UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

José Alonso del Río Ramírez

Directores de Tesis:

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dra. María Mercedes Palarea Medina

Dr. Martín Manuel Socas Robayna

Zacatecas, Zac., Julio, 2014

Con todo mi cariño y
amor para las
personas que hicieron
todo en la vida para
que yo pudiera lograr
mis sueños,

A mis padres

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. José Alonso del Río Ramírez estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 31de Julio del 2014

Dra. María de las Mercedes Palarea Medina
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Dr. Martín Manuel Socas Robayna
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

M.C Nancy Janeth Calvillo Guevara
Departamento de Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Zacatecas

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. José Alonso del Río Ramírez estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa.** Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 31 de Julio del 2014

Dra. María de las Mercedes Palarea Medina Departamento de Análisis Matemático Universidad de La Laguna	Dr. Martín Manuel Socas Robayna Departamento de Análisis Matemático Universidad de La Laguna

M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara
Departamento de Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Zacatecas

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 31 del mes de Julio del año 2014, el (la) que suscribe José Alonso del Río Ramírez alumno(a) del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 25602354, manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado "El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico" bajo la dirección de M. C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, Dra. María de las Mercedes Palarea Medina y Dr. Martín Manuel Socas Robayna.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

José Alonso del Río Ramírez

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por su apoyo y patrocinio en la realización de este proyecto de tesis

Becario no. 500898

Agradecimientos

A mi familia, por apoyarme en todo momento, darme fuerza para lograr mis objetivos y brindarme su apoyo incondicional.

A la Secretaría de Educación (SEDUZAC), por las facilidades para culminar este grado.

A mis asesores Mtra. Nancy Janeth Calvillo Guevara, Dra. Ma. de las Mercedes Palarea Medina y Dr. Martín Socas Robayna por sus esfuerzos, enseñanzas y atenciones en el transcurso de este proyecto.

Al grupo de didáctica de la matemática del área de análisis matemático de la ULL, por la amistad y los sabios consejos que me brindaron.

A mis profesores de maestría por el entusiasmo que mostraron, brindándome sus conocimientos, dándome la oportunidad de progresar en mi aprendizaje.

A la Mtra. Carolina Carrillo García por su ayuda para obtener nuevos conocimientos, la amistad que me brinda y el entusiasmo que mostró para culminar mi proyecto.

A mi novia, por todo el apoyo brindado, por soportar mis ratos de locura y por ser una excelente compañera.

Índice

Resumen

En este documento se hace un análisis de investigaciones que buscan la transición del pensamiento numérico al algebraico, y otras, que clasifican las dificultades que regularmente tienen los estudiantes para apropiarse de los conceptos del Álgebra escolar, a efecto de identificar recursos matemáticos que desarrollan el pensamiento algebraico.

Con el mismo propósito se diseñó una secuencia didáctica que toma en consideración las conclusiones de estas investigaciones, y se aplicó en una escuela secundaria de Jerez Zacatecas (México). Los resultados ponen de manifiesto que en la transición del pensamiento numérico al algebraico, surgen junto a los aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del Álgebra, otros, como las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrollan en las clases.

Se analiza la propuesta desde el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), como un modelo fenomenológico, que permite caracterizar con mejor precisión la introducción de los estudiantes a la adquisición del pensamiento algebraico.

Con base en los resultados de la primera aplicación, se hizo un rediseño de la secuencia que toma en cuenta los aspectos de Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) en conjunto con los considerados en la primera secuencia, con la intención de caracterizar las herramientas que son indispensables para que los estudiantes se involucren de una mejor manera a situaciones problemáticas correspondientes al uso de literales bajo un enfoque algebraico. Concluyendo con la idea de que el rediseño de la secuencia didáctica permitirá una mejora en la forma de ver el Álgebra escolar.

Palabras clave: Pensamiento numérico, pensamiento algebraico, incógnita específica, número generalizado, relación funcional.

Introducción

El presente documento pone de manifiesto la existencia de una problemática que regularmente presentan los estudiantes de escuela secundaria[1] al transitar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, debido a la complejidad del Álgebra; dicha problemática se detecta mediante la experiencia docente y el análisis de investigaciones sobre acciones inadecuadas que suceden cuando los estudiantes comienzan el desarrollo del Álgebra escolar.

En esta investigación se consideran y definen, los dos tipos de pensamiento y el Álgebra, intentando caracterizar las herramientas necesarias para que los estudiantes puedan llegar a razonar y comprender la noción de números representados con literales; para ello, se diseña una secuencia didáctica fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), y el modelo 3UV (tres usos de la variable) (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), con la finalidad de que propicie en los alumnos, mediante el desarrollo de ejercicios y situaciones problemáticas pensadas para el trabajo en grupo, el cambio del pensamiento numérico al algebraico.

La secuencia se implementa en un grupo de alumnos de primer grado de una escuela secundaria de Jerez de García Salinas, Zacatecas (México). Se realiza también un análisis detallado del material utilizado y de los resultados obtenidos, con el fin de reflexionar sobre la coherencia o no de la investigación, con los objetivos planteados previamente en la misma.

El análisis realizado de los resultados de la secuencia se basa fundamentalmente en dos aspectos del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001, 2007): la Competencia Matemática Formal (CMF) y la consideración de errores, obstáculos y dificultades del inicio del Álgebra escolar, detectando que el contrato didáctico que regularmente se da en las aulas de clase en las que se enseña de forma tradicional la Matemática, no propicia el desarrollo de un pensamiento algebraico en los estudiantes.

Los resultados obtenidos y la discusión de los mismos muestran la necesidad de realizar un análisis más exhaustivo para determinar otros aspectos de la naturaleza de los objetos algebraicos y numéricos que faciliten la transición entre Aritmética y Álgebra, tomando en consideración los aciertos y errores de los estudiantes, así como, una mayor profundización en el diseño de la secuencia didáctica en la que se contemple con más claridad los elementos operacionales, estructurales y procesuales, que puedan intervenir en la ejecución y aplicación de dicha secuencia, facilitando en este sentido una mejora de las prácticas docentes que se dan en la escuela secundaria cotidianamente.

Se realiza un análisis reflexivo y se rediseña una secuencia considerando los resultados obtenidos en la experimentación de la primera más, investigaciones sobre Didáctica del Álgebra, la caracterización de las competencias matemáticas que deben estar

[1] La escuela secundaria en México corresponde a los primeros tres años de ESO en España, los alumnos de primer grado generalmente oscilan entre los 11 y los 12 años.

incluidas en situaciones problemáticas referentes al pensamiento algebraico, el currículo de educación de México para la enseñanza de las Matemáticas (Secretaría de Educación Pública, SEP, 2006) para analizar el nivel de desarrollo del pensamiento algebraico que poseen los estudiantes, fundamentada en los mismos aspectos que la anterior con la inclusión de los dos elementos del ELOS que sirvieron para el análisis.

La finalidad de la investigación es considerar qué elementos de los trabajados, propuestos en investigaciones en el campo del pensamiento numérico y algebraico, sirven y se pueden utilizar en un contexto de alumnos de primer grado de secundaria bajo los planes y programas de estudio de México para promover una buena enseñanza del pensamiento algebraico, dejando abierta una propuesta para el análisis del tipo de pensamiento que predomina en los estudiantes después de haber resuelto ecuaciones lineales de una y dos incógnitas.

Para el desarrollo de esta investigación se ha segmentado la información en capítulos, cada uno fundamenta, valida o muestra lo que es indispensable para lograr los objetivos propuestos.

En el primer capítulo se presenta la detección de una problemática en el momento de cambiar el pensamiento de los estudiantes de numérico a algebraico; se explicita qué se va a considerar como pensamiento numérico, pensamiento algebraico y Álgebra. Se analizan investigaciones que muestran la existencia de dificultades por parte de estudiantes que comienzan a trabajar con temas algebraicos, además de hacer una reflexión acerca de éstas, se muestra que nuestro trabajo se realiza con la finalidad de caracterizar las herramientas que están en juego cuando se trabajan temas de Álgebra con los estudiantes de la escuela secundaria.

En el segundo capítulo se describen las herramientas conceptuales que se utilizarán en el desarrollo de la investigación, pretendiendo encontrar recursos y estrategias para que los alumnos logren la transición del pensamiento numérico al algebraico; se consideran varias teorías que aportan elementos que son complementarios: la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986), la transposición didáctica (Chevallard, citado en De Faria, 2006), el Enfoque Lógico semiótico (ELOS) (Socas, 2001, 2007), y el Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

En el tercer capítulo se desarrolla una secuencia didáctica mediante el diseño de una ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995); además, se aplica y se obtienen resultados que permiten caracterizar la entrada al mundo del pensamiento algebraico en alumnos de primer grado de escuela secundaria.

En el cuarto capítulo se muestran los resultados de un análisis reflexivo con base en las situaciones problemáticas planteadas y los resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia. Se aportan conclusiones, las cuales propiciarán una nueva estrategia para la mejora en la enseñanza de las Matemáticas, favoreciendo la transición de la Aritmética al Álgebra.

En el quinto capítulo se analizaron los resultados y las primeras conclusiones de la aplicación de la secuencia didáctica bajo dos elementos del ELOS, con la intención de hacer un análisis del contenido que esté en acción al desarrollar nuevas situaciones problemáticas; se plantea una nueva propuesta didáctica en la que se añaden elementos a los considerados inicialmente, con la finalidad de propiciar una mejora en la adquisición de herramientas del pensamiento algebraico.

Finalmente, en las conclusiones, se indica qué puntos se cumplieron y cuáles no de los propuestos en los objetivos de la investigación, dando respuesta a la pregunta que se formuló en el primer capítulo.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema

En el capítulo uno se presenta la detección de una problemática en el momento de cambiar el pensamiento de los estudiantes de numérico a algebraico; se explicita que se va a considerar como pensamiento numérico, pensamiento algebraico y Álgebra. Se analizan investigaciones que muestran la existencia de dificultades por parte de estudiantes que comienzan a trabajar con temas algebraicos, además de hacer una reflexión de las investigaciones, se muestra que esta investigación se realiza con la finalidad de caracterizar las herramientas que están en juego cuando se trabajan temas de Álgebra con los estudiantes de la escuela secundaria.

1.1 Motivación

Basándose en la experiencia docente y en la de estudiante de escuela secundaria del investigador[2], se ha concebido la idea de que para los estudiantes de este nivel no es sencillo cambiar su forma de pensar; es decir, ingresan acostumbrados a trabajar numéricamente las situaciones problemáticas de Matemáticas y, en este mismo nivel deben ampliar su pensamiento para adquirir nuevas nociones y conceptos matemáticos, incluyendo las algebraicas.

De acuerdo con esta experiencia, se hace referencia de las dificultades a las que se enfrentó el investigador al aprender Álgebra. La primera fue la relación que existía entre el número y la literal; es decir, en una situación problemática matemática que involucraba una ecuación lineal, la pregunta que le surgía era la siguiente: ¿cómo era posible que para llegar a una solución tuviera que escribir una letra que a su vez representaría un número?, siempre intentaba llegar a un resultado específico, debido a que era la manera en que estaba acostumbrado a resolver una situación problemática matemática, no aceptaba la falta de clausura[3]. Pudo lograr el cambio de lo aritmético a lo algebraico; sin embargo, ello no garantizó que comprendiera los procedimientos que utilizaba, ya que solo los realizaba de manera mecanizada, para poder realizar las tareas asignadas.

Muchas veces los profesores tienen la idea de que los estudiantes, al saber resolver ejercicios, están aprendiendo Matemáticas; el mismo pensamiento tienen en torno al Álgebra, considerando que un estudiante puede aprenderla al resolver ejercicios, y en ocasiones argumentan que son similares a los que ya sabían resolver, sin darle un significado a lo que se está resolviendo "*el Álgebra no se puede considerar únicamente como una simple generalización de la Aritmética; aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la Aritmética*" (Socas, 2011, p 25).

En la actualidad, la transición del pensamiento aritmético al algebraico sigue siendo un problema crucial en las Matemáticas escolares, como lo prueban investigaciones en el área

[2] El investigador es el autor del documento.
[3] La clausura es considerar en una igualdad los términos (literales y numéricos) como operables entre ellos para que en el otro lado de la igualdad se escriba un resultado específico y producto de la operación que se realizó.

de Didáctica de la Matemática (Palarea, 1999; Ruano, Socas y Palarea, 2003; Molina, 2009). Al respecto Papini (2003) menciona que "*la entrada en el mundo del Álgebra supone para los alumnos que vienen de prácticas aritméticas una ruptura cognitiva esencial*" (p. 44)

En concordancia con lo anterior, se mostrará el siguiente ejemplo de una clase de segundo grado de secundaria, en la cual el investigador era profesor ayudante. El tema que se trabajó era sistemas de ecuaciones lineales con dos literales; el problema matemático que se aplicó fue el siguiente:

> "Diego y Claudia fueron a una tienda de discos compactos. Diego fue al departamento de discos de música y vio que todos los discos estaban a un mismo precio. Claudia fue al departamento de películas y vio que todas estaban al mismo precio. Diego pagó $270 por 2 discos de música y una película; mientras que Claudia pagó por $255 por un disco de música y 2 películas. ¿Cuál es el precio unitario de las películas y los discos?"

Para esta situación problemática, los alumnos sugirieron que el maestro la resolviera y posteriormente se agregaran otras similares para su solución, pues este era el tipo de contrato didáctico que ellos seguían. Socas menciona que "*el Álgebra supone un cambio de pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes de la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas*" (Socas, 2011, p. 25).

La existencia de una problemática pudo ser detectada en esta situación porque los alumnos tenían como referente que una fórmula sirve para cualquier problema de la misma estructura, haciendo algún tipo de cambio; por ejemplo, cuando conocen las fórmulas geométricas de áreas y perímetros, una misma fórmula funciona para cualquier área o perímetro del mismo tipo de figura, es un caso particular en el que se le asigna a la literal un uso como incógnita específica; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) mencionan que cuando se trabaja una literal como incógnita específica, los estudiantes deben tener la capacidad de representar simbólicamente una cantidad desconocida que esté relacionada con los datos del problema; es lo que intentaban hacer los estudiantes pero este uso no lo llevan a un contexto algebraico, sino que continúan pensando que les servirá para cualquier ejercicio de este tipo. En este caso los estudiantes siguieron teniendo presente la concepción de que el mismo proceso o los mismos datos, les iban a "funcionar" para esta serie de problemas.

La situación anterior hace visible el hecho de que falta algo para trabajar el Álgebra escolar de una manera efectiva, ya que algunas veces los estudiantes no se interesan en razonar lo que se está contestando y algunos profesores no están dispuestos a cambiar el pensamiento de los estudiantes, solamente les propone una cantidad excesiva de ejercicios y ellos los resuelven mecánicamente, sin percibir los conocimientos que están utilizando para la solución de dichos problemas.

La motivación por este tema de investigación se debe a que se han detectado dificultades en los estudiantes en el momento de trabajar temas de Álgebra en la escuela secundaria; se considera que la incomprensión se da al no desarrollar correctamente el cambio del pensamiento aritmético al algebraico. Indicamos que existe investigación acerca de este problema (Socas, 1997, 1999, 2010, 2011; Palarea, 1999; Ursini *et al.,* 2005; Butto y Rojano, 2010 y Radford, 2010, 2013); sin embargo, no se ha detectado que se utilicen en la práctica docente los resultados de dichas investigaciones, *"Algunas de las revistas de investigación en educación matemática tienen como meta sus hallazgos cognitivos y discuten sus implicaciones instruccionales. Sin embargo muchos de los artículos aparecen escritos para otros investigadores, no para el profesorado*" (Socas, 2011, p. 22). Con base en la información anterior, la idea de este trabajo es analizar esas investigaciones para crear una secuencia de clase e intentar ponerla en práctica con un grupo de estudiantes para apoyar la categorización de elementos que intervienen en la transición de la Aritmética al Álgebra.

1.2 El pensamiento algebraico como un saber a enseñar

Dentro de este trabajo se está abordando el tema de iniciación al pensamiento algebraico con alumnos de secundaria, pero, ¿qué es el Álgebra? y ¿qué es el pensamiento algebraico? Para intentar dar respuesta a estas preguntas se toma como base el trabajo de algunos autores que han hecho estudios acerca de la enseñanza del Álgebra escolar (Kieran, 1992; NCTM, 1992; Butto y Rojano, 2004; Sessa, 2005; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Trujillo, 2008).

Para comenzar a establecer qué es el Álgebra se cita su acepción en la Real Academia Española (RAE):

> Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita (RAE, 2001).

Por su parte, Sessa (2005) afirma que varios historiadores y matemáticos hablan de un Álgebra babilónica (sin símbolos) y que hay "*quienes dicen que el álgebra se caracteriza por la presencia de un cierto lenguaje simbólico"* y no le otorgan a este trabajo la categoría de trabajo algebraico.

> El tratamiento que hacen los babilónicos: es netamente numérico y las interpretaciones más modernas ven allí una resolución con fuerte apoyatura *geométrica*. ¿En qué sentido podemos hablar de álgebra? […] ¿Qué es lo que permite diferenciar a un problema aritmético de uno algebraico o uno geométrico? ¿Es el problema mismo que se plantea o es el tratamiento que se hace para su resolución lo que determina su ubicación en el campo del álgebra? […] los babilónicos resolvían problemas que hoy ubicamos en el dominio del álgebra y lo hacían con métodos geométricos, de "cortar y pegar" y completar. Sin embargo, el tratamiento algebraico que conocemos actualmente para esos problemas tiene reminiscencias muy fuertes de estas

técnicas de cortar, pegar y completar. Eso nos da derecho a colocarlos en la historia del álgebra (Sessa, 2005, pp. 27-28).

Según Sessa (2005), hay varias maneras de contemplar el Álgebra, remitiéndonos a la historia o a como la trabajamos en la actualidad. Así el Álgebra es la manera de sintetizar las operaciones aritméticas para grandes cantidades de números, esta autora se basa en Pitágoras (580-500 a. C.) expresando que los pitagóricos buscaban una visión global del mundo a través del número. Ellos conformaron la Aritmética clásica y formularon la estructura de los números triangulares, cuadrangulares, rectangulares, pentagonales, piramidales y cúbicos. "*Cualquier número cuadrado n puede pensarse como la suma de todos los números impares desde el 1 hasta el n-ésimo número impar. Esto se puede representar con la fórmula:* $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$" *(*Sessa, 2005, p. 33*).*

La autora menciona que el Álgebra nos permite validar este tipo de fórmulas y se pregunta si sería posible hacerlo con el trabajo geométrico, concluyendo que si se pudiera visualizar la formulación de conjeturas y la validación de las mismas con configuraciones geométricas, sería otra manera de aportar sentido a algunas fórmulas algebraicas.

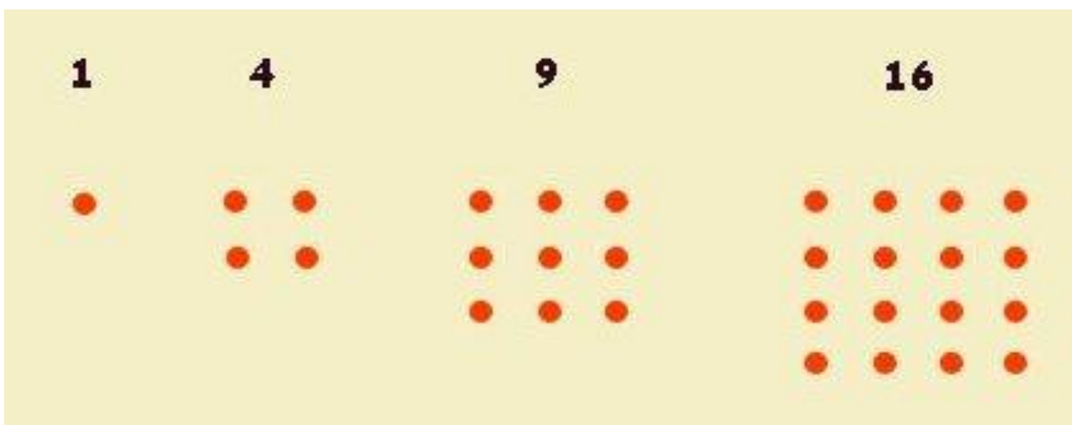


Imagen 1. Representación geométrica de los números cuadrangulares (Sessa, 2005)

Kieran (1992, citado en Ruiz, 2011) establece que los estudiantes generalmente recurren a la memorización de reglas y procedimientos para satisfacer su falta de comprensión del Álgebra, llegando a la noción de que ese proceso es la esencia del Álgebra. Para detectar dicho problema se hace las siguientes preguntas:

¿Qué es lo que lleva a los estudiantes a memorizar las reglas del trabajo? ¿Qué es lo que hace que la comprensión del álgebra escolar sea una tarea muy difícil para la gran mayoría? ¿Es el contenido del álgebra la fuente de problemas? ¿O es la forma en que se enseña lo que causa que los estudiantes no puedan darle sentido a la asignatura? ¿O es que los estudiantes se aproximan a los problemas

> algebraicos de una manera que es inapropiada para que aprendan la asignatura? (pp. 15-16).

Kieran (1992, citada en Ruiz, 2011) encuentra una relación entre las preguntas hechas anteriormente y la existencia de etapas que se han dado a lo largo de la historia, acerca de cómo se ha considerado el Álgebra y las clasifica en: retórica (siglo III), sincopada (siglo III – siglo XVI) y simbólica (siglo XVI – nuestra época) estableciendo una relación con la forma en que las personas aprendemos a transitar de un pensamiento numérico a uno algebraico.

> Etapa *retórica*: En esta etapa el enunciado y la resolución de un determinado problema era totalmente verbal, los problemas eran muy particulares y no había métodos generales de resolución. Esta etapa fue caracterizada por una ausencia total de símbolos o de signos especiales para representar las incógnitas.
>
> Etapa *sincopada*: En esta etapa también conocida como (lacónica) se sustituye a los conceptos y operaciones que se usaban más frecuentemente por abreviaturas, de esta manera el álgebra sincopada era una especie de taquigrafía.
>
> Etapa *simbólica*: Representa un álgebra en donde todos los términos y la solución del problema son escritos por medio de símbolos; hay símbolos para las constantes, las variables y las operaciones, y esto permite casi por necesidad que se planteen problemas generales y se les dé la solución también general (p. 16).

En la actualidad generalmente se empieza con el lenguaje simbólico y después se aplica en resolución de ecuaciones. Al referirnos a la educación secundaria encontramos que más que intentar enseñar conceptos y procedimientos algebraicos, se aborda un eje temático llamado sentido numérico y pensamiento algebraico, cuyo propósito es desarrollar en los alumnos herramientas para una mejor interpretación de las literales; nuestro objetivo que es ayudar en la introducción del pensamiento algebraico en estudiantes de primero de secundaria; a continuación, se describe lo que se entenderá por pensamiento numérico y pensamiento algebraico.

Se debe mencionar que en esta investigación el pensamiento numérico será equivalente al sentido numérico, por el nombre que tiene el apartado que introduce el pensamiento algebraico en el currículo de educación básica en México, desarrollado por la Secretaría de Educación Pública (SEP) y se define cómo:

> La comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (McIntosh, Reys y Reys, 1992, p. 2).

Obando y Vásquez (2008) mencionan que el desarrollo del pensamiento numérico comienza antes de la escolaridad de un niño, casi siempre viene de la interacción con adultos; los niños desarrollan habilidades relativas a su lenguaje y una serie de intuiciones sobre lo numérico, además mencionan que, después de que tengan esa noción de los números, los comenzarán a considerar para distintas tareas: como secuencia verbal, para etiquetar, para contar, para medir y para ordenar.

En conclusión, el pensamiento numérico permite, a quienes lo hemos desarrollado, que observemos las magnitudes, el orden y las características que podemos tener acerca de los números y las relaciones que pueden tener con la vida cotidiana. En realidad no es necesaria una escolaridad para tener nociones acerca del pensamiento numérico, podemos observar a varias personas que no tienen formación escolar alguna y la necesidad hace que comprendan el valor y la relación que tiene los números entre sí.

En cuanto a pensamiento algebraico, Butto y Rojano (2004) hacen ver que es distinto decir pensamiento algebraico y Álgebra formal, mencionan que el pensamiento algebraico desarrolla algunas ideas del Álgebra y al compararlo con la formalización algebraica son actividades cognitivas distintas.

> La formalización algebraica requiere, ciertamente, un proceso más largo y complejo, pero tener acceso al pensamiento algebraico en edades tempranas por diversas rutas nos otorga indicios empíricos y teóricos para analizar esta actividad matemática y didáctica con una perspectiva epistemológica y didáctica (pp. 119 - 120).

Como se indica anteriormente, el pensamiento algebraico no es la manera de contemplar al Álgebra formalmente, sino que es una forma en la que los alumnos razonan y ven la Aritmética un poco "más allá"; por ello debemos tener bien definidos los propósitos de los ejercicios que se les presenten, para lograr que lleguen a la generalización deseada; como mencionan Billings, Tiedt y Slater (2007) los profesores deben diseñar situaciones problemáticas que involucren a los estudiantes de una forma positiva para que puedan comenzar a tener ideas de generalización de patrones y formulación de conclusiones.

Por otro lado, los libros que rigen la educación en México llamados "*Planes y Programas de estudios*" expresan que al atender el apartado de "*Sentido numérico y pensamiento algebraico*":

> Los alumnos profundizan en el estudio del Álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y en relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.
>
> La insistencia en ver lo general en lo particular se concreta, por ejemplo, en la obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón; en la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas; en el empleo de expresiones algebraicas que representan la relación entre dos variables, la cual, para este nivel, puede ser lineal (en la que la proporcionalidad directa es un caso particular), cuadrática o exponencial. (SEP, 2006, p. 9).

También se recurre a Ursini *et al.,* (2005) quienes presentan la siguiente idea: "*el inicio del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de símbolos literales comúnmente llamados variables, para representar números"* (p. 11). Los autores mencionan que los alumnos desde la primaria tienen acceso al uso de las letras en Matemáticas, ponen de ejemplo las fórmulas geométricas y señalan que en esta representación "*no suele darse a las letras una representación algebraica"* (p.11); en primaria a las letras se les da una representación como de etiquetas que se refieren a cantidades específicas o a la inicial de una palabra "*se suele usar la b para referirse a 'base'; la A para 'área'; h para 'altura', etc." (*p. 11*).*

Cuando los estudiantes inician el trabajo en la escuela secundaria, mencionan estos autores que las letras surgen con más frecuencia y en contextos no geométricos, se espera que los alumnos ya no las consideren como etiquetas o iniciales de palabras, *"sino que aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparezcan"* (p. 11).

En esta investigación el Álgebra es como un proceso de generalización de la Aritmética, "*la generalización de la aritmética es considerada una componente fundamental del álgebra que es utilizada tradicionalmente para la introducción del álgebra en el ámbito escolar"* (Trujillo, 2008, p. 12). Con base en lo anterior se comienza a trabajar el Álgebra escolar con alumnos de primer grado de secundaria. La autora indica que el desarrollo de un pensamiento algebraico ligado con la Aritmética (el proyecto Early – Algebra), ayuda a llegar de una manera correcta a formalizar el Álgebra. Billings *et al.* (2007) dan las siguientes ideas referentes al pensamiento algebraico:

> "El pensamiento algebraico enfatiza el análisis del cambio, la generalización de las relaciones entre cantidades y que representan estas relaciones matemáticas en diferentes maneras (NCTM, 2000). Para los niños de primaria es "*ir más allá del razonamiento numérico a un razonamiento más general de la relación, la cantidad y las formas de notación y simbolización*" (Yackel, 2002, p. 201).
>
> En lugar de definir el álgebra específica que debe incluirse en los planes de los primeros grados, Yackel (2002) y otros (por ejemplo, NCTM y MSEB, 1998; Smith 2003) abogan por que los educadores se centren en actividades que animen a los niños a pensar maneras que conducen a un desarrollo del razonamiento algebraico (p. 302).

En conclusión y de acuerdo con lo mencionado en el texto, el pensamiento algebraico servirá de apoyo para llegar a la formalización del Álgebra dentro del currículo escolar, desarrolla en los alumnos un primer acercamiento al proceso de generalización de patrones; dentro de ese desarrollo tienen que involucrar la escritura de dicha generalización para que puedan trascender al Álgebra formal; es indispensable que lo hagan y que se les oriente para que no caigan en los errores comunes que mencionan los autores Butto y Rojano (2004), Kieran (1992) y Ursini *et al. (2005*), sino que se efectúen actividades que potencialicen las habilidades de los estudiantes (Billings *et al*., 2007*)* con la finalidad de que los aprendices desarrollen su capacidad de generalización de procesos particulares.

La Secretaría de Educación Pública ha establecido en su programa de estudio que su objetivo es que los alumnos puedan comprender el uso de las literales de tres diferentes formas: como número general, como incógnita y en relación funcional, por ello se tiene que investigar ampliamente y diseñar una propuesta que involucre características de cada uno de los subcampos en los que se encuentra el uso de las literales.

1.3 Antecedentes

Para establecer la importancia acerca de la dificultad de la transición del pensamiento numérico al algebraico, se realizó una búsqueda de investigaciones en Matemática Educativa que trataran sobre el tema la transición entre la Aritmética y el Álgebra. Estas investigaciones dan cuenta de que existe un problema para lograr que los alumnos generalicen los números, es decir, que puedan tener una noción algebraica partiendo de una idea numérica.

En los siguientes párrafos se plasmará la información obtenida de estas investigaciones, así como una reflexión, a manera de conclusión, que indica un posible camino a seguir para lograr que los alumnos puedan pensar algebraicamente. Los antecedentes están acomodados en orden cronológico, con la finalidad de detectar el avance que hay en el tema.

En primer lugar se hace referencia a la investigación de Ruano, Socas y Palarea (2003) la cual tiene por objetivo analizar y clasificar los errores cometidos por un grupo de alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. Para lograr tal objetivo idearon un cuestionario en torno a estos tres procesos característicos del lenguaje algebraico. Los alumnos no habían recibido instrucción del tema previa a la ejecución del cuestionario y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda; el examen lo resolvieron en dos sesiones de 50 minutos durante su clase de Matemáticas, utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. Los autores clasificaron los errores ayudándose de esquemas de análisis en los que se refleja el tipo de error cometido, los códigos de los alumnos y el ítem en el cuestionario en el que fallaron y al final el número total de errores de cada tipo.

Como resultado de esa investigación detectaron que los errores dependen generalmente de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso, descubrieron que algunos se repiten independientemente de la tarea y son: la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. La investigación concluye que, independientemente del origen del error que muestran los estudiantes, la superación de éste requiere la participación activa del alumno, es importante que el profesor provoque conflicto en la mente de los alumnos y busque estrategias para que participen activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada.

Se analiza el trabajo de Ursini *et al.* (2005), quienes a partir de saber que existen dificultades en los estudiantes al trabajar Álgebra en la escuela secundaria, proponen un modelo para comenzar a trabajarla de una manera distinta a como regularmente lo hacen los docentes; denominan a su modelo 3UV (tres usos de la variable) y es el resultado de investigaciones que han realizado en esta área (la enseñanza del Álgebra elemental).

En el documento redactan y proponen la forma de diseñar las situaciones problemáticas, mediante una metodología, para que los estudiantes sepan usar las literales y, además, que éstas tengan algún significado para ellos; listan una serie de pasos que se deben seguir para que el trabajo sea adecuado al nivel de los alumnos y puedan aprender a considerar la literal como una cantidad desconocida representándola correctamente.

Los usos de las literales (variables) con lo que comúnmente se inicia el trabajo algebraico en la escuela secundaria, dicen los autores, son: la literal como incógnita específica, la literal como número generalizado y la literal en relación funcional, estableciendo un gran número de ejercicios propuestos por ellos para la introducción del Álgebra en le escuela secundaria, pero es preciso señalar que la propuesta no es definitiva, invitando a los profesores a que experimenten con sus propias situaciones problemáticas mediante el modelo propuesto, pero desarrollando sus propias estrategias.

Por su parte, Cañadas (2007) describe y caracteriza el razonamiento inductivo empleado por estudiantes de tercero y cuarto curso de la escuela secundaria obligatoria (ESO)[4] al resolver problemas que pueden ser modelados mediante una progresión aritmética de números naturales cuyo orden sea 1 o 2 (lineales o cuadráticas). Para tal objetivo diseña una investigación que permitiría detectar el razonamiento inductivo con situaciones problemáticas de progresiones aritméticas mediante un estudio de caso con 12 estudiantes. Les propuso dos tareas matemáticas en cuya resolución se supone harían uso del razonamiento inductivo. En la primera tarea los estudiantes debían razonar sobre la paridad del resultado de la suma de dos números pares y en la segunda tarea intentarían determinar el mayor número de regiones que se obtienen al trazar un número de rectas sobre un plano. Cabe señalar que en la investigación las tareas propuestas fueron realizadas por los estudiantes en un contexto de entrevistas semiestructuradas y fueron grabadas en audio.

Por medio de su investigación Cañadas (2007) llegó a la aproximación de un modelo para la descripción del razonamiento inductivo, el cual considera siete pasos: trabajo con casos particulares, organización de la información obtenida de los casos particulares, búsqueda y predicción de patrones; formulación de conjeturas, prueba de conjeturas; generalización de conjeturas y demostración de la conjetura. La autora plasma que una vez que los estudiantes entienden la propuesta, todos utilizan el razonamiento inductivo para resolver ambas tareas.

Por otro lado Molina (2009) busca cómo promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para llegar a cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura matemática, así como fomentar un aprendizaje con comprensión de las Matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del Álgebra.

[4] El tercer y cuarto curso de ESO corresponden al tercer año de educación secundaria y el primer año de bachillerato en el sistema educativo mexicano.

Se hace un experimento de enseñanza guiado por el *Early-Algebra*[5], con alumnos de tercer grado de primaria que consiste en el planteamiento de sentencias numéricas de suma y resta, basadas en las propiedades aritméticas básicas. Con el término sentencia se refiere a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo; estos enunciados pueden ser ciertos o falsos, un ejemplo de las sentencias utilizadas es $24 + 11 = 8 + 27$. Estuvieron basadas en las propiedades de la estructura aditiva como: conmutativa ($75 + 23 = 23 + 75$), complementaria de la suma y la resta ($100 + 94 - 94 = 100$), composición/descomposición ($24 - 15 = 24 - 10 - 5$), compensación ($53 + 41 = 54 + 40$), magnitud ($7 + 3 = 10 + 3$), elemento neutro de la suma ($0 + 325 = 326$), elemento neutro de la resta por la derecha ($125 - 0 = 125$) y elemento opuesto ($24 - 24 = 0$).

No es posible concretar la capacidad de uso de pensamiento en cada alumno, pero se puede observar la capacidad de la mayoría de poner de manifiesto este tipo de pensamiento, el cual desarrollan a partir de su aprendizaje pese a que no sea promovido en la enseñanza; Molina también menciona que la “algebrización del currículo matemático escolar” puede ayudar a enriquecer la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles educativos, facilitando el desarrollo de un aprendizaje con comprensión, pues permite organizar la enseñanza de la Aritmética y del Álgebra formal evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ambas.

También se tiene el trabajo de Rojas (2010) cuyo objetivo es responder a las preguntas ¿cómo pasar de la Aritmética escolar al Álgebra escolar?, y ¿cuál puede ser una “línea” temática para hacerlo?; sin embargo, este estudio no es una investigación sino una propuesta para explicar cómo los profesores en formación deben abordar los inicios del Álgebra escolar. Propone una serie de pasos obtenidos con referentes en diversas investigaciones en Matemática Educativa, en los cuales intenta desarrollar un plan que parta de la necesidad de la sensibilización del profesor respecto a las situaciones del aula.

Los pasos tentativos a seguir para favorecer la intención de pasar de la Aritmética al Álgebra son: Explicar concepciones acerca de (letra, Álgebra y operación/algoritmo), contrastar las concepciones aparecidas con evidencias empíricas, organizar, ordenar o clasificar las concepciones evidenciadas; con base en el uso de instrumentos dispuestos y seleccionados, discutir las teorías que los sustentan, elaborar hipótesis de trabajo y finalmente volver al primer punto. El trabajo se realiza por medio de procesos de generalización y simbolización con búsqueda de patrones.

Para mejorar el tránsito de la Aritmética al Álgebra también se ha recurrido a la tecnología, por ejemplo se recabó información acerca del uso de un software llamado “Logo”, en un documento elaborado por Butto y Rojano (2010), con el cual pretende una iniciación temprana al pensamiento algebraico a partir de la idea de variación proporcional y evolucionando hacia procesos de generalización. Este estudio tiene por objetivos: generalizar la factibilidad de una iniciación temprana al Álgebra a partir de dos rutas de

[5] Early-Algebra es un proyecto iniciado en EUA, tomado de un estilo de enseñanza de la URSS y pretende llegar a través de la Aritmética a desarrollar el pensamiento algebraico.

acceso: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización, y diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración aspectos cognitivos y el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico).

El trabajo lo realizaron con niños de los últimos grados de primaria. Parten de la variación proporcional, resaltando la noción de literal en una relación funcional y se pasa a tratar con la noción de número general por medio de procesos de generalización y expresión de la generalidad. Se introducen las ideas algebraicas en dos versiones: presimbólica (relacionada con la idea de variación proporcional) y simbólica (en tareas de encontrar y expresar una regla general en el lenguaje Logo). Se diseñó una secuencia de enseñanza en la que los alumnos resolvían problemas relacionados tanto con la variación proporcional como con la generalización.

Las autoras concluyen que, en las situaciones problemáticas con lápiz y papel, la idea de literal como la de relación funcional y progresión geométrica resultó fácil para los alumnos y fueron capaces de percibir la progresión geométrica, pero algunos tuvieron la dificultad de elaborar una regla general. También en el ambiente "Logo" se presentaron algunas dificultades, porque algunos estudiantes no consideran un programa como la expresión de un método ni como una entidad, sino que lo ven como un medio para guardar una lista de instrucciones y pierden la idea de procedimiento como expresión de un método. En síntesis concluyeron que fue más fácil trabajar con lápiz y papel que empleando nueva tecnología para adentrarlos en el pensamiento algebraico temprano.

Se analizó también el trabajo de Socas (2011), en el cual encuentra evidencias a través de varios trabajos iniciados en los últimos años de la década de los 80 hasta el año 2007 acerca de tres grandes núcleos que son:

1. La transición del pensamiento numérico al algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la Aritmética generalizada.
2. Los procesos específicos del pensamiento algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización.
3. La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del Álgebra escolar en la educación secundaria.

El trabajo se realiza en torno a investigaciones en pensamiento algebraico, aportaciones de la investigación al desarrollo curricular en Álgebra y consideraciones sobre el pensamiento algebraico. El documento describe que el "Early-Algebra" enriquece la enseñanza tradicional de las Matemáticas y facilita a los alumnos un desarrollo adecuado del pensamiento algebraico. En la actividad escolar se propone que se comience a trabajar con este enfoque y establecen tres puntos básicos que lo permite: Aritmética, razonamiento cuantitativo y funciones.

Como resultado de su propuesta y su conclusión acerca de analizar las investigaciones, Socas (2011) propone que: se necesita buscar modelos apropiados para observar y analizar las prácticas de la enseñanza del Álgebra, debemos determinar nuevos caminos que permitan incorporar el cuerpo de conocimientos sobre aprendizajes en Álgebra al desarrollo profesional y a la formación inicial y permanente de los profesores de Álgebra, existe la necesidad de establecer interacciones entre el conocimiento de Álgebra de los profesores (relación entre la enseñanza y el aprendizaje) y debemos utilizar la tecnología como herramienta para el aprendizaje del Álgebra. En síntesis, el trabajo desarrolla una propuesta de tránsito de la Aritmética al Álgebra desde una perspectiva global comprendiendo el desarrollo del pensamiento operacional, estructural y procesual en Aritmética y en Álgebra.

Es importante mencionar que en este trabajo se hace hincapié en la necesidad de vincular la investigación con la práctica, así como resaltar que en este artículo se describen dos propuestas, una denominada "Early-Algebra", la cual sugiere un aprendizaje con comprensión de las Matemáticas que facilite el aprendizaje del Álgebra y la otra nombrada "Pre-Álgebra" que pretende facilitar la transición de la Aritmética al Álgebra, dadas las dificultades y errores que tienen los alumnos en esta área de las Matemáticas.

"Early-Algebra" pretende ser introducida desde la educación primaria con situaciones problemáticas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar competencias propias del Álgebra, mientras que "Pre-Álgebra" se apoya en la concepción del Álgebra, está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero este simbolismo va más allá de las escrituras formales de la Aritmética generalizada.

Siguiendo con la información obtenida, Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) hacen una investigación con el objetivo de concebir el razonamiento algebraico a partir de los procesos y objetos matemáticos introducidos en el *enfoque ontosemiótico*[6], para ello mencionan que tienen que intervenir procesos de generalización y simbolización. Los autores utilizan algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico considerando que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico. La metodología de su investigación consistió en analizar la forma en que responden los estudiantes a los problemas propuestos por los profesores desde distintas perspectivas, tomando en cuenta las diferentes rutas que siguen los alumnos para la solución, así como las que tienen una noción algebraica para intentar llegar a una generalización. Se apoyan del *Early-Algebra* (pensamiento algebraico como producto de la generalización de la Aritmética) para llegar a las conclusiones deseadas.

Como resultado de su investigación, Godino *et al.*, concluyeron que no se puede llegar a una respuesta definitiva al problema de caracterización del Álgebra, es necesario participar en la reflexión y el debate. También elaboraron un modo para ver la práctica algebraica y el pensamiento que la acompaña, con la finalidad de hacer una distinción entre situaciones de generalización e indeterminación.

Como conclusión se rescata que se han detectado varias fuentes que ocasionan la ausencia de sentido al iniciar con el Álgebra escolar, las que más aparecieron son: que el Álgebra no se trabaja en la Matemática escolar de primaria porque no se encuentra

[6] El *enfoque ontosemiótico* (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje.

establecida en el currículo de enseñanza, (Molina, 2009; NCTM, 1989 citado en Molina, 2009; Filloy y Rojano, 1995 citados en Butto y Rojano, 2010; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi 2012) por lo que en el momento en que se inicia el trabajo en secundaria, a los alumnos les cuesta trabajo generalizarla como se requiere porque siguen utilizando propiedades aritméticas básicas y están intentando darle otro enfoque a la generalización del Álgebra; por ejemplo, al comenzar el Álgebra los alumnos trabajan con la necesidad de clausura que se tiene en la Aritmética y los autores mencionados intentan ver más allá el Álgebra escolar; es decir, buscan hallar la solución desde la educación primaria y consideran que es preciso que se trabaje el pensamiento algebraico desde la educación primaria.

1.4 Reflexión

En el tránsito del pensamiento numérico al pensamiento algebraico se ha detectado que existen obstáculos que no permiten a los estudiantes realizarlo como es debido; las causas son diversas, una contemplada anteriormente es que en educación primaria no existe un enfoque acerca de nociones algebraicas y eso conlleva a que los estudiantes comiencen a trabajar el Álgebra numéricamente en la escuela secundaria. Ruano, Socas y Palarea (2003) plantean que los alumnos tienden a particularizar alguna regla que tiene que ser una generalización y eso dificulta que lleguen a pensar algebraicamente, buscan casos particulares que cumplan con las condiciones pedidas para encontrar la solución.

En el trabajo de Cañadas (2007) se plantea una estrategia para que los alumnos comprendan la naturaleza del pensamiento algebraico. A través del análisis de algunos casos particulares plantea una serie de situaciones problemáticas que permiten a los alumnos, a través de métodos inductivos, dejar de pensar de manera particular las situaciones para llegar a una generalización. El trabajo es interesante ya que muestra el proceso que tienen los alumnos para dejar de pensar numéricamente, lleva a través de sucesiones numéricas a que los alumnos encuentren una regla que les permita generar cualquier término de dicha sucesión.

Se detectó que el uso de nuevas tecnologías para el tratamiento del Álgebra no siempre apoya de la manera esperada y deseada; Butto y Rojano (2010) mencionan que cuando trabajaron con el software “Logo” los alumnos solamente lo vieron como una herramienta más que apoyaba en la construcción del conocimiento, sin detectar que la situación problemática que realizaban era la que les iba a permitir llegar a construir nociones de lenguaje algebraico.

A partir de la información recabada (Ruano, Socas y Palarea, 2003; Cañadas, 2007; Molina, 2009; Butto y Rojano, 2010; Rojas, 2010; Socas, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) podemos darnos cuenta que hay un vacío, el cual no permite el cambio de pensamiento en los estudiantes en el momento de la transición entre Aritmética y Álgebra; es decir, se han detectado dificultades que no permiten a los alumnos cambiar las Matemáticas de un enfoque numérico a un enfoque de generalización y modelación.

Teniendo como referente las investigaciones mencionadas, concebiremos una idea general de qué hacer al respecto para iniciar el tratamiento algebraico con alumnos desde la educación primaria; en nuestro caso, lo haremos con alumnos de primer grado de educación secundaria, la idea es elaborar una secuencia didáctica basada en el resultado de las investigaciones analizadas para trabajarse dentro del aula de clase con los alumnos pertenecientes a ella. Esto ayudará a los profesores ya que regularmente en la educación no se toman los resultados de las investigaciones para mejorar la enseñanza, pues como menciona Socas (2011) muchos de los artículos que aparecen acerca de este tema regularmente se hacen para otros investigadores, por otro lado el profesorado tiene muy poco tiempo para analizar los resultados de las investigaciones y adaptarlos a su entorno,

> (…) muchos realizan la enseñanza que está en el libro de texto, pero es posiblemente que este vacío acerca de cómo los profesores interpretan y deliberan sobre el contenido de las investigaciones, una de las áreas con mayor necesidad de atención investigadora. (Socas, 2011, p. 22).

La idea de este trabajo de investigación es buscar una herramienta para que los alumnos transciendan del pensamiento numérico al algebraico; se observará el trabajo del grupo para intentar detectar el pensamiento que utilizan en el momento de resolver problemas matemáticos dentro de su entorno escolar, y predecir algunos errores que pudieran cometer en el inicio del pensamiento algebraico, para contemplarlos dentro de la secuencia didáctica que se propondrá.

Las investigaciones analizadas que pretenden erradicar los errores que cometen los alumnos al trabajar Álgebra (Molina, 2009; Butto y Rojano, 2010 y Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) se sustentan en el proyecto Early-Algebra, que permite tener nociones algebraicas por medio de la aritmetización de las reglas; es decir, se supone que a través de procesos aritméticos los estudiantes llegarán a tener nociones de particularización y generalización de datos y acciones, sumas, restas, multiplicaciones y potencias. Sin embargo la propuesta de Ursini *et al.* (2005) coincide con lo que marca el plan y programa de estudios (SEP, 2006), asignándoles tres usos distintos a la literal.

En particular, se está de acuerdo con los autores en el sentido de que debemos darle otro enfoque al razonamiento algebraico y de manera especial, consideramos importante que al comenzar con su tratamiento podamos hacerlo por medio de sucesiones numéricas y que puedan llegar a la generalización de éstas por medio de métodos inductivos; es preciso indicar que no estamos convencidos del todo que para erradicar la principal problemática del Álgebra, la utilización de expresiones algebraicas como aritméticas, se utilice el Early-Algebra. En nuestra opinión es como utilizar el mismo enfoque para el error y la solución, se debe buscar otro enfoque para transformar el pensamiento algebraico en Álgebra formal.

Se considera necesario que se delimite lo que se quiere lograr para que el alumno obtenga un razonamiento algebraico deseado; es decir, trabajar el Early-Algebra sólo como la iniciación del pensamiento algebraico, para llegar al lenguaje utilizar otros enfoques que establezcan expresiones y fórmulas que permitan a los alumnos diferenciar la escritura algebraica y aritmética, de inicio no se pretende menospreciar ningún modelo de enseñanza, simplemente se intentará utilizar el Early-Algebra como medio para llegar a la transición de la Aritmética al Álgebra.

1.5 Planteamiento del problema de investigación

De acuerdo con la información obtenida tenemos referentes acerca de lo que se ha hecho y propuesto para trabajar con alumnos que comienzan a desarrollar el pensamiento algebraico. La idea considerada es apoyar en el desarrollo del pensamiento algebraico; es decir, no se pedirá que los alumnos resuelvan ecuaciones algebraicas, de inicio se pretende que los alumnos de primer grado de secundaria comiencen a trabajar con identificación de las letras como incógnitas específicas y patrones numéricos, para que lleguen a formular expresiones algebraicas que modelen dichos patrones.

El trabajar las literales en este enfoque dará cuenta de que los alumnos pueden generalizar información a partir de casos particulares y tendrán referentes acerca del cambio de pensamiento al trabajar con el Álgebra escolar, lo que se plantea servirá como un medio de adquisición del pensamiento algebraico para que tengan buenos fundamentos al trabajar las expresiones algebraicas y las ecuaciones en segundo grado. Es indispensable que no se les deje de lado esta forma de razonar, ya que cuando no practican algo nuevo, no obtienen un aprendizaje.

La pregunta de investigación de este trabajo es:

¿Cómo la realización de diseños basados en resultados de investigaciones pueden promover la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico con alumnos de primer grado de secundaria?

Teniendo en cuenta que se trabajará con todos los alumnos que existen en un aula para afectar lo menos posible su forma de trabajar y el contrato didáctico que existe en su salón de clase, incluso será prudente que quien efectúe las situaciones problemáticas sea el mismo profesor que les imparte la materia de Matemáticas.

La pregunta de investigación que se ha planteado podrá ser respondida cuando se haya alcanzado el siguiente:

Objetivo general. Diseñar, aplicar, validar y rediseñar una propuesta didáctica que apoye la transición entre la Aritmética y el Álgebra, basada en los resultados de investigación en Matemática Educativa.

Para lograr el objetivo general se han especificado una serie de objetivos particulares, cada uno de éstos colaborarán en la elaboración de una propuesta que indique los factores necesarios para que los alumnos comiencen a pensar algebraicamente.

Objetivos particulares

1. Realizar un estado del arte de la transición entre Aritmética y Álgebra.
2. Clasificar las investigaciones dependiendo de su aporte didáctico.
3. Detectar los factores que, a partir de la investigación, se han identificado como importantes para el inicio de un pensamiento algebraico.

4. Describir los elementos teóricos que permitirán plantear la secuencia de situaciones problemáticas.
5. Diseñar la secuencia de situaciones problemáticas.
6. Experimentar la secuencia de situaciones problemáticas y validarla, por medio de una ingeniería didáctica.
7. Rediseñar la secuencia con base en el análisis de los resultados obtenidos de la primera experimentación.

***Hipótesis*:** "La aplicación de secuencias didácticas diseñadas con base en las conclusiones de investigaciones acerca de cómo iniciar el pensamiento algebraico, ayudan a la obtención de herramientas para la transición del pensamiento numérico al algebraico"

Justificación: El trabajo pretende integrarse dentro de las actividades cotidianas que realizan los estudiantes en clases, pensando en una forma de adecuarlo a las necesidades del curso y que no les genere un esfuerzo mayor, la finalidad es que detecten este tipo de pensamiento a partir de lo que ellos ya conocen. Se cree que si se logra de la manera deseada, tendrán menor problema en el momento de trabajar con expresiones algebraicas, tema que trabajan en el tercer bloque del ciclo escolar.

Con la detección de la existencia de dificultades en los estudiantes a la entrada del mundo del Álgebra, a través de investigaciones, prácticas docentes y las concepciones de otros profesores; de propuestas para iniciar con el pensamiento algebraico en alumnos de Matemáticas, esperando que se logre el cambio de la forma de pensar, se ha tenido la idea de realizar una investigación que caracterice las herramientas que se necesitan para facilitar dicho cambio en la forma de pensar de los aprendices. En los siguientes capítulos se desarrollará la propuesta que nos aportará elementos para apoyar la transición de la Aritmética al Álgebra.

En este capítulo se puede detectar que existen dificultades para iniciar el Álgebra con estudiantes sin importar la generación en la que se encuentren; es necesario analizar dichas problemáticas desde los razonamientos, las estructuras, los procesos, las operaciones, las situaciones problemáticas y las argumentaciones que se dan por parte de los estudiantes y los profesores, para delimitar qué competencias (conocimientos matemáticos) son propicias para comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico en aprendices que están acostumbrados a desarrollar respuestas a las situaciones problemáticas en un pensamiento numérico. Además surge la necesidad de hacer algo al respecto para cambiar el enfoque con el que regularmente se trabajan temas correspondientes al Álgebra Escolar.

Capítulo 2. Marco conceptual

La intención de este capítulo es aportar herramientas conceptuales que describan el marco en el que se desarrollará y analizará esta investigación, que como se ha indicado anteriormente, pretende encontrar recursos y estrategias para que los alumnos logren la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Con la finalidad de determinar y clasificar estos recursos se ha elaborado un marco conceptual que considera varios aspectos teóricos que aportan elementos que son complementarios. Se han considerado: la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986), la transposición didáctica (Chevallard, citado en De Faria, 2006), dos elementos del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001, 2007): la Competencia Matemática Formal (CMF), la consideración de errores, obstáculos y dificultades, y, finalmente, el Modelo 3UV (Ursini *et al.*, 2005).

La teoría de situaciones didácticas y la transposición didáctica son teorías vinculadas mediante la idea de que los alumnos aprenden a través de un medio, aunque ese medio no esté diseñado para la enseñanza; en lo que pretenden centrarse estas teorías es en adecuar un medio propicio para la enseñanza de algún conocimiento, en este caso, el pensamiento algebraico.

El ELOS es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiósis) (Socas, 2012, p. 2). La CMF pretende hacer un análisis del contenido que se debe trabajar en cualquier situación problemática matemática, considerándola como disciplina científica. Los errores, obstáculos y dificultades pretenden caracterizar los orígenes de las problemáticas en los alumnos, así como los que inciden mayormente en las aulas para que, en conjunto con la CMF y otros aspectos que no se tomarán en cuenta en esta investigación, se encuentre una manera de corregir adecuadamente las concepciones erróneas que pueden tener los estudiantes.

El modelo 3UV es una manera de considerar el trabajo de las literales de distintas perspectivas, como regularmente se inicia en la escuela secundaria, por lo que este modelo servirá de base para las distintas situaciones problemáticas incluidas en la secuencia didáctica.

2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

Antes de experimentar alguna propuesta es importante saber qué situaciones problemáticas debemos plantear y de qué manera para lograr lo que pretendemos, para ello nos basaremos en la teoría de situaciones didácticas desarrollada por Guy Brousseau, la cual menciona que los alumnos aprenden por adaptación al medio, "*el alumno es capaz de obtener su propio saber de sus propias experiencias, de sus propias interacciones con su* *medio, incluso si este medio no está organizado para los fines de aprendizaje*" (Brousseau, 1986, p. 13).

Así, dentro de esta teoría se propone un modelo que intenta explicar el comportamiento didáctico, para ello utiliza conceptos que describen un cierto tipo de relaciones humanas, de tal modo que éstos aparecen como medios útiles para la descripción de la enseñanza. Además, es una teoría amplia que permite considerar que todos los fenómenos pertinentes puedan ser tomados en consideración, así podremos utilizar modelos adecuados para trabajar en la mayoría de los casos.

Para ser capaces de llevar a cabo lo anterior, se deben plantear situaciones problemáticas bien diseñadas, Brousseau (1986) nos menciona que el profesor debe saber qué conocimientos enseñar a sus estudiantes y que esos conocimientos deben ser bastante próximos al "saber erudito", aunque el profesor los debe disfrazar en situaciones problemáticas pertinentes para los alumnos; es decir, aislar ciertas nociones y propiedades de las situaciones problemáticas, como dónde tuvieron su origen, su sentido y su motivación, con la finalidad de que el lenguaje de las situaciones problemáticas sea adecuado para el grado escolar en el que se pretenden insertar, esto se conoce como transposición didáctica.

Aunque el alumno aprenda a pesar del profesor y de la naturaleza del conocimiento, es indispensable que reconozcamos la transposición didáctica de conocimientos para llegar a establecer un común aprendizaje en un grupo de estudiantes, "*la transposición didáctica mueve el saber de una comunidad (científica) a otra (escolar); dadas las transformaciones a las que es sometido el saber, tenemos diversos géneros o modos del saber*" (De Faria, 2006, p. 2). El autor clasifica tres tipos de saberes que se necesitan para llegar del saber sabio al saber enseñado.

Imagen 2. Los saberes en la transposición didáctica

De Faria (2006) define cada uno de la siguiente manera:

- *Saber sabio*: el saber que es generado por un matemático profesional y desarrollado en institutos de investigación.
- *Saber a enseñar*: el conocimiento científico no puede ser enseñado en la forma como se encuentra redactado en los textos científicos, se tiene que transformar en un saber ligado a una forma didáctica que sirve para representar el saber al estudiante.

- *Saber enseñado*: es el saber registrado en el plano de aula del docente, no coincide necesariamente con la intención prevista en los objetivos programados al nivel del saber a enseñar.

Dentro de este trabajo de investigación se dejará de lado el saber sabio en una primera instancia, volviendo a tomarlo en cuenta en el rediseño de situaciones problemáticas; elaborando así, la primera secuencia didáctica desde la planeación de un *"saber a enseñar"* y concluir con las diferencias que tiene con respecto al *"saber enseñado"* considerando que pueden existir elementos en la clase que desviarán los conocimientos a enseñar, ya sea por concepciones de los alumnos, falta de materiales didácticos o algunos otros imprevistos que puedan existir en las aulas en el momento de la clase. El saber sabio es un saber que se obtiene de los expertos en el campo de las Matemáticas y está determinado por considerar a la Matemática como una disciplina científica; para su caracterización dentro de un contexto educativo utilizaremos el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF) desarrollado por Socas (2001, 2007).

En la transposición didáctica Brousseau (1986) establece que existen fenómenos didácticos que no permiten el buen desarrollo de la clase, ya que son fallas del profesor en el momento de enseñar un nuevo concepto a los estudiantes, dichos fenómenos son:

El *efecto "Topaze"*: en este fenómeno de la didáctica el profesor guía al alumno mediante "preguntas orientadas al conocimiento pretendido" en que el alumno sólo contesta a lo que está preguntando el profesor, y esas respuestas regularmente requieren solamente ideas complementarias y evidentes al conocimiento en juego.

El *efecto "Jourdain"*: el profesor ve conocimiento explícito en la divagación de un alumno que no sabe lo que está diciendo, o reconoce que el alumno posee un conocimiento que no tiene; es decir, el profesor no quiere adentrarse en la complejidad de la mente del alumno e intenta ver un conocimiento que no existe en él, aceptando que tiene la idea requerida para el conocimiento en acción.

El *deslizamiento metacognitivo*: cuando una situación problemática ha fracasado, el profesor intenta justificarse con explicaciones heurísticas como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

El *uso abusivo de la analogía*: este uso puede llegar a causar "efecto topaze" en los alumnos, consiste en que el profesor intenta darle una nueva oportunidad a los alumnos de que aprendan un conocimiento con problemas "muy semejantes" a anteriores que han realizado y los alumnos detectan el procedimiento por el cual tienen que resolverlo, pero no conocen el "porqué" de la situación problemática.

El *envejecimiento de las situaciones de enseñanza*: la reproducción exacta de lo que ha dicho o hecho anteriormente no tiene el mismo efecto y ocurre con frecuencia que los resultados son peores y, en consecuencia, experimenta una cierta reticencia a esta reproducción.

Para realizar una buena enseñanza se tienen que tomar en cuenta cada uno de los factores que pudieran intervenir en el aula de clase, por lo que es necesario conocer los fenómenos didácticos para no caer en ellos cuando trabajemos los conceptos a enseñar con los alumnos.

Dentro de la transposición didáctica existen dos tipos de situaciones: la situación didáctica:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1982, citado en Gálvez, 2002, p. 4).

y la situación a-didáctica:

> *(…) es una situación en la que desaparece la voluntad explícita de enseñar. Para que esto se logre,* en principio, la situación planteada deberá "obligar" a producir un cierto conocimiento a manera de estrategia de resolución. Pero, advierte Brousseau, considerar que el medio es la fuente de la aceptación de la responsabilidad es insuficiente; aceptar la interacción con la situación y las reglas de la interacción no es posible sino por la mediación de un contrato didáctico (cf. Brousseau; 1988a; 322) portador de derechos y obligaciones para maestro y alumnos (Ávila, 2001, p. 5).

