicamente el triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° y es el único que tiene catetos e hipotenusa y no los demás, esto se demostrará con los triángulos de fomi y con sus características, también se comparará con los otros triángulos para que les quede claro. También es pertinente que los alumnos comprendan que los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo, pero se les dará la definición de cateto opuesto y adyacente y se les mostrará con un triángulo de fomi reforzado con cartulina de mayor tamaño, el cateto opuesto es el lado opuesto al ángulo y el cateto adyacente es el lado adyacente al ángulo, es decir, el que está próximo o unido al ángulo. Es importante comentarles a los alumnos que para obtener el área de un cuadrado hay que multiplicar lado x lado, que es equivalente a la medida de un lado al cuadrado y en caso de que tuvieran el valor del área pero no el valor de cada lado del cuadrado éste lo podrían obtener únicamente sacando la raíz cuadrada del área del cuadrado. Se les comentará también a los alumnos que la única relación que hay en el ejercicio realizado es que en el triángulo rectángulo el área del cuadrado a más el área del cuadrado b es igual al cuadrado c, lo cual deben expresar de la siguiente manera Área $\boldsymbol{A}$ + Área $\boldsymbol{B}$ = $\boldsymbol{C}$.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor deberá decirles a los alumnos que los catetos son aquellos que se forman con el ángulo recto y que la

	hipotenusa es el lado más largo del triángulo rectángulos, de igual manera que las medidas de los catetos y la hipotenusa representan la medida de los lados de los cuadrados y elevándolos al cuadrado se obtiene el área, la cual es la superficie de la figura, por eso al representarlo con cuadrados todos representan su área.

Tabla 9. Situación de Institucionalización en la que se encontraran los alumnos en la Situación 1.

4.3.2 MATERIAL DIDÁCTICO

Alumnos

Como la actividad requiere que la organización del grupo sea en equipos de tres integrantes, cada uno de los equipos contará con:

- 6 triángulos de fomi, los cuales estarán reforzados con cartoncillo para que no se pueda romper ni ser forzado construidos previamente de distintos colores.
- 18 cuadrados de fomi, los cuales irán en cada lado de los triángulos.

Profesor:

- El papel del profesor será, en primera instancia, preparar el material, dar indicaciones, supervisar y finalmente explicará.
- El profesor deberá preparar los triángulos de fomi y únicamente un triángulo rectángulo con sus cuadrados correspondientes y los cuadrados pequeños que representarán el área de cada cuadrado grande, así como un triángulo rectángulo de tamaño grande para mostrar a los alumnos el cateto adyacente, opuesto y la hipotenusa.

4.3.3 PROGRAMACIÓN

Las actividades están previamente divididas en 9 cuestionamientos. En las cuales se especifica el tipo de situación que se llevará a cabo en cada una.

Se prevé con anticipación, que los alumnos lleven a cabo las situaciones en los siguientes tiempos.

Tabla 10. Programación de actividades planteadas

ACTIVIDAD I	
SITUACIÓN	TIEMPO (MIN)
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	10
FORMULACIÓN	10
VALIDACIÓN	10
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	30
VALIDACIÓN	10
FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN	10
INSTITUCIONALIZACIÓN	20
TOTAL	100 MIN (2 MÓDULOS DE 50 MIN CADA UNO)

4.4 VARIABLES DIDÁCTICAS

De acuerdo con (Brousseau, 1995) y con su definición de variables didácticas, se sabe que el docente "puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes." El tener claro la definición nos facilita el entender que es lo que debemos tomar en consideración para determinarlas y sobre todo nos da la oportunidad de considerar más de una variable en una actividad.

La actividad está compuesta en tres partes fundamentales, En las tres, las variables didácticas son los triángulos, las medidas de sus lados, sus ángulos, y los cuadrados de sus lados correspondientes.

La variable que se utiliza en primer instancia son los tipos de triángulos, los cuales representan el objeto matemático ya que las medidas específicas de sus lados y sus ángulos ayudarán al alumno a comprender y entender las características de cada uno, lo cual después ayudará a los estudiantes comprender en cuales triángulos pudiera existir una relación y en cuáles no. La medida de los lados varía, igual la de los ángulos, según el tipo de triángulo.

En la segunda actividad lo que estará variando serán los cuadrados, pues en todos los triángulos serán diferentes las medidas de sus lados, por lo tanto los cuadrados lo serán.

4.5 ANÁLISIS A PRIORI.

El objetivo principal de este análisis es considerar lo que esperamos lograr con la actividad planteada, es importante siempre en un inicio considerar lo que esperamos obtener y tener claro que hay ciertas dificultades que se nos pudieran presentar. A continuación mostramos una tabla donde explicamos lo que esperamos de cada actividad, según las clasificamos anteriormente.

Es importante que los alumnos distingan los diferentes tipos de triángulos, también que en un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa (lado mayor) y los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos (lados menores), pero sobre todo que se percaten que éstas características solo las tiene el triángulo rectángulo y no todos los demás y por último que los alumnos sepan construir cuadrados sobre los lados de los triángulos, o bien identifiquen que medidas debe de tener para poderlo poner en los lados del triángulo y calculen su área y de tener el valor de su área puedan determinar el valor de cada uno de sus lados.

SITUACIÓN I	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
ACCIÓN, FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN	Los alumnos deberán darle un nombre a cada triángulo según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, se espera que puedan percatarse que el triángulo equilátero es aquel que tiene todos su lados de la misma medida, que el isósceles es aquel que tiene sólo dos lados de igual medida y que el escaleno es aquel que tiene todos sus lados de distinta medida según la clasificación de la medida de sus lados, según la clasificación de la medida de sus ángulos se espera que los alumnos se percaten de que el triángulo acutángulo es aquel	Los alumnos podrán creer que todos los triángulos tienen cateto e hipotenusa, es por eso que se les dará la definición necesaria para que los alumnos con ayuda de su material didáctico se percaten que solo

	que tiene todos sus ángulos agudos menores que 90° y el rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°), por último el triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso, es decir, mayor que 90°. También se espera que los alumnos puedan darse cuenta que los únicos triángulos que tienen catetos e hipotenusa son los triángulos rectángulos. Se espera que los alumnos se percaten que la medida de cada lado del triángulo determina la medida del lado del cuadrado, se espera que los alumnos puedan identificar que cuadrados van en cada lado y que puedan calcular el área de éstos correctamente. Se espera que los alumnos se percaten que la única relación que hay en el ejercicio realizado es que en el triángulo rectángulo el área del cuadrado a más el área del cuadrado b es igual al área del cuadrado c, lo cual deben expresar de la siguiente manera Área **A** + Área **B** = Área **C**.	existen en el triángulo rectángulo. Los alumnos podrían equivocarse al momento de calcular el área, podrían sumar sus lados en vez de multiplicarlos y de igual manera podría caer en la dificultad de no identificar que los cuadrados pequeños están representando toda el área del cuadrado, esto se prevé, lo cual se espera aclarar con la siguiente situación. También los alumnos pueden creer que existe una relación en todos los triángulos pero esto se prevé con la actividad siguiente donde se mostrará que la relación sólo se da en triángulos rectángulos.

Tabla 11. Análisis a priori de las situaciones Acción, Formulación y Validación de la Situación 1

SITUACIÓN III	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES

INSTITUCIONALIZACIÓN	Se espera que a los alumnos entiendan y les quede claro que el triángulo rectángulo es el único que tiene catetos e hipotenusa por sus características: los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo. También se espera a que los alumnos les quede claro que el área de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado y que los cuadrados pequeños representan el área y que únicamente se da una relación en un triángulo rectángulo.	No se espera ningún error o dificultad.

Tabla 12. Análisis a priori de las situación de Institucionalización y Validación de la Situación 1

4.6 SITUACIÓN 2 "EXISTE UNA RELACIÓN SÓLO EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS".

4.6.1 PROPÓSITO

Es necesario que los alumnos se percaten que el triángulo rectángulo es el único en el que se encuentra una relación entre los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa. En esta sesión se pretende que los alumnos se den cuenta de que existe una relación y puedan expresarla para que al finalizar la clase el profesor pueda proporcionarles la siguiente información: "En todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa" y esta afirmación es conocida como el Teorema de Pitágoras.

La idea de plantear esta actividad se consideró a partir del análisis preliminar cognitivo, Se prevé, como lo menciona Perry (2000) en el análisis cognitivo, que los alumnos cometan el error de no detectar cuando hay que elevar un número al cuadrado o por qué debe de elevarse, esto al momento de aplicar el teorema, el cual se espera quede superado con el uso del material didáctico, entonces, consideramos agregar esta actividad donde los alumnos se percatan de la relación que tienen las medidas de los lados del triángulo con las medidas de los cuadrados construidos sobre éstos y sobre cómo se calcula el área del cuadrado y por qué se debe elevar al cuadrado, esto para evitar el error más adelante, cuando los alumnos deban aplicar el teorema.

I) Se les pedirá a los alumnos que se reúnan en equipos de tres y dos personas y se les entregará un triángulo rectángulo y 3 cuadrados de distintas medidas, después se les indicará que acomoden los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo de tal manera que el lado del cuadrado embone perfectamente con el lado del triángulo rectángulo y después de que hayan realizado esto se les pedirá que rellenen los dos cuadrados más chicos (los cuadrados de los catetos) que tienen acomodados en los lados del triángulo rectángulo que se les entregó anteriormente con unas unidades cuadradas que les entregará el profesor.

Se les pedirá que los rellenen como la imagen que se muestra a continuación hasta que lo cubran perfectamente.

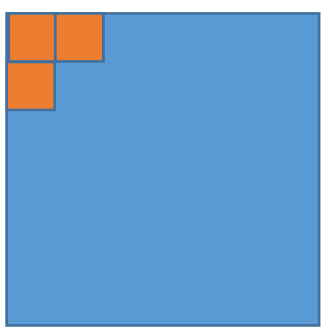


Figura 35. Ejemplo de cómo los alumnos deberán rellenar los cuadrados.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN

SITUACIÓN DE ACCIÓN	En este planteamiento los estudiantes acomodarán los cuadrados pequeños en los cuadrados grandes

Tabla 13. Tipo de Situación en la que estarán los alumnos en la Situación 2.

Una vez que los alumnos hayan acomodado los cuadrados, se les realizará las siguientes preguntas en torno al triángulo rectángulo y sus cuadrados correspondientes.

a) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 1?
b) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 2?
c) ¿Cuántos cuadraditos crees que tenga el cuadrado de la hipotenusa?
d) ¿Tiene alguna relación con el área de los cuadrados? ¿A qué crees que se deba?
e) Trata de rellenar el cuadrado de la hipotenusa con los cuadraditos de los catetos. ¿Faltaron cuadraditos? ¿A qué crees que se deba?
f) ¿Esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo?

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN FORMULACIÓN	En este planteamiento los estudiantes acomodarán los cuadrados pequeños en los cuadrados grandes y los alumnos determinarán cuántos cuadrados deberán poner en la base y en la altura de cada cuadrado de fondo, también determinarán cuantos cuadrados pequeños utilizaron para cubrirlo, es pertinente que los alumnos se den cuenta de que se trata del área del cuadrado y además que si junta los cuadraditos de los dos cuadrados de los catetos podrán a rellenar el cuadrado de la hipotenusa.

Tabla 14. Situación de Acción y Formulación en la que se encontraran los alumnos.

Se les pide esto a los alumnos para que ellos puedan visualizar que el número de cuadrados pequeños (unidades cuadradas) que caben a lo largo y ancho del cuadrado representan la medida de cada lado del cuadrado y al sumarlos el número de unidades cuadrados representan el área del cuadrado, de igual manera se les hace la clasificación para que más adelante puedan darse cuenta de que existe una relación de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos con el área del cuadrado construido en la hipotenusa.

Después de que los alumnos hayan dado respuesta a los cuestionamientos se les pedirá que se reúnan con dos de sus compañeros y se les dará la siguiente indicación:

1) Ahora, comparen sus respuestas y respondan lo siguiente: estuvieron todos de acuerdo
   g) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Cuáles si, cuáles no y por qué?
   h) ¿Cuál creen que es la relación? Argumenten su respuesta.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán en el material didáctico para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto.

Tabla 15. Situación de validación en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 1

El realizar estos cuestionamientos a los alumnos son un poco complicados, pues lo que queremos es que ellos comparen los cuadrados construidos en los catetos con el de la hipotenusa, sin embargo, deben ser ellos mismos quienes se percaten que esta relación solo se da en los triángulos rectángulos y no en los demás, pero para esto deben sumar las áreas de los cuadrados y ver si hay alguna relación entre algunos de ellos.

La idea de plantear la siguiente actividad surge del análisis epistemológico, pues son varios los autores y filósofos que realizan distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras y es de suma importancia que los alumnos consideren las distintas formas en las que se puede mostrar, es por eso que se les plantea la siguiente actividad, donde se trata de un triángulo isósceles con un ángulo recto y a pesar de que los cuadrados de los catetos miden lo mismo, se sigue danto la relación lo cual tendrán que demostrar los estudiantes.

2) De manera individual realiza lo que se te indica.

a) Toma una hoja de papel y traza un cuadrado de tamaño mediano (entre 4 y 8 cm de lado), traza sus diagonales y recorta el cuadrado, después recórtalo por una de sus diagonales para formar dos triángulos.

b) Ahora con los dos triángulos forma un triángulo isósceles con un ángulo de 90° y construye un cuadrado para cada uno de sus catetos. Recorta esos cuadrados de la manera más sencilla que puedas.

c) Con esas piezas trata de formar el cuadrado cuyo lado sea la base del triángulo, es decir, la hipotenusa.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los alumnos al leer las indicaciones y construir lo que se les indica estarán en contacto con el medio y de igual manera estarán haciendo uso de sus conocimientos previos al momento de determinar la diagonal y construir lo que se les pide y el alumno tendrá que formular de qué manera formarán el cuadrado cuyo lado se la base del triángulo.

Tabla 16. Situación de Acción y Formulación en las que se encontrarán los alumnos en la Situación 2.

3) Después de haber realizado lo anterior, realiza lo que se te pide y responde las siguientes preguntas, argumentando cada una de ellas.

a) Pega en la parte de atrás las figuras que formaste.

b) ¿De qué tipo de triángulo se trata?

c) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos?

d) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor?

e) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

Esta pregunta se les hace a los alumnos con el objetivo de que los alumnos entiendan que hay una relación únicamente en el triángulo rectángulo, y que esta relación tiene que ver exclusivamente con el área de los cuadrados construidos en sus catetos e hipotenusa. Probablemente los alumnos no puedan enunciar a que se deba esta relación, sin embargo, es importante para nosotros como profesores el saber qué es lo que piensan que está originando esa relación o de donde surge.

También uno de los propósitos de plantear esta actividad a los alumnos es para que ellos puedan percatarse que los cuadrados construidos sobre los catetos pueden representar o cubrir el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	Los alumnos estarán haciendo uso de sus conocimientos previos y formulando nuevo conocimiento, primero tendrán que percatarse que se trata de un triángulo isósceles por sus lados pero es rectángulo por sus ángulos y deberán percatarse que el área del cuadrado mayor es la suma de las áreas de los cuadrados que se formaron en los dos lados de los triángulos.

Tabla 17. Situación de Formulación en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 2.

El propósito de esta actividad es que los alumnos determinen las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, mediante la superposición de superficies. Es importante que los alumnos se percaten que los triángulos pueden cubrir la superficie del cuadrado mayor y sobre todo del tipo de triángulo con el que se está trabajando. También es pertinente que los alumnos se percaten de la medida de los ángulos internos de los triángulos y así puedan percatarse de que se tratan de triángulos rectángulos y que tienen un ángulo recto, también es importante que los alumnos se percaten y concluyan la relación que existe entre los lados de mayor tamaño de cada triángulo con el ángulo opuesto a cada uno.

4) Ahora, reúnete con un compañero para que puedas comparar sus respuestas con las tuyas y respondan lo siguiente:
   a) ¿Ambos lo hicieron de la misma manera? ¿Por qué?
   b) ¿Creen que haya más maneras de formar los cuadrados con las piezas? ¿Cuáles?
   c) Respecto a las preguntas, ¿Contestaron lo mismo? ¿En qué difirieron y por qué?

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los alumnos después de haber resuelto la actividad, deben convencer a los demás de que sus respuestas son correctas, con argumentos y explicaciones válidas que le permitan sustentar su respuesta, es decir, que los alumnos se percaten que los triángulos pueden cubrir la superficie del cuadrado mayor y sobre todo del tipo de triángulo con el que se está trabajando para que puedan concluir que con los cuadrados menores pudieron representar el área del cuadrado mayor.

Tabla 18. Situación de Validación en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 2.

Por último para que les quede más claro a los alumnos y puedan experimentar con material didáctico otra forma de comprobar tal relación se llevará a cabo lo siguiente:

El profesor les entregará a los estudiantes una base, un triángulo rectángulo, un cuadrado y cuatro triángulos de la misma medida y se les dará la siguiente indicación a los alumnos:

5) El profesor te entregará un triángulo rectángulo de fieltro color azul marino, un cuadrado azul cielo y cuatro triángulos de colores. Con este material realiza lo siguiente:
   a. Acomoda el triángulo rectángulo sobre la base blanca, después acomoda el cuadrado azul sobre uno de sus catetos y los triángulos de colores acomódalos de tal manera que formen otro cuadrado sobre el otro cateto del triángulo rectángulo.
   b. Haz un dibujo de cómo te queda
   c. Forma con todos ellos un cuadrado sobre la hipotenusa
   d. Dibuja como te queda
   e. ¿Caben todas las figuras? (cuadrado y triángulos)
   f. ¿Por qué?
   g. ¿Cómo podrías explicar esta relación?

La idea de plantear esta actividad surge del análisis preliminar epistemológico, pues gracias a este análisis nos pudimos percatar de las distintas demostraciones que existen y han existido a lo largo del tiempo, y es por eso que aunque los alumnos no puedan demostrar, es importante que, por lo menos puedan mostrar distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras, lo cual los hará considerar que hay muchas maneras de utilizar este Teorema e incluso de mostrarlo y comprobarlo.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los alumnos tendrán que acomodar el material de tal manera que coincida con la base de fieltro blanca, por lo que estarán en la situación de acción, manipulando el material y de igual manera también se encontrarán en la situación de formulación pues tendrán que deducir por ellos mismos como acomodar las figuras de tal manera que embonen perfectamente con la base. También, deberán hacer uso de sus conocimientos previos para explicar la relación que se está dando en esta mostración.

Tabla 19.Situación de Acción y Formulación en las que se encontrarán los alumnos en la Situación 2.

6) En este apartado es pertinente concluir y decirles a los alumnos que ciertamente existe una relación entre los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa y la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se enuncia así: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa” y a este enunciado se le conoce como el Teorema de Pitágoras. También se les mostrará distintas demostraciones en Geogebra para que puedan tener una mayor visualización de ellas.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor deberá decirles a los alumnos que en la primer situación que realizaron todos los cuadraditos (unidades cuadradas) que acomodaron en cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos representan el área de cada uno y que una manera de obtener el área de éstos sería contando cada cuadradito o bien, contando los cuadrados del largo y el ancho y multiplicarlos para obtener el área, y al conocer el área de los dos cuadrados de los catetos automáticamente pueden conocer el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, o bien, que lo pueden comprobar rellenándolo. Respecto a la siguiente situación se les comentará a los alumnos que el triángulo que se forma es un triángulo isósceles por la medida de sus lados pero rectángulo por la medida de sus ángulos y que la relación que se da es la siguiente: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, o bien que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Tabla 20.Situación de Institucionalización en las que se encontrarán los alumnos en la Situación

4.6.2 MATERIAL DIDÁCTICO

Alumnos

- Un triángulo reforzado de fomi, tres cuadrados de cartulina batería de distintas medidas y colores.
- 196 unidades cuadradas.
- Dos hojas blancas, colores y juego de geometría.
- Una base blanca de fieltro, un triángulo rectángulo azul marino de fieltro, un cuadrado azul y cuatro triángulos de distintos colores de fieltro. (se utiliza este tipo de tela debido a que el fieltro es un poco firme a comparación de otras telas)

Profesor:

- El papel del profesor será, en primera instancia, preparar el material, dar indicaciones, supervisar y finalmente explicará.
- El profesor deberá preparar el material para mostrar en la institucionalización.

4.6.3 PROGRAMACIÓN

Las actividades están previamente planificadas en las cuales se especifica el tipo de situación que se llevará a cabo en cada una.

Se prevé con anticipación, que los alumnos lleven a cabo las situaciones en los siguientes tiempos.

SITUACIÓN II	
SITUACIÓN	TIEMPO
ACCIÓN	30 MIN
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	10 MIN
VALIDACIÓN	10 MIN
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	20 MIN
FORMULACIÓN	10 MIN
VALIDACIÓN	10 MIN
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	10 MIN

INSTITUCIONALIZACIÓN	20 MIN
TOTAL	120 MIN

4.7 VARIABLES DIDÁCTICAS

La actividad está compuesta en tres partes fundamentales, En las tres, las variables didácticas son el triángulo rectángulo, las medidas de sus lados, que en todos los casos fueron enteros y estuvieron determinadas de tal manera que fuera sencillo determinar su relación, sus ángulos, y los cuadrados de sus lados correspondientes.

4.8 ANÁLISIS A PRIORI

SITUACIÓN II

SITUACIÓN 1)	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
ACCIÓN, ACCIÓN Y FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN.	Se espera que los alumnos rellenen los cuadrados base de los catetos con las unidades cuadradas y después con las preguntas que se les realizan se espera que puedan determinar cuántas unidades cuadradas podría tener la hipotenusa para que después al empezar a rellenarlo se percaten que no les sobra ni les faltan unidades cuadradas, lo cual quiere decir que el área de	Es posible que los alumnos presenten dificultades al momento de acomodar los cuadraditos, pues puede ser cansado o tedioso para ellos, sin embargo, es

	los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, y que el área está siendo representada con las unidades cuadradas. Por lo que, la relación que se da es que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.	necesario que lo hagan. Esto se prevé acomodándolos en equipos de 3 personas para que se apoyen y lo realicen entre todos y sea más rápido y menos pesado.

Tabla 21. Análisis a priori de las Situaciones de Acción, Formulación, Validación y Sustitución.

SITUACIÓN 2), 3), 4) y 5)	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
ACCIÓN Y FORMULACIÓN, FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN Y FORMULACIÓN.	En esta actividad se espera que los alumnos construyan correctamente los cuadrados e identifiquen la diagonal y se percaten de que el triángulo que se forma se trata de un triángulo rectángulo por la medida de sus ángulos pero también isósceles por la medida de sus lados y que los cuadrados están construidos sobre sus catetos y la hipotenusa. Se espera que los alumnos puedan acomodar los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa de la manera más sencilla posible. Es importante que los alumnos puedan plantear la relación con sus propias palabras, pero se espera que lo expresen de tal manera que se entienda que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. También en la actividad de las figuras de fieltro se espera que los alumnos puedan acomodar las figuras de tal manera que no se tape ningún pedazo y que no quede fuera ninguna figura.	Es probable que los alumnos no identifiquen o no sepan cómo trazar la diagonal del cuadrado lo cual se puede prever cuestionando a los alumnos sobre si lo desconocen o no, también podría ocurrir por la posición del triángulo que los alumnos no se percaten del ángulo recto y esto se prevé en los cuestionamientos, pues se les pide a los alumnos que determinen la medida de los ángulos del triángulo.

Tabla 22. Análisis a priori de las situaciones en las que se encontrarán los alumnos en la Situación 2.

SITUACIÓN III	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
INSTITUCIONALIZACIÓN	Se espera que con la visualización de ciertas demostraciones en Geogebra sea más sencillo para los alumnos entenderlo, también se espera que los alumnos entiendan que en todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa.	No se espera ningún error o dificultad.

Tabla 23. Análisis a priori de la situación de Institucionalización de la Situación 2.

4.9 Situación 3 "Resolución de diversas situaciones haciendo uso del Teorema de Pitágoras".

4.9.1 Propósito:

El propósito de esta actividad principalmente es que los alumnos se enfrenten a una situación donde se les plantea una problemática y ellos haciendo uso de lo que han aprendido puedan dar respuesta a esta situación, también se espera que los alumnos puedan comprobar tal relación haciendo uso del material didáctico y después los alumnos encuentren una manera de enunciar tal relación, es decir, que encuentren o deduzcan una forma de enunciar y expresar el Teorema de Pitágoras y por último que los estudiantes demuestren que comprenden el Teorema jugando "basta".

La idea de aplicar y desarrollar esta actividad surge del análisis cognitivo, pues Ramírez, G. (2009) et.al. comenta que los estudiantes poseen información aislada de los conceptos como lo son el teorema de Pitágoras y la relación que se da entre los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa, por lo que no saben aplicarlos en la resolución de ejercicios, pues no pueden relacionarlos, es por esto que, anteriormente los alumnos ya estuvieron en contacto con la relación y el Teorema por lo que se espera que esta actividad incorporada con material didáctico pueda ayudarlos a superar esta dificultad.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	El alumno estará en contacto con el medio al leer el problema, pues estará imaginando la situación, tratando de crear una perspectiva o bien considerando que es lo que debe hacer, después el alumno se encontrará en la situación de formulación al responder las preguntas, pues tendrá que determinar las medidas de los lados de la casa y el tamaño del terreno que le regalaron y los alumnos tendrán que argumentar por qué creen que cabe las dos cosechas en un solo terreno.

Tabla 24. Situación de Acción y Formulación en las que se encontrarán los alumnos en la Situación 3.

1) De manera individual lee la siguiente situación y realiza lo que se te indica.

Don Luis tiene dos terrenos alrededor de su casa, uno de 25 m^2 y el otro de 144 m^2, en uno siembra limones y en el otro tomates, sin embargo, tuvo algunos problemas con las escrituras de la casa y tuvo que entregar ambos terrenos al gobierno, como recompensa el gobernador le obsequió el terreno que estaba en el otro lado de su casa y le aseguro que ahí cabrían sus dos cosechas pero Don Luis no cree que sea posible.

Ayúdalo a comprobar si cabrán sus dos cosechas y responde lo siguiente:

a) ¿Cuánto miden los lados de la casa de Don Luis? Realiza un bosquejo

b) ¿De qué tamaño es el terreno que le regalaron a Don Luis?
c) ¿Crees que quepa la cosecha de limones y tomates en el nuevo terreno? Argumenta tu respuesta.

El objetivo de plantear esta situación es que los estudiantes se percaten de las distintas situaciones que pueden resolver haciendo uso del Teorema, también por qué anteriormente han determinado las áreas de los cuadrados pero no han determinado las medidas de los lados si tienen ya el valor del área, es por eso que los alumnos deben hacer uso de sus conocimientos previos para determinar la medida de los lados. Otro de los objetivos es observar la interpretación que tienen los estudiantes y como realizan el bosquejo.

2) Reúnete con tres de tus compañeros y respondan lo siguiente:
   a) ¿Estuvieron de acuerdo en todas las respuestas? ¿En cuáles sí y en cuáles no?
   b) Compruébenlo con el material que les entregará el profesor (bosquejo). Representen la siembra de limones con las chaquiras verdes y la siembra de tomates con las chaquiras rojas.
   c) Demostración colectiva.

El objetivo de que los estudiantes lo comprueben con el material es para que vean que, efectivamente la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos caben en el área del cuadrado de la hipotenusa.

Anteriormente los alumnos estuvieron trabajando con la demostración geométrica del Teorema de Pitágoras, pero creemos necesario que deben expresarlo algebraicamente para que puedan llegar a deducir que se trata del Teorema de Pitágoras y que se trata de la relación que se da entre los catetos y la hipotenusa.

3) El hecho de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede expresar de la siguiente forma, asigna letras y completa la expresion:

_________________ + __________________ = ________________

4) ¿Cómo se le conoce a esta relación?

5) Se realizará una validación colectiva, la cual será guiada por el profesor y se realizarán las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuáles son las medidas de la casa de Don Luis?
   b) ¿Cómo las obtuvieron?
   c) ¿Alguien lo hizo de manera distinta?

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	Después los alumnos tendrán que hacer uso de sus conocimientos previos para que puedan expresar algebraicamente la relación que se da en el Teorema y tendrán que deducir que se trata del Teorema de Pitágoras.

Tabla 25. Situación de Formulación en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 3.

En esta parte el profesor deberá estar atento de las respuestas de los alumnos para poder identificar distintas respuestas y procedimientos para así cuestionar a los estudiantes y los otros estudiantes se percaten y defiendan sus respuestas.

6) Después, es de suma importante concluir y decirles a los alumnos que, como han estado viendo anteriormente hay una relación y que en este problema se puede hacer uso del Teorema de Pitágoras, pues la casa de Don Luis tiene forma de un triángulo rectángulo y los alumnos ya han determinado las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo así que se les comentará de una manera más formal a dicha relación: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”. Y se les comentará que la manera más sencilla de obtener la medida de los lados de la casa es sacar la raíz cuadrada a la medida de los terrenos, después al sumar las dos medidas, que representan a los catetos y así obtendrán la medida del lado de la hipotenusa. También que, una manera de representar con letras a tal relación podría ser $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$**,** y es la forma oficial en la que se conoce el Teorema de Pitágoras, aunque también se les comentará que pueden usar cualquier letra.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN, ACCIÓN Y FORMULACIÓN.	Durante esta situación los alumnos deberán reunirse con otros compañeros y comparar sus respuestas, deberán defenderlas y deducir quien está en lo correcto y quien no y esto podrán comprobarlo con el uso del material didáctico que les entregará el profesor, los alumnos deberán hacer uso del material y considerar lo que deben hacer para poder demostrar que ciertamente las dos cosechas caben en el otro terreno y uno de los equipos pasará al frente a realizar la demostración y la validación de sus respuestas.

Tabla 26. Situación de Validación, Acción y Formulación en las que se encontrarán los alumnos en la Situación 3.

Por último, se plantea la siguiente actividad donde se pretende sacar a los alumnos de contexto, pues además de tratarse de un juego no harán uso del material didáctico en esta ocasión ni habrá preguntas específicas, ellos tendrán que hacer uso de los conocimientos adquiridos para determinar cómo completar la tabla de la manera más rápida posible y así ganar el juego.

La tabla se muestra en blanco por qué se irá respondiendo columna por columna y el profesor les irá dando los valores correspondientes

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor debe retomar las experiencias presentadas en el aula y dar a conocer a los alumnos el concepto matemático con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (es pertinente concluir que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa” y que hay muchas situaciones en la vida diaria en las que pueden hacer uso de este teorema y además, la manera en que se conoce el teorema de forma algebraica es la siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$.

Tabla 27. Situación de Institucionalización en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 3.

Reúnete con un compañero para jugar “Basta”.

1) Cada uno tome su calculadora
2) A la cuenta de 3 empiecen a completar la siguiente tabla
3) El que complete primero, dirá “¡Basta!” y el contrincante dejará de escribir
4) El que tenga más aciertos será el ganador de este juego.

Triángulo	A	B	C	D	E	F

Cateto a	6					
Cateto b	8					
Hipotenusa						
Perímetro						
Área						

Tabla 28. Actividad que tendrán que realizar los alumnos para demostrar su conocimiento.

TIPO DE SITUACIÓN	DESCRIPCIÓN
SITUACIÓN FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN.	Los alumnos estarán haciendo uso de sus conocimientos previos, deberán elevar al cuadrado la medida de los catetos y al sumarlos obtendrán el cuadrado de la hipotenusa, pero los alumnos deberán formular que deben sacarle la raíz al resultado para obtener el valor de la hipotenusa, y que el área se obtiene de multiplicar la base por la altura y dividir entre dos y en cambio para calcular el perímetro únicamente deben sumar los valores de sus lados. Los alumnos deberán demostrar sus conocimientos al momento de tener que calcular el valor del cateto y no de la hipotenusa, después tendrán que validarlo con sus parejas.

Tabla 29. Situación de Formulación y Validación en la que se encontrarán los alumnos en la Situación 3.

4.9.2 Material Didáctico

Alumnos

- Los alumnos tendrán una base de cartulina batería, un triángulo rectángulo de batería, una tachuela, palillos que formarán la representación de los terrenos, chaquiras de color verde y rojo que representarán las cosechas.

Profesor:

- El papel del profesor será, en primera instancia, dar indicaciones, repartir el material supervisar y finalmente explicará.

4.9.3 Programación

Las actividades están previamente, las cuales se especifica el tipo de situación que se llevará a cabo en cada una.

Se prevé con anticipación, que los alumnos lleven a cabo las situaciones en los siguientes tiempos.

ACTIVIDAD III	
SITUACIÓN	TIEMPO
ACCIÓN Y FORMULACIÓN	20
VALIDACIÓN, ACCIÓN Y FORMULACIÓN.	30
FORMULACIÓN	10
INSTITUCIONALIZACIÓN	15
FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN	35
TOTAL	110 MIN

4.10 VARIABLES DIDÁCTICAS

En esta actividad las variables didácticas son el triángulo rectángulo, las medidas de sus catetos y de su hipotenusa, pues al modificar sus valores los alumnos pueden percatarse que la relación sigue ocurriendo.

4.11 ANÁLISIS A PRIORI

SITUACIÓN III

SITUACIÓN	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
1) PROBLEMA	Se espera que los estudiantes puedan realizar un bosquejo de la casa de Don Luis, se percaten de que se trata de un triángulo rectángulo y así se percaten que para poder determinar la medida del lado faltante deben calcular la hipotenusa, se espera que los alumnos en primer instancia saquen la raíz cuadrada de los terrenos para determinar únicamente la medida del lado, también se espera que, sin que realicen algún cálculo ellos mismos puedan deducir que las dos cosechas cabrán en el otro terreno. También se pretende que los alumnos lleguen a expresar el Teorema de Pitágoras de la siguiente manera:	Es probable que los alumnos no realicen el bosquejo de la manera adecuada, o que no se percaten de que la casa es un triángulo rectángulo o que los terrenos son de forma cuadrada, pero esto se prevé al momento de entregarles el material con el bosquejo ya realizado, un que pueden cometer los

	$a^2 + b^2 = c^2$.	estudiantes es que expresen el Teorema sin elevar las letras al cuadrado.

Tabla 30. Análisis a priori de la Situación 3.

SITUACIÓN III	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
INSTITUCIONALIZACIÓN	Se espera que el profesor pueda retomar las experiencias presentadas en el aula y dé a conocer a los alumnos el concepto matemático con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (es pertinente concluir que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa" y que hay muchas situaciones en la vida diaria en las que pueden hacer uso de este teorema y además, la manera en que se conoce el teorema de forma algebraica es la siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$.	No se espera ningún error o dificultad.

Tabla 31. Análisis a priori de la Institucionalización de la Situación3.

SITUACIÓN	RESULTADO ESPERADO	POSIBLES ERRORES O DIFICULTADES
5) BASTA	Se espera que los estudiantes puedan determinar la medida de la hipotenusa, es decir, que eleven el valor de los catetos al cuadrado y después los sumen y a esto le saquen la raíz cuadrada para obtener el valor de la hipotenusa, también se espera que los alumnos deduzcan la manera de obtener el valor de uno de los catetos cuando se les da el valor de la hipotenusa y el otro cateto. Se espera que los alumnos multipliquen base por altura y dividan entre dos para obtener el área y para el perímetro sumen la medida de sus lados.	Es posible que los alumnos crean que para obtener el valor de la medida de uno de los catetos deben realizar el mismo procedimiento que para obtener el valor de la hipotenusa.

Tabla 32. Análisis a priori del juego de basta de la Situación 3.

CAPÍTULO 5: EXPERIMENTACIÓN, ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

5.1 VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS.

Se decidió validar los instrumentos para verificar que las indicaciones estuvieran claras, no hubiera dudas en ellas o bien que las actividades fueran pertinentes en tiempo y forma para los estudiantes de tercero de secundaria, por lo cual se aplicó a tres estudiantes de diferentes niveles educativos para poder identificar distintas perspectivas en torno a su conocimiento y su forma de percibir las indicaciones, la intención de no tener un grupo homogéneo fue para poder tener la mayor visibilidad posible de distintas situaciones o dudas que pudieran presentarse. Durante esta aplicación nos pudimos percatar de distintos errores de redacción en las indicaciones de las situaciones pero también de los tiempos, pues no era suficiente el tiempo previsto al tiempo que realmente se llevó realizarlo.

Entre las cosas más sobresalientes que se encontraron en esta validación, fue que en la situación 1 en el inciso 2, se les pedía a los estudiantes que identificaran los catetos (opuesto y adyacente) y la hipotenusa. Sin embargo, en la indicación no se les pedía que marcaran el ángulo de referencia, si no que se les pedía que marcaran el ángulo recto lo cual podría confundir a los estudiantes pero también podría servir para percatarnos de si los alumnos saben cómo determinar estos catetos, es decir, que ellos mismos marquen el ángulo de referencia.

Respecto a los otros incisos de la situación 1 no se mostró alguna otra dificultad pues los alumnos pudieron determinar las características de los triángulos, los catetos y la hipotenusa de los triángulos 3 y 6, y no tuvieron dificultad para calcular las áreas y determinar las medidas de los triángulos y de los cuadrados. Sin embargo, en el inciso 5 los alumnos respondieron respecto a que los lados de los triángulos y los lados de los cuadrados medían lo mismo siendo que el propósito de cuestionarlos sobre alguna relación era que ellos identificaran que únicamente en uno de los casos la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos resultaban igual al área del cuadrado de la hipotenusa pero esto no sucedió.

En la situación 2 los alumnos tomaron mucho más tiempo del previsto, sobre todo en el inciso 2, pues al ponerse a acomodar unidad cuadrada por unidad cuadrada en los cuadrados de los catetos se llevaron mucho tiempo e incluso mencionaron sentirse algo desesperados por no poder acomodarlos de manera más rápida o eficiente. El objetivo de esta actividad si se cumplió pues el material facilitó que los estudiantes determinarán la relación que se da entre los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa, sin embargo, se deben considerar tiempos al momento de aplicar con los estudiantes.

Respecto a la siguiente actividad de la situación 2 los alumnos estuvieron teniendo algunas dudas sobre las indicaciones, sobre donde tenían que construir los cuadrados, pues la indicación no estaba muy clara y no decía que sobre los catetos del triángulo que habían formado. Sin embargo, al aclarárselas ya no tuvieron más dudas. Es importante plantear las indicaciones lo más claras posibles y sin dar por hecho que los alumnos saben de lo que se trata pues muchas de las veces es contraproducente y se pueden confundir. De ahí en más, no hubo más dudas ni complicaciones pues no se les dificultó dar respuesta a las preguntas ni en determinar cómo acomodar los cuadrados de los catetos sobre el cuadrado de la hipotenusa.

La última actividad de esta situación presentó muchos inconvenientes, pues al acomodar las piezas en la base de fieltro sobre los cuadrados no había ningún problema pero al momento de querer mostrar el Teorema fue donde surgió una complicación, pues al acomodar el cuadrado azul y los otros triángulos de colores en el cuadrado sobre la hipotenusa no daban las medidas, quedaban muchos espacios sin cubrir y esto causaba dudas sobre el Teorema.

A continuación se muestran unas imágenes de lo que trataron de hacer los alumnos para poder mostrar el Teorema de Pitágoras.

Figura 36. Material de la actividad de mostración del Teorema.

Figura 37. Material de la actividad de mostración del Teorema.

En la Figura 36 se puede observar claramente que el alumno está teniendo complicaciones para acomodar todas las piezas dentro del cuadrado de la hipotenusa, pues el procedimiento que utiliza es el correcto para realizarlo, sin embargo, claramente se ve que el cuadrado azul no cabe en el espacio que queda vacío lo cual causa dudas al alumno.

Por otra parte, en la Figura 37 se observa que el estudiante trató de embonar las piezas para poder mostrarlo, pero lo que hizo fue recortarlas para que quedarán perfectamente acomodadas y a simple vista parece que lo logró, pero al momento de llevar esas piezas nuevamente a los cuadrados construidos sobre los catetos las piezas ya no representaban el área de los cuadrados por lo cual tampoco fue exitosa esta mostración, esto ocurrió porqué las medidas de las figuras no eran las adecuadas y por la forma en que él estudiante las recortó.

Figura 38. Mostración del Teorema de Pitágoras realizada por alumno.

Por lo tanto, se decidió no implementar esta actividad en el salón de clases y como remplazo se reunió una serie de demostraciones del Teorema en Geogebra las cuales cubren el objetivo planteado originalmente, los alumnos pudieran visualizar distintas maneras en que los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo cubren completamente el cuadrado construido sobre la hipotenusa, la estructura de la actividad se mantuvo, pero el material cambió, su manipulación se realizó en forma electrónica

En la situación 3, no se presentó ningún inconveniente, pues los alumnos se sentían motivados por la situación algo distinta a las demás y al momento de entregarles el material fue sencillo para ellos comprender que era lo que tenían que realizar, a pesar de que los alumnos no mostraron ninguna duda o dificultad nos pudimos percatar durante este proceso que algo que no habíamos considerado fue que los palos de madera que determinaban los terrenos tenían cierta medida y éstos estaban ocupando cierto espacio en la superficie del terreno pues no consideramos este detalle al momento de cortarlos, al haber cortado los palos de madera con cierto ángulo para que embonaran perfectamente no habría existido esta posible circunstancia. Sin embargo, notamos que al momento de representar las áreas con las chaquiras y hacer el vaciado no afectaba en la demostración.

En resumen, podemos concluir que el validar los instrumentos y los materiales nos permitió percatarnos de distintas situaciones que podrían ocurrir en la aplicación, pues debemos tener más cuidado al plantear las indicaciones para evitar confusiones o algún otro tipo de duda y sobre todo en considerar mayor tiempo para aplicarlas pues los alumnos pueden llevarse aún más tiempo en ellas por distintas circunstancias externas al instrumento.

5.2 ENTORNO SOCIOCULTURAL DE LOS ALUMNOS.

La Experimentación se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Estatal "Pensamiento Liberal", la cual cuenta con 18 aulas y atiende a 536 alumnos en sus dos turnos: matutino y vespertino.

La secundaria está ubicada en el estado de Durango, Dgo. en la Avenida Estaño # 100 de la Cd. Industrial, Fraccionamiento Fidel Velázquez casi en una de las orillas de la Ciudad, y fue fundada por el Profesor Manuel de Jesús Sarellano Pineda en Septiembre de 1985, la escuela se encuentra sobre una avenida muy transitada, por lo que se puede observar no hay muchas carencias pues a sus alrededores hay casas de estatus económico medio, hay algunos locales comerciales que brindan servicio, en su mayoría de comida, lo cual genera que los alumnos salgan constantemente de la escuela a comprar comida que no es saludable para ellos.

Respecto al ambiente, en lo que pude observar son personas que tienen un nivel socio económico bueno en comparación con otras escuelas que he visitado, pero como en todo, también hay personas de escasos recursos. A la mayoría de los alumnos los llevan sus papás y algunos llegan en el transporte público.

La escuela cuenta con muchos espacios abiertos y sobre todo jardines, cuenta con 18 aulas para clase, 3 canchas deportivas, 1 patio cívico, 3 salas de cómputo (ya no están equipadas), baños, biblioteca, talleres, cuenta con servicios como drenaje, energía eléctrica, agua potable, cisterna, servicio de internet y teléfono.

Está rodeada por una barda perimetral la cual brinda seguridad a la escuela, a los alumnos se les permite entrar por la puerta de atrás y la principal, pero a las 7:30 am se cierran ambas puertas y no pueden pasar.

Respecto al interior de la escuela los salones son muy amplios, todas las aulas cuentan con bancas suficientes, escritorio, silla para el maestro, bote de basura, uno o dos pintarrones (en algunas aulas todavía hay pizarrón).

El salón de matemáticas es un aula espaciosa, con buena iluminación, está pintado de blanco con detalles en azul cielo, tiene bastantes mesa-bancos incluso en la mayoría de los grupos siempre se quedan desocupados algunos, hay 2 escritorios en los que se encuentran materiales como libretas, libros, dados, lápices, metros, escuadras, transportadores, compás, entre otros; además de material de limpieza como escoba, recogedor y bote de basura. Al lado de la puerta se ubican los gafetes y permisos, es importante mencionar que los alumnos van cambiando de salón dependiendo de la materia que les toque, pues el aula es exclusiva de matemáticas.

5.3 Características del Grupo

La experimentación se llevó a cabo con el grupo de 3° C, el cual consta de 24 alumnos, 13 mujeres y 11 hombres, respecto a las características del grupo, tiene alumnos sobresalientes pero también alumnos carentes de conocimientos, una de las características generales del grupo es que siempre están atentos a las indicaciones que dan y realizan el trabajo, pues están interesados en la materia. Generalmente es un grupo trabajador, disciplinado y cooperativo, según una prueba aplicada por el personal de Trabajo Social de la escuela el grupo en su mayoría, un 60% aproximadamente son kinestésicos y visuales, lo cual favoreció nuestra aplicación. Dentro de las dificultades del grupo se encuentra que tienen problemas en la resolución de operaciones básicas.

5.4 Dosificación de las sesiones

La experimentación de la secuencia didáctica con las 3 situaciones que la comprenden, se llevó a cabo en un total de 5 sesiones las cuales se dividieron de la siguiente manera y con los siguientes tiempos:

⇒ **Sesión 1.**

Fecha: 14 de marzo del 2018 **Horario:** 07:30 a. m. – 09:10 a. m. **Duración:** 90 min

Grado: 3° secundaria **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Propósito de la actividad: Que los alumnos identifiquen las características de los distintos triángulos, identifiquen los catetos e hipotenusa en el triángulo rectángulo y se percaten de una posible relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Materiales didácticos: Distintos tipos de triángulos construidos en fomi, cuadrados de distinta medida construidos en fomi.

⇒ **Sesión 2.**

Fecha: 15 de marzo del 2018 **Horario:** 10:30 a. m. – 11:15 a. m. **Duración:** 45 min

Grado: 3° secundaria **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Propósito de la actividad: Que los alumnos determinen las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, mediante la superposición de superficies y el cálculo de áreas.

Materiales didácticos: Unidades cuadradas en cartoncillo, un triángulo rectángulo reforzado con doble fomi, tres cuadrados construidos en cartulina batería de distinta medida.

⇒ **Sesión 3.**

Fecha: 16 de marzo del 2018 **Horario:** 10:30 a. m. – 11:15 a. m. **Duración:** 45 min

Grado: 3° secundaria **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Propósito de la actividad: Que los alumnos visualicen distintas demostraciones o mostraciones (visualizaciones) del Teorema de Pitágoras, las cuales podrán ser mostradas por ellos mismos.

Materiales didácticos: hojas de máquina, juego de geometría, videos interactivos.

⇒ **Sesión 4.**

Fecha: 21 de marzo del 2018 **Horario:** 07:30 a. m. – 09:10 a. m. **Duración:** 90 min

Grado: 3° secundaria **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Explicitación y uso del Teorema de Pitágoras.

Propósito de la actividad: Que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Materiales didácticos: bosquejo de la casa construido con palillos, chaquiras verdes y rojas, triángulo rectángulo de cartulina batería y una tachuela.

⇒ **Sesión 5.**

Fecha: 22 de marzo del 2018 **Horario:** 10:30 a. m. – 11:15 a. m. **Duración:** 45 min

Grado: 3° secundaria **Eje temático:** Forma, Espacio y Medida

Contenido: Explicitación y uso del Teorema de Pitágoras.

Propósito de la actividad: Que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Materiales didácticos: En esta sesión no se hizo uso de ningún material.

Para la recogida de datos, se utilizaron grabaciones de vídeo, para poder observar el contexto del aula mientras los alumnos realizaban las situaciones antes planeadas y se encontraban en las distintas situaciones ya sea, acción, formulación, validación e institucionalización, y para así observar también la interacción de los alumnos con el medio también se realizaron grabaciones de audio mientras los alumnos se encontraban en la validación para así poder recolectar después sus argumentos y analizar si eran válidos o no y si se llevó alguna discusión sobre los argumentos entre los estudiantes, estas grabaciones se llevaron a cabo mientras se pasaba por los equipos para verificar que estuvieran haciendo lo indicado.

También se tomaron fotografías para poder evidenciar distintos aspectos que se requieran, así también como el trabajo en equipos, la interacción con el medio, la formulación de los alumnos o bien, la validación. Además, los instrumentos con las respuestas de los alumnos, lo cual nos ayudará a ofrecer información sobre los procedimientos, respuestas y resultados.

5.5 EXPERIMENTACIÓN

5.6 SITUACIÓN 1

Los propósitos de esta situación:

- Los alumnos identificarán y distinguirán las características de los distintos tipos de triángulos y las que se presentan únicamente en ellos.
- Identificarán los catetos y la hipotenusa en los triángulos rectángulos.
- Se percatarán de que la medida de los lados del triángulo determina la medida de los lados de los cuadrados.
- Se percatarán de que se daba o existía una relación entre las áreas de los cuadrados pero sin definir únicamente que esta relación solo se da en triángulos rectángulos.

Antes de iniciar la sesión la profesora-investigadora se presentó con el grupo y se planteó el contrato didáctico, el cual se realizó de manera verbal, en 3 sentidos: indicaciones generales para el llenado de los instrumentos, indicaciones de formato de trabajo, y comportamiento general dentro del aula. Se indicó además que durante las sesiones serían grabados y se estarían tomando fotografías y que no debían sentirse intimidados pues el material sería utilizado únicamente para comprobar las distintas situaciones que se dan durante la clase.

Se les repartió la primer hoja de actividades, la cual constaba del inciso 1) y 2) de la situación 1 y se les pidió que anotaran su nombre, el grupo y la fecha, enseguida se les repartieron 6 triángulos de fomi (los que se muestran en la Figura 39) y para apresurar el tiempo se tomó la decisión de pedirle a seis alumnos que pasaran al frente para que se les entregara uno a cada uno y los repartieran al resto de sus compañeros.

Figura 39. Triángulos de fomi que se les entregaron a los alumnos.

Al momento de que todos los estudiantes tuvieron la hoja y los 6 triángulos, se eligió una alumna al azar y se le pidió que leyera la indicación, la alumna la leyó y la profesora-investigadora repitió la indicación, para asegurarse de que todos la escucharan y preguntar si la indicación era clara para el grupo.

5.6.1 SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN

Los alumnos iniciaron a manipular el material, algunos sostenían un triángulo en las manos y lo giraban tratando de encontrar alguna característica, otros los acomodaron sobre el pupitre y los observaban, otros incluso sacaron un compás para determinar la medida de los ángulos.

Figura 40. Estudiante observando el material.

Durante estas situaciones la profesora-investigadora observó a los estudiantes, pasó por sus pupitres viendo que era lo que hacían y como lo hacían, durante esta observación pudo notar de que algunos estudiantes no se percataban de cuáles eran las características de los triángulos, incluso algunos alumnos decidieron utilizar la regla para determinar si dos de sus lados medían los mismo o tenían distintas medidas pues no lo podían determinar a simple vista.

Figura 41. Alumnos analizando los triángulos para determinar sus características.

En estas situaciones uno de los principales objetivos era que los alumnos pudieran determinar las características de los distintos tipos de Triángulos, pero en especial, de los triángulos rectángulos.

En esta fase, la manipulación del material sirvió a los alumnos para poderse percatar de las características de los triángulos, pues les era más sencillo el observarlos y poderlos identificar con las propiedades.

Un punto importante del que la profesora-investigadora se percató fue que los estudiantes no identificaban el ángulo recto en los triángulos rectángulos. Una de las alumnas en los triángulos 3 y 6 identificó que una de sus características era que tenían catetos e hipotenusa lo cual es correcto pero después indicó que este mismo tenía tres ángulos agudos, lo cual no es correcto y en el 6 indicó que se trataba de un triángulo con un ángulo obtuso, lo cual me hizo considerar que la alumna no conocía las características. Otra de las cosas que se pudo observar fue que a pesar de que en las indicaciones se les comentaba a los alumnos que las figuras podían tener más de una característica ellos optaron por poner solo una para cada triángulo.

Figura 42. Algunos alumnos durante la situación de formulación.

Durante estas situaciones los alumnos acataron las indicaciones y las siguieron como se les indicó, no hubo necesidad de repetirlas o llamarles la atención, pues realizaron la actividad de manera individual sin tener que preguntar a sus compañeros sus dudas.

5.6.2 Situación de Formulación

Los alumnos pasaron a encontrarse en la situación de formulación nuevamente al enfrentarse a identificar el cateto opuesto, cateto adyacente, la hipotenusa y el ángulo recto. Durante el transcurso de esta situación se pudo observar que los alumnos movían los triángulos, los analizaban y trataban de determinar lo que se les pedía.

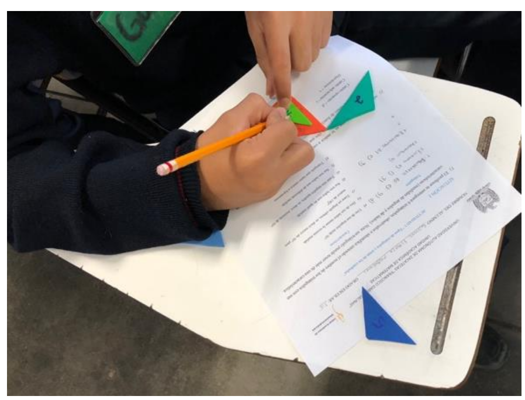


Figura 43. Alumno comparando los triángulos para determinar el ángulo recto.

Durante esta situación el papel de la profesora consistió en pasar por sus pupitres tratando de

Figura 44. Alumno indicando uno de los catetos.

observar y analizar qué era lo que hacían los estudiantes en ese momento, se decidió no intervenir para poder observar que era lo que hacían los estudiantes, y al parecer ellos creyeron que debían tomar el ángulo recto como el ángulo de referencia lo cual no era correcto pero se les aclararía hasta la institucionalización.

5.6.3 SITUACIÓN DE VALIDACIÓN.

Se les pidió que se reunieran en equipos de tres personas para que respondieran las preguntas, las cuales los harían cuestionar sus respuestas y procedimientos y así deducir el correcto entre ellos mismos y poder defender sus respuestas en caso de tener que hacerlo. Es importante mencionar que no se tomó ninguna consideración al formar los equipos, pues se les permitió a los estudiantes que eligieran con quien querían reunirse, esto para poder observar su comportamiento y también para que se sintieran más cómodos y en confianza para expresar sus ideas y respuestas, lo cual también sirvió para identificar a los alumnos más sobresalientes y a los que les costaba un poco más demostrar o argumentar sus respuestas.

Durante la observación, la profesora-investigadora se percató que los estudiantes no le estaban dando la importancia que debían darle a este apartado pues no estaban revisando sus respuestas y únicamente respondían las hojas de una manera muy superficial, sin indagar un poco más en ellas, por lo que se les comentó que lo que debían hacer era revisar sus respuestas y explicar detalladamente porqué había elegido esa opción o porqué habían determinado esa respuesta.

Después de haber hecho la intervención se pudo percatar que los estudiantes pusieron más esfuerzo en este inciso, pues empezaron a comentar respuesta por respuesta de los incisos anteriores y claramente se veía que argumentaban en todas ellas. Como se puede observar en la Figura 45, los alumnos están comparando sus respuestas, lo cual era justo lo que se pretendía con el inciso 3, pues los estudiantes debían defender sus respuestas para poder encontrarse en la situación de validación.

Figura 45. Diferentes equipos durante la validación.

La validación llevó más tiempo de lo planeado, pues la profesora - investigadora al ver que los alumnos estaban argumentando y revisando sus respuestas de una forma exhaustiva no quiso intervenir ni detener la actividad, para que ellos siguieran explicando sus conceptos y procedimientos. Hasta este momento se pudo percatar simplemente porque lo que escuchaba o por lo que observaba que los alumnos hacían uso del lenguaje matemático para expresarse, pues llamaban a los triángulos por su nombre según su clasificación y mencionaban sus características para convencer a sus compañeros, esto en el primer inciso, sin embargo, para el segundo inciso la profesora investigadora se pudo percatar que ninguno de los equipos estaba considerando un ángulo de referencia para poder determinar si era el cateto opuesto o el adyacente, simplemente concordaban en si se trataba de la hipotenusa o alguno de los catetos y había alumnos que trataban de enunciar una de las características de la hipotenusa, por ejemplo:

“Se trata del lado más largo del triángulo rectángulo” , pero sin argumentar en las propiedades de los catetos. Como se puede observar en la Figura 46, los alumnos llevaron a cabo esta situación en equipos de tres personas donde revisaban y defendían sus respuestas para después responder los cuestionamientos del inciso 3.

Figura 46. Los alumnos reunidos en equipos de tres personas.

5.6.4 Situación de Acción y Formulación.

Una vez que los estudiantes terminaron de dar respuesta al inciso 3, se les pidió que separan tres de los triángulos que se les habían entregado, y específicamente se les pidió que separaran el 1, 4 y 3, los cuales eran un triángulo equilátero, un isósceles y un rectángulo, esto para evitar perder tiempo en lo que ellos volvían a identificar los triángulos y para que todos eligieran los mismos. Se les pidió que midieran los lados de los triángulos y mientras ellos lo hacían se les entregaron los cuadrados, los cuales debían acomodar en cada lado de los triángulos. Durante este momento, en que los alumnos medían y acomodaban los cuadrados en los lados de los triángulos se encontraban en la situación de acción, ya que se encontraban en contacto con el medio.

Figura 47. Alumno midiendo uno de los triángulos durante la situación de acción.

Una vez que los alumnos acomodaron los cuadrados en torno a los lados del triángulo rectángulo como se muestra en la Figura 48, se les pidió que nombraran a cada lado del triángulo (a, b y c). Pero durante esto la profesora- investigadora se pudo percatar que la mayoría de los estudiantes estaban teniendo algo de conflicto con eso pues, algunos estaban nombrando *a*, *b* y *c* a los lados de los cuadrados y no sabían que otra letra ponerle al cuarto lado, y otros simplemente lo que dedujeron fue que en lugar de nombrar así a los lados debían nombrar así a los ángulos, lo cual no era correcto en ninguno de los dos casos, por lo cual se decidió intervenir y dar lectura nuevamente a la indicación recalcando que se refería a los lados y para dejar un poco más claro se les comentó que no se trataba de nombrar los ángulos sino los lados de los triángulos.

Figura 48. Alumno que midió y acomodó los cuadrados en torno a los lados del triángulo.

En algunos de los casos los alumnos tuvieron que volver a nombrar los lados como se muestra en la Figura 49, en este caso el alumno había nombrado primero los ángulos, luego los borró y puso la letra que indicaba el nombre del lado junto con la medida de cada lado.

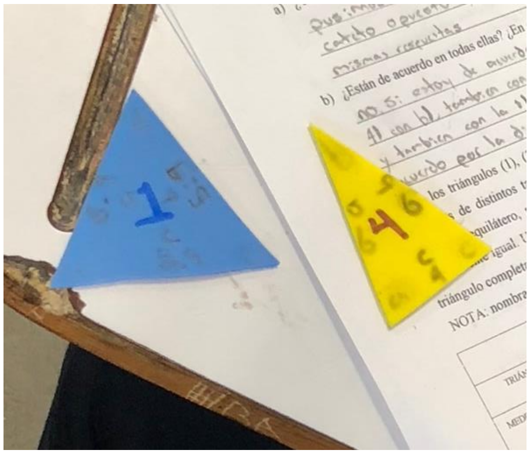


Figura 49. Material del inciso cuatro, triángulo a, b, c.

Una vez que la profesora- investigadora se percató que los estudiantes habían nombrado correctamente los triángulos les pidió que dieran respuesta a lo que se les solicitaba en la tabla, la cual constaba de medir los lados de los triángulos.

Algunos de los alumnos empezaron a medir todos los lados de los cuadrados siendo que éstos los podían determinar con la medida del lado del triángulo, y algunos alumnos si lo hicieron de esa manera pues ya no medían, simplemente ponían la misma medida, lo cual era correcto, como se puede observar en la Figura 50, la alumna ya no está midiendo solo está escribiendo las medidas de los cuadrados en consideración a las medidas de los triángulos.

Figura 50. Alumna completando la tabla de la actividad.

Otra situación que su pudo observar fue que ninguno de los estudiantes tuvo alguna duda o conflicto al momento de querer calcular el área del cuadrado, el cual era uno de los objetivos de esta actividad, para poder percatarnos si los estudiantes sabían determinar el área del cuadrado para no tener complicaciones más adelante.

Una vez que los estudiantes terminaron de completar la tabla se les pidió que pasaran al siguiente inciso el cual se trataba de que los estudiantes observaran y buscaran alguna posible relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y al ir pasando por los pupitres se pudo percatar que lo que hacían los estudiantes era revisar su tabla, comparar respuestas y tratar de encontrar alguna relación a simple vista, se puede decir que muchos alumnos creyeron que la relación se trataba de que los lados de los triángulos y de los cuadrados medían lo mismo, sin embargo, en el siguiente inciso, el seis, se les pedía que se fijaran únicamente en las columnas sombreadas y fue ahí donde los estudiantes pusieron más atención en las áreas de los cuadrados sobre los catetos de los triángulos.

Hasta aquí se llevó a cabo durante la sesión 1, debido a que algunas situaciones tomaron más tiempo de lo previsto, sin embargo, esto no afectó en el desarrollo de la clase, pues en la siguiente sesión se pudo terminar las situaciones que faltaban.

5.6.5 SITUACIÓN DE VALIDACIÓN.

Se inició la segunda sesión pidiéndoles a los alumnos que se reunieran en equipos y se les entregó la hoja correspondiente al inciso 7, nuevamente se les dio libertad de reunirse a su gusto, pero esta vez se decidió hacer modificaciones en algunos equipos para que estuvieran más equilibrados, tanto en conocimiento como en comportamiento, pues en la situación anterior de validación se pudo percatar un poco más de las características de los alumnos y del grupo y esto nos sirvió para modificar los equipos y que los alumnos realmente tuvieran una buena validación.

Una vez que los alumnos se reunieron, se leyó la instrucción correspondiente y se les pidió que dieran respuesta a las preguntas que venían en las hojas, las cuales consistían en hacerlos reflexionar y comparar sus respuestas con las de sus compañeros.

Figura 51. Alumnos comparando y argumentando sus respuestas durante la validación.

Mientras se observaba a los equipos discutir se pudo percatar de que los estudiantes realmente estaban validando sus respuestas, pues revisaban inciso por inciso y si algún integrante del equipo tenía una respuesta distinta lo cuestionaban sobre él porque había puesto esa respuesta y el alumno si no tenía buenos argumentos los demás lo convencían de porque no estaba en lo correcto. La mayoría de los equipos realizaron la actividad de manera adecuada y sin necesidad que se les volviera a dar la indicación, pero hubo otros equipos a los que hubo que volver a indicarles lo que debían hacer pues no le tomaban la importancia necesaria.

5.6.6 SITUACIÓN DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN.

Una vez que los estudiantes terminaron de validar los incisos anteriores se les pidió que permanecieran reunidos en equipos, pues darían respuesta al siguiente inciso pero lo harían de manera individual y al terminar de responderlo ahora sí lo comentarían con sus compañeros, se decidió hacerlo de esta manera para no perder tiempo en que los alumnos volvieran a sus lugares con todo y sus pupitres, respondieran la pregunta y después tuvieran que volver a reunirse. Considero que a pesar de estar reunidos en equipos los otros integrantes del equipo no influyeron en la respuesta del alumno, pues acataron la indicación y lo hicieron de manera individual.

El cuestionamiento consistía en que los alumnos debían elegir un triángulo donde consideraban existía una relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa y después comprobarla, fue aquí donde los alumnos se encontraron en la situación de formulación, pues a simple vista pudieron observar o deducir la relación pero debían hacer uso de sus conocimientos para poder comprobar tal relación, mientras observaba los procesos de los alumnos se pudo percatar de que la mayoría de los alumnos si encontraron una relación entre las áreas construidas sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y la comprobaban únicamente haciendo cálculos matemáticos.

Una vez que dieron respuesta a esos cuestionamientos se les pidió que compararan con sus compañeros y verificaran si ambos habían encontrado la misma relación y si la habían comprobado de la misma manera, fue aquí donde los alumnos se encontraron en la situación de validación, pues cada uno explicó y argumentó lo que encontró y como lo comprobó.

5.6.7 SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN.

Una vez que los estudiantes terminaron de validar sus respuestas se les pidió que regresaran a sus lugares y que prestaran total atención, pues se llevaría a cabo la revisión y comprobación de lo que habían hecho anteriormente, se les pidió que tuvieran a la mano las hojas de los incisos anteriores para que pudieran constatar lo que se les diría con lo que respondieron y de ser necesario anotaran si creía que debían modificar alguna respuesta.

Fue aquí donde se inició la institucionalización, pues la profesora- investigadora pasó al frente y trazó en el pintarrón dos triángulos rectángulos, el primero para mostrar las características que posee y el segundo para indicar los catetos e hipotenusa. En el primer inciso, el cual se comentó anteriormente se les cuestionaba a los alumnos sobre distintas características de distintos triángulos, sin embargo, el principal objetivo era que detectaran las del triángulo rectángulo y no lo confundieran con otro tipo de triángulo así que en este apartado se les comentó y se les mostró a los estudiantes con el material y un dibujo en el pintarrón que el triángulo rectángulo es el único que tiene un ángulo de 90° y es el único que tiene catetos e hipotenusa y que sus tres lados son de distinta medida, se hizo una comparación con el triángulo equilátero y el triángulo obtusángulo para que los alumnos pudieran observar las diferencias entre uno y otro.

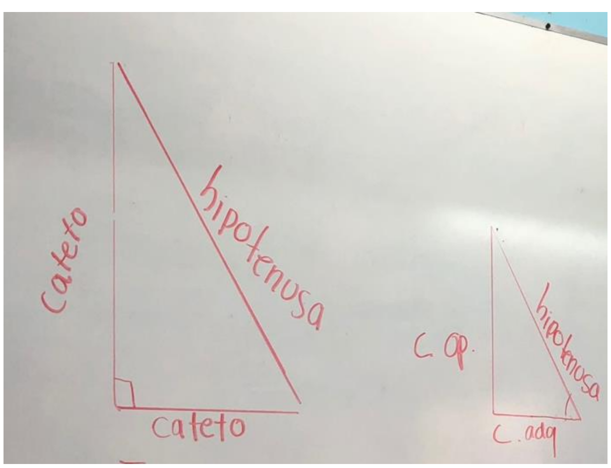


Figura 52. Material de apoyo durante la institucionalización.

Después se les comentó a los alumnos que los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y se les mostró como identificarlos en el triángulo, como se muestra en la Figura 52, se indicaron los catetos y la hipotenusa, y en otro triángulo se les mostró como identificar el cateto opuesto y el cateto adyacente. Fue aquí también donde se les comentó a los estudiantes que siempre que se quieran indicar se debe hacer en torno a un ángulo de referencia y se les mostraron varios ejemplos. Se les preguntó a los estudiantes que si hasta este punto alguien tenía alguna duda, pero ningún alumno externo tener alguna duda, por lo cual se decidió continuar con el siguiente inciso, donde uno de los principales objetivos era que los estudiantes se percataran de que la medida del lado del triángulo determinaba la medida del lado del cuadrado, lo cual se les comentó mostrándoselos con el material, de igual manera se les dijo que para obtener el área de un cuadrado hay que multiplicar lado por lado y se hicieron unas anotaciones rápidas en el pintarrón para que fuera claro para los estudiantes. Como se muestra en la figura 53, en el primer cuadrado se les comentó que medía 6 unidades en cada lado y para poder determinar su área se debía multiplicar 6 x 6, es decir, lado x lado para poder determinarla y que el resultado siempre se daba en unidades cuadradas, en el siguiente ejemplo que se les dio, se les comentó que el cuadrado tenía un área de $25u^2$, y para poder determinar la medida de cada uno de sus lados solo debían sacarle la raíz cuadrada.

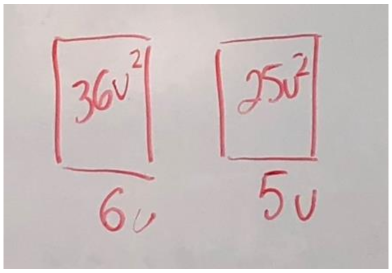


Figura 53. . Anotaciones durante la institucionalización para determinar el área o la medida de uno de los lados.

En seguida, se les comentó a los alumnos que la única relación que había en el ejercicio era que en el triángulo rectángulo el área del cuadrado *A* más el área del cuadrado *B* era igual al cuadrado *C*, lo cual debían haber expresado de la siguiente manera Área **A** + Área **B** = **C**. Para que esto fuera más claro para los alumnos se escribió en el pintarrón los valores de las áreas de los cuadrados del triángulo rectángulo, donde el lado A tenía un área de 16 cm^2 y el lado B tenía un área de 9 cm^2 y al sumar estas dos áreas daba como resultado el área del lado C, cabe destacar que en este apartado se retomaron respuestas proporcionadas por parte de los alumnos las cuales concordaban con la relación.