En esta situación desaparece la intervención explícita del profesor, porque pretende que el alumno adquiera la responsabilidad de llegar a un resultado por él mismo, otorgándole la obligación de que sea él, junto con sus compañeros, quienes obtengan la solución de un problema por medio de la validación, así su rol consiste en orientar y modular el trabajo de los estudiantes en lugar de brindarles respuestas de manera directa.

Panizza (2003) distingue situación didáctica de situación a-didáctica de la siguiente manera con la finalidad de que no se caiga en una confusión con respecto a los términos que maneja la teoría,

> (…) es posible al comienzo del descubrimiento de este dominio, confundirse con la interpretación de los términos “didáctica” y “a-didáctica”. La situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución (p. 5).

Es necesario tener caracterizadas cada una de esas situaciones didácticas y a-didácticas que establece Brousseau como necesarias para que los alumnos puedan ser capaces de aprender conocimientos y es indispensable conocer lo que el contrato didáctico viene a hacer dentro de esas situaciones de enseñanza.

El contrato didáctico según Brousseau (1986) es la estrategia de la situación didáctica, son las reglas del juego.

- El profesor se supone que crea las condiciones suficientes para la apropiación de conocimientos y debe “reconocer” esta apropiación cuando se produce.
- Se supone que el alumno puede satisfacer estas condiciones.
- La relación didáctica debe “continuar” cueste lo que cueste.
- El profesor asegura así que las adquisiciones anteriores y las condiciones nuevas dan al alumno la posibilidad de la adquisición.

Mientras que Gálvez (2002) establece que este contrato tiene componentes explícitos e implícitos, dentro de éste se definen las reglas de funcionamiento dentro de la situación:

> (…) la distribución de responsabilidades, asignación de plazos temporales a diferentes actividades, permiso o prohibición del uso de determinados recursos de acción, etcétera. La presencia de un contexto escolar no es esencial en la definición de una situación didáctica; lo que sí es esencial es su carácter intencional, el haber sido construida con el propósito explícito de que alguien aprenda algo (p. 42).

El profesor debe tener bien definido entonces lo que se pretende lograr con los estudiantes, pero Brousseau (2002) nos hace saber que cuanto más ocupa el lugar de los niños el maestro, más contraría su proyecto, no puede decirle a los alumnos lo que espera obtener de ellos porque es lo que harán, pero no será producto de su pensamiento, solamente harán lo que les pidió el maestro,

> (…) el trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuestas a las exigencias del medio y no del profesor (p. 3).

El medio es un elemento importante dentro de esta teoría. Según Fregona y Orús (2009) la palabra “medio” surge dentro de la teoría de situaciones didácticas en el sentido utilizado por Piag*et al* definir la acción como una reequilibración de la conducta ante una modificación del entorno del alumno; según la RAE, medio es “*Conjunto de circunstancias o condiciones exteriores a un ser vivo que influyen en su desarrollo y en sus actividades” (*RAE, 2010*),* Gálvez (1994) hace referencia al medio como un entorno que comprende eventualmente instrumentos u objetos y un sistema educativo (representado por el profesor). Por lo tanto es preciso que el profesor sea quien regule este medio, del cual forma parte, adecuándolo a las necesidades de las características de los alumnos y del aprendizaje que ellos puedan obtener.

Fregona y Orús (2009) mencionan que:

> Cuando el medio del individuo se modifica y no resulta inmediatamente interpretable con los esquemas que posee, entra en crisis y busca encontrar la manera de recuperar su equilibrio. Según el modelo piagetiano, se producen modificaciones en los esquemas cognitivos y se incorporan nuevas experiencias. Análogamente, en el aula se trataría de organizar un medio que se resista a la interpretación inmediata del alumno y que lo lleve a actuar, formular lenguajes y conceptos, cuestionar la validez de lo que se produce, etc. (p. 6).

Con esta idea, se reafirma que quien debe propiciar el medio para la enseñanza en un salón de clase es el profesor, porque comentan que el docente es quien debe organizar los métodos adecuados para que exista un desarrollo personal del individuo.

El medio se logra cuando el profesor propone la dinámica que tienen que seguir los alumnos para que lleguen al conocimiento esperado; es decir, el profesor va a adecuar los conocimientos necesarios en función de los que ya conocen los alumnos para que adquieran el nuevo conocimiento, crea en los estudiantes conflictos conceptuales para que necesiten adentrarse en el trabajo del aula, en la investigación, la comunicación con sus compañeros y otros recursos que tengan disponibles. Estas acciones permitirán que los alumnos puedan llegar a nuevos conocimientos a través de la intención de las situaciones problemáticas. En el caso del tema que se trabajará en esta investigación, el profesor debe detectar qué conceptos poseen los alumnos y rescatarlos para que a partir de ellos se llegue a la generalización de patrones comunes dentro de la iniciación al pensamiento algebraico, pasando por una serie de obstáculos y relaciones entre los conocimientos adquiridos.

En la preparación de los instrumentos o métodos para la clase (variables de control), el profesor debe tener presente el contrato didáctico que ha llevado a cabo con los alumnos a lo largo del ciclo, porque sería una incongruencia que se cambiaran “las reglas del juego” para alguna situación problemática, por lo que el trabajo del profesor es también la necesidad de transformar el conocimiento de una forma que implique un reto para los estudiantes, pero a través del mismo contrato didáctico que se ha ido marcando a lo largo de las clases.

Como se había mencionado, las situaciones didácticas son partes fundamentales del contrato didáctico. A continuación se mencionaran algunos ejemplos de situaciones didácticas establecidas por Gálvez (2002):

> 1. Las situaciones de *acción*, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
>
> 2. Las situaciones de *formulación*, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

> 3. Las situaciones de *validación*, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.
>
> 4. Las situaciones de *institucionalización*, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación (p. 43).

Para explicar las situaciones mencionadas se recurrirá a Brousseau (2007), quien describe en una situación problemática de clase cada una de las situaciones didácticas que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje. El ejemplo es de una lección denominada “La carrera a 20”, la cual tiene por objetivo:

> Introducir un repaso de la división con un sentido de la operación no acorde con los aprendizajes anteriores y favorecer –en los niños– el descubrimiento y la demostración de una serie de teoremas.
>
> El juego
>
> Se trata de que cada uno de los adversarios que juegan llegue a decir 20 agregando, alternativamente, 1 o 2 al número dicho por el otro. El jugador que comienza dice 1 o 2, el que continúa agrega 1 o 2 a ese número, a su vez el primero agrega 1 o 2 y así sucesivamente hasta que uno llega a decir 20 y entonces gana.
>
> La estrategia ganadora consiste en tomar tan pronto como sea posible la sucesión 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. (p. 19).

Para mostrar las situaciones de acción, formulación y validación, Brousseau (2007) propone la siguiente serie de situaciones problemáticas.

> El profesor explica las reglas del juego y comienza una partida en el pizarrón contra un niño, luego cede su lugar a otro alumno.
>
> *Primera fase: juego de 1 contra 1*
>
> Los niños juegan varias partidas de a dos y anotan los números que van eligiendo. Al realizar una serie de partidas, se dan cuenta de que responder al azar no es la mejor estrategia, algunos descubren rápidamente la ventaja de decir 17.
>
> *Segunda fase: juego de un equipo contra otro*

> Los alumnos son agrupados en dos equipos que compiten uno contra otro. El profesor designa al azar a un alumno de cada equipo para que juegue una partida en el frente, delante de sus compañeros. Mientras se juega esa partida, los restantes alumnos no pueden intervenir. El que gana aporta un punto a su equipo. Los niños se dan cuenta de la necesidad de discutir y concertar estrategias.
>
> *Tercera fase: descubrir teoremas*
>
> El profesor propone que cada equipo enuncie los conocimientos que ha hecho y que le han permitido ganar. Ahora el juego consiste en demostrar la verdad de los enunciados propuestos a criticar y eventualmente probar la falsedad de las declaraciones del equipo contrario (pp. 19-20).

En la primera fase se puede observar una situación de acción, en la que el profesor es quien establece lo que tienen que hacer los alumnos y, éstos como respuesta a lo establecido por el profesor toman decisiones para organizar su situación problemática, los alumnos son quienes se dan cuenta de lo que tienen que realizar, el profesor sólo verifica que en realidad hagan lo pedido. En la segunda fase, se observa una situación de formulación en dos etapas: cuando el representante del equipo está participando frente a sus compañeros y cuando el equipo discute, estas discusiones realizadas entre los alumnos forman parte de sus formulaciones a través de: razonamientos, hipótesis y rechazo del azar. En la tercera fase se observa una situación de validación, ya que cada equipo elabora y propone un enunciado útil para llegar a 20, aquí los alumnos ya descubrieron teorías y tienen que convencer a los demás que su respuesta es correcta. La fase de institucionalización no está inmersa dentro de la situación problemática, pero regularmente es cuando el profesor tiene que afirmar que la validación de los alumnos es correcta; además, establece el conocimiento que se ha construido como algo socialmente reconocido, lo define, da propiedades y más ocasiones de uso.

De las cuatro situaciones detectadas dentro de una situación problemática en el aula, podemos comprobar que existen situaciones didácticas y situaciones a-didácticas; se considera como situación didáctica cuando el profesor establece lo que van a realizar los alumnos y cuando comienza a realizar parte de la situación problemática con uno de ellos, a partir de allí se tornan en situaciones a-didácticas porque los alumnos trabajan con sus compañeros, el profesor se ha convertido sólo en un moderador y orientador acerca de las ideas que surgen en los alumnos, propiciando que ellos solos lleguen a la obtención de hipótesis, razonamientos y conjeturas necesarios para realizar la situación problemática, finalmente, cuando el profesor vuelve a intervenir en la situación de validación, reaparece una situación didáctica porque ya existe participación del profesor, quien posee el conocimiento formal, él valida las hipótesis de los alumnos haciendo que el conocimiento que tuvieron se convierta en un conocimiento universal.

En estas situaciones se detectan otras nociones que comprende la teoría de situaciones didácticas y que son indispensables para que funcionen las situaciones didácticas: variables didácticas y la situación de devolución, dichas nociones están dentro de las situaciones didácticas mencionadas anteriormente. Se profundizará en cada una de ellas para intentar que exista una mayor comprensión de lo que se pretende realizar en este trabajo de investigación.

Variable didáctica: también es conocida como variable de comando, "*estas variables pueden ser manipuladas por el maestro para hacer evolucionar los comportamientos de los alumnos"* (Gálvez, 2002, p. 42), la autora menciona que la manipulación de estas variables permite modificar las situaciones didácticas bloqueando el uso de algunas estrategias y generando condiciones para la aparición y estabilización de otras.

La autora también menciona en qué consiste la devolución, Brousseau (1998, citado en Panizza, 2003) define a la devolución como "*el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia"* (p. 8). Panizza (2003) concluye que la institucionalización es complementaria a la devolución y se referencia a Brousseau (1986) para establecer que en la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica y en la institucionalización se definen las relaciones que pueden tener los comportamientos o producciones libres de los alumnos.

Brousseau (2002) hace referencia a la situación de devolución como una actividad mediante la cual,

> el docente intenta comunicar un problema al alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo […] el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema "universal", libre de presupuestos subjetivos (p. 3).

En síntesis, la variable didáctica puede entenderse como aquella modificación que hace el profesor con la finalidad de que la situación didáctica sea en principio llamativa para los estudiantes (para favorecer la devolución), pero además debe propiciar un reto para ellos, de manera que cuando el problema se convierta en su problema, la solución no sea inmediata, para ello el profesor podrá modificar ciertas variables: números, magnitudes, contextos.

Además, en caso de que se detecte un elemento que no fuera acorde a los conocimientos que poseen los alumnos, por ejemplo que no pudieran llegar a la obtención de la sucesión 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 por medio de una regla generada por multiplicación, el profesor debe modificar las variables didácticas de este problema, para que los alumnos lleguen a dicha regla, ya sea por sumas u otros conceptos, para que puedan los alumnos detectar que llegando a esos números ganarán la situación problemática.

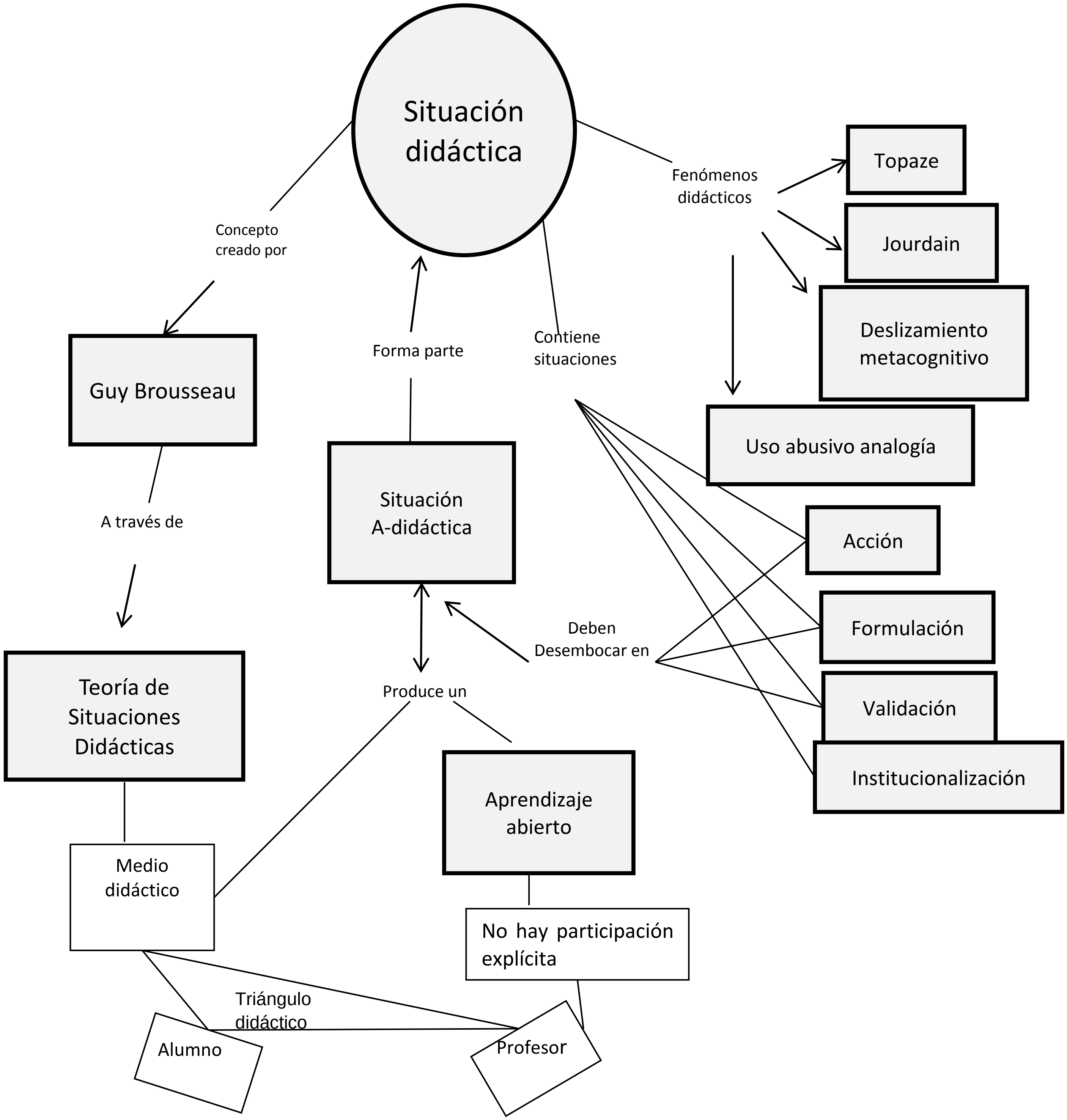


Imagen 3. Elementos de la teoría de situaciones didácticas

2.2 Competencia Matemática Formal (CMF)

Los elementos de la Competencia Matemática Formal (CMF) que se utilizaron son seis categorías: operaciones, estructuras, procesos, situación problemática, representaciones y razonamientos (argumentos), que propone Socas (2001, 2007) como parte del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Se tomaron en cuenta después de la implementación de la secuencia de situaciones problemáticas con la finalidad de analizar los resultados desde la fenomenología, el campo conceptual[7] y la funcionalidad de la Matemática, tres aspectos que para Socas (2012) la caracterizan como disciplina científica.

La intención de integrar estas categorías en cualquier situación problemática matemática diseñada para la enseñanza, tiene la finalidad de mejorar la "*Matematización de la Cultura*", a la que hace alusión Socas (2010 y 2012) como parte del ELOS y ayuda en la producción de situaciones de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, caracterizando el dominio de la actividad Matemática desde la Competencia Matemática Formal (CMF).

La Competencia Matemática Formal, es un modelo que considera a la Matemática como disciplina científica, desde la triple perspectiva del conocimiento matemático: fenomenología, epistemología (campo conceptual) y semiótica (especialmente desde la funcionalidad de las representaciones de los objetos matemáticos), tiene la intención de ayudar en la docencia y en la investigación de la Matemática Educativa. Socas (2010) menciona que la Competencia Matemática Formal enfatiza la diferencia del objeto matemático y su forma de representarlo.

Así mismo por "M*atematización de la Cultura*" se entenderá el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que se genera al situarlas como un conocimiento cultural para todas las personas. En este trabajo se hará buscando la manera de relacionar el "saber sabio" con el "saber a enseñar" a través del análisis de las categorías operaciones, estructuras y procesos que caracterizan el campo conceptual y, situación problemática, representación y razonamiento que contextualizan la actividad matemática.

A continuación se nombrarán las categorías y se definirá lo que pretende cada una, además se mostrará cómo están conectadas dentro del ELOS para obtener un mejor análisis y diseño de las situaciones problemáticas en la práctica docente de Matemáticas.

Operaciones

En esta etapa se encuentran las operaciones, los algoritmos (reglas) y las técnicas que se deben utilizar para resolver cualquier situación problemática matemática, forzosamente debemos realizar operaciones para lograr cambiar de registro y de valores los elementos que desarrollan una situación problemática matemática; sin embargo, muchas de

[7] En este enfoque la Matemática se considera una disciplina multiforme, es decir, se organiza en diferentes campos (numérico, algebraico, analítico, geométrico…). Se denomina campo conceptual a la organización epistemológica, semiótica y fenomenológica de cada una de estas formas, respectivamente, campo conceptual numérico, campo conceptual algebraico, campo conceptual analítico, campo conceptual geométrico… Otros autores han utilizado la noción de campo conceptual desde otra perspectiva (Vergnaud, 1981).

las veces no podemos detectar las técnicas o los algoritmos usados en la resolución, es importante fijarnos en los procesos de técnicas y algoritmos, porque de esta manera tendremos una mejor visión acerca de la forma de pensar de la persona que está desarrollando una situación problemática matemática.

Estructuras

En esta etapa se consideran los conceptos (definiciones), las propiedades y la estructura que deben estar presentes en cualquier situación problemática matemática que desarrollemos, porque para resolverlas debemos conocer qué conceptos están contenidos en lo que se trabaja, saber que esos conceptos deben cumplir con ciertas propiedades y que estarán relacionados mediante una estructura matemática que hace posible su resolución y su visualización.

Procesos

En esta etapa se consideran la sustitución formal, la modelización y la generalización, su intención es detectar que los procedimientos que realizamos en cualquier situación problemática correspondiente al Álgebra, pasan forzosamente por una o más de estas fases, por ejemplo, para llegar a generalizar o modelizar alguna situación problemática tenemos que utilizar la sustitución formal para obtener una mejor comprensión de lo que estamos haciendo y ésta nos permite trabajar en un registro diferente que nos facilita la ejecución de operadores.

Situación problemática

Esta etapa se encuentra más relacionada con el contexto que se le va a dar a la situación problemática matemática, en ella se consideran la identificación, el planteamiento y la resolución de la situación problemática, se entiende relacionada con el contexto, porque para lograr una buena identificación se debe relacionar con algo en concreto; es decir, debe tener un significado dentro del entorno social que se relacione con la actividad matemática en acción; después de identificada puede hacerse un planteamiento de ella o simplemente llegar a una resolución previendo las características de la situación.

Representaciones

Esta etapa se puede apreciar en todo el proceso de resolución de la situación problemática matemática; existen tres fases dentro de ésta que sirven para lograr el desarrollo de una buena sustitución formal de la situación problemática y nos proporciona una ayuda para el cambio de registro que necesitamos hacer al resolver la actividad matemática, las tres fases son: el reconocimiento, la transformación (conversión) y la elaboración (producto).

Razonamientos

Esta etapa está marcada por el contexto de la Matemática; es decir, se utiliza para dotar de algún significado lo que se pretende resolver, en ella consideramos la descripción, los argumentos (razonamiento) y la justificación, buscando una manera de describir los conocimientos matemáticos que se presentan en cierta situación problemática, dicha descripción debe de estar bien argumentada y/o justificada.

Para esta investigación es muy importante tomar en cuenta la manera en que están conectadas dentro de ELOS, porque dicha conexión tiene la finalidad de auxiliar en el planteamiento, detección y resolución de cualquier situación problemática, en este caso serán correspondientes al campo algebraico.

Socas (2012) relaciona las categorías correspondientes a la CMF, indicando que existen situaciones problemáticas que se centran explícitamente en el campo conceptual de las Matemáticas, organizándolas de la siguiente manera:

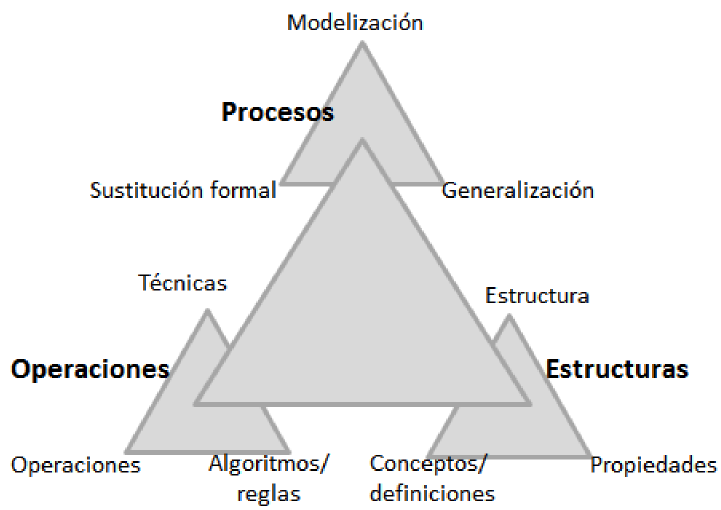


Imagen 4. Relación de las etapas contenidas en la Competencia Matemática Formal centradas en el campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Estableciendo que las operaciones realizadas en cualquier actividad matemática no estarán aisladas de las otras categorías, Socas (2012) señala que se llega a detectar la estructura del conocimiento matemático a través de operaciones y proceso, por ello es que los conecta en una triangulación, estableciendo que al realizar cualquiera de estas categorías, actuarán sobre ella, de manera directa o indirecta, las demás consideradas dentro del campo conceptual.

Las otras tres las considera como la contextualización del campo conceptual y las representa de la siguiente manera:

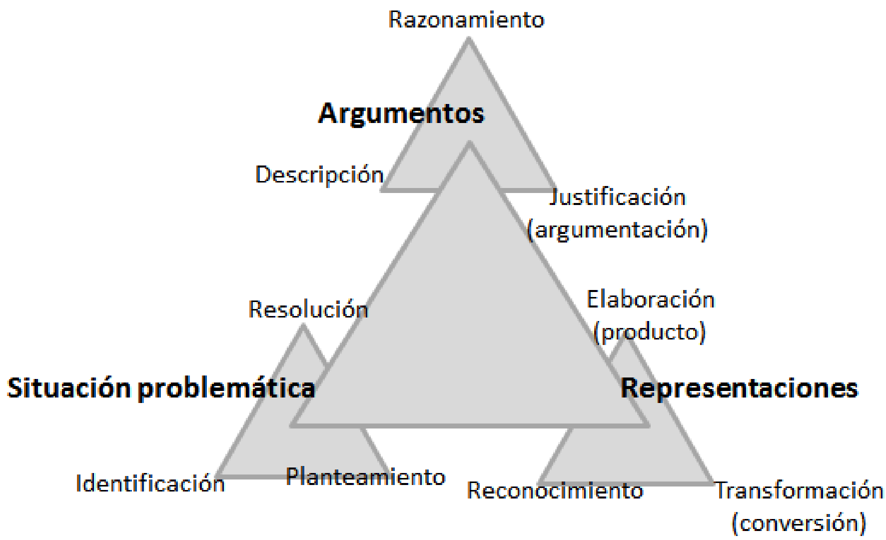


Imagen 5. Relación de las etapas contenidas en la Competencia Matemática Formal centradas en la contextualización del campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

En estas categorías también existe una conexión que permite relacionarlas entre sí, estableciendo que a través de la situación problemática llegaremos a mostrar distintas representaciones y podemos utilizar argumentos que sean válidos para el resultado requerido. Además de lo anterior, Socas (2012) plantea que cada una de las categorías tiene tres elementos, los cuales se mencionaron anteriormente, que están en relación para lograr un mayor análisis de las características que debe tener todo conocimiento matemático.

Regularmente para diseñar y analizar actividades matemáticas se hace una relación entre las categorías que se centran en el campo conceptual con las que lo contextualizan. Dicha relación permite detectar la forma en que se debe de planear una situación problemática matemática haciendo un mejor análisis *a priori*, con estas consideraciones acerca de las categorías y las relaciones que deben de tener, entre ellas y con las otras, se pretende llegar a la consideración de herramientas que faciliten el análisis y el diseño de actividades matemáticas referentes al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

2.3 Caracterización de errores, obstáculos y dificultades en Álgebra escolar

Otro elemento teórico que está contenido en ELOS, es la caracterización de errores, obstáculos y dificultades que presentan los aprendices de Álgebra. Como se había mencionado, para el análisis y el rediseño de la secuencia didáctica, se considerarán algunos errores clasificados por Palarea (1998), Ruano *et al.* (2003) y Socas (2011) que cometen regularmente los estudiantes, además se relacionarán con las posibles respuestas que pudieran dar los estudiantes en la solución de esta situación problemática.

Para comenzar a delimitar errores que son comunes en estudiantes de educación secundaria (estudiantes entre 12 y 15 años), recurrimos a Matz (1980, citado en Palarea 1998) quien trata de dar una explicación teórica a los errores que suceden tan comúnmente en el estudio de temas referentes al Álgebra,

> (...) los procesos que generan las respuestas algebraicas incorrectas no son resultado de acciones arbitrarias o del azar, sino que son producto de procesos intelectuales razonables, generados por desafortunadas adaptaciones del conocimiento adquirido previamente. Muchos de los errores comunes, afirma, surgen de uno de los siguientes procesos: el uso de una regla conocida en una situación para la cual resulta inapropiada, o, la adaptación incorrecta de una regla conocida, de tal manera que pueda utilizarse para resolver un problema nuevo y señala que “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (Matz, 1980, citado en Palarea, 1998, p. 80).

Palarea (1998) cita a Booth (1994) destacando una clasificación que se hace de los errores que encuentran comunes en los estudiantes los miembros del grupo de Álgebra del proyecto SESM (*Strategies and Errors in Secondary Mathematics*) quienes se centraban más en analizar la naturaleza de los errores que cometían los estudiantes que en lo que contestaban correctamente, concluyendo que muchos de estos errores se pueden atribuir a:

- La naturaleza y significado de los símbolos y las letras.
- El objetivo de la situación problemática y la naturaleza de las respuestas en Álgebra.
- La comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes.
- El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”,

indicando que los tres primeros suceden en la transición de la Aritmética al Álgebra y el último se debe a falsas generalizaciones sobre operadores de números.

Con respecto a errores que suceden en la transición Aritmética-Álgebra, Brousseau (1983) dice que el Álgebra es como un medio para hablar de la Aritmética, pero que en el momento de hablar se necesitaría un contrato didáctico especial con los alumnos.

Por otro lado Ruano *et al.*, (2003) analizan y clasifican errores cometidos por un grupo de estudiantes de secundaria en torno a los procesos de sustitución formal, modelización y generalización, obteniendo una serie de conclusiones acerca de obstáculos y errores que presentan los alumnos en la transición entre Aritmética y Álgebra. Los errores los atribuyen a varios tipos de origen: obstáculos, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales.

El obstáculo lo consideran de manera similar a Brousseau (1983), como un conocimiento adquirido que ha sido funcional en ciertos contextos, pero cuando el alumno lo utiliza fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas. Señalan que existen errores que han quedado sin resolver en la Aritmética, ocasionando que en Álgebra sean una ausencia de sentido.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

a) *Errores del Álgebra que tienen su origen en la Aritmética*. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
b) *Errores de procedimiento*. Los alumnos usan inapropiadamente fórmulas o reglas de procedimiento.
c) *Errores del Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico*. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo « $=$ » en Álgebra y la sustitución formal (Ruano *et al*, 2003, p. 313).

Estos autores deducen que los errores que clasifican en su estudio cuyo origen es ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales, son: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos…

Los autores comienzan considerando dichos errores como comunes al inicio del Álgebra escolar; sin embargo, a lo largo de su investigación llegan a caracterizar otros que cometen comúnmente los estudiantes independientemente del tipo de proceso desarrollado y son:

- *La necesidad de clausura.*
  Los estudiantes no pueden asimilar un enunciado incompleto, no aceptan que una expresión no pueda cerrarse y no genere un número como resultado: $10b + 3 = 13b$
- *La particularización de expresiones.*
  Los estudiantes no encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, por lo que necesitan retroceder al pensamiento numérico, buscando la manera de asignarle un valor a las literales que intervienen en una expresión algebraica.
- *El uso incorrecto de paréntesis.*
  Los autores señalan que este mal uso de los paréntesis puede atribuirse a dos cuestiones: a problemas de la Aritmética no superados, o a la forma de enseñanza del uso de paréntesis, ocasionando que se bloqueen y no resuelvan el paréntesis del tipo $-(a - 2b) + b$, o que simplemente omitan la existencia del paréntesis.
- *La confusión de la multiplicación con la potencia.*
  Los estudiantes dan un significado diferente a la definición de potencia, realizando una multiplicación entre los números involucrados, esto puede deberse a la forma en la que se enseñan los temas de potencias, porque se utiliza muchas veces el mismo número para la base y para la potencia: $2^2 = (2)(2)$ que es correcto, pero cuando cambia de base lo consideran de la misma manera $3^2 = (3)(2)$.

Socas (2011) complementa lo anterior estableciendo que aparte de errores, existen también dificultades por parte de los estudiantes, las cuales son organizadas en cinco categorías, que permiten describir la procedencia de esta dificultades,

> dos asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento matemático, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, la cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y la quinta está asociada a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas (Socas, 2011, p. 12).

Con base en la clasificación anterior (Palarea, 1998; Ruano *et al.*, 2003 y Socas, 2011) se considerarán dichos errores, obstáculos y dificultades en el análisis de la secuencia para clasificar los existentes y, en caso de que existan, señalar nuevas problemáticas; además, se intentará prever algunos errores que pueden cometer los estudiantes en la aplicación de la secuencia didáctica que se rediseñará con la finalidad de que se consideren varios aspectos que nos den indicios de cuándo un estudiante puede caer en situación de incongruencia y tener anticipación para trabajarlo con diferentes estrategias.

2.4 El modelo 3UV (tres usos de la variable)

Este modelo (Ursini *et al.*, 2005) intenta llevar a cabo con los alumnos situaciones problemáticas que faciliten la transición entre el lenguaje aritmético y algebraico, en este proyecto están involucrados profesores de distintos niveles educativos, desde los de secundaria hasta investigadores dedicados a la Educación Matemática, los cuales se empeñan en encontrar solución a la enseñanza del Álgebra.

Ursini *et al.* (2005) comienzan estableciendo que muchas de las ocasiones en que se trabaja el Álgebra escolar no suele darse a las letras una etiqueta algebraica, se acostumbra a que los alumnos las consideren como etiquetas que se refieren a cantidades específicas o la inicial de una palabra, como en el caso de las fórmulas geométricas.

El modelo 3UV propone las maneras en que se le tiene que dar valor a las literales en el momento de trabajarlas en la escuela secundaria, en primer lugar hacen referencia a que se tiene que trabajar como una incógnita específica, caracterizando problemas que regularmente muestran los estudiantes al inicio del Álgebra escolar es $x+12=26$, pidiéndoles que encuentren el valor de x, no resulta difícil en los estudiantes trabajar este tipo de ejercicios, la dificultad comienza cuando se pasa a expresiones $ax+b=c$, o del tipo $ax+b=cx+d$.

Otro error común es cuando a los estudiantes se les pide que determinen el valor de $4m$, la mayoría de los alumnos se confunden ante este tipo de preguntas ya que no le dan un valor aislado a m, sino que lo consideran como si el cuatro fuera la unidad de decenas y el m de unidades.

Otro tipo de problemas es que los estudiantes no aceptan una expresión que representa una letra como problema, por ejemplo: Andrea tiene 7 manzanas y su hermanita tiene x manzanas. ¿Cuántas manzanas tienen entre las dos? En este tipo de ejercicios los estudiantes regularmente asignan valores arbitrarios a x intentando llegar a una solución específica.

A partir de dichos errores detectados, los autores elaboran propuestas para encontrar la manera adecuada de acercarse al Álgebra:

a) La *generalización,* en la que se enfatiza el reconocimiento de patrones (numéricos y geométricos) y de métodos generales, expresando las reglas y los métodos usando los símbolos literales.
b) Las *funciones.* Esta propuesta plantea acercarse al álgebra a través del trabajo con cantidades relacionadas, hasta llegar a la expresión simbólica de las relaciones usando las literales y, en consecuencia, explorar las relaciones.
c) La *resolución de problemas.* Este enfoque pone el énfasis en el análisis de problemas y en la resolución de ecuaciones.
d) *Considerar al álgebra como un lenguaje con su propia gramática.* Se trata aquí de un acercamiento estructural al álgebra (Ursini *et al.,* 2005, pp. 20-21*).*

A partir de la información anterior los autores reconocen que en educación secundaria generalmente se le dan tres usos a la literal: para representar incógnitas, como números generales y en relación funcional; con la finalidad de que los alumnos sean capaces de:

- Realizar cálculos sencillos operando con las variables.
- Comprender por qué es posible operar con las variables y por qué estas operaciones permiten llegar a un resultado, sea éste numérico o no.
- Darse cuenta de la importancia que tiene lograr la capacidad de usar las variables para modelar matemáticamente situaciones de distinto tipo.
- Distinguir entre los distintos usos que se les da a las variables en álgebra.
- Pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables.
- Integrar los diversos usos para verlos como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se revelan dependiendo de la relación particular (Ursini *et al.*, 2005, p. 23).

Es necesario que el profesor tenga una comprensión profunda del concepto de variable (literal) y de sus distintos usos para enseñar las habilidades mencionadas. Uno de los propósitos de la enseñanza del Álgebra escolar en secundaria debe de ser que los alumnos sean capaces de desarrollar habilidades y capacidades que les permitan resolver problemas y ejercicios que involucran los distintos usos de la literal ya mencionados.

En el desarrollo del modelo 3UV se proponen capacidades que se requieren para trabajar con cada uno de los tres usos de la literal. Para trabajar con problemas que involucran a la literal como incógnita específica es:

I1 Reconocer e identificar en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.
I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones […]

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario:

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una cantidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en una relación funcional es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente.
F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. (Ursini *et al.*, 2005, pp. 35-37).

Las situaciones problemáticas concernientes al Álgebra escolar se deben de trabajar en torno a estos aspectos, en este trabajo se utilizarán para el diseño y el rediseño de ambas secuencias didácticas. Ursini *et al.* (2005) comentan que mediante la aplicación de su modelo las situaciones problemáticas concernientes al Álgebra resultan efectivas, siempre y cuando el profesor tenga muy en cuenta cada uno de los aspectos que pueden influir en el aula de clase, tanto didácticos como, matemáticos y sociales.

Los distintos fundamentos teóricos que sustentarán esta investigación servirán para desarrollar el diseño, análisis y rediseño de la secuencia didáctica con los estudiantes de primer grado de secundaria mediante la metodología de ingeniería didáctica. En el análisis y rediseño de la secuencia se realizará un reconocimiento de los factores que intervienen en situaciones problemáticas algebraicas que utilizan tres usos de la literal: incógnita específica, generalización y en relación funcional, definiendo cada uso que se le asigna a la literal con el apoyo de la propuesta de Ursini *et al.* (2005), el modelo 3UV; además, se establecerá una caracterización de errores que comúnmente cometen los estudiantes al trabajar con temas relacionados con el Álgebra, conjuntamente se realizará un análisis del contenido mediante la CMF, para prever dichos errores en las situaciones problemáticas de la siguiente secuencia didáctica que, al igual que la primera, cumplen con los elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas, intentando que cuando los alumnos caigan en una incongruencia puedan superarla, con la finalidad de que la secuencia didáctica resultante aporte elementos que ayuden a la transición entre pensamiento numérico y pensamiento algebraico.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se muestra el desarrollo la secuencia didáctica que contiene los elementos teóricos anteriormente mencionados, mediante el diseño de una ingeniería didáctica; además, se aplica y obtienen resultados que permiten caracterizar la entrada al pensamiento algebraico en alumnos de primer grado de escuela secundaria, el acomodo de las etapas que tiene la ingeniería permite observar lo que se pretendía y lo que en realidad pasó, haciendo una vinculación con la transposición didáctica.

3.1 La ingeniería didáctica como metodología de investigación

La noción de ingeniería didáctica surgió a inicios de los años ochenta en la didáctica de las Matemáticas. Surge como un medio para responder a dos cuestiones fundamentales de Chevallard (1982 citado en Artigue, 2002) ¿cómo tomar en cuenta la complejidad de la clase en las metodologías de la investigación? y ¿cómo pensar las relaciones entre investigación y acción sobre el sistema de enseñanza? Se nombró como ingeniería didáctica porque, según Artigue (1995) es una forma de trabajo comparable con el trabajo de un ingeniero quien para realizar un proyecto se basa en los conocimientos científicos de su dominio y se somete a un control de tipo científico.

Como metodología de investigación se caracteriza por un esquema experimental basado en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Menciona Artigue (1995) que comparándolo con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, la ingeniería didáctica se caracteriza por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada; la mayoría de investigaciones en las que hay experimentación se validan en un enfoque comparativo con validación externa, sin embargo, la ingeniería didáctica tiene una validación en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*, en el primer análisis se encuentran un número de hipótesis y en el segundo se apoya de los datos surgidos de la realización efectiva.

Generalmente se divide en cuatro fases: fase 1 el análisis preliminar; fase 2 de concepciones y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería; fase 3 la experimentación y la fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación.

La fase de análisis preliminar consiste en tomar en cuenta no solamente un cuadro teórico general y los conocimientos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- En análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación (Artigue, 1995, p. 38).

Para la fase de concepción y análisis *a priori* Artigue (1995) dice que generalmente se utilizan dos tipos de variables, las macro-didácticas o globales y las micro-didácticas o locales. Las globales son con respecto a la organización de la ingeniería en general y las locales se enfocan a la organización de una secuencia o de una fase de la ingeniería. El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis y la validación de estas hipótesis se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y análisis *a posteriori*.

La fase de experimentación muestra una diferencia "entre los conocimientos construidos en las fases a-didácticas, que cuidan el escenario, o en las fases que crean los alumnos no respetando las consignas dadas, y los saberes a los que apunta la ingeniería, a menudo introducidos de manera ostensiva" (Artigue, 2002, pp. 14-15). La autora nos menciona también que en esta fase se muestra la complejidad de los conocimientos en juego y se confirma la dificultad para identificar lo que les hace ganar, aunque el juego y las reglas permanezcan estables.

La fase de análisis *a posteriori* se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación, las observaciones que se hicieron y las producciones de los estudiantes, así como en la comparación con el análisis *a priori* para llegar a una validación. La simbología utilizada en las transcripciones se tomó de García (1997, citado en Rodríguez, 2013), siendo la siguiente: / / Conductas no verbales o información del contexto paralelo al discurso; ( ) Interpretación o información sobre tono, actitudes, posibles significados dentro de la observación; … Verbal no registrado o que no se recuerda, también verbal que no se transcribe. Por cuestiones de ética los nombres mencionados no son los reales

Dentro de esta investigación se elaborarán cada una de esas cuatro fases que se contemplan para construir una ingeniería didáctica y validarla internamente con respecto a los conocimientos obtenidos por los estudiantes con los que ya se habían detectado.

3.2 Análisis Preliminar

En este apartado se mostrarán algunas propuestas acerca de cómo iniciar el pensamiento algebraico con alumnos que no han realizado esta transición entre Aritmética y Álgebra; regularmente las investigaciones se han realizado con niños pequeños, detectando que son capaces de llegar a generalizaciones de los elementos clave para desarrollar un razonamiento algebraico adecuado.

Se muestran cinco artículos que proponen una manera de abordar el inicio del Álgebra escolar con niños de educación primaria, a partir de sus resultados se creará una propuesta con base en los elementos que se consideren pertinentes, con la finalidad de aplicarla con alumnos de primer grado de secundaria en una escuela del estado de Zacatecas, México.

Los artículos que se tomaron en cuenta como complemento de los mencionados en los antecedentes son: Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006), en la que intentan introducir el pensamiento algebraico en alumnos pequeños mediante situaciones problemáticas que fueron desarrollando con estudiantes de primaria en E.U.A.; Barallobres (2000) clasifica el Álgebra en dos dimensiones; la útil y la dimensión objeto; Pelet y Carraher (2007) manifiestan que se puede enseñar la noción de números con signo mediante la generalización de secuencias y utilizando herramientas que permiten construir estructuras algebraicas generales; Radford (2010) establece que tengamos cuidado cuando diseñamos situaciones problemáticas de carácter algebraico porque nos hace ver que no todas las generalizaciones son algebraicas ayudando a lograr una tipología de generalizaciones aritméticas y generalizaciones algebraicas.

3.2.1 Aritmética y Álgebra en Educación Matemática

Se toma como referencia el trabajo de Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006). Estos autores sugieren que el Álgebra tiene que ser parte del currículo de primaria, los jóvenes de entre 8 y 10 años son capaces de llegar a conclusiones algebraicas en sus ejercicios, esto lo afirman los autores, sin embargo mencionan que esta conclusión no disminuye la necesidad de investigación, sino que necesita una base sólida en las investigaciones para validar esta idea, la idea de esta propuesta es que se utilice desde temprana edad la suma, la resta, la multiplicación y la división como funciones para facilitar la entrada del pensamiento algebraico y del Álgebra formal en los alumnos, cuando se requiera el cambio de tema en el currículo.

La propuesta de “Early-Algebra” está basada en el trabajo de Davydov (1969-1991, citado en Carraher *et al.* 2006) quien realizó una propuesta de inicio de Álgebra temprana en la que tuvo éxito, él muestra que los niños rusos que recibieron instrucción en la representación algebraica de problemas verbales tuvieron un mejor desempeño que otros estudiantes a lo largo de ciclos escolares posteriores y mostraron mejores resultados en la resolución de problemas del Álgebra, en comparación con otros compañeros que llevan cinco años de Aritmética y después Álgebra. El trabajo de Davydov se ha considerado como pionero y el equipo de Davydov tiende a minimizar el potencial de la Aritmética como base para el conocimiento algebraico.

Se hizo un estudio longitudinal, de 30 meses con 69 alumnos de tercer grado de primaria (8-10 años) en Massachusetts, se han trabajado 8 lecciones, regularmente una por semana, con el objetivo de ejemplificar como niños de corta edad a medida que aprenden la suma y la resta pueden integrar conceptos algebraicos y representaciones en su forma de pensar. El comienzo de representaciones algebraicas lo hacen con funciones lineales, funciones simples como $x+8$.

En el estudio que hicieron, los llevaron con una serie de situaciones problemáticas que separaban en lecciones que iban aumentando de complejidad, el primer acercamiento que tuvieron del pensamiento algebraico lo llevaron en la lección tres en la que tenían que introducir la noción de número negativo. La actividad los llevó a apoyar discusiones sobre las relaciones entre las cantidades físicas y el orden de los números.

En la lección 4 los estudiantes definieron lo que era la recta numérica basándose en un ejercicio en el que contemplaban años, alguno no podían concebir como retroceder en el tiempo, por lo tanto definían que no podían irse para atrás. En la lección 6 se introdujo una "Línea número variable" como medio de hablar de las operaciones en las incógnitas, era entendido como el desplazamiento de espacios hacía la izquierda desde $\mathrm{N},\ \mathrm{N}+4$.

En la lección 7 hacen una equivalencia entre lo que tienen en sus alcancías María y Juan, sin especificar lo que tienen de dinero, sino que solamente hicieron una equivalencia de que tenían lo mismo. Con base en esa idea los niños aprendieron acerca de los cambios que producían esas cantidades y al final determinaron la cantidad inicial de María y Juan y las cantidades que tenía en cada día de la historia, en esta clase los llevan a establecer la idea de que cuando no conocen una cantidad lo establezcan como N, sin ocasionar conflictos cognitivos en los estudiantes. Concluyeron que pueden escribir N para representar cualquier cantidad desconocida.

> María y Juan tienen cada uno una alcancía, el domingo los dos tenían la misma cantidad en sus alcancías. El lunes, la abuela viene a visitarlos y ofrece 3 dólares para cada uno de ellos. El martes, van juntos a la librería. María gasta $ 3 en el nuevo libro de Harry Potter. John gasta $ 5 en un calendario 2001 con imágenes del perro en ella. El miércoles, John se lava el coche de su vecino y gana $ 4. María también hizo $ 4 de niñera. Corren a poner su dinero en sus alcancías. El jueves María abre su alcancía y descubre que ella tiene $ 9.

En la lección 8 los alumnos con respecto a las alturas de ciertos chicos establecen que si la altura de uno es N, y sabemos que otra persona mide cuatro pulgadas más, su altura va a ser $\mathrm{N}+4$, estableciendo así que ya pueden trabajar con cualquier número aunque sea desconocido para ellos.

Tom es 4 pulgadas más alto que María. María es 6 pulgadas más baja que Leslie. Dibuja la altura de Tom, la altura de María, y la altura de Leslie. Mostrar a que se refieren los números 4 y 6.

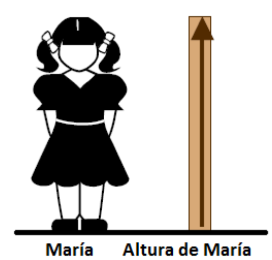


Imagen 6. Actividad 8, el problema de la altura

En las actividades de esta investigación los estudiantes demostraron que habían comenzado a manejar los conceptos algebraicos fundamentales. El Álgebra es un vasto dominio de las Matemáticas, y el progreso mostrado por los estudiantes en esta investigación es el inicio de una larga trayectoria.

Las actividades del Early-Algebra no se encuentran en ningún libro de texto en inglés (en el 2006), se llega a la conclusión que tomará muchos años para la comunidad de Educación Matemática desarrollar prácticas y estructuras de aprendizaje consistente con esta visión. Los autores consideran que la enseñanza del Álgebra por medio de la Aritmética es una propuesta interesante, pero enfatizan en que sólo puede ser conocido si un número significativo de personas se comprometen a enseñarla sistemáticamente mediante experimentos e investigaciones.

3.2.2 Algunos elementos de la Didáctica del Álgebra

Se analiza la propuesta de Barallobres (2000) en la que caracteriza una competencia del Álgebra que denomina como un poco más que la mera manipulación de símbolos, lo hace en dos dimensiones: La dimensión útil, el Álgebra es considerada como adecuada para resolver problemas que provienen de contextos internos o externos a la Matemática; la dimensión objeto, es considerada como un conjunto estructurado de objetos como ecuación, incógnitas, función, literal, parámetros, inecuaciones…, dotados de propiedades.

Tiene la idea de que el pensamiento algebraico se construye sobre el pensamiento aritmético, pero en ruptura con el aritmético, Vergnaud (1987, citado en Barallobres, 2000) establece una ruptura epistemológica entre la Aritmética y el Álgebra en doble sentido, por una parte, la introducción de un aspecto formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente y por otra la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación, incógnitas, literales, etc.

Dentro de su propuesta caracteriza la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, en los primeros menciona que es un proceso que parte de lo conocido a lo desconocido, y en Álgebra es al revés, se designa el número desconocido por una letra, se manipula como si fuera conocido. El estatus del signo = plantea un problema esencial de ruptura, es utilizado en Aritmética como el anuncio de un resultado y puede constituirse un obstáculo para el aprendizaje del Álgebra, en síntesis caracteriza el trabajo aritmético como hacer procedimientos: las cadenas de números y operaciones no son consideradas como objetos sino como procedimientos que conducen a producir una respuesta, por el contrario, en Álgebra los símbolos escritos tienen sentidos por sí mismos, independientemente de los procedimientos que ellos representan en la resolución de problemas.

Los problemas que figuran en los libros de texto de Argentina son similares a este problema: “Hace tres años, el triple de la edad de Patricia era exactamente 30. ¿Cuántos años tiene hoy Patricia?”

El autor opina,

- Si los problemas se pueden resolver mediante métodos aritméticos, los alumnos privilegian este tipo de resolución por su familiaridad con este dominio y pierde el valor de útil para el Álgebra, en este caso el Álgebra se impone más como una necesidad de contrato que como una necesidad para resolver una situación.

> Regularmente se utilizan este tipo de problemas para la entrada del Álgebra escolar; si se quiere rescatar el valor útil del Álgebra debemos aumentar el grado de complejidad en los problemas.

Los problemas de este tipo no son interesantes para los estudiantes, ya que no cumplen con los requisitos de imponer una condición que implique el desarrollo de su pensamiento algebraico, seguirán observando que con métodos aritméticos pueden resolver este tipo de problemas y no ocasionará nuevas maneras de contemplar las Matemáticas; es decir, no llegan a considerarse problemas para los alumnos porque ya dominan la Aritmética, los alumnos sólo contestarán las situaciones problemáticas para seguir cumpliendo con el contrato didáctico (lo que pide el profesor es lo que voy a responder) aunque utilicen métodos muy conocidos por ellos.

Cortés, Vergnaud y Kavafian (1990, citado en Barallobres, 2000) señalan que en situaciones representables por ecuaciones del tipo $\mathrm{ax}+\mathrm{b}=\mathrm{cx}+\mathrm{d}$ la resolución algebraica aparece más operatoria que la resolución aritmética, pero estos problemas presentan problemas a los alumnos principiantes, el Álgebra toma una significación más clara en la resolución de problemas con dos incógnitas, aunque ellos mismos señalan que serían problemas complejos para iniciar los alumnos en Álgebra.

El autor menciona que el lenguaje algebraico permite memorizar la génesis de una expresión numérica para deducir sus propiedades, por ejemplo, cuando se resuelve un problema aritmético, 8×5, termina reducido a un resultado numérico, en este caso 40, al escribir el resultado perdemos “el origen” del mismo, porque 40 puede ser el resultado de $4 \times 10, 3+37$, etc. En cambio el Álgebra permite “guardar” le génesis de una expresión para analizar sus propiedades.

Por ejemplo, ¿cómo resuelven los alumnos un problema como el siguiente?:

> “Un chico multiplica un número por 5, le suma 12. Luego sustrae el número inicial y divide el resultado por 4. Dice que el resultado obtenido supera en 3 unidades al número inicial. Y piensa que esto pasará cualquiera que sea el número inicial. ¿Tiene razón?”

- Muy pocos alumnos llegan a la expresión $(5\mathrm{x}+12-\mathrm{x}):4$ y luego, después de un cálculo, a $x+3$.
- Algunos llegan pero no a través de un cálculo algebraico.
- Muchos formulan algebraicamente tales problemas pero no utilizan el álgebra para concluir, volviendo sobre el cuadro numérico a través de una prueba pragmática (probando con ejemplos).

Tanto en los problemas de generalización, como en los problemas ligados a la construcción de fórmulas, los alumnos deberán explorar regularidades, encontrar estructuras, generalizar procedimientos, etc.

En el Álgebra elemental la dimensión objeto se organiza alrededor de la resolución de ecuaciones, de inecuaciones y de sistemas lineales. Es posible abordar la dimensión “objeto” a partir de:

1. problemas de status de los nuevos objetos, lo que ha dado lugar a numerosas búsquedas sobre, por ejemplo, el status de las letras o también conduciendo a análisis en términos de procesos/objetos (Sfard, 1991, citado en Barallobres 2000).
2. la dualidad de las expresiones algebraicas dotadas a la vez de una semántica y de una sintaxis, dualidad que juega un rol esencial en la manipulación formal.

3.2.3 Números con signo y pensamiento algebraico

Se utiliza el trabajo de Peled y Carraher (2007) como referencia, los autores tienen la idea de que al trabajar números con signo en un contexto algebraico facilitará el aprendizaje de este tema, la idea la obtienen de trabajos revisados, que están citados en su artículo, que tratan acerca de que los niños pequeños pueden aprender Álgebra (Blanton y Kaput, 2000; Brizuela y Earnest, 2007; Carpenter y Franke, 2001; Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2001; Davydov, 1991).

Los profesores utilizan modelos didácticos, materiales manipulativos utilizados para un fin específico definido por el docente, en los libros de texto de EUA se utiliza un modelo de “cacahuates mágicos” para la enseñanza de números con signo, que según Ball (1993, citada en Peled *et al.* 2007) implica un tipo de magia porque se quitan y añaden números de una manera aleatoria, algunos profesores creen que a los niños les resulta más fácil recordar un conjunto de reglas extrañas.

En general no han sido exitosos los modelos didácticos de números con signo, ya que al tratarlos en un enfoque aritmético no facilitan el crecimiento conceptual. En el texto se muestra que los problemas algebraicos son más adecuados para promover el aprendizaje de los números con signo. Se cuestionó a 15 profesores en formación y se les pidió que plantearan una situación para ejemplificar $2-7$ con contextos apropiados para los estudiantes, 9 establecieron contextos de dinero (deudas) un problema apropiado pero el contexto que se está creando es artificial, 3 profesores utilizaron un contexto alternativo con temperaturas, un problema que está elaborado de una manera factible para la enseñanza: en invierno mi termómetro lee que estamos a 2°, durante la noche la temperatura se reduce 7°. ¿Qué temperatura había a la mañana siguiente?

La dificultad de crear problemas de números con signo es que regularmente los que vienen a la mente pueden ser resueltos sin utilizar números negativos. Mukhopadhyay, Resnick y Schauble (1990, citados en Peled y Carraher, 2007) encontraron que el tratar los problemas desde un contexto cotidiano ayuda en el tratamiento de números con signo, es más fácil visualizar cambio en las cantidades, ya sea de dinero o de temperaturas, que utilizando ecuaciones formales con notaciones matemáticas.

Aplicaron algunas situaciones problemáticas con niños de sexto de primaria acerca de números con signo, en una se pidió que encontraran la diferencia de altura entre dos ciudades, una estaba a -200m sobre el nivel del mar y la otra a $+300\text{m}$, se detectó que los niños en lugar de hacer la resta correspondiente $300-(-200)=500$ los niños solamente añaden los valores absolutos de las distancias del mar $300+200=500$, entonces tiene que darse otro enfoque a los números con signo.

En el artículo se establece que los problemas aritméticos establecen un caso específico relativamente simple, pero que "*Algebrafied curriculum*" (término que utilizan los autores refiriéndose a un currículo con aspectos algebraicos) puede introducir un reto que requiere el uso de herramientas matemáticas para modelar estructuras algebraicas generales y muestra dos ejemplos de problemas que pueden introducir estas nociones algebraicas en los estudiantes.

Ejemplo: Anne condujo 40 km al norte de su hogar hacia una reunión que había en la ciudad, después ella tuvo que retroceder 60 km hacia el sur para ir a otra reunión. Después de las reuniones llamó a su marido, Ben, para que fuera por ella.

- ¿Cuánto tiene que recorrer Ben y en qué dirección?
- Escribe una expresión para calcular la longitud del viaje de Ben.

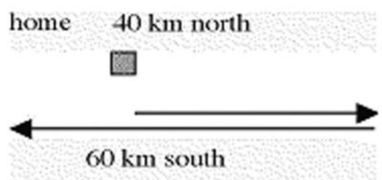


Imagen 7. Recorrido de Anne

En el diagrama se muestra que Anne fue más al sur que al norte y Ben tendrá que viajar 20 km al sur para recoger a su esposa, entonces la expresión simbólica que representa la operación es $60\text{ a }40=20$, es preciso que en el momento de formalizar se deje el orden de las cantidades para que concluyan que $40-60=-20$, no se puede perder de vista la dirección, porque influye en la construcción de la solución.

Se establece que se pueden crear problemas que involucren temperaturas usando el mismo principio que se sigue para las distancias, recalcando que un principiante debe de buscar patrones, trabajar de arriba a abajo, de derecha a izquierda, organizando la situación y haciendo generalizaciones; es decir; detectar una secuencia de los cambios de temperatura y llegar a reconocer las ventajas de la utilización de números con signo para distinguir la disminución y aumento de la temperatura.

El contexto del dinero es significativo para los niños porque es algo que están acostumbrados a manejar, pero no es del todo conveniente porque los estudiantes podrán responder los cuestionamientos sin necesidad de recurrir a los números con signo.

El propósito de este artículo es mostrar que existe una relación entre Aritmética y Álgebra en el tratamiento de números con signo, ya que el Álgebra proporciona un contexto útil para la introducción de números con signo y recíprocamente se muestra que las tareas de números con signo pueden ayudar a los estudiantes en las concepciones que tengan de ciertos procesos matemáticos que necesitan generalizaciones para su solución. Esta propuesta es teórica, ya que sólo una situación problemática se realizó con estudiantes; sin embargo, es importante que haya quienes intenten realizar de esta manera el tratamiento de números con signo para que se pueda corroborar la relación entre el aprendizaje de éstos y el desarrollo del pensamiento algebraico.

3.2.4 Capas de generalidad y tipos de generalización en actividades con patrones

Finalmente se señala la investigación de Radford (2010) que también se tomó como referencia. El autor hizo un estudio longitudinal desde 1997, en el que trabaja con profesores para intentar implementar un nuevo plan de estudios, diseñado en 1997 en Ontario, Canadá; para cumplir con el plan de estudios descubrieron que los profesores deberían trabajar colectivamente para llevar una misma orientación hacia los estudiantes, pretendiendo que los alumnos aprendan los conceptos algebraicos establecidos en el plan de estudios y profundizar en su comprensión acerca de la aparición y desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes, las dificultades que encuentran al dedicarse a la práctica del Álgebra y las posibles formas de superarlas.

Relata que existen investigadores que han expuesto que los alumnos tienen bastantes errores al trabajar con el pensamiento algebraico,

> Matz (1980) y Kaput y Sims-Knight (1983) investigaron algunos errores asociados con el uso de símbolos; Kieran (1981) señaló diferentes conceptos asociados con el signo igual. Algunos años más tarde, Filloy y Rojano (1989) ponen en evidencia algunos problemas clave que enfrentan los estudiantes novatos en la resolución de ecuaciones. Un poco más tarde Sfard (1991) y Gray y Tall (1994) llaman la atención sobre las dificultades de los alumnos para distinguir entre objetos y procesos, mientras que Bednarz y Janvier (1996) estudiaron los efectos de la estructura de las palabras en los problemas de aritmética y razonamiento algebraico. Casi al mismo tiempo, varios investigadores han demostrado los límites de las tablas numéricas X - Y en la generalización de patrones (Castro, 1995; McGregor y Stacey, 1992, 1995) (Radford, 2010, p. 39).

Establece elementos que hacen el pensamiento algebraico más significativo; el primero se refiere a una sensación de indeterminación que es propia de objetos algebraicos como incógnitas, literales y parámetros, en el segundo los objetos indeterminados se manejan analíticamente y en tercer lugar lo que hace pensar algebraicamente es el modo simbólico peculiar que tiene para designar a sus objetos.

Plantea la idea de que generalización y modelación no siempre son de carácter algebraico, en el uso de situaciones problemáticas de modelado los profesores tenemos que estar buscando las estrategias didácticas necesarias para que los estudiantes contemplen los patrones en un sentido algebraico.

Para comenzar con su situación problemática de patrones algebraicos establece la imagen 8 que se muestra a continuación, con estudiantes de Canadá de entre 13 y 15 años, los forma en equipos de dos a cuatro integrantes y les pide que lleguen a una regla que genere el incremento de las figuras.