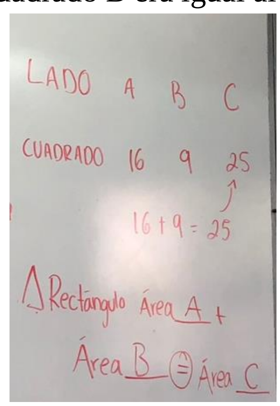


Figura 54. Anotaciones en el pintarrón en la situación de institucionalización.

5.7 SITUACIÓN 2

El objetivo de esta situación era que los alumnos se pudieran percatar que el triángulo rectángulo es el único triángulo en el que se da una relación entre los cuadrados construidos sobre los catetos y el cuadrado de la hipotenusa, y que a tal relación se le conoce como el Teorema de Pitágoras y también fue que los estudiantes observaran que hay distintas demostraciones del Teorema para que pudieran experimentar por ellos mismos y observar algunas de todas las maneras posibles en las que se comprueba tal relación.

5.7.1 SITUACIÓN DE ACCIÓN.

Para iniciar se les pidió a los alumnos que se reunieran en equipos como anteriormente se había estado trabajando y se decidió hacer unas modificaciones en ellos para poder lograr un mejor desempeño por parte de los estudiantes, se les entregó la hoja con las indicaciones pertinentes para que ellos mismo pudieran realizarlo sin que se les estuviera guiando paso por paso, y aunque la guía paso a paso no la hubiera dado la profesora- investigadora, venían claramente las instrucciones por escrito, enseguida se les entregó el material correspondiente a cada uno, el cual consistía en un triángulo rectángulo reforzado de doble fomi, tres cuadrados de cartulina batería de distintos colores y 169 unidades cuadradas (cuadraditos). Se le pidió a una alumna que leyera la indicación, la cual consistía en que acomodaran los cuadrados en cada lado del triángulo según correspondiera y después de haberlo realizado se les pedía que rellenaran los cuadrados más chicos únicamente. Los alumnos comenzaron a manipular el material y a realizar lo que se les indicó, en este momento se encontraban en la situación de acción, pues únicamente estaban en contacto con el medio, iniciaron a rellenar los cuadrados con las unidades cuadradas como se muestra en la Figura 55, y al momento de estarlo realizando algunos alumnos mostraron poca empatía por la actividad, pues argumentaban que les estresaba acomodar cuadradito por cuadradito, también es

Figura 55. Alumnos manipulando el material en la situación de acción.

importante mencionar que esta situación tomó mucho más tiempo del que se había contemplado en un inicio, la manipulación de este material les costó trabajo, pues los alumnos se esforzaban por acomodar con mucha precisión cada uno de ellos, siendo que se les mencionó que no perdieran tiempo en esos detalles. No se logró la devolución, resolvieron la situación porque tenían que hacerlo, no porque les interesara realizarlo.

En la Figura 56 se muestran los cuadrados acomodados sobre los catetos del triángulo rectángulo cubiertos de las unidades cuadradas del primer equipo en terminar la situación.

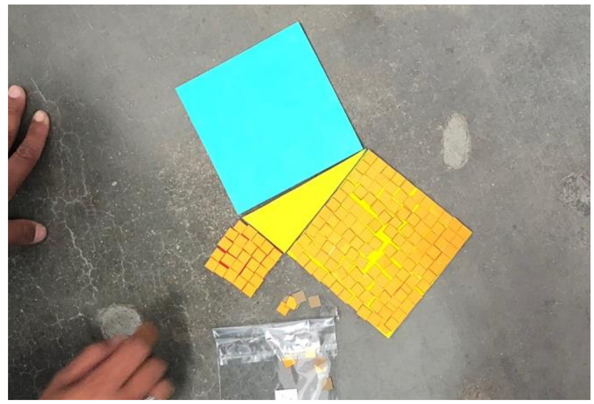


Figura 56. Cuadrados de los catetos cubiertos de las unidades cuadradas.

5.7.2 Situación de Formulación.

Se les pidió que determinaran cuántas unidades cuadradas utilizaron para cubrirlos, pues era importante que se percataran que se trataba del área del cuadrado, una vez que los alumnos identificaron una manera de determinar el número de unidades cuadradas sin tener que contar una por una las unidades cuadradas se encontraron en la situación de formulación, pues haciendo uso de sus conocimientos previos estaban formulando conocimiento nuevo para después poder deducir cuántas unidades cuadradas cabrían en el cuadrado azul de la Figura 45.

Mientras los estudiantes terminaban de dar respuesta a las preguntas formuladas se decidió pasar por los lugares para poder observar lo que contestaban para percatarse de si estaban encontrando alguna relación.

5.7.3 SITUACIÓN DE VALIDACIÓN.

Esta actividad se llevó a cabo en plenaria, se eligió a unos de los equipos para poder guiar una buena discusión de validación y se le pidió que pasaran al frente, el resto del grupo permaneció en sus lugares y atentos a las indicaciones, la dinámica que se siguió fue que yo leía los planteamientos o las preguntas, el equipo que estaba al frente respondía y explicaba por qué había decidido dar esa respuesta y después se les preguntaba a los demás estudiantes si alguien tenía alguna respuesta distinta o si alguien lo había deducido de otra manera.

Se considera que esta manera en que se llevó a cabo la validación fue muy valiosa, ya que los estudiantes pudieron escuchar distintas respuestas, compartir sus procesos con todo el grupo y validar si lo que hicieron fue correcto o no, durante este proceso hubo respuestas de todo tipo, sin embargo, todos dedujeron que al sumar las áreas de los cuadrados de los catetos podrían obtener el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Figura 57. Estudiante explicando su proceso para determinar el área del cuadrado azul.

Como se puede observar en la Figura 57, uno de los estudiantes explica al equipo que se encuentra al frente como fue que determinó el número de unidades cuadradas que tenía el cuadrado azul, y explicó que lo pudo determinar porque se percató que el cuadrado azul tenía una unidad más que el amarillo en cada lado, y también se puede observar como algunos de sus compañeros se encuentran atentos a lo que explica. También uno de los aportes muy valiosos que surgió por parte de uno de los estudiantes fue que se percató que los cuadrados construidos sobre los catetos representan también el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y argumentó que si hubiera juntado todas las unidades cuadradas de los dos cuadrados hubiera podido rellenar el cuadrado azul, que era justo lo que se quería hacer pero no se pudo realizar por cuestión de tiempo.

5.7.4 Situación de Acción y Formulación.

Se les entregó a los alumnos una hoja donde venían las instrucciones correspondientes para realizar otra actividad, las cuales consistían en realizar una serie de construcciones paso a paso para que ellos pudieran más adelante mostrar el Teorema.

Las instrucciones se leyeron de manera grupal y una por una se iba preguntando si había alguna duda en la indicación, pues una vez que iniciaran deberían realizarlo de manera individual y haciendo uso únicamente de su juego de geometría y de sus conocimientos previos. Durante este momento no surgió ninguna duda por parte de los estudiantes, pues nadie lo expreso y pareció quedar de forma clara.

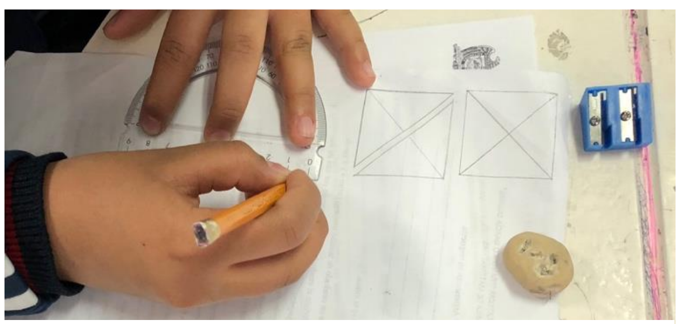


Figura 58. Alumno realizando los trazos correspondientes de la actividad.

Se les dio el espacio y el tiempo para que ellos trabajaran y determinaran la manera en que debían realizarlo y como se muestra en la Figura 58 los estudiantes iniciaron a realizar paso por paso. Sin embargo, hubo muchos casos donde los estudiantes no siguieron bien las indicaciones o se confundieron pues muy pocos alumnos fueron los que lo realizaron de manera correcta, se decidió no intervenir para poder observar que era lo que realizaban los estudiantes, hubo trabajos realizados correctamente y otros que se confundieron al momento de formar el triángulo isósceles con el ángulo de 90° con las dos partes del cuadrado cortado por una de sus diagonales.

Una vez que los estudiantes terminaron la construcción, la cual generó que se encontraran en la situación de acción y formulación, pues estaban en contacto con el medio al ir leyendo las instrucciones y construir por ellos mismos el material y al mismos tiempo formulando pues debían hacer uso de sus conocimientos previos para determinar las diagonales, los ángulos, la forma de construirlo, acomodarlo, etc. Se les pidió que respondieran unas preguntas las cuales tenían como objetivo que los estudiantes entendieran que los cuadrados construidos sobre los catetos pueden representar o cubrir el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

5.7.5 Situación de Validación.

La actividad se llevó a cabo en plenaria para que una de las alumnas explicara paso a paso lo que había realizado, cómo lo realizó y por qué lo determinó de esta manera, esto debido a que no todos los estudiantes realizaron de manera correcta la actividad, pues no siguieron bien las instrucciones que se les brindaron.

Figura 59. Alumna durante la validación explicando sus procesos.

Como se puede observar en la Figura 59, una de las alumnas pasó al frente e inició a explicarles a sus compañeros paso a paso lo que había realizado. Uno de los puntos muy importantes que la alumna comentó fue que "*el haber acomodado los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa le había servido mucho para comprobar que efectivamente el área de los cuadrados de los catetos representa el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa*." Otro punto importante que argumentó fue que a pesar de que el triángulo tenía dos lados de la misma medida seguía siendo un triángulo rectángulo porque al haber unido los dos triángulos se formaban un ángulo recto.

5.7.6 SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN.

Esta situación se inició al momento que se hizo la visualización de los videos demostrativos del Teorema de Pitágoras, se inició por mostrar la comprobación de la primera actividad de esta situación, la de las unidades cuadradas, pues durante esta situación los alumnos ya no tuvieron oportunidad de vaciar las unidades de los cuadrados sobre los catetos en el cuadrado de la hipotenusa, entonces, se buscó un material visual donde los alumnos pudieran visualizar tal comprobación de manera clara y rápida.

La simulación mostraba los cuadrados construidos en los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y los cuadrados de los catetos tenían las unidades cuadradas marcadas en ellos para que los alumnos pudieran visualizarlo, después haciendo uso de un deslizador las unidades cuadradas pasaban a rellenar el cuadrado de la hipotenusa y en ese momento se les comentó a los alumnos que si uno de los cuadrados de los catetos tenía 9 unidades cuadradas y el otro tenía 16 unidades cuadradas, al sumarlos 9 + 16 = 25, y 25 son las unidades cuadradas del cuadrado construido sobre la hipotenusa y con los deslizadores tal como se muestra en la Figura 60.

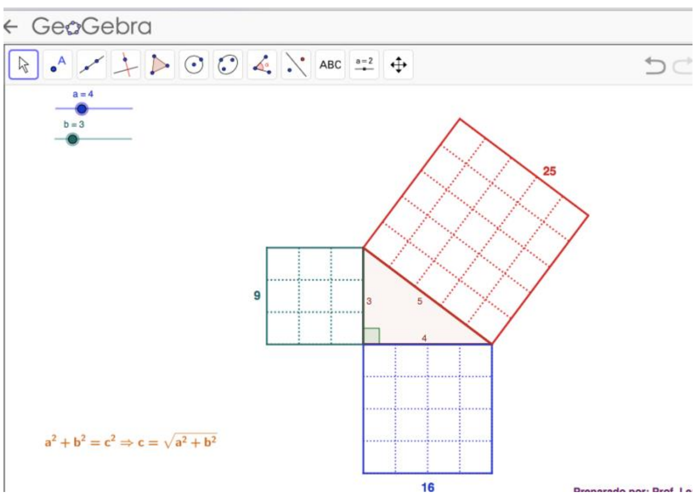


Figura 60. Material de apoyo de la institucionalización.

Así, se podía mostrar que siempre aun así se modificaran las medidas de los catetos, siempre al sumar las unidades cuadradas que representan el total del área, dan como resultado el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y que una manera de obtener el área de éstos sería contando cada cuadradito o bien, contando los cuadrados del largo y el ancho y multiplicarlos para obtener el área, y al conocer el área de los dos cuadrados de los catetos automáticamente pueden conocer el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, o bien, que lo pueden comprobar rellenándolo.

Respecto a la siguiente situación también se decidió utilizar material visual para que fuera más sencillo para los alumnos visualizarlo, en un inicio se comentó que el triángulo que se formaba era un triángulo isósceles por la medida de sus lados pero un triángulo rectángulo por la medida de sus ángulos y que la relación que se daba era que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa y se les mostró una distinta manera de haber acomodado los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa al que se mostró en la validación por los estudiantes.

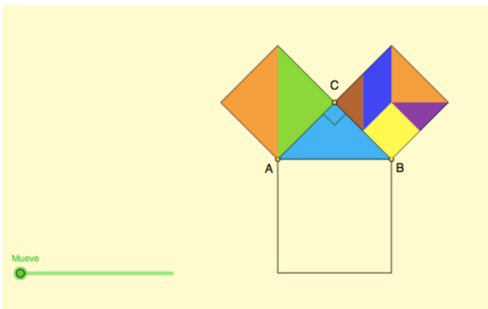


Figura 62. Ejemplo de la actividad realizando distintas divisiones *en los cuadrados de los catetos.*

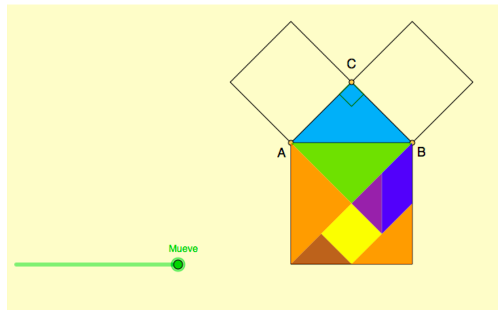


Figura 61. Mostración de como los cuadrados de los catetos se acomodaron en el cuadrado de la hipotenusa.

Después se les mostró a los estudiantes otros ejemplos, los alumnos pudieron visualizar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, mediante la superposición de superficies, los alumnos se pudieron percatar que los triángulos construidos sobre los catetos pueden cubrir la superficie del cuadrado mayor, es decir, del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Para finalizar, se les comentó a los estudiantes que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se enuncia así: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa” y a este enunciado se le conoce como el Teorema de Pitágoras.

5.8 Situación 3

El principal objetivo de esta situación fue propiciar que los estudiantes se enfrentaran a una problemática donde tendrían que hacer uso de los conocimientos obtenidos en las actividades anteriores para poder encontrar una solución a ésta, comprobaran la relación del problema haciendo uso del material didáctico y pudieran percatarse que se trataba del Teorema de Pitágoras y que ellos mismos encontraran una expresión para representarlo. Fue importante que los estudiantes se percataran que pudieron hacer uso del Teorema en diversas situaciones.

5.8.1 Situación de Acción y Formulación.

Para dar inicio se dio lectura al problema de manera grupal, esto para hacerlo de una manera más contextualizada y poderle dar un mayor ímpetu a los factores determinantes que dan importancia a la situación, después de esto se les pidió a los alumnos que le dieran otra leída con más detenimiento y calma, se les pidió que imaginaran el contexto de la situación, pues más adelante se les pediría que realizaran un bosquejo.

Los alumnos iniciaron su contacto con el medio, es decir, se encontraron en la situación de acción, pues leyeron nuevamente el problema y trataron de imaginarse la situación, así que ellos mismos trataron de crear una perspectiva para poder considerar lo qué debían hacer, después de esto, los alumnos pasaron a estar en la situación de formulación pues en la primer indicación se les pedía la medida de los lados de la casa de Don Luis siendo que el problema únicamente daba el área de dos de los terrenos construidos sobre los lados de la casa, así que los estudiantes debieron hacer uso de sus conocimientos previos para poder considerar lo que debían hacer para poder determinarlo.

Como se puede observar en la Figura 51, uno de los alumnos está construyendo su propio bosquejo de la casa de Don Luis, durante esta situación la profesora- investigadora se pudo percatar de diversas situaciones que se presentaron, por ejemplo, en el problema no decía cuántos lados tenía la casa, pero sí daba a entender que tenía tres lados puesto que en uno tenía la siembra de tomates, en otro los limones y el otro era el que le regalaría el gobernador, sin embargo, algunos estudiantes no se percataron de esto y lo primero que hicieron fue determinar la casa de cuatro lados e iniciaron a tener complicaciones pues no podían determinar la medida de los otros lados, se pudo observar que algunos alumnos volvieron a leer para poder percatarse de la información que daba el problema y así corregir su bosquejo.

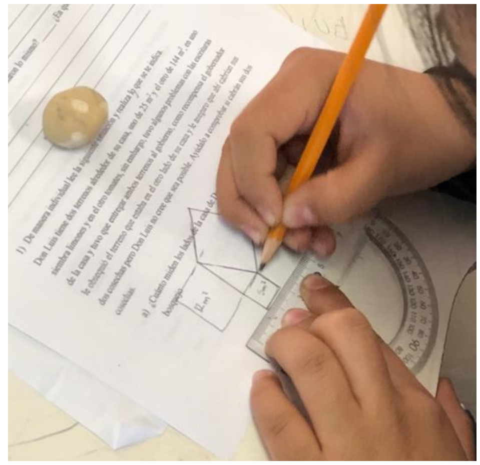


Figura 63. Alumno realizando su propio bosquejo en la situación 3.

Después de esto, se les cuestionaba a los estudiantes si ellos creían que ambas cosechas cabían en el terreno del otro lado y sin realizar ninguna medición ellos dieron respuesta y la argumentaron.

5.8.2 Situación de Validación, Acción y Formulación.

Se les pidió que se reunieran en equipos de tres personas para que pudieran pasar a la siguiente indicación, la cual consistía en que compararan sus respuestas y determinaran si estaban de acuerdo en ellas o no y sobre todo por qué, durante este proceso los estudiantes se encontraron en la situación de validación, se pudo observar que durante esta situación algunos estudiantes explicaban a otros porque habían hecho el bosquejo de cierta forma y convencían a los demás de porque estaban ellos en lo correcto.

Figura 64. Alumnos durante la validación explicando y defendiendo sus respuestas.

Se les entregó el material necesario para que ellos pudieran comprobar si ambas cosechas cabían en el tercer terreno o no, los alumnos tuvieron que identificar que cosecha iba en cada lado según las dimensiones que se les habían dado anteriormente y como se puede observar en la Figura 54 los alumnos acomodaron la cosecha de limones y la cosecha de tomates para después llevar a cabo el vaciado y poder comprobar si efectivamente cabían o no.

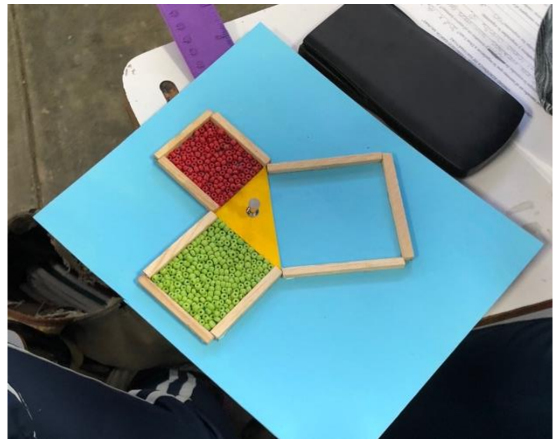


Figura 65. Material para comprobar la situación 3

Como se puede observar en la Figura 55 uno de los equipos lleva a cabo el vaciado de las cosechas hacía el otro terreno para comprobar si caben o no. Una vez que todos los equipos realizaron el vaciado se pudieron percatar que efectivamente cabían ambas ahí.

Después se les pidió a los estudiantes que regresaran a sus lugares para que dieran respuesta a la siguiente indicación, donde se les pedía a los alumnos que encontraran una manera de expresar algebraicamente la relación: la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y una vez que encontraran una manera de expresarla pudieran definir como se le conoce a esa relación.

Figura 66. Vaciado de las cosechas para comprobar si caben en el tercer terreno.

5.8.3 Situación de Validación e Institucionalización.

Se llevó a cabo una validación guiada, es decir, se iba cuestionando a los estudiantes sobre sus respuestas y se iba identificando los diferentes procesos que siguieron para poder cuestionarlos. Se les preguntó si cabían las dos cosechas en el otro terreno y también si había alguna otra manera de comprobarlo, de igual manera, se les cuestionó sobre las medidas de los lados de la casa y todos estuvieron de acuerdo en el resultado y en el proceso para obtenerlos.

Después, se les comentó a los estudiantes que en el problema podían haber hecho uso del Teorema de Pitágoras, puesto que se trataba de un triángulo rectángulo y anteriormente ellos ya habían hecho uso de éste y habían concluido que la relación que se daba en todo triángulo rectángulo era que "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". De igual manera, también se les comentó que la manera más sencilla para haber determinado la medida de los lados de la casa de Don Luis era haber sacado la raíz cuadrada de las dos dimensiones que se tenían y que para poder determinar la dimensión del otro lado debían hacer uso del Teorema, es decir, sumar las dos áreas de los terrenos, así obtendrían el área del tercer terreno y para obtener el valor del otro lado debían sacar la raíz cuadrada del área y así obtendrían la medida del lado de la hipotenusa. También se les comentó que una manera de representar algebraicamente el Teorema podría ser haciendo uso de cualquier letra siempre y cuando se cumpliera que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa, lo cual se expresa así $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$**.**

Por último se les comentó a los estudiantes que hay muchas situaciones en las que pueden hacer uso del Teorema, pero que debían estar conscientes que solo lo podrían hacer si se trataba de un triángulo rectángulo.

5.9 Evaluación Diagnóstica del Conocimiento

Para finalizar se planteó un juego, se les comentó las reglas del juego a los alumnos y se les pidió que se reunieran en parejas y para hacerlo más divertido y dinámico se les comentó que el equipo que terminara más rápido obtendría un premio, el cual consistía en un dulce.

Se inició con el triángulo A, en esta primera ronda no hubo situación problemática para los estudiantes pues se les daba el valor de los dos catetos y solo debían determinar el valor de la hipotenusa, el perímetro y el área del triángulo y la profesora- investigadora se pudo percatar que algunos de los estudiantes tenían dificultad para calcular el perímetro y el área del triángulo rectángulo. Después, en el triángulo B se les dio el valor de uno de los catetos y el de la hipotenusa y debían determinar el valor del otro de los catetos y en este momento los alumnos se encontraron algo confundidos, pues algunos creyeron que debían seguir el mismo procedimiento y otros no sabían cómo determinarlo y únicamente uno de los equipos pudo determinar cómo calcularlo.

En este momento la dinámica fue que pasara una de las integrantes del equipo que haya podido determinar el procedimiento para calcular el valor del otro cateto para que le explicara al resto del grupo como lo había deducido, una vez que su compañera les comentó, se continuó con la actividad hasta que terminó el juego.

5.10 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta parte se realizará un análisis de todos los datos obtenidos en la experimentación de la situación didáctica, el objetivo de esta fase es analizar y observar para poder reflejar los sucedido o lo aportado por parte de los estudiantes, decidimos crear una rúbrica donde consideramos el objetivo de cada situación, actividad y preguntas sobresalientes, las cuales nos aporten alguna característica de intereses, y así poder hablar de los casos más interesantes, como pudiera ser, alumnos que se destacan por su buena respuesta, alumnos que no han comprendido el objetivo de la actividad y algunos casos especiales, y con casos especiales nos referimos a situaciones que se diferencian de las respuestas comunes o generales. No se hará un análisis en general de las situaciones, si no que se hará en específico de cada situación, pues cada una tiene distintos objetivos y creemos pertinentes hacerlo de esta manera.

Para el análisis de los resultados obtenidos específicamente de la validación se complementan las respuestas obtenidas en los instrumentos con los comentarios vertidos en la experimentación y que se rescatan de las grabaciones, es importante mencionar que no se hará la transcripción de todo lo que se discutió en todos los equipos, únicamente de momentos representativos e importantes que nos aporten material para analizar y así nos ayude a obtener nuestras conclusiones.

Para poder diferenciar en la transcripción los diversos comentarios, se utilizará la siguiente simbología:

Símbolo	Significado.
( )	Descripción o comentarios de la autora.
(…)	Breve silencio durante los comentarios.
A1, A2, A3…	Alumnos
AE	Varios alumnos del equipo
RG	Respuesta Grupal
M	Profesora- investigadora

5.10.1 SITUACIÓN 1.

Al momento de analizar las hojas de trabajo de los estudiantes con más atención y detenimiento nos pudimos percatar de distintos casos muy interesantes entre la clasificación de los triángulos, pues hubo alumnos que únicamente encontraron una característica para cada tipo de triángulo y hubo alumnos que encontraron más de una.

Dentro de las características, nuestro objetivo era conocer si los alumnos identificaban las particularidades de los triángulos rectángulos o bien, si eran capaces de identificarlos entre los demás tipos de triángulos, por lo cual pondremos total énfasis en estas respuestas, y no en las otras. Cabe destacar que los únicos triángulos rectángulos eran el 3 y el 6 y dentro de las características que se esperaba encontrar era que uno de sus ángulos mide 90°, que tiene catetos e hipotenusa y que sus tres lados tienen distinta medida (únicamente en estos casos, pues no es una particularidad de los triángulos rectángulos).

En este análisis se encontraron respuestas muy interesantes por lo cual pareció necesario categorizarlas para que sea más sencillo entender los procesos de los estudiantes, dentro de estas categorías, se encontró que la mayoría de los estudiantes determinaron por lo menos una característica en los triángulos rectángulos, algunos estudiantes únicamente identificaron una característica en uno de los triángulo y sólo cinco alumnos del total del grupo no encontraron ninguna característica en ninguno de los triángulos rectángulos y dentro de estas clasificaciones encontramos un caso especial, se decidió hacer esta clasificación debido a que no pudimos catalogar al alumno dentro de las otras, pues en sus respuestas dio las tres respuestas que identificaban al triángulo rectángulo pero, después agregó otra característica donde se contradecía con todo lo anterior, pues decía que tenía un ángulo de 90° y al mismo tiempo decía que todos sus ángulos eran menores de 90°, tal como se muestra en la Figura 67.

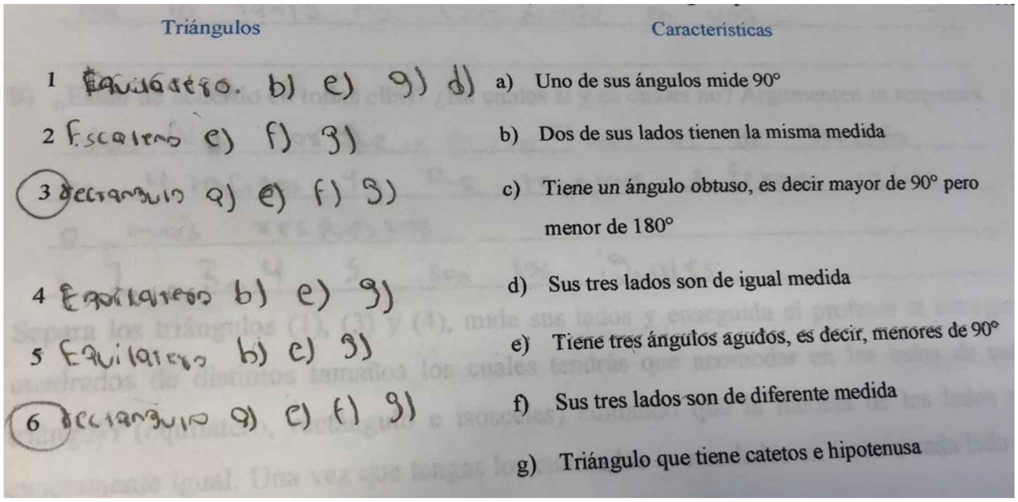


Figura 67. Caso especial de la situación 1, características del triángulo rectángulo.

Dentro del análisis de las actividades realizadas por los estudiantes podemos encontrar casos donde los estudiantes aciertan en todas las posibles características pero también hay otros casos donde los alumnos se contradicen en ellas.

Por ejemplo como se puede observar en la Figura 68, se encuentra encerrado el triángulo 3 y 6, esto para poder dar énfasis únicamente a esos dos triángulos, en el caso del triángulo 3 el alumno consideró que tenía un ángulo obtuso siendo que en las características explicaba que este tipo de ángulo es mayor de 90° pero menor de 180° y ninguno de los ángulos de éste triángulo contaba con esa característica pues uno de sus ángulo medía 90° por ser un triángulo rectángulo, lo cual nos hace considerar que el alumno no pudo identificar el ángulo de manera correcta y en el caso del triángulo 6 el alumno identificó que sus tres lados son de diferente medida, sin embargo, esto no nos garantiza que el alumno identifiqué que se trata de un triángulo rectángulo pues no es una característica que lo defina totalmente como hubiera sido el inciso *a* o el *g*.

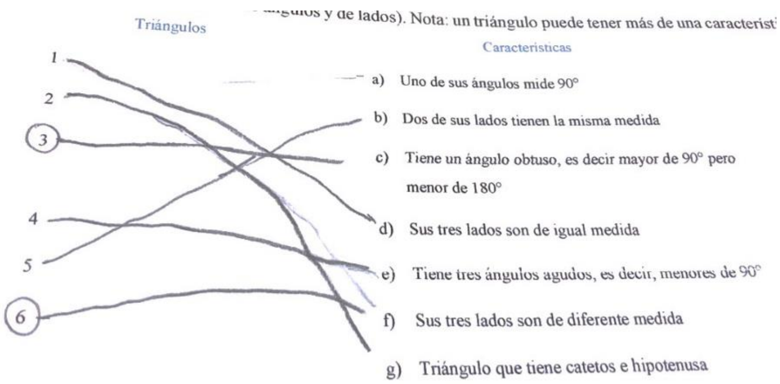


Figura 68. Alumno que no identificó ninguna de las características del triángulo rectánaulo.

Por otro lado, en la Figura 69 podemos observar otro caso donde el alumno determina todas las características de ambos triángulos rectángulos, en el caso del triángulo 3 determina que uno de sus ángulos mide 90°, sus tres lados son de igual medida y es un triángulo que tiene catetos e hipotenusa y de igual manera identifica todas las características para el triángulo 6, en este caso nos podemos percatar que el alumno no tienen ninguna dificultad para identificar cual es un triángulo rectángulo y cuáles son sus características.

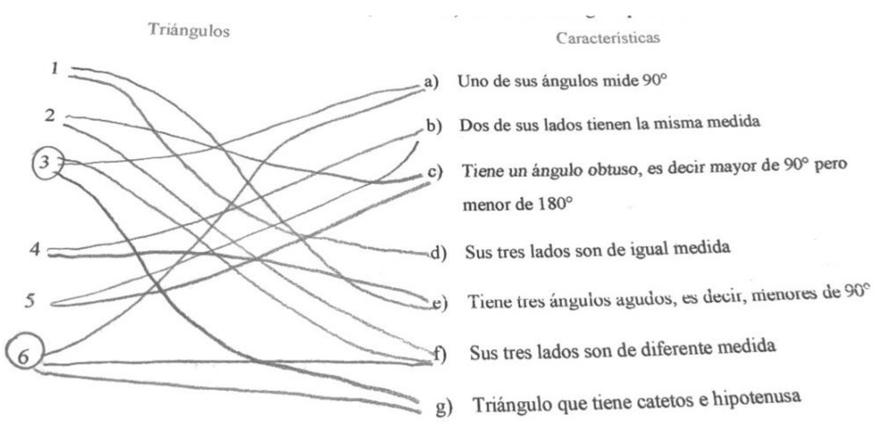


Figura 69. Alumno que identificó todas las características de los triángulos rectángulos.

Ahora bien, respecto a la identificación de los catetos y de la hipotenusa hemos encontrado situaciones muy interesantes, pues lo que se quería era conocer si el alumno podía identificar el ángulo recto y después que marcará un ángulo de referencia para determinar cuáles eran el cateto opuesto, adyacente y la hipotenusa pero parece ser qué, al no haberlo indicado tal cual en la indicación generó que los estudiantes se encontraran algo confundidos respecto a esto.

Por lo cual, hemos decidido no tomar en consideración si el alumno determinó cual era el cateto opuesto o adyacente, sino que, con que el alumno haya indicado que se trata de uno de los catetos se le tomará como correcto, pues no es necesario que lo sepan indicar en estas situaciones. Dentro de los objetivos de ésta actividad, hemos encontrado tres principales, que el alumno sea capaz de reconocer el ángulo recto, la hipotenusa y los catetos.

Puede decirse, que la mayoría de los estudiantes no son capaces de reconocer el ángulo recto en la hoja de trabajo, pero sí en el material didáctico, puesto que algunos estudiantes no pudieron siquiera identificarlo en el papel porque lo dejaron en blanco, es decir, no marcaron ningún ángulo y otra parte de los estudiantes lo marcaron pero de manera incorrecta y únicamente 10 alumnos lo hicieron de manera acertada en el instrumento, sin embargo, en esta actividad se les pedía que lo hicieran también en el material manipulable, donde la mayoría de los estudiantes pudieron identificar el ángulo recto correctamente, lo que nos hace considerar que éste facilitó la localización del ángulo.

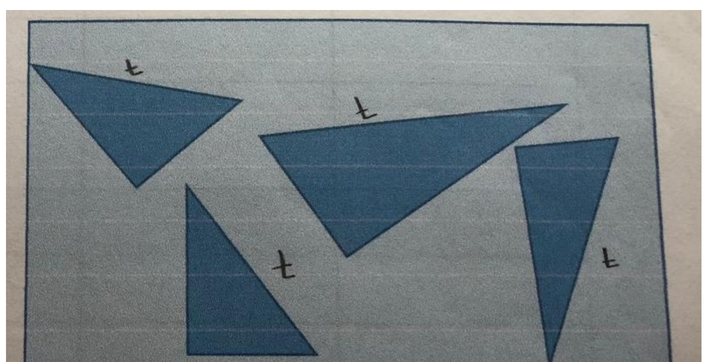


Figura 70. Alumno que fue capaz de reconocer la hipotenusa únicamente.

Respecto a la hipotenusa y a los catetos, se puede homogenizar pues en ambos, por muy poca diferencia la mayoría de los estudiantes no pudieron reconocerlos. Únicamente en uno de los casos el estudiante pudo señalar cual era la hipotenusa, pero no los catetos, tal como se muestra en la Figura 70. Podemos observar que el estudiante fue capaz únicamente de ubicar la hipotenusa, tal vez, porque tiene el concepto de que es el lado más largo del triángulo rectángulo, sin embargo, no pudo identificar cuáles eran los catetos (sin considerar opuesto o adyacente) ni el ángulo recto.

Ahora, bien en otro de los casos podemos observar donde uno de los estudiantes claramente no tiene bien establecidos los conceptos de catetos e hipotenusa, pues en ninguno de los triángulos que se le presentan pudo realizarlo correctamente, sino lo que hizo fue poner algunas de las letras que representan en la parte de los ángulos de los triángulos y no en los lados y únicamente en el triángulo del centro ha marcado uno de los catetos correctamente, sin embargo, no podemos catalogarlo como bien hecho, pues pudo haber sido una coincidencia o pudo haber ocurrido algún otro factor, pero al solo haberlo puesto en uno de los triángulos creemos que no es relevante.

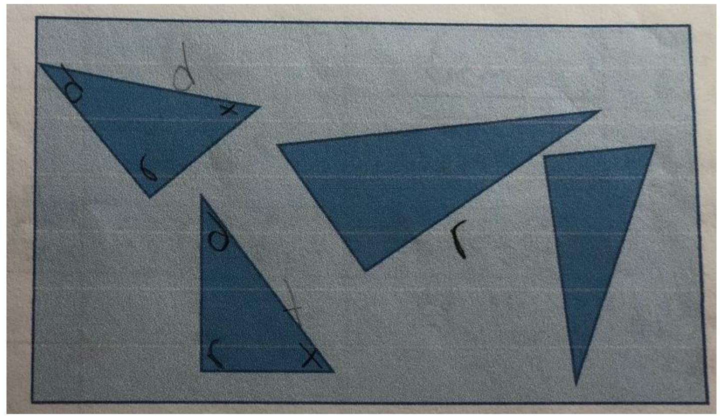


Figura 71. Alumnos que no identificaron ángulo recto, catetos e hipotenusa.

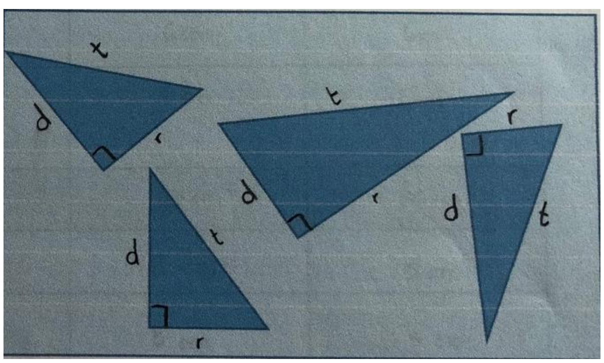
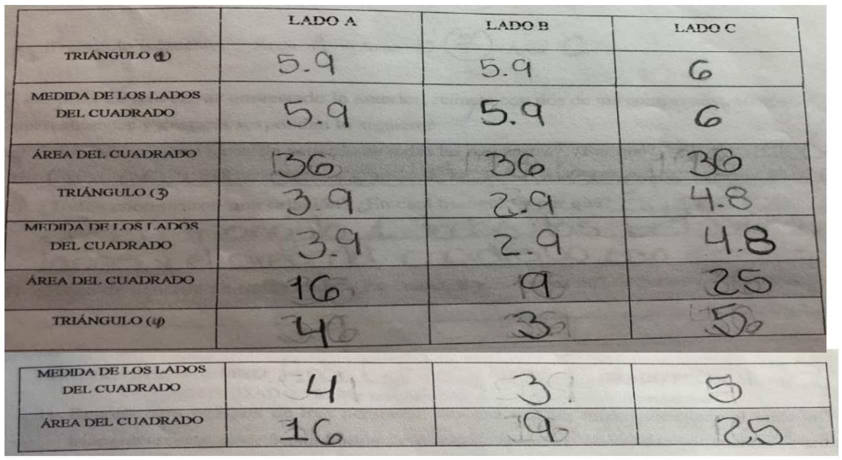


Figura 72. Alumno que identificó correctamente el ángulo recto, hipotenusa y catetos.

En otro de los pocos casos que encontramos, únicamente 6 de todos los estudiantes, fueron capaces de identificar el ángulo recto, la hipotenusa y los catetos. Es decir, menos de la mitad del grupo pudieron hacerlo, y como se muestra en la Figura 72, claramente se observa que el alumno marcó correctamente el ángulo recto, la hipotenusa como el lado más largo del triángulo y los catetos.

Otro de los objetivos que se trabajó en esta situación fue que los estudiantes pudieran identificar que los lados de los triángulos determinaban la medida de los lados de los cuadrados y sobre todo que pudieran calcular el área de cada cuadrado en todos los triángulos, (equilátero, rectángulo e isósceles). En esta parte pudimos encontrar que casi el total de los estudiantes lo hicieron de manera correcta y únicamente cuatro estudiantes no lo hicieron como se esperaba, pues dos de ellos no pudieron determinar ni las medidas ni las áreas correctamente y los otros dos estudiantes tuvieron complicaciones para determinar el área solo en algunos de los cuadrados y no en todos.

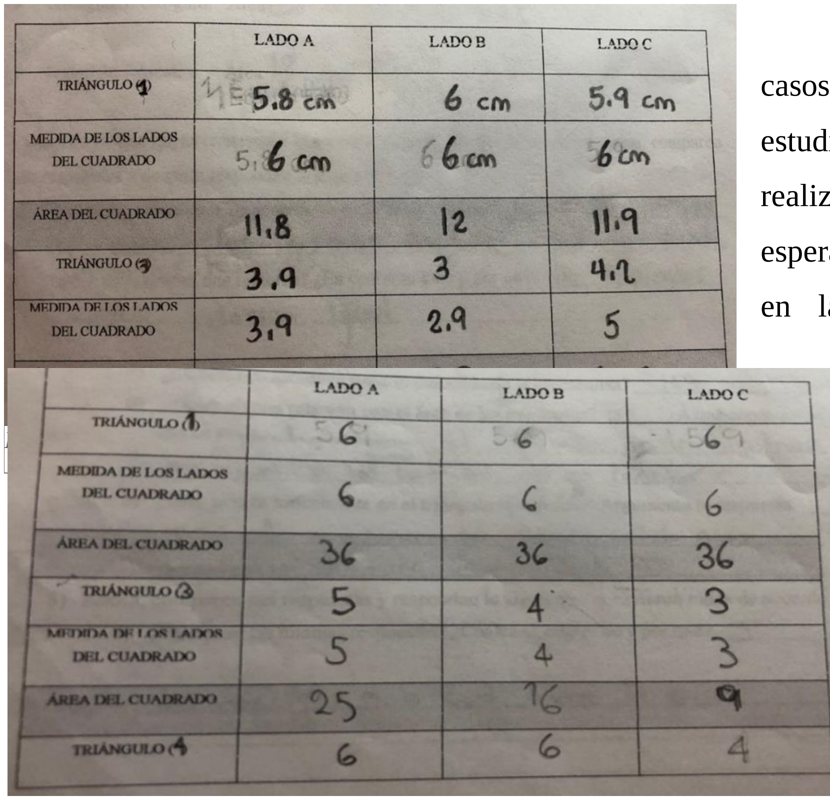
Por ejemplo, como se muestra a continuación en la Figura 73 el alumno da las medidas de los triángulos y las medidas de los cuadrados y en algunos de los casos no coinciden, por ejemplo, en el triángulo 1 las medidas varían por algunas décimas, esto ocasionado porque el alumno midió el material y pudo haberlo hecho de tal manera que variarán algunos milímetros, sin embargo, el objetivo no era que los estudiantes midieran uno por uno, si no que se percataran de que el lado del triángulo determinaba la medida de los lados del cuadrado, es decir, que medían lo mismo, después al momento de determinar el área del cuadrado podemos observar que el alumno lo que está haciendo es en algunos casos sumar y en otros multiplicar y sumar pero sin obtener el resultado correcto, pues en ninguno de los casos multiplica lado por lado.



	LADO A	LADO B	LADO C
TRIÁNGULO (1)	5.9	5.9	6
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	5.9	5.9	6
ÁREA DEL CUADRADO	36	36	36
TRIÁNGULO (3)	3.9	2.9	4.8
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	3.9	2.9	4.8
ÁREA DEL CUADRADO	16	9	25
TRIÁNGULO (4)	4	3	5
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	4	3	5
ÁREA DEL CUADRADO	16	9	25

Figura 73. Alumno que determino mal las medidas del triángulo 4.

Otro de los casos que se dio entre los estudiantes que no lo realizaron de la manera esperada, fue el que se muestra en la Figura 74, pues a simple vista pareciera que el alumno lo ha hecho todo correcto, sin embargo, en el triángulo 4 el alumno ha determinado mal las medidas del triángulo, por lo tanto, las medidas de los lados de los cuadrados y el área tampoco son correctas, las medidas deberían ser 4, 6 y 6 pues se trata de un triángulo isósceles.



	LADO A	LADO B	LADO C
TRIÁNGULO 1	5.8 cm	6 cm	5.9 cm
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	6 cm	6cm	6cm
ÁREA DEL CUADRADO	11.8	12	11.9
TRIÁNGULO 2	3.9	3	4.2
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	3.9	2.9	5

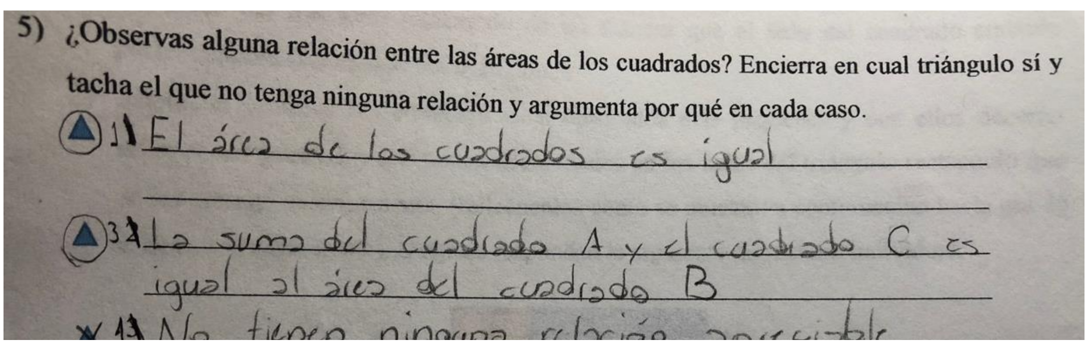
	LADO A	LADO B	LADO C
TRIÁNGULO 1	6	6	6
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	6	6	6
ÁREA DEL CUADRADO	36	36	36
TRIÁNGULO 3	5	4	3
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO	5	4	3
ÁREA DEL CUADRADO	25	16	9
TRIÁNGULO 4	6	6	4

Figura 74. Respuestas dadas por la mayoría de los alumnos.

En la Figura 75 se muestra uno de los casos donde el alumno determinó las medidas de forma correcta, tal como la mayoría del grupo, determino que la medida de cada lado del triángulo determinaba la del cuadrado y supo calcular el área de manera correcta, es decir, multiplico lado por lado.

Otro de los objetivo de esta situación, era cuestionar a los estudiantes sobre una posible relación entre las áreas de los cuadrados, en esta parte podríamos esperar cualquier tipo de respuesta, ya que efectivamente podrían encontrar varias relaciones, por ejemplo, en el triángulo 1, por ser un triángulo equilátero todas las áreas de los cuadrados eran iguales, en el triángulo 3, la suma del área del cuadrado A más el cuadrado B era igual al área del cuadrado C, el cual era nuestro principal objetivo, pues si los alumnos lograban visualizar esta relación desde este punto sería más sencillo para ellos realizar las siguientes situaciones y en el triángulo 4 no se apreciaba ninguna relación, o bien, por ser un triángulo isósceles dos de las áreas de sus cuadrados eran iguales.

Después de haber revisado las respuestas de los alumnos en esta parte nos pudimos percatar que únicamente dos alumnos del total del grupo pudieron darse cuenta de la relación que se estaba dando en el triángulo 3, tal y como se muestra en la Figura 76 el alumno es capaz de enunciar la relación que se da en el triángulo rectángulo.


5) ¿Observas alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Encierra en cual triángulo sí y tacha el que no tenga ninguna relación y argumenta por qué en cada caso.

1) El área de los cuadrados es igual

3) La suma del cuadrado A y el cuadrado C es igual al área del cuadrado B

4) No tienen ninguna relación

Figura 76. Alumno capaz de enunciar la relación que se da en el triángulo rectángulo.

Haciendo a un lado esos dos casos, estamos hablando de casi el total del grupo que no pudo percatarse de la relación que se estaba dando, como por ejemplo en la Figura 77 el alumno que comenta que en ese triángulo no se está dando ninguna relación por que el valor de todas sus áreas es distinto y así como esa respuesta muchas más, pues a simple vista no pudieron visualizar la relación únicamente observando los valores de las áreas.

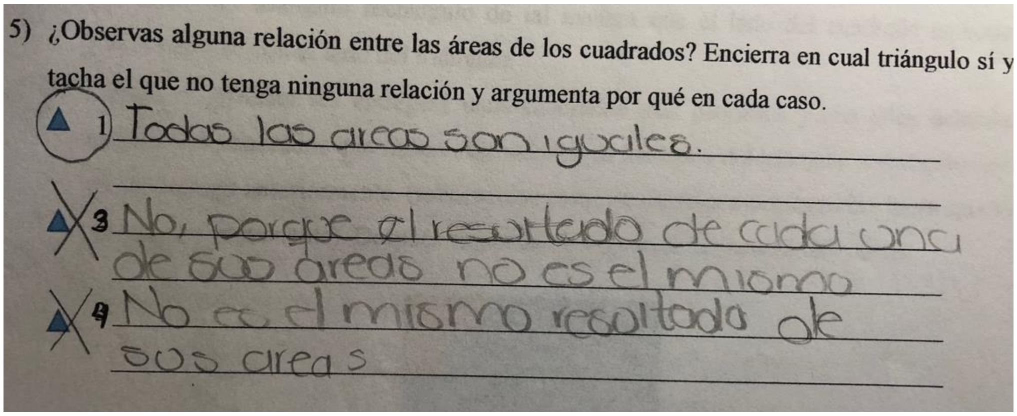
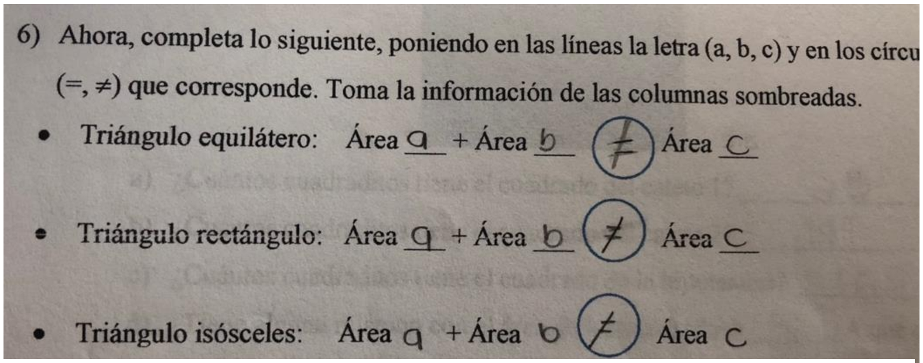


Figura 77. Alumno que no pudo visualizar una relación en el triángulo 3.

Después, se les pide a los alumnos que completen las expresiones, se les da una serie de letras y un par de símbolos para que lo hagan, esperando que puedan expresar la relación que se está dando entre las sumas de las áreas de los cuadrados de los catetos, es decir, que la suma de éstas áreas es igual al cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo y también que expresen que en los otros triángulos la suma de las áreas de los cuadrados son diferentes al cuadrado de la hipotenusa.

En el primer triángulo, la mayoría de los alumnos expresan la relación de manera incorrecta, en el triángulo rectángulo únicamente un poco menos de la mitad de los estudiantes pudo expresar de forma correcta la relación y en el triángulo isósceles la mayoría de los estudiantes expreso correctamente que no había ninguna relación.

Por ejemplo, como se muestra en la Figura 78, el alumno expresa correctamente la relación en el triángulo equilátero, donde la suma de las áreas *a* y *b* son diferentes al área de *c*, de igual manera en el triángulo isósceles, el estudiante expresa correctamente que la suma de las áreas *a* y *b* son diferentes al área de *c*, sin embargo, en el triángulo rectángulo el alumno debió haber expresado que la suma de las áreas *a* y *b* son iguales al área de *c* y en este caso no lo hizo.

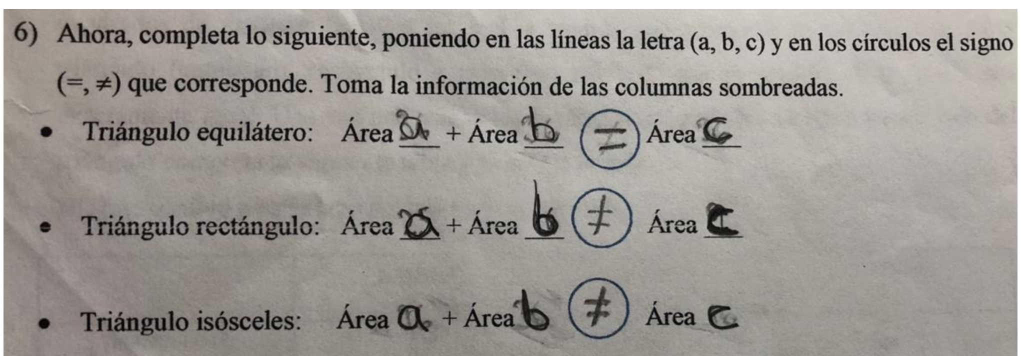

6) Ahora, completa lo siguiente, poniendo en las líneas la letra (a, b, c) y en los círcu
(=, ≠) que corresponde. Toma la información de las columnas sombreadas.

- Triángulo equilátero: Área a + Área b ≠ Área c
- Triángulo rectángulo: Área a + Área b ≠ Área c
- Triángulo isósceles: Área a + Área b ≠ Área c

Figura 78. Alumno que no expreso correctamente la relación en el triángulo rectángulo.

Otro caso que nos llama la atención es el que se muestra en la Figura 79, pues el alumno está afirmando que en el triángulo equilátero es donde las suma de las áreas de los cuadrados a y b son iguales al área del cuadrado C, siendo que esto no es correcto y donde debió haber expresado una relación fue en el triángulo rectángulo.

Pero en ese caso se puede observar con un poco de detenimiento que el alumno en lugar de haber escrito las letras que se le solicitaban en un inicio puso los valores de las áreas y por la forma en que las acomodó claramente se puede ver que no hay ninguna relación, porque *25* más *16* claramente es diferente a *9*. Creemos que esto pudo haber influido considerablemente

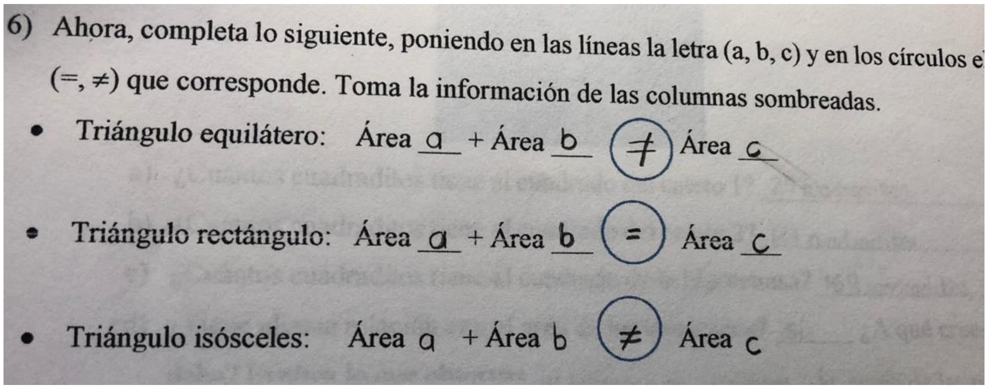

6) Ahora, completa lo siguiente, poniendo en las líneas la letra (a, b, c) y en los círculos el signo
(=, ≠) que corresponde. Toma la información de las columnas sombreadas.

- Triángulo equilátero: Área a + Área b = Área c
- Triángulo rectángulo: Área a + Área b ≠ Área c
- Triángulo isósceles: Área a + Área b ≠ Área c

Figura 79. Alumno que no expresa correctamente la relación en el triángulo rectángulo.

en que el estudiante creyera que no había ninguna relación y después al escribir por encima las letras está convencido de que no hay relación.

Como mencionamos anteriormente, solo un poco menos de la mitad del grupo pudo expresar correctamente la relación en el triángulo rectángulo, un ejemplo de ello es el de la Figura 80 donde el estudiante lo expresa de manera correcta, al escribir que en el triángulo rectángulo la suma de las áreas *a* y *c* son iguales al área de *c*. Lo cual, cabe mencionar es la respuesta que esperábamos tener de la mayoría de los estudiantes, pero no fue así.



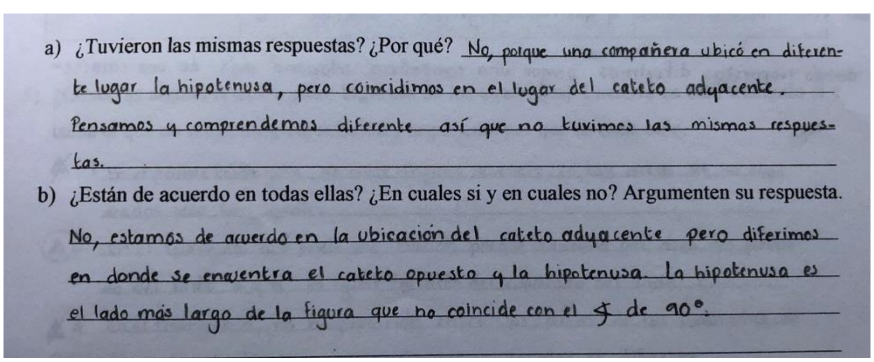
6) Ahora, completa lo siguiente, poniendo en las líneas la letra (a, b, c) y en los círculos e
(=, ≠) que corresponde. Toma la información de las columnas sombreadas.

- Triángulo equilátero: Área a + Área b ≠ Área c
- Triángulo rectángulo: Área a + Área b = Área c
- Triángulo isósceles: Área a + Área b ≠ Área c

Figura 80. Uno de los estudiantes que expreso correctamente la relación del triángulo rectángulo.

Como presentamos anteriormente, en la elaboración del instrumento se les pidió a los estudiantes que se reunieran en parejas o en equipos, esto para poder llevar a cabo la validación y se les plantearon las preguntas pertinentes de manera que ellos pudieran encontrarse en esa situación.

Creemos que los estudiantes no escribían todo lo que argumentaban con sus compañeros y eran muy pocos los casos que mostraban algo de argumentación por ejemplo, como se muestra en la Figura 81, en el inciso *a* la alumna únicamente está dando respuesta sobre la actividad de la ubicación de la hipotenusa y de los catetos y no de la clasificación de los triángulos, también comenta que la compañera que se reunió ubico en distinto lugar la hipotenusa pero no comenta porque decidió acomodarlo ahí o porqué creyó que esa era la hipotenusa, después en el inciso *b* la alumna nos da la definición de la hipotenusa, lo cual creemos es muy benéfico pues está dando su propia definición, la cual es correcta y además nos ayuda a entender y a darnos una idea de cómo ella está visualizando la hipotenusa.

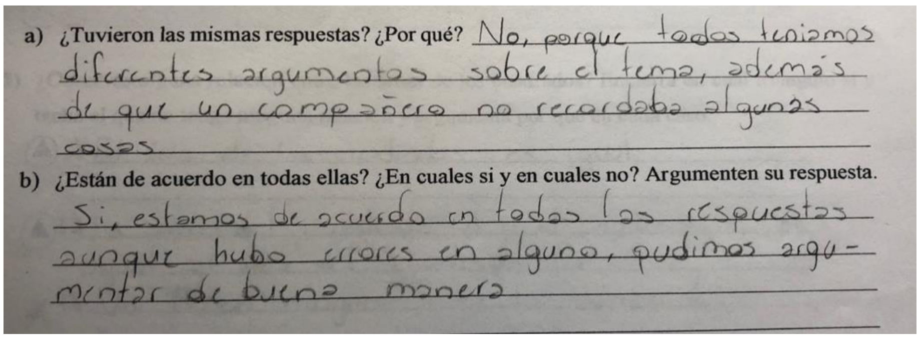


a) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Por qué? No, porque una compañera ubicó en diferente lugar la hipotenusa, pero coincidimos en el lugar del cateto adyacente. Pensamos y comprendemos diferente así que no tuvimos las mismas respuestas.

b) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.
No, estamos de acuerdo en la ubicación del cateto adyacente pero diferimos en donde se encuentra el cateto opuesto y la hipotenusa. La hipotenusa es el lado más largo de la figura que no coincide con el ∢ de 90°.

Figura 81. Evidencia escrita de los alumnos durante la validación.

Cabe mencionar que algunos de los alumnos se conformaban en responder "*si o no*", como por ejemplo en la Figura 82, el alumno dice no estar de acuerdo en todas las respuestas, pero además de que no las tenían igual no nos da ejemplos del porqué o conceptos de ellos. También escribe sobre algunos errores o distintos argumentos sin embargo, no nos clarifica en que parte o con que conceptos ocurrió esto.


a) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Por qué? No, porque todos teniamos diferentes argumentos sobre el tema, además de que un compañero no recordaba algunas cosas

b) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.
Si, estamos de acuerdo en todas las respuestas aunque hubo errores en alguno, pudimos argu- mentar de buena manera

Figura 82. Evidencia de la validación de los estudiantes.

Para poder tener un poco más de material para analizar la validación de los estudiantes haremos uso de algunas partes de videos que se grabaron durante la validación. Se realizará la transcripción de algunos segmentos únicamente debido a que sólo en estos se puede escuchar claramente la discusión que se lleva a cabo en los equipos, algunas partes del material no son de gran ayuda ya que al estar hablando y argumentando todos los alumnos no es sencillo determinar lo que dice cada alumno por el murmullo que se escucha.

Se realiza la siguiente transcripción correspondiente a la validación de las primeras actividades en el equipo 1. (Video IMG_2967.MOV min 00:54 al 02:46)

1 **A1:** (Haciendo uso del material manipulable) si, si es el 1 y el 4

2 **AE:** (hablan de sus respuestas al mismo tiempo por lo cual no se identifica lo que dice cada uno)

3 **AE:** sus tres lados son de diferente medida

4 **A1:** el 2 y el 3

5 **A3:** el 2

6 A2: el 6, el 3 y el (…)

7 **A1:** mshh (sonido de inconformidad)

8 **A2:** voy a tener que ponerme a ver otra vez

9 **A3:** triángulo que tiene catetos e hipotenusa, todos

10 **A1:** yo le puse que el 6

11 **A3:** yo que el 4

12 **A2:** 6 y 3 ¿no?

13 **A1:** (asienta con la cabeza) 6 y 3

14 **A3:** (corrige sus respuestas en su hoja de trabajo)

15 **(…)**

16 **M:** (intervención de la maestra) pero, por ejemplo: ¿Por qué?, explícale a tu compañero porque pusiste el 3 y el 6.

17 **A1:** ahhh

18 **M:** (dirigiéndose al alumno 3) ¿tu cuáles habías puesto?

19 **A3:** mmm el 4

20 **M:** el 4, y ¿por qué consideras que el 4 tiene catetos e hipotenusa?, le puedes explicar a tus compañeros

21 **A3:** Asiente con la cabeza.

22 **(…)**

23 **A3:** no, la neta lo puse a lo tonto

24 **M: (**dirigiéndose al alumnos 1 y 2**)** entonces, ustedes ahora lo pueden ayudar diciéndole porque consideras que el 3 y el 6 tiene catetos e hipotenusa

25 **AE: (l**os alumnos empiezan a hacer uso de su material, agarrando el triángulo 3 y 6 para apoyarse**)**

26 **A1: (**señalando en el triángulo de fomi 6 y dirigiéndose al alumno 3**)** recuerda que la hipotenusa es el lado más largo y el cateto opuesto es el lado mediano y el cateto adyacente es el menor.

27 **A1: (**señalando en el triángulo de fomi 6**)** lado mayor, lado menor y el otro conservando un ángulo de 90, pasa lo mismo con el 3, **(**toma el triángulo de fomi 3 y lo compara con el triángulo 6**).**

IMG_2962.MOV min 01:54 al 02:38

28 **A1:** Inciso g: "triángulo que tiene catetos e hipotenusa", 6.

29 **A2**: 6

30 **A1:** 2 y 6

31 **A3:** 4

32 **(…)**

33 **(**Los alumnos no hacen hincapié en sus respuestas y pasan a la siguiente actividad, donde tenían que identificar los catetos, ángulo recto e hipotenusa)

34 **A3:** (Señalando su hoja de trabajo) hipotenusa, cateto adyacente, no, cateto opuesto

35 **A2:** no pero este no (inconforme con la respuesta de su compañero)

36 **A3:** si pero es que no me acordaba, pero ahora si ya el lado mayor es la hipotenusa

37 **(…)**

38 **(**El alumno 1 señala su hoja de trabajo y se la muestra a sus compañeros**)**

39 **A2: (**Señalando su hoja de trabajo**)** Esta es la hipotenusa

40 **AE:** si esta es la hipotenusa

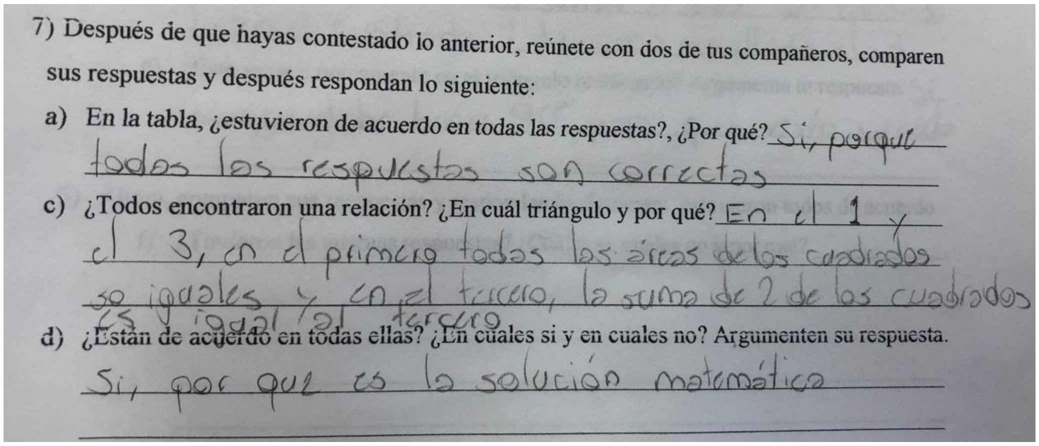
41 **A1:** La hipotenusa es el más grande

42 **A3:** Es lo que yo estaba diciendo, los catetos son los más chicos pero no me acordaba cual era la hipotenusa.

43 **(…)**

Durante el tiempo que se llevó a cabo esta situación, hubo momentos en los que fue necesario intervenir, pero se decidió intervenir de tal manera que éstas ayudarán a los estudiantes a una mejor validación, donde defendían sus repuestas y explicaban a sus compañeros porqué decidieron poner sus respuestas de tal forma.

Respecto a la validación de las siguientes actividades correspondientes a la situación 1, encontramos evidencia escrita que nos es de gran ayuda para analizar, por ejemplo en la Figura 83 se puede observar que el alumno afirma que todos los integrantes de su equipo estuvieron de acuerdo en todas las respuestas porque para ellos todas fueron correctas, sin embargo, en la siguiente pregunta es un poco más explícito, pues comenta que todos estuvieron de acuerdo en que hay una relación en el triángulo 1 y 3, lo cual es correcto, ya que fue algo que previmos anteriormente en el análisis a priori, donde los estudiantes podrían creer que una posible relación en el triángulo 1 sería que todas sus áreas son iguales, tal como lo expresa el alumno y sus compañeros de equipo, y de igual forma en el triángulo 3, donde la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa. Por último, el alumno considera que todos están de acuerdo por qué está es la solución matemática.


7) Después de que hayas contestado lo anterior, reúnete con dos de tus compañeros, comparen sus respuestas y después respondan lo siguiente:

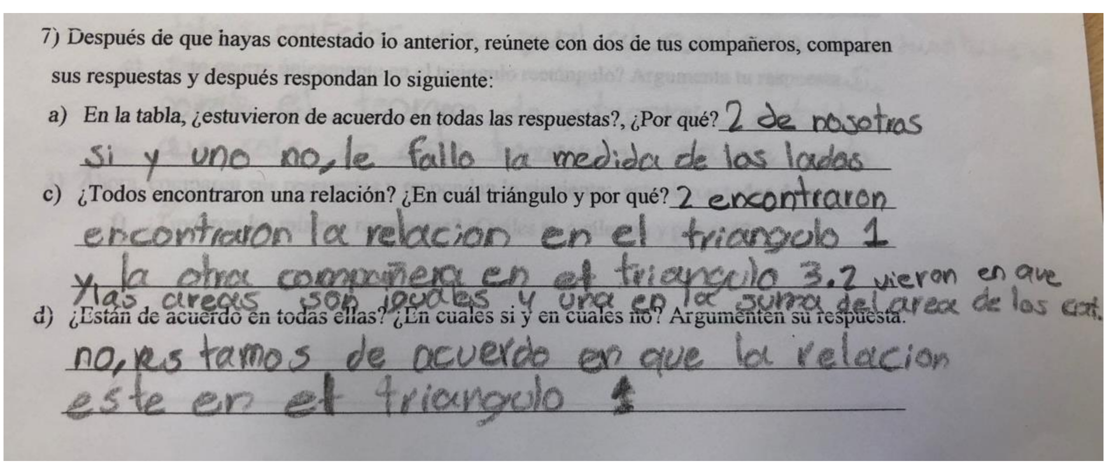
a) En la tabla, ¿estuvieron de acuerdo en todas las respuestas?, ¿Por qué? Si, porque todos los respuestas son correctas

c) ¿Todos encontraron una relación? ¿En cuál triángulo y por qué? En el 1 y el 3, en el primero todas las áreas de los cuadrados so iguales y en el tercero, la suma de 2 de los cuadrados es igual al tercero

d) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.
Si, por que es la solución matemática

Figura 83. Respuestas de uno de los alumnos en la situación de validación.