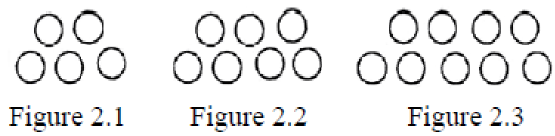


Imagen 8. Figura para comenzar a trabajar con patrones algebraicos

Los estudiantes lo hacen primero por prueba y error, cuando se les pidió que dijeran cómo lo encontraron ellos contestaron que “lo encontraron por casualidad”. En la segunda ocasión que lo resolvieron los estudiantes buscan alguna relación entre las líneas establecidas; por ejemplo, uno estableció que “la línea superior siempre tiene un círculo más que el número de la figura y el fondo siempre tiene dos círculos más que el número de la figura” Formulando que $(n + 1) + (n + 2) =$. De este modo podemos darnos cuenta que al trabajar con situaciones problemáticas de generalización se destaca una distinción entre inducción y generalización. Kieran (1989, citado en Radford, 2010) menciona que la inducción por sí sola no puede ser suficiente para caracterizar la generalización algebraica de los patrones.

Otro estudiante lo asimiló de la siguiente manera:

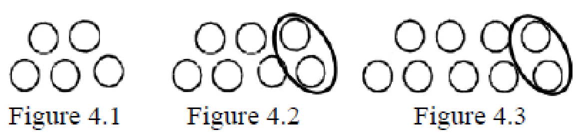


Imagen 9. Detección del incremento de círculos con respecto a cada figura

Observando que van incrementando dos términos en cada figura, Radford lo llama “Objetivación” porque el alumno ya tenía previsto que era la misma figura y que sólo iba incrementando de dos en dos señalándolo en diagonal, lo llama “objetivación” porque recurre a sus definiciones epistemológicas (*Obiectare* “tirar algo en el camino, antes de lanzar” y “*tivación”* que viene del verbo *facere* “hacer”), el alumno visualizó la formulación de la estructura del concepto en acción, que es la creación de una sucesión algebraica, lo hizo mediante gestos y palabras, recurrió a un principio mencionado por Duval (2002, citado en Radford, 2010) el cual dice que una fórmula dice lo mismo que su gráfica, o que una fórmula dice lo mismo que la palabra-problema que “traduce”. Estableciendo así que la “objetivación” del conocimiento es una construcción teórica para dar cuenta que los estudiantes se involucran en algo con el fin de observar y darle sentido.

Las situaciones problemáticas se realizaron haciendo interacción entre sujeto-sujeto y sujeto-objeto de la siguiente manera: los estudiantes se presentaron con los patrones cuya complejidad era acorde a las exigencias del plan de estudios, trabajaron en grupos pequeños y se invitó a que llevaran a cabo:

Una investigación aritmética.

La expresión de la generalización en lenguaje natural.

El uso del simbolismo algebraico estándar para expresar la generalidad.

Se implementó el siguiente patrón.

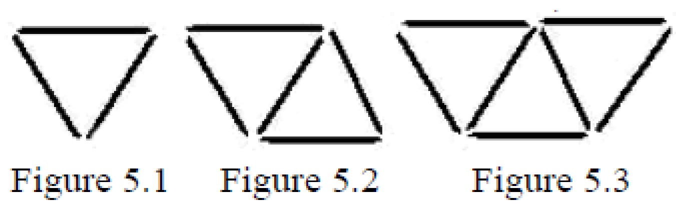


Imagen 10. Patrón para detectar el crecimiento proporcional

Para los estudiantes fue fácil responder a preguntas sobre las cifras 10, 25 y 100, detectaron también que ya no se puede ir de dos en dos porque de esa manera sería muy tardado en llegar a la figura $25, 100,$ etcétera. Un grupo de tres estudiantes trabajando en equipo, detectaron el patrón que era necesario observar para ir de una figura a otra, lo hicieron de forma verbal y lo comentaron entre ellos, entonces ahora la pregunta que se hicieron es ¿cómo lo llevamos a generalización para cualquier término de la sucesión?

El autor menciona que la expresión de generalización se ha investigado en el contexto de “Early-Algebra”, Warren (2006, citado en Radford, 2010) informó que en un estudio con estudiantes de 10 años, se pidió que los alumnos escribieran en lenguaje natural una regla general para algunos patrones y encontró que entre 6 y 10 alumnos de 27 fueron capaces de escribir una relación entre la posición del término y su valor numérico, sin llegar a una expresión matemática que lo establezca.

Después planteó otro ejercicio en el que se inició con un círculo y se multiplica por 2 círculos así constantemente, los alumnos tenían que escribir un mensaje imaginario a un niño de 6° (11 años) explicando claramente lo que él debe hacer, con el fin de averiguar cuántos círculos hay en cualquier cifra dada de la secuencia. Algunas respuestas que tuvieron fueron las siguientes:

Comenzar en uno e ir añadiendo dos hasta obtener el número correcto de círculos en total.

Ver el número de la figura, dibujar el número de círculos y después poniendo un número menos poner todos juntos.

Otros alumnos establecieron que se debe poner el número de la figura además de tres y se duplica el número de la figura, estableciendo: "$\text{el número de la figura} \times 2, +3. \text{ Da la cantidad de círculos}$".

El mensaje es una mezcla de símbolos matemáticos y los términos en lenguaje natural.

A manera de conclusión el autor menciona que las situaciones problemáticas de generalización de patrones se han considerado como una de las rutas más importantes para introducir el Álgebra con los alumnos; sin embargo, no todas las de modelado llevan a este tema, por ejemplo el caso de procedimientos inductivos basados en la formación de ensayo-error y otras estrategias de adivinanzas; estos procedimientos no conducen al Álgebra porque el objetivo de ésta no es ciertamente responder adivinanzas.

3.2.5 Elementos a retomar para elaborar una secuencia didáctica

Con base en las propuestas mencionadas anteriormente y en los antecedentes se diseñó una secuencia didáctica que intente llevar a los alumnos a comprender el pensamiento algebraico, tomando criterios que ya han sido analizados y validados.

Es importante tener en cuenta que para mostrar a los estudiantes la evolución que tiene el Álgebra es necesario trabajar situaciones problemáticas que vayan incrementando su grado de complejidad; como sugieren Peled y Carraher (2007), llevarlos desde las nociones de números negativos en los que contemplarán el orden que deben tener los números, problemas con cantidades representados geométricamente en planos cartesianos o en rectas para que consideren que a partir de algo que ya conocen (Aritmética) pueden avanzar a pensamiento algebraico mediante generalizaciones. Es preciso que se delimite muy bien qué es lo que se quiere lograr con los alumnos porque pueden existir nociones erróneas u obstáculos por parte de los alumnos.

Es importante hacer ver a los estudiantes que el Álgebra es útil para su desarrollo académico y cognitivo, como menciona Barallobres (2000) se tiene que idear una estrategia en la que se les haga ver a los alumnos que es necesario seguir cierto tipo de reglas y pasos para facilitar la resolución de ejercicios. Es importante que los ejercicios pensados no se puedan resolver fácilmente por métodos aritméticos, ya que los alumnos preferirán hacerlo por ese método porque es el que conocen.

Cuando se trabaje con los números negativos es importante llevar los ejercicios a contextos en los que los problemas tengan una orientación algebraica; es decir, que no sean problemas que los alumnos contesten con hechos cotidianos que les ocurren habitualmente, como deudas, porque lo que harán será recurrir a su experiencia sin tomar en cuenta la noción de número negativo o positivo, (Carraher *et al.*, 2006 y Radford, 2010) aconsejan que es mejor diseñar problemas en los que los estudiantes necesiten alguna herramienta matemática que pueda usarse dentro del pensamiento algebraico para detectar lo que está ocurriendo o para generalizar información de una manera algebraica; por ejemplo una recta numérica permite considerar el aumento y la disminución de valores sabiéndolo trabajar en un enfoque algebraico.

Siguiendo la sugerencia de los autores, es importante que al trabajar situaciones problemáticas que intenten desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes, en realidad sirvan para potenciar los contenidos y que tengan una progresión en sus secuencias y su complejidad; es decir, que comience en un nivel que dominen los alumnos intentando hacerlo desde un enfoque aritmético y llevarlos progresivamente a un pensamiento algebraico en el que tengan que utilizar herramientas “más allá” del uso de números para encontrar la solución. Es importante que las situaciones problemáticas cambien de enfoque, porque muchas de las veces consideramos que algunas servirán para desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos y no funcionan, ocasionando que los alumnos las resuelvan a través de métodos aritméticos demasiado largos.

Ursini *et al.*, (2005) mencionan que el Álgebra escolar regularmente se trabaja asignándole tres usos a las literales: para representar incógnitas, como números generales y en relación funcional, estos usos se intentarán integrar en la secuencia para que los estudiantes comiencen a detectar cómo están consideradas las literales en los distintos ejercicios dentro del aula escolar.

Para diseñar una secuencia que en realidad provoque el cambio de pensamiento en los estudiantes, es importante que tengamos bien definido que es lo que se pretende que logren, para ello se tiene el apoyo de las propuestas analizadas anteriormente. Se trabajará el proyecto Early-Algebra acompañado de un razonamiento inductivo en los estudiantes, como lo hicieron Cañadas (2007), Billings *et al. (*2007), Molina (2009) y Radford (2010) para lograr que comiencen a considerar el Álgebra como una generalización de la Aritmética, aunque es preciso mencionar que en algún momento existirá una ruptura en el tipo de pensamiento.

La secuencia didáctica pretende ayudar a los alumnos a comenzar con el Álgebra escolar, pero es indispensable comentar que no hay una fórmula específica para trabajar el Álgebra con los distintos estudiantes, ya que cada uno de ellos piensa y actúa de manera diferente a sus compañeros y a estudiantes de otras generaciones, cómo menciona Brousseau (1986) no es permisible que los profesores trabajen con las mismas situaciones problemáticas que tienen desde hace bastantes años; en esta investigación se piensan diseñar algunas que sean distintas a las que están acostumbrados a trabajar.

Es indispensable que las situaciones problemáticas estén bien formuladas para que puedan ser comprendidas por los estudiantes, Fregona y Orús (2009) con respecto a lo anterior comentan que cuando el medio se modifica y no es interpretable con los esquemas que tienen los estudiantes, entran en crisis y buscan encontrar la manera de recuperar su equilibrio, aunque no siempre sea la correcta.

El grupo con el que se trabajará la secuencia didáctica está acostumbrado a contestar las situaciones problemáticas por medio de la mecanización; es decir, el profesor llega al grupo y escribe ejercicios en el pizarrón para que los estudiantes los contesten en su cuaderno y al final pasen a exponerlos. La exposición no es para sus compañeros, sino que la exposición sólo se la dan al profesor mientras los demás estudiantes siguen sentados en sus lugares sin atender la situación problemática.

En una ocasión se distrajeron tanto los estudiantes que el profesor les pidió que leyeran un texto e hicieran un respectivo reporte que les iba a revisar, argumentando que los estudiantes deben poseer cierto grado de comprensión oral, escrita, así como realizar cálculos matemáticos, pues esas competencias estaban marcadas en el plan.

Por lo que se pudo observar no existen momentos de razonamiento grupal por parte de los estudiantes, pueden reflexionar cuando están explicándole al profesor en el pizarrón, además el profesor mencionó que no le gusta que trabajen en equipo porque pierden tiempo acomodándose y arrastran mucho las butacas. Para la experimentación de la secuencia se tuvieron varias charlas con el profesor acerca de la forma en que se pretendía trabajar y se revisaron las situaciones problemáticas, ya que el investigador las había diseñado, para que existieran las menores situaciones de incongruencia posibles, además se le entregó una hoja en la que estaban contenidas las actividades.

3.2.6 Caracterización del grupo y del profesor

Para la aplicación de la secuencia didáctica se seleccionó un grupo de primer grado de secundaria de Jerez de García Salinas Zacatecas, México la secundaria tiene por nombre Francisco García Salinas, es una escuela con bastante prestigio; mencionan profesores y padres de familia que cuando abren las inscripciones, en un día se satura la matrícula de alumnos que quieren ingresar, se solicitó al director de dicha secundaria permiso para trabajar con un grupo de primer grado y accedió al igual que el profesor titular de Matemáticas. El profesor es un ingeniero agrónomo que tiene alrededor de 28 años impartiendo la asignatura de matemáticas en escuelas secundarias.

Con el grupo de 1.° D se ejecutaron las situaciones problemáticas, las cuales están preparadas para trabajarse en el transcurso de dos días; como son tres, se pretende contestar dos el primer día y la tercera el segundo, intentando que los estudiantes lleguen a adquirir ciertos conocimientos sobre nociones de pensamiento algebraico. El objetivo es observar que por medio de la secuencia didáctica los estudiantes muestren elementos de que comienzan a desarrollar un pensamiento algebraico.

Antes de trabajar con el grupo se observó durante tres sesiones de clase en las que ellos se desenvolverán regularmente como en cualquier clase de Matemáticas, la finalidad de la observación es detectar el contrato didáctico que existe en el aula y las características que tienen los estudiantes ante la clase, el profesor y sus compañeros.

El grupo está integrado por 40 estudiantes, se ha detectado que es muy intranquilo, en la mayor parte de las clases que se observaron muchos estudiantes se la pasan conversando entre ellos, sin tomar en cuenta al profesor y cuando les llama la atención para que atiendan a la clase, ponen atención un corto tiempo pero después vuelven a platicar sobre temas que no se relacionan con la materia.

Dentro del grupo existen algunos estudiantes a los que les gusta llamar la atención de forma no propicia para la clase; es decir, bromean, contestan de forma errónea con resultados que no se relacionan con los problemas que se están trabajando, aunque es preciso mencionar que también existen estudiantes que se destacan por sus participaciones, ideas y resultados que muestran al profesor, porque están bien razonados.

En seguida se muestra un fragmento de lo obtenido en la observación del grupo con la finalidad de destacar la forma en que regularmente trabaja:

> L*a mayor parte de la clase los estudiantes se la pasan hablando y algunos otros parados sin responder a la actividad, el profesor detecta esa distracción y los sienta pidiéndoles que lean una lectura acerca de un tema distinto a la materia (bullying), les indica que pongan atención porque tienen que hacer un reporte de lectura y les contará en la calificación.*
>
> *Eso hace la mayoría mientras dos estudiantes están resolviendo ejercicios en el pizarrón… pasó a otro estudiante a resolver el siguiente ejercicio, mientras los demás continuaban leyendo, cuando terminó de resolver el ejercicio, el profesor les pidió que dejarán de leer para que su compañero les explicara qué es lo que tienen que hacer para resolver los otros que tienen pendientes,* el estudiante explico cómo lo resolvió pero sólo al profesor y éste le contestó que estaba bien y lo pasó a su lugar.
>
> *Manuel es un niño protagonista, quiere quedar bien con sus compañeros y llamar la atención haciendo cosas sobresalientes, no en lo académico, sino socialmente haciendo plática, levantándose de su lugar en repetidas ocasiones sin motivo. El profesor estaba escribiendo ejercicios en el pizarrón y Manuel se la pasó en la esquina del salón sacando punta a su lápiz durante 10 minutos…*
>
> *El profesor pidió que se pusieran a trabajar individualmente y los estudiantes lo hicieron, excepto Alí, quien seguía platicando y riéndose de lo que comentaba con dos de sus compañeros, el profesor les pidió que atendieran a la actividad y los estudiantes lo hicieron, pero Alí seguía buscando con quien distraerse y encontró tal distracción con Manuel, mientras los demás resolvían las actividades, estos dos estudiantes charlaban* (Información obtenida a partir de la observación del grupo el 09 de enero del 2014).

Las fechas en que se tiene programada la experimentación de la secuencia didáctica es para los días 14 y 15 de Enero del 2014, en los cuáles está considerado observar si los estudiantes han desarrollado o no formas de pensamiento algebraico para la resolución de problemas. La idea es trabajar con dos situaciones problemáticas el día 14 de Enero, concluir la segunda el día 15 y continuar con la tercera en el transcurso de esa clase.

Las clases de Matemáticas que se imparten el en grupo son los lunes a las 9:10, los martes y miércoles a las 7:30, los jueves a las 11:10 y los viernes a las 12:00, se decidió hacerla el martes y el miércoles porque los estudiantes no han recibido ninguna otra asignatura de esta manera podrán estar más atentos a las clases, ya que no influirá alguna tarea que les hayan dejado, la actitud de otros profesores ante ellos o algún otro contratiempo que les haya surgido en otra asignatura o a lo largo de la jornada escolar.

En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes de primer año de secundaria, se tiene el referente de que ya se encuentran trabajando con ecuaciones lineales con una incógnita, porque el profesor mencionó que así marca el nuevo programa, aunque hizo énfasis en que no utilizó algún método o estrategia para hacer que los estudiantes reflexionaran acerca de lo que están haciendo, sino que comenzó a trabajar con las ecuaciones de una manera mecánica, suponiendo que lo que aprendieron es a hacer el procedimiento para resolverlas, además conocen ciertos temas que marca el currículo de Matemáticas en primer grado de secundaria que son necesarios para resolver estas situaciones problemáticas como: números con signo, graficación, tabulación y representación de números en una recta numérica.

El contrato didáctico a utilizar es que el profesor siga en su papel, pero ahora intentando dar otro enfoque a su rol, en el que no les dará el conocimiento a los estudiantes explícitamente, sino que los orientará a través de preguntas para generarles conflicto en lugar de una solución. Los estudiantes tendrán un papel diferente al que tienen regularmente en las clases, ahora serán ellos quienes lleguen al conocimiento por medio de la reflexión y el razonamiento, dentro de pequeños equipos, para después entre todos validar esos conocimientos obtenidos en cada equipo.

El rol del investigador es observar el desarrollo de las situaciones que se den en la clase, en caso de que el profesor necesite apoyo para lograr su devolución, el investigador apoyará.

3.2.7 Conocimientos Previos

Los estudiantes se encuentran trabajando con el tema de solución de ecuaciones lineales con una incógnita, se supone que ya conocen qué es una expresión algebraica, además se tiene la hipótesis de que ya tienen el conocimiento, según la Secretaría de Educación Pública (2011), de: números y sistemas de numeración, problemas aditivos, problemas multiplicativos, patrones y ecuaciones, figuras y cuerpos, medida, proporcionalidad y funciones, nociones de probabilidad, y análisis y representación de datos.

Aunque no todos los contenidos se reflejan como aprendizajes esperados, es importante estudiarlos todos para garantizar que los alumnos vayan encontrando sentido a lo que aprenden y puedan emplear diferentes recursos, de lo contrario se corre el riesgo de que lleguen a utilizar técnicas sin saber por qué o para qué sirven (SEP, 2011, p. 27).

Con base en lo establecido por la Secretaría de Educación Pública (2011), los alumnos ya deben saber:

Primer bloque (septiembre-octubre)

- Convertir fracciones decimales y no decimales a su estructura decimal y viceversa.
- Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones.
- Resolver problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones.
- Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales.

- Explicar el significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar.

Segundo bloque (noviembre-diciembre)

- Formulación de criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 5.
- Resolver problemas que implican el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.
- Resolver problemas aditivos que combinan número fraccionarios y decimales.
- Resolución de problemas que implican la multiplicación de números fraccionarios.

Tercer bloque (enero-febrero)

- Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales.
- Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales.
- Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b;\ ax = b;\ ax + b = c$, donde $a, b\ y\ c$ sean números naturales, decimales o fraccionarios.

El profesor del grupo comentó que en lugar de enseñarles a construir sucesiones de números optó por trabajar con los números con signo y después los introduce de lleno en el Álgebra resolviendo ecuaciones.

Los alumnos estaban aprendiendo a hacer los procesos para resolver ecuaciones aunque de una forma mecánica, ya que siempre el profesor les establecía cuáles ecuaciones resolver y el método por el que tienen que hacerlo y no por medio de problemas que los llevaran a establecer una ecuación.

Se consideró aplicar las situaciones problemáticas porque los estudiantes no habían trabajado el Álgebra de una manera que desarrolle su razonamiento, sino que se había hecho mecánicamente. El objetivo de las situaciones problemáticas es propiciar que los estudiantes razonen y tengan herramientas para formular expresiones algebraicas, es preciso señalar que pueden existir elementos que no nos permita llegar a lo deseado, ya sea por errores o formas de razonamiento distintas a las esperadas, aunque mencionan Rico y Castro (1994) que es de mucha ayuda saber que existe un error, porque a partir de sus errores los estudiantes comprenden propiedades de un concepto de las que no eran previamente conscientes.

Las situaciones problemáticas tienen elementos que los estudiantes ya saben trabajar, debido a que el profesor sólo mencionó que no formularon patrones, sino que se introdujeron directamente a la resolución de ecuaciones, entonces los demás temas si los han visto y, se supone, saben trabajar con números negativos.

3.3 Concepción y análisis a priori

3.3.1 Variables macrodidácticas

Artigue (1995) considera una variable macrodidáctica como una variable didáctica que recae en la organización global de la ingeniería didáctica, como la organización del grupo, los resultados esperados en cuanto a conocimiento adquirido por los alumnos, después de la aplicación de la secuencia por medio de la ingeniería didáctica, el material didáctico que se va a utilizar para facilitar el trabajo de los estudiantes en sus actividades y otras que intervengan en el diseño y aplicación de la ingeniería de un modo general.

La idea que ha surgido es juntar a los estudiantes en equipos dándoles la responsabilidad de jefes de equipo a las personas que se detecten como líderes, en lo académico o en lo social, haciéndoles tener la responsabilidad de su equipo, para detectar la reacción de unos y de otros, crear un espíritu de competencia con los estudiantes intentando que se esfuercen por cumplir con las situaciones problemáticas programadas.

El grupo se organizará en 10 equipos, es importante que quien se nombre jefe adquiera la responsabilidad de llevarlo con una buena organización y orientación hacia el trabajo porque en sus actividades cotidianas no están acostumbrados a trabajar en equipo; el profesor comentó en una plática informal que siempre opta porque los estudiantes realicen la solución de las situaciones problemáticas de manera individual para no perder la organización del grupo y no arrastren tanto las butacas.

Ya organizados en equipos se les repartirá a los estudiantes una situación problemática para que la resuelvan con sus compañeros de equipo.

Se les darán las siguientes indicaciones:

A continuación se les va a entregar el siguiente problema, el cual ustedes tienen que contestarlo con la ayuda de todos los integrantes del equipo (entregar el problema y leerlo ante todo el grupo), -¿Tienen dudas? En caso de que los estudiantes tengan dudas intentar aclararlas, si no tienen, pedirles que contesten la situación problemática. En seguida dejar que los estudiantes lleguen a la solución de los problemas con orientación del profesor en los equipos de trabajo, la intención es que los estudiantes aporten todas las ideas que les genera la situación problemática llegando a un resultado que para ellos sea válido.

Después que los equipos ya tengan un resultado, se le pedirá a algún equipo que pase a exponer lo que pensaron y lo que hicieron para llegar a ese resultado de la situación problemática, se espera que existan otros equipos que tengan distinto resultado y confrontarlos, cada uno defendiendo sus respuestas, para llegar a un resultado común por parte de los estudiantes. Una vez que ya hayan validado una solución común (correcta o incorrecta) el profesor será quien institucionalice esos resultados exponiendo la respuesta correcta frente a los estudiantes, retomando los principales elementos de la validación que ya habrá realizado; se realizará la misma dinámica para las otras dos.

Antes de aplicar las situaciones problemáticas con los estudiantes se platicó con el profesor para indicarle la forma de trabajo que se tiene contemplada para llevar a cabo, primero darle las indicaciones pasadas, en seguida leerles el problema ante todo el grupo, preguntar si se ha entendido o si es necesario leerlo de nuevo, cuando se haya comprendido por los estudiantes, ellos se involucrarán con sus equipos para contestarlo y cuando lleguen a una solución y un común acuerdo con el equipo se les pedirá que algún equipo pase al pizarrón para que los explique ante toda la clase, si es más de un equipo el que quiere pasar a resolverlo se decidirá el equipo mediante un sorteo y el equipo que gane será quien pase a explicar lo que hicieron para resolver ese ejercicio, se les pedirá a los estudiantes que escriban todo lo que están pensando para saber la forma en que razonaron al resolver la situación problemática.

Cuando ya hayan pasado a explicar la situación problemática y los demás compañeros estén de acuerdo con la solución, será el turno del profesor institucionalizar ese conocimiento, se pretende que esta institucionalización del profesor no sea del tipo discursivo (como está habituado a hacerse en esta clase), sino que se detectará a algún equipo que tenga la respuesta correcta y se utilizará esa respuesta para que por medio de preguntas se llegue a la validación del resultado.

En caso de que no exista algún equipo que tenga una respuesta correcta, se harán preguntas que generen conflicto en los estudiantes con respecto a sus conclusiones de los ejercicios, para llegar a un resultado verdadero y aceptado por los estudiantes. Como se había mencionado anteriormente, la idea es que quien establezca todas las situaciones problemáticas sea el profesor titular de Matemáticas.

Se asistirá al grupo 10 minutos antes de la clase para acomodar las butacas, adecuándolas a la forma de trabajo. El primer día se nombrarán los diez estudiantes que se hayan escogido como jefes de los equipos para que comiencen a sentarse en las sillas previamente acomodadas, después se irán repartiendo los demás estudiantes azarosamente hasta que cada equipo tenga cuatro integrantes. Una vez que ya estén acomodados se les repartirán hojas de trabajo y se darán las indicaciones mencionadas anteriormente.

Otra variable considerada como macrodidáctica es la organización de la secuencia:

Primero los estudiantes requieren trabajar con una representación en la recta numérica con la noción de números con signo, en este problema se intenta que los estudiantes detecten que si existe un número desconocido y que este número se puede determinar.

En seguida con la representación de una tabulación o graficación, que permite a los estudiantes encontrar una expresión algebraica que genera el aumento de cuadros, intentando que reconozcan un patrón que rige la relación entre figuras y número de cuadros. Al final con la representación de una tabulación en disminución que representa los metros que recorre una tortuga, se intenta que los estudiantes se den cuenta que existe una correspondencia entre los dos valores involucrados.

Se consideran de esta manera para que los estudiantes, con estas tres situaciones problemáticas, sean capaces de detectar los distintos usos de la literal que proponen Ursini *et al.* (2005), como incógnita específica, como número general y en relación funcional, intentado relacionar cada uno de estos problemas con al menos uno de esos aspectos tomados en cuenta, la finalidad es detectar la manera en que se les facilita el uso de las literales con un pensamiento algebraico

Las nociones de literal como incógnita específica, número general y en relación funcional, Ursini *et al.* (2005) mencionan que al trabajarla como incógnita específica tenemos que reconocer que en cierta situación está involucrada una cantidad cuyo valor no conocemos, pero es posible determinarla sabiendo los demás datos del problema, como número general los estudiantes tienen que desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos, y en relación funcional los estudiantes deben reconocer que en ciertas situaciones están involucradas cantidades cuyos valores están relacionados.

Con base en lo dicho por Ursini *et al.* (2005), para las situaciones problemáticas se va a considerar:

Como incógnita específica la capacidad de representar simbólicamente una cantidad desconocida relacionándola con los datos del problema.

Como número general se van a usar símbolos para representar una situación general, una regla o un método.

Como una relación funcional se debe reconocer que existe una correspondencia entre dos literales y saber que esta correspondencia la tienen de una manera relacionada.

Una variable más, es tomar en cuenta al profesor para que lea y aclare las dudas de lo que no queda claro para los estudiantes, se pretende que por medio de la lectura grupal de las situaciones problemáticas, éstas queden claras y haya una buena resolución, así como una buena forma de trabajo en el aula.

Es necesario tomar en cuenta que otra variable didáctica será pedir a cada equipo que necesitan tener un/a secretario/a para que escriba todo lo que están pensando y lo que están discutiendo, así como quiénes no trabajan y algunas cuestiones que surgen a través del desarrollo de la clase.

3.3.2 Situaciones problemáticas

En esta sección se muestran las situaciones problemáticas que se desarrollarán con el grupo mencionado, con la finalidad de encontrar herramientas para el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes. Cabe mencionar que éstas fueron diseñadas por los autores de esta investigación, con base en las propuestas analizadas anteriormente.

Situación problemática 1. Incógnita específica

Situación de Acción

Como ya se mencionó, ésta tiene contemplado trabajarse en 10 equipos formados por cuatro estudiantes, la intención es que el profesor lea la situación problemática ante los estudiantes para que comprendan lo que tienen qué hacer, en caso de que tengan dudas, se les leerá nuevamente para que comprendan la información que les permite resolverla. En caso de que sigan sin comprender lo que tienen qué hacer, se les harán preguntas, todo esto para lograr la devolución en los estudiantes de su responsabilidad como aprendices.

La situación problemática es la siguiente,

> Mary viajó desde su casa al norte de la ciudad para ir a una fiesta a la casa de Ale, cuando Mary estaba ya en la fiesta le habla por teléfono su papá y le dice que necesita que vaya a recogerlo porque se le ha descompuesto el carro, entonces Mary le pregunta que a dónde. El papá le dice que si está en casa de Ale recorra 61 km. hacia el sur, quedando a 17 km. al sur de su casa.
>
> - ¿A qué distancia está la casa de Ale de la casa de Mary?
> - ¿Cómo podemos expresar este problema con términos matemáticos? Exprésenlo
> - Establece otra manera matemática de representar el recorrido de Mary.
> - ¿Si el papá estuviera en otro punto de la ciudad, más al sur o al norte, podríamos establecerlo matemáticamente sin saber su distancia?
> - ¿Existirá alguna forma general matemática que represente la distancia que recorrió Mary para ir a casa de Ale? ¿Cómo podrías establecerla? ¿por qué lo consideran así?

Si después de leer la segunda vez la situación problemática, los estudiantes siguen sin entender lo que tienen que hacer se les plantearán preguntas que involucren lo que tienen que hacer para comprender el problema.

- ¿Qué tienen que hacer? Esperando que los estudiantes respondan que la consigna es encontrar la distancia entre la casa de Mary y la casa de Ale.
- ¿Cómo podrán encontrar tal distancia? Algunos estudiantes que son muy responsables y tienen muy buena reflexión de las Matemáticas contestarán que depende de la distancia del coche del papá a la casa de Ale.
- ¿Necesitamos saber el tiempo que estuvo Mary en la fiesta? Es una pregunta para que los estudiantes detecten cuáles datos en realidad son necesarios y cuáles son parte del escrito solamente.

Con estos cuestionamientos se espera que los estudiantes ya hayan comprendido lo que les pide el ejercicio y contesten las preguntas.

Las variables didácticas utilizadas en este ejercicio son:

Considerar números que regularmente les cuesta un poco restar, para que no sea tan fácil observar la solución a simple vista, la resta de $61 - 17$ ocasionará que los estudiantes hagan una resta en su cuaderno porque las unidades del sustraendo son mayores a las del minuendo.

Se menciona como Norte y Sur el trayecto que hace Mary para ir a la fiesta y a recoger a su papá porque de esa manera los estudiantes podrán representarlo en una recta numérica, o tendrán alguna noción de que si representan el norte hacia cierta dirección, el sur lo harán en un sentido contrario, como cuando lo hacían para trabajar números negativos y detectarán que se puede resolver mediante una resta. Esto les facilitará la solución del ejercicio.

En seguida que los estudiantes hayan comprendido lo que tienen que hacer, se espera que haya una devolución, porque ya tendrán contemplado todo lo que tienen que hacer, lo que les puede causar conflicto es encontrar una forma general para representar lo que acaba de ocurrir, como es la primer situación problemática no se espera que la representen con alguna incógnita sino que lo hagan de manera aritmética, con una resta.

Situación de Formulación

Con la primer situación problemática se pretende que los estudiantes lleguen a establecer que para conocer la distancia entre la casa de Mary y la casa de Ale es necesario conocer la distancia del coche del papá y la casa de Mary; es decir, que establezcan que existe una relación entre la distancia del papá con la casa de Ale y la de Mary, detectando que si no conocemos la distancia del papá, no sabremos la distancia que existe entre la casa de Mary y la de Ale.

En esta situación el profesor estará pasando frente a los equipos para resolver dudas que surjan en la resolución de las situaciones problemáticas, con la intención de no dar respuestas directas, sino propiciar que ellos se comuniquen y tomen acuerdos.

Así, una forma de resolver este problema sería representar por medio de una recta las distancias que recorrió Mary para llegar a casa de Ale y después utilizar otra para representar la distancia que recorrió para llegar con su papá.

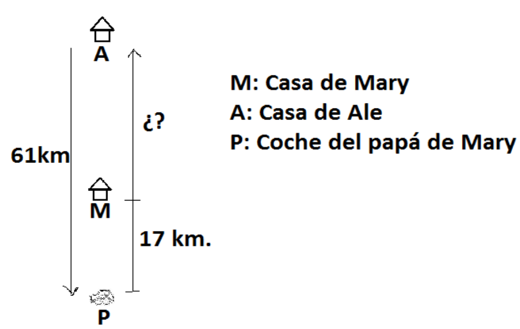


Imagen 11. Recorrido de Mary

Considerando que los estudiantes obtengan este gráfico, la solución será mediante una resta. Puesto que ya han trabajado con la solución de ecuaciones lineales, se espera que en lugar de signo de interrogación algunos estudiantes representen con una letra el valor desconocido en el gráfico.

Para otra solución, se espera que se detecte de manera directa que la primera pregunta se puede responder al realizar una simple resta y entonces el resultado sería $61 - 17 = 44$, y esa sería la manera matemática de representar la distancia entre la casa de Mary y la casa de Ale. Para que los estudiantes lleguen a este resultado tienen que considerar el gráfico de la Imagen 11 aunque sea mentalmente, ya que eso les indica la noción de resta, de una distancia más grande menos una distancia menor.

Situación de validación

La situación de validación se hará cuando todos los equipos ya hayan llegado a una conclusión. El profesor estará pendiente para dar comienzo con esta situación, así, cuando se haya llegado a la solución por parte de todos los equipos se le pedirá a alguno que pase a la pizarra para exponer a sus compañeros sus respuestas, en seguida por parte del profesor se cuestionará: ¿Todos concuerdan con ese resultado?, ¿por qué consideran así el resultado?, si tienen uno diferente, expliquen por qué el suyo es correcto, ¿cuál de los dos creen que sea verdadero?, ¿por qué?

En esta situación a través de las intervenciones del profesor se está dejando en conflicto a los estudiantes, porque ellos son los que van a debatir los resultados. El papel del profesor en esta situación será sólo la de poner en conflicto a los estudiantes que difieran del resultado, en caso de que los estudiantes concuerden todos con el mismo resultado, sólo se les preguntará: ¿por qué ese resultado es correcto? Esperando que a partir de la explicación del primer equipo los estudiantes incrementen sus ideas para saber que la situación puede resolverse por más de un método.

Situación de institucionalización

En esta situación ya los estudiantes están en común acuerdo con los resultados, ahora toca el turno del profesor; por ejemplo, después de que haya pasado un equipo a exponer frente a los demás compañeros, como se mencionó, ya todos los estudiantes estarán en común acuerdo con las respuestas, entonces ahora el profesor cuestionará. ¿En verdad creen que esa sea la solución? ¿Si la distancia entre Mary y el papá es de 61km. cuánta será la distancia entre la casa de Mary y la Casa de Ale? Se menciona Mary y el papá porque Mary está en la casa de Ale, los estudiantes deben de ubicar que esa es la distancia que existe entre la casa de Ale y el coche del papá.

Los estudiantes ya tienen una representación matemática para ese ejercicio, esperando que sea $61 - 17 = 44$, el trabajo del profesor es establecer que ése es el resultado correcto pero conjuntándolo con el que se representó gráficamente. En caso de que ningún equipo haya hecho la representación gráfica es indispensable que el profesor lo haga en el pizarrón para que los estudiantes detecten que entre más se aleje el coche del papá más distancia habrá entre la casa de Ale y él, y entre más se acerque llegará el momento en que se tenga que hacer una suma para resolver el ejercicio.

Se necesita dejar esa idea clara en los estudiantes para que comiencen a ver la idea de variación, es decir, la idea de que un número puede tomar distintos valores dependiendo de la información que se proporciona, de esta manera los alumnos comenzarán a ver la noción de literal como incógnita específica, mencionada por Ursini *et al.* (2005).

Conocimientos esperados

Con esta respuesta se espera que los estudiantes vayan comprendiendo la noción de literal como incógnita, como número general y en relación funcional; es decir, que existen números que se pueden representar por diferentes valores dependiendo de las características de los ejercicios, en este caso saber que la distancia entre la casa de Mary y de Ale va a depender de la distancia a la que esté situado el carro del papá.

Al resolver este ejercicio los estudiantes tendrán noción de un número que puede variar, porque se les va a hacer énfasis en que dependiendo del lugar en el que esté situado el coche, es lo que vamos a restar (incluso sumar) para saber la distancia entre las casas, por medio de este ejercicio los aprendices van teniendo noción que un número no siempre se queda fijo, que el número puede variar positiva y negativamente, ocasionando un cambio en la operación aritmética que tienen que realizar para su solución. En palabras concisas se pretende que los estudiantes vayan teniendo ideas acerca de que algunos números varían con relación a las características de los problemas.

Situación problemática 2. Número generalizado

Situación de acción

Ésta pretende que los estudiantes detecten una relación entre figuras y expresiones numéricas, la intención es que por medio de la búsqueda de las figuras que piden las preguntas, los estudiantes lleguen a expresar una forma general de representar el incremento de dichas figuras; es decir, que detecten qué es lo que se requiere para generar la siguiente figura en la sucesión y así lleguen a establecer que la sucesión debe de ser $2\mathrm{n}-1$, expresada de forma general. La respuesta será una generalización de la sucesión de figuras.

En esta situación problemática la literal tiene la intención de representar un número general, según Ursini *et al.* (2005) al considerar la literal como número general regularmente se usan símbolos que representan una situación general, una regla o un método. Al hacer uso de la literal de esta manera se busca desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos.

La situación problemática es la siguiente:

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

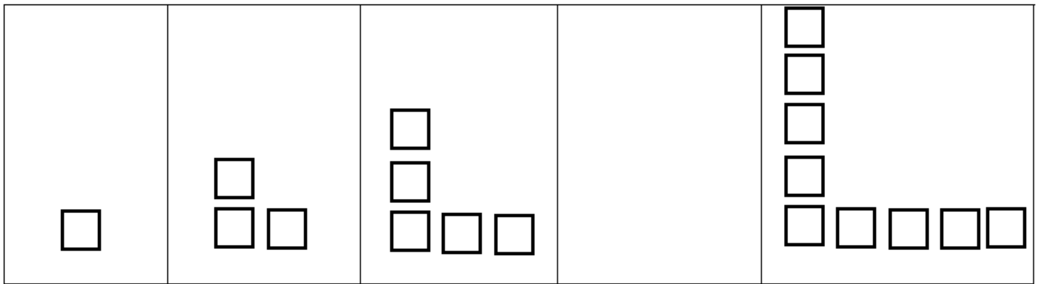


Fig. 1	**Fig. 2**	**Fig. 3**	**Fig. 4**	**Fig. 5**

Dibujen la Fig. 4

Describan cada figura, relacionándolas entre sí.

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?

¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?

¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?

¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

En el caso de esta situación problemática, no se va a leer frente al grupo, solamente se repartirá y se les pedirá a los estudiantes que observen las figuras, después de observar se les indicará que platiquen acerca de qué es lo que pasa con las figuras y después de ello contesten las preguntas que tiene.

Se espera que los estudiantes detecten que conforme avanza el número de figura, aumenta dos el número de cuadros; es decir, que detecten que una sucesión va a ir formando las figuras “$1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2\mathrm{n} - 1$”, no se espera que los estudiantes lo detecten en términos de sucesión, sino que solamente contemplen el incremento que van teniendo las figuras, se considera que con esa detección será más fácil que lleguen a una forma general para representar dicho incremento.

Las variables didácticas incluidas en este ejercicio son:

El acomodo de los cuadros en cada figura, dicho acomodo hace más fácil detectar que van incrementando las figuras de dos en dos, se le agrega una de un lado y otra arriba para que se aprecie el incremento de las figuras.

La cantidad de cuadros que va teniendo cada figura, la primera tiene 1, la segunda 3, la tercera 5, para que detecten que el incremento es de dos en dos.

La finalidad es que los estudiantes detecten las características que van haciendo las siguientes figuras, porque ya sabiendo qué es lo que cambia en cada una, se verán interesados en dar una devolución de la situación problemática porque ya sabrán lo que sucede con cada figura.

Situación de Formulación

Se pregunta cuántos cuadros tendrá la figura 10, porque es un número que se puede contemplar aumentando las figuras de dos en dos, si lo contestan de esta manera tardarán más tiempo; la intención es que los estudiantes lleguen a saber los cuadros que tiene dicha figura, por medio de la construcción de las figuras consecuentes en la sucesión.

La pregunta de cuántos cuadros tendrá la figura 25 tiene la intención de que los estudiantes busquen una forma de llegar a saber la cantidad de cuadros que tendrá la figura 25 sin hacer 25 figuras que vayan incrementando de dos en dos, se espera que al trabajar con las figuras de la sucesión los estudiantes detecten el incremento que tiene cada una y a partir de ese incremento detecten una relación para que lleguen a establecerlo por medio de la forma general ($2\mathrm{n} - 1$), o dando formulaciones que sean equivalentes a esta forma, por ejemplo, "tomar el número de figura, multiplicarlo por dos y restarle uno".

En caso que aún no la detecten, puede que haya quienes hagan una modelación de números, representados en una tabla sin necesidad de hacer las figuras como se muestra en la tabla 1, ya que se tardarán más si hacen las figuras y suman los cuadros de dos en dos, aunque no se descarta la idea de que existan estudiantes que lo resuelvan haciendo las figuras.

Figura	1	2	3	4	…	10	11	…	20	…	25
cuadros	1	3	5	7	…	19	21	…	39	…	49

Tabla 1. Posible respuesta de los estudiantes

Se pregunta en seguida el número de cuadros que tendrá la figura 73 para que los estudiantes intenten buscar otro método para encontrar el número de cuadros, en caso de que los otros los hayan encontrado haciendo las figuras o una relación de figura con número de cuadros que tiene cada figura, ya que si siguen con la idea de que tienen que hacer la tabla o seguir dibujando las figuras será más lento para llegar a encontrar el número de cuadros que tiene la figura 73. Esta pregunta tiene el objetivo que los estudiantes estén buscando una forma de simplificar la forma de hacerlo para ahorrarse el escribir demasiado.

Después se les pide que establezcan la forma en que encontraron el número de cuadros que tiene la figura 73, para saber qué es lo que están haciendo y razonando con respecto al problema.

Las dos últimas preguntas se hacen esperando que los estudiantes detecten que conforme incrementa la figura, el número de cuadros también lo hace y así encuentren la expresión algebraica que genera la sucesión de las figuras con respecto a los cuadros.

Como ya han visto algunos temas correspondientes al apartado sentido numérico y pensamiento algebraico, se espera que los estudiantes formulen una expresión algebraica para representar la forma general.

Situación de Validación

La situación de validación se hará cuando todos los equipos ya hayan llegado a una conclusión. El profesor estará pendiente para dar comienzo con esta situación, así, cuando se haya llegado a la solución por parte de todos los equipos se le pedirá a alguno que pase a exponer a sus compañeros sus respuestas, en seguida por parte del profesor se cuestionará: ¿Todos están de acuerdo con ese resultado?, ¿por qué consideran así el resultado?, si tienen uno diferente, expliquen por qué el suyo es correcto, ¿cuál de los dos creen que sea verdadero? ¿por qué?, con la intención de causar conflicto en las respuestas de los estudiantes, que se espera sean de varios tipos.

En esta situación a través de las intervenciones del profesor se está dejando en conflicto a los estudiantes, porque ellos son los que van a debatir los resultados. El papel del profesor en esta situación será sólo la de poner en conflicto a los estudiantes que difieran del resultado, en caso de que los estudiantes estén de acuerdo todos con el mismo resultado, sólo se les preguntará: ¿por qué ese resultado es correcto? Esperando que a partir de la explicación del primer equipo los estudiantes incrementen sus ideas para saber que la situación puede resolverse por más de un método.

Situación de institucionalización

En esta situación los estudiantes estarán en común acuerdo con los resultados, ahora toca el turno del profesor; por ejemplo, después de que haya pasado un equipo a exponer frente a los demás compañeros y todos tengan una misma solución, es indispensable que los resultados se amplíen unos con otros, considerando que quien lo haya hecho por medio de figuras lo contraste con quien lo haya elaborado por medio de una tabla o una relación numérica de las figuras con el número de cuadros de cada figura, así tendrán una manera más analítica de observar el resultado y esos resultados complementarlos con quienes hayan llegado a la formulación general de la situación (expresión algebraica).

De esta manera, se estará adentrando a los estudiantes a determinar las Matemáticas no sólo de una manera numérica, sino haciéndoles ver que existen números que no siempre vamos a conocer y se pueden representar por medio de una letra o una incógnita (literal).

Con esta respuesta se espera que los estudiantes vayan comprendiendo la noción de literal como número general detectando que existen números que se pueden representar por diferentes valores dependiendo de las características de los ejercicios. Se menciona que encuentren una regla o fórmula general porque regularmente los alumnos que tienen un enfoque aritmético de las Matemáticas al escuchar la palabra fórmula buscan establecer una serie de letras que representa lo que queremos conocer.

En este caso la forma de interpretar la literal o incógnita será como número general porque según Ursini *et al.* (2005) los estudiantes tienen que desarrollar la capacidad de reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos; usando símbolos para representar una situación general, una regla o un método.

Conocimientos esperados

Con la situación problemática se pretende que los estudiantes continúen enriqueciendo su nivel de abstracción de los números; es decir, las preguntas tienen un orden en el grado de dificultad, con ese aumento de complejidad se espera que los estudiantes sepan desde detectar cuánto va creciendo cada figura, hasta expresarlo en su forma general (una expresión algebraica), el objetivo en ésta es que los estudiantes detecten que tienen que establecer el incremento de las figuras en un sentido distinto al que están acostumbrados, al detectar que aumenta de dos en dos tendrán la idea de qué hacer con respecto a las siguientes figuras, pero cuando lleguen a la figura 73 los estudiantes deben saber que tienen que encontrar una herramienta que les ayude a generar el número de cuadros de esta figura. Con las dos últimas preguntas se pretende que establezcan la forma en que hicieron el cálculo para sacar sus figuras, y al final que intenten llegar al establecimiento de una expresión algebraica que las genere, en caso de que algún equipo no lo logre, se espera que haya quienes sí lo lleguen a detectar y hacer énfasis en ello en la validación. Si por algún motivo ningún equipo lograra encontrar una forma general se tendrá que preguntar directamente a los estudiantes en la situación de institucionalización.

¿Cómo detectaron que la figura 10 iba a tener ese número de cuadros?

Si le vamos sumando dos a cada figura, ¿podemos establecer el número de figura $+2$ para representarlo de una forma general? Esperando que haya algunos que digan que sí y otros que no, porque se habrán dado cuenta que el número de figura es menor que el número de cuadros que tienen la figura, excepto en la figura 1.

¿Cómo podríamos representarlo de una manera general?

Las preguntas anteriores serán acompañadas por representaciones en el pizarrón por parte del profesor en caso de que los estudiantes no detecten qué es lo que tienen que hacer.

Situación problemática 3. Relación funcional

Situación de Acción

Al igual que en las otras dos, en ésta se trabajará en los mismos equipos de cuatro personas. El objetivo es que los estudiantes lleguen a conocer, por medio de problemas de relación funcional en situaciones de la vida cotidiana, una forma general de expresar matemáticamente el camino de ciertos objetos que recorren una distancia constante en cierto tiempo.

Al trabajar una literal en relación funcional, mencionan Ursini *et al.* (2005) que se detecta una correspondencia entre los valores de las literales involucradas, la determinación de una de las literales cuando se conoce el valor de la otra, identificando así la relación entre cantidades y la variación de una cantidad que afecta a la otra independientemente de la representación que tenga (verbal, tabular o gráfica). Es necesario que el estudiante pueda representar una relación funcional de distintas maneras y que pueda pasar de una a otra.

La situación problemática está diseñada para que los estudiantes se den cuenta que va disminuyendo 2 metros cada 15 minutos y lleguen a establecerlo de una forma matemática, ya sea tabular o una expresión algebraica. Si los estudiantes concluyen con una forma tabular será permitido que así lo dejen, porque ya habrán detectado que va disminuyendo constantemente el recorrido de la tortuga. En seguida que lleguen a esa representación, se continúa pidiéndoles que escriban una forma general matemática que exprese el recorrido de la tortuga, para detectar si los estudiantes pueden abstraer información.

La situación problemática es la siguiente:

> En la playa nos encontramos con una tortuga que llevaba bastante tiempo caminado y decidimos tomarle el tiempo que tarda en caminar, detectamos que recorre 10 metros en 15 minutos, en los siguientes 15 minutos recorrió 8, los siguientes 15 minutos sólo recorrió 6 metros.
>
> - ¿Si la tortuga continua caminando durante 30 minutos, cuántos metros creen que recorrerá en los próximos minutos?
> - ¿Creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente? ¿por qué?, si se detiene completamente ¿qué pasará después?
> - Considerando que la tortuga llevaba 60 minutos caminando, ¿Cuántos metros creen que recorría cuando comenzó a caminar?
> - ¿Cómo se podría representar matemáticamente el trayecto de la tortuga?
> - ¿Existe alguna regla o forma general que represente el movimiento de la tortuga? Exprésenla.

Una vez que estén organizados los equipos en esta nueva clase, se les repartirá la hoja en la que viene la situación problemática y se leerá en voz alta por parte del profesor ante todos los equipos, cuestionando qué tienen que hacer para resolverla, en caso de que los estudiantes no sepan qué hacer, se leerá nuevamente haciendo énfasis en que la tortuga ya llevaba tiempo caminando, que decidimos tomarle el tiempo que tardaba en caminar y establecer lo que recorría en el transcurso de 15 minutos, en seguida se podría preguntar:

- ¿Qué distancia está recorriendo la tortuga cuando empezamos a medir el tiempo? Esperando que los estudiantes contesten que 10 metros en 15 minutos.

- Después de quince minutos, ¿qué distancia va a recorrer la tortuga? Esperando que los estudiantes respondan que 8 metros los próximos 15 minutos para que con esa respuesta vayan detectando que cada 15 minutos disminuye dos metros la distancia que recorre, no se les preguntará de manera directa, esperando que los estudiantes lo vayan teniendo en cuenta para la solución de las preguntas de la situación problemática.
- ¿Por qué creen que cada quince minutos recorre menor distancia? Esperando que los estudiantes contesten: que porque se cansa un poco al recorrer, que digan que tiene flojera, que se para a tomar el sol, en fin que contesten alguna cosa pero que detecten que cada cierto tiempo la distancia recorrida va a ir disminuyendo.

Las variables didácticas en este ejercicio son:

Reducir cada lapso de 15 minutos el recorrido de la tortuga en 2 metros, para que los estudiantes detecten que va disminuyendo cada vez la distancia que recorre la tortuga.

Considerar cada 15 minutos como una unidad de medida de tiempo; es decir, establecer que cada 15 minutos cambia la distancia que recorre la tortuga hace que sea un poco más complicada la situación problemática, ya que no se puede representar fácilmente de manera algebraica, aunque sí gráfica. Con estas preguntas se pretende que los estudiantes detecten las características del recorrido de la tortuga con respecto al tiempo, es importante que observen que tienen que considerar los metros que disminuye cada 15 minutos y no tanto los que recorre en total la tortuga, al comprender que si va disminuyendo la velocidad, disminuirá la distancia recorrida en el lapso de 15 minutos, de esa manera los estudiantes se sentirán capaces de resolver el ejercicio, logrando así la devolución del ejercicio.

Situación de Formulación

En la tercera situación problemática se espera que los estudiantes ya tengan nociones de lo que deben de construir; las anteriores ya están validadas e institucionalizadas, considerando que los estudiantes ya tienen un referente de pensamiento algebraico.

Lo que deben conocer los estudiantes es, como ya se mencionó anteriormente, que va disminuyendo la velocidad constantemente cada 15 minutos, para que puedan contemplarla dentro de una tabulación, una gráfica o una expresión algebraica; la intención es que los estudiantes detecten que esa constante puede representarse de una manera general.

En esta situación el profesor estará pasando frente a los equipos para resolver dudas que surjan en la resolución de las preguntas, con la intención de no dar respuestas directas, sino propiciar que ellos se comuniquen y tomen acuerdos.

Una solución para este ejercicio es comenzar a considerar el trayecto de la tortuga como una línea recta y dibujarlo en un gráfico como lo marca la Imagen 12.

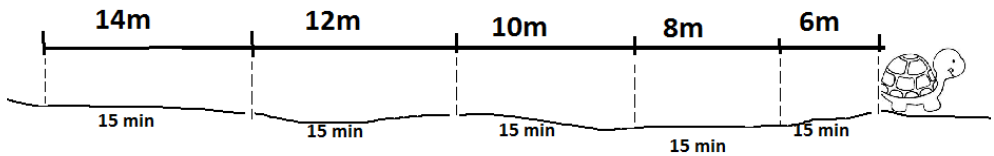


Imagen 12. Recorrido de la tortuga

Detectando que cada vez que transcurre el tiempo la distancia que recorre disminuye, entonces si quieren saber cuál es la distancia que recorre en total en 30 minutos, después de los establecidos en el problema, tendrán que sumar 4 metros más 2 metros para que establezcan la distancia recorrida en los próximos 30 minutos que indica el problema. El cuestionamiento se refiere a los metros que se recorrerán después de esos 30 minutos; los estudiantes probablemente contesten que 0 metros, porque va disminuyendo de dos en dos y como los pasados 15 minutos redujo a 2 metros, los siguientes serán 0 metros.

Otra posible respuesta es que los estudiantes la contemplen en una tabla, detectando sólo los datos del problema y no tanto el recorrido de la tortuga.

Minutos	…	15	15	15	15	15	15
Metros que recorre	…	10	8	6	4	2	0

Tabla 2. Posible respuesta de los estudiantes

Se considera de esta forma la tabla porque va disminuyendo 2 metros de recorrido cada quince minutos, pero otra representación de la tabla a partir de los datos del problema puede ser.

Minutos	…	15	30	45	60	75	90
Metros	…	10	8	6	4	2	0

Tabla 3. Posible respuesta de los estudiantes

Detectando que después de 90 minutos ya no va a variar la distancia de los metros que recorre, porque ya se detuvo la tortuga, la pregunta para los estudiantes ahora será ¿qué sucede después de que la tortuga se haya detenido? Esperando que contesten que se quedará allí, que se acabó la playa, se cansó completamente o alguna otra respuesta en la que indiquen que se queda inmóvil.

En seguida se les pide que indiquen de una forma matemática el recorrido de la tortuga, es aceptable que lo hagan de la manera anterior, pues sólo se les está pidiendo una forma matemática, el objetivo es que detecten que va disminuyendo constantemente la distancia que recorre y conforme el tiempo va aumentando; es decir, que consideren la relación que tiene la distancia con respecto al tiempo.

Situación de validación

La situación de validación se hará cuando todos los equipos ya hayan llegado a una conclusión. El profesor estará pendiente para dar comienzo con esta situación, así, cuando se haya llegado a la solución por parte de todos los equipos se le pedirá a alguno que pase a exponer a sus compañeros sus respuestas, en seguida por parte del profesor se cuestionará: ¿Todos están de acuerdo con ese resultado?, ¿por qué consideran así el resultado?, si tienen uno diferente, expliquen por qué el suyo es correcto, ¿cuál de los dos creen que sea verdadero? ¿por qué?, con la intención de causar conflicto en las respuestas de los estudiantes, que se espera sean de varios tipos.

En esta situación a través de las intervenciones del profesor se está dejando en conflicto a los estudiantes, porque ellos son los que van a debatir los resultados. El papel del profesor en esta situación será sólo la de poner en conflicto a los estudiantes que difieran del resultado, en caso de que los estudiantes estén de acuerdo todos con el mismo resultado, sólo se les preguntará: ¿por qué ese resultado es correcto? Esperando que a partir de la explicación del primer equipo los estudiantes incrementen sus ideas para saber que la situación puede resolverse por más de un método.

La finalidad es que los estudiantes estén conscientes de que las literales están en relación; es decir, que cuando se modifica el tiempo, se modifica la distancia que recorre la tortuga. Es importante que los estudiantes lo puedan representar mediante una tabulación, así se apreciará más fácilmente que un valor depende del otro.

Situación de institucionalización

En esta situación ya los estudiantes están en común acuerdo con los resultados, ahora toca el turno del profesor, después de que haya pasado un equipo a exponer frente a los demás compañeros en la situación de validación.

Se espera que los estudiantes por lo menos hayan llegado a la representación tabular del problema porque sus características sí son un poco complejas, entonces a partir de allí se les orientará para llegar a la solución algebraica, estableciendo que debemos tomar 15 minutos como un lapso de tiempo; es decir, como una unidad, para que los estudiantes vayan detectando que existen características que hacen las Matemáticas más complicadas.

Con esta respuesta se espera que los estudiantes vayan comprendiendo la noción de literal como incógnita, como número general y en relación funcional; es decir, que dependiendo de ciertos valores, va a ir cambiando el valor de los otros números.

Conocimientos esperados

Por medio de este problema se espera que los estudiantes obtengan la noción de relación funcional, es decir, que detecten que conforme pasa el tiempo disminuye la distancia recorrida por la tortuga, los estudiantes tendrán la idea que cada 15 minutos disminuye 2 metros la distancia que recorre la tortuga, llegando así a algún momento en que sea cero la distancia que recorre.

Los estudiantes que detecten esa relación lo podrán representar mediante una gráfica o una tabla, en el momento en que puedan hacer eso ya tendrán un poco más de nociones de una literal como relación funcional, es decir dependiendo de la cantidad que digamos el resultado va a variar conforme lo requiera la situación.

3.4 Experimentación

La experimentación, según De Faria (2006) es la fase en la que se da la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes y comienza cuando se da el contacto entre investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la Investigación. En este caso el investigador y el observador son la misma persona.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán a continuación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de las observaciones realizadas durante la experimentación (De Faria, 2006, p. 5).

Para la presente experimentación se considerarán las características del grupo y se realizará un análisis *a posteriori* de los resultados, para compararlos con las hipótesis formuladas en el análisis *a priori*, las situaciones problemáticas durarán dos días, “durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori*” (De Faria, 2006, p. 5).

3.5 Análisis a posteriori

Este análisis se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación. Artigue (1995) expresa que de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, de las producciones de los estudiantes, en seguida de esta obtención de datos se hará una confrontación del análisis *a posteriori* con el análisis *a priori*.

Este análisis se realizará de la misma manera que el análisis *a priori*, segmentándolo por situación problemática para facilitar la confrontación.

3.5.1 Situaciones problemáticas

Situación problemática 1. Incógnita específica

Situación de Acción

El primer día se inició formando los equipos organizando a los 10 estudiantes que se tenían considerados como jefes de equipo: Jorge, Itzel, Toño, Arantza, Ricardo, Manuel, Alí, Karla, Paulina y Andrea, que daban nombre y eran representantes del mismo. Se les fue llamando uno por uno para que fueran ocupando butacas de los diferentes equipos, las butacas ya estaban acomodadas desde antes que comenzara la clase para que los estudiantes solamente se sentaran a trabajar.

El profesor fue nombrándolos después de que ya estaban acomodados en sus butacas se les hizo el comentario de que iban a ser ellos encargados de los equipos porque se había detectado que eran quienes tenían el potencial de guiar a sus compañeros para la buena resolución de las situaciones problemáticas, que era indispensable que no se distrajeran haciendo otras actividades distintas a las propuestas, porque como ellos iban a ser los responsables de la calificación (buena o mala) iba a considerarse en mayor grado a ellos, se les dijo que si sacaban todo bien ellos iban a tener un punto extra, pero que si solamente estaban jugando se les iba a bajar un punto a todos pero a ellos como responsables se les iba a bajar dos.