Ahora, otro de los casos con el que nos encontramos, donde otro de los equipos argumenta que sólo dos de los compañeros del equipo están de acuerdo con las respuestas pero el otro compañero no porqué le fallaron la medida de los lados, esto puede referirse al momento en que midió pudo haber agregado o quitado milímetros, sin embargo, no llegaron a discutir quien tenía la razón respecto a las medidas, después al momento de cuestionarse por la relación en los triángulos comenta que dos de sus compañeros encontraron la relación en el triángulo uno y la otra integrante del equipo encontró la relación en el triángulo 3, pues los dos compañeros aseguran que la relación se da en el triángulo 1 pues todas sus áreas son iguales y su otra compañera argumenta que la relación está en la suma de las áreas de los catetos. La cuestión aquí es que ambos tienen razón, pero respecto a nuestros objetivos se hubiera esperado que todos hubieran acordado que la relación se da en el triángulo 3, pues al momento de cuestionarse si estaban todos de acuerdo con sus respuestas el alumno responde


7) Después de que hayas contestado lo anterior, reúnete con dos de tus compañeros, comparen sus respuestas y después respondan lo siguiente:

a) En la tabla, ¿estuvieron de acuerdo en todas las respuestas?, ¿Por qué? 2 de nosotros si y uno no, le fallo la medida de los lados

c) ¿Todos encontraron una relación? ¿En cuál triángulo y por qué? 2 encontraron encontraron la relacion en el triangulo 1 y la otra compañera en el triangulo 3. 2 vieron en que las areas son iguales y una en la suma del area de los cat.

d) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.
no, estamos de acuerdo en que la relacion este en el triangulo 1

Figura 84. Respuestas proporcionadas por los alumnos de un equipo después de haber validado sus respuestas.

que no, que únicamente están de acuerdo en que la relación está en el triángulo 1 y hubiera sido muy benéfico si la alumna, integrante del equipo, hubiera argumentado y defendido sus respuestas hasta convencer al resto del equipo, pues ella tenía la respuesta que queríamos obtener.

Respecto al análisis de esta situación podemos resumir que encontramos que los alumnos reconocen por lo menos una característica en uno de los triángulos rectángulos, y únicamente muy pocos alumnos no fueron capaces de identificarlos, por lo cual, la mayoría de los alumnos pudieron identificar el triángulo rectángulo, después algunos de los estudiantes no pudieron determinar cuál era el ángulo recto, la hipotenusa y los catetos en el triángulo rectángulo, sin embargo puede estimarse que por poco y la mitad del grupo pudo hacerlo. También es importante comentar que casi el total del grupo pudo percatarse que los lados de los triángulos determinaban la medida de los lados del cuadrado y solo muy pocos alumnos tuvieron algún conflicto al determinar las áreas de éstos. Respecto a la relación, se pretendía que los alumnos fueran capaces de encontrarla, únicamente 3 alumnos lo hicieron en una primera instancia, pero al momento de expresarla fue casi la mitad del grupo quien logró hacerlo.

Cabe destacar que en ésta primera situación se puede decir que la situación fue exitosa pues pudimos percatarnos de las debilidades y fortalezas de los estudiantes respecto al contenido matemático, también se observó tanto en el desarrollo de las situaciones, es decir, al momento de que los estudiantes se encontraban en la situación de acción, formulación o validación que casi el total del grupo hacía uso del material didáctico para formular o validar, es decir, se apoyaban en él para recordar o para explicar a sus compañeros. También se puede decir que en esta situación el material motivo a los estudiantes, pues se observó una actitud positiva desde que se les entregó y ellos mismos se acercaron a comentar que les gustaba trabajar con el material pues se les hacía más divertido que sólo resolver problemas en su libreta.

5.10.2 Situación 2.

Dentro de los objetivos que nos planteamos para esta situación, en primera instancia, que el estudiante con ayuda del material didáctico pudiera determinar las unidades cuadradas de los catetos y de la hipotenusa, esto para que pudiera encontrar una relación entre las áreas de los cuadrados y argumentará porqué creía que se estaba dando esa relación, después, que el alumno pudiera percatarse que esto solo ocurre con el triángulo rectángulo y que también argumentará por qué creía que solo en ese triángulo.

Otro de los objetivos de ésta situación, muy importante por cierto, fue que los estudiantes realizarán una construcción y ellos mismos pudieran mostrar cómo es que las áreas de los cuadrados de los catetos son iguales al área del cuadrado de la hipotenusa, y sobre esta actividad, que los alumnos se percataran que el tipo de triángulo era un isósceles por la medida de sus lados pero rectángulo por la medida de sus ángulos.

El objetivo final de esta situación, era que los estudiantes expresaran con sus propias palabras la relación que ellos habían encontrado y también, que la expresaran algebraicamente para que al momento de llegar a la institucionalización fuera más sencillo para ellos percatarse de que se trata del Teorema de Pitágoras y como es que surge esa expresión que lo caracteriza.

En la primera parte de la situación casi todo el grupo pudo determinar sin complicaciones las unidades cuadradas de los catetos y de la hipotenusa, a excepción de dos alumnos, los cuales en ambos casos no pudieron determinar las unidades cuadradas de uno de los catetos y por lo tanto, los de la hipotenusa.

Como se puede observar en la Figura 85, donde la alumna pone correctamente los cuadraditos o bien, las unidades cuadradas que tiene cada cuadrado, el cuadrado del cateto 1 con 25, el cuadrado del cateto 2 con 144 y como se explicó antes en la experimentación, por cuestión de tiempo no acomodaron los cuadraditos en el cuadrado de la hipotenusa y ellos tuvieron que determinarlos, los cuales eran 69 y donde la mayoría del grupo lo determinó correctamente.

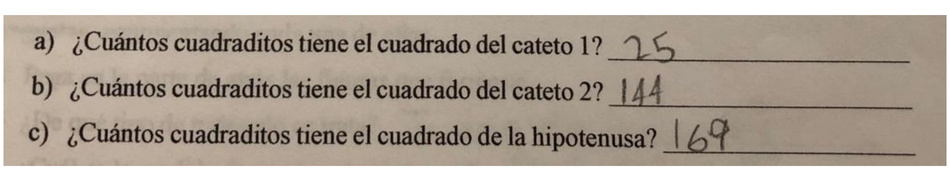

a) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 1? 25
b) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 2? 144
c) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado de la hipotenusa? 169

Figura 85. Respuestas correctas respecto a las unidades cuadradas de la situación 2.

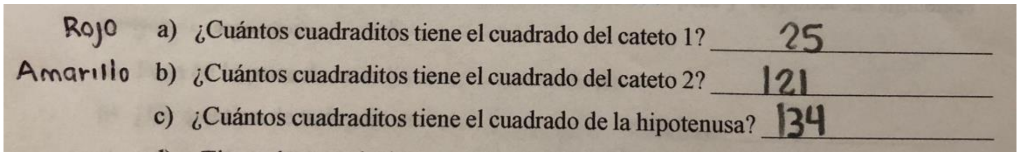

Rojo a) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 1? 25
Amarillo b) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 2? 121
c) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado de la hipotenusa? 134

Figura 86. Estudiante que no determinó correctamente las unidades cuadradas.

Ahora bien, dentro de esta situación nos encontramos con dos casos que no pudieron determinar las unidades cuadradas correctamente, por ejemplo, en la Figura 86, el alumno indica a un lado de la pregunta que el cuadrado rojo es el cateto 1 y que el amarillo es el cateto 2, esto por el material que se les entregó para esta situación, respecto a las unidades cuadradas del cateto 1 su respuesta es correcta, pues son 25, sin embargo, en las unidades cuadradas del cateto 2 no, pues determinó que son 121 cuando en realidad eran 144, por lo tanto no pudo determinar de manera correcta los de la hipotenusa, pero tampoco podemos considerar que aunque hubiera tenido bien las unidades cuadradas del cateto 2 habría determinado correctamente los de la hipotenusa, pues no está sumando las unidades de los catetos.

El otro caso, como se muestra en la Figura 87, la alumna determino correctamente las unidades del cuadrado del cateto 1 pero no las del cuadrado del cateto 2, pues le falto contar o considerar 4 unidades, sin embargo, como el caso anterior, tampoco determino de manera correcta las unidades cuadradas del cuadrado de la hipotenusa y no por las 4 unidades que le faltaron si no porque no sumo las unidades del cateto 1 y 2 como debió haberlo hecho, por lo tanto nos podemos percatar de que la alumna no sabe cómo determinar las unidades cuadradas de la hipotenusa.

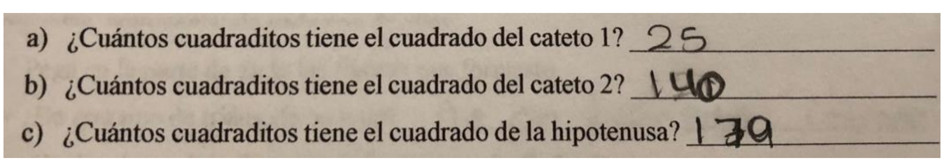
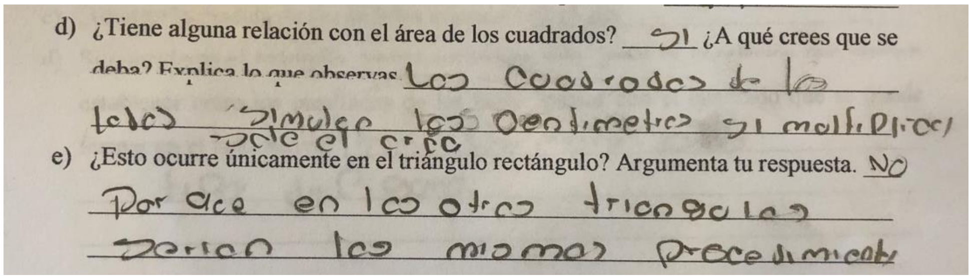

a) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 1? 25
b) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 2? 140
c) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado de la hipotenusa? 179

Figura 87. Alumno que no sumo las unidades cuadradas de los catetos para determinar las de la hipotenusa.

Enseguida, son nuevamente los mismos dos casos quienes no pudieron determinar la relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo, pues hasta ese momento los alumnos no pudieron percatarse de que la suma de las áreas de los cuadrados (total de unidades cuadradas) eran igual al área del cuadrado de la hipotenusa, dejando a un lado esos dos casos, casi el total del grupo pudo identificar la relación que se está dando entre las áreas de los cuadrados y dio por lo menos una argumentación de ello, y también gran parte del grupo pudo deducir que sólo se da esta relación en el triángulo rectángulo y en su mayoría pudieron argumentar a que creía que se debía esa relación únicamente en el triángulo rectángulo, sin embargo, es importante mencionar que en esta parte esperábamos que los alumnos se percataran de que las unidades



d) ¿Tiene alguna relación con el área de los cuadrados? si ¿A qué crees que se deba? Explica lo que observas Los Cuadrados de los lados simulan los centimetros si multiplicas sale el area

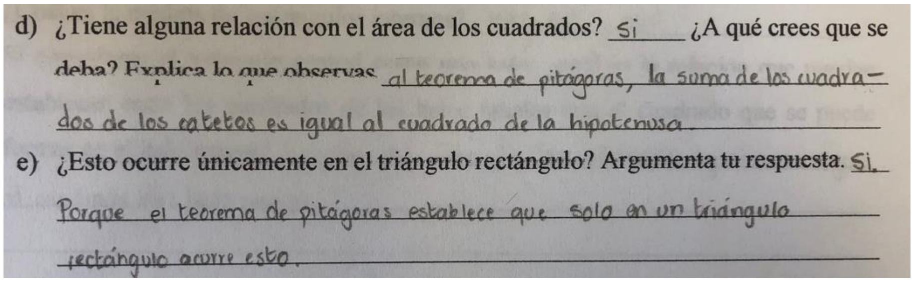
e) ¿Esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo? Argumenta tu respuesta. NO Por que en los otros triangulos serian los mismos procedimientos

Figura 88. Alumno que determino que los cuadraditos son los centímetros, es decir, unidades cuadradas y por lo tanto con ellos obtienes el área.

cuadradas estaban representando el área del cuadrado y eso era porque las unidades que caben a lo largo y ancho del cuadrado representan el área del cuadrado, pero también que al sumar el área (todos los cuadraditos) de los cuadrados de los catetos se obtiene el área del cuadrado de la hipotenusa.

Como mencionábamos anteriormente, en la Figura 88 se encuentran las respuestas proporcionadas por uno de los alumnos que comentamos no pudo determinar las unidades cuadradas de la hipotenusa correctamente. Ahora, al preguntarle al alumno sobre si los cuadraditos (unidades cuadradas) tienen una relación con el área de los cuadrados el alumno responde que sí, y explica, que los cuadrados de los lados están simulando los centímetros y si los multiplicas sale el valor del área, lo cual es totalmente correcto, y además responde que ocurre en todos los triángulos porqué sería el mismo procedimiento, sin embargo, el alumno no comenta nada de la relación entre las áreas de los cuadrados porque todavía no ha podido percibirlo o experimentado.

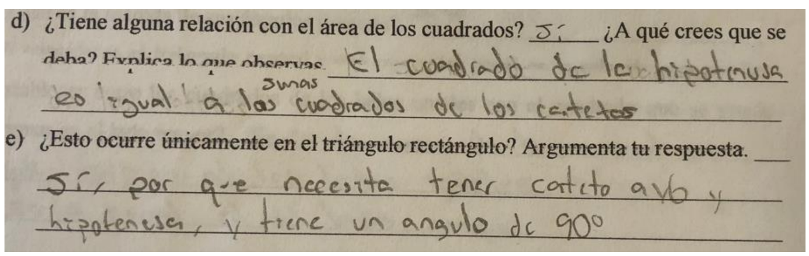
Ahora, otro de los casos, una alumna que desde este momento ya pudo percatarse que se trata del Teorema de Pitágoras, cabe mencionar que desde el principio nos dimos cuenta de que era una alumna sobresaliente por su forma de participar y dar respuesta a los cuestionamientos, como podemos ver a continuación, en la Figura 78 la alumna es capaz de enunciar correctamente el Teorema, y responde que si hay una relación con el área de los cuadrados y que ésta se debe al Teorema de Pitágoras, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, después nos responde que sólo ocurre en el triángulo rectángulo porque así lo establece el Teorema.


d) ¿Tiene alguna relación con el área de los cuadrados? si ¿A qué crees que se deba? Explica lo que observas. al teorema de pitágoras, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

e) ¿Esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo? Argumenta tu respuesta. Si, Porque el teorema de pitágoras establece que solo en un triángulo rectángulo ocurre esto.

Figura 89. Alumna sobresaliente que se percata del Teorema de Pitágoras.

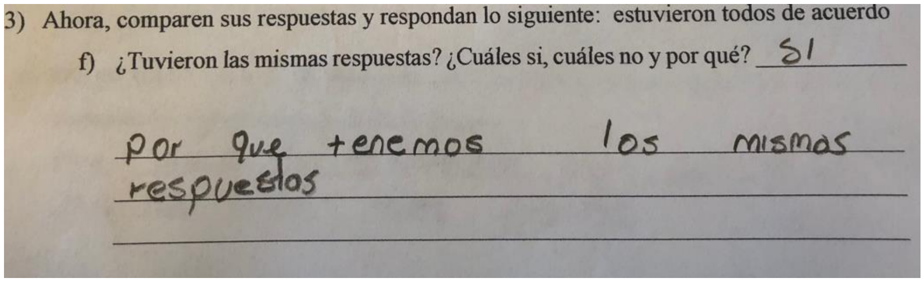
Ahora bien, a diferencia de ésta respuesta, podemos comentar que las respuestas promedio fueron como el caso que se muestra a continuación en la Figura 89.


d) ¿Tiene alguna relación con el área de los cuadrados? Sí ¿A qué crees que se deba? Explica lo que observas. El cuadrado de la hipotenusa es igual a las sumas cuadrados de los catetos

e) ¿Esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo? Argumenta tu respuesta. Sí, por que necesita tener catetos a b y hipotenusa, y tiene un angulo de 90°

Figura 90. Tipo de respuesta que dio la mayoría del grupo.

Como se puede observar el alumno comenta que si hay una relación, esto debido a que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, en este punto podemos agregar que el material aquí jugó un papel muy importante ya que fue más sencillo visualizar esta relación para los estudiantes, es por eso que pueden expresar tal cual la relación entre los cuadrados de los catetos y la hipotenusa. Respecto a la argumentación del triángulo rectángulo podemos observar que el alumno argumenta que este debe tener cateto, hipotenusa y un ángulo de 90° y por lo general la mayoría de las respuestas fueron de este tipo.

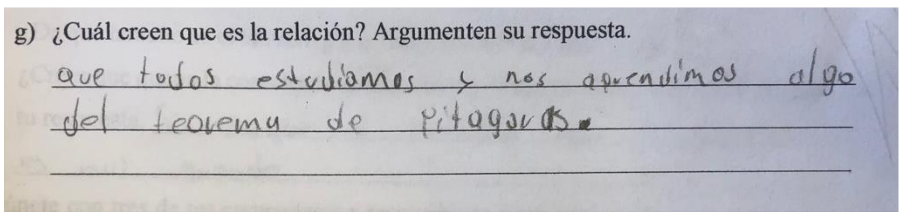

3) Ahora, comparen sus respuestas y respondan lo siguiente: estuvieron todos de acuerdo

f) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Cuáles si, cuáles no y por qué? SI

por que tenemos los mismas respuestos

Figura 91. Evidencia de la validación.

Ahora, respecto a la validación de estas situaciones, encontramos muy poca evidencia escrita, los alumnos no escribieron todo lo que se realizó durante esta situación, y cómo podemos ver en las siguientes Figuras, no se puede analizar pues son respuestas que no nos dejan ninguna evidencia de que los alumnos hayan discutido o analizado lo anterior.


g) ¿Cuál creen que es la relación? Argumenten su respuesta.

que todos estudiamos y nos aprendimos algo del teorema de pitagoras.

Figura 92. Evidencia de la validación.

Por lo tanto, haremos una transcripción de algunos segmentos donde nos sea posible evidenciar aportes valiosos para el análisis correspondiente a la validación de las primeras actividades de la situación 2, la cual se realizó grupalmente orientada por la profesora–investigadora.

Validación grupal S2.mov min 00:01 al 04:21

M: Emm, inciso 3: ahora, comparen sus respuestas y respondan lo siguiente: ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Cuáles si y cuáles no? Y ¿Por qué? **(···)** Vamos a ver, El equipo de.. mmm bueno. El equipo de Augusto, Vladimir y Clarissa. ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 1?

AE: 25

M: (dirigiéndose al grupo) ¿Todos tienen 25?

RG: si

M: ¿Alguien tiene otra respuesta?

RG: No

M: Ok, (dirigiéndose al equipo) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado del cateto 2?

AE: 144, 134 (la profesora-investigadora no se percata del 134)

M: (dirigiéndose al grupo) ¿Alguien tiene otra respuesta?

RG: No

M: ¿Cómo determinaron.. haber equipo de acá arriba?, ¿Cómo determinaron la medida ehmm el total de cuadraditos?

AE: multiplicamos el, sumamos las áreas de los dos cuadrados

M: pero, no (la profesora-investigadora es interrumpida por una de las alumnas del equipo)

A4: ósea..

(se escuchan murmullos, la profesora-investigadora sonríe)

M: (levanta la palma de la mano) mmm no, esperen, (se dirige al resto del grupo) acá calladitos Por favor. Por ejemplo, para determinar los cuadraditos del cateto 1, ¿qué fue lo que hicieron?

A4: multiplicamos los cuadraditos del cateto 1 por los del cateto 2

M: No, pero únicamente los del cateto 1, los del cuadradito rojo (refiriéndose al material)

A5: Los multiplicamos de cada lado

M: ¿De cada lado?

A5: Sí

M: ¿Alguien lo hizo de otra manera? (Dirigiéndose al resto del grupo)

RG: No

M: ¿No los contaron de uno por uno?

RG: No

M: Ok, muy bien, ahora viene ahí el inciso c, dice: ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado de la hipotenusa? (se dirige al equipo) ¿Cómo lo determinaron?

A5: Sumamos el área del cateto 1 con la del cateto 2 y nos dio como resultado el área de la hipotenusa.

M: y, ¿cuánto es?

AE: 169

M: (dirigiéndose al resto del grupo) ¿alguien tiene otra respuesta?

RG: No

M: ¿alguien lo hizo de otra manera?

RG: No

M: Entonces, todos sumaron el área del cuadradito rojo y del cuadradito amarillo

RG: Sí

M: Porque yo vi que otros hicieron otra cosa (⋯) nadie midió el cuadrado verde para ver cuantos...

(La profesora-investigara es interrumpida por uno de los alumnos)

A6: Ahh nosotros dos

M: Ah haber, dígame que hizo usted

A6: (Agarra su material, el cuadrado verde y el cuadrado amarillo) Nosotros agarramos el cuadrado amarillo y como ya sabíamos que eran 12 vimos que faltaba solo un cuadrito para ... mire solo un cuadrito (muestra con el material didáctico como lo dedujo)

M: Ahh ok, entonces así usted determino que tenía 13 de cada lado
A6: mm ajá (asiente con la cabeza)
M: Y luego, ¿cómo determino los 169?
A6: multiplique, como es un cuadrado, 13 por 13
M: Ah ok, muy bien. También es, ¿creen que es correcto eso? (se dirige al grupo)
RG: Sí
M: También es correcto, es otra forma de haberlo determinado, muy bien. Equipo de acá arriba dice: ¿tiene alguna relación con el área de los cuadrados?
AE: Sí
M: ¿Alguien puso que no había relación? (se dirige al grupo) (...) ¿todos encontraron una relación?
RG: Sí
M: Ok, ¿a qué crees que se deba?
A4: Porque al sumar el área del cuadrado amarillo con el del rojo da el área del verde
M: Ok, muy bien, ¿alguien tiene otra respuesta?
RG: No
M: Lo mismo, ¿todos pusieron lo mismo?
RG: Sí
M: Ok, dice: ¿esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo?, equipo de acá arriba
AE: Sí
M: Argumenta tu respuesta
A5: Porqué necesita tener catetos para que eso funcione e hipotenusa
M: Necesita tener catetos y la hipotenusa para que esto ocurra, y acá .. (dirigiéndose al resto del grupo) otra respuesta, que pusieron ahí, haber por ejemplo (...) Rubí.
A7: No alcanzamos a llegar ahí
M: Ok, ¿Estefanía?
A8: No alcanzamos
M: ¿Usted?
A9: No
M: ¿Isabel?, Isabella perdón.
A10: sí, porque el Teorema de Pitágoras establece que sólo en el triángulo rectángulo
M: Ok, muy bien, ¿alguien tiene lo mismo que Isabella?
RG: No.
M: Ok, sólo Isabella. Muy bien, por ejemplo ahí atrás, ¿usted que contesto ahí?
A11: No lo alcancé a contestar.
M: Ok, bueno.

Como se puede observar, los alumnos no tuvieron problemas al momento de determinar las unidades cuadradas de los catetos, o bien, de la hipotenusa, pues hasta este punto casi todo el grupo tiene claro que al sumar las áreas de los cuadrados de los catetos se obtiene el área del cuadrado de la hipotenusa, sin embargo, todavía no tienen bien claro el por qué esto solo ocurre con el triángulo rectángulo.

Después se les planteó a los estudiantes una actividad donde ellos mismos debían mostrar el Teorema con una construcción realizada por ellos mismos siguiendo una serie de pasos, percatarse del tipo de triángulo y la medida de los ángulos internos de éste. Dentro de ésta situación nos encontramos con que únicamente muy pocos de los alumnos pudieron realizar la construcción completa, aproximadamente la mitad del grupo tuvo la construcción incompleta y la parte restante del grupo ni siquiera intento realizarlo. También, menos de la mitad del grupo pudo percatarse de que se trataba de un triángulo isósceles por la medida de sus lados y rectángulo por la medida de sus ángulos y únicamente unos cuantos alumnos determinaron correctamente la medida de sus ángulos internos.

Respecto a la construcción, por una parte, encontramos casos muy variados, por ejemplo en la Figura 93 el alumno muestra únicamente el producto final, y el cual es correcto por la manera en que acomodó los cuadrados para formar el cuadrado de la hipotenusa, también se puede observar que a pesar de no haber mostrado los demás pasos el alumno los siguió pues el triángulo es isósceles por sus lados y rectángulo por sus ángulos y se observan los trazos de las diagonales.

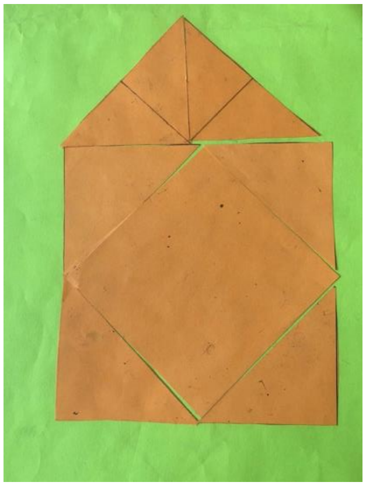


Figura 94. Producto final de la construcción de un alumno en la situación 2.

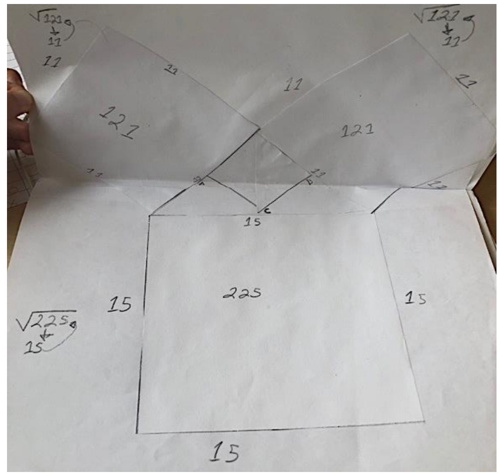


Figura 93. Alumno que no siguió las instrucciones correctamente.

Después en la Figura 94 se muestra otro caso en particular, pues en primera instancia el alumno no acató la primer consigna, pues su construcción es de un tamaño más grande y a pesar que a primera instancia pareciera que es correcto, no lo es, pues el alumno optó por darle medidas y áreas, lo cual tampoco estaba en las instrucciones, y por lo que se observa, los cuadrados construidos sobre los catetos miden 121 de área cada uno, y si sumamos 121 más 121, da como resultado 242, y el área del cuadrado que está sobre la hipotenusa es de 225, lo cual nos quiere decir que su triángulo no es rectángulo por la medida de sus ángulos.

Uno de los casos sobresalientes es el que se muestra en la Figura 95, pues la alumna presentó las construcciones paso a paso tal como se le indicó y el resultado final, en el cual se puede observar que la mostración está bien hecha, también, se ve claramente la forma en la que decidió acomodar los cuadrados y también se observa los trazos correspondientes en el triángulo isósceles lo cual demuestra que la alumna siguió todas las instrucciones de manera ordenada.

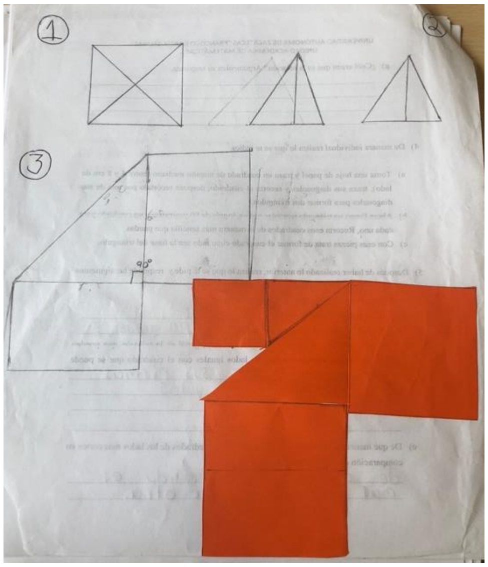


Figura 95. Alumno que no realizó correctamente ninguno de los pasos.

Otro caso, como el de la mayoría de los estudiantes es el que se observa en la Figura 96 donde la alumna llegó únicamente hasta la indicación número 3 y de ahí ya no siguió, sin embargo, ninguno de los alumnos expreso haber tenido alguna duda de cómo continuar por lo que la falta de aportación a esta actividad puede deberse a que se les hizo tedioso ir haciendo paso a paso todas las indicaciones.

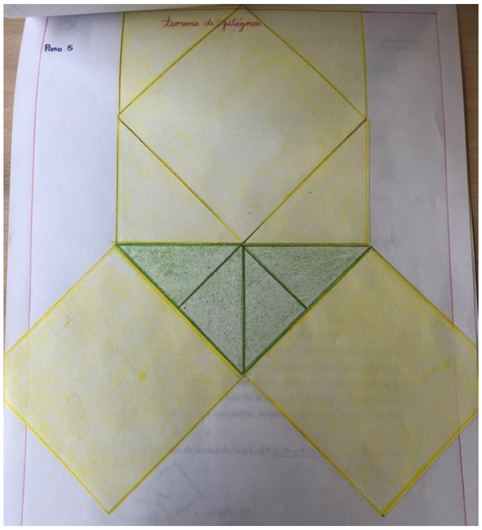


Figura 97. Alumna que mostró correctamente el Teorema de Pitágoras.

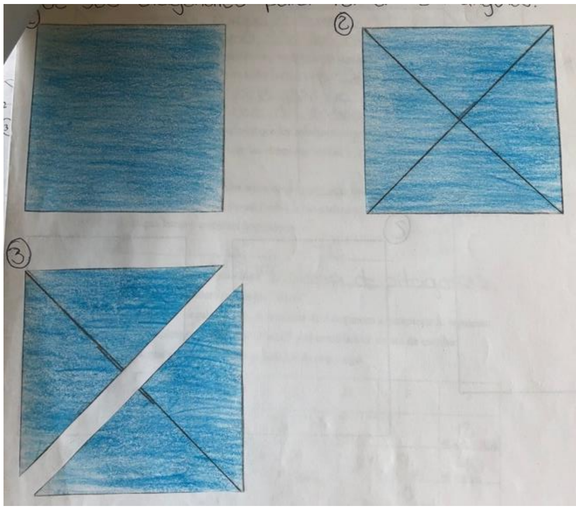


Figura 96. Alumna que no termino de construir la actividad de la situación 2.

Por último un caso donde uno de los estudiantes no puso nada de interés en la realización de la situación, pues como se puede observar en la Figura 97 ni siquiera hizo uso de su juego de geometría para la construcción de las figuras, pues los trazos se observan chuecos y sin precisión. Las figuras que construyó no son las que se le indicaban, en el paso número 2 se observa claramente que esos no son los triángulos que se obtienen de recortar el cuadrado por una de sus diagonales, y después, en el paso 3 pareciera que el alumno construyó rectángulos en los catetos del triángulo en lugar de cuadrados, lo cual tampoco es correcto, y por último el alumno pega una construcción y no se entiende que es lo que el alumno quería lograr con eso, pues por una parte parece el triángulo rectángulo con sus cuadrados construidos sobre los catetos y en la hipotenusa del triángulo hay otra construcción que no se distingue claramente que es a lo que quería llegar el alumno.

Una vez que los estudiantes terminaron de realizar la construcción (en los pocos casos que lo hicieron) se les plantearon una serie de preguntas donde los alumnos tenían que determinar el tipo de triángulo que habían construido y sobre sus ángulos internos, se encontraron respuestas como las que a continuación se muestran.

Por ejemplo, en la Figura 98 se puede observar que el alumno efectivamente reconoce que se trata de un triángulo isósceles, sin embargo al cuestionar la medida de sus ángulos internos podemos ver que responde que todos son menores de 40 grados, sin embargo, esto no es correcto.

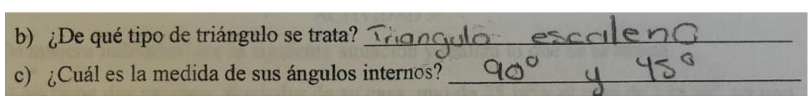
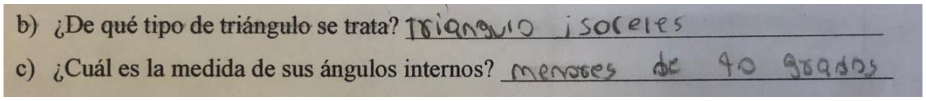

b) ¿De qué tipo de triángulo se trata? Triangulo escaleno
c) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos? 90° y 45°

Figura 98. Alumno que no determina de manera acertada el tipo de triángulo.

Ahora otro de los casos, donde el alumno si es capaz de reconocer la medida de los ángulos internos pero no reconoce el tipo de triángulo, tal como se observa en la Figura 88, pues el alumno afirma que se trata de un triángulo escaleno, lo cual no es correcto, pero pudiera haber dado esta respuesta porque en las otras situaciones se había trabajado con triángulos escalenos por la medida de sus lados y rectángulos por la medida de sus ángulos, y al momento de considerar la medida de sus ángulos, el alumno se percata del ángulo de 90° y 45°, sin embargo solo nos aportó estos dos valores.

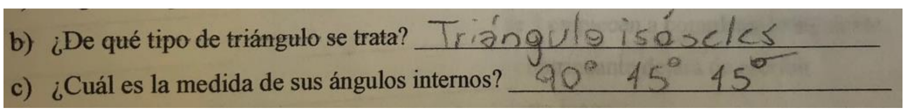


b) ¿De qué tipo de triángulo se trata? Triangulo isoceles

c) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos? menores de 90 grados

Figura 99. Alumno que es capaz de reconocer el tipo de triángulo pero no reconoce la medida de sus ángulos internos.

Como mencionábamos en un inicio fueron menos de la mitad de los alumnos quienes determinaron correctamente el tipo de triángulo y la medida de sus ángulos internos, esto pudo ser ocasionado a que algunos alumnos no terminaran la construcción. Sin embargo, en la Figura 100 se muestra un claro ejemplo de un alumno que lo determino de manera correcta. Se puede observar que el alumno responde que se trata de un triángulo isósceles y que sus ángulos internos son de 90°, 45° y 45°.



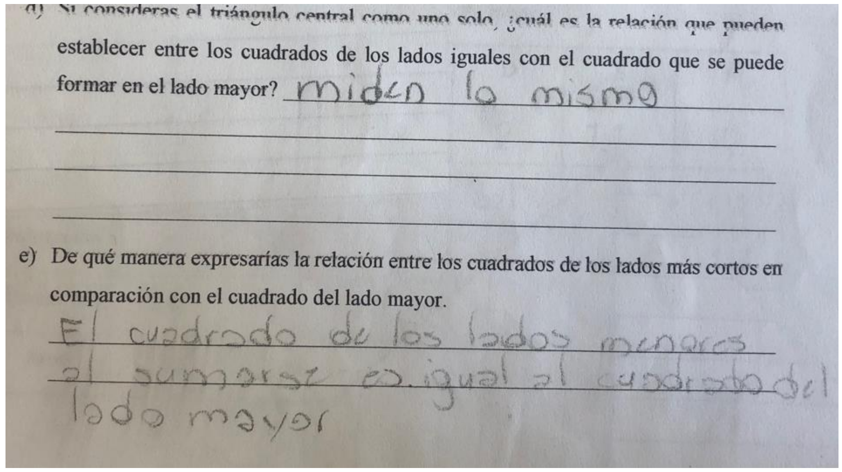
b) ¿De qué tipo de triángulo se trata? Triángulo isósceles

c) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos? 90° 45° 45°

Figura 100. Alumno que determina correctamente el tipo de triángulo y la medida de sus ángulos internos.

Por último, se cuestiona a los alumnos sobre la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor del triángulo central de la construcción y también se les pidió que expresarán la relación, a lo que podemos decir que fueron muy pocos los estudiantes que dieron respuesta, pues la mayoría decidió no responder o simplemente dieron una respuesta que no era la esperada, esto debido a que desde un inicio la mayoría no termino la construcción, entonces, no pudieron responder estos cuestionamientos de manera efectiva, a continuación se muestran algunos de los casos.

En la Figura 101 se observa una alumna donde ella cree que la relación que se da es que los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo es simplemente que éstos miden lo mismo, pero después al pedirle que exprese esta relación, nos da una respuesta bastante interesante, pues responde que el cuadrado de los lados menores al sumarse es igual al cuadrado del lado mayor, lo cual es correcto y en un principio ella no se percató de esa relación, sin embargo después pudo expresarla con sus propias palabras.

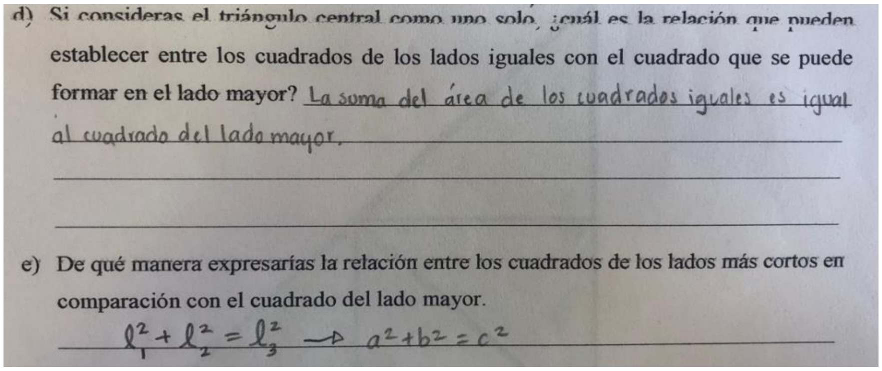

d) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor? miden lo mismo

e) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

El cuadrado de los lados menores al sumarse es igual al cuadrado del lado mayor

Figura 101. Alumna que expresa la relación entre los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa

Como habíamos comentado anteriormente que nos percatamos de un caso de una alumna sobresaliente, se puede observar en la Figura 102 las respuestas que nos proporciona a estos cuestionamientos, en el primero, ella responde que la suma del área de los cuadrados iguales es igual al cuadrado del lado mayor, lo cual es correcto pues entendemos que los cuadrados iguales se refieren a los cuadrados construidos sobre los catetos y el cuadrado del lado mayor como el cuadrado de la hipotenusa, después al pedirle que exprese esta relación ella nos da una respuesta bastante interesante $l_1^2 + l_2^2 = l_3^2$ $a^2 + b^2 = c^2$ a lo que podemos entender como que la alumna interpretó de la siguiente manera: el lado 1 elevado al cuadrado más el lado 2 elevado al cuadrado, nos da como resultado el lado 3 elevado al cuadrado y después lo expresa como el Teorema de Pitágoras.

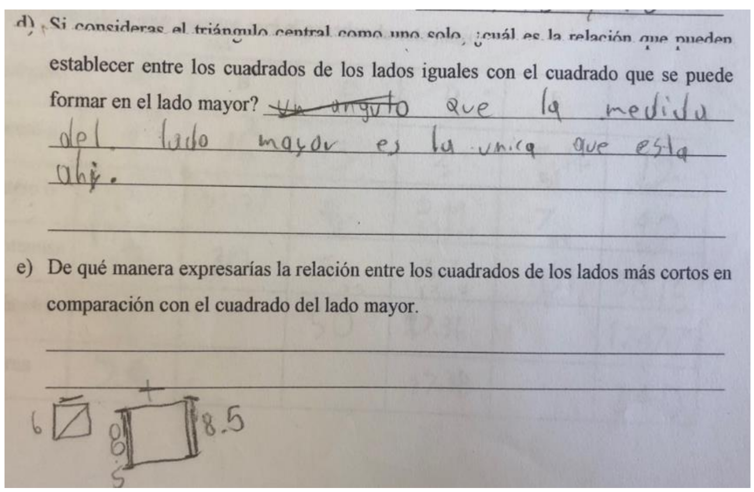

d) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor? La suma del área de los cuadrados iguales es igual al cuadrado del lado mayor.

e) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

$l_1^2 + l_2^2 = l_3^2 \rightarrow a^2+b^2=c^2$

Figura 102. Alumna sobresaliente da las respuestas esperadas en éstos cuestionamientos.

Por último uno de los casos que no respondió de la manera esperada, pues como se puede observar en la Figura 103, el alumno responde que la relación que se puede establecer es que la medida del lado mayor es la única que está ahí lo cual no tiene ningún sentido para nosotros, pues no sabemos a qué se está refiriendo el alumno y después al pedirle que exprese la relación únicamente hace unos dibujos de los cuadrados con sus respectivas medidas, lo cual tampoco es correcto, pues no nos está expresando nada con eso.


d) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor? ~~Un ángulo~~ que la medida del lado mayor es la unica que esta ahí.

e) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

6 8.5

Figura 103. Alumno que no expresa la relación de manera acertada.

Una vez que los estudiantes dieron respuesta a estos cuestionamientos se inició la situación de validación, la cual fue de manera grupal guiada por la profesora-investigadora y una de las alumnas que estaba al frente explicando cómo fue que realizó la construcción.

Validación grupal 2 S2.mov min 00:01 al 03:58

126 **A10:** Cuando ya tenía los dos triángulos así (les muestra al resto de sus compañeros haciendo uso del

pintarrón) pensé que como decía formar otro triángulo pensé que teníamos que recortar ese pero no, dice que formes un triángulo con éstos dos (les muestra a sus compañeros haciendo uso de su material) a lo mejor ahí no se especificó tan bien la maestra o nos confundimos no sé, entonces algo así como formado con estos dos triángulos queda un triángulo más grande (...) como así (muestra el ejemplo) y aquí está el ángulo de 90° que te pide ahí.

M: Los que ya traen sus dos triángulos recortados lo pueden formar, por ejemplo usted que ya lo tiene ahí (dirigiéndose a un alumno) nada más los despega y lo forma. Pero, ¿si están entendiendo como los deben de formar?

RG: (asienten con la cabeza)

M: ósea los dos triángulos los van a pegar para formar uno solo con un ángulo de 90°, Perdón Isabella continúe.

A10: y luego el siguiente paso es que, que formemos un cuadrado para cada uno de los catetos y pues eso es muy fácil nada más, ahh haces dos cuadrados, ósea mides el lado de éste (mostrándoles a sus compañeros con el material) y el de éste, va a ser lo mismo y ya los dos cuadrados van a quedar así..

M: (la profesora- investigadora interrumpe) si gusta agarrar otro plumín porqué ese casi no se ve para que sus compañeros de allá puedan ver bien. (Todo el grupo continúa prestando atención) (...) ¿alguien tiene duda hasta ahí chicos?

RG: No

M: Se fijaron que lo que hizo Isabella fue pues ahora que ya tiene el triángulo con un ángulo de 90°, es un triángulo isósceles, ¿por qué?

A12: Porque todos sus lados son iguales

M: No

A13: ¿Porque tiene dos lados iguales?

RG: ¡Ahhhh! en eso..

M: Porque tiene dos lados iguales y el otro es desigual, ¿ok?

M: Ahora, ya formados los dos cuadrados en los catetos, ehhhh ¿son de diferente medida o de igual medida?

A10: ¿Los dos cuadrados?

M: mmju

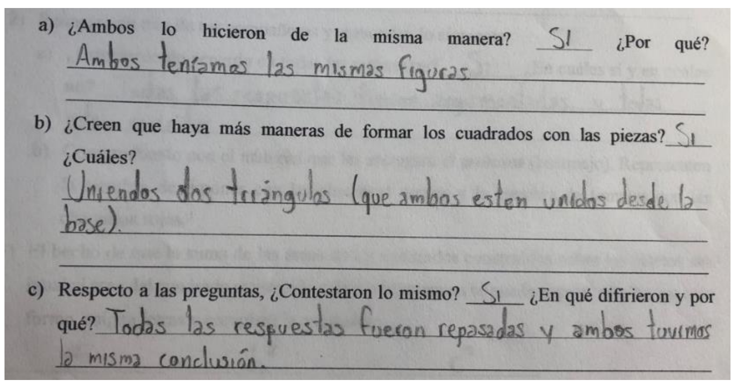
A10: de igual medida

M: son de igual medida porque es un triángulo isósceles, ok. Ahora, **¿**cuál fue el siguiente paso?

A10: el siguiente paso era que, que con estos dos (señala) mismos cuadrados recortados de alguna forma teníamos que formar el otro cuadrado que va en la hipotenusa y pues ustedes ya tenían que hallar la forma de más o menos cómo un tipo rompecabezas con estos dos para que diera el cuadrado de aquel lado, y.. yo lo hice de ésta manera. (les muestra a sus compañeros con algunos trazos en el pintarrón). Uno de éstos cuadrados ehh lo puse mm como así, ósea un cuadrado se queda así como esta y nada más lo pones así como que quede una punta en la mitad de la hipotenusa y luego el otro

lo recortan por sus diagonales y ya nada más éstas diagonales que quedan, quedan triangulitos así y esas ya las ponen aquí, las pegan y ya se forma el cuadrado de la hipotenusa con los cuadrados de los catetos. Era lo que teníamos que hacer.
RG: Ahhh...
M: Ahhh.. ¿Estaba muy difícil?
RG: No, (se escuchan algunos sí)

Respecto a la evidencia escrita de la validación se muestra lo siguiente, por ejemplo en la Figura 104, el alumno dice haberlo hecho de la misma manera por qué tenían las mismas figuras, considero que las respuestas que da el alumno no nos dan mucho que analizar pues a pesar de estar respondiendo no nos da los elementos que necesitamos para considerar si de verdad el estar entre pares está sirviendo de que los alumnos pongan en manifiesto sus conocimientos y lo defiendan.

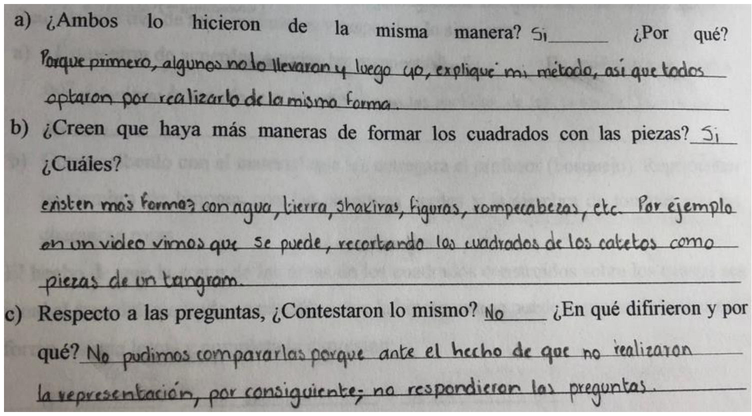

a) ¿Ambos lo hicieron de la misma manera? SI ¿Por qué? Ambos teníamos las mismas figuras

b) ¿Creen que haya más maneras de formar los cuadrados con las piezas? Si ¿Cuáles? Uniendos dos triángulos (que ambos esten unidos desde la base).

c) Respecto a las preguntas, ¿Contestaron lo mismo? Si ¿En qué difirieron y por qué? Todas las respuestas fueron repasadas y ambos tuvimos la misma conclusión.

Figura 104. Respuestas dadas después de la validación.

En cambio, otro de los casos que se encontró es el que se muestra en la Figura 105, pues la alumna nos da más información y es un poco más específica de manera que nos ayuda a entender mejor sus procesos, como se puede observar es la alumna que paso al frente a explicar cómo había realizado la construcción, pues argumenta que todos lo hicieron de la misma manera porque ella explicó su método y todos optaron por realizarlo de la misma manera, después nos da más ejemplos de cómo podría formarse el cuadrado y ella da una serie de materiales con los que podría hacerlo.



a) ¿Ambos lo hicieron de la misma manera? Si ¿Por qué?
Porque primero, algunos no lo llevaron y luego yo, expliqué mi método, así que todos optaron por realizarlo de la misma forma.

b) ¿Creen que haya más maneras de formar los cuadrados con las piezas? Si
¿Cuáles?
existen más formas con agua, tierra, shakiras, figuras, rompecabezas, etc. Por ejemplo en un video vimos que se puede, recortando los cuadrados de los catetos como piezas de un tangram.

c) Respecto a las preguntas, ¿Contestaron lo mismo? No ¿En qué difirieron y por qué? No pudimos compararlas porque ante el hecho de que no realizaron la representación, por consiguiente, no respondieron las preguntas.

Figura 105. Respuestas dadas después de la validación.

Cabe mencionar, que en esta situación se puede ver claramente el gran beneficio que tuvo el hacer uso del material didáctico, pues casi el total del grupo pudo determinar las áreas de los cuadrados y así, se percataron de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, también un factor importante es que ninguno de los alumnos tuvo que contar cuadrito por cuadrito para determinar el total de unidades cuadradas, pues pudieron hacerlo multiplicando lado x lado que es lo ideal, de igual manera la mayoría de los estudiantes pudo establecer la relación entre las áreas de los cuadrados y sobre todo, argumentaron porque se daba de esa manera, también casi el total del grupo se percató de que esto solo ocurre con el triángulo rectángulo pero algunos no pudieron argumentar el porqué.

Respecto a la otra parte de la situación, donde los estudiantes tenían que realizar una construcción y responder unas preguntas, podemos decir que no fue del todo exitosa, pues los alumnos no se sintieron motivados o no quisieron realizarla por factores externos pues habían expresado no haberlo realizado por tener dudas, pero una vez que se les explicó paso a paso lo que debía hacerse dijeron ya no tener dudas, sin embargo, tampoco lo realizaron. Pero, creemos que con la institucionalización de la situación (la cual se describe en la experimentación) pudieron quedar aclaradas las dudas y fue más sencillo para ellos observar distintas mostraciones que en lugar de construirlas ellos mismos.

5.10.3 SITUACIÓN 3.

Dentro de los principales objetivos que tuvo esta situación el principal fue que los estudiantes se percatarán de las distintas situaciones que pueden resolver con el uso del Teorema, pues hasta este momento los alumnos no se les había presentado una situación donde habría que resolver una problemática, también fue importante el conocer la percepción de los estudiantes, pues al realizar el bosquejo ellos mismos nos pudimos percatar de lo que estaban entendiendo y la manera en que lo estaban visualizando.

Otro objetivo muy importante dentro de esta situación fue la comprobación, pues una vez que los estudiantes resolvieron la situación se les pidió que la demostraran con un determinado material, y fue ahí donde ellos debían comprobar que, efectivamente la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos cabía en el área del cuadrado de la hipotenusa.

Y por último, pero no menos importante que los alumnos plantearán una forma de expresarlo algebraicamente para que con eso les fuera más sencillo deducir y entender que la relación que se da entre la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos y la hipotenusa es conocido como el Teorema de Pitágoras.

Respecto al primer planteamiento donde los estudiantes tenían que determinar la medida de los lados de la casa, realizar el bosquejo de los terrenos en torno a los lados de la casa, deducir el tamaño del terreno nuevo y argumentar si creían que en el terreno nuevo cabría toda la cosecha de los otros dos terrenos, se puede decir, que la mayoría de los estudiantes pudo realizarlo efectivamente, pues menos de la mitad del grupo no pudo determinar la medida de los lados de la casa, únicamente 3 alumnos del total no pudieron realizar el bosquejo, casi el total del grupo pudo determinar el tamaño del terreno nuevo y únicamente unos cuantos no pudieron argumentar sobre la cosecha.

Por ejemplo, en la Figura 106 se puede observar que el alumno determina que los lados de la casa miden 5m, 12m y 17m, lo cual no es correcto pues las medidas deberían ser: 5m, 12m y 13m. Sin embargo, el proceso que siguió el alumno es el correcto y podemos observar que su único error fue haberse equivocado al determinar que 17 era la raíz cuadrada de 169. Pues el alumno sumó los 144 m^2 y los 25 m^2, valores que corresponden a las áreas de los otros dos terrenos construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo para sí determinar el valor del otro terreno.

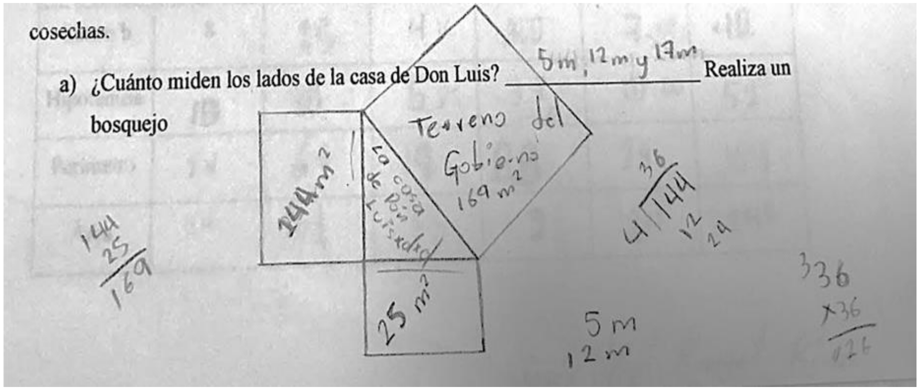


Figura 106. Alumno que no determinó correctamente las medidas, sin embargo, su proceso es correcto.

Ahora bien, otro de los casos es el que se observa en la Figura 107, en la pregunta que se le realiza ella sólo responde que 5m y 12m y no pone la medida del otro lado de la casa, pero si prestamos atención, claramente se puede observar que en sus operaciones matemáticas puso que la raíz cuadrada de 169 era 13, y es la medida del otro lado, a lo que la alumno para obtener este valor primero debió haber sumado el 25 y el 144 para obtener 169 y ahora sí, sacar la raíz cuadrada.

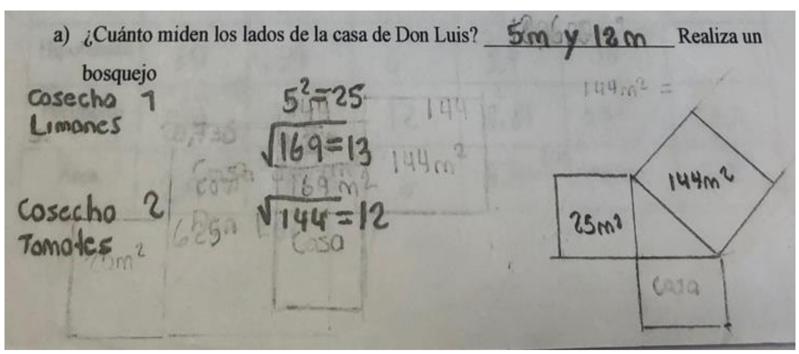


Figura 107. Alumna que realiza correctamente los cálculos matemáticos.

De los pocos casos que hubo en no realizar correctamente el bosquejo fue el que se muestra en la Figura 108 que nos llamó la atención pues, puso de lado derecho la casa, y los terrenos por otra parte sin considerar que se especificaba que estos se encontraban sobre los lados de la casa, y otro punto importante fue que tampoco determinó la medida de los lados de la casa, pues su bosquejo no le ayudo a tener una percepción clara y no le fue posible determinarlos.

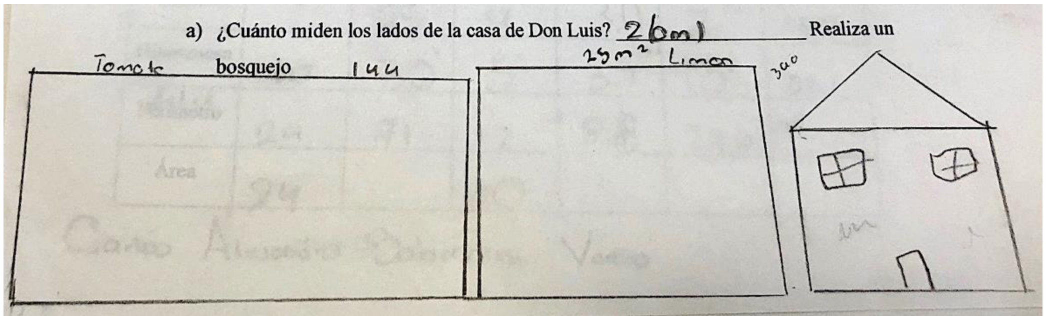


Figura 108. Alumno que no realizó de manera apropiada el bosquejo de la casa.

Respecto al tamaño del terreno nuevo y a la justificación de éste, encontramos una respuesta sobresaliente donde efectivamente es de $169m^2$ el tamaño del terreno y dentro de la

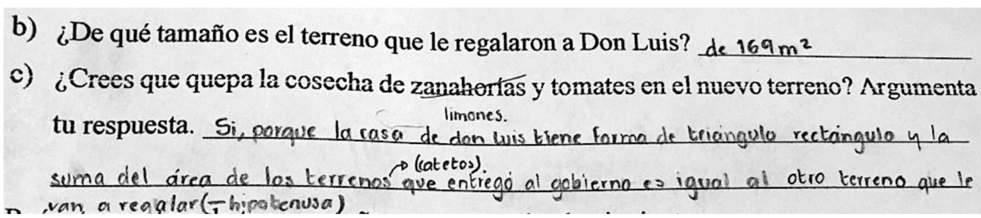


Figura 109. Respuesta de la justificación del terreno nuevo.

justificación la alumna responde que cree que quepa ahí la cosecha porque la casa tiene forma de triángulo rectángulo y la suma del área de los terrenos (que son los catetos) es igual al otro terreno que le van a regalar (el de la hipotenusa), se muestran estas respuestas en la Figura 109 y es relevante comentar que la mayoría de las respuestas fueron de éste tipo.

Sin embargo, también nos encontramos con respuestas que a pesar de haber determinado de manera correcta el tamaño del terreno no pudieron argumentarlo de la manera esperada, como se muestra en la Figura 110 donde un alumno pone que el terreno mide $169m^2$, pero al momento de dar su justificación, considera que si cabrán las dos cosechas porque el terreno que le dieron es muy grande, pero no nos está demostrando que lo relaciona con sus conocimientos adquiridos previamente.

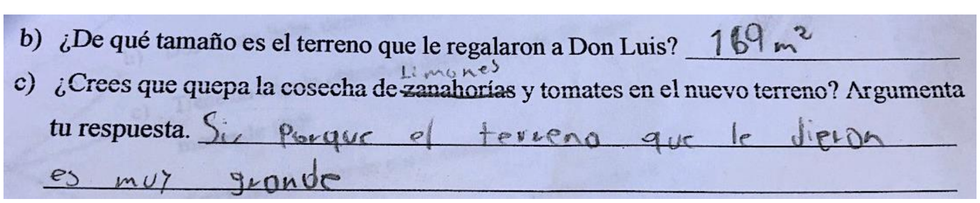
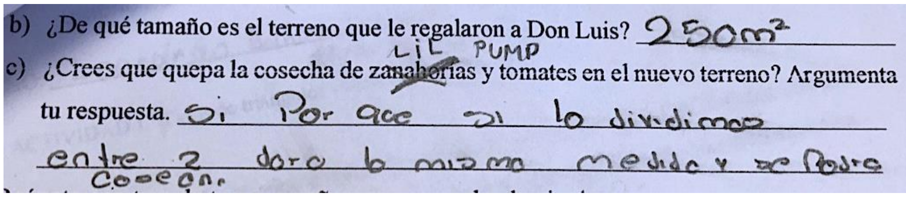


Figura 110. Alumno que no da una buena argumentación sobre sus respuestas.

Después nos encontramos con un único caso donde la alumna determina que el tamaño del terreno es de 250 m^2 y argumenta que si cabrán las dos cosechas porque si lo divide entre 2 dará la misma medida y se podrá cosechar, lo cual no es correcto y no podemos determinar porque el alumno determinó de esa manera sus respuestas.


b) ¿De qué tamaño es el terreno que le regalaron a Don Luis? 250m²

c) ¿Crees que quepa la cosecha de ~~zanahorias~~ LIL PUMP y tomates en el nuevo terreno? Argumenta tu respuesta. si Por qce si lo dividimos entre 2 dara lo mismo medida y se Podra cosechar

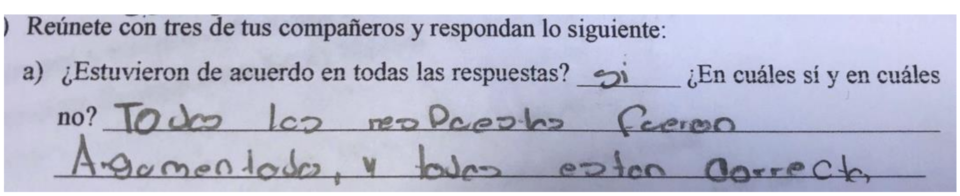
Figura 111. Alumno que no determino correctamente el tamaño del terreno.

Ahora bien, después de que los alumnos dieron respuesta a estos cuestionamientos, pasaron a estar en la situación de validación, se reunieron, revisaron sus respuestas y argumentaron si estaban de acuerdo en ella o no y por qué.

Situación 3.mov de 00:48 al 01:03 min

M: Ok, ahora si ya están reunidos, ¿estuvieron de acuerdo en todas las respuestas?, ¿sí?, ¿no? y ¿por qué?, en cuáles sí y en cuáles no, si tuvieron las mismas medidas, si hicieron el mismo bosquejo o si lo hicieron distinto, todo eso tienen que poner ahí. ¿ok?

Cómo hemos comentado en un inicio, la mayoría de los estudiantes no demostraron esta situación en las hojas de trabajo, a pesar de que se les daba la indicación, pues sus respuestas son muy abiertas y no detallan a lo que se refieren, por ejemplo, en la Figura 112 el alumno responde que todos están de acuerdo, después, se le cuestiona sobre en cuáles si en cuáles no y el responde que todas las respuestas fueron argumentadas y están correctas, sin embargo, no nos da más detalles, como por ejemplo, si tuvieron las mismas medidas, si todos lo determinaron con el mismo procedimiento o si alguien hizo el bosquejo de otra manera, etc.


) Reúnete con tres de tus compañeros y respondan lo siguiente:

a) ¿Estuvieron de acuerdo en todas las respuestas? si ¿En cuáles sí y en cuáles no? Todos los resPuestas fueron Argumentados, y todas estan correcta,

Figura 112. Respuesta dada por un estudiante después de validar sus respuestas.

Ahora bien, en las Figuras 113 y 114 se puede observar que las alumnas son un poco más específicas en sus respuestas y nos dejan saber que en sus respectivos equipos estuvieron de acuerdo en el bosquejo y en las medidas de la casa, lo cual no hace creer que pusieron un poco más de empeño en verificar y responder.

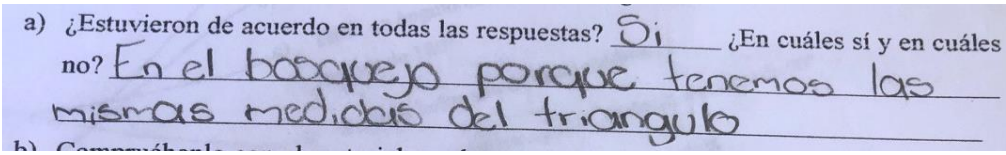

a) ¿Estuvieron de acuerdo en todas las respuestas? Si ¿En cuáles sí y en cuáles no? En el bosquejo porque tenemos las mismas medidas del triangulo

Figura 113. Respuestas de uno de los equipos durante la validación de la situación 3.

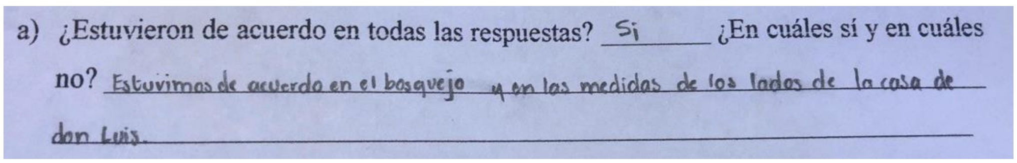

a) ¿Estuvieron de acuerdo en todas las respuestas? Si ¿En cuáles sí y en cuáles no? Estuvimos de acuerdo en el bosquejo y en las medidas de los lados de la casa de don Luis.

Figura 114. Respuesta de otro equipo durante la validación de la situación 3.

Una vez que los estudiantes dieron respuesta a las pregunta de validación se les entregó el material pertinente y se les dio tiempo para que ellos determinaran de qué manera acomodar el material, es decir, las chaquiras rojas que representaban los tomates y las chaquiras verdes que representaban la cosecha de los limones, y ellos debían determinar en qué terreno situar cada cosecha. Dentro de los resultados de éste trabajo tenemos la siguiente evidencia:

Como se puede observar en la Figura 115, dos de los integrantes del equipo están acomodando las cosechas de tal modo que los cuadrados queden totalmente cubiertos para no dejar ningún espacio sin rellenar y así poder comprobar que efectivamente caben las dos cosechas en el otro terreno.

Figura 115. Material didáctico representando la situación del problema.

Figura 116. Integrantes del equipo acomodando las cosechas en el material que se les entregó.

Y, en la Figura 116 se puede observar el material ya terminado, como el triángulo central de color amarillo representa la casa de Don Luis, el cuadrado relleno de chaquiras rojas que representa la cosecha de tomates y el cuadrado relleno de chaquiras verdes que representan la cosecha de limones.

Situación 3.mov de 18:46 al min 19:20

M: Ok, chicos por lo que veo ya todos tienen ahí la cosecha de los tomates y los limones lista, pero se acuerdan que Don Luis tuvo por ahí un problema

RG: Sí

M: y que el gobernador pues tuvo ahí una buena acción y le regalo el otro terreno, entonces, ¿cómo podemos comprobar si las dos cosechas caben en el otro terreno?

RG: (se escuchan murmullos y varias respuestas) pasándolas

M: ¿Pasando las cosechas? Haber pásenlas.

(Los equipos empiezan a vaciar la cosecha) (se escuchan murmullos)

En la Figura 106 se puede observar como uno de los equipos hace el vaciado de las cosechas que se encontraban en los dos cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo para comprobar que efectivamente, ambos caben en el cuadrado que se encuentra sobre el lado más largo del triángulo, es decir, la hipotenusa.

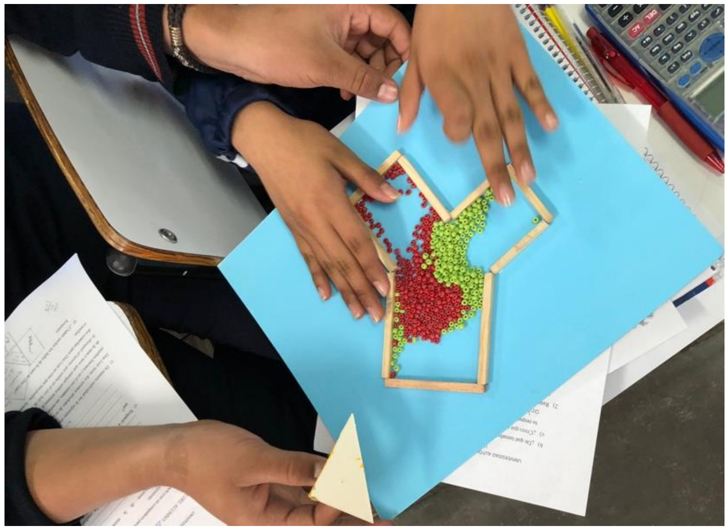


Figura 117. Comprobación de la situación 3 con material didáctico.

Situación 3.mov de 21:05 al min 21:26

181 **M:** ok, chicos ¿ya todos lo comprobaron?

182 **RG:** Ya

183 **M:** ahora que creen, ¿si cupo?, ¿no cupo?, ¿les faltaron?, ¿les sobraron?

184 **RG**: Si.. si cupo

185 **M:** si cupo, y saben ¿por qué cupo?

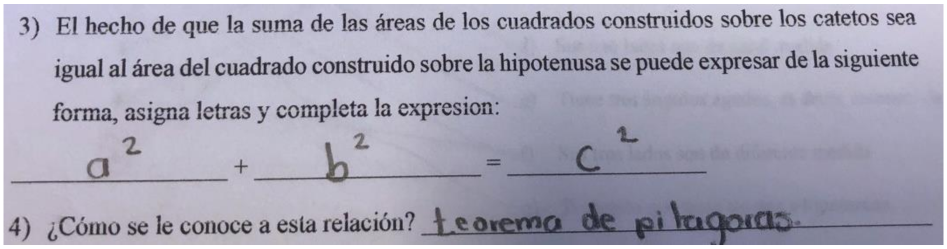
186 **RG:** sí

187 **A14:** Porque la suma de las medidas de sus anteriores terrenos daban la medida del nuevo.

188 **M:** Muy bien.