En seguida se pasó a los demás estudiantes del grupo acomodándolos en los distintos equipos, este día faltaron 3 estudiantes, por lo tanto 3 equipos tenían sólo 3 integrantes. El profesor les dijo:

> Profesor: Tengan buen día, de lo que se trata (hablan varios alumnos, al mismo tiempo) en equipo como están distribuidos ya, fíjense bien, se les va a dar un papelito a cada equipo y queremos que todo el equipo se integre a resolver el problema, uno de ustedes de cada equipo nombran a un secretario, para que el secretario en una hoja, ya sea de libreta o una hoja blanca anoten los cálculos y los resultados de sus problemas, van a leer perfectamente una o dos veces jóvenes y contestan, con este conocimiento van a poner en práctica lo que han aprendido aquí, se les va a distribuir a cada equipo su problema, disponen de quince minutos.

> /El profesor pasó delante del grupo y leyó la situación problemática pidiendo a los estudiantes que atendieran a lo que él estaba leyendo, los alumnos escucharon, y les preguntó si sabían lo que tenían que hacer y ellos contestaron que sí, encontrar la distancia entre las casas de Mary y de Ale.

> Comienza a repartir los problemas y en cuanto se calló el profesor los alumnos comenzaron a hablar y uno a levantarse a bailar para que lo viera la cámara, no se distingue lo que hablan los alumnos porque es la mayoría/ (Fragmento de videograbación de clase del día 14 de Enero de 2014).

(El alumno que comenzó a bailar es Manuel, quien ya se había detectado que es muy inquieto. Así, el investigador tuvo que intervenir pidiéndole que se sentara. Al pasar por los equipos se detecta que, a pesar del ruido, los estudiantes están tratando de comprender la situación problemática para contestarla). En un equipo el encargado es Toño, se encuentra solamente él leyendo para decirle a sus compañeros qué es lo que tienen que hacer. El Investigador le comenta:

> Investigador: Toño, todos tienen que participar (Fragmento de videograbación de clase del día 14 de Enero de 2014).

/Continúa pasando por los equipos cuando está frente al de Manuel, un estudiante les dice que saquen sus cuadernos para que comiencen a contestar, se detecta que no había devolución de la situación de acción por parte de estos estudiantes, ya que se encontraban platicando de otro tema/. En el momento que el profesor pasó por ese equipo los estudiantes comenzaron a contestar la situación problemática.

Algunos equipos comenzaron a platicar acerca de lo que pedía el problema desde el momento en que se les pidió que lo contestarán, sólo el de Manuel y el de Toño tardaron un poco más…

En otro equipo (el de Alí) pregunta una estudiante al Investigador,

> Alumna: ¿cuánto va a ser, 78?,
> Investigador: Si van a contestar 78, digan por qué 78, pero los cuatro tienen que estar de acuerdo con ese resultado, discútanlo, cada quien de sus ideas y nada más que alguien anote para saber qué es lo que pensó cada uno. (Fragmento de videograbación de clase del día 14 de Enero de 2014).

Otros estudiantes se encontraban leyendo el problema nuevamente y algunos otros intentando contestar ¿a qué distancia está la casa de Ale de la casa de Mary?, detectando que se estaban involucrando en la solución de la situación problemática, ya sabían qué es lo que tenían que hacer…

Las preguntas que hacen los estudiantes, así como sus comentarios son evidencia para decir que ocho equipos aceptaron la devolución del problema.

Situación de Formulación

Los estudiantes ya están comentando sus ideas y compartiendo formas de resolver la situación problemática que se les planteó al inicio de la clase, pero (aún tienen dudas) y hacen preguntas al profesor y al investigador para que les digan qué tienen que hacer.

Tanto el profesor como el investigador pasaban por los equipos para darse cuenta de las formulaciones que se estaban haciendo en cada uno de ellos. El investigador observaba los procesos de los equipos y el profesor además de observarlos les sugería métodos para resolverla, por ejemplo:

> (Un estudiante preguntó al profesor la forma en que iban a encontrar la distancia entre las casas de Mary y de Ale, el profesor respondió):
>
> > Profesor: Pues ustedes tienen que buscar una forma de encontrarla tomando en cuenta la distancia del carro del papá de Mary, pueden hacerlo estableciendo una ecuación, por ejemplo, sólo busquen cómo establecerla y lo pueden resolver. (Fragmento de la videograbación de clase del 14 de Enero de 2014).

Ante tal situación, el investigador optó por modificar el rol que tenía planeado y así, comenzó a hacer algunas preguntas a los equipos, de manera que reflexionaran acerca de sus respuestas.

En otro equipo, el de Paulina, habían hecho el siguiente gráfico:

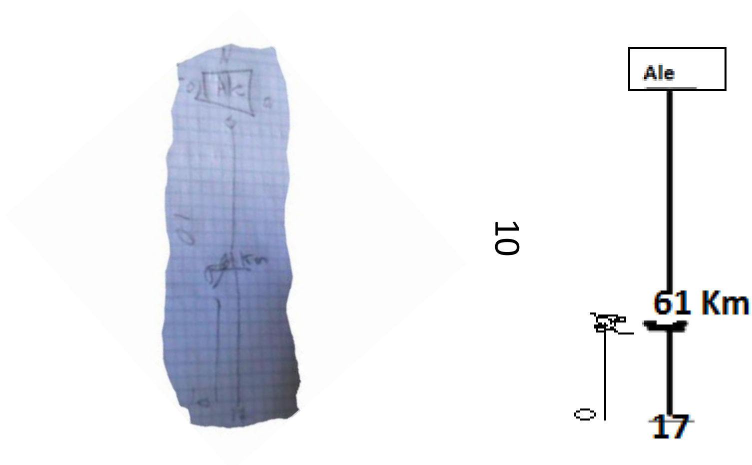


Imagen 13: posible respuesta del equipo de Paulina

Y se encontraban comentando en el equipo

Samantha: Entonces son 17 más… más.
Paulina: ¡Más 61!
Investigador: Espérense, ¿dónde está el carro?
Alumnas: ¿El carro?
Investigador: El carro descompuesto ¿dónde está?
Alumnas. A ver, si aquí está… (Observan el gráfico que habían hecho, dibuja otra vez el carro y la casa de Ale debajo del carro) el carro y aquí la casa de Ale (señalándola en el dibujo).
Investigador: ¿Al sur o al norte?
Samantha. Al sur.
Paulina: No estaba…
Samantha: Que diga al norte, y luego, éste se fue a la casa de Ale y recorrió 61 km hacia el sur. Y luego dice que en el sur, quedando 17 km al sur de su casa, este, aquí están los 61 km y baja 17 para llegar a su casa (contemplando el mismo gráfico), sumando éste.
Investigador: A ver fíjese, primero… comprenda el problema, ¿segura que así?

Samantha: ¡Sí!
Investigador: ¿Dónde quedó? Señalando en la situación problemática la distancia.
Samantha: 17 km.
Investigador: ¿Al sur o al norte?
Samantha: Al sur.
Investigador: Ajá, al sur de su casa, si está ella 17 km al sur de su casa ¿para dónde va a estar su casa?
Samantha: Para el sur.
Investigador: ¿Para el sur?
Samantha: Este… sí porque, si su casa está al sur y que recorriera 61 km hacia el sur y…
Investigador: Bueno pues ya usted, pero quiero que las tres se convenzan de que la respuesta es correcta, si alguna dice que no, conclúyanlo y digan qué es lo que pasó y por qué no quedaron en concordancia las tres, ¿sí? por favor (Fragmento de videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Varios estudiantes tenían la idea de que la casa estaba más al sur que el carro, obteniendo por respuesta que la distancia entre las casas iba a ser 78 km., al continuar pasando por los equipos para detectar el razonamiento que tenían los estudiantes se pudo apreciar que había quienes consideraban también que la respuesta de la distancia de las casas iba a ser 44 km, aunque solamente eran dos equipos y uno de ellos tenía mal la resta.

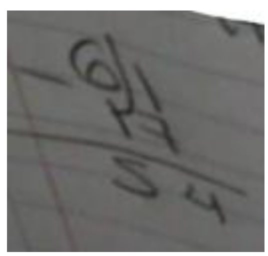


Imagen 14. Resta que hicieron en el equipo de Karla

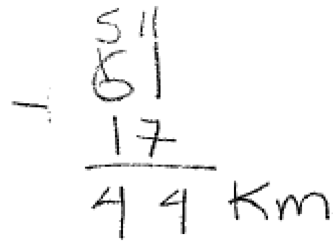


Imagen 15. Respuesta del equipo de Andrea

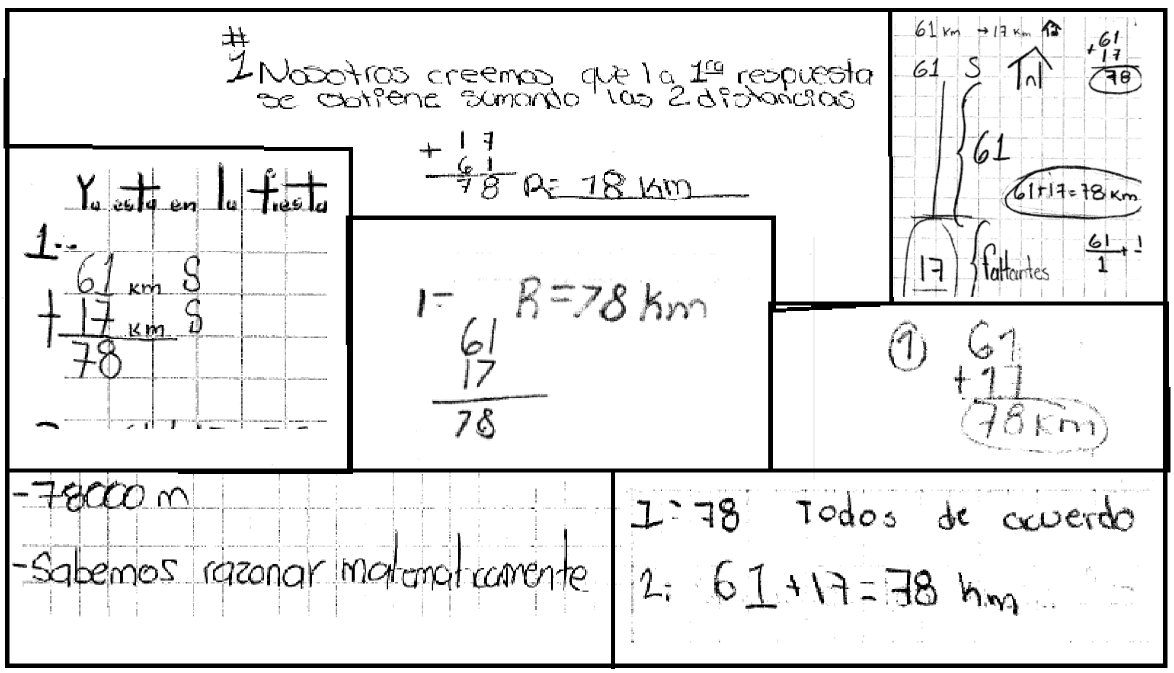


Imagen 16. Noción de respuesta de los demás equipos

A continuación se presenta lo sucedido en el equipo de Andrea (Imagen 15), la solución que esperaba el investigador.

Andrea: ¿Son 44?
Investigador: Eso, muy bien, son los únicos que la tienen bien. Oigan pero, quiero que los tres trabajen juntos, que los tres estén bien de acuerdo ¿por qué las respuestas son así, eh? por favor.
Roberto: ¿Aquí sí está bien 44?
Investigador: Yo creo que sí, pero discútelo con tus compañeros
(Fragmento de videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Los integrantes del equipo de Andrea habían leído bien la situación problemática y habían comprendido que la casa de Mary estaba al norte del carro de su papá, pero sólo tenían la respuesta sin mostrar evidencia matemática de lo que estaban haciendo.

Este grupo de estudiantes están acostumbrados a que el profesor valide sus resultados, o esté en constante verificación de lo que están haciendo; por ejemplo, en la situación anterior un estudiante preguntaba si iba bien cuando aún estaban contestando esa situación problemática, el investigador, como había asumido el rol de profesor, les validó lo que estaban contestando; sin embargo, posteriormente el investigador intenta retomar el contrato didáctico que se había diseñado, en las que no da respuestas, sino devoluciones.

> Investigador: Yo creo que sí, pero discútelo con tus compañeros (se dirige hacia el equipo de Manuel), oigan miren, ahorita ustedes contesten todo, si están bien o están mal no importa, todos nos equivocamos, todos estamos aprendiendo, les voy a pedir que lo contesten, ahorita en 15 minutos en el pizarrón lo vamos a ver entre todos para ver cuál es el correcto (Fragmento de videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Después de haber pasado al equipo de Paulina habían detectado que la distancia se iba a obtener haciendo una resta, al pasar nuevamente por su equipo se pudo apreciar que tenían escrito en su cuaderno $61 - 17 = 54$ como se muestra en la Imagen 14, el investigador comentó, -está bien, pero como lo piense sólo les voy a pedir que hagan bien las restas. Volvió a recaer en su costumbre como profesor en la que tiene que estar validando las respuestas en todo momento.

Los estudiantes ya se encontraban involucrados en la situación problemática e intentaban resolverla comentando en los equipos la forma en que sería correcta la respuesta llegando a conclusiones locales por parte de cada equipo. Aunque no fueran respuestas correctas, los estudiantes estaban obteniendo conclusiones en cada equipo.

Es preciso mencionar que al equipo de Arantza, donde el profesor titular les dijo que buscaran la forma de establecerlo con una ecuación, lo hizo de la siguiente manera:

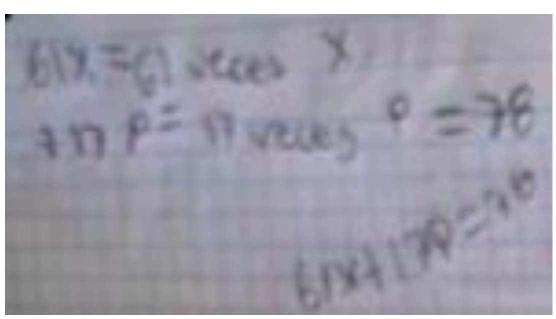
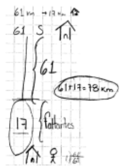


Imagen 17. Ecuación que formuló el equipo de Arantza para resolver la actividad

Arantza: Mire, establecimos que $61x$ igual a 61 veces x y $17p$ igual 17 veces p y sale 78… $61x + 17p = 78$ (Como lo marca la Figura 14).
Investigador: Pero ¿qué significa x y que significa p?
Arantza: Un número.
Investigador: Pero ¿qué número? o ¿por qué quiero esos números?
Arantza: este…
Investigador: ¿Para qué necesito esos números?
Arantza: para… Pues, el desarrollo de los números.
Investigador: Espéreme poquito… le dice a otro alumno.
Melisa: pero ¿Qué número es?
Investigador: ¿Para qué necesito esos números?, ustedes están indicando que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$ son números que no conozco, ¿sí? números desconocidos que pueden tomar cualquier valor, ¿o qué tipo de números son $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$?
Arantza: Mire por ejemplo, en $61x$ el $\boldsymbol{x}$ es… ¡no!, ¡no!, ¡no!… por ejemplo 50 más… $\boldsymbol{x}$ son 11 igual a 61 más $17p$, no más $10p$ y la $\boldsymbol{p}$ es 7 igual a 78 escribiendo $50x + 10p = 78$.
Investigador: Pero si aquí tienen 61, señalando su expresión $61x + 17p = 78$, ¿ya no ocupan la $\boldsymbol{x}$ o sí?
Arantza: No.
Investigador: Y si ya tengo 17 ¿no ocupo la $\boldsymbol{p}$ o sí?
Arantza: No.
Melisa: $61 + 17$ pon, pero ¿esa no es una forma matemática de resolverlo o sí?
Investigador: Si yo digo que $2 + 2 = 4$ es una forma matemática.
Melisa: Pues ya está, bueno y dice que otra forma matemática, ¿hay más formas?
Investigador: Bueno si no son números, hay gráficas, hay tablas.
Melisa: oh, oh. (Fragmento de la videograbación de clase del 14 de Enero de 2014).

El profesor titular intentó decirles a los estudiantes que tenían que representarlo por medio de una ecuación y es lo que hicieron, pero cómo no supieron razonar bien el problema, buscaron una solución numérica y lo intentaron hacer de modo algebraico, se detectó que la influencia del profesor es establecer lo que tienen que hacer los estudiantes, que tienen necesidad de dar la respuesta que el profesor requiere, en este caso, no basta con dar una respuesta al problema, hay que darla en términos de una ecuación, aunque no se le pueda dar un significado a ésta[8]. Las respuestas de los estudiantes se muestran a continuación para observar la manera en que repercutió o no la sugerencia del profesor, así como para detectar los resultados que en general pensaron los estudiantes.

[8]Muchas respuestas están influenciadas por el contexto escolar (contrato didáctico), a pesar de no tener coherencia para los alumnos, ellos intentan contestar situaciones problemáticas paradójicas utilizando operaciones en la resolución de problemas verbales con un sentido no coherente, un ejemplo clásico de este tipo de situaciones problemáticas es el de “la edad del capitán” (IREM de Grenoble, 1980), en donde se establece únicamente que en un barco hay 26 corderos y 10 cabras, el cuestionamiento siguiente es ¿cuál es la edad del capitán?.

Equipo	Situación problemática 1				
	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5
Jorge	$\begin{array}{r} 61 \\ +17 \\ \hline 78 \end{array}$	…	$\begin{array}{r} 61 \\ -17 \\ \hline 44 \end{array}$	$\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = 44$	…
Itzel		$61 - 17 = 44$	$61 - x = 44 \rightarrow 61 - 61 - x = 44$	No, porque necesitamos medidas o distancia para solucionarlo	…
Toño	78	$61 + 17 = 78$	100-22=78	No, porque no tiene las distancias necesarias	Sí, sumando o dividiendo las distancias. Son fáciles de comprender
Arantza	$\begin{array}{r} 61 \\ +17 \\ \hline 78 \end{array}$ 44 km	$61 - 17 = 44$	$61 + x = 78$	No, porque necesitamos medidas para saber la distancia	…
Ricardo	78 km $\begin{array}{r} 61 \\ +17 \\ \hline 78 \end{array}$	Sumar lo indicado	Croquis	No, porque no sabemos con precisión su	Sí, sumando que es lo más correcto

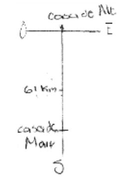
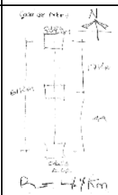
					distancia	
Manuel	$\begin{array}{r} 61 \\ +17 \\ \hline 78 \end{array}$	78 km	$61x + 17x = 61 \times 1000 + 17 \times 1000 = 78000$ $x = 1000$		No, porque no sabemos cuál es la distancia correcta	…
Alí	78000 m		Sabemos razonar matemáticamente	$61 + x = 78 \rightarrow 78 - 61 = 17$	No, no hay números	…
Karla	44 km		Restamos 61 – 17 lo cual nos dios de resultado 44 para ver la distancias que es de la casa de Ale a la casa de Mary	Mary viajó 61 km. hacia el sur, después quedó 17 km al sur de su casa, esos 2 números se restan y así podemos sacar el resultado.	No, porque no podemos llegar a un lugar sin medidas	Sí, haciendo operaciones porque así es de manera más fácil
Paulina		44 km	$\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$	$61 - 17km = 44$	No, porque necesitas las medidas	Sí, por ecuaciones, porque puede con un signo o números
Andrea	$\begin{array}{r} 61 \\ -17 \\ \hline 44 \end{array}$		$61 - 17 = 44$	$\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$	No, porque no tenemos los datos	Sí, fracción teniendo los datos necesarios para obtener los resultados matemáticamente $\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$

Tabla 4. Respuestas de la situación problemática 1 hechas por los estudiantes.

Con base en los resultados que se muestran en la Tabla 4 podemos detectar la forma en que contestaron los equipos. Se hace una primera interpretación de las respuestas de los alumnos, y se considera si influyó el comentario del profesor en el que les indica que busquen una expresión algebraica que responda a la situación problemática.

- En la respuesta de la pregunta 1, tres equipos tienen por respuesta 44 km, resultado correcto según el problema planteado, seis equipos contestaron que 78, detectando que en lugar de hacer una resta hicieron una suma, resultando algo inadecuado, un equipo tiene los 2 resultados, en un lado tienen que es 44 y en otro que 78, suponiendo que su resultado era 78 pero en el momento de la Validación – Institucionalización cambiaron su respuesta.
- En la respuesta de la pregunta 2, dos equipos lo expresaron en términos de resta como se esperaba, otro redactó que hicieron una resta de 61-17 estableciendo el resultado correcto y otro utilizó fracciones con denominador uno para no alterar el valor, de esa manera lo establecieron matemáticamente. Quedaron cuatro equipos con la respuesta correcta. De los otros equipos dos sólo comentaron que pueden razonar matemáticamente y que sumando lo indicado, uno intentó establecer una ecuación $61x + 17x = 78000, x = 1000$, intentando darle sentido a la expresión algebraica que obtuvieron pero no sabiendo justificarla, un equipo escribió la suma directamente, otro no contestó y otro escribió las dos respuestas nuevamente.
- En la respuesta de la pregunta 3, de los cuatro equipos que tienen bien la respuesta 2, dos se intercambiaron las respuestas (el que había escrito la resta ahora lo puso en fracción y el que había puesto una fracción ahora escribió una resta), el equipo que había redactado la resta ahora lo redactó de otra manera, el equipo que acertó en la respuesta 2 intentó establecer una ecuación, pero no pudo darle sentido lo que escribieron estableciendo que $61 - x = 44 \to 61 - 61 - x = 44$, un equipo más establece la respuesta correcta en forma de resta, ahora son 5 equipos los que tienen bien la respuesta. De los otros equipos, el que había expuesto que sumar lo indicado, ahora escribió que haciendo el croquis, dos establecieron la ecuación $61 + x = 78$, uno sí resolvió que $78 - 61 = 17$, otro equipo contestó con un gráfico en el que se observa que la casa de Mary está más al sur que el coche del papá de Mary, siguiendo con la idea de 78km y un equipo estableció una resta distinta pero que el resultado de ésta es 78.
- En la respuesta de la pregunta 4, nueve equipos concluyen que no se puede establecer solución matemática porque no conocen las medidas. Otro equipo establece una resta de fracciones como lo habían hecho otros equipos en respuestas pasadas.
- En la respuesta de la pregunta 5, cinco equipos no contestaron la pregunta, los otros cinco establecieron que sí aunque el argumento de cada uno fue diferente: uno estableció que sumando o dividiendo las distancias son fáciles de comprender, otro que sumando es lo más correcto, otro que haciendo operaciones que es la manera más fácil, otro que por medio de ecuaciones porque puede con un signo o números y el último equipo estableció que por medio de una fracción, pero que necesitan los datos necesarios para obtener los resultados matemáticamente.

Se puede observar que algunos alumnos tienen clara la idea de lo que pide el problema, aunque al formalizar algo sin que se les den datos específicos, no saben qué hacer; existen otros que no comprendieron bien la situación desde la redacción del problema y se fueron con la idea de que tenían que hacer una suma, también puede apreciarse que la institucionalización, que se mencionará más adelante, influyó para que los estudiantes cambiaran sus respuestas aunque no cambiaron la idea que tenían de los resultados, sino que sólo cambiaron la respuesta porque así lo estableció el profesor, que en este caso era el investigador.

Situación de Validación

Cuando se detectó que la mayoría había terminado el profesor pidió que pasara alguien a explicarla a sus compañeros diciendo lo siguiente:

> Maestro: No tengan temor a equivocarse, dado que el hecho de que hayan estado en la búsqueda de las respuestas, eso ya tiene mucho valor, si las aciertan que bueno, si hubo fallas no se preocupen que de ahí también se aprende, bien, ¿qué equipo quiere participar?, o sea, darnos sus resultados, a ver, levanten la mano quiénes quieren. Bien, bueno, tenemos tres equipos (el de Toño, el de Arantza y el de Andrea) ¿no hay más?, (nadie hace comentario alguno, sólo tienen las manos levantadas), bueno qué les parece que un representante de cada equipo venga con una moneda para un disparejo para ver quién expone (Fragmento de la videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Los equipos ya habían contestado, pasó el equipo de Toño a exponer frente a sus compañeros las respuestas que habían obtenido.

Aunque el profesor ya había dado indicaciones los estudiantes seguían teniendo la idea de que trabajaban igual que en las otras clases; cómo en la observación del grupo se había detectado que cuando pasaban al pizarrón exponían para el profesor, el investigador sintió la necesidad de decir que tenían que exponer para sus compañeros y que la respuesta que diera Toño no iba a ser la correcta, por eso antes de que hablaran algo acerca de sus respuestas el Investigador comentó:

Investigador: Miren, ahora la idea es, va a pasar el equipo a contestar la actividad que ya contestó y a explicar a sus compañeros, pero fíjense, nadie ha revisado su actividad, puede estar bien o puede estar mal. Ustedes mismos van a decirle, estás mal, estás bien, porque ustedes también tienen su respuesta, entonces cada quien va a considerar según lo que pensó. Si ya cada uno tiene una respuesta manténganse firmes en esa respuesta, porque es la suya y ya la razonaron, si es diferente a la que está en el pizarrón ustedes defiéndanla para llegar a un común acuerdo. Ya cuando todos estemos de acuerdo de que es correcta o es incorrecta esa respuesta pues ya vamos a intervenir el profe Ernesto y yo para asegurar que sea la correcta. Por favor quiero que pongan atención y ustedes argumenten si está bien o está mal (Fragmento de la videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Los miembros del equipo de Toño, al exponer propusieron que con una suma ($61 + 17 = 78$) iban a encontrar la distancia entre las casas. El investigador les dice que pregunte si todos están de acuerdo, eso hace el equipo y la mayoría dice que sí está de acuerdo y comenta

Toño: Levanten la mano los que están de acuerdo,
(Levanta la mano la mayoría)
Toño: la mayoría, órale ya.
(El investigador pidió que levantaran la mano los que no estaban de acuerdo y sólo dos equipos no estaban de acuerdo, se les preguntó el porqué de su desacuerdo y Andrea comentó que porque se tiene que hacer una resta ya que el problema nos dice que el carro está a 17 km al sur de la casa de Mary y a 61km al sur de la casa de Ale, entonces la casa de Mary está antes que el carro) (Fragmento de la videograbación de clase del 14 de Enero del 2014).

Se les preguntó a los estudiantes cuál respuesta los convencía, pero la mayoría ya tenían que iba a ser 78km., después de una breve discusión Iván se ofreció a pasar al pizarrón a establecer el gráfico que representa la solución e hizo lo siguiente:

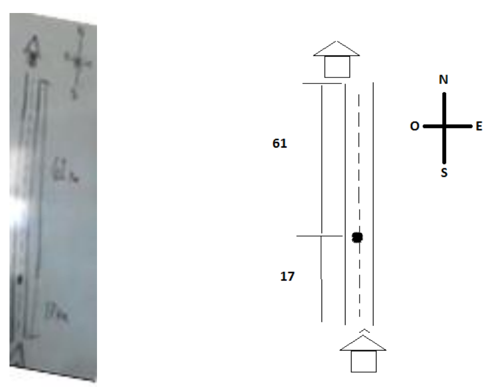


Imagen 18: representación de la solución de la actividad de Iván

El investigador preguntó ¿dónde iba a estar el carro entonces?, y un miembro del equipo de Iván le dice que hasta el final del dibujo (Imagen 18). Itzel no estaba poniendo atención y el Investigador se le ocurre preguntarle a ella – ¿si el carro está en donde está el punto negro, estaría a 17 km al sur de la casa?

Itzel no supo qué contestar y Arantza (encargada del equipo de Iván) dice: -es que ya habíamos quedado nosotros que iba a ser $61 + 17 = 78$, el Investigador no comentó si estaban bien o estaban mal, le pidió a Andrea que pasara a exponer su respuesta para que vieran sus compañeros cómo lo habían pensado en otros equipos. En el momento que estaba Andrea en el pizarrón se terminó la clase y se les pidió a los estudiantes que pensaran bien la respuesta y mañana continuarían con eso, en seguida salieron del grupo y se quedó la discusión pendiente.

En esta situación problemática se quedó la validación pendiente porque los estudiantes no pudieron llegar a un común acuerdo, algunos estaban convencidos que era 78 km y otros que eran 44 km así que la siguiente clase se optó por intentar conjuntar la validación con la institucionalización, en la que el profesor guio a los estudiantes hacia el resultado correcto.

Situación de Validación - Institucionalización

Para comenzar con esta situación el investigador preguntó cuál es la distancia entre las dos casas, pensando que los estudiantes ya habían estudiado bien el ejercicio en su casa, pero contestaron algunos que 44 km y otros que 78 km, así que se fueron orientado a que con base en la situación problemática detectaran a qué distancia estaba el papá de la casa de Mary y en qué dirección concluyendo que 17 km al sur de la casa. Los estudiantes ya tenían la idea de que el carro estaba más al sur que la casa de Mary. Toño, en esta ocasión estaba muy distraído y no pudo cambiar su visión de que la distancia entre las casas era 78 km, por medio de preguntas hechas a los estudiantes para que Toño detectara las distancias se llegó a la conclusión de que el carro estaba más abajo que la casa de Mary, representando el norte para arriba y el sur para abajo, dibujando el siguiente gráfico en el pizarrón para que Toño lo lograra observar.

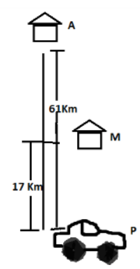


Imagen 19: forma gráfica de la solución de la primera actividad

El investigador decidió preguntar en general que quién sabía la respuesta, para intentar que a Toño le quedara más claro el resultado y observar que los estudiantes tuvieran una idea correcta del resultado.

Investigador: ¿Qué voy a sumar?
Paulina: Yo le digo profe.
Investigador: Está bien, guarden silencio por favor y entiendan lo que va a decir su compañera.
Paulina: Porque si de la casa de Ale al carro son 61 y de la casa de Mary al carro son 17 se restan 17 a 61 y queda 44.
Investigador: Entonces ¿cuándo va Mary por su papá pasa por su casa?
Alumnos: Sí.

Investigador: Ahora, si tienen la idea de donde están ubicadas las casas y el carro, ¿quién pasa a establecerlo de manera matemática?
Ningún alumno se ofrece porque no habían entendido lo que tenían que hacer.
Investigador: Usted pase (le indicó el profesor a Miriam)… ustedes van a decir si está bien establecido de manera matemática o si no está bien establecido.
Miriam escribió: $\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$.
Investigador: Niños, ¿ustedes creen que está bien establecido?
Itzel: ¿Yo puedo hacer el mío?
Investigador: Espérese, primero dígame si está bien o no está bien, Itzel ¿está bien?
Itzel: Sí.
Investigador: ¿Por qué sí?
Itzel: Que diga no.
Investigador: ¿Por qué no?
Se tapó la cara con una hoja y dijo, -es que con fracciones no sé profe.
Investigador: ¿Por qué no sabe con fracciones?
Itzel: Pues no sé.
Iván: Yo digo que está mal el resultado.
Investigador: ¿Por qué está mal el resultado?
Iván: porque El resultado debe ser también en forma de fracción.
Investigador: Pero si está con forma de fracción.
Iván: Sí es cierto, me confundí, perdón.
Investigador: ¿Por qué creen que sus compañeras usaron fracciones?
Karla: Porque es una forma de representarlo matemáticamente.
Investigador: Exacto, yo solamente dije: -represéntenlo matemáticamente, no especifique alguna forma o alguna manera. ¿Está bien eso?
Iván y Karla: ¡SÍ!
Investigador: ¿Todos están seguros?
Alumnos: ¡Sí!
Investigador: ¿Quién no está seguro?, Manuel ¿es cierto o no es cierto?
Manuel: Sí.
Investigador: Dime por qué.
Manuel: Es forma matemática porque tiene números.
Investigador: Está bien, pero ya no te estés distrayendo. ¿Quién lo representa de una manera diferente?, ah primero Miriam sí está bien esa manera, sí es Matemática, siéntese, gracias… va a pasar ahora su compañera Karla.
Karla escribió: $-\frac{\substack{61\\17}}{44} = 44km$.
Investigador: Ella lo representó en forma de resta, ¿una resta será una manera matemática?
Alumnos: ¡Sí!
Investigador: Entonces también está bien, gracias. La pregunta que sigue dice ¿si el papá estuviera más al sur o más al norte lo podemos expresar de manera

matemática? (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de enero de 2014).

Con este registro se puede notar que Paulina e Itzel ya habían comprendido que la distancia era 44 km, siendo 4 equipos los que tenían o por lo menos decían ese resultado, Iván comienza a detectar que esa manera es la correcta aunque no está del todo convencido, porque asegura que está mal una respuesta aunque sólo lo dice porque no la vio establecida en forma de fracción.

A pesar de haber dicho las características del problema, establecer los valores y hacer énfasis en las distancias, cuando se le preguntó a Toño la distancia entre las casas M y A de la figura 16, se guio solamente por el dibujo que había realizado el investigador. El respondió que la distancia iba a ser 17 porque estaba como a la mitad la M del carro P y la casa A. Se le pidió que viera bien la situación y contestó:

Toño: Ya me la puso difícil profe.

Iván tomó la palabra y dijo:

Iván: Son 44 profe.

(Dejándolo como resultado válido, porque la mayoría de los estudiantes ya lo había contestado de esa manera) (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de enero de 2014).

Los estudiantes siguieron pasando a exponer las demás respuestas sin contratiempos porque se había consumido bastante tiempo de las dos clases que accedieron a trabajar con el grupo. La forma matemática todos la consideraron de una manera aritmética…

Al intentar establecer una forma general para representar el recorrido que hizo Mary, los estudiantes contestaron que con ecuaciones lo podían representar. El investigador les pidió que alguien pasara a establecer la ecuación que representara el recorrido de Mary, Brenda se ofreció a pasar e hizo lo siguiente:

$$\frac{17(k)}{17} = 61$$

El investigador le preguntó que si estaba bien haciendo una multiplicación y Brenda le contestó que sí porque tenía que ser así para que cumpliera la balanza, aquí se pudo detectar que había influencia de lo que estaban trabajando en clases anteriores, concluyendo que la situación problemática fue más difícil de lo que pretendía, ya sea por nociones erróneas de los alumnos acerca del establecimiento de ecuaciones, por no saber cómo representar expresiones algebraicas de cualquier tipo de problemas, por influencia de haber trabajado el Álgebra de un modo mecánico.

Al finalizar esta situación problemática se detectó que la mayoría de los estudiantes no respondieron de la manera en que se tenía prevista; consideraron nociones erróneas en la interpretación de los datos.

Situación problemática 2. Número generalizado

Situación de Acción.

Ésta se tenía contemplada para realizarse dentro de la primera clase, sin embargo, el tiempo se extendió y tuvo que iniciarse en el segundo módulo de los dos pedidos al profesor.

Se les repartió la situación problemática a los estudiantes, ya que no tenía un problema redactado igual que la anterior, tenían que observar una serie de figuras que iban creciendo con una regularidad y encontrar esa relación. Cuando se estaba repartiendo la hoja de trabajo, hubo una estudiante que preguntaba si tenía que dibujar una figura y el investigador contestaba que sí, que detectara la correspondiente. Terminó de repartir las hojas de trabajo y comenzó a pasar por los equipos para asegurar una buena devolución.

> (Continuó repartiendo las hojas de trabajo a los equipos, cuando terminó se detuvo en uno para detectar lo que estaban comentando los alumnos).
> América: pues van aumentando dos cada vez, porque aquí tiene uno y aumenta dos y acá también (señalando las figuras 2 y 3 de la situación problemática).
> Ricardo: entonces aquí va a ser cuatro (señalando la cuarta figura).
> (América se puso a pensar). (Fragmento de la videograbación de clase del15 de enero de 2014)

Los equipos tenían idea de qué era lo que tenían que hacer con respecto a la primera pregunta de la situación problemática, aunque no todos estaban decididos si el resultado era siete u ocho cuadritos, pero lo importante es que los estudiantes dieron una devolución al problema propuesto por el investigador, ya que tenían la idea de lo que se tenía qué hacer e interesados en buscar las respuestas.

Situación de Formulación

A partir de detectar que los estudiantes tenían clara la idea de qué hacer para resolver la situación problemática, el investigador siguió pasando por los equipos de trabajo detectando las distintas formas de razonar que tenían conforme avanzaban en las preguntas.

En está ocasión el investigador tomó el papel del profesor desde el inicio de la aplicación de la situación problemática para cuestionar a los estudiantes, intentando obtener una devolución por parte de ellos, acción que sí se pudo observar en el fragmento de la videograbación porque algunos equipos ya sabían que era siete cuadritos la respuesta y otros aún estaban indecisos; en esta ocasión no les sugirió algún resultado, sino que, les pidió que pensaran y reflexionaran para que llegaran a un común acuerdo con su respectivo equipo.

> Investigador: A ver, ¿qué llevan?
> Agarran la hoja de una butaca y comienzan a verla y enseñan su hoja dibujada con la cuarta figura con siete cuadros, como se muestra en la Imagen 20.

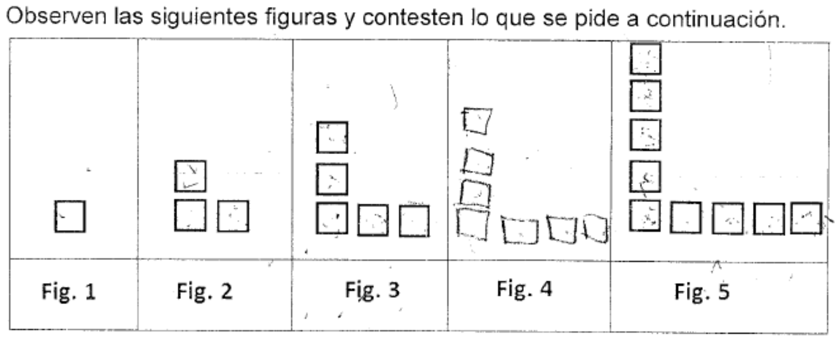


Imagen 20. Hoja de trabajo del equipo de Manuel

> Manuel: Mire tiene que ser más que el 3 y menos que el 5.
> Investigador: ¿Por qué?
> Manuel: Porque empieza de uno y va aumentando dos.
> Investigador: ¿Juan, qué dices?
> Juan: Que es una sucesión.
> Investigador: Y ¿qué es una sucesión?
> Juan: Es como una serie…
> Investigador: Pues sí, entonces contesten eso, va a estar bien fácil pues (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de Enero del 2014).

Las variables didácticas contempladas dentro de esta situación problemática funcionaron, ya que los estudiantes seguían la secuencia guiándose por el número de cuadros que tenía cada figura, aunque resolvían bien la forma gráfica de la pregunta no estaban del todo convencidos que fuera a ser en la forma numérica que contestaban, los estudiantes no relacionaban del todo lo que escribían con lo que dibujaban, porque su figura tenía siete cuadritos, pero pensaban que tenía ocho.

> Investigador: Ese periódico ahorita no lo revise, ahorita dedíquese a contestar, ¿qué llevan?
> Alumnas: Pues estamos pensando que cuántos cuadros debe de tener la figura 4.
> Investigador: ¿Cuántos tiene que tener?
> Alumnas: Ocho.
> Investigador: Entonces ¿por qué aquí lo dibujó con siete? (señalando el dibujo que habían hecho en el equipo, Imagen 21).

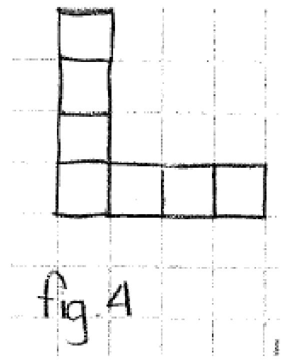


Imagen 21. Dibujo que había elaborado el equipo

Alumnas: Ah de verdad, sí es cierto… después de que contaron los cuadros que dibujaron.
Investigador: Entonces ¿cuántos cuadros tiene que tener?
Alumna: Ocho.
Investigador: ¿Ocho?
Alumna: No, siete.
Investigador: ¿Siete?
Alumnas: No, no, a ver, a ver…
Investigador: Sí, mejor piénsenle.
Alumna: Siete.
Investigador: ¿Segura?
Alumna: No.
Investigador: Bueno, háganlo como piensen, pero que todos estén de acuerdo.

Como se mencionó anteriormente los estudiantes estaban envueltos en la situación problemática buscando las estrategias necesarias para contestarla correctamente, según su razonamiento, aunque no fuera del todo correcto; La situación de devolución se había detectado en esta situación problemática.

Los estudiantes mostraban que estaban pensando en cómo contestar aunque no fuera la forma correcta, pero era razonamiento que ellos estaban generando y para ellos era válido; el trabajo del investigador en ese momento era pasar a los equipos para seguir poniéndolos en conflicto acerca de sus razonamientos, no brindaba respuestas concisas, sino que a partir de lo que tenían los estudiantes como solución, les planteaba preguntas que los hacían dudar si esa respuesta era válida o no, intentando involucrar a todos los miembros de los equipos en la solución.

Alumna: Pues ya lo acabamos, pero es que no estamos seguras.
Investigador: pues ustedes que creen, ¿si será así o no será así?
Alumna: Pues pensamos que sí porque mire, van en proporción de 2, en el primero tenemos 1, se le aumentan 2 (señala la figura 2) y después se le aumentan otros 2 y ya está (señala la figura 3) y se le aumentan otros 2 (señala

el cuadro vacío) y después otros dos y tenemos 9 (señalando la quinta figura) y así.
Investigador: Pues puede ser, pero tienen que la figura 10 va a tener 20 cuadros, ¿por qué?
Alumnas: Porque si de 5 son 10 y la figura… [observan las figuras y se quedan serias].
Investigador: ¿Seguras?
Alumnas: No…
Arantza: Sí mira, si de 5 son 10 y de otros 5 son 10, entonces de 10 van a ser 20
Nohemí: No, es que… ¿podemos hacer las figuras?
Investigador: Pues háganlas, en su cuaderno (se dirige a otro equipo). -¿cómo van?
Andrea: Bien.
Roberto: Pues ellas están haciendo eso y yo ya la saqué más rápido.
Investigador: Espérense, si ustedes están haciendo eso y él dice que ya la sacó más rápido, ¿por qué no le preguntan que cómo la sacó? Es que tienen que aportar las ideas todos ¿sí?... a ver ¿cuántos va a tener la figura 4?
Andrea: Siete.
Investigador: ¿Por qué siete?
Andrea: Porque van de dos en dos.
Investigador: Si van de dos en dos, entonces la figura cuatro debería de tener 8.
Andrea: No, pero van de 2 en 2 a partir de este número (señalando la figura 1).
Investigador: Ah, está bien, entonces contesten lo demás pero con ideas de todos por favor y escríbanlo para ver todo lo que pensaron y todo lo que hicieron (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de Enero del 2014).

La primera pregunta de detectar cuántos cuadritos tenía la figura 4, tenía un poco de complicación para los alumnos, se pudo notar porque no estaban seguros de qué contestar en la respuesta y conforme pasaba el investigador por los equipos se notaba que los estudiantes lo cuestionaban acerca de si iban bien o no. Es la forma de trabajo que están acostumbrados a hacer, preguntar al profesor si su procedimiento es el correcto o no, esperando una respuesta del profesor que indique como lo tienen que hacer, se puede observar tal acción en la situación problemática 1; El profesor les sugiere que hagan una ecuación que determine la distancia entre las casas de Mary y de Ale y el coche del papá de Mary.

Alumna: ¿Le podemos preguntar algo?
Investigador: Sí, sí pueden.
Alumna: Es que estamos en una complicación porque yo digo que se cuentan así mire, (señala la figura 5) cuenta 5 en vertical y después 5 en horizontal repitiendo un cuadro que tienen en común las de posición vertical y las de horizontal. ¿Pero si sólo lo cuento una vez son 9? ¿Se puede quedar sin que se vuelva a sumar ése?
Investigador: Pues, ¿ése está dos veces?
Mirna: Es lo que yo les digo porque ¿para qué lo tenemos que contar dos veces?

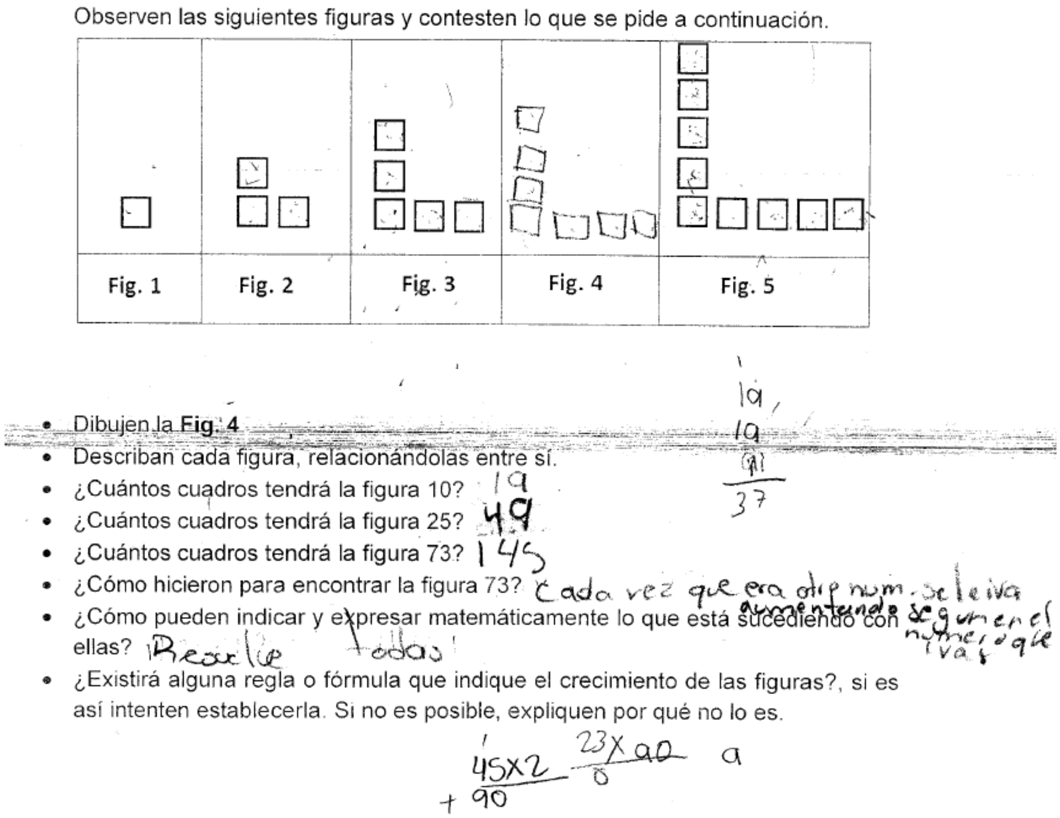
Investigador: entonces así como está diciendo usted, ¿aquí son dos? (señalando la figura 1).
Alumna: No, es uno.
Investigador: Entonces lo vamos a contar sólo una vez, ¿para qué lo quiere sumar dos veces?
Borran el dibujo que tenían, que sí era el correcto, y el investigador les pregunta.
Investigador: ¿Por qué lo borra?
Mirna: Porque está mal, porque son ocho y tienen que ser siete.
Investigador: ¿Son ocho? Mirna cuenta los cuadros que tenía dibujados y dice.
Mirna: Ah no, sí son siete… (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de Enero del 2014).

A pesar de que no se les daban respuestas concisas que esperaban los estudiantes del profesor seguían contestando las preguntas de la manera en que ellos creían que era correcta, algunas no pensadas en el diseño de las situaciones problemáticas porque los estudiantes tuvieron otras ideas que no estaban contempladas en el análisis *a priori*, pero la intención era guiar a los estudiantes para que contestaran correctamente.

En el siguiente fragmento de videograbación podemos detectar distintas formas que pensaban los estudiantes para contestar las situaciones problemáticas; en este caso se distingue que sólo un equipo tiene bien la respuesta general para todas las figuras, porque el equipo de Manuel multiplicó el número de cuadros de la figura 5 (9 cuadros) por 10, para tener el valor de cuadros de la figura 50 que según ellos era 90 cuadros y después lo dividieron entre 2 para decir que la figura 25 tendrá 45 cuadros. Su razonamiento era válido; sin embargo, no era correcto, pero a partir de una lógica que tienen acerca del incremento y de contemplar que crece dos el número de cuadros en cada figura, pensaron que incrementaba el doble y que era válido multiplicarlo; es decir, simplificaron lo que hacían otros, ellos no sumaron cuadro por cuadro, sino que multiplicaron para llegar más rápido al resultado y después lo dividieron.

Investigador: ¿Cómo van niños?, ¿en cuál van?
Alumnos: En la 7.
Investigador: ¿Qué les pregunta la 7?
Alumno: ¿Cómo pueden expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?
Investigador: Ah, y ¿cómo pueden?
Alumna: Multiplicando (nadie le hizo caso).
Investigador: a ver, usted dígales que está haciendo, ¿multiplicando o sumando?
Alumna: Multiplicando.
Investigador: Pues lo que está haciendo, expréselo así. Primero tienen que ver qué necesitaron para saber el número de cuadritos que ocupaba cada figura.
Felipe: Contar éstas (señalando las figuras en la hoja de trabajo).
Investigador: Sí, pero ¿para contar esas que tuvieron que hacer sumar, multiplicar, dividir o qué? ¿Raíces cuadradas?
¡Profe!… gritan los integrantes de otro equipo.

Investigador: Voy, piénsenle que van a poner eh.
Le hablaba el equipo de Manuel para decirle que ya había acabado.
Investigador: A ver enséñenme sus respuestas.
Manuel: A ver, la uno aquí está (enseñó la figura 4 con siete cuadros) dice dibuja la figura 4 y la hicimos así porque tiene que ser mayor que éste (señalando la tercera figura) y menor que éste (señalando la quinta figura), luego… la 2, va a aumentar siguiendo su secuencia cada vez más.
Investigador: ¿Cuánto va aumentando?
Alumnos: Dos.
Investigador: Pues escriba eso.
Manuel: Sí de dos en dos (se pone a escribirlo en el cuaderno), luego la tres, le pusimos pues como nada más lo sumábamos le pusimos que 18.
Investigador: ¿Seguro que 18?
Manuel: Sí
Investigador: A ver ¿por qué?
Manuel: No, estamos mal, es que aquí tiene que ir lo doble ¿no? Lo que hicimos en la 5 (le dice a sus compañeros).
Investigador: ¿Qué hicieron en la 5?
Manuel: Hicimos una suma $90 + 23$.
Investigador: ¿Ese 90 que significa?
Manuel: Es que era 90 porque multiplicamos la del 10, es que como la del 10 eran 45 de 25 y lo multiplicamos.
Investigador: Pues… a mí no me convencen ¿Cómo que la del 10 y luego la del 25 allí mismo? Sea más específico en sus respuestas, escriban por qué 18.
Manuel: Pues ya le dije.
Investigador: Pero escríbanlo, y ya vemos si es válido o no es válido el resultado, lo que ustedes contesten y lo que ustedes crean eso escriban (Fragmento de videograbación de clase del 15 de enero del 2014).



Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

- Dibujen la **Fig. 4**
- Describan cada figura, relacionándolas entre sí.
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10? 19
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25? 49
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73? 145
- ¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73? Cada vez que era otro num. se le iva aumentando según el número que iva
- ¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas? Resolvie todos
- ¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

Imagen 22. Respuestas del equipo de Manuel

En otro equipo se detectó que hicieron algo similar a lo que hizo Manuel, sólo que ellos sumaron el número de cuadros de las figuras, pensaban que el número de cuadros de la figura 10 iba a ser igual al número de cuadros de la figura 5 sumado dos veces. Aunque una jovencita no estaba del todo convencida, y eso, junto con las preguntas realizadas por el investigador, dio pauta a que buscaran un mejor razonamiento para buscar una solución válida.

Investigador: ¿Cómo van?
Alumnos: Pues ya lo tenemos.
Investigador: ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura 10?
Alumnos: 18.
Investigador: ¿Seguros?
Nohemí: No, 19.
Investigador: ¿Segura?
Nohemí: No, si es 18 porque la figura 5 tiene 9 cuadros y si se multiplica por 2 entonces la figura 10 serían 18.
Investigador: Entonces si son 18, la figura 9 ¿cuántas tendrá pues?
Nohemí: 16.
Investigador: ¿Por qué 16?

Nohemí: Porque si de 10 son 18, se le restan 2
Investigador: Bueno, entonces ¿la figura 8?
Nohemí: Serían 14.
Investigador: Si tiene 14, ¿cuántos tiene que tener la figura 4?
Nohemí: Pues 7.
Investigador: ¿Segura?
Nohemí: Cuenta los cuadros en la figura y dice, Sí.
Investigador: ¿Cuántos debe de tener la figura 6?
Nohemí: 11.
Investigador: sí tiene 11 ¿cuántos tiene que tener la figura 3?
Nohemí: ¿5?
Investigador: Pues ya no queda, piense bien cuantos tiene que tener la figura 3 y de allí parta para saber cuántos tiene que tener la figura 10, se dirige a otro equipo y pregunta. -¿cuántos tiene las figura 10?
Geraldi: La figura 10, tiene 19 porque es NP por 2 menos 1, NP es el número de posición.
Investigador: ¿Con eso sacaron todo?
Geraldi: Sí, con eso contestamos todo… (Fragmento de la videograbación de clase del 15 de Enero del 2014).

(Podemos percatarnos que los integrantes del tercer equipo ya tienen una forma general de sacar el número de cuadros para cualquier figura que nos pida la situación problemática. Lo que resultó más importante es que ya habían llegado a formular una expresión algebraica en su lenguaje que les permitía resolver el valor de cuadros de cualquier figura).

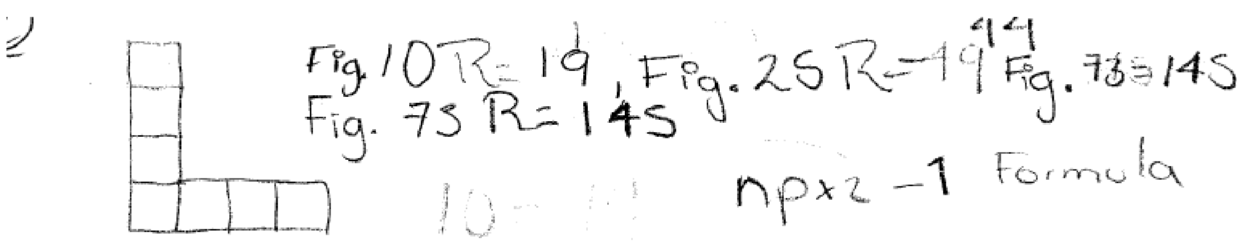
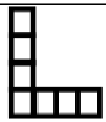
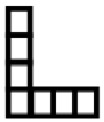
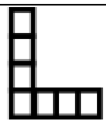
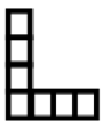
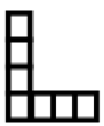
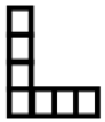
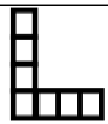
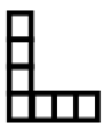
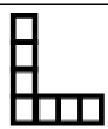
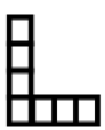


Imagen 23. Respuestas de Geraldi (equipo de Andrea)

Se detectó que la mayoría de los estudiantes ya tenían sus respuestas orientadas a algún resultado, (correcto o incorrecto), pero ya habían concluido por lo que se decidió a continuar con la situación de validación, aunque es preciso señalar que cuando era momento de comenzar la validación se terminó la clase y el investigador dijo que se llevaran de tarea la conclusión de la situación problemática, que en su casa lo pensaran y mañana lo revisaban.

Las respuestas de los estudiantes se han organizado en la siguiente tabla:

Equipo	Situación problemática 2							
	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8
Jorge		Va de 2 en 2 consecutivamente	19	49	145	$2n - 1 = 145$	$1 + 2 + 2 + 2 \ldots$	$\ldots$
Itzel		Cada vez una figura aumenta 2 cuadros	19	48	139	Multiplicamos los cuadritos de la fig. 10 y le sumamos los de la figura 3	$1 + 2 = 3 + 2$ $= 5 + 2 = 7 + 2$ $= 9 + 2 \ldots$	Sí, porque va aumentando 2 cuadritos cada figura. $73a - 1 = 145$ $= \frac{73a}{73} = \frac{145}{73}$
Toño		A cada figura se le suman 2 cuadritos	19	49	139	Sumando 3 veces la figura 25 y restándole 2	$\ldots$	Sí, porque se le van sumando 2
Arantza		Cada figura aumenta 2 cuadros	19	48	139	Multiplique los cuadritos que tiene la figura 10 y sumé los de la figura 3	$1 + 2 = 3 + 2$ $= 5 + 2 = 7 + 2$ $= 9 \ldots$	Sí, porque va aumentando 2 cuadros en cada figura
Ricardo		Son cuadrados, tienen el mismo ángulo y van de 2 en 2	19	49	145	Multiplicando 73×2	Cada vez aumenta más y más	Sí, $2 \times$ *cualquier número*

Manuel		Va a aumentar siguiendo su secuencia cada vez más, de 2 en 2	$Fig5 + Fig5 = 18$ $Fig\ 5 = 9$	$Fig. 25 = 45$ $fig5 \times 10 = 9 \times 10 = fig50 = 90$ $\frac{fig\ 50}{2} = \frac{90}{2} = 45 = fig\ 25$	146	Apoyándonos de las figuras anteriores	…	Sí, siguiendo la secuencia
Alí		Sí, van de dos en dos	18	45	146	Si porque multiplicamos	Multiplicamos	…
Karla		Cada figura va aumentando de 2 en 2 y cada figura va aumentando de cuadritos depende el número de figura que sea	19	49	145 | $2n-1$	Hicimos una tabla con los múltiplos de 2 hasta llegar al número indicado	Ir sumando de 2 en 2	Sí, es sacando los múltiplos de 2 en 2, podemos ir sacando los números que se nos piden
Paulina		…	19	49	145	Cada vez que era otro número se le iba aumentando según el número que iba	Resolver todas	$\frac{45 \times 2}{90}, \frac{23 \times 90}{0}$
Andrea		Van de 2 en 2	19	49	145	Al 25 le falta 48 para 73 luego se multiplica por la sucesividad =2, se multiplican y el resultado del núm. 25 =49 y se suma por el	Otro procedimiento es el 2 porque va de $2\ en\ 2\ -1$, porque parte $2 \times 73 = 146 - 1 = 145$	$np \times 2 - 1$

						$\frac{48\times2}{96}$ y queda $\begin{array}{r}+96\\ 49\\ \hline 145\end{array}$		

Tabla 5. Respuestas de los estudiantes de la situación problemática 2

Con base en los resultados que se muestran en la Tabla 5, podemos darnos cuenta que:

- En la primera pregunta todos los equipos tenían buenas nociones de cómo tiene que ser la figura 4. Ninguno tuvo error ya que sólo pedía dibujarla.
- En la segunda pregunta se puede apreciar que los equipos tienen nociones de que las figuras aumentan dos cuadros cada una, sólo un equipo no respondió esa pregunta.
- En la tercera pregunta comienza a haber disparidades en los resultados, ocho equipos contestaron bien y 2 contestaron que 18, sólo conocemos la forma en que lo efectuó 1.
- En la cuarta pregunta comienza a haber más discrepancia de los resultados, ya existen 3 diferentes, 6 equipos contestaron que 49, lo cual es correcto, 2 contestaron que 48 y otros 2 que 45.
- En la quinta pregunta 5 equipos contestaron que 145, respuesta correcta; 3 equipos que 139 y 2 equipos que 146.
- En la sexta pregunta de los 5 equipos que contestaron correctamente la pregunta anterior, sólo uno recurrió a la forma general $2\mathrm{n}-1$; otro menciona que multiplicando 2×73, aunque al hacer esa multiplicación el resultado no es el correcto; otro equipo que mencionó la forma general en la pregunta anterior en ésta establece que hizo una tabla con los múltiplos del 2 hasta llegar al número indicado, como lo muestra la Figura 21; otro equipo le aumentaba 2 cada vez que aumentaba la figura; otro equipo consideró el número de cuadros de la figura 25, que es 49, argumentando que la falta el número 48 por 2 porque es la sucesividad que lleva, después sumando $49 + 96 = 145$ obteniendo el resultado correcto. Los equipos que tenían 139 de resultado siguieron la estrategia de sumar los cuadros que tenían las figuras anteriores y restarle el número de cuadros que tienen las figuras que se exceden, aunque haciendo eso está mal el resultado de la suma; y los equipos que tienen que 146 sólo mencionan que se apoyaron de las figuras anteriores y que multiplicaron.
- En la séptima pregunta se distingue que 5 equipos tienen una idea acerca de la forma en que crece la sucesión, aunque la expresan en sus términos con series numéricas haciendo mal uso del número igual, 2 equipos no contestaron y los otros 3 equipos siguen hablando de manera general.
- En la octava respuesta sólo un equipo tiene la noción de qué hacer específicamente para cada caso de la regla, estableciendo que $\mathrm{np} \times 2 - 1$ es la forma general para saber cualquier figura, tres equipos no contestaron, 5 equipos siguen diciendo solamente que aumentando de 2 en 2 y otro establece que siguiendo la secuencia.