Por último se les pidió a los estudiantes que asignarán letras para expresar lo siguiente: “la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa”. Únicamente dos estudiantes del total del grupo no pudieron expresarlo de manera correcta, después se les preguntaba sobre cómo se le conocía a esa expresión y solamente uno de los estudiantes no pudo reconocer que se trataba del Teorema de Pitágoras. Puede decirse que casi la mayoría del grupo optó por expresarlo con letras como *a, b* y *c,* y no usaron algunas otras, esto puede ser ocasionado debido a que únicamente identifican la relación o el teorema con esas variables, aunque, hubo algunos casos que en lugar de expresarlo con letras, decidieron expresarlos con valores numéricos.

Por ejemplo en la Figura 118 se observa que la alumna lo expresa de manera correcta y lo reconoce como el Teorema de Pitágoras, cabe recalcar que como muchos casos más, decidió expresarlo con las variables representativas al Teorema.

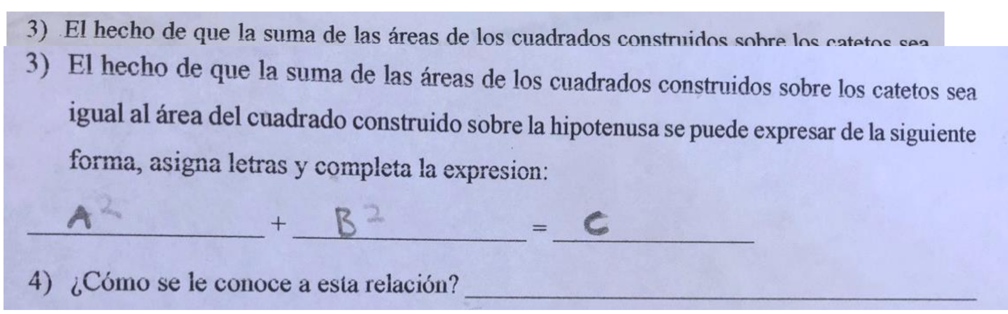

3) El hecho de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede expresar de la siguiente forma, asigna letras y completa la expresion:

a^2 + b^2 = c^2

4) ¿Cómo se le conoce a esta relación? teorema de pitagoras.

Figura 118. Alumna que reconoce el Teorema y lo expresa correctamente.

Un caso interesante es el que se observa en la Figura 119, pues el alumno es capaz de reconocer el Teorema, sin embargo, no es capaz de expresarlo de manera correcta, pues se le pidió que asignara letras y el decidió poner valores que se le hacían conocidos, pues esas medidas que el acomoda ahí son las de la situación de la casa de Don Luis, es decir, son las medidas de los terrenos que dedujeron anteriormente, y a pesar de que no lo expresa con letras, nos demuestra que entiende que la suma de los cuadrados de los dos terrenos construidos sobre los catetos son iguales al cuadrado del terreno construido sobre la hipotenusa.


3) El hecho de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede expresar de la siguiente forma, asigna letras y completa la expresion:

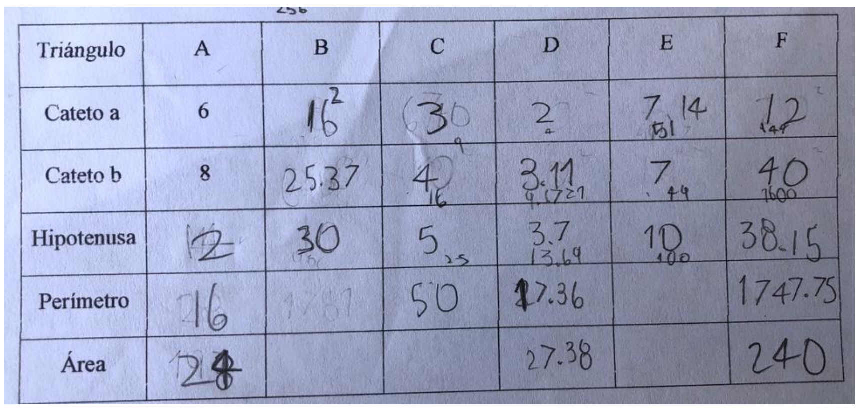
A^2 + B^2 = C

4) ¿Cómo se le conoce a esta relación?

Figura 120. Único alumno que no pudo expresar ni reconocer el Teorema de Pitágoras.

Ahora bien, de todo el grupo, hubo solamente un caso que no fue capaz ni de expresar ni de reconocer el Teorema, en la Figura 120 se puede apreciar que a pesar de no reconocerlo el alumno tiene noción de las variables representativas al Teorema, pues las acomoda de la forma correcta e incluso con atención se puede observar que en un principio había escrito A^2

$+ B^{2,}$ sin embargo, el alumno no estuvo seguro y decidió borrarlo. Es importante mencionar que desde un inicio este caso nos llamó la atención, pues en la situación 1 el alumno no pudo determinar correctamente las áreas de los cuadrados, no se percató de la relación en el triángulo rectángulo, sólo fue capaz de identificar una característica en los triángulos rectángulos, las cuales si eran representativas pues se percató del ángulo de 90°, y que es un triángulo que tiene catetos e hipotenusa pero después no pudo ubicarlos u identificarlos. Respecto a la situación 2 el alumno no asistió varios días a clases, entonces se perdió de la realización de todas las situación implicadas ahí, sin embargo, realizó la construcción pero no de la manera adecuada, la cual se puede observar en la Figura 121.


256

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Cateto a	6	16^2	3 9	2 4	7 14 51	12 144
Cateto b	8	25.37	4 16	3.11 9.6721	7 49	40 1600
Hipotenusa	12	30	5 25	3.7 13.69	10 100	38.15
Perímetro	16		50	17.36		1747.75
Área	24			27.38		240

Figura 121. Alumna que cálculo correctamente el valor de los catetos pero no el de la hipotenusa.

Respecto a esta situación es importante mencionar, que a pesar de que los estudiantes no se habían enfrentado al tipo de situación que se les planteó en un inicio, los resultados obtenidos fueron muy benéficos, podemos ver claramente que el tener una visualización de la situación, es decir, realizar el bosquejo de la situación ayuda a que los estudiantes formalicen procesos y puedan resolver de una manera exitosa, también cabe mencionar que el material ayudó a los estudiantes a comprobar dicha relación y a algunos incluso les sorprendió como efectivamente sí cabían las dos cosechas en el terreno nuevo. En esta situación es importante recalcar que el material didáctico fue muy importante pues los alumnos trabajaron de manera participativa y entusiasta y se pudo ver claramente al momento de analizar los resultados, pues después de realizar toda la situación hubo solamente un caso que no pudo expresar ni reconocer el Teorema.

5.10.4 Evaluación Diagnóstica del Conocimiento.

El objetivo de esta evaluación era sacar al estudiante del contexto al que estaba acostumbrado para que pudiera hacer uso de sus conocimientos en un nuevo contexto y que fuera capaz de formular un nuevo conocimiento haciendo uso de sus conocimientos previos.

Dentro de lo que encontramos al analizar esta situación, fue que casi el total del grupo pudo calcular el valor de los catetos, siendo que en ninguna situación anterior lo habían realizado, así que se enfrentaron a un nuevo conocimiento y aun así lo hicieron de manera exitosa, aunque no fue el mismo número de alumnos, pues en el cateto A hubo 5 alumnos que no pudieron calcularlo de manera efectiva y en el cateto B únicamente 2 alumnos no lo lograron, sin embargo, no podemos deducir porque hubo esta diferencia si el procedimiento era el mismo. Respecto al cálculo de la hipotenusa casi el total del grupo pudo hacerlo de manera correcta, y sólo 5 alumnos no lo hicieron de manera correcta.

Respecto al área y al perímetro del triángulo, casi la mitad del grupo pudo calcularlo de manera correcta, sin embargo, estos cálculos los usamos únicamente como un complemento y no era nuestro objetivo conocer si podían o no determinarlo, pues nuestro objetivo principal era conocer si los alumnos podían determinar el valor de la hipotenusa o el valor de cualquiera de los catetos en otras situaciones.

Como se puede observar en la Figura 110, es el caso de una alumna que con sus respuestas nos demuestra ser capaz de calcular los valores de los catetos correctamente, pues de los valores desconocidos respecto al cateto a, eran el del triángulo C y E, y los valores correctos son 3 y 7.14 respectivamente, tal como lo puso la alumna, en el cateto b los valores desconocidos eran los del triángulo B y D, y los valores correctos son 25 y 3.1 respectivamente, y se puede observar que la alumna también los calculó de manera correcta, pero en el caso de la hipotenusa, los valores desconocidos eran el triángulo A y F y los valores correctos son 10 y 41.76 respectivamente y cómo podemos ver la alumna no los calculo bien en ninguno de los casos.

Otro caso común, pues fueron varios alumnos que mostraron estar en la misma situación, es como el que se presenta a continuación, donde el alumno es capaz de calcular un cateto a, un cateto b y únicamente uno de los valores faltantes de la hipotenusa, y creemos que esta situación es constante debido al tiempo, pues no alcanzaron a responder porque otro equipo lo hizo más rápido.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Cateto a	6	16	3	2 4	[illegible]	12 144
Cateto b	8	25.37	4 16	9.69	7	40 1600
Hipotenusa	10	30	5 25	3.7 13.69	10	
Perímetro	24	71.37	12	14.76		
Área	24	202.96	6	71.70		

Figura 122. Alumno que cálculo correctamente una incógnita en cada caso.

Y, por último hubo aproximadamente 11 casos, es decir, casi la mitad del grupo que tuvieron de manera correcta todos los resultados como el ejemplo que se muestra en la Figura 123, lo cual nos demuestra, que pudieron enfrentarse a otra situación y a hacer uso de sus conocimientos previos para resolverla de manera efectiva.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Cateto a	6	16	3	2	7	12
Cateto b	8	25	4	3	7	40
Hipotenusa	10	30	5	3.7	10	41
Perímetro	24	71	12	8.7	24	93
Área	24	200	6	3	24.5	240

Figura 123. Respuestas comunes por casi la mitad del grupo.

Algo que nos llamó la atención es que este alumno en particular, creo sus propias fórmulas para obtener los resultados, por ejemplo, indica que para obtener la hipotenusa, hay que sumar los cuadrados de los catetos *a* y *b* y al resultado sacarle la raíz y esa será la respuesta, igual lo hace para los catetos, pues indica que al cuadrado de la hipotenusa le restará el cuadrado del cateto *a* o *b* según sea el caso, al resultado le sacará la raíz y así obtendrá la respuesta, esto nos hace creer que el alumno comprende de tal forma el tema que es capaz de estructurar estas fórmulas por el mismo.

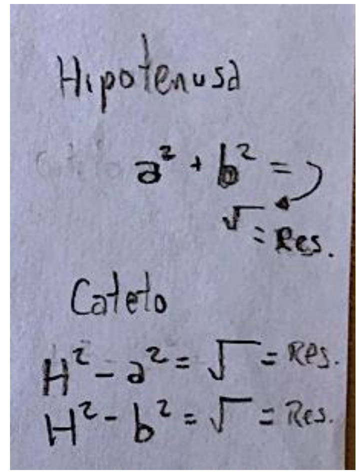


Figura 124. Fórmulas escritas por uno de los alumnos para encontrar el valor de la hipotenusa o los catetos.

Por último, es importante mencionar que creemos que los alumnos entienden mejor entre pares, pues pudimos observar como se apoyaban entre ellos para explicarse y así poder ganar el juego entre los dos, también como se comentó anteriormente, al principio sólo muy pocos estudiantes fueron capaces de calcular el valor de los catetos por lo que se hizo una interrupción y una de las alumnas paso al frente a explicarles a sus compañeros y de ahí en más ya no hubo dudas.

JuegoBASTA.MOV de 00:03 al min 00:44

A10: mmm elevan el valor de la hipotenusa al cuadrado, ósea que es multiplicarla por sí misma, y también el valor del cateto que les dan también lo elevan al cuadrado y luego a lo que les dé de la hipotenusa, le restan lo que les dio del cateto y luego al resultado le sacan la raíz cuadrada y eso es ehmm el otro cateto y ya.

M: ok, ehmm ¿alguien tiene alguna duda?

RG: No

M: ¿alguien lo hizo de alguna otra manera?

RG: (silencio)

M ¿no?

RG: (silencio)

M: ok, entonces ya les explicó su compañera, nadie tiene ninguna duda. Tienen un minuto para sacarlo.

Como se pudo observar casi el total del grupo pudo hacerlo de manera correcta, y en ésta parte se presentó una validación de la situación donde recalcamos que la alumna fue capaz de explicar y demostrar su procedimiento y los alumnos prestaron atención y decidieron adoptar el mismo procedimiento.

VALIDACIÓN DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En este contraste lo que se hace es la confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori, es aquí donde fundamentaremos la validación de las hipótesis formuladas a lo largo de nuestra investigación, es decir, compararemos lo que creímos que sucedería con lo que realmente sucedió.

SITUACIÓN 1: "Tipos de triángulos y áreas de los cuadrados".		
SITUACIÓN	**A PRIORI**	**A POSTERIORI**
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los alumnos empezarán a manipular el material didáctico de triángulos construidos en fomi y asociarán las características descritas con los triángulos.	Los alumnos iniciaron a manipular el material, algunos sostenían un triángulo en las manos y lo giraban tratando de encontrar alguna característica, otros los acomodaron sobre el pupitre y los observaban, otros incluso sacaron un compás para determinar la medida de los ángulos. Pocos de los estudiantes no se percataban cuáles eran las características de los triángulos, incluso algunos alumnos decidieron utilizar la regla para determinar si dos de sus lados medían los mismo o tenían distintas medidas pues no lo podían determinar a simple vista.
La manipulación del material sirvió a la mayoría de los alumnos para poderse percatar de las características de los triángulos, pues les era más sencillo observarlos, manipularlos e incluso medirlos para poder identificarlos con las propiedades.		
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	Los alumnos indicarán cuales son los catetos y la hipotenusa haciendo uso de sus conocimientos previos individualmente,	Los alumnos creyeron que debían tomar el ángulo recto como el ángulo de referencia lo cual no era correcto. Pocos estudiantes lograron identificar cual era el ángulo recto en el

	también deberán indicar cuál es el ángulo recto en cada uno de los triángulos.	instrumento, sin embargo, la mayoría pudo hacerlo en el material (triángulos de fomi). No todos los estudiantes fueron capaces de identificar los catetos y la hipotenusa.
Nuevamente, el material didáctico formó una parte crucial en esta situación pues la mayoría pudo identificar el ángulo recto en él pero no en la hoja de trabajo debido a la posición de los triángulos. El papel de la profesora- investigadora en esta situación fue determinar si el cateto opuesto o adyacente era relevante para la situación y de no ser así no considerar si el alumno los había ubicado correctamente.		
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los alumnos en los equipos discuten y tratan de convencer a los demás integrantes de sus respuestas, esto mediante argumentos, de porque decidieron nombrar así a los triángulos y porque nombraron cateto o hipotenusa a cada lado según corresponda.	Únicamente respondían las hojas de una manera muy superficial, sin indagar un poco más en ellas, por lo que la profesora les comento que lo que debían hacer era revisar sus respuestas y explicar detalladamente porque había elegido esa opción o porqué habían determinado esa respuesta, después de haber hecho la intervención se pudo percatar que los estudiantes pusieron más esfuerzo en este inciso, pues empezaron a comentar respuesta por respuesta de los incisos anteriores.
Las intervención de la profesora-investigadora fue estratégica para dirigir el momento de validación, de tal manera que al decirles que lo que debían hacer era comparar, defender y explicar sus respuestas una por una con la intención de orientar a los alumnos, los alumnos entendieron y esto permitió generar la participación de los alumnos de tal manera que entendieron el proceso de la situación, incluso hacían uso del lenguaje matemático para expresarse, pues llamaban a los triángulos por su nombre según su clasificación y mencionaban sus características para convencer a sus compañeros.		
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los estudiantes acomodarán los cuadrados en cada lado según corresponda, determinarán las medidas	Se decidió intervenir y dar lectura nuevamente a la indicación recalcando que se refería a los lados. Algunos de los alumnos empezaron a medir todos los lados de los cuadrados

	de los cuadrados y obtendrán la medida de su área, según corresponda, después los alumnos deberán considerar si existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados y sobre todo en qué tipo de triángulo se está dando tal relación.	siendo que estos los podían determinar con la medida del lado del triángulo, y algunos alumnos si lo hicieron de esa manera pues ya no medían, simplemente ponían la misma medida. Respecto a la relación, la mayoría de los estudiantes creyó que estaba en el triángulo equilátero, pues todas las áreas eran iguales.
Hasta este momento la situación presentó un momento crucial para la construcción del conocimiento, pues hasta este punto la mayoría de los estudiantes no se percataron de una posible relación a simple vista.		
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán de los cálculos que realizaron para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto.	Los estudiantes realmente estaban validando sus respuestas, pues revisaban inciso por inciso y si algún integrante del equipo tenía una respuesta distinta lo cuestionaban sobre él porque había puesto esa respuesta y el alumno si no tenía buenos argumentos los demás lo convencían de porque no estaba en lo correcto.
Los razonamientos y las discusiones que surgieron al realizar esta actividad, revelan el proceso de cada uno de los equipos al momento de proponer sus procedimientos y validarlos, la participación de los integrantes de cada uno de los equipos, ayudó para que tuvieran la confianza de expresar sus ideas y así poder cuestionarse sobre la relación que había encontrado cada uno.		
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN	Los alumnos deberán elegir el triángulo donde consideran existe una relación y comprobarla para después compararlo con un compañero y definir si ambos encontraron la misma relación y en cuál de los triángulos.	Casi la mayoría de los alumnos encontró una relación entre las áreas construidas sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y la comprobaban únicamente haciendo cálculos matemáticos, al momento de comparar las áreas de los cuadrados casi la mayoría de los estudiantes pudo percatarse que $A + B = C$

Aquí la situación ha logrado una construcción del conocimiento paso a paso, es decir, con la ayuda del material y de sus conocimientos previos se les fue guiando de forma que ellos fueran formulando un nuevo conocimiento. También un factor que se destaca es la importancia de la validación y el trabajo entre pares, pues los equipos defendieron sus respuestas y las argumentaron para poder lograr que los demás se convencieran o no de cambiar su respuesta.		
SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor deberá decirles a los alumnos que los catetos son aquellos que se forman con el ángulo recto y que la hipotenusa es el lado más largo del triángulo rectángulos, de igual manera que las medidas de los catetos y la hipotenusa representan la medida de los lados de los cuadrados y elevándolos al cuadrado se obtiene el área, la cual es la superficie de la figura, por eso al representarlo con cuadrados todos representan su área.	La profesora- investigadora pasó al frente y trazó en el pintaron dos triángulos rectángulos, el primero para mostrar las características que posee y el segundo para indicar los catetos e hipotenusa, se les mostró a los estudiantes con el material y un dibujo en el pintarrón que el triángulo rectángulo es el único que tiene un ángulo de 90° y es el único que tiene catetos e hipotenusa y que sus tres lados son de distinta medida, se hizo una comparación con el triángulo equilátero y el triángulo obtusángulo para que los alumnos pudieran observar las diferencias entre uno y otro. Se les comentó a los alumnos que los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y se les mostró como identificarlos en el triángulo, también, que la medida del lado del triángulo determinaba la medida del lado del cuadrado, lo cual se les comentó mostrándoselos con el material, la única relación que había en el ejercicio era que en el triángulo rectángulo el área del cuadrado *a* más el área del cuadrado *b* era igual al cuadrado *c*, lo cual debían haber expresado de la siguiente manera Área **A** + Área **B** = **C**. Para que esto fuera más claro para los alumnos se escribió

		en el pintarrón los valores de las áreas de los cuadrados del triángulo rectángulo, donde el lado A tenía un área de 16 cm^2 y el lado B tenía un área de 9 cm^2 y al sumar estas dos áreas daba como resultado el área del lado C.
Esta situación determina un importante proceso, pues los estudiantes son capaces de relacionar sus procesos con lo que explica la profesora- investigadora, en ese momento se decidió mostrarles a los alumnos con uso del material y un apoyo visual como lo es el pintarrón y no únicamente decírselos.		
El material didáctico manipulable pudo orientar a los alumnos para modificar sus respuestas, ya que los alumnos los medían, observaban o los manipulaban tratando de identificar las características, ellos trataban de identificar las características al observar el material y después les fue sencillo poder determinar en donde acomodar los cuadrados.		
El papel de la profesora- investigadora fue crucial, pues el objetivo principal fue guiar a los alumnos para que pudieran recorrer las situaciones que les permitiera adquirir conocimiento y esto se logró mediante las participaciones de la profesora-investigadora, ya que ella intentó devolver a los alumnos, mediante preguntas, el conocimiento previo que ellos tenían para que pudieran formular nuevo.		

SITUACIÓN 1: "Tipos de triángulos y áreas de los cuadrados".	
ANÁLISIS A PRIORI	Los alumnos deberán darle un nombre a cada triángulo según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, se espera que puedan percatarse que el triángulo equilátero es aquel que tiene todos su lados de la misma medida, que el isósceles es aquel que tiene sólo dos lados de igual medida y que el escaleno es aquel que tiene todos sus lados de distinta medida según la clasificación de la medida de sus lados, según la clasificación de la medida de sus ángulos se espera que los alumnos se percaten de que el triángulo acutángulo es aquel que tiene todos sus ángulos agudos menores que 90° y el rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°), por último el triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso, es decir, mayor que 90°. También se espera que los alumnos puedan darse cuenta que los únicos triángulos que tienen catetos e hipotenusa son los triángulos rectángulos.

	Se espera que los alumnos se percaten que la medida de cada lado del triángulo determina la medida del lado del cuadrado, se espera que los alumnos puedan identificar que cuadrados van en cada lado y que puedan calcular el área de éstos correctamente. Se espera que los alumnos se percaten que la única relación que hay en el ejercicio realizado es que en el triángulo rectángulo el área del cuadrado a más el área del cuadrado b es igual al cuadrado c, lo cual deben expresar de la siguiente manera Área **A** + Área **B** = **C**. Se espera que a los alumnos entiendan y les quede claro que el triángulo rectángulo es el único que tiene catetos e hipotenusa por sus características: los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo. También se espera que los alumnos les quede claro que el área de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado y que los cuadrados pequeños representan el área y que únicamente se da una relación en un triángulo rectángulo.
POSIBLES ERRORES	Los alumnos podrán creer que todos los triángulos tienen cateto e hipotenusa, es por eso que se les dará la definición necesaria para que los alumnos con ayuda de su material didáctico se percaten que solo existen en el triángulo rectángulo. Los alumnos podrían equivocarse al momento de calcular el área, podrían sumar sus lados en vez de multiplicarlos y de igual manera podría caer en la dificultad de no identificar que los cuadrados pequeños están representando toda el área del cuadrado, esto se prevé, lo cual se espera aclarar con la siguiente situación. También los alumnos pueden creer que existe una relación en todos los triángulos pero esto se prevé con la actividad siguiente donde se mostrará que la relación sólo se da en triángulos rectángulos.
ANÁLISIS A POSTERIORI	Debido a la cantidad de datos por analizar se decidió únicamente enfocarse en los triángulos rectángulos donde la mayoría de los estudiantes encontraron al menos una característica de ellos, es decir, pudieron reconocer que tiene un ángulo de 90° o bien, que es un triángulo que tiene catetos o hipotenusa. De igual manera, la profesora- investigadora decidió no considerar si los alumnos habían marcado el ángulo de referencia para poder determinar el cateto opuesto o el

	adyacente, pues en la indicación no se previno decirles a los estudiantes que debían hacerlo, sin embargo, solo algunos estudiantes pudieron identificar los catetos y la hipotenusa. La mayoría de los estudiantes pudieron identificar el ángulo recto en el material didáctico pero no en el instrumento lo cual nos demuestra que el material didáctico los ayudó a identificar algunas características. Casi en su totalidad el grupo pudo percatarse de que la medida de los lados del triángulo determinaban la medida de los lados de los cuadrados y no tuvieron dificultad al momento de tener que acomodarlos, en muy pocos casos los alumnos tuvieron que medirlos para poder determinar la medida. En una primera instancia la mayoría de los alumnos creyeron que la relación estaba en el triángulo equilátero, pues argumentaban que todas las áreas de sus cuadrados eran iguales, y hubo algunos caso que a simple vista pudieron percatarse que había una relación en el triángulo rectángulo por la medida de sus áreas. Sin embargo, no fue hasta el momento que tenían que expresarlo que casi la mitad del grupo pudo expresar correctamente que Área **A** + Área **B** = **C**. Al momento de la institucionalización los alumnos entendieron que el triángulo rectángulo es el único que tiene catetos e hipotenusa y que los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo. También, que la relación se esta dando en el triángulo rectángulo únicamente pues al sumar el área del cateto A con el cateto B, se obtiene el área de la hipotenusa C.
ÁREA DE MEJORA DETECTADA EN LA APLICACIÓN.	En la indicación nunca se les dijo a los alumnos que debían marcar el ángulo de referencia y debido a esto los alumnos no pudieron identificar el cateto opuesto o el cateto adyacente. Algunos alumnos creyeron que la relación a la que se hacía referencia era que todas las áreas de los cuadrados del triángulo equilátero eran iguales, para una futura aplicación se recomienda marcar un ángulo para que los alumnos lo tomen como referencia.

SITUACIÓN 2: “Existe una relación sólo en triángulos rectángulos.”.		
SITUACIÓN	**A PRIORI**	**A POSTERIORI**

<table>
<tr><td>SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN</td><td>Los estudiantes acomodarán los cuadrados pequeños en los cuadrados grandes y determinarán cuántos cuadrados deberán poner en la base y en la altura de cada cuadrado de fondo, también determinarán cuántos cuadrados pequeños utilizaron para cubrirlo, se espera que los alumnos se den cuenta de que se trata del área del cuadrado y además que si junta los cuadraditos de los dos cuadrados de los catetos podrán a rellenar el cuadrado de la hipotenusa.</td><td>Los alumnos iniciaron a manipular el material y a realizar lo que se les indicó, rellenaron los cuadrados con las unidades cuadradas, e identificaron una manera de determinar el número de unidades cuadradas sin tener que contar una por una.</td></tr>
<tr><td colspan="3">En esta situación el material didáctico manipulable que se les proporcionó a los equipos logró que fuera utilizado por todos los integrantes, de manera que trabajaran en conjunto, que se apoyaran y que discutieran sobre lo que harían para resolver la actividad, con la intención de que el material sirviera de apoyo para lograr una construcción de la relación.</td></tr>
<tr><td>SITUACIÓN DE VALIDACIÓN</td><td>Los estudiantes se pondrán de acuerdo con sus compañeros de equipo sobre lo que realizaron, además se apoyarán en el material didáctico para convencer a los demás equipos de que el procedimiento que siguieron es el correcto.</td><td>Se llevó a cabo en plenaria, se eligió a unos de los equipos al azar y se le pidió que pasarán al frente, la dinámica que se siguió fue que la profesora-investigadora leía los planteamientos o las preguntas, el equipo que estaba al frente respondía y explicaba por qué había decidido dar esa respuesta y después se les preguntaba a los demás estudiantes si alguien tenía alguna respuesta distinta o si alguien lo había deducido de otra manera. Uno de los aportes muy valiosos que surgió por</td></tr>
</table>

		parte de uno de los estudiantes fue que se percató que los cuadrados construidos sobre los catetos representan también el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y argumento que si hubiera juntado todas las unidades cuadradas de los dos cuadrados hubiera podido rellenar el cuadrado azul
Esta manera en que se llevó a cabo la validación fue muy valiosa, ya que los estudiantes pudieron escuchar distintas respuestas, compartir sus procesos con todo el grupo y validar si lo que hicieron fue correcto o no, durante este proceso hubo respuestas de todo tipo, sin embargo, todos dedujeron que al sumar las áreas de los cuadrados de los catetos podrían obtener el área del cuadrado construido sobre los catetos.		
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Los alumnos al leer las indicaciones y construir lo que se les indica estarán en contacto con el medio y de igual manera estarán haciendo uso de sus conocimientos previos al momento de determinar la diagonal y construir lo que se les pide y el alumno tendrá que formular de qué manera formarán el cuadrado cuyo lado se la base del triángulo.	Se les dio el espacio y el tiempo para que ellos trabajaran y determinarán la manera en que debían realizarlo, los estudiantes iniciaron a realizar paso por paso. Sin embargo, hubo muchos casos donde los estudiantes no siguieron bien las indicaciones o se confundieron pues muy pocos alumnos fueron los que lo realizaron de manera correcta, un ejemplo de ésta situación fue una alumna que puso una casa en forma de cuadrado con techo triangular y a un costados los terrenos.
Los estudiantes al ir realizando la construcción, generó que se encontrarán en la situación de acción y formulación, pues estaban en contacto con el medio al ir leyendo las instrucciones y construir por ellos mismos el material y al mismos tiempo formulando pues debían hacer uso de sus conocimientos previos para determinar las diagonales, los ángulos, la forma de construirlo, acomodarlo, etc.		

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN	Los alumnos después de haber resuelto la actividad, deben convencer a los demás de que sus respuestas son correctas, con argumentos y explicaciones válidas que le permitan sustentar su respuesta, es decir, que los alumnos se percaten que los triángulos pueden cubrir la superficie del cuadrado mayor y sobre todo del tipo de triángulo con el que se está trabajando para que puedan concluir que con los cuadrados menores pudieron representar el área del cuadrado mayor.	La actividad se llevó a cabo en plenaria para que una de las alumnas explicará paso a paso lo que había realizado, cómo lo realizó y por qué lo determinó de esta manera, esto debido a que no todos los estudiantes realizaron de manera correcta la actividad, Uno de los puntos muy importantes fue que la profesora- investigadora iba haciendo preguntas estratégicas de forma que la alumna comentó que el haber acomodado los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa le había servido mucho para comprobar que efectivamente el área de los cuadrados de los catetos representa el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Otro punto importante que argumentó fue que a pesar de que el triángulo tenía dos lados de la misma medida seguía siendo un triángulo rectángulo, porque al haber unido los dos triángulos se formaba un ángulo recto.
Las intervenciones de la profesora-investigadora para dirigir el momento de validación, fueron importantes y se dieron durante momentos clave, ya que intervino en los momentos precisos siempre con la intención de orientar a la alumna que se encontraba al frente a que les explicará al resto del grupo lo que ella había deducido hasta ese momento, para que ellos mismos trataran de entender sus respuestas dándolas a conocer con explicaciones claras y concisas.		
SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor deberá decirles a los alumnos que en la primer situación que realizaron todos los cuadraditos (unidades	Esta situación se inició al momento que se les mostraron algunas animaciones demostrativas del Teorema de Pitágoras, se inició por mostrar

	cuadradas) que acomodaron en cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos representan el área de cada uno y que una manera de obtener el área de éstos sería contando cada cuadradito o bien, contando los cuadrados del largo y el ancho y multiplicarlos para obtener el área, y al conocer el área de los dos cuadrados de los catetos automáticamente pueden conocer el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, o bien, que lo pueden comprobar rellenándolo. Respecto a la siguiente situación se les comentará a los alumnos que el triángulo que se forma es un triángulo isósceles por la medida de sus lados pero rectángulo por la medida de sus ángulos y que la relación que se da es la siguiente: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, o bien que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.	la comprobación de la primera actividad de esta situación, la de las unidades cuadradas, pues durante esta situación los alumnos ya no tuvieron oportunidad de vaciar las unidades de los cuadrados sobre los catetos en el cuadrado de la hipotenusa, entonces, se buscó un material visual donde los alumnos pudieran visualizar tal comprobación de manera clara y rápida, donde se tenían los cuadrados construidos en los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y los cuadrados de los catetos tenían las unidades cuadradas marcadas en ellos para que los alumnos pudieran visualizarlo. Respecto a la siguiente situación también se decidió utilizar material visual para que fuera más sencillo para los alumnos, en un inicio se comentó que el triángulo que se formaba era un triángulo isósceles por la medida de sus lados pero un triángulo rectángulo por la medida de sus ángulos y que la relación que se daba era que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa y se les mostró una distinta manera de haber acomodado los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa al que se mostró en la validación

<table>
<tr><td></td><td></td><td>por los estudiantes. Para finalizar, se les comentó a los estudiantes que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se enuncia así: “En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa” y a este enunciado se le conoce como el Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="3">El principal objetivo de estas aportaciones era orientarlos y darles las herramientas necesarias que les permitiera adquirir conocimiento y esto se logró mediante las participaciones de la profesora-investigadora, se considera que el haberles proporcionado distintas animaciones sobre el Teorema, y algunas como las que ya habían realizado ellos mismos sirvió para que se sintieran identificados con los procesos que habían realizado.</td></tr>
<tr><td>MATERIAL DIDÁCTICO</td><td>Un triángulo reforzado de fomi, tres cuadrados de cartulina batería de distintas medidas y colores.

169 unidades cuadradas.

Dos hojas blancas, colores y juego de geometría.

Una base blanca de fieltro, un triángulo rectángulo azul marino de fieltro, un cuadrado azul y cuatro triángulos de distintos colores de f.</td><td>Un triángulo reforzado de fomi, tres cuadrados de cartulina batería de distintas medidas y colores y 169 unidades cuadradas.

Respecto a las hojas blancas, los colores y el juego de geometría, se les encargo a los estudiantes que lo llevarán individualmente.
Ahora bien, respecto al fieltro, ésta actividad se descartó en la validación del instrumento y en su lugar se hicieron las demostraciones en el software Geogebra.</td></tr>
<tr><td colspan="3">El material didáctico manipulable ayudó a la resolución de la actividad, a que los estudiantes pudieran apoyarse en el para experimentar, formular e incluso comprobar sus respuestas y procedimientos.</td></tr>
</table>

PAPEL DEL PROFESOR	El papel del profesor será, en primera instancia, preparar el material, dar indicaciones, supervisar y finalmente explicará. El profesor deberá preparar el material para mostrar en la institucionalización.	La profesora- investigadora preparó el material, supervisó en todo momento a los equipos y sus integrantes, fungió como mediadora para lograr un buen argumento por parte de los estudiantes y los guio para que llegaran a crear sus propias conclusiones sobre la actividad. Finalmente explicó y mostró con el material electrónico relacionado al proceso de construcción.
El papel de la profesora- investigadora fue crucial, pues el objetivo principal fue guiar a los alumnos para que pudieran recorrer las situaciones que les permitiera adquirir conocimiento y esto se logró mediante las participaciones de la profesora-investigadora, ya que ella intentó devolver a los alumnos, mediante preguntas, el conocimiento previo que ellos tenían para que pudieran formular nuevo.		

SITUACIÓN 2: “Existe una relación sólo en triángulos rectángulos”.	
ANÁLISIS A PRIORI	Se espera que los alumnos rellenen los cuadrados base de los catetos con las unidades cuadradas y después con las preguntas que se les realizarán se espera que puedan determinar cuántas unidades cuadradas podría tener la hipotenusa para que después al empezar a rellenarlo se percaten que no les sobra ni les faltan unidades cuadradas, lo cual quiere decir que el área de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, y que el área está siendo representada con las unidades cuadradas. Se espera que los alumnos construyan correctamente los cuadrados e identifiquen la diagonal y se percaten de que el triángulo que se forma se trata de un triángulo rectángulo por la medida de sus ángulos

	pero también isósceles por la medida de sus lados y que los cuadrados están construidos sobre sus catetos y la hipotenusa. Se espera que los alumnos puedan acomodar los cuadrados de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa de la manera más sencilla posible. Es importante que los alumnos puedan plantear la relación con sus propias palabras, pero se espera que lo expresen de tal manera que se entienda que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. También en la actividad de las figuras de fieltro se espera que los alumnos puedan acomodar las figuras de tal manera que no se tape ningún pedazo y que no quede fuera ninguna figura. Se espera que con la visualización de ciertas demostraciones en Geogebra sea más sencillo para los alumnos entenderlo, también se espera que los alumnos entiendan que en todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa.
DIFICULTADES ESPERADAS	Es posible que los alumnos presenten dificultades al momento de acomodar los cuadraditos, pues puede ser cansado o tedioso para ellos, sin embargo, es necesario que lo hagan. Esto se prevé acomodándolos en equipos de 3 personas para que se apoyen y lo realicen entre todos y sea más rápido y menos pesado. Es probable que los alumnos no identifiquen o no sepan cómo trazar la diagonal del cuadrado lo cual se puede prever cuestionando a los alumnos sobre si lo desconocen o no, también podría ocurrir por

	la posición del triángulo que los alumnos no se percaten del ángulo recto y esto se prevé en los cuestionamientos, pues se les pide a los alumnos que determinen la medida de los ángulos del triángulo.
ANÁLISIS A POSTERIORI	En esta situación se puede ver claramente el gran beneficio que tuvo el hacer uso del material didáctico, pues casi el total del grupo pudo determinar las áreas de los cuadrados y así, se percataron de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, también un factor importante es que ninguno de los alumnos tuvo que contar cuadrito por cuadrito para determinar el total de unidades cuadradas, pues pudieron hacerlo multiplicando lado x lado que es lo ideal, de igual manera la mayoría de los estudiantes pudo establecer la relación entre las áreas de los cuadrados y sobre todo, argumentaron porque se daba de esa manera, también casi el total del grupo se percató de que esto solo ocurre con el triángulo rectángulo pero algunos no pudieron argumentar el porqué. Los estudiantes tenían que realizar una construcción y responder unas preguntas, podemos decir que no fue del todo exitosa, pues los alumnos no se sintieron motivados o no quisieron realizarla por factores externos pues habían expresado no haberlo realizado por tener dudas, pero una vez que se les explicó paso a paso lo que debía hacerse dijeron ya no tener dudas, sin embargo, tampoco lo realizaron.
ÁREA DE MEJORA DETECTADA EN LA APLICACIÓN.	Efectivamente, los estudiantes externaron molestia e incluso sentirse desesperados por no poder acomodar de forma perfecta las unidades cuadradas a pesar de ser 3 integrantes en el equipo, para una futura aplicación se recomienda realizar unidades de mayor tamaño.

SITUACIÓN 3: "Resolución de diversas situaciones haciendo uso del Teorema de Pitágoras".		
SITUACIÓN	**A PRIORI**	**A POSTERIORI**
SITUACIÓN DE ACCIÓN Y FORMULACIÓN	El alumno estará en contacto con el medio al leer el problema, pues estará imaginando la situación, tratando de crear una perspectiva o bien considerando que es lo que debe hacer, después el alumno se encontrará en la situación de formulación al responder las preguntas, pues tendrá que determinar las medidas de los lados de la casa y el tamaño del terreno que le regalaron y los alumnos tendrán que argumentar por qué creen que cabe las dos cosechas en un solo terreno.	Los alumnos leyeron el problema y trataron de imaginarse la situación, así que ellos mismos trataron de crear una perspectiva para poder considerar lo qué debían hacer, después de esto, pasaron a estar en la situación de formulación pues en la primer indicación se les pedía la medida de los lados de la casa de Don Luis siendo que el problema únicamente daba el área de dos de los terrenos construidos sobre los lados de la casa, así que los estudiantes debieron hacer uso de sus conocimientos previos para poder considerar lo que debían hacer para poder determinarlo.
La intención de esta situación era que los alumnos pudieran visualizar la situación presente en el problema de tal forma que los alumnos formularan sus propios preceptos y después cuando lo experimentaran con el material pudieran validarlos y así motivar a la construcción del conocimiento.		
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN, ACCIÓN Y FORMULACIÓN	Durante esta situación los alumnos deberán reunirse con otros compañeros y comparar sus respuestas, deberán defenderlas y deducir quien está en lo correcto y quien no y esto podrán comprobarlo con el uso del material didáctico que les entregará el profesor, los alumnos	En la situación de validación, se pudo observar que algunos estudiantes explicaban a otros porque habían hecho el bosquejo de cierta forma y convencían a los demás de porque estaban ellos en lo correcto. Se les entregó el material necesario para que ellos pudieran comprobar si ambas cosechas cabían en el tercer

	deberán hacer uso del material y considerar lo que deben hacer para poder demostrar que ciertamente las dos cosechas caben en el otro terreno y uno de los equipos pasará al frente a realizar la demostración y la validación de sus respuestas.	terreno o no, los alumnos tuvieron que identificar que cosecha iba en cada lado según las dimensiones que se les habían dado anteriormente. Una vez que todos los equipos realizaron el vaciado se pudieron percatar que efectivamente cabían ambas ahí.
En esta situación la organización de los equipos influyó de gran manera, en un principio porque pudieron argumentar y discutir sus distintos procesos al momento de realizar su bosquejo y después al momento de comprobar con el material didáctico que se les proporcionó, pues todos trabajaron en conjunto acomodando los cosechas y después discutiendo la mejor manera de comprobarlo, la intención del material fue para apoyar la construcción del conocimiento sobre la relación entre las áreas de los cuadrados construidos alrededor del triángulo rectángulo.		
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN	Los alumnos tendrán que hacer uso de sus conocimientos previos para que puedan expresar algebraicamente la relación que se da en el Teorema y tendrán que deducir que se trata del Teorema de Pitágoras.	Los alumnos fueron capaces de determinar la relación que habían estado trabajando, hicieron uso de sus conocimientos previos y los adquiridos recientemente para poder expresarlo.
Desde un inicio de la situación el alumno ha sido guiado para poder percatarse de la relación que se da en el triángulo rectángulo, es decir, el Teorema de Pitágoras y en esta situación se le permite crear en conjunto con todo sus conocimientos una forma de expresar esa relación y después poderle dar un nombre matemático.		
SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN	El profesor debe retomar las experiencias presentadas en el aula y dar a conocer a los alumnos el concepto matemático con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (es pertinente concluir que la relación que existe entre los cuadrados	Se llevó a cabo una validación guiada, es decir, se iba cuestionando a los estudiantes sobre sus respuestas e iba identificando los diferentes procesos que siguieron para poder cuestionarlos. Se les preguntó si cabían las dos cosechas en el otro terreno y también si había alguna otra

	de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa" y que hay muchas situaciones en la vida diaria en las que pueden hacer uso de este teorema y además, la manera en que se conoce el teorema de forma algebraica es la siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$.	manera de comprobarlo, de igual manera, se les cuestionó sobre las medidas de los lados de la casa y todos estuvieron de acuerdo en el resultado y en el proceso para obtenerlos. Después, se les comentó a los estudiantes que en el problema podían haber hecho uso del Teorema de Pitágoras, puesto que se trataba de un triángulo rectángulo y anteriormente ellos ya habían hecho uso de éste y habían concluido que la relación que se daba en todo triángulo rectángulo era que " la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa" . Por último se les comento a los estudiantes que hay muchas situaciones en las que pueden hacer uso del Teorema, pero que debían estar conscientes que solo lo podrían hacer si se trataba de un triángulo rectángulo.
La participación de la profesora- investigadora en esta situación fue crucial para lograr que el alumno se sintiera familiarizado con lo que había propuesto en la situación anterior, pues las aportaciones que se realizaron en esta situación orientaron y guiaron al estudiante a identificar sus propios fundamentos con los conceptos matemáticos lo cual encamino de manera considerable al alumno a adquirir el conocimiento matemático.		
El material didáctico logró que los estudiantes pudieran comprobar y cuestionar si sus propios fundamentos habían sido los correctos o no y de no ser así, el material facilitó que se percataran de la relación que había entre los terrenos construidos sobre los catetos y el terreno construido sobre la hipotenusa.		

SITUACIÓN 3: "Resolución de diversas situaciones haciendo uso del Teorema de Pitágoras".

ANÁLISIS A PRIORI	Se espera que los estudiantes puedan realizar un bosquejo de la casa de Don Luis, se percaten de que se trata de un triángulo rectángulo y así se percaten que para poder determinar la medida del lado faltante deben calcular la hipotenusa, se espera que los alumnos en primer instancia saquen la raíz cuadrada de los terrenos para determinar únicamente la medida del lado, también se espera que, sin que realicen algún cálculo ellos mismos puedan deducir que las dos cosechas cabrán en el otro terreno. También se pretende que los alumnos lleguen a expresar el Teorema de Pitágoras de la siguiente manera: $a^2 + b^2 = c^2$. Se espera que el profesor retomar las experiencias presentadas en el aula y dé a conocer a los alumnos el concepto matemático con el que han trabajado durante el desarrollo de la clase (es pertinente concluir que la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa" y que hay muchas situaciones en la vida diaria en las que pueden hacer uso de este teorema y además, la manera en que se conoce el teorema de forma algebraica es la siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$.
DIFICULTADES ESPERADAS	Es probable que los alumnos no realicen el bosquejo de la manera adecuada, o que no se percaten de que la casa es un triángulo rectángulo o que los terrenos son de forma cuadrada, pero esto se prevé al momento de entregarles el material con el bosquejo ya realizado, un que pueden cometer los estudiantes es que expresen el Teorema sin elevar las letras al cuadrado.
ANÁLISIS A POSTERIORI	A pesar de que los estudiantes no se habían enfrentado al tipo de situación que se les planteó en un inicio, los resultados obtenidos fueron muy benéficos, podemos ver claramente que el tener una visualización de la situación, es decir, realizar el bosquejo de la situación ayuda a que los estudiantes formalicen procesos y puedan resolver de una manera exitosa, también cabe mencionar que el material ayudó a los estudiantes a comprobar dicha relación y a algunos incluso les

	sorprendió como efectivamente sí cabían las dos cosechas en el terreno nuevo. En esta situación es importante recalcar que el material didáctico fue muy importante pues los alumnos trabajaron de manera participativa y entusiasta y se pudo ver claramente al momento de analizar los resultados, pues después de realizar toda la situación hubo solamente un caso que no pudo expresar ni reconocer el Teorema.
ÁREA DE MEJORA DETECTADA EN LA APLICACIÓN.	La profesora- investigadora se pudo percatar de diversas situaciones que se presentaron, por ejemplo, en el problema no decía cuántos lados tenía la casa, pero sí daba a entender que tenía tres lados puesto que en uno tenía la siembra de tomates, en otro los limones y el otro era el que le regalaría el gobernador, sin embargo, algunos estudiantes no se percataron de esto y lo primero que hicieron fue determinar la casa de cuatro lados e iniciaron a tener complicaciones pues no podían determinar la medida de los otros lados, para una futura aplicación se sugiere solventar este detalle.

DISCUSIÓN

En el proceso de validación nos pudimos percatar que en un inicio nos planteamos objetivos primordiales y después de experimentar, revisar y analizar; nos hemos dado cuenta que el formular indicaciones claras y socializarlas de manera adecuada es un factor clave para la realización correcta de las actividades planteadas, y por todas las respuestas y argumentaciones que nos han brindado los estudiantes nos hemos podido percatar si el alumno ha logrado adquirir o bien, se ha apropiado de un conocimiento.

También nos hemos podido percatar de dos aspectos fundamentales de la situación, que son la participación de la profesora- investigadora y el material didáctico.

La profesora- investigadora estuvo fungiendo como guía para permitir que los alumnos construyeran su conocimiento, con las estrategias pertinentes e intervenciones al momento de llevar a cabo las sesiones.

El material didáctico jugó un papel determinante en la situación didáctica, tanto motivante y como conductor del conocimiento, pues los alumnos pudieron visualizar, experimentar y validar haciendo uso de él. Desde un inicio de la situación se pudo ver como los alumnos se apoyaron en él para poder visualizar, determinar o bien, hacer uso de sus conocimientos previos y así poder deducir, pero también una parte atractiva del material fue que les permitió a los estudiantes validar sus respuestas, pues con la ayuda del material pudieron comprobar la relación que se da entre las áreas de los cuadrados construidos en torno a los lados del triángulo rectángulo.

Así, podemos asegurar que nuestra hipótesis “La manipulación de figuras geométricas creadas como material didáctico en torno a los lados de un triángulo rectángulo puede facilitar la comprensión del Teorema de Pitágoras” Se cumplió, pues hemos podido comprobar que el material guio a los estudiantes a que formularan, después los ayudó a validar sus argumentos y por último pudieron comprobar la relación, es decir, comprendieron el Teorema de Pitágoras en términos de medidas de áreas.

Ahora bien, haciendo una introspección en nuestra pregunta de investigación: ¿Cómo propiciar la comprensión del significado del Teorema de Pitágoras en términos de medidas de áreas en alumnos de educación básica haciendo uso de material didáctico?, podemos argumentar que la comprensión viene dada entre la manipulación del material, las comprobaciones y validaciones que con él se hicieron, así como con las intervenciones oportunas de la profesora – investigadora se puede lograr la comprensión deseada del Teorema de Pitágoras, y esto se puede comprobar cuando se les plante la situación problema. Se logró que los estudiantes pudieran comprobar y cuestionar si sus propios fundamentos habían sido los correctos o no y de no ser así, el material facilitó que se percataran de la relación que había entre las áreas de los cuadrados construidos en torno a los lados del triángulo rectángulo es conocida como el Teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO 6: CONCLUSIÓN.

“Un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera” (Brousseau ,1986).

Desde un inicio fueron muchos las factores que motivaron esta investigación, desde creencias personales hasta el propio contenido matemático, es preciso decir que a lo largo de esta investigación no hemos dejado a un lado los objetivos planteados en un inicio, pues la importancia de alcanzarlos eran nuestra mayor motivación y para esto debíamos disponer de los medios necesarios para lograr que los alumnos accedieran al conocimiento matemático.

Al revisar los antecedentes nos pudimos percatar de la importancia que tiene la Geometría en la educación secundaria, ya que haciendo uso de ella los alumnos serán capaces de explorar, conocer características así también como propiedades de las figuras y cuerpos geométricos y de igual manera incluso justificar las fórmulas que se utilizan para el cálculo sin dejar a un lado las múltiples demostraciones del Teorema de Pitágoras y sabíamos que el material didáctico motivaría a los estudiantes a lograrlo.

Al revisar la bibliografía nos percatamos que había una problemática común, donde no se le daba la importancia necesaria a los contenidos geométricos, los alumnos solo recitaban fórmulas y lo más importante para nosotros, los alumnos desconocían el significado del Teorema, fue en torno a estas problemáticas que nosotros decidimos elaborar y validar una propuesta.

Sabíamos hasta este punto que queríamos diseñar una secuencia y con ella crear las condiciones necesarias para lograr que los estudiantes se apropiaran del conocimiento, en este punto la revisión de otras secuencias que implementaban el uso del material didáctico fue determinante pues identificamos los procesos y las actividades que facilitaban la comprensión.

El elegir la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico nos permitió conocer todos los componentes que estarían alrededor del aprendizaje, nos proporcionó las pautas necesarias y nos dio a conocer las relaciones establecidas entre el medio, el profesor y el alumno, todo alrededor del saber. Consideramos que fue un gran apoyo para nosotros y sobre todo para poder haber llevado a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje, gracias a las situaciones fuimos capaces de guiar a los alumnos.

La Ingeniería Didáctica, igual que el marco teórico tienen un gran peso en nuestra investigación, ya que ambos nos fueron guiando, sin embargo, esta metodología nos dio las pautas necesarias, y a través de sus fases fuimos capaces de identificar todos los factores necesarios para diseñar nuestra propuesta y poder predecir cualquier posible suceso de forma que se pudieran lograr nuestros objetivos y así fue como la mayoría de los estudiantes pudieron identificar la relación del Teorema de Pitágoras.

Cabe destacar que el material didáctico jugó un papel determinante en la situación didáctica, tanto motivante y como conductor del conocimiento, pues los alumnos pudieron visualizar, experimentar y validar haciendo uso de él. También una parte atractiva del material fue que les permitió a los estudiantes validar sus respuestas, pues con la ayuda del material pudieron comprobar la relación que se da entre las áreas de los cuadrados construidos en torno a los lados del triángulo rectángulo. Reflexionando sobre el material didáctico, podemos decir, que es un apoyo para el proceso de la enseñanza- aprendizaje, fungió como guía de comprobación en el aprendizaje de los alumnos, pues en distintas situaciones los estudiantes lo utilizaron para comprobar las relaciones entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, así que podemos decir que el material es un gran potencial para el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Respecto a nuestro instrumento podríamos realizar adecuaciones, pues después de experimentar y analizar los resultados nos hemos podido percatar de elementos que no habíamos considerado y esto pudo ser determinante al momento que el alumno se enfrentó a las distintas situaciones.

Por último, respecto al tipo de material que trabajamos en cada situación no tuvimos ningún problema y creemos que fue el adecuado, sin embargo en la actividad donde su utilizan las figuras de fieltro, se considera que no es necesario utilizar este tipo de material, pues puede ser útil cualquier otro, respecto al fomi también fue útil pero se puede utilizar alguno otro según las posibilidades del investigador, lo que si se recomienda es el uso de la cartulina batería, pues fue muy útil.

Finalmente podemos concluir argumentando que hemos cumplido con nuestros objetivos y que, los resultados de esta investigación podrían ser de ayuda para futuras investigaciones, pues nos pudimos percatar que el uso correcto del material didáctico, las comprobaciones y validaciones que se llevaron a cabo y las intervenciones de la profesora – investigadora lograron que los alumnos tuvieran una comprensión, es decir, se apropiaran del conocimiento de las relaciones que existen entre los cuadrados de un triángulo rectángulo, pues los alumnos pudieron comprobar y crear sus propios fundamentos, el material les facilitó que se percataran de la relación que había entre las áreas de los cuadrados construidos en torno a los lados del triángulo rectángulo, conocida como el Teorema de Pitágoras.

Por otra parte, como estudiante de la Maestría en Matemática Educativa debo decir que esta etapa me ha servido mucho, he considerado aspectos que antes no consideraba, como el volver a replantear mis propias creencias, pues es importante que como profesores siempre estemos abiertos al cambio y en este caso yo tuve que estar dispuesta a volver a considerar todo lo que había planteado en un inicio para mejorarlo y obtener mejores resultados, pues el mayor objetivo que tengo como profesora es lograr que los alumnos adquieran un aprendizaje, lo primero que aprendí en la maestría fue reflexionar, aprendí a poner en orden mis ideas y a considerar que es lo que me falta y que puedo mejorar. También aprendí a valorar las opiniones y los comentarios de mis colegas, pues constantemente se nos enseñó a replicar para así sugerir algunas cosas para mejorar, e igualmente a aceptar comentarios para favorecer nuestro trabajo.

También aprendí la gran importancia de la formación docente, pues en nuestras manos está la educación de las futuras generaciones, los docentes debemos estar comprometidos con nuestro papel pues somos un ejemplo para los alumnos, pero sobre todo debemos estar preparados para fomentar el aprendizaje en ellos.

De igual manera, ahora sé que para ser profesora de matemáticas no basta con saber matemáticas, sino que va más allá, es tener un panorama más amplio de todos los aspectos que están involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.

Dentro de las sugerencias que podemos realizar para futuras investigaciones que quieran realizar una situación didáctica podemos aclarar los siguientes puntos:

Por ejemplo en la situación 1 no poner todos los tipos de triángulos, pues con dos o tres será suficiente para detectar si el alumno logra diferenciar el triángulo rectángulo, de igual manera pedirles a los alumnos que únicamente identifiquen los catetos, la hipotenusa y el ángulo recto, pues no es necesario hasta este nivel que ellos identifiquen el cateto opuesto o el cateto adyacente. Respecto a las "posibles relaciones" a las que se hace hincapié en esta primera situación no cambiaríamos nada, pues pedirles a los alumnos que la identifiquen y luego la comprueben expresándola nos ha dado buenos resultados, pues se fue guiando a los estudiantes.

Respecto a la segunda situación el acomodo de las unidades cuadradas fue tedioso para los estudiantes, pues los cuadrados en torno a los lados del triángulo rectángulo eran grandes y por lo tanto había muchas unidades que acomodar, por lo que sugerimos, sean más pequeñas las figuras para que no sea tan extenuante para los alumnos. Respecto a la construcción, la cual no fue objetiva para nuestra investigación pues la mayoría no la realizó, sugerimos modificarla, guiarla o bien cambiarla por otra actividad donde se mantenga el objetivo.

Consideramos que a la situación 3 la única modificación que haríamos sería detallar en el problema que la forma de la casa de Don Luis es un triángulo rectángulo y que los terrenos son cuadrados, pues en el problema lo hemos planteado de tal forma que los alumnos pueden hacerlo de muchas maneras posibles y no llegar a relacionarlo con el Teorema.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988) *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Apolinar, E. S. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Monterrey México. Disponible desde: http://www.aprendematematicas.org.mx/

Área, M., Parcerisa, A. y Rodríguez, J. (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios.* Ed: Grao.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Iberoamérica, pp. 33-59.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática*, *13*(3), 5-21.

Aznar, E. (2007). *Biografía de Pitágoras.* Recuperado de http://www.ugr.es/~eaznar/pitagoras.htm

Barrantes, M., (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para el maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje*, Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Extremadura, Bajadoz, España.

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Revista Números (70)*. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

Bautista, J. (2010): *"Los materiales como mediadores"*, en www.investigalog.com/el_juego_como_metodo_didactico/tema8los-materialescomomediadores/. Consultado el 13 de septiembre del 2017.

Brousseau G. (1994): "Los diferentes roles del maestro" en Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Paidós Educador.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématique, p 33-115.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas, trad. de Dilma Fregona, Buenos Aires, Libros del Zorzal, p 125.

Brousseau, G. (2012). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas.* p.1-12.

Cañadas, M. (2001). *Demostraciones del Teorema de Pitágoras para todos.* Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/258/

Cañadas, M. (2002). *Razonamiento Inductivo Puesto De Manifiesto Por Alumnos De Secundaria.* Tesis de doctorado no publica, Universidad de Granada, España.

Cascallana, M. T. (1988). Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid, Santillana.

Chamorro, M. C. (2003) Didáctica de las matemáticas. Pearson Prentice Hall. Madrid.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *1*(2), 48-56.

De Icaza, A. (2014). *Matemáticas 3,* México D.F. Santillana

Doménech, J. y Viñas, J. (1997): La organización del espacio y del tiempo en el centro educativo. Barcelona, Grao.

Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (comps.), Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. 9ª. Reimpresión. Paidós.

García, S. & Buitrago, J., (2012). *Estrategia de intervención para desarrollar el pensamiento espacial con la intención de lograr un aprendizaje significativo del Teorema de Pitágoras.* Tesis de licenciatura no publica, Universidad de Antioquia, Colombia.

Garciadiego, A. (2002). *El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 51. p. 251 – 270.

González, P. (2008). El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. Revista SIGMA. Vol. 2. pp. 103-130.

Hernández, R. (2016).*La desigualdad del triángulo, una secuencia didáctica para alumnos de secundaria incorporando material didáctico manipulable*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.

Mancera, E. & Basurto E., (2013). *Saberes Matemáticos 3,* México D.F.: Pearson.

Meavilla, V., (1989). *Dos demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras*. Revista suma, pp. 39-42.

Moreno, F., (2013). La manipulación de los materiales como recurso didáctico en educación infantil. Revista Estudios sobre el Mensaje Periodístico. Vol.19. pp. 329 – 337.

Moreno, J. (2013). *Retos Matemáticos 3,* México D.F. SM.

Osorio, A., Gil, C., Gómez, W., Romero, E., e Iglesias. M. (2013). *Pitágoras y el teorema de la mujer casada. Una propuesta didáctica*. (pp. 194 - 204). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay, Venezuela.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En Enseñar Matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.; análisis y propuestas. (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Perry, P., (2000). *Una propuesta para abordar el teorema de Pitágoras en clase.* Revista EMA, pp. 152- 169

Ramírez, G., Chavarría, J. Barahona, C. Y Mora, M. (2009). *Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso.* Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/).

Ramírez, S. (2011). *Teorema de Pitágoras,* México D.F. Santillana.

Restrepo, U. (2014). *Una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras a través de la comparación de áreas de figuras planas en el contexto de Van Hiele*. Tesis de maestría no pública. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Rodríguez, P. M. L. (2004). *Teoría del aprendizaje significativo.* Recuperado el de del 2012 de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria.* PNA 2(2), 61-74.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de estudios de Educación Básica 2011*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011) *Planes y Programas 2011, Guía para el Maestro, Matemáticas.* México, D.F. México: SEP.

Strathern, Paul (1999). *Pitágoras y su teorema*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Valenzuela, M., (2012). *Uso de material didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Tesis de doctorado no publica, Universidad de Granada, Chile.

ANEXO 1

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________________________ GRADO ESCOLAR:

ACTIVIDAD 1 “Tipos de triángulos y áreas de los cuadrados”.

SITUACIÓN I

1) El profesor te entregará 6 triángulos, obsérvalos e identifica uniendo el nombre de los triángulos con sus características (medidas de ángulos y de lados). Nota: un triángulo puede tener más de una característica.

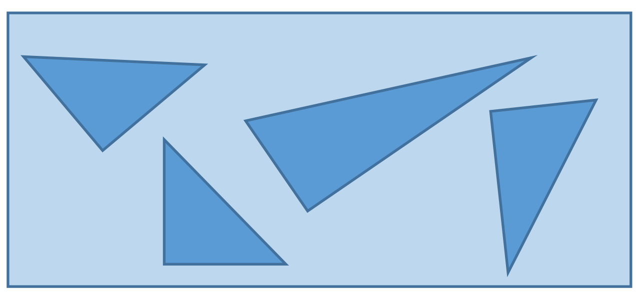
Triángulos	Características
1	h) Uno de sus ángulos mide 90°
2	i) Dos de sus lados tienen la misma medida
3	j) Tiene un ángulo obtuso, es decir mayor de 90° pero menor de 180°
4	k) Sus tres lados son de igual medida
5	l) Tiene tres ángulos agudos, es decir, menores de 90°
6	m) Sus tres lados son de diferente medida
	n) Triángulo que tiene catetos e hipotenusa

2) Ahora, ponle la letra que se te indica a cada lado del triángulo para identificar los catetos y la hipotenusa y marca el ángulo recto. (los que se muestran a continuación y el profesor te indicará a cuáles de los que tienes de fomi)

Cateto = d

Cateto = r

Hipotenusa = t



3) Después de que hayas contestado lo anterior con la información necesaria, reúnete con dos de tus compañeros, comparen sus respuestas y después respondan lo siguiente:

e) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Por qué?

f) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.

4) Separa los triángulos ( ), ( ) y ( ), mide sus lados y enseguida el profesor te entregará cuadrados de distintos tamaños los cuales tendrás que acomodar en los lados de cada triángulo (equilátero, rectángulo e isósceles) cuidando que la medida de los lados sea exactamente igual. Una vez que tengas los cuadrados acomodados en torno a cada lado del triángulo completa la siguiente tabla y lo que se te pida. NOTA: nombra a cada lado del triángulo a, b y c.

	LADO A	LADO B	LADO C
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			
TRIÁNGULO ( )			
MEDIDA DE LOS LADOS DEL CUADRADO			
ÁREA DEL CUADRADO			

5) ¿Observas alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Encierra en cual triángulo sí y tacha el que no tenga ninguna relación y argumenta por qué en cada caso.

1 ____

2 ____

3 ____

6) Ahora, completa la siguiente información poniendo la letra y signo que corresponde únicamente tomando la información de las columnas sombreadas (a, b, c, =,≠).

- Triángulo equilátero:

Área ___ + Área ___ Área ___

- Triángulo rectángulo:

Área ___ + Área ___ ◯ Área ___

- Triángulo isósceles:

Área ___ + Área ___ ◯ Área ___

7) Después de que hayas contestado lo anterior con la información necesaria, reúnete con dos de tus compañeros, comparen sus respuestas y después respondan lo siguiente:

b) En la tabla, ¿estuvieron de acuerdo en todas las respuestas?, ¿Por qué?_____

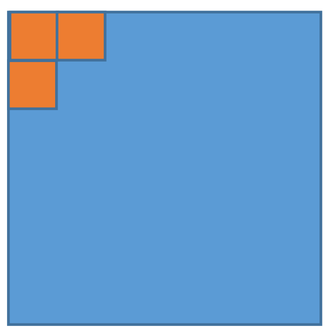
g) ¿Todos encontraron una relación? ¿En cuál triángulo y por qué?_____

h) ¿Están de acuerdo en todas ellas? ¿En cuales si y en cuales no? Argumenten su respuesta.

NOMBRE DEL ALUMNO: __________________________ GRADO ESCOLAR: ____

ACTIVIDAD 2 “Existe una relación sólo en triángulos rectángulos”.

7) Reunidos en equipos de tres personas, una vez que les hayan entregado el material: 1 triángulo rectángulo, 3 cuadrados de distintas medidas, acomoden los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo de tal manera que el lado del cuadrado embone perfectamente con el lado del triángulo y a continuación responde lo que se te pide.
8) Ahora, el profesor les entregará unos cuadrados más pequeños y con ellos deberán rellenar los cuadrados que tienen acomodados en los catetos del triángulo rectángulo que se les entregó anteriormente. (rellénenlos como se muestra a continuación hasta que los cubran completamente). Después respondan lo siguiente de manera individual.



   i) ¿Cuántos cuadraditos (unidades cuadradas) tiene el cuadrado del cateto 1?
   j) ¿Cuántos cuadraditos (unidades cuadradas) tiene el cuadrado del cartero 2?
   k) Ahora, con la información anterior, ¿Cuántos cuadraditos (unidades cuadradas) tiene el cuadrado de la hipotenusa?
   l) ¿Tiene alguna relación con el área de los cuadrados? ¿A qué crees que se deba? Explica lo que observas.
   m) ¿Esto ocurre únicamente en el triángulo rectángulo?
9) Ahora, comparen sus respuestas y respondan lo siguiente: estuvieron todos de acuerdo
   n) ¿Tuvieron las mismas respuestas? ¿Cuáles si, cuáles no y por qué?
   o) ¿Cuál creen que es la relación? Argumenten su respuesta.

10) De manera individual realiza lo que se te indica.

d) Toma una hoja de papel y traza un cuadrado de tamaño mediano (entre 4 y 8 cm de lado), traza sus diagonales y recorta el cuadrado, después recórtalo por una de sus diagonales para formar dos triángulos.

e) Ahora con los dos triángulos que obtuviste, forma un triángulo isósceles con un ángulo de 90° y construye un cuadrado para cada uno de sus lados. Recorta esos cuadrados de la manera más sencilla que puedas.

f) Con esas piezas trata de formar el cuadrado cuyo lado sea la base del triángulo.

11) Después de haber realizado lo anterior, realiza lo que se te pide y responde las siguientes preguntas, argumentando cada una de ellas.

f) Pega en la parte de atrás las figuras que formaste.

g) ¿De qué tipo de triángulo se trata?

h) ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos?

i) Si consideras el triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor?

j) De qué manera expresarías la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor.

12) Ahora, reúnete con un compañero para que puedas comparar sus respuestas con las tuyas y respondan lo siguiente:

d) ¿Ambos lo hicieron de la misma manera? ¿Por qué?

e) ¿Creen que haya más maneras de formar los cuadrados con las piezas? ¿Cuáles?

f) Respecto a las preguntas, ¿Contestaron lo mismo? ¿En qué difirieron y por qué?

NOMBRE DEL ALUMNO: ___________________________ GRADO ESCOLAR: ____

ACTIVIDAD 3: "Resolución de diversas situaciones haciendo uso del Teorema de Pitágoras".

Actividad

7) De manera individual lee la siguiente situación y realiza lo que se te indica.

Don Luis tiene dos terrenos alrededor de su casa, uno de 25 m^2 y el otro de 144 m^2, en uno siembra zanahorias y en el otro tomates, sin embargo, tuvo algunos problemas con las escrituras de la casa y tuvo que entregar ambos terrenos al gobierno, como recompensa el gobernador le obsequió el terreno que estaba en el otro lado de su casa y le aseguro que ahí cabrían sus dos cosechas pero Don Luis no cree que sea posible. Ayúdalo a comprobar si cabrán sus dos cosechas.

   d) ¿Cuánto miden los lados de la casa de Don Luis? Realiza un bosquejo
   e) ¿De qué tamaño es el terreno que le regalaron a Don Luis?
   f) ¿Crees que quepa la cosecha de zanahorias y tomates en el nuevo terreno? Argumenta tu respuesta.

8) Reúnete con tres de tus compañeros y respondan lo siguiente:
   d) ¿Estuvieron de acuerdo en todas las respuestas? ¿En cuáles sí y en cuáles no?
   e) Compruébenlo con el material que les entregará el profesor (bosquejo). Representen la siembra de zanahorias con las chaquiras naranjas y la siembra de tomates con las chaquiras rojas.
   f) Demostración colectiva.

9) El hecho de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede expresar de la siguiente forma, asigna letras y completa la expresion:

_________________ + __________________ = ________________

10) ¿Cómo se le conoce a esta relación?

Reúnete con un compañero para jugar "Basta".

6) Cada uno tome su calculadora
7) A la cuenta de 3 empiecen a completar la siguiente tabla
8) El que complete primero, dirá "¡Basta!" y el contrincante dejará de escribir
9) El que tenga más aciertos será el ganador de este juego.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Cateto a	6					
Cateto b	8					
Hipotenusa						
Perímetro						
Área						