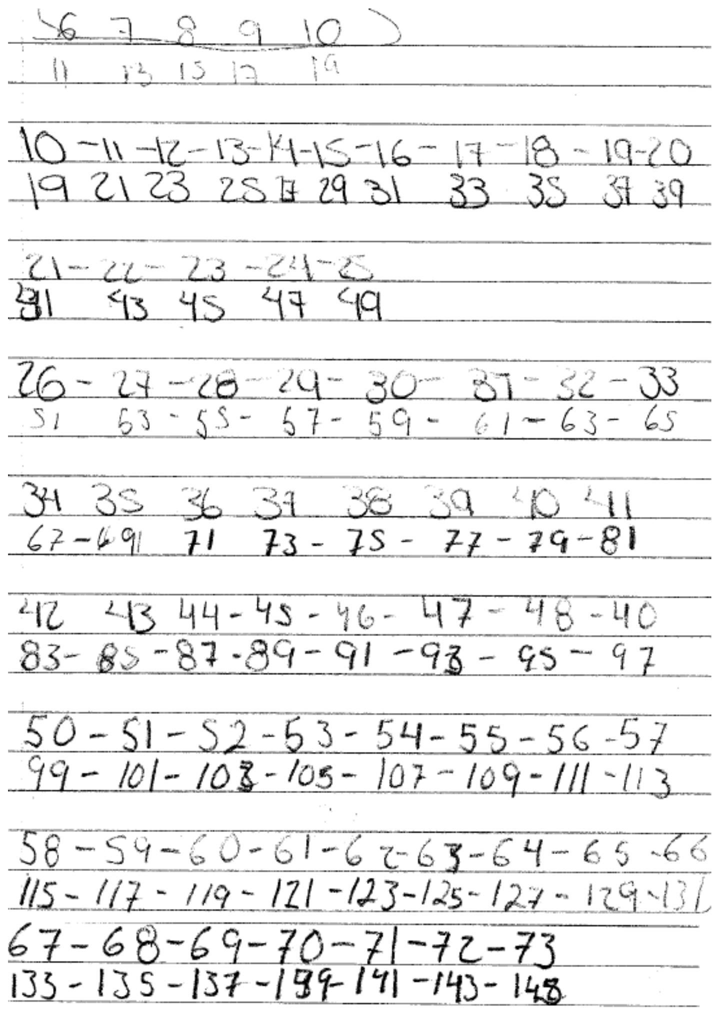


Imagen 24. Tabla con los múltiplos del 2 hecha por el equipo de Karla

A pesar de que la mayoría tenían la noción de cómo incrementaba la sucesión, aún se pueden detectar trabajos en la Tabla 5, en la que los estudiantes dejaron la solución que tenían al principio, como el de Melisa que estableció que la figura 73 tenía 139 cuadritos. Al dejarlo de esa manera nos queda el cuestionamiento ¿comprendieron la noción de incremento, o sólo lo estaban contestando porque así lo indicaba la situación problemática?, porque al final de la institucionalización, como se mostrará en seguida, la mayoría de los estudiantes estaban convencidos de que la regla que genera la sucesión es $2n-1$, aunque con los resultados anteriores puede observarse que los estudiantes aún no han desarrollado un pensamiento algebraico a pesar de que ya estén resolviendo ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas.

Situación de Validación – Institucionalización

En la situación de formulación se detectó que los estudiantes llegaron por diversos métodos a una solución aunque no son comunes los resultados de los equipos, se realizó una validación para llegar a un mismo resultado por parte de todos los estudiantes.

Se optó por considerar conjuntamente la validación junto con la institucionalización porque el tiempo que habíamos destinado para trabajar con el grupo había terminado, entonces se decidió por hacer lo más rápido posible la situación problemática para no retrasar al profesor titular de la programación de su clase.

El investigador comenzó pidiéndole a Melissa que pase a mostrarle a sus compañeros los resultados que obtuvo, ella tenía los resultados que se muestran en la Imagen 25.

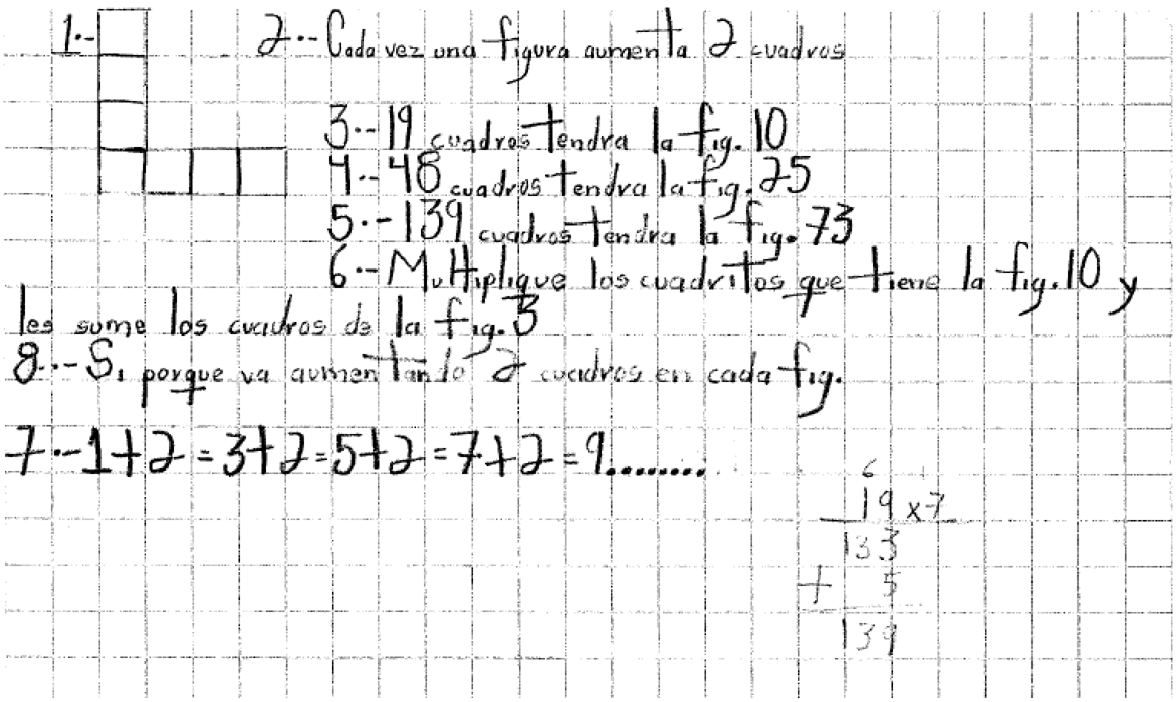

1.-
2.- Cada vez una figura aumenta 2 cuadros
3.- 19 cuadros tendra la fig. 10
4.- 48 cuadros tendra la fig. 25
5.- 139 cuadros tendra la fig. 73
6.- Multiplique los cuadritos que tiene la fig. 10 y les sume los cuadros de la fig. 3
8.- Si porque va aumentando 2 cuadros en cada fig.
7.- 1+2=3+2=5+2=7+2=9.......
19 x 7
133
+ 5
139

Imagen 25. Resultado del equipo de Arantza

Comienza diciendo que la primera tenía siete cuadritos como se muestra en el número 1 de la Imagen 26 y argumenta.

> Melisa: ésa es la 1, dibujó la figura correcta, de la respuesta de la primera me salió 7 porque vimos que en la primera figura está un cuadrito, luego en la segunda figura están 3, luego nos dimos cuenta de que, este… se iban sumando

dos cuadritos a cada figura, entonces como en la segunda eran 3, en la tercera eran 5 y en la cuarta eran 7.

Imagen 26. Resultado de la pregunta 1 expuesto por Melisa

Investigador: ¿Alguien no está de acuerdo con ella? ¿Todos tienen lo mismo?, los alumnos asienten con la cabeza. ¿Si les dijera que todos están mal?
Manuel: No, porque sí está bien, porque cada una va de 2 en 2 y si quedan 7 porque son, 1 y luego 3 y luego 5 y luego 7.
Itzel: Yo digo que sí está bien porque como cada figura aumenta un cuadrito de cada lado, pues si hacemos eso en la figura 4 va a tener 7.
Investigador: está bien, son 7, ahora digan la número 2 (Fragmento de videograbación de clase del 15 de enero del 2014).

Los estudiantes aseguraban que la respuesta era una figura de 7 cuadros, porque habían detectado que iba incrementando cada figura de dos en dos. Estaban bien convencidos que el resultado era la respuesta 1 de la Figura 23 y estaban seguros que ese resultado era correcto porque lo habían reflexionado en los equipos y además el investigador había estado pasando a los equipos a revisar la situación problemática y como nunca les dijo que estaban mal, ellos tuvieron la noción de que su respuesta era correcta, a diferencia de la primer situación problemática los estudiantes se apoyaron con una respuesta en la que todos estaban de acuerdo.

En la segunda respuesta Melisa establece que el resultado es “19 cuadritos”.

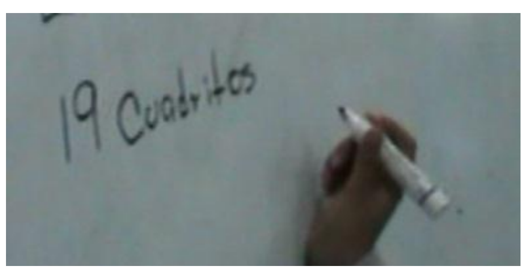


Imagen 27. Resultado de la pregunta 2 expuesto por Melisa

En seguida de escribir lo que se muestra en la Imagen 27 sucedió lo siguiente.

Investigador: Su compañera dice que son 19, ¿ustedes que creen? ¿sí son 19? o que ¿no son 19?
Toño: Son 20.
Investigador: ¿Por qué son 20?
Toño: Porque se van sumando de dos en dos. Itzel interrumpe.
Itzel. Sí, son 20
Investigador: ¿Por qué 20?
Itzel: No, van a ser 19.
Investigador: ¿Por qué 19?
Itzel: Hay profe, pues ya diga usted.
Investigador: Pues mira, dice Toño que 20 y Melisa que 19, ¿cuál creemos?
Alumnos: 19 porque mira así la tenemos todos.
Toño: Sí profe son 19, porque ya lo dibujé y los conté y me salen 19.
Investigador: Bueno, entonces son 19 (Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero del 2014).

El resultado se hizo válido sólo por el comentario del investigador, ya que ninguno de los estudiantes confirmó con algo bien razonado de porque eran 19, entonces los alumnos se dejaron llevar por el contrato didáctico, el profesor es quien tiene el conocimiento verdadero.

Ahora se le pide a Melisa que escriba la respuesta de la pregunta 3 y ella escribe lo siguiente.

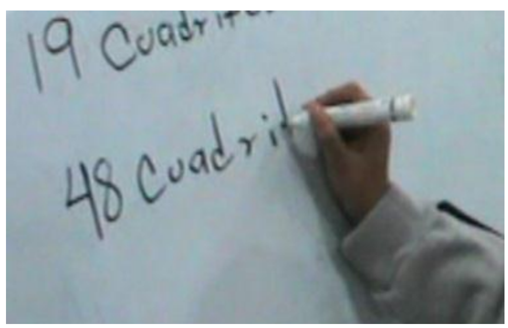


Imagen 28. Resultado de la pregunta 3 expuesto por Melisa

Argumenta que le salió ese resultado porque ellos lo hicieron de uno por uno sumando los números y que el lugar número 25 salía que iba a tener 48 cuadritos. El investigador pregunta que si están de acuerdo con 48, los alumnos no estuvieron de acuerdo con Melisa.

Alumnos: No, algunos decían que tenían 50 y otros que 49.
Investigador: Karla, ¿por qué 49?
Karla: Porque lo fuimos sacando de uno en uno y nos dieron 49.
Investigador: ¿Melisa por qué le salieron 48?
Alondra le intenta explicar porque 49: - mira Melisa, tiene que ser número impar, porque la primera figura es impar y se le suma un número par, entonces siempre va a ser número impar el resultado.

> Melisa: No profe yo ya no quiero pasar, la tengo mal.
> Investigador: Qué importa que estés mal, es el fin de venir a la escuela, equivocarnos para darnos cuenta de nuestros errores. Se dirige a los demás, aunque tengan una idea que es errónea sostengan esa idea porque es suya. Melisa ya está oyendo a sus compañeros pues hay varias opciones, la suya de 48, 49 y 50, ¿cuál le convence más?
> Melisa: 49.
> Investigador: ¿Por qué?
> Melisa: Porque es cierto lo que dice Alondra, en cada figura salen cuadritos impares.
> (Corrige su respuesta del pizarrón y escribe 49) (Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero del 2014).

La mayoría estaba de acuerdo que eran 49, excepto uno que era integrante del equipo de Melisa, decía que podían ser 47 porque si sumaban los cuadritos de la figura 10 dos veces y los cuadros de la figura 5, el resultado iba a ser 47. El investigador preguntó que por qué no lo había discutido con el equipo, pero el niño contestó que apenas le había surgido esa idea. Se cuestionó ante todo el grupo, porque el objetivo de la validación es convencer a todos los estudiantes de que un resultado es válido para todos. Pero la respuesta que le dio una compañera le fue suficiente para captar que no tenía que ser 47.

> Investigador: Niños pongan atención, Leo nos dice que sumando el total de cuadros que tiene cada figura se puede hacer, por ejemplo la figura 10 tiene 19, y la figura 5 tiene 9, entonces es $19 + 19 + 9 = 47$ ¿será cierto eso?
> Alumnos: No.
> Investigador: ¿Por qué no?
> Alondra: Porque no se pueden sumar las figuras, la figura 5 no tiene la mitad de la figura 10, entonces no se puede hacer esa suma, porque si sumamos dos veces la figura 5 que tiene 9, nos va a dar 18 y la figura 10 tiene 19.
> Investigador: ¿Entonces quien está bien?
> Alumnos: Melisa (Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero del 2014).

Ahora estaban de acuerdo que el resultado era 49, se detecta que Alondra tiene potencial para explicar a sus compañeros y convencerlos de que los resultados que ella dice son los correctos, en esta ocasión los argumentos de Alondra fueron suficientes para validar que el resultado tenía que ser 49, les hace ver cuáles características puede cumplir y cuáles no. Alondra ha aceptado la devolución del contrato que se les ha propuesto, y se da cuenta que para validar el conocimiento necesita hacerlo con argumentos sólidos.

En la pregunta cuatro Melisa contestó que la figura 73 tendrá 139 cuadritos.

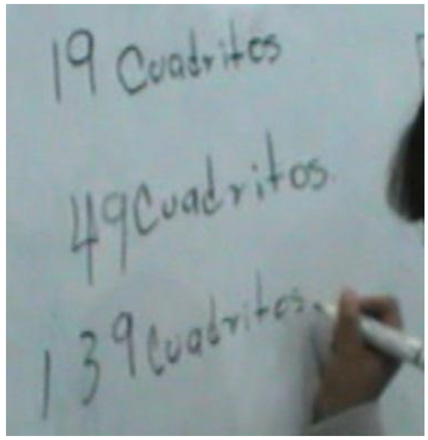


Imagen 29. Resultado de la pregunta 4 expuesto por Melisa

El investigador pregunta a los estudiantes que si ese será el resultado que tienen todos.

Algunos Alumnos: Dicen que 145, pero Melisa escribe en el pizarrón 139.

Investigador: ¿Por qué 139?

Melisa: Porque fuimos haciendo los números de todas la figuras, mientras mis compañeros buscaban otra forma, yo hice eso y me salió 139.

Investigador: ¿Cómo podemos saber si es correcto o incorrecto?

Melisa: Pues comparando con mis compañeros.

Investigador: Pues entonces pregúntales.

Melisa: ¿Está correcto o está incorrecto?

Jaime: Está mal.

Investigador: ¿Por qué está mal?

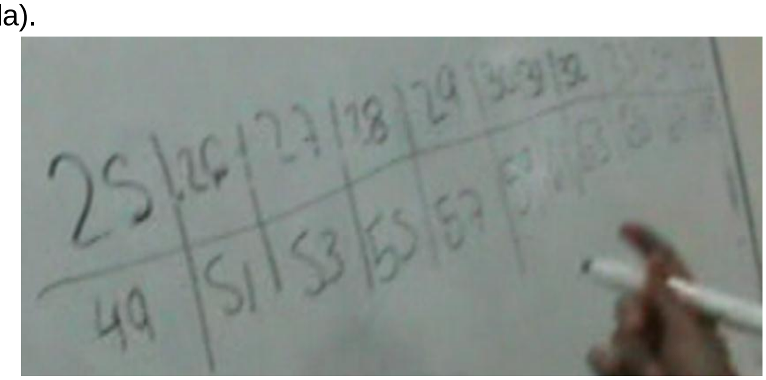
Jaime: Porque son 145.

Estefanía: Yo digo que está mal, porque a mí también me dieron 145.

Investigador: ¿Cómo lo sacaron ustedes?

Estefanía: Hicimos una tabla.

Investigador: ¿Lo pueden poner en el pizarrón? (Pasa Alondra de ese equipo a hacer la tabla).



25	26	27	28	29	30	31	32
49	51	53	55	57	59	61	63

Imagen 30. Tabla hecha por Alondra del equipo de Karla

Investigador: A ver vean, ¿si detectan que va poniendo el número de figura? ¿Así le vas a poner hasta el 73?
Alondra: Sí.
Investigador: Espérate, bueno está bien… fíjense todos su compañera está escribiendo de un número en un número y va a llegar hasta el 73, ¿quién tiene una forma más fácil de hacerlo?
Andrea: ¡Yo!
Investigador: A ver pásele, ¿Alondra y así lo hiciste hasta el 73? (muestra una hoja donde sí lo hizo así), bueno ésa me la van a dar.
Mientras Andrea está escribiendo su proceso, el investigador interrumpe a Alondra y le dice: - fíjense su compañera está escribiendo de uno en uno y sumando los valores de 2 en 2, sí es válido, pero si yo les preguntara ¿cuántos cuadros tendrá la figura 183? ¿Qué harían?, ¿Todo hasta la 183?
Karla: Pues sí, porque es una forma de saberlo.
Investigador: Es una forma, pero sería muy tardado ¿no? Si les preguntara el número de cuadros de la figura 1000.
Karla: Eh, se multiplica por 2 y se resta 1.
Investigador: ¡Correcto!, a ver, fíjense su compañera Andrea les va a explicar lo que hizo.
Andrea: Mi equipo y yo multiplicamos el número de posición por dos y le restamos uno porque así el resultado nos da un número impar, y nos dio de resultado 145. como lo muestra la Imagen 31 (fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero de 2014).

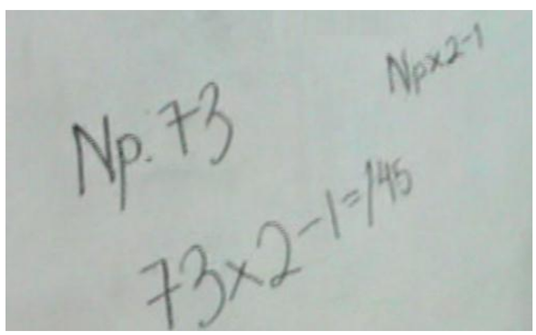


Imagen 31. Resultado de la pregunta 4 expuesto por Andrea

Escribiendo lo anterior en el pizarrón, estableciendo que $N.P. \times 2 - 1 = 145$ sería la forma de llegar al resultado. El investigador cuestiona acerca de si todos tienen claro lo que se tiene que hacer.

Iván: Pues sí está bien, pero ¿por qué le resta 1?
Investigador: Usted piense, ¿por qué será menos 1? (Iván se queda pensando). Miren si utilizamos lo que escribió Andrea, la figura 1. ¿Cuántos cuadritos tendrá?
Alumnos: 1.
Investigador: ¿Cuál va a ser el número de posición?

Arantza: Uno.
Investigador: ¿Y que se tiene que hacer?
Leo: Se multiplica por 2 y se le resta 1.
Investigador: ¿La figura 5 cuántos tendrá?
Iván: Pues 5 por 2 menos uno es 9.
Investigador: Bien, ¿la figura 10 cuántos tendrá?
Karla: 10 por 2, 20, menos uno 19.
Investigador: ¿Si cumple?
Alumnos: Sí.
Investigador: ¿Cómo haremos la figura 73?
Karla: 73 por 2 menos 1 es 145.
Investigador: Entonces ahora díganme cuantos tendrá la figura 1000
Arantza: 1000 por 2 menos uno es 1999 (Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero de 2014).

El investigador sintió la necesidad de tomar el papel de profesor y terminó explicando el proceso que Karla aún no concluía, dando por válido el resultado y proponiendo ejemplos para figuras con mayor número de cuadros, finalmente pregunta que si entonces se va a hacer como dice Andrea y ella los estableció como dice en la figura 28. ¿Siempre va a ser igual a 145?, enseguida de esa pregunta les dice que ellos ya han trabajado con ecuaciones, que lo intenten establecer con una ecuación, Alondra se ofrece a pasar al pizarrón.

Alondra: Yo sé cómo.
Investigador: A ver, pásele y establézcala en el pizarrón.
Alondra escribe: $n \times 2 - 1 = 145$.
Investigador: ¿Siempre va a ser igual a 145?
Alondra: Sí, porque vale 73.
Karla: No, porque el profe nos ha dicho que en lugar del signo $\times$ pongamos un paréntesis, entonces va a quedar así, (pasa y escribe en la pizarra $n(\times)2 - 1 = 145$).

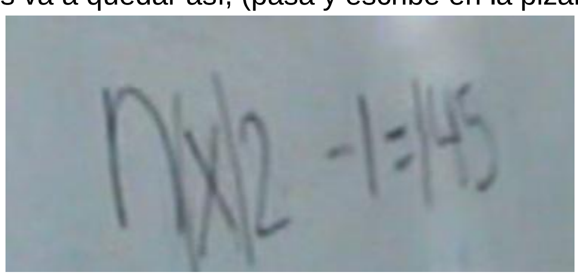


Imagen 32. Expresión general para saber el número de cuadros de cada figura

Investigador: ¿Siempre va a ser igual a 145?
Karla: No, pero ya sabiendo el número de figura sabremos a qué es igual. Pero mientras así lo podemos dejar.
Investigador: A ver, vamos a situarnos, ¿tienen dudas acerca de la situación problemática anterior?

Alumnos: No, ya supimos que la forma general va a ser $n(\times)2-1=145$.
Investigador: Pero por comodidad lo podemos escribir así: escribe en el Pizarrón $2n-1$. Sin dejarlo igual a algo, porque no siempre va a ser 145, sino como dice Karla sabiendo el número de figura sabremos a que es igual.
(Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero de 2014).

Imagen 33. Forma general de representar la sucesión

Los estudiantes comprendieron la procedencia de esa forma general de representar el número de cuadros de cada figura, al menos fue lo que se pensó cuando todos ponían atención a lo que se realizaba en el pizarrón.

Situación problemática 3. Relación Funcional

Situación de Acción

La tercera situación problemática estaba pensada para que durara un módulo completo, debido a su dificultad, se intentó hacerlo un poco complejo porque señala Barallobres (2000) que cuando se trabaja con una sola incógnita el problema será compatible con métodos meramente aritméticos y sugiere como necesario complicar los problemas, sin embargo las otras situaciones problemáticas se tardaron más de lo previsto, así que el tiempo que quedaba de esta sesión se comenzó a trabajar en la tercera situación problemática.

El investigador comenzó repartiendo las hojas de trabajo a los distintos equipos, cuando terminó leyó la situación problemática ante todo el grupo y preguntó: ¿alguien tiene dudas acerca de lo que tienen que hacer?, esperando que si alguien tenía dudas pudiera aclararlas; los estudiantes contestaron que tenían que señalar los metros que recorre la tortuga en cierto tiempo.

El investigador les pide que contesten la situación problemática y se dispone a recoger las anteriores que han resuelto los estudiantes, pero lo interrumpen diciendo:

Alumnos: Es que ésa está más difícil.
Investigador: Bueno miren, en la playa estábamos tomando el sol, pero como nos aburrimos pues se nos ocurrió tomarle el tiempo que tardaba una tortuga caminando y comenzamos a contar que en 15 minutos recorrió 10 metros, y los próximos 15 minutos recorrió 8 metros y a los otros 15 recorrió 6 y después de

ese tiempo nos comenzamos a hacer preguntas para predecir la distancia o el trayecto de la tortuga, ¿si continua caminando durante los próximos 30 minutos, cuántos metros recorrerá los próximos minutos?
Toño: Pues yo creo que 18 minutos.
Arantza: No tienen que ser minutos, tienen que ser los metros.
Investigador: ¿Cómo cuántos metros?
Algunos Alumnos gritan que 2 y otros que 4.
Arantza: Yo pienso que 6 porque en 15 va a recorrer 4 y en los otros 15 recorre 2, en total van a ser 6.
Investigador: Toño usted ¿por qué piensa que van a ser 18 minutos?
Toño: Porque si tomamos el tiempo, pues el resultado va a ser algún tiempo.
Arantza: No Toño mira, la pregunta está muy clara, dice cuántos metros ¿no?
Toño: Si.
Arantza: Pues ahí está, ¿cuántos metros recorre en 30 minutos? Y ahí te dice que tiene que ser en metros.
Los Alumnos comienzan a aplaudir en forma de burla.
Investigador: Espérense, cuando ven una obra de teatro no se aplaude hasta que se acaba. Entonces respeten y ya cuando tengamos el problema resuelto aplaudimos, respeten por favor. Bueno ya tienen la idea de que es lo que pide. ¿Creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente?
Alumnos: Sí.
Investigador: Bueno ya lo contestarán. ¿Por qué creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente?
América: Porque se cansa
(Fragmento de la videograbación de clase del 16 de Enero de 2014).

Situación de Formulación

Se detectó que los estudiantes no tenían bien definida la manera de contestar el problema, por lo que se optó por llevarlos juntos a la resolución de la situación problemática, preguntando lo que cada cuestión pedía para resolverla. En esta ocasión la devolución no fue la deseada y por tal motivo se decidió llevar juntos la formulación para aportar ideas de todos los equipos esperando que entre todos se facilitara la resolución de dicha situación problemática.

Mientras algunos estudiantes observaban la hoja de trabajo otros continuaron con la idea de que la tortuga se cansaba y se iba a detener completamente; el investigador para intentar crear una devolución de la situación problemática en los estudiantes pregunta que cuándo se detendrá completamente la tortuga y los estudiantes contestaron:

Itzel: Cuando disminuye de metros a centímetros.
Investigador: ¿Y cuándo será eso?
Iván: Pues cada 15 minutos disminuye 2 metros, entonces si va a llegar el momento en que se detenga.

> Arantza: Es que es como un juego de azar, no sabemos cuándo se va a detener la tortuga y no sabemos qué va a pasar a lo mejor se regresa y se vuelve a repetir toda la historia.
> Andrea: No es como un juego de azar porque en los datos dice que va disminuyendo entonces no puede ser al azar, bueno dice que disminuye, entonces se cansa y ya.
> Arantza: Pero no sabes si después de que descansa se regresa o se va para otro lado.
> Investigador: Entonces veamos, los datos no son de azar porque va disminuyendo de 2 en 2, pero tiene razón Arantza después de que se detenga no sabemos qué va a pasar.

Los estudiantes sabían que tenían que detectar cuándo se detenía totalmente la tortuga, pero no estaban muy convencidos de las características del problema; es decir, no tenían idea de qué iba a suceder después y se notaba que no tenían bien definido qué hacer después de que se detuviera completamente, aunque eso no era importante, sino detectar el recorrido que hizo la tortuga para representarlo de una forma tabular.

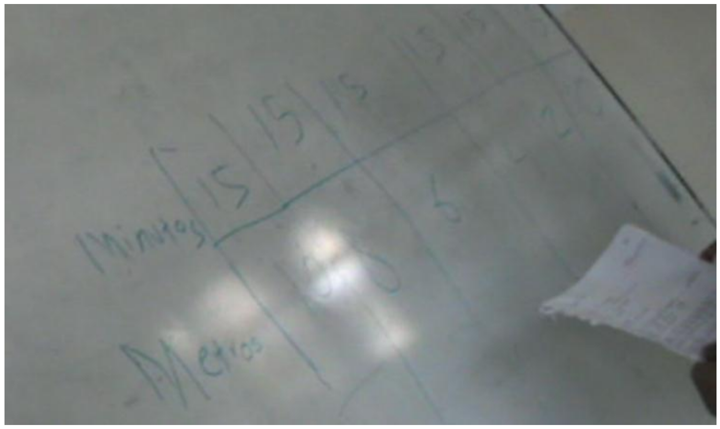
Un estudiante interrumpió la clase diciendo que dejara salir a acomodar sus puestos de vendimia a los de la cooperativa, el investigador lo consultó con el profesor titular, el cual comentó:

> Maestro: Es que a los alumnos esta semana les toca la cooperativa y tienen que salir para acomodar los puestos para que estén listos cuando comience el receso.
> Investigador: pues usted dígame profe, si me dice que se vayan pues que se vayan.
> Maestro: Sí, siempre los dejo salir 25 minutos antes para que acomoden todo bien.
> Investigador: bueno, los que venden en la cooperativa vayan a acomodar sus puestos, los demás aquí nos quedamos trabajando (salen aproximadamente 20 alumnos); ahora, ya tenemos noción de las primeras 2, la tercera nos dice, considerando que la tortuga llevaba 60 minutos caminando ¿cuántos metros creen que recorría cuando comenzó a caminar? (Fragmento de la videograbación de clase del 16 de enero de 2014).

Se fue del salón alrededor de la mitad de los integrantes del grupo, pero se continuó trabajando con los 19 estudiantes que se habían quedado. Al principio hubo un poco de alboroto porque querían que el investigador dejara salir a todo el grupo. Pero les pidió que contestaran esta situación problemática y después ya se iban porque aún no llevaban nada de lo pedido para este problema.

Se continuó con la pregunta que se había formulado anteriormente ¿cuántos metros creen que recorría cuando comenzó a caminar?, los estudiantes se propusieron contestar e hicieron lo siguiente:

Itzel: 28
Investigador: ¿Por qué 28?
Itzel: Pues esos creo.
Investigador: Bueno, pues justifiquen sus respuestas como ustedes puedan, contéstenlo.
(Toño pasa al pizarrón a hacer una tabla)



Minutos	15	15	15	15	15	15
Metros	10	8	6	4	2	0

Imagen 34. Tabla hecha por Toño

Toño: ¿Así puede quedar o no?
Investigador: Sí, puede ser.
Maestro: Como que sí captan la idea, pero no pueden formalizar. (le dijo en voz baja al investigador)
Investigador: Pues esperemos que comprendan y puedan establecer la relación de que disminuye dos metros cada 15 minutos todos y que si es tiempo antes detecten que se puede sumar.
Arantza: Ya encontré cómo, mire podemos poner como $\times$, que es cualquier número menos 2, como el 10 menos 2, luego ya sea el 8 menos 2 y el 6 y así.
Investigador: ¿No influirá en nada el tiempo?
Arantza: De verdad, ah ya sé cómo… se va a su lugar.
Investigador: Piensen cómo representarlo matemáticamente. ¿Toño lo representó matemáticamente?
Arantza: Pues matemáticamente se tiene que representar con una ecuación. Una forma que dé mucha información y se pueda escribir más fácil.
Investigador: ¿Y lo que hizo Toño no es matemático?
Arantza: Sí, pero…
Toño: Sí es porque tiene números y se van restando 2.

Investigador: Bueno si tiene números y se le van restando 2, pero si Arantza dice que con una ecuación, ¿se podrá representar con una ecuación o algo parecido?
Maestro: (Dice en voz baja al investigador) profe considero que es mejor que les demos oportunidad de salir porque la mitad del grupo no va a saber qué hicieron, podemos continuar mañana, que al cabo ya sólo faltan 10 minutos.
Investigador: Pues usted diga, es su grupo.
Maestro: Sí está mejor, jóvenes pueden salir a receso, contesten esto en su casa y mañana continuamos.

Al día siguiente no pudo darse la clase porque hubo reunión de padres de familia para la firma de boletas de calificaciones bimestrales, la situación problemática quedó inconclusa, aunque se pidió lo que llevaran de las respuestas y sólo se pudo rescatar lo siguiente:

Equipo	Situación problemática 3				
	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5
Jorge	6 metros en 30 minutos				
Itzel	10 - 15 8 - 15 6 - 15 +4 2 = 30 A 2 0 Haciendo énfasis en +4 2 = 30				
Toño	18 minutos	Sí, porque se cansaría y se quedaría en el mismo lugar	28 metros	15 | 10 15 | 8 15 | 6 15 | 4 15 | 2 15 | 0	Sí, haciendo una tabla con los minutos y metros que caminan
Arantza	6				
Ricardo					
Manuel					
Alí					
Karla					
Paulina					
Andrea					

Tabla 6. Respuestas de los estudiantes de la situación problemática 3

Con base en la Tabla 6 podemos percatarnos que sólo pocos alumnos comenzaron a contestar la situación problemática, no se tenían contemplados los distractores externos de las clases y no se consideró que los estudiantes se tardaran tanto en resolver las anteriores, pero con lo que se tiene, puede rescatarse que:

- La respuesta de la pregunta 1 sólo la tienen cuatro equipos, tres de ellos contestaron que 6 metros en 30 minutos, otro contestó que 18 minutos.
- La respuesta de la pregunta 2 sólo un equipo la contestó y estableció que sí, porque se cansaría y se quedaría en el mismo lugar.
- La respuesta de la pregunta 3 sólo un equipo la tiene y contestó que 28 metros.
- La respuesta de la pregunta 4 un equipo tiene una tabla que en una columna está 15 repetidas veces porque era el tiempo que tardaba en variar y del otro lado tiene los números disminuyendo de 2 en 2 a partir del 10, los demás no tienen respuesta.
- La respuesta de la pregunta 5 igual que las anteriores sólo un equipo la hizo, estableciendo que sí se puede haciendo una tabla con los minutos y los metros que caminan.

Con las respuestas que dieron algunos estudiantes se puede observar que no quedó del todo claro o que no le prestaron importancia a la situación problemática porque ya era tiempo de que salieran a receso, sin embargo se pudo rescatar información por lo menos de un equipo.

Situación de Validación – Institucionalización

En esta ocasión no hubo situación de validación ni de institucionalización porque al llegar al día siguiente a la escuela, están llegando los padres de familia ya que se tenía contemplada para ese día la junta bimestral de firma de boletas de calificaciones, por lo tanto no hubo clase el viernes, el investigador llegó al grupo y le comentaron que no iba a haber clase, entonces lo que decidió hacer fue pedir las situaciones problemáticas restantes agradecerle al profesor y al grupo por haberle permitido trabajar con ellos y disponer de su tiempo.

Solamente un equipo entregó las respuestas de la situación problemática 3, algunos otros comenzaban a contestarla como continuación de la 2 y otros no mostraban evidencia de que la hubieran comenzado a contestar, se tiene en cuenta que la sesión del 16 de enero se les dijo que la concluirían al día siguiente, pero como no hubo clase, quedó incompleta.

3.6 Fase de validación de la ingeniería didáctica

En esta fase se hace la confrontación entre lo que se esperaba que pasara contra lo que en realidad sucedió (del análisis *a priori* contra el análisis *a posteriori*), con la finalidad de obtener información real de cómo la secuencia afecta la formación de los estudiantes en un nuevo estilo de trabajo, qué fallos y aciertos hubo, y otras características que permitan enriquecer el análisis de las situaciones problemáticas.

3.6.1 Situaciones problemáticas

Situación problemática 1. Incógnita específica

Situación de acción

En esta situación primeramente se tenía que organizar al grupo en 10 equipos de trabajo, se hizo cuando comenzó la primera clase, se leyó la situación problemática ante todo el grupo por parte del profesor y comenzaron a contestarla, sólo dos equipos tardaron un poco en atender, después todos tuvieron la idea de lo que tenían qué hacer para resolverla, la devolución esperada de que los equipos se involucraran en contestarla funcionó.

Las variables didácticas consideradas para esta situación problemáticas no funcionaron del todo, pero sí influyeron en la respuesta de algunos equipos; por ejemplo, causaron confusión con un equipo como se muestra en el análisis *a posteriori*, al restar $61 - 17$ el resultado que obtuvieron fue igual a 54, sin embargo es necesario comentar que el investigador, quien había tomado el papel del profesor, sacó de ese error casi de inmediato a aquel equipo, no dando oportunidad a que lo detectaran por su cuenta. La de considerar el norte y el sur en una recta numérica funcionó completamente, los estudiantes que representaban gráficamente lo hacían de tal manera, mientras que los que lo representaban numéricamente, también contemplaban una recta numérica para poder efectuar la operación correspondiente.

El profesor titular fue quien repartió las situaciones problemáticas y dio las indicaciones como se tenía esperado que se hicieran en la planeación de la secuencia.

Situación de Formulación

En la situación de formulación ya los estudiantes se encontraban adentrados en los cuestionamientos planteados en la situación problemática, pensando y desarrollando métodos para contestarla, que para ellos eran válidos. La idea que tenían era la de conocer la distancia entre la casa de Ale y la casa de Mary considerando la distancia del carro del papá de Mary.

El papel del profesor se vio afectado por el contrato didáctico cotidiano que se da en la secundaria, porque al estar pasando por los equipos para comprobar que estuvieran contestando la situación problemática, sugería métodos o formas de contestarla, y los alumnos atendiendo a ese contrato, intentaban hacer lo que les sugerían aunque para ellos no tuviera significado.

El investigador al detectar que el profesor estaba haciendo tal acción, decidió tomar el papel del profesor para él no darles las respuestas como sugerencias de que hicieran, sino intentar plantearles preguntas que les causaran reflexionar acerca de lo que estaban haciendo. Aquí se percibe otra modificación que tuvo el análisis *a priori*, aunque cabe destacar que al principio el investigador también influía en las respuestas de los estudiantes diciéndoles que estaba bien o que estaban mal.

La forma en que se tenía pensada la dinámica de la clase en el análisis *a priori* se modificó completamente, ayudando a los estudiantes en el momento de la formulación, aunque es preciso decir que la ayuda no era de forma directa como suele hacerse; sino que, como se muestra en el análisis *a posteriori*, fue lanzando preguntas que causaban confusión a los estudiantes en sus respuestas para que razonaran si era cierta o falsa.

Otra cosa que no se tenía prevista en el análisis *a priori* fue la respuesta que tuvieron la mayoría de los estudiantes, concluían que para conocer las distancias entre las casas tenían que sumar la distancia del carro del papá de Mary a la casa de Ale con la distancia de la casa de Mary al carro de su papá, considerando que la casa de Mary se encontraba más al sur que el carro del papá. Solamente dos equipos tuvieron nociones de la respuesta correcta, uno lo leyó correctamente y otro tuvo ayuda del investigador cuando les cuestionó que porqué era una suma y comprendieron que tenía que ser una resta; de las respuestas esperadas sólo un equipo fue capaz de plantearla, otro tuvo ayuda del investigador y ocho equipos siguieron una estrategia errónea.

Es preciso señalar que las respuestas que tuvieron la mayoría de los estudiantes no se consideraron en la situación de formulación como una posible respuesta, indicando que para ésta faltó también un análisis más profundo, delimitando específicamente qué era lo que se pretendía que conocieran los estudiantes.

Situación de Validación

Al comenzar con esta situación el profesor les comentó que no tuvieran temor a equivocarse, con el hecho de haberlo intentado ya tenía mucho valor, acción que animó a los estudiantes a pasar a exponer sus respuesta ante sus compañeros, fueron tres equipos los que decidieron pasar y se optó por aventar al aire una moneda para que uno pasara a exponer las respuestas. Ya tenían contestado lo que se pedía en las hojas, al exponerlo de la forma en que se había previsto, expresaron que con una suma se iba a resolver tal situación problemática.

Se pudo identificar que los estudiantes estaban explicando sólo al profesor, como lo hacen regularmente en las clases, el investigador pidió que explicara para todo el grupo y en seguida que validara sus respuestas porque no era suficiente con sólo exponerla. La forma de justificarla para el estudiante fue preguntar quién la tenía como él, al ver que era la mayoría, para ellos fue valido el conocimiento que habían generado. El investigador no se quedó conforme, pidió a un equipo que tenía bien la respuesta que la expusiera, pero terminó la clase; rompió con el contrato didáctico que tiene el grupo donde se experimentó la secuencia didáctica, pidiendo que validaran su respuesta ante todos y se detectó resistencia por parte de los estudiantes al intentar validar con las opiniones de los demás estudiantes y no con procedimientos que elaboraron.

Situación de Validación – Institucionalización

El investigador comenzó a exponer la situación problemática para intentar cambiar la idea que se había generado en los estudiantes, al responder algunos ya habían cambiado su noción de que era una resta. Por medio de esta situación problemática, que no resultó como se tenía prevista, se consideró que las situaciones de validación e institucionalización se diseñaron de manera superficial, sin contemplar preguntas concisas para hacerles a los estudiantes en caso de que sus respuestas no fueran las indicadas.

Por medio de los análisis *a priori* y *a posteriori* se puede detectar que la situación problemática de salió un poco de control, debido a que hubo un análisis muy escueto, ya que sólo se consideraron algunas respuestas correctas que pudieran desarrollar los estudiantes en distintos campos conceptuales, pensando que no habría quienes contestarían de manera errónea; es preciso al considerar una situación problemática prever la mayor cantidad de formulaciones que pudieran suceder y otros aspectos que puedan afectar a su comprensión y solución como: la interpretación de la lectura y el contrato didáctico que utilizan en la resolución de situaciones problemáticas.

La intención de considerar en esta situación problemática la literal como incógnita específica, no pudo apreciarse debido a que la situación problemática diseñada no iba más allá de la Aritmética, faltaron algunas características que hubieran hecho al número desconocido variar y representarlo con una literal; el tiempo considerado para resolverla se extendió porque se dejó a los estudiantes trabajar a un ritmo lento esperando que obtuvieran mejores formulaciones en sus respuestas, pero se detectó que seguían trabajando en el mismo enfoque con el que comenzaron a razonar.

Situación problemática 2. Número generalizado

Situación de Acción

La situación problemática comenzó bastante tiempo después del que se tenía considerado para su ejecución, enseguida se repartieron las hojas de trabajo a los estudiantes, en esta ocasión no se les leyó, pero así se tenía considerado desde el análisis *a priori;* esta acción fue adecuada, porque se anticipó que los estudiantes se involucrarían en la situación problemática sin leerles la actividad y fue lo que sucedió.

El investigador siguió con su dinámica de hacer el papel del profesor, indicando las instrucciones de lo que tenían que hacer. El profesor del grupo ayudaba al investigador verificando que los equipos de trabajo mantuvieran la atención en la situación problemática.

Aunque no se marca en el análisis *a priori*, el investigador cuestionaba a los estudiantes con la intención de que ellos aceptaran la devolución de la situación problemática, se logró lo esperado. En esta ocasión se detectó que las preguntas fomentaban el razonamiento y el trabajo en equipo por parte de los estudiantes.

Las variables didácticas en esta situación problemática resultaron adecuadas porque permitieron que los estudiantes generaran ideas adecuadas para la resolución de ésta; el acomodo de los cuadros permitió que detectaran el incremento de una manera rápida y que tuvieran la noción de que aumentaba dos cuadros en cada figura con respecto a la anterior.

Situación de Formulación

En la situación problemática los estudiantes se involucraron de una manera positiva para su resolución, el investigador y el profesor pasaban a los equipos de trabajo para detectar qué formulaciones hacían los estudiantes, en algunos equipos estaban todos de acuerdo y en otros discutían acerca de la solución que ellos creían la indicada.

Se pudo observar que las variables didácticas consideradas para esta situación problemática crearon confusión en algunos equipos, tenían claro el dibujo que iba a tener la figura cuatro debido a que la forma de hacer la figura era simple, pero cuando tenían que escribir el número de cuadros se preguntaban si era 7 u 8.

Las preguntas propiciaron que los estudiantes fueran de lo básico a lo abstracto; es decir, comenzaban dibujando la figura 4 y estableciendo el número de cuadros que tiene, algunos discrepaban en su respuesta como se mencionó en el párrafo anterior, en seguida se pregunta la relación entre las figuras. Los estudiantes concluyeron que incrementaba el número de cuadros de dos en dos, en seguida, cuando ya sabían la relación de la figuras, intentaban saber el número de cuadros de la figura 10. Como ya tenían la noción de que incrementaban de dos en dos, algunos equipos multiplicaron el número de figura por dos, otros sumaron la figura 5 dos veces porque consideraban que así era, ya que el incremento era el mismo en cada figura, otros dibujaron una tabla que incrementaba de dos en dos el número de cuadros y otro equipo más buscó la manera de hacerlo mediante una operación.

Se podía observar que los estudiantes utilizaban diferentes caminos para llegar a su solución, los contemplados en el análisis *a priori* si se pudieron detectar en seis equipos; sin embargo, los cuatro restantes no eran del todo correctos, aunque en su lógica y su razonamiento era válido para concluir la situación problemática. Es necesario al hacer un análisis de alguna secuencia didáctica considerar todos los aspectos que puedan surgir o pensar los estudiantes, no sólo las ideas correctas; es decir, buscar formas en que se pueden equivocar los estudiantes en la resolución de las situaciones problemáticas.

Situación de Validación-Institucionalización

Para esta situación se pasó a una alumna a que explicara sus respuestas y dijera porqué la había considerado así, la idea era que ella sola comenzara a explicar lo que había contestado, acción que no realizó porque en su contrato didáctico no explican a los compañeros, sino al profesor, así que el investigador tomó el papel de monitor y estuvo preguntando una por una las preguntas que consideraba la situación problemática y fomentando que se crearan desacuerdos, ya que no todos tenían los mismos resultados.

Cuando los estudiantes contestaban y establecían sus ideas el investigador validaba el resultado final que quedaba por parte de los estudiantes estableciendo una especie de institucionalización en la que el resultado concluido era el conocimiento establecido por el profesor. Aunque es preciso decir que el investigador suponía que estaban comprendiendo todos los estudiantes y en sus respuestas se pudieron observar algunas incongruencias en sus resultados porque finalizaban con el generado con el apoyo de todos pero dejaron el que tenían como resultado de su equipo. Es necesario hacer un análisis más a fondo de la forma de razonar de los estudiantes, para saber por qué no borraron la idea original que tuvieron, si en realidad comprendieron la situación problemática o sólo contestaron el resultado indicado porque ese es el que se concluyó entre todos.

La situación problemática funcionó parcialmente, porque los estudiantes tenían la idea del incremento que había en cada figura y pudieron llegar a la noción del incremento constante que existía conforme avanzaban las figuras; es decir, detectaron la secuencia y el patrón con el que iba aumentando, pero sólo 3 equipos llegaron a la representación de esa secuencia en otro registro. Con estas soluciones de los estudiantes, surge la idea de buscar la manera de hacer un análisis para detectar dónde están sus fallos.

Situación problemática 3. Relación Funcional

Situación de Acción

El tiempo se consumió en las otras situaciones problemáticas y quedó muy poco para la tercera, se tenía contemplada para que durara un módulo completo porque era un poco más compleja que las anteriores. Comenzó con la repartición de las hojas de trabajo y leyendo el texto a los estudiantes como se previó en el análisis *a priori*, al preguntar si habían entendido, los estudiantes dijeron que sí y continuaron con el contrato que se había establecido.

La devolución de la situación problemática no se dio como se tenía contemplada por parte de los estudiantes porque al dejarlos trabajar no supieron qué hacer argumentando que estaba más difícil ésta.

Las variables didácticas en esta situación problemática no fueron adecuadas porque dificultaron a los estudiantes la visión que pudieran haber hecho del problema, es decir, detectaron que la distancia aumentaba conforme el tiempo transcurría; pero cada vez iba aumentando en menor proporción, por ello no supieron como representarlo de una manera distinta al lenguaje común.

Situación de Formulación

En el análisis *a posteriori* nos percatamos de que los estudiantes tenían la idea de lo que iban a hacer, conocer cuándo se iba a detener la tortuga, no sabían cómo hacerlo.

Como se detectó que los estudiantes no supieron contestar la situación problemática el investigador optó por cambiar de contrato didáctico y trabajarla en plenaria, primero lanzaba una pregunta acerca de que era lo que se pedía, el investigador no daba las respuestas, sino que hacía las preguntas intentando que los estudiantes razonaran para que ellos mismos validaran si el resultado iba a ser como lo habían contemplado o no.

Al estar trabajando con esas preguntas y llevar un poco avanzado el desarrollo de la situación problemática, se interrumpió la clase saliendo la mitad del grupo, rompiendo con la rutina de trabajo porque quedaron pocos estudiantes dentro del grupo de clase.

El investigador aún estaba haciendo preguntas acerca de cómo realizar la situación problemática y el profesor sugirió suspender la clase con la intención que quienes salieron no se quedaran atrás. La dinámica de esta clase no resultó ser la pretendida en el análisis *a priori*, el investigador decidió cambiarla por el motivo de que ya estaba fuera del tiempo previsto y porque no habían comprendido qué es lo que tenían que hacer, lo decidió para no tardar tanto en llegar a una institucionalización del conocimiento.

Al responder preguntas ante todo el grupo, algunos estudiantes tenían ideas confusas de qué hacer con respecto a la información que requería la situación problemática para concluir con buenos resultados, en el análisis *a posteriori* se puede observar que una pregunta pedía los metros que recorrió la tortuga y un equipo dio los resultados en minutos, no hubo devolución de la situación.

Situación de Validación – Institucionalización

En esta situación problemática no existió situación de validación ni de institucionalización, la clase terminó dejándola inconclusa con la intención de retomarla la siguiente sesión, no hubo clase de Matemáticas al siguiente día debido a que tenían prevista una reunión de padres de familia.

No pudieron aplicarse las situaciones de validación e institucionalización porque ya no hubo oportunidad de trabajar con los estudiantes de ese grupo, incluso quedó inconclusa la situación de formulación, rescatando muy poco del resultado de esta situación problemática.

La aplicación de esta secuencia didáctica da cuenta que los estudiantes siguen pensando numéricamente, a pesar de que estén trabajando con ecuaciones de una y dos incógnitas, además, las situaciones problemáticas no propiciaban la visualización de elementos algebraicos porque se detectó que contestaron aritméticamente lo que se ideó como algebraico, hizo falta un análisis del contenido para potenciar más el empleo del pensamiento algebraico, es necesario hacer este análisis del contenido para la conclusión de elementos necesarios en la adquisición de este pensamiento e incluirlos en las clases de Matemáticas que pretenden introducir el pensamiento algebraico en los estudiantes.

Se ha detectado que no funcionó lo que se había considerado en el análisis *a priori,* debido a la complejidad de la situación problemática y a que la mitad del grupo se había salido y cambió el contrato didáctico en ese momento; además, era tan complejo el problema que sólo se podía representar en relación funcional en un registro gráfico y no podía llevarse a otra representación. Por medio de estas acciones se llega a la conclusión de elaborar un análisis más exhaustivo para trabajar la noción de literal en relación funcional, para desarrollar situaciones problemáticas que en realidad lleven a los estudiantes a la noción de dos valores que están en correspondencia.

En este capítulo se diseñó y se aplicó la secuencia didáctica, obteniendo resultados distintos a los que se tenían pensados en el análisis *a priori* de las situaciones problemáticas, gracias a las soluciones desarrolladas por los estudiantes surge la inquietud de cómo diseñar una secuencia, para que en realidad aporte conocimientos a quienes la resuelvan; para ello se llega a la noción de considerar más aspectos en el rediseño de una secuencia, esperando obtener resultados más cercanos a la realidad. El diseño de una nueva secuencia se establece en los siguientes capítulos.

Capítulo 4. Resultados y discusión

Para continuar trabajando en este tema, objetivo de nuestra investigación, se ha realizado un análisis reflexivo con base en las situaciones problemáticas planteadas y los resultados obtenidos. Se aportan las conclusiones de este estudio, las cuales propiciarán una nueva estrategia para la mejora en la enseñanza de las Matemáticas, favoreciendo la transición de la Aritmética al Álgebra.

El manejo de la literal se consideró de las tres maneras mencionadas en el análisis *a priori* como incógnita específica, como número general y en relación funcional; sin embargo, no resultó del todo adecuado, porque los estudiantes pasaron de una forma a otra sin comprender lo que hicieron.

Con respecto a la primera situación problemática se puede mencionar que faltó un mejor seguimiento de las preguntas en la situación de validación, la intención era que las preguntas "llevaran" a los estudiantes a considerar la literal como incógnita específica, pero no se logró debido a que faltó información que se consideró como trivial a causa de que ya se encontraban trabajando con ecuaciones lineales; se pensó que como los estudiantes ya trabajaban con literales no era necesario que variara la distancia del coche del papá y sólo con la pregunta que indica que el coche varía pudieran llegar a la formulación de una expresión algebraica.

Los estudiantes tenían una noción distinta a lo que la situación problemática proponía, ocasionando dos posibles formas de pensar acerca de su diseño: que estaba mal planteada, o que seguían la respuesta de algún equipo que pensó de esa manera la solución, copiando el procedimiento debido a que no pudieron darle significado a la situación problemática.

Se llega a la idea anterior porque sólo tres equipos tenían la solución correcta, una resta de las distancias para conocer la que hay entre las casas, los otros 7 equipos llegaron a expresar dicha distancia mediante una suma, porque el razonamiento que hicieron fue que, al hacer la suma, daba un buen resultado de la distancia entre las casas. A pesar de que las respuestas fueran erróneas o acertadas, no se llegó a lo que pretendía la situación problemática, que los estudiantes tuvieran idea de un número desconocido que se puede representar con una letra, o si lo detectaron no pudieron considerarlo como una literal dentro de una expresión algebraica, sino que esperaban a que se les dieran los datos para resolver la situación problemática, esta acción la podemos vincular a lo que establecen Ruano *et al.* (2003), los estudiantes que aún no desarrollan un pensamiento algebraico, necesitan usar la propiedad de cerradura de la suma y el producto (*necesidad de clausura*) para poder estar conformes con una respuesta, en este caso: necesitaban conocer todos los datos para poder establecer alguna operación que marcara las distintas distancias a las que podría estar el coche, por lo tanto no tuvo significado para ellos la idea de número desconocido.

Otra detección fue, que para los estudiantes no tiene un significado la letra, pues intentaron buscar una manera de establecer una ecuación porque el profesor les había dicho que de esa manera podían encontrar la solución, los alumnos en su intento de expresarla, obtuvieron un resultado incongruente con la situación problemática, que para ellos era válido. Se reafirma que desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes no es fácil y menos si están acostumbrados a trabajar con un contrato didáctico en el que el profesor deja ejercicios y los alumnos sólo los resuelven.

Muchas veces los estudiantes trabajan las Matemáticas sin conocer el razonamiento que hay detrás del conocimiento; es decir, contestan Matemáticas sin darle el significado requerido y a causa de ello aparecen las dificultades, Palarea (1998) hace énfasis en que las dificultades pueden ser causadas por varias características, pueden estar asociadas a: la complejidad de los objetos en Álgebra, los procesos de pensamiento en Álgebra, a los procesos de enseñanza, a los procesos del desarrollo cognitivo de los estudiantes y, a actitudes afectivas y emocionales de los estudiantes. En esta situación problemática podemos relacionar directamente los procesos de enseñanza y el desarrollo cognitivo, porque el profesor enseña de una forma mecánica y el estudiante aprende sólo a operar el Álgebra sin tener un significado de lo que está haciendo.

Para que la idea de un número desconocido representado por una literal exista en la mente de los alumnos, la situación problemática debe analizarse detenidamente desde su elaboración, esperando un mejor análisis se hace desde su diseño, es oportuno elaborarlo desde el campo de la CMF tomando en cuenta que hace falta detectar la epistemología y la funcionalidad de éstas al considerar la transformación del "saber sabio" al "saber a enseñar" mediante la "*Matematización de la Cultura*".

Los estudiantes pudieron contestar la segunda situación problemática casi de la manera en que se consideró en el análisis *a priori,* gracias al cambio de contrato didáctico. Era necesario que existiera un moderador, porque los alumnos por sí solos no desarrollan tales reflexiones, como se mencionó anteriormente; el contrato didáctico que tienen para la resolución de situaciones problemáticas es que el profesor propone ejercicios y ellos los resuelven de manera mecánica, sin significar lo que están haciendo, es una metodología en la cual los estudiantes sólo contestan como respuesta al contrato didáctico que se crea en la clase.

En el análisis *a priori* faltó considerar las preguntas que fueron surgiendo conforme los estudiantes avanzaban en sus respuestas, esas preguntas que el investigador improvisó cuando asumió el papel del profesor. Con la dinámica que sucedió en la clase surge una inquietud, ¿qué hubiera pasado si el profesor continuaba con el papel designado y los estudiantes no llegaban a razonar la situación problemática, les sugeriría algún procedimiento o los habría hecho razonar? Es preciso establecer que el análisis realizado, fue insuficiente; porque, a pesar de que la situación problemática funcionó se debieron considerar algunas preguntas que se iban a hacer a los estudiantes cuando tuvieran razonamientos no del todo adecuados para la resolución de la secuencia didáctica.

A pesar de que los estudiantes mostraran nociones correctas acerca de lo que iban a contestar, es necesario señalar que tuvieron dificultad en representar una literal que pudiera valer un número; algunos equipos llegaron a la formulación de una expresión algebraica; no de manera formal, hicieron una expresión en la que una letra representaba el número que variaba o por lo menos un símbolo representaba un número desconocido, la mayoría lo hicieron de manera numérica, estableciendo que iba a ir aumentando de dos en dos cada término, afirmando lo que dicen las investigaciones (Ruano, Socas y Palarea, 2003; Sessa, 2005, Butto y Rojano, 2010; Radford, 2010; Socas, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhemi, 2012), que a los estudiantes se les dificulta el cambio de pensamiento.

Haciendo uso de la teoría que muestra la existencia de dificultades, errores y obstáculos, pueden relacionarse algunos pensamientos inadecuados de los estudiantes en esta secuencia, con las que marcan como generales al iniciar el trabajo con el Álgebra escolar; por ejemplo, no pueden cambiar la idea de que una letra puede representar cualquier número, Palarea (1998) menciona que regularmente cuando iniciamos el tratamiento del Álgebra escolar no significamos el uso de la letra, sino que utilizamos símbolos para representar un valor desconocido, obteniendo por resultado que los estudiantes terminen haciendo "*una 'no interpretación' de la letra… y en este proceso los estudiantes ignoran la letra, o la reconocen pero no tiene significado*" (p. 62).

Los estudiantes tienden a la *necesidad de clausura*, esto se observó cuando un equipo supo establecer una "fórmula" que satisfacía lo pedido, al plasmarla en el pizarrón tenían que igualarla con algún término, haciendo notar que les hacía falta la necesidad de que esa "fórmula" fuera igual a un número específico, para dar un valor indicado, Ruano *et al.*, (2003) atribuyen a este tipo de procesos como un error común que tienen los alumnos al comenzar a trabajar con el pensamiento algebraico, denominándolo *necesidad de clausura* estableciendo que los estudiantes no pueden asimilar un enunciado incompleto, porque no aceptan que una expresión no pueda cerrarse y no genere un número como resultado, si lo están obteniendo al considerar varios resultados.

También hubo casos en que los estudiantes utilizaban de manera errónea el signo igual, en el que establecían un signo de igualdad para separar cada término de la secuencia, en realidad al hacer esta acción el resultado es incorrecto, porque al separar con signos que denotan una igualdad, expresiones no equivalentes se aceptan como tales, $1 = 3 = 5 = 7 = \cdots$, caso que no es cierto, podemos atribuir a ello que los alumnos siguen buscando una forma de darle sentido a la expresión que tienen que encontrar que cumpla para cada término y lo hacen a través de signos incorrectos, detectando que están haciendo una cerradura de las operaciones a través de errores en la Aritmética, Socas (2011) establece que los errores en la Aritmética que se basan en la limitada interpretación del signo igual, ya han sido estudiados y caracterizados como un error frecuente en los alumnos al trabajar con el Álgebra escolar.

Finalmente se encuentra que existen errores en los que los estudiantes muestran una ausencia de sentido, término que caracterizan Matz (1980), Palarea (1998), Ruano *et al.*, (2003) y Socas (2011), a lo que se les pregunta; contestando solamente que saben razonar matemáticamente sin poder llegar a la expresión de algún resultado ni siquiera en términos aritméticos.

El grado de complejidad fue aumentando en las situaciones problemáticas como menciona Barallobres, (2000), Carraher *et al.* (2006) y Radford (2010), pero no se consideró un límite en el aumento de la complejidad de las situaciones problemáticas, al final los estudiantes no supieron qué hacer con respecto a la tercera situación problemática, como se menciona en el análisis *a posteriori*, los estudiantes tenían la idea de lo que pedía, pero no sabían de qué manera desarrollarla en su cuaderno; a pesar de que tenía elementos que podían representarse en una tabla, resultó difícil para los estudiantes ya que no supieron concretamente lo que tenían que resolver.

En la programación de la secuencia didáctica, se consideró que la tercera situación problemática correspondería a trabajar la literal en relación funcional, al hacerla de tal manera no generará los resultados deseados, sino que su representación gráfica sería una curva, indicando que la expresión algebraica tiene que ser de grado mayor que la ecuación lineal, por lo tanto debe de pensarse una manera correcta que pueda estar enfocada a trabajarse considerando la literal en relación funcional.

A parte de lo establecido anteriormente surge la conclusión de que hace falta buscar una estrategia para comprobar que el pensamiento algebraico en realidad se adquirió por parte de los estudiantes, en los temas que han trabajado de Álgebra. En esta ocasión se pensó que todos habían aceptado el resultado concluido en la validación, pero al revisar las hojas de trabajo se detectó que existían algunos que sólo habían contestado por costumbre o porque se dijo que esa era la respuesta correcta.

Los análisis que se hicieron de la secuencia didáctica empleada anteriormente, dan cuenta que hace falta uno más exhaustivo al diseñar las situaciones problemáticas que debe contener una secuencia, porque el conocimiento que deben adquirir los estudiantes debe de ser bien aprendido para que puedan usarlo en cursos posteriores de Matemáticas. Para tales acciones se tiene pensada la elaboración de un rediseño de la secuencia de actividades fundamentada bajo el ELOS, porque esta teoría complementa las herramientas teóricas utilizadas inicialmente, proporcionando un mayor número de herramientas para detectar las competencias matemáticas de los estudiantes.

Así, esta secuencia didáctica proporciona elementos que debemos tomar en cuenta para una mejora de las situaciones problemáticas, en las que deben de considerarse los puntos anteriores para prever los conocimientos que están en juego al resolverla. En un próximo documento deben tomarse en cuenta las deficiencias detectadas, el análisis y las competencias que deben tener los estudiantes; es indispensable detectar el tipo de pensamiento que han desarrollado, porque el currículo de secundaria ha cambiado y en primer grado ya resuelven ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, para tal acción la nueva secuencia didáctica estará enfocada a la detección del tipo de pensamiento que prevalece en los estudiantes, apoyando al mismo tiempo el pensamiento algebraico que deben mostrar.

Capítulo 5: Rediseñando la secuencia didáctica

Los resultados y las primeras conclusiones de la aplicación de la secuencia se analizaron bajo dos elementos del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) de Socas (2001, 2007) con la intención de hacer un análisis del contenido que esté en acción al desarrollar las nuevas situaciones problemáticas y, tomar elementos que nos permitan elaborar una nueva secuencia didáctica producto de investigaciones en este campo, el análisis de: resultados, contenido y la existencia de errores, obstáculos y dificultades.

El nuevo diseño que se hará de la secuencia no se deja de lado los elementos que se consideraron para la anterior, sino que, se añaden elementos que ayudan al análisis de conocimientos necesarios para la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Esta secuencia tendrá delimitados la fenomenología, la epistemología (campo conceptual) y la semiótica (especialmente de la funcionalidad de las representaciones de los objetos matemáticos) en el análisis de contenido que debe de considerar cada situación problemática, para ello se elaborará desde la CMF en los distintos usos de la literal, la intención de esta secuencia es detectar la forma de pensamiento que prevalece en los alumnos de secundaria una vez que ya han trabajado con temas referentes a Álgebra (sucesiones numéricas y resolución de ecuaciones lineales); así como detectar los errores, los aciertos y las acciones que sucedan en el transcurso de la aplicación de la secuencia y causen controversia en las formas de pensamiento de los estudiantes.

5.1 Análisis preliminar

Para comenzar a organizar los conocimientos que están en juego al desarrollar las distintas situaciones problemáticas se les dará un acomodo similar al que han llevado durante el documento. Se hace a manera de análisis preliminar considerando los distintos conocimientos que deben estar activos en los estudiantes en el momento de aplicar la secuencia.

5.1.1 Literal como incógnita específica

Para definir el uso que se les asignará a las variables (literales) se recurre a la RAE; la cual, establece que variable es una "*Magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto*" (RAE, 2001), e incógnita cómo "Cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema para resolverlos" (RAE, 2001). Con las definiciones anteriores, se comenzará a considerar que una literal como incógnita específica es una magnitud o un número que puede tener un valor de los existentes en un conjunto, pero ese valor será representado por una magnitud desconocida y se expresará en términos de una ecuación o una expresión algebraica para resolverlo; es decir, uno debe reconocer que en cierta situación existe una cantidad cuyo valor no conocemos, pero es posible determinar.

Palarea (1998) propone un ejemplo "Si $a + 5 = 8$, ¿Cuál es el valor de a?" (p. 61), y menciona con respecto a considerar la literal como incógnita específica que la letra tiene un valor específico, al principio es desconocida, pero evaluable. La autora menciona que regularmente este tipo de trabajo con letras es el primero que conocen los alumnos, como consecuencia de la Aritmética que suelen trabajar en las Matemáticas escolares, pues lo efectúan desde los primeros años de escolaridad

> …bajo la forma: $\square + 5 = 8$, donde el número que falta debe ser colocado dentro del marco. El mismo marco no tiene valor y simplemente indica que existe un número desconocido. Si la cuestión se plantea así: "Si $\square + 5 = 8$, entonces $\square = ?$", es conceptualmente diferente a poner el número desconocido dentro del marco. El marco □ es fabricado como un indicador de un símbolo matemático con valor numérico que puede combinarse con números y con otros símbolos como el "$+$". En algunas situaciones, los símbolos como □ pueden reemplazarse por letras del alfabeto, tales como n o x. (p. 62)

Lo anterior presenta un conflicto para los estudiantes, ya que trabajándolo desde esta perspectiva no toman en cuenta a la letra, sino que es un tipo de rechazo al uso de la letra, porque están haciendo "*una 'no interpretación' de la letra… y en este proceso los estudiantes ignoran la letra, o la reconocen pero no tiene significado*" (Palarea, 1998, p. 62).

Es preciso que a los estudiantes les quede clara la existencia de las letras para que puedan usarlas como incógnitas específicas. Se tomarán en cuenta cinco pasos que proponen Ursini *et al.* (2005) para que el trabajo se enfoque al buen uso de la literal como incógnita específica. Se considerarán los pasos con el ejemplo propuesto por Palarea (1998).

1. Reconocer la existencia de algo desconocido y que se puede determinar:
$$\square$$
2. Simbolizar la incógnita, por ejemplo □ = a
3. Relacionar la incógnita con los datos del problema, $a + 5 = 8$
4. Realizar las operaciones aritméticas necesarias para determinar el valor de la incógnita.
$$a + 5 = 8 \quad \rightarrow \quad a = 8 - 5 \ \rightarrow \quad a = 3$$
5. Sustituir en la ecuación el valor encontrado para comprobar que es correcto.
$$(3) + 5 = 8$$

Los estudiantes deben desarrollar la capacidad de representar simbólicamente una cantidad desconocida relacionada con los datos del problema. Para las situaciones problemáticas propuestas en este documento se utilizarán estos cinco pasos para facilitar la aplicación de la situación problemática dentro de la secuencia didáctica, porque ya se tendrá considerada con un análisis más exhaustivo.

Se pretende la modificación de la situación problemática para que tenga mejores resultados, y pueda detectarse qué es lo “no comprensible por los estudiantes”, para ello se debe definir paso por paso y así tener un desglosamiento de lo que se espera que hagan los estudiantes.

En la primera situación problemática se deben considerar distancias que se puedan representar mediante una expresión algebraica porque de la manera en que se aplicó anteriormente se pretendía que los estudiantes llegaran a la noción de alguna literal considerando hipótesis en las cuáles tendrían que dar un gran salto en los conocimientos matemáticos que poseen; es decir, se consideraron algunas variables didácticas que pudieran promover el uso de literales, pero la situación problemática no llevaba coherencia con lo que se pretendía que contestaran, así que decidieron contestarlo por métodos aritméticos. Para el diseño de la nueva secuencia didáctica se tomarán en cuenta, al igual que la secuencia anterior, autores que proponen acciones o herramientas para potencializar un buen desarrollo del pensamiento algebraico. Barallobres (2000), menciona que después de establecer que existen varias opciones en las que el número se puede determinar por una suma o una resta, mediante expresiones generales que representan las distancias, pueden ser algebraicas o en un primer momento pueden ser “expresiones para encontrar una cantidad” sin darle uso ni significado a la letra. En seguida que detecten que las distancias incluidas en la situación problemática pueden representarse mediante expresiones en las que se utiliza la letra, se intentará llegar a la formulación de expresiones algebraicas.

El objetivo que tendrá la situación problemática será que los estudiantes sepan de la existencia de números desconocidos y sepan cómo representarlos a través de un lenguaje que ellos conocen, el aritmético. Con base en esa situación comenzará a definírseles que cuando no se conoce un valor es necesario prestar atención a los demás datos del problema para utilizarlos en la búsqueda de aquel valor, se puede contestar el problema relacionando el valor con una letra como incógnita específica. Además se establecerá en función de las categorías mencionadas por Socas (2012) para obtener más información acerca de lo que se tiene que hacer para llegar a una buena solución de la situación problemática. Las seis categorías de la CMF se utilizarán para considerar los conocimientos matemáticos que están implicados en la situación problemática.

Operaciones	Estructura	Proceso
• Tratamiento en un mismo registro para encontrar el valor (Operar para conocer el valor faltante) • Sumar, restar, dividir… • Realizar operaciones aritméticas de manera formal • Eliminar los valores de un	• Uso de la letra como incógnita específica • Conocer los conceptos que se utilizan: suma, resta, reglas sintácticas de la representación, incógnita, producto, valor posicional, figuras geométricas, fórmulas • Conmutativa, asociativa, uso	• Cambio de representación • Significar un valor faltante • Representar con un símbolo el valor faltante • Hacer una interpretación (ecuación) de la lectura en un lenguaje distinto • Una vez conocido el resultado trasladarlo a otro

lado (despejar, restar, dividir) para encontrar la solución	del elemento opuesto, cerradura	registro para comprobarlo

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
• Leer un texto y detectar que faltan datos para conocer todos los valores que pretende describir • Representación mental del texto leído con la finalidad de detectar que tenemos que realizar un proceso para conocer todos los valores que involucra	• Sumar y/o restar en el mismo registro • Saber que el número desconocido será una literal • Representar los operadores aritméticos y detectar la coherencia • Una vez leída, definir la situación y establecer lo que pretende	• Conocer la incógnita mentalmente (una noción) • Relacionar el valor desconocido con la representación de una letra • Saber que lo desconocido se puede determinar mediante operaciones aritméticas • Saber que es necesario cambiar el lenguaje común por una representación diferente • Saber las condiciones que debe cumplir la respuesta

La propuesta de la nueva situación problemática de la literal como incógnita específica se basará en los aspectos anteriores y el objetivo es que tenga una mejor visión de lo que se espera que hagan los estudiantes, por ello, debe tener un muy buen sustento (análisis preliminar) y un análisis *a priori* adecuado, esperando aportar más herramientas para la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico.

5.1.2 Literal como número generalizado

Utilizando la definición de generalizar se comienza a describir lo que es utilizar la literal como número generalizado "*Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas*" (RAE, 2001). Conjuntando esta definición con la de variable se obtiene que es una magnitud que puede tener un valor cualquiera, que sea resultado de la abstracción de lo común en un conjunto, en este caso del conjunto numérico, para formar un concepto general que comprenda a todos los términos y a uno en específico a la vez; es decir, se usarán símbolos (letras) para representar una situación general, una regla o un método.

Por medio de la consideración de la literal como número generalizado Ursini *et al.* (2005) establecen que la pretensión es que los estudiantes desarrollen la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos. Por ejemplo en la situación problemática que se propuso en la secuencia didáctica acerca de literal como número generalizado se pedía que, a partir de observar el incremento de cuadros en ciertas figuras, se llegara a establecer una regla que cumpliera para todos los casos y para cualquiera en particular, se hizo a través de preguntas que pretendían que los estudiantes observaran como aumentaba la secuencia. Ursini *et al* (2005) sugieren una serie de pasos que deben hacer los estudiantes para llegar a la generalización de un patrón.

1. Reconocer el patrón que rige la relación entre figura y número de cuadros.

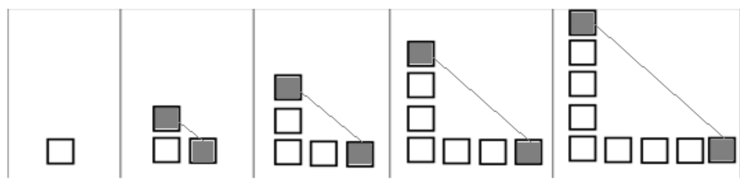
1. 

Imagen 35. Sucesión numérica representada de forma gráfica

2. Interpretar la letra n como la representación de un número general.
3. Deducir la regla distinguiendo entre lo que varía y lo que permanece invariante.
   Las figuras aumentan 2 cuadros con respecto a la posición anterior.
   El incremento de 2 en cada figura permanece constante.
4. Simbolizar la regla utilizando el símbolo dado para representar el número general.
   Buscar la forma de satisfacer la regla con respecto a la primera figura dada.

Considerar que tiene valor 1 y aumentar de 2 en 2, $2n-1$

El objetivo es llegar a una expresión algebraica que produzca los valores pedidos para cada figura y que a la vez sirva para todas en general, haciendo una especie de “Aritmética generalizada”. Según Palarea (1998) este tipo de tratamiento que se le da al Álgebra favorece los aspectos de incógnita específica y del punto de vista funcional. Aunque no debemos dejarla en ese aspecto, sino que tenemos que llegar a que en realidad se pueda considerar algebraica.

Radford (2013) establece criterios que debe cumplir una generalización para que sea algebraica, porque regularmente llegamos a conocer las generalizaciones de una forma aritmética. Para poder generalizar una secuencia, los alumnos deben hacer una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias, además menciona, que los objetos de la secuencia no deben ser claros para los alumnos, si fueran claros para ellos, no habría nada que aprender, y deben tener una idea clara del objeto de la situación problemática que propicia la secuencia; ya que, menciona que, a falta de tener una idea clara del objeto de la situación problemática cuando prolongan la secuencia, los alumnos proceden a determinaciones que no son necesariamente propicias para la producción de una generalización algebraica.

> La generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas, sugiero, esta basada en los siguientes puntos: (a) la toma de conciencia de una *propiedad común* que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, \ p_{k+3}, \ \ldots$) y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia (Radford, 2013, p. 6).

El autor hace referencia a (Pierce, 1931-1958, CP 2.270) para establecer que los alumnos pueden llegar a encontrar la generalización de la “característica común” mediante un proceso que llaman Abducción (*abduction*), la cual es solamente utilizada para pasar de un término al otro (cómo cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadros), llegando a una generalización aritmética. La abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión directa (una fórmula). A través de este proceso los alumnos a partir de la abducción proponen una fórmula y la someten a un número finito de pruebas (un tipo de proceso de inducción), pero aún no es algebraica. Para que sea algebraica se necesita que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica, utilizándola ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir convincentemente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término.

La situación problemática trabajada anteriormente en este documento logró su objetivo parcialmente; gracias a la ayuda de estudiantes que tenían bien su razonamiento fue como pudieron llegar a la generalización del resultado; sin embargo, sólo algunos comprendieron en realidad lo que estaban haciendo, porque al revisar las hojas de trabajo, varios equipos tenían resultados incorrectos. Por tal motivo es necesario un mejor diseño de la situación problemática, con la finalidad de detectar qué dificultades presentan los estudiantes en torno a los pasos de la generalización que se pide que hagan. Se seguirán las sugerencias que hace Radford (2013) para comprobar que en realidad se llegue a generalizar algebraicamente y se elaborarán los conocimientos matemáticos en acción dentro de este tipo de situaciones problemáticas a través de las etapas de la CMF esperando que con la ayuda de estas herramientas didácticas los estudiantes detecten una relación entre figuras y expresiones numéricas, con la finalidad de que expresen una forma general de representar el incremento de las figuras.

Operaciones	Estructura	Proceso
• A través de operaciones conocer el patrón que rige la secuencia • Operar aritméticamente para cumplir la secuencia • Representación formal de las operaciones • Manipulación de elementos mediante el cambio de registro para ayudar a visualizar el crecimiento de las figuras	• Literal como número generalizado • Definir las reglas de la sucesión en cualquier registro • El aumento proporcional de elementos en los términos generales de una sucesión • Distributiva, asociativa, conmutativa, factor común	• Cambiar la representación de registro común – gráfico a registro aritmético • Encontrar el patrón mediante el tratamiento en el registro aritmético • Llegar a una representación algebraica

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
• Leer una situación problemática y detectar que prosiguiendo con lo que indica se puede encontrar una secuencia numérica que aumenta constantemente (la progresión que debe llevar la situación problemática) • Llegar al cambio de representación mediante el razonamiento de un tratamiento de valores	• Descripción de la regla en cada representación (registro) • Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla deducida • Representación mental • Representación aritmética y algebraica	• Saber que se necesita cambiar el registro para resolver la situación problemática • Saber considerar la literal como número general con el que es posible operar • El aumento proporcional de una sucesión puede ser representado por una regla

Para distinguir una mejora en esta situación problemática es importante que se describan las preguntas que se efectuarán a lo largo de la resolución de ésta y llevarán a los estudiantes a la formulación de la expresión algebraica que genera la secuencia de figuras.

5.1.3 Literal en Relación Funcional

Dos términos están en relación funcional cuando al comparar dos cantidades nos damos cuenta que una está en función de la otra; es decir, que los valores de una dependen de los valores que va adquiriendo la otra, al incluir el concepto de variable en esta relación llegamos a establecer que existen dos magnitudes que pueden tomar distintos valores en un conjunto de puntos, una puede tomar un valor cualquiera y la otra va a estar en función de la primera. En otras palabras, Ursini *et al.* (2005), nos mencionan que cuando trabajamos con un término en relación funcional debemos reconocer que existe una correspondencia entre dos literales y que éstas varían de una manera relacionada.

Por ejemplo en el problema de la tortuga que se pretendió llevar a cabo anteriormente y no se pudo por razones de organización y del planteamiento de la situación problemática, se necesita un reajuste desde su diseño para que pueda apreciarse que las literales están en relación funcional y que se puede expresar mediante una ecuación lineal.

Ursini *et al.* (2005) sugieren que se debe seguir una serie de pasos al realizar un ejercicio en forma de relación funcional, con la finalidad de que se pueda apreciar una evolución en la comprensión de ésta.

1. Reconocer que existe una correspondencia entre las dos literales involucradas.
   Observar que un valor (la distancia) aumenta en función al otro (tiempo). Simbolizar la relación funcional de correspondencia.
   Llegar a la obtención de una, tabla, gráfica o ecuación en términos algebraicos, que den como resultado la distancia cuando se conozca el tiempo.
2. Determinar el valor de una de las literales cuando se conoce el valor de la otra.
   Con la expresión propuesta en el paso anterior se pondrá a prueba asignándoles distintos valores a una literal y obteniendo el resultado de la otra, comparándolo con la representación que se había hecho de forma aritmética o geométrica y con los datos que proporciona la situación problemática.

Se espera que estos pasos sirvan como herramientas para la buena comprensión de los estudiantes con respecto al Álgebra, además es indispensable que sepan cómo trabajar de esta manera porque es necesario su uso para otras ciencias o situaciones cotidianas, Palarea (1998) argumenta que "*El aspecto funcional del Álgebra es esencial en la actualidad para el uso de los lenguajes informáticos y hay que tener en cuenta que existe una diferencia sustancial en el empleo en dichos lenguajes*" (p. 7). Además la autora describe los tres usos de la literal que se trabajan en Álgebra, e indica que no puede trabajarse enfocándose sólo en uno, que es necesario combinarlos y no limitarse exclusivamente a considerar el Álgebra como Aritmética generalizada, ni como ecuaciones ni en su aspecto funcional.

El rediseño de esta situación problemática se realizó con la finalidad de que los estudiantes detecten que existe una relación entre dos cantidades desconocidas que varían y una lo hace en función de la otra. En la resolución de la secuencia didáctica experimentada anteriormente, cuando se registra lo que hicieron los estudiantes con la situación problemática enfocada a trabajarse mediante el uso de la literal en relación funcional, se rescata que pudieron detectar la relación que tenían las cantidades, pero no pudieron establecerlo con alguna expresión matemática, excepto un equipo que lo representó de forma tabular. Para esta ocasión es indispensable que los estudiantes detecten la forma en que varía la relación y la forma en que lo tienen que representar, para ello se debe hacer un mejor análisis desde el diseño de la situación problemática.

Así pues, el propósito de rediseñar la situación problemática es que los estudiantes reconozcan que en ciertas situaciones están involucradas cantidades cuyos valores están relacionados, y tengan presente que la variación de una cantidad afecta a la variación de la otra. Para ello se tomarán en cuenta los pasos que sugieren Ursini *et al.* (2005) para la ayuda en la detección de las literales. Pero antes, tiene que modificarse para que sea más sencillo establecer la relación que hay por parte de los estudiantes.

La nueva situación problemática debe de considerar que ambas literales aumentan y que ese aumento puede representarse mediante una ecuación lineal, porque el caso anterior era difícil que los estudiantes llegaran a considerarlo como ecuación porque uno aumentaba y otro disminuía, en esta ocasión la pretensión será que en la nueva situación problemática la variación sea directa, y no una variación inversa, la inversa se modeliza generalmente con funciones de grado distinto a uno. Después se les pedirá a los estudiantes que lo representen del modo que quieran para que sepamos que ya están dando la devolución y que están interesados, en seguida se intentará que lo cambien al registro algebraico. Es indispensable que los estudiantes puedan representar esta relación de correspondencia de diferentes maneras y que puedan pasar de una a otra.

Operaciones	Estructura	Proceso
• Cambiar el número de una literal en el mismo registro y comprender que la otra también se mueve • Operaciones aditivas • Operaciones multiplicativas	• Saber a qué se refiere literal en relación funcional • Conocer una forma general de representar valores • Saber lo que es literal independiente y literal dependiente	• Realizar un cambio de representación (registro) para significar un problema en el que existan dos literales • Llegar a la obtención de una regla (ecuación) que determine la variación de valores

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
• Leer una situación problemática y concluir con la noción de que existen dos literales que tienen alguna relación • Realizar una serie de operaciones, razonamientos y procesos para detectar e interpretar el cambio de las literales	• Escribir las operaciones, el seguimiento de manera formal • Expresar el cambio de valores que adquieren las literales	• Considerar que existe una relación entre los elementos de la situación problemática • Organizar los distintos valores en un registro para observar su variación • Saber cómo operar con los valores para conocer la situación problemática

5.2 Análisis *a priori*

Las variables macrodidácticas marcarán la organización de los estudiantes y de las situaciones problemáticas en el aula de clase, la primera variable es considerar tres maneras distintas de trabajar la literal: como incógnita específica, como número generalizado y en relación funcional; otra variable macrodidáctica es diseñar las situaciones problemáticas en el mismo entorno, con la finalidad de que los estudiantes no cambien su manera de percibir las distintas situaciones; la siguiente variable será que los estudiantes desarrollen la situación problemática en equipo, porque se detectó que situaciones problemáticas guiadas en las que se formulan preguntas adecuadas, facilitan la discusión entre iguales y complementan sus pensamientos matemáticos, obteniendo mejores resultados; finalmente se consideró que las situaciones problemáticas propuestas permitan detectar el pensamiento matemático (numérico o algebraico) que tienen desarrollado los estudiantes.

Las situaciones problemáticas consideradas en esta secuencia didáctica de análisis, tienen el propósito de detectar el nivel de pensamiento algebraico desarrollado por los estudiantes después de haber trabajado, durante un curso escolar con temas referentes al Álgebra, porque cómo ya se mencionó anteriormente, el currículo de Matemáticas en la secundaria en México cambió y en la actualidad se resuelven ecuaciones lineales desde primer grado de secundaria. La intención, en consecuencia, del diseño de esta investigación es, entre otras cuestiones, determinar qué competencias algebraicas permanecen en el pensamiento matemático en los estudiantes de escuela secundaria, después de cursar partes del Álgebra escolar.

Situación de Acción

Se pretende que los estudiantes trabajen en equipos, este modo de trabajo entre iguales les permite compartir sus ideas y sus puntos de vista; apoyados con preguntas dirigidas para potenciar un contenido, podrán conocer lo que requieren las situaciones problemáticas y se podrá delimitar el pensamiento que tienen desarrollado.

5.2.1 Situaciones problemáticas

Situación problemática 1. Incógnita Específica

Un terreno en venta le interesa a una constructora para edificar un rascacielos, el terreno mide 280m^2 de superficie y sus dimensiones son: 16m de fondo, de frente no sabemos porque el cartel en el que se anuncia es el siguiente:

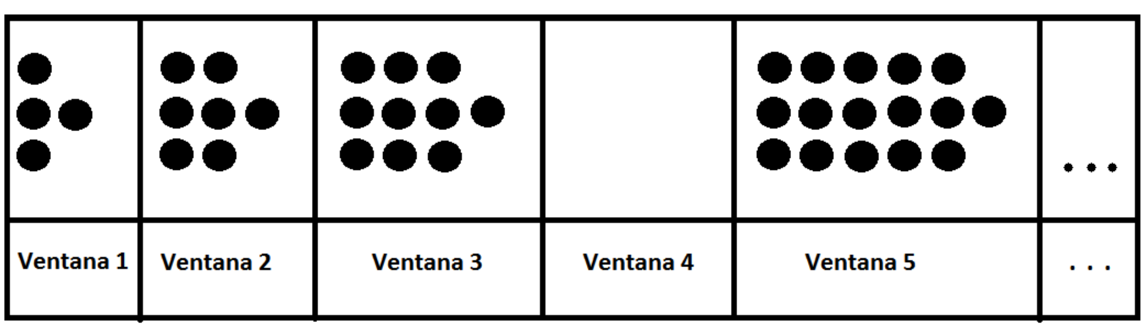
1. Representen la situación problemática de otra manera.
2. Establezcan matemáticamente una representación del problema.
3. ¿Cuánto mide el frente del terreno?
4. Expliquen el procedimiento que utilizaron para encontrar el valor del frente del terreno.
5. El dueño del terreno le dice a la gente de la constructora que pueden representar y, en consecuencia, saber cuánto mide el frente del terreno de la siguiente manera

$$16b=280$$

¿Será una manera correcta o incorrecta? ¿Por qué?
6. ¿Qué representa la letra *b*?

Situación problemática 2. Numero generalizado

Una vez adquirido el terreno, la compañía comienza a construir el edificio, en los planos se dan cuenta que se ve muy simple, por lo que deciden trazarle una serie de dibujos a las ventanas para que llame la atención de las personas que lo vean, los dibujos van incrementando con respecto a los anteriores y son los siguientes:



Contestar los siguientes apartados.

1. Dibujen los puntos que deben ir en la cuarta ventana y expliquen porqué consideran esa figura.
2. ¿Pueden ubicarse los puntos en cualquier orden? ¿por qué?
3. Establezcan la relación y las diferencias que hay entre cada ventana.
4. ¿Cuántos puntos tendrá la ventana 10?
5. ¿Cuántos puntos tendrá las ventana 25?

6. ¿Cuántos puntos tendrá la ventana 67?
7. ¿De qué forma podemos comprobar que cada ventana tiene en realidad esos puntos?
8. Expresen alguna regla que funcione para conocer el número de puntos que debe de haber en cada ventana.
9. Si el rascacielos se va a prolongar hasta un piso que aún no se sabe, pero se tiene pensado que puede llegar a ser el más alto del mundo, ¿cómo podríamos saber la cantidad de puntos que va a tener la ventana 136?
10. ¿Cómo podríamos saber el número de puntos que corresponde a cada ventana?

Situación problemática 3. Incógnita Específica

La constructora piensa construir más edificios, la persona que les vendió el terreno en el que están edificando el rascacielos les comentó que tiene otro terreno con la misma longitud de fondo, pero que tiene una superficie de $296m^2$.

1. ¿Cómo podemos saber la medida del frente de este terreno?
2. ¿Cuánto medirá el frente de este terreno?

Situación problemática 4. Relación Funcional

El edificio ya se encuentra en construcción y lo están distribuyendo por pisos, pero aún no tienen la seguridad de cuántos pisos llevan construidos; deciden ir a otro edificio similar construido por la misma empresa a buscar alguna manera de contar los pisos; un trabajador se da cuenta que para llegar a cada piso tienen que subir 13 escalones; en la estructura que se está edificando comienzan a subir escalones para saber cuántos pisos llevan.

1. Llegando al edificio un trabajador sube 39 escalones y pregunta, ¿llevo 39 escalones, cuántos pisos son?
2. A otro trabajador le surge la duda -¿cuántos pisos habré subido si subí 104 escalones?
3. ¿Cómo se puede expresar matemáticamente lo anterior?, exprésenlo.
4. Otro trabajador pensó, -si subo 910 escalones, ¿en cuál piso estaré?
5. ¿De qué depende que conozcamos el número de pisos?
6. ¿Cómo pueden establecer una relación entre los pisos y los escalones?
7. Expresen esa relación de forma matemática.
8. Si conocemos el número de pisos, ¿podremos saber cuántos escalones hay?
9. Establezcan una manera de representar la relación entre escalones y pisos, para saber rápidamente cuantos pisos debe de haber si nos dicen el número de escalones.

Situación problemática 5. ¿Pensamiento numérico o algebraico?

Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio: ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

Situación de formulación

A continuación se denotan las categorías del conocimiento matemático que se utilizan para describir la forma de pensamiento de los estudiantes competentes en la resolución de las situaciones problemáticas, se marca el posible camino que deben hacer para llegar a la solución de cada pregunta, señalando las competencias del conocimiento matemático que deben activar los estudiantes para tener una respuesta bien orientada al conocimiento pretendido. Además se indicarán qué competencias del conocimiento matemático deben estar presentes para cada uso de la literal (incógnita específica, número generalizado y relación funcional).

Incógnita específica

Al considerar la literal como incógnita específica se espera que un estudiante active las siguientes competencias matemáticas para dar solución a la situación problemática.

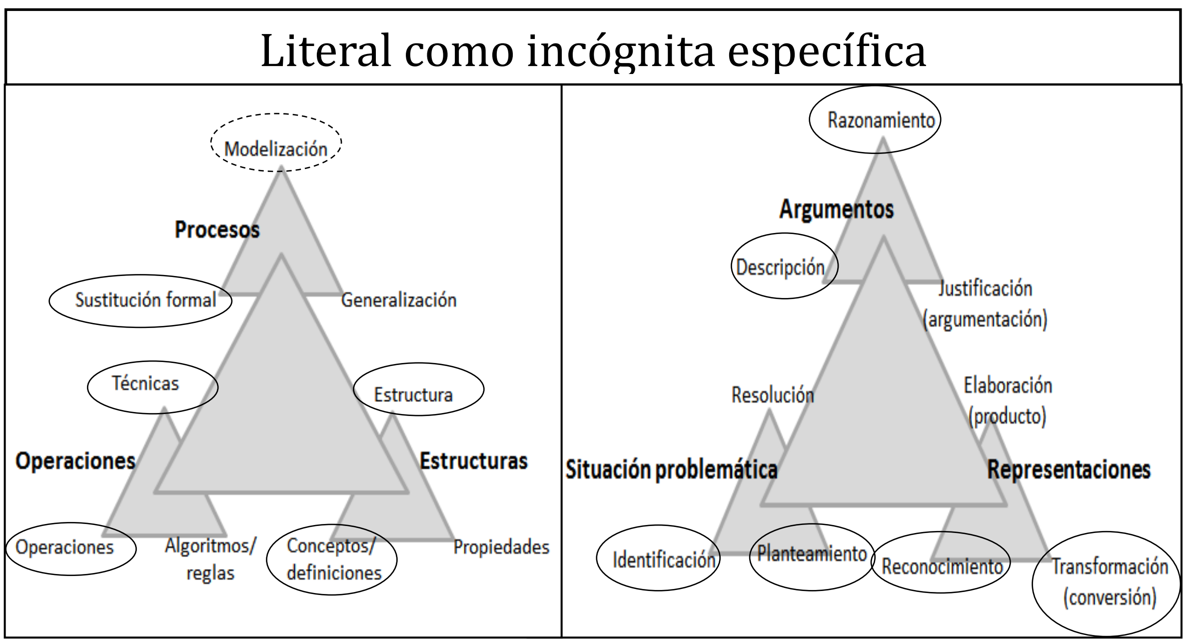
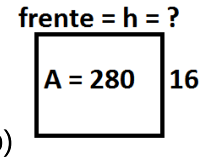


Imagen 36. Competencias que deben estar presentes en un estudiante para resolver eficazmente la situación problemática de literal como incógnita específica

En la imagen 36 se señala mediante ovoides las competencias matemáticas que deben de activar los estudiantes para resolver la situación problemática, a continuación se da una descripción de la manera en que se espera que deben de estar presentes.

La primera pregunta (Representen la situación problemática de otra manera) espera que los estudiantes hagan una identificación y un planteamiento de la situación; para que existan dichas competencias tienen que haber comprendido previamente la lingüística de la situación problemática, que con apoyo de la semántica, la dotará de significado, concluyendo con la representación de una estructura global en cualquier registro (común, aritmético, geométrico o algebraico); lo anterior servirá para llegar al proceso de sustitución formal logrando cambiar de registro:

a) $\frac{280}{16} = \text{frente}$

b) 

c) De la idea de $A = b * h$, se espera que consideren que 280m^2 = (16m)(h)
d) Se tiene que multiplicar el frente (número desconocido) por el 16m (fondo) y de resultado obtendremos 280m^2.

…

La segunda pregunta (Establezcan matemáticamente una representación del problema) los estudiantes podrían llegar a establecer un modelo, haciendo otra interpretación de la situación problemática; al establecerlo en otro registro estarán haciendo un reconocimiento y una transformación para lograr otra diferente; pueden cambiar entre estas representaciones o seguir con la misma; el objetivo es que se den cuenta que existe un número desconocido que tienen que encontrar mediante operaciones matemáticas.

…

La tercera pregunta (¿Cuánto mide el frente del terreno?) espera que los estudiantes utilicen operaciones y técnicas para lograr un resultado que sea convincente para ellos, es decir, que transformen alguna de las representaciones que hicieron (analógicas o digitales) y descubran la dimensión del frente del terreno, por medio de operaciones aritméticas.

…

La cuarta pregunta (Expliquen el procedimiento que utilizaron para encontrar el valor del frente del terreno) pretende que los estudiantes al dar su explicación argumenten las técnicas de las operaciones que efectuaron y la descripción de lo que hicieron, con el propósito de analizar la información desde la CMF, para detectar qué tipo de pensamiento predomina en los estudiantes una vez que resolvieron la ecuación.

…

La quinta y la sexta pregunta (El dueño del terreno le dice a la gente de la constructora que pueden representar y, en consecuencia, saber cuánto mide el frente del terreno de la siguiente manera: 16b=280, ¿Será una manera correcta o incorrecta? ¿Por qué? Y ¿Qué representa la letra b?) tienen la finalidad de que los estudiantes obtengan un razonamiento de lo que están contestando; en la sexta, se pregunta específicamente lo que significa la letra b para que detecten los conceptos y la estructura que debe tener esa letra; de esa manera, los estudiantes recurrirán a los procesos, representaciones, operaciones y argumentos que acaban de realizar para formalizar una expresión que contenga letras y números o, simplemente, tengan en la mente la noción de que un valor desconocido se puede expresar con una letra; en la siguiente situación problemática referente a incógnita específica se detectará el tipo de pensamiento que prevalece en los estudiantes después de haber trabajado una situación similar.

…

La tercera situación problemática también trabaja la literal como incógnita específica y tiene la finalidad que los estudiantes caractericen los conceptos de lo que están trabajando, hagan una reflexión para utilizar una estructura similar a la de la primera situación problemática y utilicen algunos pasos de los utilizados para responder cuando se tiene un área diferente, la idea es establecer una nueva situación problemática organizada después de la de número generalizado, para detectar si continúan con las ideas que proporciona el haber contestado el primer problema o recurren a métodos aritméticos.

Tiene la finalidad de utilizar las competencias del conocimiento matemático en otro problema de incógnita específica, para detectar la forma de considerar una situación problemática semejante a la hecha anteriormente; para que no recurran a la mecanización de un problema casi idéntico al anterior, se establecerá en la secuencia a manera de un tercer problema, aquí se analizarán la justificación que den y las estructuras que utilicen en la solución de la nueva situación problemática, también se buscarán las competencias del conocimiento matemático que utilicen los estudiantes como apoyo para la solución.

Número generalizado

En la segunda situación problemática la literal se considera como un número generalizado, las competencias del conocimiento matemático que debe activar un estudiante para que realice una buena resolución de la situación problemática son las siguientes:

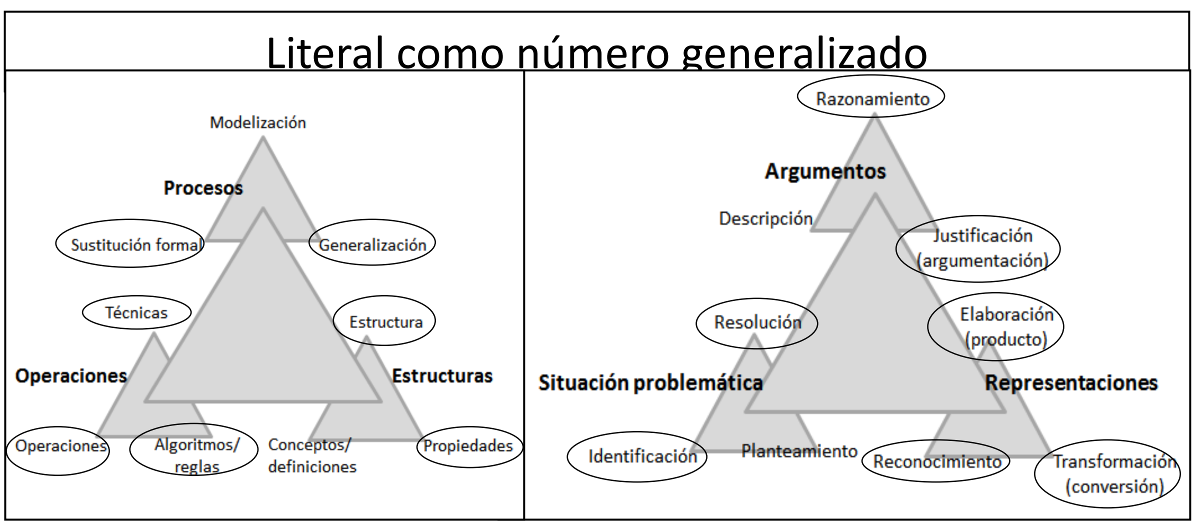
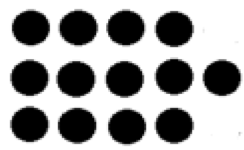


Imagen 37 Competencias que deben estar presentes en un estudiante para resolver eficazmente la situación problemática de literal como número generalizado

En la imagen 37 se señala mediante ovoides las competencias que se deben de activar al contestar está situación problemática, a continuación se describe la manera en que se espera que estarán presentes.

Para dibujar correctamente los puntos que debe de tener la cuarta ventana y puedan dar una explicación los estudiantes deben de haber identificado la situación problemática desde la lingüística, para que comprendan la estructura que tendrán las respuestas y puedan reconocer la representación de puntos, en seguida mediante la semántica sepan cómo resolver y transformar su idea en una sustitución formal en registro gráfico, dando por respuesta lo siguiente.



La segunda pregunta (¿Pueden ubicarse los puntos en cualquier orden?) espera que los estudiantes hagan un razonamiento y den una justificación de porqué tienen que seguir ese orden las figuras.

…

La tercera pregunta (Establezcan las semejanzas y las diferencias que hay entre cada ventana) pretende que los estudiantes detecten que cada ventana aumenta uno el número de filas, pero que las columnas siempre son tres, además deberán identificar que un punto siempre estará aparte de las filas y las columnas, para ello es necesario que sepan razonar el incremento de los puntos conforme más ventanas consideremos, con la finalidad de que puedan argumentar una justificación del crecimiento detectando lo que cambia y lo que permanece constante.

…

La cuarta, quinta y sexta pregunta (¿Cuántos puntos tendrá la ventana 10?, ¿Cuántos puntos tendrá las ventana 25?, ¿Cuántos puntos tendrá la ventana 67?) consideran que los estudiantes serán capaces de realizar operaciones de manera geométrica o aritmética dependiendo del razonamiento que hayan utilizado; después encontrarán una técnica que les permita facilitar las operaciones llegando a un algoritmo (regla) que les permita satisfacer la respuesta de la pregunta siete a través de una generalización aritmética o geométrica, mediante sustituciones formales en diferentes registros.

…

La octava pregunta (Expresen alguna regla que funcione para conocer el número de puntos que debe de haber en cada ventana) prevé que los estudiantes retomen las técnicas y las operaciones que hicieron con los valores ya conocidos; puede ser que haya quienes consideren más valores para poder visualizar la regla que genera el número de puntos dependiendo de la ventana; lo que se espera es que los estudiantes contesten que 3n+1 es la regla que indica el número de puntos que debe llevar cada ventana, siendo n el número de ventana.

…

La novena pregunta (¿Cómo podríamos saber la cantidad de puntos que va a tener la ventana 136?) espera que los estudiantes hagan un reconocimiento, una elaboración y una transformación de la información de la pregunta y detecten que sustituyendo el 136 en la respuesta anterior, puedan encontrar el valor de puntos, mediante una sustitución formal de una expresión que indica generalización; lo demás será efectuar técnicas y operaciones.

…

La décima pregunta (¿Cómo podríamos saber el número de puntos que corresponde a cada ventana?) se considera que los estudiantes utilicen los argumentos (razonamiento y justificación) de las respuestas anteriores concluyendo con un proceso de generalización de la información representado mediante una sustitución formal. No se ha delimitado que la generalización sea algebraica porque es un primer acercamiento de una situación problemática de generalización, con que tengan la idea de que existe un símbolo (literal) que representa cualquier número es suficiente para que la contesten y concluyan con una expresión algebraica.

…

Relación Funcional

Las competencias que debe recorrer un estudiante en la situación problemática del manejo de la literal en relación funcional; deben ser:

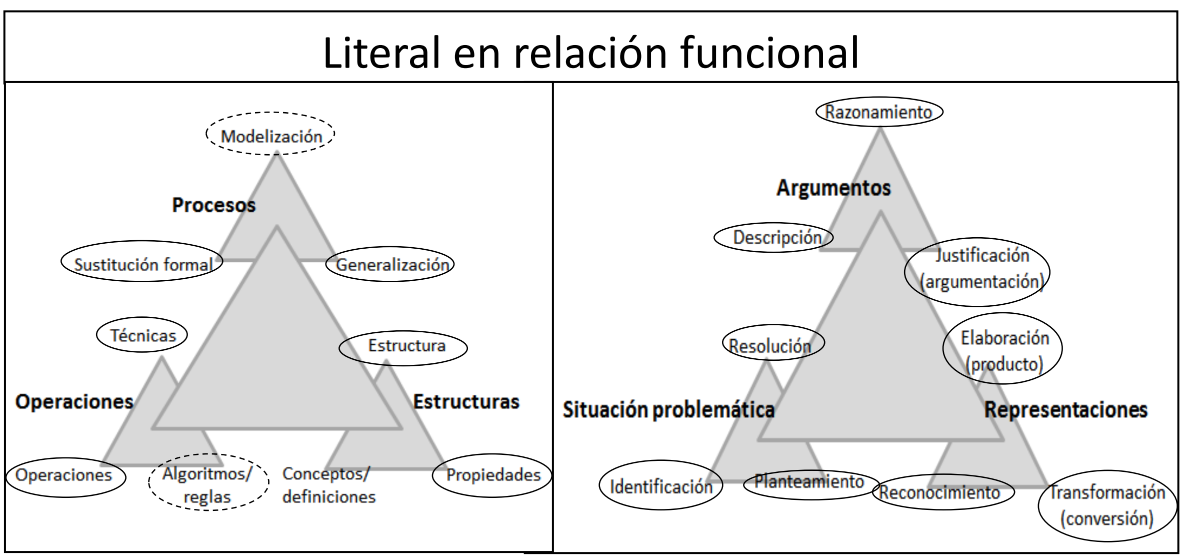


Imagen 38. Competencias que deben estar presentes en un estudiante para resolver eficazmente la situación problemática de la literal en relación funcional

En la imagen 38 se señala mediante ovoides las competencias que deben activarse al contestar una situación problemática tratando una literal en relación funcional, a continuación se describe la manera en que se espera que estarán presentes.

La primera pregunta (¿Llevo 39 escalones, cuántos pisos son?) espera que los estudiantes hagan una identificación de la lingüística y concluyan que cada 13 escalones son un piso, mediante cambios en la semántica que deduzcan que 39 escalones serán 3 pisos, de esta manera tendrán una primera idea de la estructura que debe de tener la solución, con apoyo de un planteamiento y una resolución de la situación problemática, a través de sustituciones formales.

…

La segunda pregunta (¿Cuántos pisos habré subido si subí 104 escalones?) considera que los estudiantes utilicen técnicas y operaciones para obtener un buen razonamiento, para dar una respuesta coherente y sean capaces de determinar los valores de la literal dependiente dados los de la literal independiente y viceversa. Pueden existir alumnos que hayan creado un algoritmo (regla) mentalmente.

…

La tercera pregunta (¿Cómo se puede expresar matemáticamente lo anterior?) prevé que los estudiantes elaboren una idea de generalización en cualquier registro (verbal, geométrico, aritmético o algebraico) y la expresen mediante una sustitución formal.

…

La cuarta pregunta (Si subo 910 escalones, ¿en cuál piso estaré?) espera que a partir de la idea de generalización de la respuesta de la tercera pregunta, busquen una estructura y propiedades que permitan llevarlos a dividir 910 entre 13 para obtener el número de pisos.

…

La quinta pregunta (¿De qué depende que conozcamos el número de pisos?) considera que los estudiantes tengan en cuenta una descripción de lo que hicieron en la respuesta anterior y en seguida hagan un razonamiento y una justificación para delimitar que el número de pisos depende de cuantos escalones haya que subir, esto lo puede representar en cualquier registro.

…

La sexta pregunta (¿Cómo pueden establecer una relación entre los pisos y los escalones?) pide que los estudiantes representen una relación para ello tienen que hacer un reconocimiento, una elaboración y una transformación de lo contestado anteriormente para llevarlo a otro registro mediante una sustitución formal.

…

La séptima pregunta (Expresen esa relación de forma matemática) pretende que la idea de generalización les quede más clara y puedan representarla mediante una sustitución formal, incluso pueden dejarla de la manera en que la contestaron en la pregunta anterior.

…

La octava pregunta (Si conocemos el número de pisos, ¿podremos saber cuántos escalones hay?) tiene la intención que los estudiantes hagan un razonamiento y concluyan justificando mediante una sustitución formal que, para saber el número de escalones se multiplican los pisos por 13, entonces para los pisos se tendrán que dividir los escalones entre 13.

…

La novena pregunta (Establezcan una manera de representar la relación entre escalones y pisos) espera que los estudiantes sepan rápidamente lo que tienen que contestar porque es lo mismo que las preguntas anteriores. Simplemente se espera que realicen una sustitución formal (en cualquier registro) y establezcan una expresión que indique una generalización.

…

¿Pensamiento numérico o algebraico?

La situación problemática cinco, está tomada de Ruano (2003), originalmente tenía la intención de que los estudiantes la contestaran considerándola como una incógnita específica; sin embargo, al aplicarla en un grupo de ESO obtuvieron resultados muy distintos; hubo diferentes soluciones, algunos consideraron la situación problemática como incógnita específica, otros de manera numérica y algunos otros encontraron literales que se adaptaban a desarrollar respuestas en relación funcional o como número generalizado.

La intención de aplicar esta situación problemática es detectar el tipo de pensamiento que predomina en los estudiantes: numérico o algebraico; en caso de que la respuesta sea mediante un razonamiento algebraico, se clasificará en un procedimiento de incógnita específica, número generalizado o en relación funcional.

Los estudiantes tienen que identificar primeramente la situación problemática para poder resolverla, después buscar una manera de expresarla en lenguaje numérico (o algebraico) y plantear una solución de las cuatro que se mencionaran (incluso alguna otra), el planteamiento de la solución requiere una sustitución formal para que quede expresada la situación problemática (en términos numéricos o considerando literales), en seguida se debe de hacer una modelización de los valores que se operarán, después se hacen la operaciones mediante distintas técnicas siguiendo la estructura de la situación problemática, dotando de coherencia a los conceptos trabajados.

Para resolver las operaciones tiene que haber un reconocimiento de lo que pide la situación problemática, con dicho reconocimiento se podrá elaborar una regla (aritmética o algebraica) que, mediante una transformación, llegue al resultado esperado; cuando se tenga una respuesta se tiene que razonar y justificar para que estén de acuerdo que en realidad es el resultado que pide la situación problemática, si convence a los estudiantes ellos habrán terminado y tocará el turno del investigador, analizar si la solución es correcta y detectar qué pensamiento utilizaron en esta situación problemática.

En este ejercicio no se establecerá un mapa de las competencias en el que se indiquen las posibles rutas a seguir, porque al considerar mínimamente cuatro rutas para la solución de la situación problemática, los caminos a seguir son bastantes, lo que se pretende en esta situación es caracterizar los conocimientos que deben utilizar los estudiantes para una solución adecuada en cualquier representación, después se hará un análisis de la rutas que utilicen, con la intención de caracterizar el tipo de pensamiento que muestran en la solución; los mapas de las competencias se elaborarán una vez que se tenga la información de lo que realizan los estudiantes. Es preciso tener en cuenta las distintas maneras por las que pueden resolver la situación problemática los estudiantes de una manera general, para tener una idea de las posibles respuestas que pueden ocurrir. En los siguientes esquemas se marcan los conocimientos que deben intervenir al resolver la situación problemática, tanto para el contexto como para el campo conceptual.

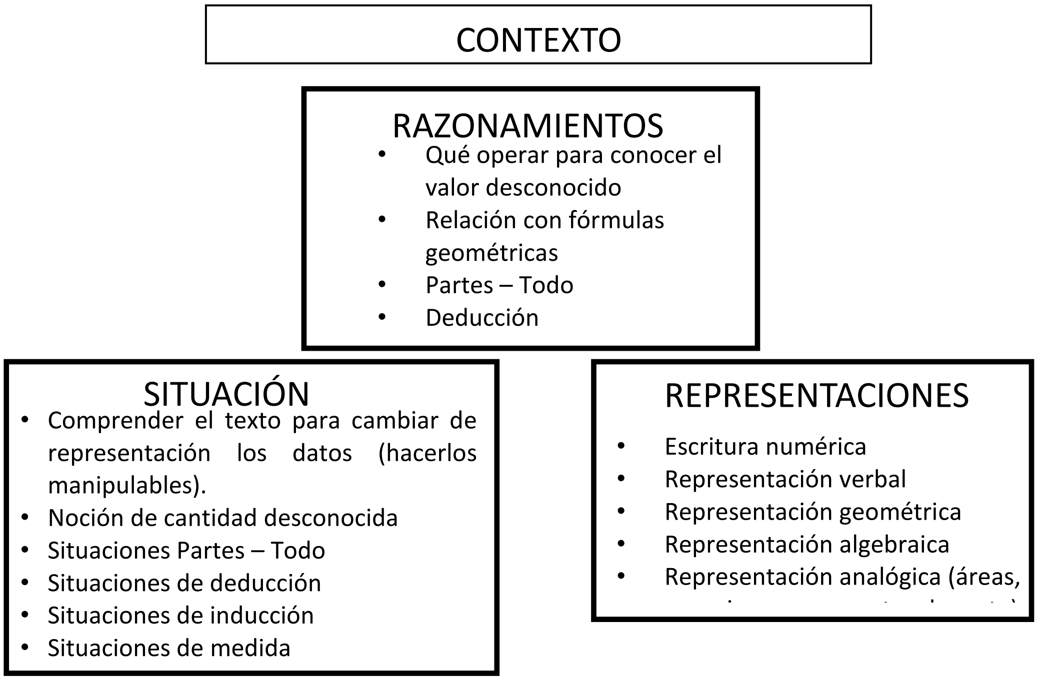


Imagen 39. Caracterización de los conocimientos correspondientes al contexto que deben estar presentes en un estudiante competente para resolver la quinta actividad en cualquier registro

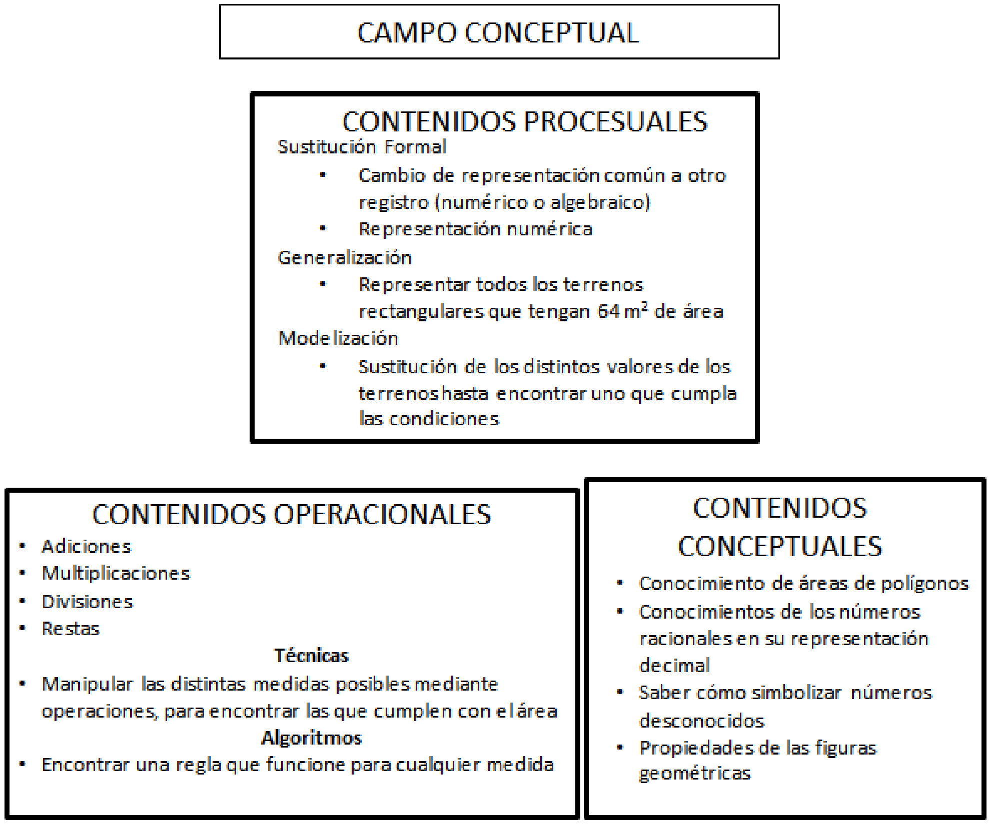


Imagen 40. Caracterización de los conocimientos correspondientes al campo conceptual que deben estar presentes en un estudiantes competente para resolver la quinta actividad en cualquier registro

En las imágenes 39 y 40 se mencionan los conocimientos que estarán presentes al contestar en cualquier representación la situación problemática. A continuación se determinarán cuatro posibles caminos a seguir en la resolución de esta situación problemática.

Con respecto a pensamiento numérico los estudiantes deben detectar que hace falta un valor para conocer todos los que menciona la situación problemática. Es necesario determinar ese valor, no es necesario mencionarlo como desconocido en la respuesta, simplemente deben tenerlo en la mente y encontrarlo mediante una división $(64/8)$ porque los datos de la situación problemática indican que un terreno mide la misma área $(96+64)$ que el anterior, sabemos que 96 resulta de multiplicar $(12)(8)$ y el terreno contiguo mide $64m^2$ de área y tiene el mismo fondo (8) así que al dividir $64/8$ dará el resultado de la medida del frente.

…

Para resolverlo a manera de incógnita específica, los estudiantes tienen que determinar que hace falta un valor, y que ese valor se puede representar mediante algún símbolo que indique un número desconocido estableciéndolo de alguna de las siguientes maneras:

$(8)(12+x) = 64 + 96$ u $8h = 64$

Dependiendo si consideran todo el terreno o solamente el terreno contiguo que falta saber la medida del frente.

…

Para resolverlo en relación funcional los estudiantes harán una tabulación con los distintos valores que puede tomar el terreno contiguo que tiene la persona al inicio de la situación problemática, teniendo en cuenta que siempre tiene que cumplir 64, porque eso mide el área.

Fondo	Frente
1	64
2	32
3	21.33
4	16
5	12.8
6	10.6
7	9.14
8	8
…	…

Considerando que siempre habrá una relación entre el fondo y el frente, porque tiene que cumplir al multiplicar dichos valores el área tiene que ser igual a $64m^2$.

…

Para resolverlo como número generalizado, se ha considerado que es más por ensayo y error, formas de resolución que muchas veces practican los estudiantes, por ejemplo, saben que el fondo del terreno es igual a $8m$, deciden buscar un número que al multiplicarlo por 8 dé 64, porque así lo indica la situación problemática, entonces los estudiantes comienzan a asignarle valores a una expresión que puede establecerse de la siguiente manera: $(8x)$ en la que x es el valor desconocido que se va a intentar buscar uno que al multiplicarlo por 8 dé 64, de esta manera los estudiantes están trabajando con las nociones de número generalizado.

…

Situación de Validación

La situación de validación se hará cuando todos los equipos ya hayan llegado a una solución, se le pedirá a alguno que pase a la pizarra a exponer sus respuestas ante los compañeros, en seguida por parte del profesor se cuestionará: ¿Todos están de acuerdo con ese resultado?, ¿por qué consideran así el resultado?, si tienen uno diferente, expliquen porqué el suyo es correcto, ¿cuál de los dos creen que sea verdadero?, ¿por qué? La intención de esta validación es rescatar los conocimientos utilizados por los estudiantes en la solución a los problemas, porque puede que hayan desarrollado una solución esperada, pero siguiendo otra ruta del mapa de conocimientos, o que se hayan quedado a medio camino.

En esta situación, a través de las intervenciones del profesor, se dejará en conflicto a los estudiantes, porque ellos son los que van a debatir los resultados (en caso de existan diferentes resultados). El papel del profesor en esta situación será sólo la de poner en controversia a los estudiantes que difieran del resultado; en caso de que los estudiantes concuerden todos con el mismo resultado, se les preguntará: ¿por qué ese resultado es correcto?, también es indispensable preguntar ¿quiénes lo resolvieron por otros métodos? aunque tengan el mismo resultado, así se detectará la forma en que piensan los distintos estudiantes y preguntar también a quienes no hayan terminado de contestar (en caso de que existan), esperando que a partir de las explicaciones se puedan caracterizar los conocimientos que utilizaron para resolver el problema y detectar la existencia de dificultades, errores y obstáculos, las distintas formas de razonar y los métodos que utilizan los diferentes equipos. Es importante que quien pase a exponer tenga una idea clara de lo que acaba de resolver, para ello es necesario observarlos en la resolución de las situaciones problemáticas.

Situación de Institucionalización

En esta situación ya los estudiantes están en común acuerdo con los resultados, ahora toca el turno del profesor; por ejemplo, después de que haya pasado un equipo a exponer frente a los demás compañeros, como se mencionó, ya todos los estudiantes estarán en común acuerdo con las respuestas. Ahora el profesor se apoyará de alguna respuesta de los estudiantes propiciando que lleguen a vincular la noción de literal y la puedan percibir como un número que varía y su valor es desconocido hasta que realizamos ciertos procedimientos; es preciso también afirmarles que de esa manera es como se trabajan los números que no conocemos y que pueden tener distintos valores.

Consideraciones finales

Las últimas dos situaciones (validación e institucionalización) se formalizarán cuando se tenga una caracterización del grupo, de esa manera se podrán considerar las preguntas que se deben de efectuar en un nivel que los estudiantes tengan desarrollado, y adecuándolas al contexto y la forma de trabajo en que estén acostumbrados.

La idea de la secuencia es analizar cuanto han desarrollado los estudiantes la noción de literal, y verificar si la pueden relacionar con situaciones problemáticas que pueden ser contestadas mediante otros procedimientos. El análisis que se realizará de la resolución de las situaciones problemáticas, pretende caracterizar más elementos que hacen falta para la buena inclusión del pensamiento algebraico.

En el análisis *a priori* se bosquejan algunas posibles maneras de que los alumnos contesten las situaciones problemáticas, pero se prevé que haya quienes utilicen otras rutas de conocimientos, o que no puedan llegar a concluir con un problema, en ese momento es cuando se utilizarán los elementos de errores, obstáculos y dificultades desarrollados en ELOS (Socas, 2001, 2007) para buscar el origen de esos errores y delimitar qué es plausible enseñar a los estudiantes y qué necesita una mejora o la consideración de distintos elementos para el inicio del pensamiento algebraico, encontrando herramientas que nos permitan llegar a lograr la transición entre el pensamiento numérico y el algebraico.

Para detectar el nivel de abstracción de un número que pueden lograr los estudiantes se determinará que quienes puedan resolver las actividades de incógnita específica tienen un nivel básico del manejo de la literal, porque saben representarla y manipularla para conocer el valor que va a tomar después de ciertos procedimientos, aunque es preciso señalar, como menciona Palarea (1998), que muchas ocasiones los estudiantes contestan ese tipo de actividades sin darle una representación a la letra, sino que sólo consideran un valor faltante. Por ello se tiene que seguir detalladamente las rutas que están utilizando los estudiantes el resolver las situaciones problemáticas.

Sí algún grupo de estudiantes logra resolver las situaciones problemáticas de incógnita específica y de número generalizado de forma como se prevé en el análisis *a priori*, se considerará que tiene un nivel medio de utilizar la literal; es decir, tiene una capacidad que le permite considerar al menos dos rutas de las competencias de conocimiento matemático, para la resolución de las situaciones problemáticas y sabe trabajar con la idea de número desconocido que tiene que tomar un valor para la primer situación problemática, y varios valores para la segunda.

Quienes sepan resolver las tres situaciones problemáticas de la forma que se tiene prevista, o de una similar, se considerará que su nivel para considerar la literal como un número es el adecuado para continuar con situaciones algebraicas más complejas; quien llegue a considerar los tres usos de la literal de una manera algebraica, es decir, simbolizando los números desconocidos con literales y sabiendo que el valor que tomarán no siempre será el mismo, podrá efectuar sin dificultad la última situación problemática, lo importante es observar que enfoque le dan a ésta, clasificar si continua con un pensamiento numérico o ha logrado tomar nociones del pensamiento algebraico.

Las situaciones problemáticas de esta nueva secuencia siguen estando consideradas para trabajarse dentro de los planes y programas de la SEP, porque se utilizan los tres usos de la literal, como propone que se trabaje los temas de Álgebra, lo que difiere a los planes es que no se trabaja en el orden que propone el currículo de la SEP (2006), sino que se les están conjuntando los tres usos de la literal en una serie de situaciones problemáticas consecutivas; los estudiantes ya han trabajado con generalizaciones y solución de ecuaciones de primer grado.

El análisis *a posteriori* caracterizará más herramientas que hacen falta para que los estudiantes aprendan a pensar algebraicamente; se tiene el referente que los estudiantes saben resolver ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, pero no saben atribuirle un significado cuando contextualizan un problema, considerando que no están aprendiendo Álgebra, sino que están aprendiendo a resolver problemas dentro del ámbito matemático.

Conclusiones

En este capítulo se indica qué puntos se cumplieron y cuáles no de los propuestos en los objetivos de la investigación; además, se intentará dar una respuesta a la pregunta que se formuló en el primer capítulo, describiendo la manera de comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico con alumnos de primer grado de secundaria, intentando obtener un buen desempeño al trabajar con temas referentes al Álgebra.

Se estableció la diferencia entre lo que es tener un pensamiento numérico y un pensamiento algebraico, propiciando que el pensamiento algebraico apoye a los estudiantes en la introducción al Álgebra en el momento que comienzan a trabajarla en la escuela secundaria, con la intención de obtener elementos que apoyen al desarrollo del pensamiento algebraico.

Las investigaciones analizadas y la experiencia docente dieron la idea de una problemática que tienen muchos estudiantes cuando dejan de trabajar un enfoque numérico en las Matemáticas escolares. Gracias a esa problemática surgió la necesidad de buscar un cambio en la estructura matemática que tienen los planes y programas de educación en México, porque proponen una distinta manera de desarrollar Matemáticas pero no se lleva a cabo de la forma en que está propuesto. El trabajo que se sigue realizando en las aulas generalmente requiere de mecanización sin razonamiento por parte de los estudiantes, por ello se pensó en cambiar la forma de considerar las situaciones problemáticas que tienen que resolver en las clases comunes de Álgebra.

Para la realización de este trabajo se llegó a diseñar, aplicar, validar y rediseñar una secuencia didáctica buscando herramientas en la caracterización de competencias para la transición entre la Aritmética y el Álgebra. El primer diseño de la secuencia buscaba que los estudiantes conocieran elementos que deben tener en cuenta al momento de comenzar a trabajar con el pensamiento algebraico; sin embargo, hizo falta un análisis de los conocimientos que poseen, ya que existen dificultades que no les permiten llegar a trabajar temas algebraicos desde un enfoque por competencias, sino que lo hacen de una manera mecánica, porque regularmente el contrato didáctico que se crea en su aula hace que el trabajo en clase sea de esa manera.

La aplicación de la secuencia permitió detectar que los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para trabajar situaciones problemáticas que pretenden cambiar la forma de considerar las Matemáticas; es decir, no es preciso cambiar drásticamente las formas de trabajo que tienen, porque no llegarán a algo más que dudas de lo que están haciendo. Se considera que el ambiente de trabajo debe de ser más confortable para que los estudiantes se sientan cómodos y trabajen libremente; para delimitarlo, tiene que hacerse una caracterización del grupo en el que se aplicará la nueva secuencia didáctica.

El diseño de la segunda secuencia tiene por objetivo detectar cuánto han desarrollado los estudiantes el pensamiento algebraico desde la fenomenología, funcionalidad y epistemología de las Matemáticas; al mismo tiempo, pretende que quiénes tengan un desarrollo de dicho pensamiento lo utilicen para resolver más fácil las situaciones problemáticas que están contenidas en esta secuencia. Se toman los conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes a través de la caracterización de las competencias de la CMF, para esperar resultados de los estudiantes competentes y analizar desde el origen, causas y efectos de los errores, obstáculos y dificultades de los otros que no lleguen a los resultados esperados.

Este nuevo diseño es una nueva propuesta que pretende trabajarse en una investigación posterior; para lograrlo hace falta delimitar más elementos como: el grupo de práctica con el que se efectuará, el número de estudiantes que es conveniente tener, un nuevo estado del arte para tener más elementos en cuenta al considerar las respuestas de los estudiantes y otras características que se mostrarán en una nueva investigación.

Contestando a la pregunta de investigación se ha llegado a comprender que para comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico con estudiantes de primero de secundaria, debe de analizarse el nivel que tienen para pensar algebraicamente y qué tan difícil les es pasar del pensamiento numérico al algebraico, de esa manera se caracterizarán las competencias que les hacen falta desarrollar para tener buenos fundamentos y comenzar a trabajar con un enfoque algebraico; existen más elementos que influyen en la forma de pensar de los estudiantes, como: el contrato didáctico que tienen en clase, la formas de enseñanza que utilizan los profesores comúnmente, las investigaciones que se han realizado con respecto a este tema y varios factores que se tomarán en cuenta en una nueva investigación.

No se han encontrado las herramientas necesarias para cambiar de un pensamiento numérico a un pensamiento algebraico, pero la aplicación de la secuencia didáctica, el análisis y el rediseño, proporcionan elementos que debemos tomar en cuenta para la aplicación de situaciones problemáticas referentes a Álgebra; sin embargo, antes de considerar los elementos es necesario hacer un análisis basado en las competencias matemáticas de la CMF que poseen los estudiantes, y con base en dicho análisis desarrollar situaciones problemáticas que estén al nivel cognitivo de los estudiantes. Además se elaboran actividades considerando los tres usos de la literal, para que les sea más fácil considerar números desconocidos como letras; al hacer esta acción, los estudiantes estarán preparados para adentrarse en el mundo del Álgebra, y si es necesario, debería de establecerse una tabla que intente categorizar el nivel de abstracción que poseen los estudiantes.

La hipótesis planteada permitió diseñar secuencias didácticas que promueven la obtención de elementos que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de primero de secundaria; al analizar el diseño, la aplicación y los resultados, mediante investigaciones de Matemática Educativa, se pudieron obtener más herramientas para el diseño de nuevas; mismas que es preciso diseñar en una primera instancia para detectar el nivel de conocimientos algebraicos que poseen los estudiantes, después de conocer la capacidad que tienen se planearán para promover el desarrollo del pensamiento algebraico, apoyando en la introducción al Álgebra. Una recomendación para futuras experimentaciones es que la comprobación ayuda a evaluar la claridad de las órdenes al someter a revisión la sintaxis por otras personas, por ello se pretende al realizar nuevos diseños y experimentaciones considerar mejor el tiempo para realizarlas y tener una estimación del tiempo necesario para la aplicación definitiva.

Al categorizar los niveles de pensamiento algebraico que poseen los estudiantes no se pretende estandarizar algo común para todos; se pretende detectar qué tanto les hace falta el desarrollo de competencias para lograr un cambio de enfoque de las Matemáticas de numérico a algebraico. Una vez que se tenga delimitado el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, se diseñarán situaciones didácticas correspondientes al nivel que muestran buscando que las comprendan y razonen para propiciar que piensen algebraicamente.

En esta investigación se pudieron detectar limitaciones creadas por las organización de la escuela en que se aplicó la secuencia didáctica, para erradicar dichos inconvenientes, se tiene la idea de aplicar la nueva secuencia bajo un ambiente más controlado y considerar el apoyo de entrevistas a los alumnos con quienes se aplique, para delimitar mejor la forma de pensar que tienen con respecto al Álgebra.

Derivado de esta investigación, se publicó en la revista "*Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*" de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (España), un reporte de investigación que narra la situación problemática de literal como número generalizado, considerando algunos de los elementos que contiene este documento; además se ha mandado a revisión otro reporte a la revista *Números* de la Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas "*Isaac Newton"*, en las Islas Canarias (España).

Al realizar una estancia en la Universidad de La Laguna, en la ciudad de San Cristóbal de La Laguna, Tenerife, España, fue muy benéfica para esta investigación. Gracias a la ayuda y la amabilidad de los Dres. Martín M. Socas Robayna y Ma. de las Mercedes Palarea Medina se pudo concretar el proyecto con un rediseño de la secuencia basado en ELOS, dotando de herramientas que permiten caracterizar elementos que pueden ayudar a los estudiantes en la entrada del mundo del Álgebra, dichos elementos pueden estar contenidos en distintas teorías de la Matemática Educativa; sin embargo, no discrepan con los obtenidos en ésta.

El haber estudiado la Maestría profesionalizante en Matemática Educativa ha propiciado que mis clases sean más reflexivas y analíticas, intentando analizar las problemáticas que presentan los estudiantes con la finalidad de que ellos realmente aprendan. Además me ha hecho reflexionar sobre las nociones matemáticas que tienen los estudiantes, buscando formas de trabajo que estén acordes a ellas; todo esto con la finalidad de que los alumnos vean las Matemáticas como una materia recreativa en la que pueden desarrollar variadas formas de pensar y no sólo las propuestas por el profesor para resolver situaciones problemáticas, generando un razonamiento propicio en los estudiantes para el conocimiento de las Matemáticas.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2002), Learning Mathematics in a CAS Environment: the genesis of a reflection about Instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática*, 13 (3), 5-21.

Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra. *"Álgebra: enseñanza, aprendizaje y evaluación" organizado por el departamento de Cs. Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Cs. de la Educación.* U.N.L.P entre junio y noviembre del año 2004.

Billings, E., Tiedt, T. y Slater, L. (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics, 14* (5), 302–308.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques.* 4 (2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, *Universidad Nacional de Córdoba*, *Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática*, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (2002). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sainz (comps.). *Didáctica de las matemáticas, aportes y reflexiones* (pp.65-94). Buenos Aries: Paidós Educador.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1) 113-148. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática,* 22 (3) pp. 55-86. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516678004.

Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, *Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática,* Granada, España.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Cortes, A., Vergnaud, G., Kavafian, N. (1990) From Arithmetic to Algebra: negotiating a jump in the learning process. *Proceedings of the 14th PME Conference*, 2, 27-34.

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: *definición, epistemología, objeto de estudio. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 1 (2), Costa Rica.

Fregona, D. y Orús, P. (2009). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática. Buenos Aires: Zorzal.

Gálvez, G. (1994), La didáctica de las matemáticas, en *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*., C. Parra, I. Saiz (comp.), Buenos Aires: Paidós Educador.

Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En *Didáctica de las Matemáticas, aportes y reflexiones.,* C. Parra e I. Sainz (comps.). (pp.39-50). Buenos Aries: Paidós Educador.

Godino J., Castro W., Aké L. y Wilhelmi M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. Boletim de Educação Matemática, *Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho*, *26 (42B)* abril, 483-511.

Institut de Recherche sur l' Enseignement des Mathématiques, (IREM) de Grenoble. (1980). *Bulletin de l' Association des professeurs de Mathématique de l' Enseignement Public*, 323, 235-243.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Matz, M. (1980). Towards a Computational. Theory of Algebraic Competence. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, 3, 1, 93-166.

Mcintosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics,* 12(3), 2-44.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3* (3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics. (1992). *Algebra for the Twenty-first Century: Procedings of the August 1992*. Conference. Virginia, EUA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics and Mathematical Sciences Education Board (NCTM and MSEB). (1998). *The Nature and Role of Algebra in the K–14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium.* Washington, EUA: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles ans Standars for School Mathematics*. Virginia, EUA: NCTM.

Obando, G. y Vásquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica.* Curso dictado en 9.° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. *Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático*. Universidad de La Laguna. Tenerife, España.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 40, 3-28.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primero aprendizajes del álgebra, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6* (1), 41-72.

Panizza, M. (2003). “Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas” en Panizza (comp.) Enseñar matemática en el Nivel Inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y Propuestas. Buenos Aires: Paidós.

Peled, I. y Carraher, D.W. (2007). Signed numbers and algebraic thinking. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ, Erlbaum*, pp. 303-327 (now Taylor & Francis).

Pierce, C. (1931-1935 y 1957-1958). *Collected Papers,* Cambridge, Harvard University Press; (1958): *Selected Writings,* Dovers Publications Inc., Nueva York, ed. Philip P. Wiener; (1977): *Semiotic and Significs: The correspondence between Charles S. Pierce ad Victoria Lady Welby,* Indiana University Press, Bloomington y Londres, ed. Charls S. Hardwick.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%A1lgebra.

Real Academia Española (2001). Generalización. *Diccionario de la lengua española* (22.[a] ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=generalización

Real Academia Española (2001). Incógnita. *Diccionario de la lengua española* (22.[a] ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=incógnita

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (23.[a] ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=medio.

Real Academia Española (2001). Variable. *Diccionario de la lengua española* (22.[a] ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=VARIABLE

Rico, L. y Castro. E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico.* Documento no publicado (Informe). Granada: Universidad de Granada, España.

Rodriguez, C. (2013). *Situación didáctica de problemas aditivos: un estudio con un grupo de primer grado de primaria*. Tesis de Maestría. Unidad Académica de Matemática, Universidad Autónoma de Zacatecas.

Rojas, P. (2010). Iniciación al álgebra escolar: Elementos para el trabajo en el aula, *Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Memoria 11.° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Colombia, 115-131.*

Ruano, R. (2003). *Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Matemáticas: Implicaciones didácticas.* Tesina de Licenciatura. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* 312-322.

Secretaría de Educación Pública. (2006). Educación Básica. Secundaria, Matemáticas. *Programa de Estudio.* México, D. F.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Educación Básica. Secundaria, Matemáticas. *Programa de Estudio.* México, D. F.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra throughout the K–12 Curriculum. In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics,* edited by Jeremy Kilpatrick, W. Gary Martin, and Deborah Schifter, 136–50. Virginia, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En Rico, L. y otros (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (1999). Perspectivas de Investigación en Pensamiento Algebraico. *Investigación en Educación Matemática. Tercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 261-282.*

Socas, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Ess.), *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI* (19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. En M. M. Socas, M. Camacho, A. Morales y A. Noda (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* (9 – 42). Tenerife, España: Ediciones «Campus».

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.

Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). *Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática*. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012 (1 - 22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Trujillo, P. (2008). Procesos de generalización que realizan futuros maestros (Tesis de maestría inédita). *Departamento de didáctica de la matemática, Facultad de Ciencias de la Educación*, Universidad de Granada. Granada, España.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental*. Una propuesta alternativa. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches francaises en didactique des mathématiques. In Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME Internacional Conference*, 2, 7-17.

Vergnaud, G. (1987). About constructivism. *Proceedings of the twelfth Conférence for the Psychology of Mathematics Education*, Montréal, pp. 42-54. (invited plenary address).

Yackel, E. (2002). “A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades.” In *Putting Research into Practice in the Elementary Grades*, edited by Donald L. Chambers, 197–201. Virginia, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXOS

Anexo A. Hojas de trabajo de la primera aplicación

Situación problemática 1. Incógnita específica

Mary viajó desde su casa al norte de la ciudad para ir a una fiesta a la casa de Ale, cuando Mary estaba ya en la fiesta le habla por teléfono su papá y le dice que necesita que vaya a recogerlo porque se le ha descompuesto el carro, entonces Mary le pregunta que a dónde. El papá le dice que si está en casa de Ale recorra 61 km. hacia el sur, quedando a 17 km. al sur de su casa.

- ¿A qué distancia está la casa de Ale de la casa de Mary?
- ¿Cómo podemos expresar este problema con términos matemáticos? Exprésenlo
- Establece otra manera matemática de representar el recorrido de Mary.
- ¿Si el papá estuviera en otro punto de la ciudad, más al sur o al norte, podríamos establecerlo matemáticamente sin saber su distancia?
- ¿Existirá alguna forma general matemática que represente la distancia que recorrió Mary para ir a casa de Ale? ¿Cómo podrías establecerla? ¿por qué lo consideran así?

Situación problemática 2. Número generalizado

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

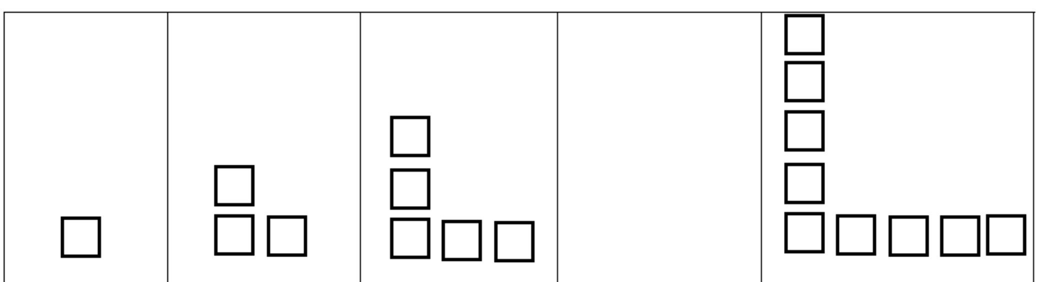


Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

Dibujen la Fig. 4

Describan cada figura, relacionándolas entre sí.

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?

¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?

¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?

¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

Situación problemática 3. Relación funcional

En la playa nos encontramos con una tortuga que llevaba bastante tiempo caminado y decidimos tomarle el tiempo que tarda en caminar, detectamos que recorre 10 metros en 15 minutos, en los siguientes 15 minutos recorrió 8, los siguientes 15 minutos sólo recorrió 6 metros.

- ¿Si la tortuga continua caminando durante 30 minutos, cuántos metros creen que recorrerá en los próximos minutos?
- ¿Creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente? ¿por qué?, si se detiene completamente ¿qué pasará después?
- Considerando que la tortuga llevaba 60 minutos caminando, ¿Cuántos metros creen que recorría cuando comenzó a caminar?
- ¿Cómo se podría representar matemáticamente el trayecto de la tortuga?
- ¿Existe alguna regla o forma general que represente el movimiento de la tortuga? Exprésenla.

Anexo B. Hojas de trabajo modificadas

Situación problemática 1. Incógnita Específica

Un terreno en venta le interesa a una constructora para edificar un rascacielos, el terreno mide 280m^2 de superficie y sus dimensiones son: 16m de fondo, de frente no sabemos porque el cartel en el que se anuncia es el siguiente:

7. Representen la situación problemática de otra manera.
8. Establezcan matemáticamente una representación del problema.
9. ¿Cuánto mide el frente del terreno?
10. Expliquen el procedimiento que utilizaron para encontrar el valor del frente del terreno.
11. El dueño del terreno le dice a la gente de la constructora que pueden representar y, en consecuencia, saber cuánto mide el frente del terreno de la siguiente manera

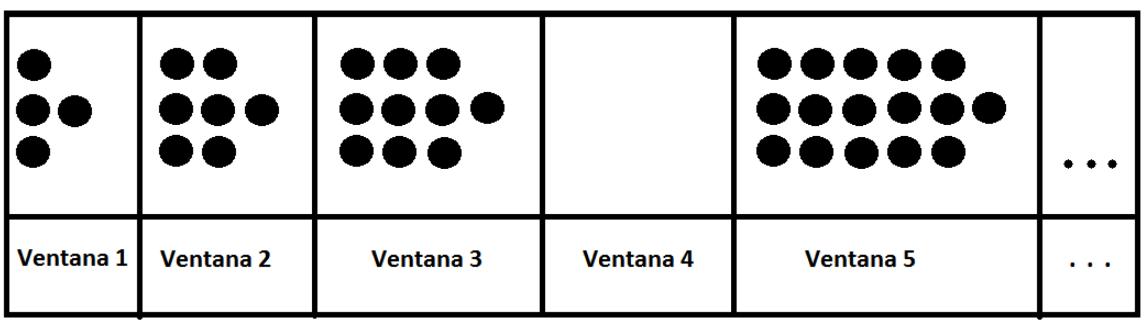
$$16b=280$$

¿Será una manera correcta o incorrecta? ¿Por qué?

12. ¿Qué representa la letra *b*?

Situación problemática 2. Numero generalizado

Una vez adquirido el terreno, la compañía comienza a construir el edificio, en los planos se dan cuenta que se ve muy simple, por lo que deciden trazarle una serie de dibujos a las ventanas para que llame la atención de las personas que lo vean, los dibujos van incrementando con respecto a los anteriores y son los siguientes:



Contestar los siguientes apartados.

11. Dibujen los puntos que deben ir en la cuarta ventana y expliquen porqué consideran esa figura.
12. ¿Pueden ubicarse los puntos en cualquier orden? ¿por qué?
13. Establezcan la relación y las diferencias que hay entre cada ventana.
14. ¿Cuántos puntos tendrá la ventana 10?
15. ¿Cuántos puntos tendrá las ventana 25?

16. ¿Cuántos puntos tendrá la ventana 67?
17. ¿De qué forma podemos comprobar que cada ventana tiene en realidad esos puntos?
18. Expresen alguna regla que funcione para conocer el número de puntos que debe de haber en cada ventana.
19. Si el rascacielos se va a prolongar hasta un piso que aún no se sabe, pero se tiene pensado que puede llegar a ser el más alto del mundo, ¿cómo podríamos saber la cantidad de puntos que va a tener la ventana 136?
20. ¿Cómo podríamos saber el número de puntos que corresponde a cada ventana?

Situación problemática 3. Incógnita Específica

La constructora piensa construir más edificios, la persona que les vendió el terreno en el que están edificando el rascacielos les comentó que tiene otro terreno con la misma longitud de fondo, pero que tiene una superficie de 296m^2.

3. ¿Cómo podemos saber la medida del frente de este terreno?
4. ¿Cuánto medirá el frente de este terreno?

Situación problemática 4. Relación Funcional

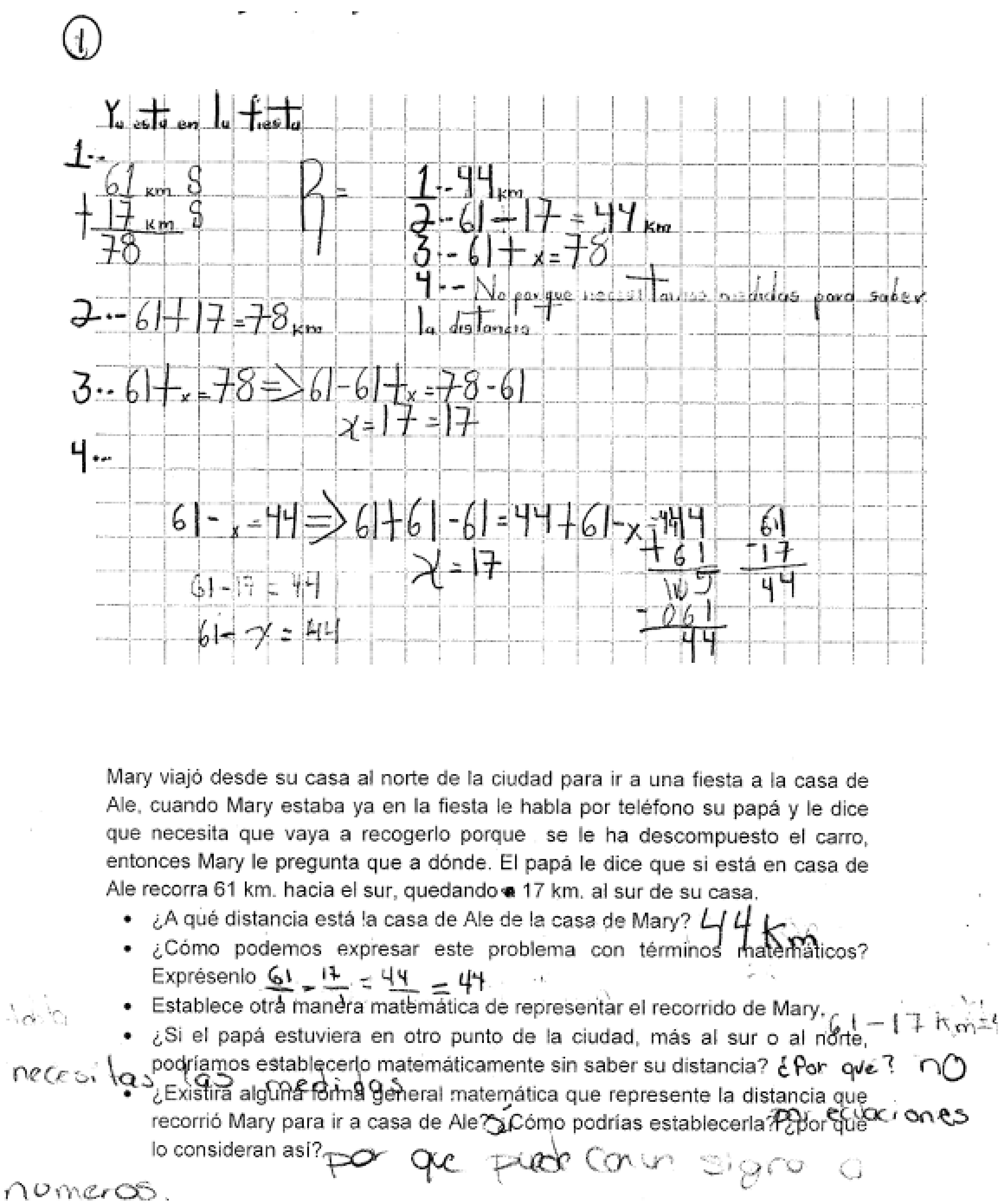
El edificio ya se encuentra en construcción y lo están distribuyendo por pisos, pero aún no tienen la seguridad de cuántos pisos llevan construidos; deciden ir a otro edificio similar construido por la misma empresa a buscar alguna manera de contar los pisos; un trabajador se da cuenta que para llegar a cada piso tienen que subir 13 escalones; en la estructura que se está edificando comienzan a subir escalones para saber cuántos pisos llevan.

10. Llegando al edificio un trabajador sube 39 escalones y pregunta, ¿llevo 39 escalones, cuántos pisos son?
11. A otro trabajador le surge la duda -¿cuántos pisos habré subido si subí 104 escalones?
12. ¿Cómo se puede expresar matemáticamente lo anterior?, exprésenlo.
13. Otro trabajador pensó, -si subo 910 escalones, ¿en cuál piso estaré?
14. ¿De qué depende que conozcamos el número de pisos?
15. ¿Cómo pueden establecer una relación entre los pisos y los escalones?
16. Expresen esa relación de forma matemática.
17. Si conocemos el número de pisos, ¿podremos saber cuántos escalones hay?
18. Establezcan una manera de representar la relación entre escalones y pisos, para saber rápidamente cuantos pisos debe de haber si nos dicen el número de escalones.

Situación problemática 5. ¿Pensamiento numérico o algebraico?

Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio: ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

Anexo C. Hojas de trabajo de los estudiantes



1

Ya está en la fiesta

1.- 61 km S
+ 17 km S
78

R= 1.- 44 km
2.- 61 − 17 = 44 km
3.- 61 + x = 78
4.- No porque necesitamos las medidas para saber la distancia

2.- 61 + 17 = 78 km

3.- 61 + x = 78 => 61 − 61 + x = 78 − 61
x = 17 = 17

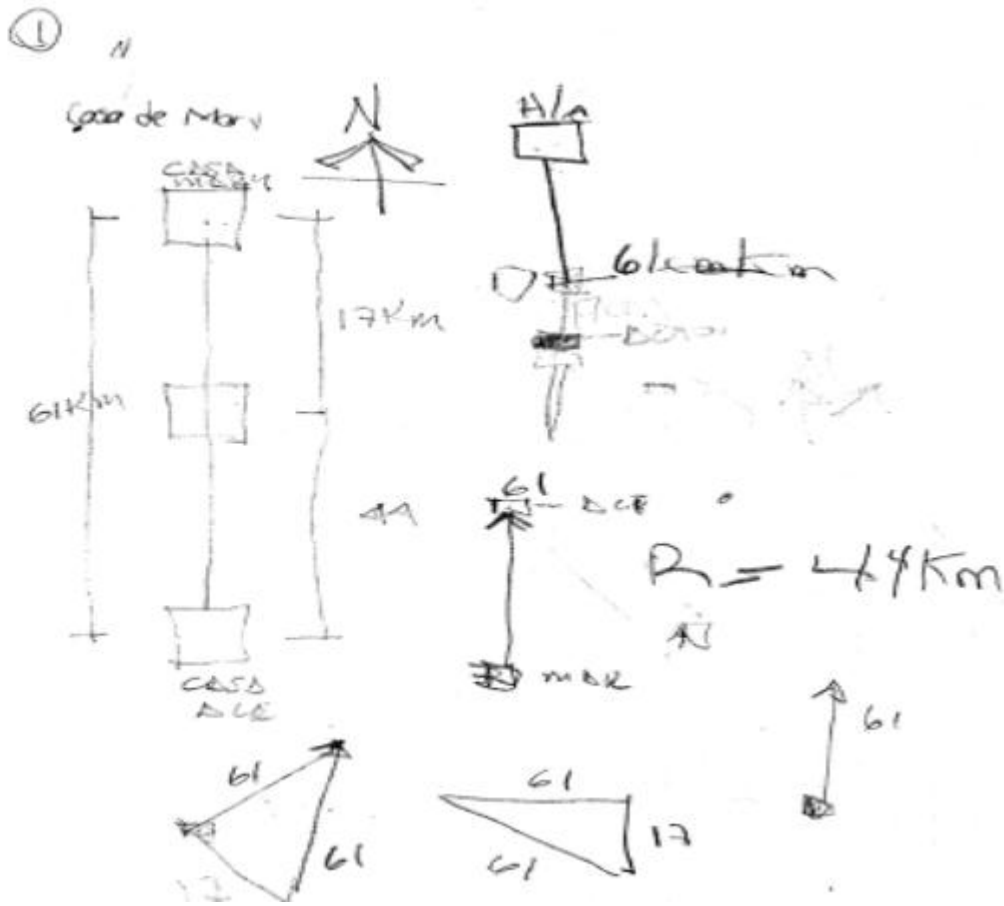
4.-

61 − x = 44 => 61 + 61 − 61 = 44 + 61 − x
x = 17

61 − 17 = 44
61 − x = 44

Mary viajó desde su casa al norte de la ciudad para ir a una fiesta a la casa de Ale, cuando Mary estaba ya en la fiesta le habla por teléfono su papá y le dice que necesita que vaya a recogerlo porque se le ha descompuesto el carro, entonces Mary le pregunta que a dónde. El papá le dice que si está en casa de Ale recorra 61 km. hacia el sur, quedando a 17 km. al sur de su casa.

- ¿A qué distancia está la casa de Ale de la casa de Mary? 44 Km
- ¿Cómo podemos expresar este problema con términos matemáticos? Exprésenlo 61 − 17 = 44 = 44
- Establece otra manera matemática de representar el recorrido de Mary. 61 − 17 km = 44
- ¿Si el papá estuviera en otro punto de la ciudad, más al sur o al norte, podríamos establecerlo matemáticamente sin saber su distancia? ¿Por qué? no necesitas las medidas
- ¿Existirá alguna forma general matemática que represente la distancia que recorrió Mary para ir a casa de Ale? Sí ¿Cómo podrías establecerla? Por ecuaciones ¿por qué lo consideran así? por que puede con un signo a numeros.



- 78000 m
- Sabemos razonar matematicamente
- 61 + x = 78 → 78 - 61 = 17

- No - no hay numeros
- Si ya lo isimos
- Si van de en dos en dos
- 18
- 45
- 146
- Si por que multiplicamos
- multiplicamos
-

1era: 44 Km.
2do:
Restamos 61 − 17 lo cual nos dio de resultado = 44 Km para ver la distancia que es de la casa de Ale a la casa de Mary
3ero: Mary viajo 61 Km hacia el sur despúes quedó 17 Km al sur de su casa esos 2 números se restan y así podemos sacar el resultado.
4: no, por que no podemos llegar a un lugar sin medidas.
5: Si, asiendo Operaciones, porque así es de manera más facil.

1– R = 78 Km

$$\begin{array}{r} 61 \\ 17 \\ \hline 78 \end{array}$$

2– Sumar lo indicado

3– Croquis

4– no, porque no sabemos comprecicion su distancia

5– si sumando Porque es lo mas correcto

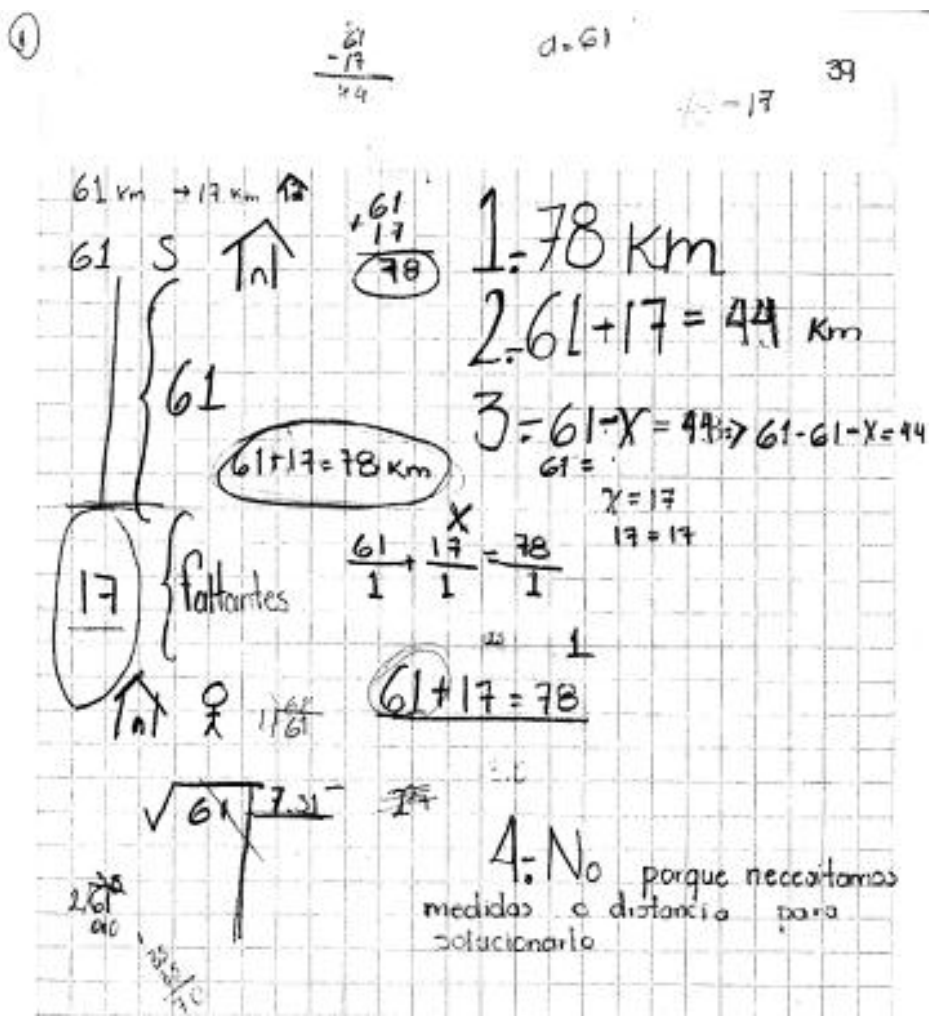
1: 78 Todos de acuerdo

2: 61 + 17 = 78 km

3: 100 - 22 = 78 km

4: No ¿porque? no tiene las distancias necesarias

5: Si - sumando o dividiendo las distancias.- Son faciles de comprender



#1 Nosotros creemos que la 1ra respuesta se obtiene sumando las 2 distancias

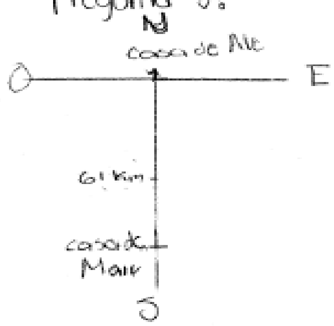
$$\begin{array}{r} 17 \\ +\;61 \\ \hline 78 \end{array} \quad R= 78\text{ km}$$

#2

$61x+17x=$ $61\times1000+17\times1000=78000$

$x=1000$ esta es la respuesta que creemos que es del segundo problema.

Pregunta 3:



Pregunta 4: no porque aún no sabemos cuál es la distancia correcta

---

(1) 61
+17
75 km

(2) $\frac{61}{1} = \frac{44}{1} = 1$

(3) 61
−17
44

(4) No porque necesitamos tener la distancia en ... para poder hacer operaciones.

14 Enero del 2014

1. ... cuadritos
2. Los cuadros van en orden de 6 en 6 consecutivamente.
3. 10 · 14
4. 25 − 49
5. 73 − 145
6. $n\times2-1=x$ ($n=73$

15 Enero 14

1. 6 metros en 30 minutos.

$$\begin{array}{r} 61 \\ -\ 17 \\ \hline 44 \text{ Km} \end{array} \qquad \frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$$

61-17=44

no porque no tenemos los datos
si tenemos teniendo los datos necesarios, para obtener los resultados matematicamente.

$$\frac{61}{1} = \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$$

10

17 Km = 61 = 44

$$\begin{array}{r} 17 \\ +17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 61 \\ -17 \\ \hline 44 \end{array}$$

2)

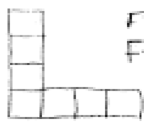


Fig. 10 R = 19, Fig. 25 R = 49 Fig. 73 = 145
Fig. 73 R = 145
npx2 -1 Formula

al 25 ... 48 ... 73
... 25 = 49 ...

$$\begin{array}{r} 48 \times 2 \\ \hline 96 \\ +49 \\ \hline 145 \end{array}$$

Otro procedimiento es el 2 porque va de 2 en 2 - 1 porque parte del 1
2 × 73 = 146 - 1 = 145

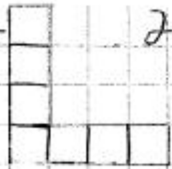
$$\begin{array}{r} 61 \\ -17 \\ \hline 44 \end{array} \qquad 44 \qquad \begin{array}{r} 90 \\ 23 \\ \hline 123 \\ 23 \\ \hline 146 \end{array}$$

1 = 44
2 = 22 + 22 = 44 —— 12 + 12 + 20 = 44
3 = Si

Ce

②
1 = ✓
2 = V.a. aumentando segun su sucesion cada vez más de dos en dos
3 = 18 porque multiplicamos 9 x 2
4 = 49
5 = 145
6 = Aporlandonos de las figuras anteriores
7 = ...
8 = Si siguiendo su secuencia

2

1.- 

2.- Cada vez una figura aumenta 2 cuadros

3.- 19 cuadros tendra la fig. 10

4.- 48 cuadros tendra la fig. 25

5.- 139 cuadros tendra la fig. 73

6.- Multiplique los cuadritos que tiene la fig. 10 y les sume los cuadros de la fig. 3

8.- Si porque va aumentando 2 cuadros en cada fig.

7.- 1+2 = 3+2 = 5+2 = 7+2 = 9.......

$$\begin{array}{r} 19 \times 7 \\ \hline 133 \\ +\ \ 5 \\ \hline 139 \end{array}$$

Respuestas:

2= Cada figura va aumentando de 2 en 2, cada figura va aumentando de cuadritos depende el numero de figura que sea

3= 19

4= 49

5= 145, 2n-1

6= Hicimos una tabla con los multiplos de 2 hasta llegar al número indicado

7= Ir sumando de 2 en 2

8= Si, es sacando los multiplos de 2 en 2 podemos ir sacando los números que se nos piden

10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20
19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

21-22-23-24-25
41 43 45 47 49

26-27-28-29-30-31-32-33
51 53-55-57-59-61-63-65

34 35 36 37 38 39 40 41
67-69 71 73-75-77-79-81

42 43 44-45-46-47-48-49
83-85-87-89-91-93-95-97

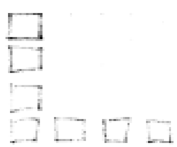
50-51-52-53-54-55-56-57
99-101-103-105-107-109-111-113

58-59-60-61-62-63-64-65-66
115-117-119-121-123-125-127-129-131

67-68-69-70-71-72-73
133-135-137-139-141-143-145

②

1.



2: Son cuadrados, tienen el mismo angulo y va de 2 en 2

3: 19 cuadros

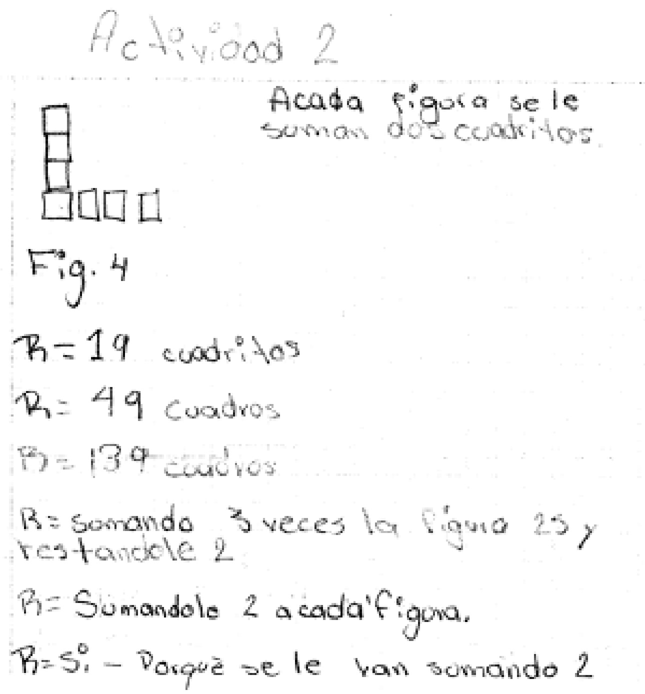
4: 49 cuadros

5: 145 cuadros

6: multiplicando 73 x 2

7: Cada vez aumentan mas y mas

8: Si, 2 x cualquier numero.



Actividad 2

Acada figura se le suman dos cuadritos

Fig. 4

R= 19 cuadritos

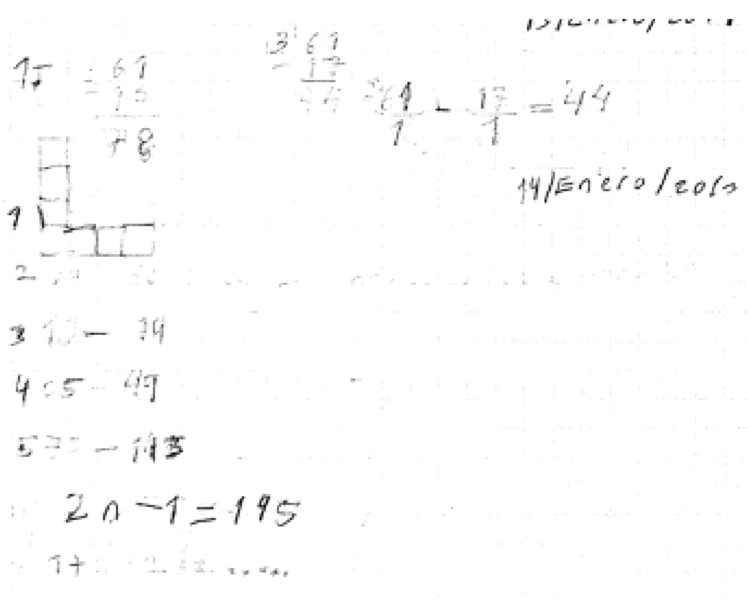
R= 49 cuadros

R= 139 cuadros

R= sumando 3 veces la figura 25 y restandole 2

R= Sumandole 2 a cada figura.

R= Si – Porqué se le van sumando 2



14/Enero/2010

78

2n − 1 = 195

① 61 + 17 = 78 Km

② $\frac{61}{1} = \frac{44}{1} = 44$

③ 61 − 17 = 44

④ No porque necesitamos tener la distancia en números para poder hacer operación.

© 14 Enero 14

1° 7 cuadros
2° Los cuadros van en orden de 2 en 2 consecutivamente
3° 10 − 19
4° 25 − 49
5° 73 − 145
6° $n \times 2 - 1 = x$ $(n = 73)$

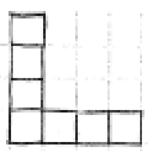


fig. 4

2. Cada vez una figura aumenta 2 cuadros
3. 19 cuadrados la figura 10
4. 48 cuadros la # 25
5. 139 cuadros tendría la # 73
6. Multiplicamos los cuadritos de la fig. 10, le sumamos los de la fig. 3
7. 1+2 = 3+2 = 5+2 = 7+2 = 9+2...
8. Sí porque va aumentando 2 cuadritos cada figura

$73a - 1 = 145 = \frac{73a}{73} = \frac{145}{73}$

10 − 15
8 − 15
6 − 15
+4
2 = 30

A
2 − 0

10 − 15
30

10
8
6
4
2
0

1/8

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

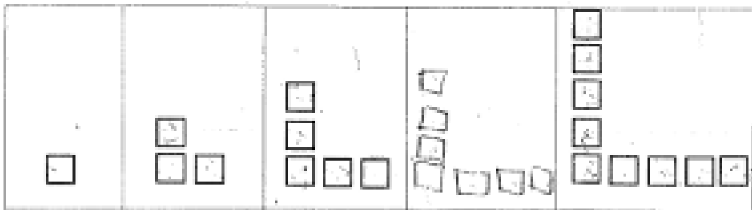


Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

19,
19
(9)
37

- Dibujen la **Fig. 4**
- Describan cada figura, relacionándolas entre sí.
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10? 19
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25? 49
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73? 145
- ¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73? Cada vez que era dif num. se le iva
- ¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas? Recalle todas
- ¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

45x2 + 90 23x90 a

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

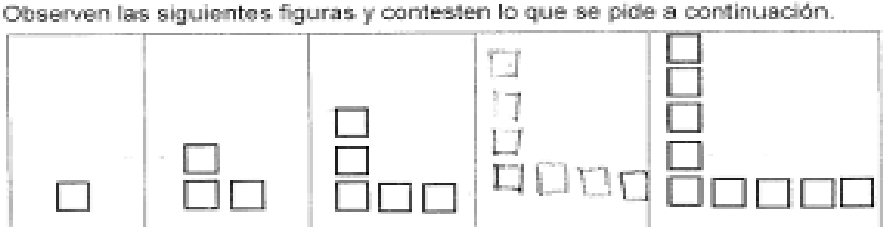


Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

- Dibujen la **Fig. 4**
- Describan cada figura, relacionándolas entre sí.
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?
- ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?
- ¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?
- ¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?
- ¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

10 me 15 minutos
8 m 15 minotos. disminuyo
6 m 15 minotos
recorrio

R= 18 minutos

R= Si ¿porque? Se cansaria se quedaria en el mismo lugar.
R= 28 metros.

R min	15	15	15	15	15	15
metros	10	8	6	4	2	0

R= 40 metros

R= Si Haciendo una tabla con los minotos y metros que caminan.

Anexo D. Transcripciones de las clases

Transcripción de clases de en la secundaria Francisco García Salinas, Jerez Zacatecas.

Actividad 1

Profesor- bien, tengan buen día, de lo que se trata (hablan varios Alumnos, al mismo tiempo) en equipo como están distribuidos ya, fíjense bien , se les va a dar un papelito a cada equipo y queremos que todo el equipo se integre a resolver el problema, uno de ustedes de cada equipo nombran a un secretario, para que el secretario en una hoja, ya sea de libreta o una hoja blanca anoten los cálculos y los resultados de sus problemas, van a leer perfectamente una o dos veces jóvenes y contestan… conocimiento van a poner en práctica lo que han aprendido aquí, se les va a distribuir a cada equipo su problema, disponen de quince minutos.

El profesor pasó al frente del grupo y leyó la actividad pidiendo a los estudiantes que atendieran a lo que él estaba leyendo, los alumnos escucharon y les preguntó si sabían lo que tenían que hacer y ellos contestaron que sí, encontrar la distancia entre las casas de Mary y de Ale.

Comienza a repartir los problemas y en cuanto se calló el profesor los alumnos comenzaron a hablar y uno a levantarse a bailar para que lo viera la cámara. (no se distingue lo que hablan los alumnos y están hablando la mayoría).

Investigador: ¡Equipos!, sssshhht.

Los estudiantes trabajan en equipos y se escucha bastante ruido.

Un equipo vuelve a leer el problema, otro equipo está esperando a que el encargado del equipo les diga que hacer y él está observando la actividad.

Investigador. Pero todos Toño.

Toño: si estamos hablando acerca de eso.

El profesor pasa a otro equipo, cuando llega con los alumnos se escucha.

Alumno1. Saquen su cuaderno.

INVESTIGADOR. Si saquen sus cuadernos

Manuel: ¿los cuadernos?

Investigador. Si o ¿Dónde van a contestar?

Alumno2: ¿me da un problema?

Investigador. ¿en el aire? los alumnos de ese equipo se ríen.

Se dirige el profesor a otro equipo

Investigador: ¿alguna duda niños?

Leo: ahorita no.

El profesor se dirige a otro equipo.

Investigador. A mi me dijeron que si eres bien listillo y que si sabes eh.

Lupita: ¿cuánto va a ser?, 78, voltea a ver al profesor y sonríe.

Investigador. A ver espérense, si contestas 78, digan porque 78. Que queden los cuatro bien convencidos que sea 78 el resultado, cada quien de sus ideas, entonces nada más que alguien anote por favor qué es lo que pensaron y qué es lo que dijeron.

Ali tiene en su cuaderno una suma de $61 + 17$

Profe, Profe… se escucha la voz de un alumno.

En otro equipo los alumnos se encuentran leyendo el problema nuevamente.

En otro equipo comenta Nallely: Luego lo dices, pero 17 km de su… de su casa entonces son 61 más 17. Señalando en un gráfico que había construido.

Representación gráfica del equipo de Nallely

Discuten en su equipo, una compañera le dice 17 más, más…

Nallely: ¡más 61!

Investigador. A ver espérate, ¿Dónde está el carro?

Alumnas: ¿el carro?

Investigador: el carro descompuesto ¿dónde está?

Alumnas. A ver, si aquí está… (Observan el gráfico que habían hecho, dibuja otra vez el carro y la casa de Ale debajo del carro) el carro y aquí la casa de Ale (señalándola en el dibujo).

Investigador: ¿al sur o al Norte?

Mary. Al sur

Nallely: no estaba…

Mary: que diga al norte, y luego, este se fue a la casa de Ale y recorrió 61 km. hacia el sur. Y luego dice que en el sur, quedando 17 km al sur de su casa, este aquí están los 61 km y baja 17 para llegar a su casa (contemplando el mismo gráfico), sumando este.

Investigador. A ver fíjese, primero… comprenda el problema, ¿segura que así?

Mary: ¡Si!

INVESTIGADOR: ¿Dónde quedó? Señalando en la actividad la distancia.

Mary: 17 km.

Investigador: ¿al sur o al norte?

Mary: al sur

Investigador: aja, al sur de su casa, si está ella 17 km al sur de su casa ¿para dónde va a estar su casa?

Mary: para el sur.

Investigador: ¿para el sur?

Mary: este si porque, si su casa está al sur y que recorriera 61 km hacia el sur y…

Investigador: bueno pues ya usted, pero quiero que los tres se convenzan de que la respuesta es correcta, si alguno dice que no conclúyanlo y digan que es lo que pasó y porque no quedaron en concordancia los tres ¿si? Por favor.

El profesor se dirige a otro equipo,

Andrea: ¿son 44?

Investigador: eso muy bien, son los únicos que la tienen bien. Oigan pero, quiero que los tres trabajen juntos, que los tres estén bien de acuerdo ¿por qué las respuestas son así he? Por favor.

Alumno1: ¿aquí si está bien 44?

Investigador: yo creo que si, pero discútelo con tus compañeros (se dirige hacia el equipo de Manuel), oigan miren, ahorita ustedes contesten todo, si están bien o están mal no importa, todos nos equivocamos, todos estamos aprendiendo, les voy a pedir que lo contesten, ahorita en 15 minutos en el pizarrón lo vamos a ver entre todos para ver cuál es el correcto.

Manuel: sí.

El profesor se dirige a otro equipo.

Investigador: ¿cómo van niños?

Arantza, leo: bien.

Leo: profe ¿le vamos a ponerlos números a las preguntas, 1,2,3,4 y así sucesivamente?

Investigador: como quieran, nada más ténganlas bien en cuenta… a ver entonces lo que quiero es que todos aporten ideas para que el resultado que tengan, sea avalado por todos.

Leo: disculpe ¿si no lo sacamos bien, nos van a bajar calificación o puntos?

Investigador: no a ella nada más (señalando a la encargada del equipo)

Alumna: profe tengo una gran pregunta

Investigador: dígame

Alumna: es que con el equipo que estoy no hace nada y no me gusta estar con ellos, puedo cambiarme al de Andrea.

Investigador: si, trabaje con ellas… acuérdense que eran puntos negativos y positivos ¿verdad?

Alondra: profe ¿el papá de Mary está en su casa?

Investigador: no, está 17 km al sur de su casa o a 61 km al sur de la casa de Ale. (Detectó que tenían $60 - 17 = 54$) nada más les digo que no ocupan calculadora, pero hagan bien las restas. 61 menos 17 ¿cuánto es?

Alondra: 54

Investigador: ¿segura?

Alondra: (agarró su hoja de respuesta y la escondió debajo de su pupitre), ¡si!

Nallely: no, es 44.

Investigador: ah pues vean bien.

Nallely: gracias.

Manuel: (está parado frente al bote de la basura) profe nadie de mi equipo quiere trabajar, vea yo vine a sacar punta y todos vinieron conmigo.

Investigador: son quince minutos para todas las preguntas.

Alumno1: llevamos 15 minutos en una sola.

Itzel: es que Javier no hace nada.

Investigador: contemplen eso, Javier no hizo nada, ustedes tienen una encargada.

Itzel: profe ¿también podemos ponerle a esta hoja que es lo que hicimos y se la entregamos?

Investigador: pero especifíqueme que es lo que hicieron.

Itzel: ¿Cómo hacemos la operación?

Investigador: como puedan, como quieran, pero que yo le entienda, mira allí tiene una suma, que es lo que me quiere decir.

Itzel: es lo que resolvimos para contestar.

Investigador: está bien nada más escriban, nosotros creemos que la respuesta es tal porque se van a sumar las distancias o por algo así y contestan todas las preguntas de esa manera.
El profesor se dirige al equipo de Toño
Investigador: ¿cómo van niños?
Toño: ya “nomas” nos falta una, este la última, ¿por qué lo consideran así?
Investigador: escriban y expliquen muy bien he.
Toño: profe y ¿si nos sacamos 10 en el equipo yo que voy a tener?
Investigador: un punto extra.
Xóchitl: nomas por eso profe, ¿por qué Toño es el encargado del equipo?
Toño: si sacamos menos, yo voy a tener menos.
En otro equipo
Cristina: ¿cómo lo expresamos de manera matemática?
Investigador: como puedan.
Cristina: ¿en fracciones?
Investigador: cómo puedan, piensen ustedes cuatro, ¿cómo se podría expresar de manera matemática?... primero piensen, ¿qué es matemática? O ¿qué utilizan para expresar cosas de manera matemática?, piénsenle y que no les de vergüenza y platiquen ustedes cuatro, ¿qué utilizan para expresar cosas de manera matemática?... (se quedan callados un tiempo), no se les viene la idea, miren ¿están expresados los ejercicios de qué forma?
Jorge: De ecuación.
Investigador: Una ecuación es manera matemática, una gráfica, una suma, una resta… si no fuera manera matemática este ejercicio diría 70 veces ese número es igual a 280, eso sería manera verbal. ¿sí?
Toño se dirige al profesor y le pregunta, ¿si ya terminamos que hacemos profe?
Investigador: revise en el equipo que esté todo correcto
El investigador: se dirige a un equipo que tenía dificultad para contestar y les dice.
Investigador: no mire la dos, ¿cómo podemos expresar el problema con términos matemáticos?
Lupita: ah ¿con sumas y eso?
Investigador: si, usted exprésenla con términos matemáticos
Lupita voltea a ver a un compañero de su equipo y les dice. Hay no, tu ni estás haciendo nada.
Investigador: pues exprésenlo así.
Se dirige a otro equipo el profesor.
Aratnza: ¿61 tiene raíz cuadrada?
Investigador: ¿mande?
Arantza: ¿61 tiene raíz cuadrada?
Investigador: pues ustedes véanlo.
Aratnza: no, es que para sacarla es bien mucho procedimiento
Leo: ¿se vale usar calculadora?
Investigador: no, no ocupan
Arantza: es que lo que yo digo es, por ejemplo, vamos a expresar una suma… vamos a hacer una ecuación, un por ejemplo una ecuación y ya está.
Investigador: ¿por qué piensa que una ecuación?

Arantza: porque, es que decíamos que era una forma y por ejemplo queremos hacer otra forma de representar. Nosotros decíamos que esta podía ser una $61 + 17 = 78$, pero queremos hacer otra que por ejemplo ya sea 50 y así más 10 y así que de 61, ya lo podemos sumar por…

Investigador: ustedes dicen que ¿una forma de representarlo es esta?

Arantza: si

Investigador: y ¿está no será otra? (señalando la representación gráfica que habían hecho)

Arantza: ¿Cómo?

Investigador: ¿no es otra forma de representarlo?

Arantza: ¿pero?

Investigador: ¿es matemática o no es matemática?

Arantza: no, porque es como un ejemplo, necesitaríamos utilizar puros números y nosotros queremos hacer una ecuación.

Investigador: no ecuación, sino como un equilibrio, detectando que los Alumnos. Querían establecer otras sumas y restas para suplir a 61 y 17.

Arantza: si supongamos que aquí fuera 4, entonces la raíz cuadrada de 4 es 2 y pondríamos 2 y luego si aquí fuera 10, no si aquí fuera 25 (señalando en el 17), no a ver… así al cuadrado más…

Investigador: bueno pregúntale a tus compañeros y entre todos pónganse de acuerdo

El profesor se dirige con el profesor titular del grupo.

Investigador: ¿está causando un poco más de conflicto de lo esperado verdad?

Profesor: si

Investigador: porque si están pensando todos bien y ahorita lo que veo es que no concluye ningún equipo. Los equipos van como en el segundo.

Profesor: exactamente, si la mayoría

Investigador: es que es como usted dice, el tiempo se contempla pero…

Profesor: está mejor darles de más.

Investigador: pues ya hay alumnos que los acabaron.

Profesor: como tu consideres.

Investigador: ¿cuánto falta para que se acabe la clase?

Profesor: 15 minutos.

Investigador: bueno, ahorita, (se dirige hacia el equipo de Andrea) a ver enséñeme sus respuestas, tenían un #10 en su cuaderno

Investigador: ¿ya sacaron un 10?

Andrea: no es el número 10 del equipo.

Investigador: ah, a ver entonces la primera es, ¿a que distancia de casa de Mary está la casa de Ale? 44 km, bien, la segunda ¿cómo lo van a expresar matemáticamente? Las alumnas lo

hicieron de la siguiente manera $\frac{61}{1}+\frac{17}{1}=\frac{44}{1}$, ¿por qué les surgió la necesidad de ponerlo sobre 1? ¿están trabajando fracciones con el profe?
Equipo de Andrea: a veces si trabajamos.
Investigador: pero ¿ayer?, ¿el viernes trabajaron fracciones?
Andrea: no, ecuaciones.
Investigador: bueno entonces si pongo $\frac{61}{1}-\frac{17}{1}=\frac{44}{1}$, ¿no será lo mismo que $64-17=44$?
Andrea: si pero estamos representándolos de otra forma matemática.
Investigador: oh esa es su otra forma matemática.
Alumnas: si
Investigador: está bien, entonces ¿si el papá estuviera en otro punto más al sur o al norte, podríamos establecerlo matemáticamente sin saber su distancia?
Alumnas: no porque, no tenemos (vamos a entregarle la hoja)
Investigador: todavía no.
Alumnas. Los datos para saber la distancia.
Investigador: ¿existirá una forma general matemática que represente la distancia que recorrió Mary para llegar a casa de Ale?
Alumnas. Si, bueno, si en fracción.
Investigador: si aquí en fracción, y esa ¿representa sin importar la distancia?
Andrea: ¿cómo?
Investigador: ¿se puede representar sin importar la distancia?
Alumnas: no, porque si no tenemos una distancia no podemos tener la fracción sin los datos.
Investigador: entonces a ver, ahora si, ¿existirá alguna forma general… general quiere decir para cualquier distancia… matemática que represente la distancia que recorrió Mary para ir a casa de Ale?
Alumnas: no
Investigador: ¿seguras?, ustedes que creen, a ver piensenlo y discutan esa pregunta, que quiere decir general, que vamos a tener un número que no conocemos, ¿qué utilizamos para números que no conocemos?
Jesica: la ecuaciones.
Investigador: entonces inténtenlo, intenten establecerla de ese modo
En otro equipo le hablan al profesor
Arantza: mire, establecimos que 61x igual a 61 veces x y 17p = 17 veces p y sale 78
Investigador: ¿pero qué significa x y que significa p?
Arantza: un número
Investigador: ¿pero qué número? o ¿por qué quiero esos números?
Arantza: este…
Investigador: ¿para qué necesito esos números?
Arantza: para… pues, el desarrollo de los números.
Investigador: espéreme poquito… le dice a otro alumno
América: ¿pero qué número es?
Investigador: ¿para qué necesito esos números?, ustedes están indicando que **x** y **p** son números que no conozco, ¿sí? Números desconocidos que pueden tomar cualquier valor, ¿o qué tipo de números son **x** y **p**?

Arantza: mire por ejemplo, en 61x el **x** es, no no no, por ejemplo 50 mas x son 11 igual a 61 más 17p, no más 10p y la **p** es 7 igual a 78 escribiendo $50x + 10p = 78$.

Investigador: pero si aquí tienen 61, señalando su expresión $61x + 17p = 78$, ¿ya no ocupan la **x** o sí?

Arantza: No.

Investigador: y si ya tengo 17 ¿no ocupo la **p** o sí?

Arantza: no

América: $61 + 17$ pon, pero ¿esa no es una forma matemática de resolverlo o si?

Investigador: si yo digo que $2 + 2 = 4$ es una forma matemática

América: pues ya está, bueno y dice que otra forma matemática, ¿hay más formas?

Investigador: bueno si no son números hay gráficas, hay tablas.

América: oh, oh.

Investigador: ¿sí?

Los alumnos siguieron trabajando con esas ideas y confusiones que tenían la mayoría.

Investigador: bueno ya lo contestaron, ahorita vamos a pasar a sus lugares a recogerles la hoja de trabajo, fíjense, ahorita vamos entre todos a construir las respuestas nuevamente, entonces ahora el profe va a hablar con ustedes.

Profesor: si, o sea que ustedes no tengan temor a equivocarse, dado que el hecho de que hayan estado en la búsqueda de las respuestas eso ya tiene mucho valor, si las aciertan que bueno, su hubo fallas no se preocupen que de ahí también se aprende, bien que equipo quiere participar, o sea, darnos sus resultados, a ver levanten la mano quienes quieren. Bien bueno tenemos tres equipos (el de Toño, el de Arantza y el de Andrea) ¿no hay más?, (nadie hace comentario alguno, solo tienen las manos levantadas), bueno que les parece que un representante de cada equipo venga con una moneda para un disparejo para ver quien expone.

Se levanta un alumno de cada equipo y pasa al frente con una moneda para hacer un “disparejo”, ganó el equipo de Toño y pasan al frente a responder el ejercicio y explicar al resto del grupo.

Investigador: miren, ahora la idea es, va a pasar el equipo a contestar la actividad que ya contestó y a explicar a sus compañeros, pero fíjense, nadie ha revisado su actividad, pueden estar bien o pueden estar. Ustedes mismos van a decirle, estás mal, estás bien, porque ustedes también tienen su respuesta, entonces cada quien va a considerar según lo que pensó. Si ya cada quien tiene una respuesta manténganse firmes en esa respuesta, porque es la suya y ya la razonaron, si es diferente a la que está en el pizarrón ustedes defiéndanla para llegar a un común acuerdo. Ya cuando todos estemos de acuerdo de que es correcta o es incorrecta esa respuesta pues ya vamos a intervenir el profe Ernesto y yo para asegurar que sea la correcta. Por favor quiero que pongan atención y ustedes argumenten si está bien o está mal.

El equipo de Toño comienza a leer sus respuestas frente a todo el grupo.

Investigador: pongan atención por favor

Toño: ¿a que distancia está la casa de Ale de la casa de Mary?

Karla: nosotros sumamos

Investigador: a mí no me explique, explíquele a sus compañeros.

Karla: nosotros sumamos la distancia de 61 km con la de 17km y nos dio 78.

Investigador: escribanlo en el pizarrón por favor.
Lo escriben en el pizarrón y dicen –ya está
Investigador: ahora pregunten, ¿todos de acuerdo?
La mayoría de lo es estudiantes dice que sí, el equipo de Andrea y el de Karla dicen que no.
Toño: levanten la mano los que están de acuerdo (levanta la mano la mayoría), Mayoría, órale ya.
Investigador: no es eso, levanten la mano los que no.
Toño: ya ve, es mayoría los que sí, estamos bien.
Investigador: hay que estar seguros, ¿por qué no?
Andrea: porque se tiene que hacer una resta en lugar de sumarse.
Investigador: aquí hay un punto de vista muy diferente, ella dice que se resta en lugar de sumarse, ¿por qué creen ustedes que se resta?
Alondra: porque son 17km al sur de su casa.
Investigador: ¿son 17 km qué?
Karla: 17 km al sur de su casa.
Investigador: al sur de su casa, Andrea sus compañeras dicen que está 17 km al sur de su casa, ¿usted qué opina?
Andrea: que el carro queda 17 km al sur de la casa de Mary y a 61 de la casa de Ale, entonces la casa de Mary estará antes del carro.
Investigador: antes de los 61 km., miren las matemáticas no son difíciles, el chiste es entender las situaciones que están pasando, pasé alguien que tenga una respuesta diferente, al comprender el problema; es decir, que es lo que está pasando, los resultados ya salen por sí mismos. Porque vean el problema se los voy a leer poco a poco miren. Mary viajó desde su casa… ¿Dónde comienza el viaje?
Alumnos. En la casa de Mary
Investigador: en su casa, Mary viaja desde su casa al norte de la ciudad, ¿cómo vamos a representar que viaja al norte?
Alumnos. Para arriba.
Investigador: ¿Quién quiere pasar a representar en el pizarrón el viaje recorrido por Mary? (Iván se ofrece), a ver pásele usted. Pongan mucha atención, Mary viajó desde su casa ¿Dónde es su casa?
Iván la representa en el pizarrón.
Investigador: ahí, señalando donde la representó Iván en el pizarrón, ya dibujó la casa… al norte ¿cuánta distancia viajo al norte?
Alumnos. 61 km, algunos otros responden que no saben y otros más que 44.
Investigador: bueno por el momento no contemplen la respuesta, ¿nos dice cuánto viajó?
Alumnos: no
Investigador: ¿cómo podemos saber cuánto viajó? Sólo sabemos que cierta distancia, ¿cómo la podemos representar?
Alumnos: un letra.
Fernanda: una recta.
Investigador: puede ser una recta, una letra. ¿Qué características debe de tener esa recta? ¿O esa letra?, ¿puede ser cualquier letra?, ¿si yo quiero poner la letra “alfa”?
Toño: ¿”alfa” es una letra?

Investigador: si, del abecedario griego ¿si la usáramos con una letra cómo dices tú? (señalando a Iván)

Iván: pues una letra cualquiera.

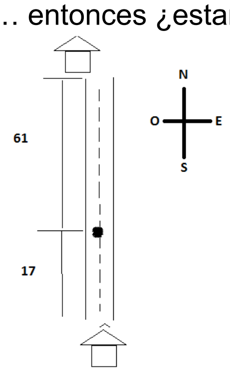
Investigador: pues entonces el problema es, no sabemos cuánto recorrió al norte, ahí tenemos una distancia que no conocemos. Luego estaba en la fiesta baile y baile cuando le habla su papá y le dice –hija ven por mí- y piensa Mary, chin pues tengo que ir por mi papá -¿A dónde voy?, su papá le dice –si estás en la casa de Ale, recorre 61 km al sur, si el norte lo representaron para arriba, ¿el sur?

Alumnos: para abajo.

Investigador: Iván entonces ahora represente 61km al sur. Y lo que tenemos de referente es que cuando Mery viaja 61 km al sur, va a quedar 17 km al sur de su casa. ¿La casa está más al sur o más al norte? (Andrea levanta la mano) a ver usted dígame Andrea.

Andrea: es que dice que va a quedar 17 km más abajo.

Investigador: más abajo, más al sur… entonces ¿estará bien cómo lo representó Iván?



Iván hizo un gráfico de esta manera.

Alumnos: sí.

Investigador: ¿por qué?, entonces ¿el carro donde estaría?

Leo: hasta el final del dibujo.

Investigador: ¿entonces estaría 17 km más al sur que la casa?

Le pregunta a Itzel una alumna que no estaba poniendo atención al problema, Andrea levantaba la mano y quería participar para contestar donde iba a estar el carro, y el profesor le dijo

Investigador: usted esperese, usted ya sabe, con usted ya no hay problema. Itzel, fijese ¿si el carro está en donde está el punto negro, estaría 17 km al sur de la casa?

Itzel: no.

Investigador: ¿a cuántos está?

Itzel: muchos

Investigador: pues ponga atención, a ver ¿está bien o está mal Arantza?

Arantza: pues es que yo digo que… (se quedó en silencio).

Investigador: lo que ustedes crean.

Arantza: es que yo digo que no, porque… es que nosotroa habíamos quedado que como la formula que pusó toño en el pizarrón $(17 + 61 = 78)$ y habiamos pensado que en el sur estaba el carro, pero a 17 km al sur de su casa.

Investigador: entonces representenlo nuevamente como crean que es correcto. Andrea usted ahora si comparta su idea, (mientra pasaba Andrea el profesor dijo lo siguiente), ven como nada más no haber puesto atención en lo que dice el problema ocasionó mucho conflicto en el resultado, para los siguientes quiero que pongan mucha atención, todas las características que dicen los problemas porque siempre los problemas traen palabras que hacen confundir a los alumnos o a quien los está resolviendo. Por eso las matemáticas se les ahcen difícil, porque tienen que pensar logicamente; es decir, debe ser muy rígido el pensamiento.

Se dirigr hacia el profesor titular y le pregunta: ¿ya se va a terminar verdad?

Profesor: si, de hecho ya se termino

Investigador: entonces se los dejamos pendiente y ya mañana lo retomamos… (se dirige a los alumnos) a ver oigan sientense por favor (los alumnos ya estaban inquietos porque ya querían salir del salón, incluso ya tenían sus mochilas en la mano), niños pongan atención, detectaron que las características del problema nos hicieron tener problemas para la respuesta porque no todos la tenían igual, entonces por favor en su casa piensenlo bien, contesten todo, traten de representarlo, si quieren apoyarse con alguien preguntenle a sus papás, a sus hermanos. ¿mañana a que hora tienen clase?

Alumnos: a la primera.

Investigador: mañana a la primera continuamos con esto, y pongan mucha atención en los problemas porque van a estar difíciles

(los alumnos le entregaban la actividad al profesor)

Investigador: no me entreguen nada, acabenlo. Salen los alumnos y se termina la clase.

Miercoles 15 de enero de 2014

Investigador: buen día, ahora vamos a contestar entre todos la activdad, la vamos a orientar yo o el profe Ernesto, ahorita vemos quien

Le pidió un plumón a Melissa y dijo:

Investigador: pongan atención todos, van a contestar todos, se va a tomar en cuenta la participación por eso mismo estoy grabando. Primero nos decía, Mary salió de su casa y viajo al norte, ayer ustedes representaron el norte para arriba, viajó al norte cierta distancia la cual no conocemos, para ir a la casa de Ale, después su papá le habla por telefono y le dice, Mary se me descompuso el carro ven por mi, si estás en casa de Ale regresate 61 km al sur, baja 61 km. Entonces ¿el papá a que distancia estaba de la casa?

Alumnos: a 17 km

Investigador: ¿por qué 17?

Alondra: no, estaba a 78km.

Investigador: ¿a 78 de donde?

Alondra: de la casa de Ale.

Investigador: ¿y de su casa?

Alondra: a 17

Investigador: bueno detecte, a 17 de su casa y ¿de la casa de Ale a cuánto estaba?

Algunos alumnos contestan que a 78 otros que a 44, pero ninguno concluye en algún número.

Investigador: a ver, esperense, mejor lean de nuevo el problema y diganme a que distancia estaba el papá, ¿a qué distancia de la casa de Ale?

Itzel: a 17 km más de la casa.

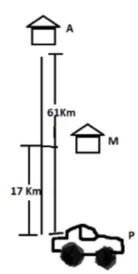
Investigador: ¿y de la de Ale?

Itzel: 78

Investigador: ¿por qué dice que 78?

Karla: porque se suma los km que va a recorrer y los que quedaban de la casa.

Investigador: ¿por qué los tiene que sumar?
Itzel: porque decía a que distancia esta la casa de Ale de la de Mary.
Investigador: pero estoy preguntando la distancia que tiene el papá con la casa de Ale, ¿cómo podemos saber?
Andrea: pues a 61 km.
Investigador: ¿por qué?
Andrea: porque dice el problema
Investigador: si verdad, porque el papá le dijo si estás en casa de Ale recorre 61 km al sur.
Los alumnos, exclaman aaaaaahh.
Investigador: lo único que es diferente es la casa de Mary, a ver entonces ahora ya comprendan, de la casa de Ale a con el papá son 61, pero ¿de donde está el papá a la casa de Mary cuántos son?
Alumnos: 17
Investigador: ¿ más al norte o más al sur?
Alumnos: al norte
Investigador: entonces cuantos serán de la casa de Ale a la casa de Mary, 78 decían muchos ayer, ¿será cierto? O ¿a cuantos estará?
Leo: ¿61?
Investigador: ¿61? Tonho ¿a cuántos estará?
Toño: 78
Investigador: ¿por qué 78?
Toño: porque a 61 está la casa de Ale.
Investigador: pero tus compañeros están diciendo que va a ser para el norte la casa de Mary de donde está el carro del papá, entonces ¿será menos o más distancia?
Toño: más
Investigador: ¿por qué?
Toño: porque está más abajo la casa de Mary.
Investigador: pero sus compañeros están diciendo que va a estar más arriba la casa de Mary, mire dibujo en el pizarrón.



Investigador:¿cuál va a ser la distancia entre la casa de Mary con la casa de Ale?
Toño se quedaba viendo el dibujo y detectando que la distancia entre el carro y la casa de Mary son 17 y responde:
Toño: van a ser 17, porque se ve como que es la misma distancia.
Investigador: es que no está bien la escala, sólo lo hice rápido para que vieras la posición en la que van a estar, ponte a ver ¿qué tienes que hacer para saber la distancia de la casa de Mary a la casa de Ale?

Toño: medirlo.
Investigador: ¿ cómo lo mides?
Toño: con escala.
Investigador: pues con una buena escala, ¿Qué otro modo puede haber?
Toño: ya me la puso dificil.
Investigador: bueno mira, sientate y ya no te estes distrayendo porque no estabas poniendo atención.
Ivan: hay son 44 profe.
Investigador: si, esperate ahorita lo platicamos, a ver niños entonces vean, ¡Toño pon atención he!, vean el gráfico… de la casa de Ale a donde está el papá ¿Cuántos km son?
Alumnos: 61
Investigador: ¿todos de acuerdo?
Alumnos: ¡sí!
Investigador: ¿alguien que diga que son más o son menos?
Alumnos: nooo.
Investigador: ¿Ivan digame por qué son 61?
Ivan: es que no tenemos la hojita porque no vino Arantza.
Investigador: pero en sus anotaciones o sus respuestas vean que es lo que pide el problema. ¿quíen dice que si son 61?
Andrea: yo, porque en el problema dice que está a 61 km de la casa de Ale.
Investigador: pues si, el problema lo dice, por eso son 61, ¿cuál es la distancia de donde está el papá a la casa de Mary?
Alumnos: 17 km
Investigador: ¿por qué?
Miriam: porque el problema lo dice.
Investigador: entonces ¿cuánta distancia habrá de la casa de Mary a la casa de Ale? Toño ponga atención.
Miriam: 44
Investigador: ¿segura?, ¿quién da mas?, ¿quíen tiene otra cantidad?, ¿Quién está de acuerdo con 44? (los alumnos levantan la mano, excepto el equipo de Alí) ¿por qué usted no Alí?
Alí: porque 61 y 17 sumados me da 78
Investigador: ¿por qué los sumo?
Alí: porque de la casa de Ale a Mary se van recorriendo
Investigador: mire alguien le va a explicar cuantos son, Javier ¿usted está de acuerdo o por qué no levantó la mano?
Javier: no si profe, pero es que no tengo mochila, me la robaron.
Investigador: pero sin mochila puede pensar.
Javier: porque se suman las cantidades.
Investigador: ¿por qué se suman?
Javier: no se, pues así lo hicieron
Investigador: entonces digame, ¿qué voy a sumar? (se queda sentado sin hablar)
Paulina: yo le digo profe
Investigador: está bien, guarden silencio por favor y entiendan lo que va a decir su compañera.

Paulina: porque si de la casa de Ale al carro son 61 y de la casa de Mary al carro son 17 se restan 17 a 61 y queda 44.
Investigador: entonces ¿cuando va Mary por su papá pasa por su casa?
Alumnos: sí
Investigador: ahora si tienen la idea de donde están ubicadas cada casa y el carro, ¿quíen pasa a establecerlo de manera matemática?
Ningún alumno se ofrece porque no habían tenido bien en cuenta lo que tenían que hacer.
Investigador: usted pase (le indicó el profesor a Miriam)… ustedes van a decir si está bien establecido de manera matemática o si no está bien establecido.
Miriam escribió: $\frac{61}{1} - \frac{17}{1} = \frac{44}{1} = 44$
Investigador: niños, ¿ustedes creen que está bien establecido?
Itzel: ¿yo puedo hacer el mio?
Investigador: esperese, primero digame si está bien o no está bien, Itzel ¿está bien?
Itzel: sí
Investigador: ¿por qué si?
Itzel: que diga no
Investigador: ¿por qué no?
Se tapó la cara con una hoja y dijo, -es que con fracciones no sé profe.
Investigador: ¿por qué no sabe con fracciones?
Itzel: pues no se.
Ivan: yo digo que está mal es resultado
Investigador: ¿por qué está mal el resultado?
Ivan: porque el resultado debe ser también en forma de fracción
Investigador: pero si está con forma de fracción.
Ivan: si es cierto, me confundí, perdón
Investigador: ¿por qué creen que sus compañeras usaron fracciones?
Karla: porque es una forma de representarlo matemáticamente.
Investigador: exacto, yo solamente dije: -representenlo matemáticamente, no especifique alguna forma o alguna manera. ¿está bien eso?
Ivan y Karla: ¡si!
Investigador: ¿Todos están seguros?
Alumnos: ¡sí!
Investigador: ¿Quién no está seguro?, Manuel ¿ es cierto o no es cierto?
Manuel: si
Investigador: dime por qué
Manuel: es forma matemática porque tiene números
Investigador: está bien, pero ya no te estés distrayendo. ¿quién lo representa de una manera diferente?, ah primero Miriam si está bien esa manera, si es matemática, sientese, gracias… va a pasar ahora su compañera Karla
Karla escribió: $-\frac{\substack{61\\17}}{44} = 44km$
Investigador: ella lo representó en forma de resta, ¿una resta será una manera matemática?
Alumnos:¡sí!

Investigador: entonces también está bien, gracias. La pregunta que sigue dice ¿si el papá estuviera más al sur o más al norte lo podemos expresar de manera matemática?
Alumnos: No.
Investigador: ¿Por qué no?
Ivan: porque se necesitan las cantidades para saber en donde está.
Investigador: dice Ivan que no porque se necesitan las cantidades para poder saber, ¿es cierto toño?
Toño: ¡si!
Investigador: ¿por qué se necesitan las cantidades?
Alumnas: para saberlo ubicar.
Investigador: entonces así a simple vista no podemos, ¿existirá alguna forma general que represente el recorrido que hizo Mary?
Alumnos: si, dudando de su respuesta.
Investigador: ¿Cómo se pudiera establecer?
Alumnos: con ecuaciones.
Investigador: ¿qué tipo de ecuacion quedaría o cómo quedaría el resultado? Alguien sabe, ¿quién pasa a establecerlo de una manera general?
Ningún alumnos sabía como representarlo. El profesor comenzó a decir:
Investigador: al principio no sabiamos que cantidad de Km recorrió al norte, pero sabiamos que cantidad de km recorrió al sur, (se ofrece Brenda una alumna a pasar del equipo de Andrea), miren niños aquí ya se está detectando que es lo que pretendía el problema, que ustedes intentarán establecer una forma general, para representar una distancia que no conocían, ¿saben que hacer para representar algo que no conocen verdad?
Los alumnos se quedan en silencio esperando a que alguien conteste, mientras Brenda escribe en el pizarrón.
Investigador: su compañera puso $\frac{17(k)}{17} = 61$, ¿será por k?
Brenda: pero no sería la letra equivale a un valor que no sabemos
Investigador: si, la letra equivale a un valor que no sabemos, por ejemplo ¿cuál valor sería allí?
Brenda: 44
Investigador: 44, entonces cuanto es (17)(44)
Brenda: es que ¿por qué eso?, pues tiene que ser 17 menos 17 para hacer la balanza con el 44 ¿no?
Investigador: es que no, la balanza aquí no va de esa manera, tiene que ser una suma para que cumpla.
Brenda: entonces no se hacerlo.
Investigador: su compañera tiene la idea que al restarle 17 se va a hacer 44, ¿alguien sabe cómo establecerlo de una manera correcta? Entonces esto queda pendiente y orita entre sus equipos se ponen a pensar. Les voy a repartir otra actividad, quiero que las contesten, que la observen detalladamente, que vean todas sus características y que le echen muchas ganas.

Actividad 2

El investigador comenzó a repartir la actividad entre los equipos.
Arantza: ¿vamos a dibujar una figura aquí?
Investigador: si, usted debe buscar la correspondiente.
Arantza: pues si este tiene una y este tiene tres (señalando las figuras anteriores)
Investigador: pues piensen cuantas va a tener
Continuó repartiendo las hojas de trabajo a los equipos, cuando terminó se detuvo en uno para detectar lo que estaban comentando los alumnos.
América: pues van aumentando dos cada vez, porque aquí tiene uno y aumenta dos y aca también (señalando las figuras 2 y 3 de la atividad)
Pedro: entonces aquí va a ser cuatro (señalando la cuarta figura).
América se pusó a pensar y el investigador se dirige al equipo de Manuel y pregunta.
Investigador: a ver, ¿qué llevan?
Agarran la hoja de una butaca y comienzan a verla y enseñan su hoja dibujada con la cuarta figura con siete cuadros.
Manuel: mire tiene que ser mas que el 3 y menos que el 5
Investigador: ¿por qué?
Manuel: porque empieza de uno y va aumentando dos.
Investigador: ¿juan que dices?
Juan: que es una sucesión..
Investigador: y ¿qué es una sucesión?
Juan: es como una serie…
INVESTIGADOR: pues si, entonces contesten eso, va a estar bien fácil pues. (se dirige a otro equipo y dice) – ese periodico ahorita no lo revise, ahorita dediquese a contestar, ¿qué llevan?
Alumnas: pues estamos pensando que cuantos cuadros debe de tener la figura 4.
Investigador: ¿cuántos tiene que tener?
Alumnas: ocho
Investigador: ¿entonces por qué aquí lo dibujo con siete? (señalando el dibujo que habían hecho en el equipo).
Alumnas: a de verdad, si es cierto… después de que contaron los cuadros que dibujaron.
Investigador: entonces ¿cuántos cuadros tiene que tener?
Alumna:ocho
Investigador: ¿ocho?
Alumna: no, siete.
Investigador: ¿siete?
Alumnas: no no a ver a ver…
Investigador: si mejor piensenle.
Alumna: siete.
Investigador: ¿segura?
Alumna: no
Investigador: bueno, haganle como piensen, pero todos esten de acuerdo.

Se dirige a otro equipo.

Investigador: ¿ya detectaron cuantos tiene que tener?... los alumnos se quedan en silencio, -oigan cada quien esta escribiendo lo mismo en su cuaderno, mejor hagan uan descripción general. Se dirige hacia otro equipo. – a ver, ¿ya llevan la primer pregunta?

Alumnos: si

Investigador: ¿cuántos cuadros tiene que tener la cuarta figura?

Alumnos: siete.

Investigador: ¿por qué?

Alumnos: porque van de 2 en 2.

Investigador: ah detectaron que van de 2 en 2, que bien, entonces contesten las demás. Se dirige a otro equipo. –Niñas, niño ¿Qué llevan?

Karla: no nos esté grabando.

Investigador: para el face… no, no se crean a ver ya detectaron la figura 4, ¿cuántos cuadritos tiene?

Karla: siete.

Investigador: ¿por qué?

Karla: porque va de dos en dos, mire aquí va uno (señalando la figura 1.) y siguen 3, 5, 7 y 9.

Investigador: está bien, así siganle, echenle ganas. Ya vieron que va de 2 en 2 ¿después que pasa? Las ideas que hagan quiero que sean ideas de todos, todos participen en la actividad.

Se acerca Itzel con el Investigador y le pregunta

Itzel: aquí se le va aumentando uno para cada lado, y aquí (señalando la figura 3) ya van tres así (indicando en vertical) y tres así (indicando en horizontal) y aca en la cuarta ya nada mas le puse uno de cada lado.

Investigador: ¿pues si, pero que te dicen tus compañeros?

Itzel: no, están platicando de la pista de hielo.

INVESTIGADOR: usted es la encargada, usted tiene que hacerlos trabajar, si no hacen nada ellos va a ser su responsabilidad, echele ganas, digales que tienen que trabajar y si no quieren ya me habla.

Se dirige a otro equipo.

Investigador: ¿cómo van?

Alumna: pues ya lo acabamos, pero es que no estamos seguras.

Investigador: pues ustedes que creen, ¿si será así o no será así?

Alumna: pues pensamos que si porque mire, van en proporción de 2 en el primero tenemos 1, se le aumentan 2 (señala la figura 2) y después se le aumentan otros 2 y ya está (señala la figura 3) y se le aumentan otros 2 (señala el cuadro vacío) y después otros dos y tenemos 9 (señalando la quinta figura) y así.

Investigador: pues puede ser, pero tienen que la figura 10 va a tener 20 cuadros, ¿por qué?

Alumnas: porque si de 5 son 10 y la figura… observan las figuras y se quedan serias.

Investigador: ¿seguras?

Alumnas: no…

Arantza: si mira, si de 5 son 10 y de otros 5 son 10, entonces de 10 van a ser 20

Paulina: no, es que… ¿podemos hacer las figuras?

Investigador: pues haganlas, en su cuaderno. (se dirige a otro equipo). -¿cómo van?
Andrea: bien.
Daniel: pues ellas están haciendo eso y yo ya la saque más rápido.
Investigador: esperense, si ustedes están haciendo eso y él dice que ya la sacó más rápido, ¿por qué no le preguntan que como la sacó? Es que tienen que aportar las ideas todos ¿si?... a ver ¿cuántas va a tener la figura 4.?
Andrea: siete.
Investigador: ¿por qué siete?
Andrea: porque van de dos en dos.
Investigador: si van de dos en dos, entonces la figura cuatro debería de tener 8
Andrea: no, pero van de 2 en 2 a partir de este número (señalando la figura 1).
Investigador: a esta bien, entonces contesten lo demás pero con ideas de todos por favor y escribanlo para ver todo lo que pensaron y todo lo que hicieron. Se dirige a otro equipo y lo interrumpe una integrante del equipo con el que estaba.
Alumna: ¿le podemos preguntar algo?
Investigador: si, si puede
Alumna: es que estamos en una complicación porque yo digo que se cuentan así mire, (señala la figura 5) cuenta 5 en vertical y después 5 en horizontal repitiendo un cuadro que tienen en común las de posición vertical y las de horizontal. ¿Pero si sólo lo cuento una vez son 9? ¿se puede quedar si que se vuelva a sumar ese?
Investigador: pues, ¿ese está dos veces?
Mirna: es lo que yo les digo porque ¿para que lo tenemos que contar dos veces?
Investigador: entonces así como está diciendo usted, ¿aquí son dos? (señalando la figura 1)
Alumna: no, es uno.
Investigador: entonces lo vamos a contar solo una vez, ¿para que lo quiere sumar dos veces?
Borran el dibujo que tenían, que si era el correcto, y el investigador les pregunta.
Investigador: ¿por qué lo borra?
Mirna: porque está mal, porque son ocho y tienen que ser siete.
Investigador: ¿son ocho? Mirna cuenta los cuadros que tenía dibujados y dice.
Mirna: ah no, si son siete.
El investigador se dirige a otro equipo
Investigador: ¿cómo van?
Jorge: ya vamos en la 5
El investigador se retiró porque vio que si estaban trabajando y se dirigió a otro equipo.
Investigador: ¿cómo van niños?
Xochitl: es que Toño no puede profe.
Investigador: ¿por qué piensa que no puede?, Toño tiene la capacidad por eso es el encargado de su equipo., ¿o no toño?
Se dirige a otro equipo.
Investigador: ¿cómo van niños?, ¿en cuál van?
Alumnos: en la 7
Investigador: ¿qué les pregunta la 7?
Alumno: ¿Cómo pueden expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?

Investigador: ah, y ¿cómo pueden?
Alumna: multiplicando. (nadie le hizo caso)
Investigador: a ver, usted digales que está haciendo, ¿multiplicando o sumando?
Alumna: multiplicando.
Investigador: pues lo que está haciendo, expréselo así. Primero tienen que ver que necesitaron para saber el núemro de cuadritos que ocupaba cada figura.
Felipe: Contar estas (señalando las figuras en la hoja de trabajo)
Investigador: si, pero ¿para contar esas que tuvieron que hacer sumar, multiplicar, dividir o qué? ¿raices cuadradas?
¡Profe!… gritan los integrantes de otro equipo.
Investigador: voy, piensenle que van a poner he.
Le hablaba el equipo de Manuel para decirle que ya había acabado.
Investigador: a ver enseñenme sus respuestas.
Manuel: a ver, la uno aquí está (enseñó la figura 4 con siete cuadros) dice dibuja la figura 4 y la hicimos así porque tiene que ser mayor que este (señalando la tercer figura) y menor que este (señalando la quinta figura), luego… la 2, va a aumentar siguiendo su secuencia cada vez más.
Investigador: ¿cuánto va aumentando?
Alumnos: dos.
Investigador: pues escriba eso.
Manuel: si de dos en dos (se pone a escribirlo en el cuaderno), luego la tres, le pusimos pues como nada más lo sumabamos le pusimos que 18.
Investigador: ¿seguro que 18?
Manuel: si
Investigador: a ver ¿por qué?
Manuel: no estámos mal, ¿es que aquí tiene que ir lo doble no? Lo que hicimos en la 5 (le dice a sus compañeros).
Investigador: ¿qué hicieron en la 5?
Manuel: hicimos una suma $90 + 23$
Investigador: ¿ese 90 que significa?
Manuel: es que era 90 porque multiplicamos la del 10, es que como la del 10 eran 45 de 25 y lo multiplicamos.
Investigador: pues… a mi no me convencen ¿Cómo que la del 10 y luego la del 25 allí mismo? Sea más específico en sus respuestas, escriban porque 18.
Manuel: pues ya le dije.
Investigador: pero escribanlo, y ya vemos si es válido o no es válido el resultado, lo que ustedes contesten y lo que ustedes crean eso escriban.
El investigador se dirige a otro equipo.
Investigador: ¿cómo van?
Alumnos:pues ya lo tenemos.
Investigador: ¿cuántos cuadritos tendrá la figura 10?
Alumnos: 18
Investigador: ¿Seguros?
Paulina: no, 19

Investigador: ¿segura?

Paulina: no, si es 18 porque la figura 5 tiene 9 cuadros y si se multiplica por 2 entonces la figura 10 serían 18.

Investigador: entonces si son 18, la figura 9 ¿cuántas tendrá pues?

Paulina: 16.

Investigador: ¿por qué 16?

Paulina: porque si de 10 son 18, se le restan 2

Investigador: bueno, entonces ¿la figura 8?

Paulina: serían 14.

Investigador: si tiene 14, ¿cuántos tiene que tener la figura 4?

Paulina: pues 7.

Investigador: ¿segura?

Paulina: cuenta los cuadros en la figura y dice, Si.

Investigador:¿cuántos debe de tener la figura 6?

Paulina: 11.

Investigador: si tiene 11 ¿cuántos tiene que tener la figura 3?

Paulina: ¿5?

Investigador: pues ya no queda, piense bien cuantos tiene que tener la figura 3 y de allí parta para saber cuántos tiene que tener la figura 10, se dirige a otro equipo y pregunta. -¿cuántos tiene las figura 10?

Geraldi: la figura 10, tiene 19 porque es NP por 2 menos 1, NP es el número de posición.

Investigador: ¿con eso sacaron todo?

Geraldi: si, con eso contestamos todo.

Se terminó la clase y no se conluyó la actividad. al día siguiente continuó.

Jueves 16 de Enero de 2014

Investigador: pues ahora vamos a concluir con la actividad de ayer. ¿quién lo terminó? Algunos levantaron la mano y otros quisieron entregar la hoja. –Esperense, esa hoja ahorita me la entregan, pero primero vamos a platicar la actividad entre todos para que corrijan sus ideas con la ayuda de todos. ¿Quién quiere pasar al frente?

Algunos se ofrecieron, pero el investigador dijo, -no, va a pasar Melisa. Pero explica por favor. Los demás vean si tienen lo mismo o tienen diferente solución.

Melisa: esa es la 1, dibujo la figura correcta, de la respuesta de la primera me salió 7 porque vimos que en la primera figura está un cuadrito, luego en la segunda figura están 3, luego nos dimos cuenta de que este se iban sumando dos cuadritos a cada figura, entonces como en la segunda eran 3, en la tercera eran 5 y en la cuarta eran 7.

Investigador: ¿alguien no está de acuerdo con ella? ¿todos tienen lo mismo?, los alumnos asienten con la cabeza. ¿si les dijera que todos están mal?

Manuel: no, porque si está bien, porque cada una va de 2 en 2 y si quedan 7 porque son, 1 y luego 3 y luego 5 y luego 7.

Itzel: yo digo que si está bien porque como cada figura aumenta un cuadrito de cada lado, pues si hacemos eso en la figura 4 va a tener 7.

Investigador: está bien, son 7, ahora digan la número 2.

Melisa escribe “19 cuadritos” en el pizarrón. Y dice: - ese es el resultado porque hicimos los cuadritos hasta llegar a la correspondiente a la figura 10, luego contamos los cuadritos y eran 19.

Los alumnos comenzaban a platicar entre ellos y el investigador tenía que interrumpir para que pusieran atención.

Investigador: su compañera dice que son 19, ¿ustedes que creen si son 19 o que no son 19?

Toño: son 20.

INVESTIGADOR: ¿por qué son 20?

Toño: porque se van sumando de dos en dos. Itzel interrumpe.

Itzel. Si son 20

Investigador: ¿por qué 20?

Itzel: no, van a ser 19.

Investigador: ¿por qué 19?

Itzel: hay profe, pues ya diga usted.

Investigador: pues mira, dice Toño que 20 y Melisa que 19, ¿cuál creemos?

Alumnos: 19 porque mira así la tenemos todos.

Toño: si profe son 19, porque ya lo dibuje y los conté y me salen 19.

Investigador: bueno, entonces son 19.

Melisa: la figura 25 nos salen 48 cuadritos.

Llegaron unas alumnas de tercer grado a interrumpir la clase y los niños se distrajeron con ellas.

Investigador: niños ustedes no se distraigan, solo le hablan al profe. Miren su compañera Melisa dice que la figura 25 tiene 48 cuadritos ¿están de acuerdo con ella?

Alumnos: no, algunos decían que tenían 50 y otros que 49.

Investigador: Karla, ¿por qué 49?

Karla: porque lo fuimos sacando de uno en uno y nos dieron 49.

Investigador: ¿Melisa por qué le salieron 48?

Alondra le intenta explicar porque 49: - mira Melisa, tiene que ser número impar, porque la primer figura es impar y se le suma un número par, entonces siempre va a ser número impar el resultado.

Melisa: no profe yo ya no quiero pasar, la tengo mal.

Investigador: que importa que estés mal, es el fin de venir a la escuela, equivocarnos para darnos cuenta de nuestros errores. Se dirige a los demás, aunque tengan una idea que es erronea sostengan esa idea porque es suya. Melisa ya está oyendo a sus compañeros pues hay varias opciones, la suya de 48, 49 y 50, ¿cuál le convence más?

Melisa: 49.

Investigador: ¿por qué?

Melisa: porque es cierto lo que dice Alondra, en cada figura salen cuadritos impares.

Corrige su respuesta del pizarron y escribe 49.

Leo: yo digo que son 47 profe porque cuando tenemos 10 son 19 y si sumamos 19 mas 19 y luego lo de la figura 5 que son 9, sale 47.

Investigador: si, si hacemos esa suma sale 47, ¿por qué no lo discutiste con tu equipo?

Leo: es que apenas me di cuenta ahorita. Pero dej veo si es válido o no.

Investigador: su compañero está diciendome que son 47, miren porque, Leo pasa y haz lo que pensaste.

Pasó Leo y escribió

Fig. 10 = 19
FIg. 10 = 19
Fig. 5 = 9

Y la suma de eso es igual a 47.

Alí: está mal

Investigador: ¿por qué está mal?

Investigador: niños pongan atención, Leo nos dice que sumando el total de cuadros que tiene cada figura se puede hacer, por ejemplo la figura 10 tiene 19, y la figura 5 tiene 9, entonces es $19 + 19 + 9 = 47$ ¿será cierto eso?

Alumnos: NO.

Investigador: ¿por qué no?

Alondra: porque no se pueden sumar las figuras, la figura 5 no tiene la mitad de la figura 10, entonces no se puede hacer esa suma, porque si sumamos dos veces la figura 5 que tiene 9, nos va a dar 18 y la figura 10 tiene 19.

Investigador: ¿entonces quien está bien?

Alumnos: Melisa.

Investigador: claro, pero tu idea si es buena Leo. Bueno, ¿cuántos tendrá la figura 73?

Algunos Alumnos. Dicen que 145, pero Melisa escribe en el pizarrón 139.

Investigador: ¿por qué 139?

Melisa: porque fuimos haciendo los números de todas la figuras, mientras mis compañeros buscaban otra forma, yo hice eso y me salió 139.

Investigador: ¿cómo podemos saber si es correcto o incorrecto?

Melisa: pues comparando con mis compañeros.

Investigador: pues entonces preguntales.

Melisa: ¿está correcto o está incorrecto?

Jaime: está mal.

Investigador: ¿por qué está mal?

Jaime: porque son 145.

Estefania: yo digo que está mal, porque ami también me dieron 145.

Investigador: ¿cómo lo sacaron ustedes?

Estefania: hicimos una tabla.

Investigador:¿lo pueden poner en el pizarrón? (440. 2´25´´)

Pasa a Alondra a escribirl la tabla en el pizarrón

25	26	27	28	29	30	31	32
49	51	53	55	57	59	61	63

Investigador: a ver vean, ¿si detectan que va poniendo el número de figura? ¿Así le vas a poner hasta el 73?

Alondra: si

Investigador: esperate, bueno esta bien… fijense todos su compañera está escribiendo de un número en un número y va a llegar hasta el 73, ¿quién tiene una forma más fácil de hacerlo?

Andrea: yo
Investigador: a ver pásele, ¿Alondra y así lo hiciste hasta el 73? (muestra una hoja donde si lo hizo así), bueno esa me la van a dar.
Mientras Andrea esta escribiendo su proceso el investigador interrumpe a Alondra y le dice: -fijense su compañera está escribiendo de uno en uno y sumando los valores de 2 en 2, si es válido, pero si yo les preguntara ¿cuántos cuadros tendrá la figura 183? ¿Qué harían, Todo hasta la 183?
Karla: pues si, porque es una forma de saberlo.
Investigador: es una forma, pero ¿sería muy tardado no? Si les preguntara el número de cuadros de la figura 1000.
Karla: he, se multiplica por 2 y se resta 1.
Investigador: correcto, a ver fijense su compañera Andrea les va a explicar lo que hizo.
Andrea: mi equipo y yo multiplicamos el número de posición por dos y le restamos uno porque así el resultado nos da un número impar, y nos dio de resultado 145. Señalando lo que escribió en el pizarrón ($N.P. \times 2-1=145, 73\times 2-1=145$)
Investigador: entonces el resultado según Andrea es 145, pero algunos me decían que 139, ¿cuál creen que sea el resultado?
Karla: 145
Melisa: 139
Investigador: ¿por qué 139 Melisa?
Melisa: porque si sumamos el valor de la figura 25 dos veces y despues dos veces el valor de cuadros de la figura 10 y luego la 3. Nos dá 139.
Investigador: pero habíamos quedado que no se podían sumar, ¿tu crees que si se pueda sumar el valor de las figuras?, miren Andrea encontró está forma, dinos que indica.
Andrea: pues es NP. El número de posición o de figura y se multiplica por 2 y después se le resta 1.
Investigador: bueno, está bien su forma de razonar, (se dirige a los demás estudiantes) ¿Quién no está de acuerdo con eso?
Ivan: pues si está bien, pero ¿por qué le resta 1?
Investigador: usted piense, ¿por qué será menos 1? (Iván se queda pensando). Miren si utilizamos lo que escribió Andrea, la figura 1. ¿cuántos cuadritos tendrá?
Alumnos: 1.
Investigador: ¿cuál va a ser el número de posición?
Arantza: uno.
Investigador: ¿y que se tiene que hacer?
Leo: se multiplica por 2 y se le resta 1.
Investigador: ¿la figura 5 cuantos tendrá?
Iván: pues 5 por 2 menos uno es 9.
Investigador: bien, ¿la figura 10 cuántos tendrá?
Karla: 10 por 2, 20, menos uno 19.
Investigador: ¿si cumple?
Alumnos: si.
Investigador: ¿cómo haremos la figura 73?
Karla: 73 por 2 menos 1 es 145.

Investigador: entonces ahora diganme cuantos tendrá la figura 1000
Arantza: 1000 por 2 menos uno es 1999
Investigador: ¿así ya es más fácil verdad?, ¿cómo le llamarían a lo que encontró Andrea?
Arantza: pues fórmula o ecuación.
Investigador: ¿por qué ecuación si no tiene letras?
Arantza: pues es que es de las sencillas, porque va a variar NP.
Investigador: pues ya han trabajado con ecuaciones, intenten expresarlo en forma de ecuación, a ver si se puede.
Alondra: yo se como.
Investigador: a ver pásele y establezcala en el pizarrón.
Alondra escribe: $n \times 2 - 1 = 145$
Investigador: ¿siempre va a ser igual a 145?
Alondra: si porque vale 73.
Karla: no, porque el profe nos ha dicho que en lugar del signo $\times$ pongamos un paréntesis, entonces va a quedar así, (pasa al frente y escribe $2(\times)n - 1 = 145$)
Investigador: ¿siempre va a ser igual a 145?
Karla: si, pero ya sabiendo el número de figura sabremos a que es igual. Pero mientras así lo podemos dejar.
Investigador: a ver vamos a situarnos, ¿tienen dudas acerca de la actividad anterior?
Alumnos: no, ya supimos que la forma general va a ser $2(\times)n - 1$
Investigador: pero por comodidad lo podemos escribir así (escribe en el Pizarrón $2n - 1$) Que viene siendo lo mismo. Bueno, les voy a repartir otra hoja para que contesten lo que se les pide.

Actividad 3

Comienza a repartir hojas de trabajo a los equipos, después de que ya se repartieron las hojas lee la actividad y pregunta que si alguien tiene dudas acerca de lo que van a hacer.
Alumnos: no, tenemos que señalar los metros que avanza la tortuga en cierto tiempo.
Los estudiantes se encuentran platicando entre ellos. Tratando de detectar la manera de contestar la actividad. El investigador pasa a los lugares para recoger las actividades anteriores.
Investigador: niños, denme sus otras actividades, quienes no me la han dado, saquenlas por favor.
Algunos estudiantes pasan a darle la actividad al investigador, mientras pase alguien a leer la actividad nuevamente a todos. Toño se ofrece y pasa a leer la actividad de la tortuga.
Alumnos: es que esa está más dificil.
Investigador: bueno miren, en la playa estabamos tomando el sol, pero como nos aburrimos pues se nos ocurrió tomarle el tiempo que tardaba una tortuga caminando y comenzamos a contar que en 15 minutos recorrió 10 metros, y los proximos 15 minutos recorrió 8 metros y a los otros 15 recorrió 6 y después de ese tiempo nos comenzamos a hacer preguntas para predecir la distancia o el trayecto de la tortuga, ¿si continua caminando durante los próximos 30 minutos, cuántos metros recorrerá los proximos minutos?
Toño: pues yo creo que 18 minutos.
Arantza: no tienen que ser minutos, tienen que ser los metros.

Investigador: ¿cómo cuántos metros?
Algunos Alumnos gritan que 2 y otros que 4.
Arantza: yo pienso que 6 porque en 15 va a recorrer 4 y en los otros 15 recorre 2, en total van a ser 6.
Investigador: Toño usted ¿por qué piensa que van a ser 18 minutos?
Toño: porque si tomamos el tiempo, pues el resultado va a ser algún tiempo
Arantza:no Toño mira, la pregunta está muy clara ¿dice cuántos metros no?
Toño: si.
Arantza: pues ahí está. ¿cuántos metros recorre en 30 minutos? Y ahí te dice que tiene que ser en metros.
Los Alumnos comienzan a aplaudir en forma de burla.
Investigador: esperense, cuando ven una obra de teatro se aplaude hasta que se acaba. Entonces respeten y ya cuando tengamos el problema resuelto aplaudimos, respeten por favor. Bueno ya tienen la idea de que es lo que pide. ¿creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente?
Alumnos: si.
Investigador: bueno ya lo contestarán. ¿por qué creen que llegue un momento en que la tortuga se detenga completamente?
América: porque se cansa.
Manuel grita: los de la cooperativa. (nadie le hace caso).
Toño: pues si, se cansaria y ya se quedaría en el mismo lugar.
Paulina: yo digo que si se queda parada.
Investigador: ¿cuándo crees que se quede parada?
Itzel: cuando disminuye de metros a centimetros.
Investigador: ¿y cuándo será eso?
Iván: pues cada 15 minutos disminuye 2 metros, entonces si va a llegar el momento en que se detenga.
Arantza: es que es como un juego de azar, no sabemos cuando se va a detener la tortuga y no sabemos que va a pasar a lo mejor se regresa y se vuelve a repetir toda la historia.
Andrea: no es como un juego de azar porque en los datos dice que va disminuyendo entonces no puede ser al azar, bueno dice que disminuye, entonces se cansa y ya.
Arantza: pero no sabes si después de que descansa se regresa o se va para otro lado.
Investigador: entonces veamos, los datos no son de azar porque va disminuyendo de 2 en 2, pero tiene razón Arantza después de que se detenga no sabemos que va a pasar.
Manuel: profe, dejenos ir a los de la cooperativa.
Investigador: ¿cómo?
Profesor: es que a los alumnos esta semana les toca la cooperativa y tienen que salir para acomodar los puestos para que esten listos cuando comience el receso.
Investigador: pues usted digame profe, si me dice que se vayan pues que se vayan.
Profesor: si, siempre los dejo salir 25 minutos antes para que acomoden todo bien.
Investigador: bueno, los que venden en la cooperativa vayan a acomodar sus puestos, los demás aquí nos quedamos trabajando. (salen aproximadamente 20 alumnos) ahora, ya tenemos noción de las primeras 2, la tercera nos dice, considerando que la tortuga llevaba 60 minutos caminando ¿cuántos metros creen que recorría cuando comenzó a caminar?

Itzel: 28
Investigador: ¿por qué 28?
Itzel: pues esos creo.
Investigador: bueno, pues justifiquen sus respuestas como ustedes puedan, contestenlo.
Toño pasa al pizarrón a hacer una tabla

12	15
10	15
8	15
6	15

Toño: ¿Así puede quedar o no?
Investigador: si, puede ser.
Profesor: como que si captan la idea, pero no pueden formalizar. (le dijo en voz baja al investigador)
Investigador: pues esperemos que comprendan y puedan establecer la relación de que disminuye dos metros cada 15 minutos todos y que si es tiempo antes detecten que se puede sumar.
Arantza: ya encontré como, mire podemos poner como ×, que es cualquier número menos 2, como el 10 menos 2, luego ya sea el 8 menos 2 y el 6 y así.
Investigador: ¿no inlfuirá en nada el tiempo?
Arantza: de verdad, ah ya se como… se va a su lugar.
Investigador: piensen como representarlo matemáticamente. ¿Toño lo representó matemáticamente?
Arantza: pues matemáticamente se tiene que representar con una ecuación. Una forma que de mucha información y se pueda escribir más fácil
Investigador: ¿y lo que hizo toño no es matemático?
Arantza: si, pero…
Toño: si es porque tiene números y se van restando 2.
Investigador: bueno si tiene números y se le van restando 2, pero si Arantza dice que con una ecuación, ¿se podrá representar con una ecuación o algo parecido?
Profesor: (dice en voz baja al investigador) profe considero que es mejor que les demos oportunidad de salir porque la mitad del grupo no va a saber que hicieron, podemos continuar mañana, que al cabo ya sólo faltan 15 minutos.
Investigador: pues usted diga, es su grupo.
Profesor: si está mejor, Jovenes pueden salir a receso, contesten esto en su casa y mañana continuamos.

Anexo E. Artículos producto de la investigación

EL USO DE LA INVESTIGACIÓN EN LA PRÁCTICA DOCENTE. UN DISEÑO PARA LA TRANSICIÓN DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO AL ALGEBRAICO

José Alonso del Río Ramírez y Nancy Janeth Calvillo Guevara
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
Martín M. Socas Robayna y María Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se hace un análisis de investigaciones que buscan la transición del pensamiento numérico al algebraico, y otras, que clasifican las dificultades que regularmente tienen los estudiantes para apropiarse de los conceptos del Álgebra escolar, a efecto de identificar recursos matemáticos que desarrollan el pensamiento algebraico.

Con el mismo propósito se diseñó una secuencia didáctica que toma en consideración las conclusiones de estas investigaciones, y se aplicó en una escuela secundaria de México. Los resultados ponen de manifiesto que en la transición del pensamiento numérico al algebraico, surgen junto a los aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del álgebra, otros, como las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrollan en las clases. Se analiza, finalmente la propuesta desde el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), como un modelo fenomenológico, que permite caracterizar con mejor precisión la introducción de los estudiantes a la adquisición del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento numérico, pensamiento algebraico, Álgebra, número generalizado.

Abstract

THE USE OF RESEARCH IN TEACHING PRACTICE. A DESIGN FOR THE TRANSITION FROM NUMERICAL TO ALGEBRAIC THINKING

This article analyses research works on the transition from numerical to algebraic thinking, and others, which classified the difficulties pupils regularly find when appropriating school algebra concepts, in order to identify mathematical resources that develop algebraic thinking.
With the same aim, a teaching sequence was designed take into account the findings of these research works and they are applied in a secondary school in Mexico. The results show that in the transition from numeric to algebraic thinking, not only do aspects related to the complexity of the algebraic objects and methods appear, but others, such as the teaching contract, the teaching methods, and the learning situations developed in class also appear. Finally, there is an analysis of the proposal from the model of Formal Mathematical Competence (FMC) as a phenomenological model to allow a more accurate characterization of how the pupils are introduced to the acquisition of algebraic thinking.

Keywords: Numerical thinking, algebraic thinking, Algebra, generalized number.

Introducción

La literatura relativa a la investigación en Didáctica de la Matemática muestra que existen dificultades en la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico, inicialmente por la complejidad del Álgebra, cuando los aprendices comienzan a trabajar con este tema, muchos de ellos, pierden la ilación que debe tener la Matemática, ocasionándoles un conflicto al relacionar la Aritmética con el Álgebra. Papini (2003) menciona que cambian las estructuras del pensamiento y lo que antes funcionaba ahora ya no, Socas (2011) nos hace ver que los estudiantes tienen "problemas" para aprender nociones o procesos algebraicos correctamente y es un obstáculo para continuar formándose matemáticamente.

Los problemas que causa el Álgebra repercuten en la forma de "percibir las Matemáticas", no todos los estudiantes pueden evolucionar fácilmente desde el enfoque aritmético que tienen, *"para muchos alumnos, el álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las matemáticas*" (Palarea, 1998, p.6).

De ideas similares a las anteriores, que expresan complejidad al momento de aprender Álgebra, surge la duda, ¿la problemática que muestran los estudiantes hacia el Álgebra escolar, recae solamente en su complejidad o existe algo más que impida una buena comprensión? Se buscó evidencia sobre esos aspectos para intentar dar una respuesta y se encontraron varias investigaciones que tratan acerca de las dificultades, errores y problemáticas que tienen los alumnos para aprender Álgebra (Ruano, Socas y Palarea, 2003; Sessa, 2005, Butto y Rojano, 2010; Radford, 2010; Socas, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhemi, 2012) y otras que dan propuestas para comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Billings, Tiedt y Slater, 2007; Cañadas, 2007; Molina, 2009; Rojas, 2010).

Los resultados de las investigaciones consideradas han permitido elaborar el diseño de una secuencia didáctica que busca apoyar el transito del pensamiento numérico al algebraico. Ésta se aplicó en una escuela secundaria[9] de Jerez, Zacatecas (México), obteniendo resultados que facilitan continuar con la investigación acerca de esta temática. La incorporación de ciertos aspectos del enfoque ELOS[10] (Socas, 2001 y 2007), y la organización de los errores comunes que cometen los estudiantes, clasificándolos según su origen, causas y efectos de los mismos (Palarea, 1998; Socas, 1997, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2003), proporcionan herramientas para mejorar las actividades correspondientes al pensamiento algebraico en próximos diseños de secuencias didácticas.

La experiencia docente nos ha permitido detectar que muchas de las veces cuando se comienza a trabajar Álgebra con alumnos de secundaria, ellos tienen el referente de que una fórmula sirve para cualquier situación problemática del mismo estilo, logrando obtener el resultado por algún tipo de mecanización; por ejemplo, cuando conocen las fórmulas geométricas de áreas y perímetros, una misma fórmula funciona para cualquier área o perímetro del mismo tipo de polígono. Teniendo en cuenta que cuando se trabaja con áreas y fórmulas "*no suele darse a las letras una representación algebraica"* (Ursini *et al.*, 2005, p. 11). En primaria a las letras se les da una representación como de etiquetas que se refieren a cantidades específicas o a la inicial de una palabra, *"se suele usar la b para referirse a 'base'; la A para 'área'; h para 'altura', etc."* (Ursini *et al.*, 2005, p. 11).

[9] La escuela secundaria forma parte de la educación obligatoria en México, su equivalente en España son los primeros tres ciclos de ESO, a la que regularmente asisten alumnos de 12 – 15 años de edad.

[10] El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiósis) (Socas, 2012, p. 2).

A causa de la dificultad que tienen los estudiantes para aprender Álgebra cuando están acostumbrados a resolver problemas por métodos aritméticos, se indagó en investigaciones hechas sobre la transición entre Aritmética y Álgebra (Kieran, 1992; Ruano *et al., 2003;* Butto y Rojano, 2004; Sessa, 2005; Trujillo, 2008; Socas, 2011), entre otros.

El pensamiento algebraico como saber a enseñar

Consideraremos a continuación el pensamiento algebraico como saber a enseñar distinguiéndolo de pensamiento numérico y Álgebra, con el fin de conocer a qué se refiere cada término y detectar cómo forman parte del proceso de transición de la Aritmética al Álgebra (de los números a las letras), relacionando la información obtenida con los planes y programas de educación secundaria en México. El énfasis en los currícula ya no es el de enseñar Álgebra de manera formal y rígida, sino propiciar elementos para que los estudiantes sepan trabajar con tres usos que se le asignan a las literales a través de un eje temático que se denomina "*Sentido numérico y pensamiento algebraico",* el cual establece que:

> Los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y en relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.
>
> La insistencia en ver lo general en lo particular se concreta, por ejemplo, en la obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón; en la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas; en el empleo de expresiones algebraicas que representan la relación entre dos variables, la cual, para este nivel, puede ser lineal (en la que la proporcionalidad directa es un caso particular), cuadrática o exponencial (SEP, 2006, p. 9).

Para tener el lenguaje similar a la Secretaría de Educación Pública (SEP), institución que coordina y regula la educación en México, se tomarán como una misma idea al pensamiento numérico y al sentido numérico, considerándolo como:

> La comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (McIntosh, Reys y Reys, 1992, p. 2).

Este pensamiento comienza antes de la escolaridad de una persona, Obando y Vázquez (2008) nos dicen que casi siempre se genera de la interacción con adultos, desarrollando intuiciones sobre lo numérico; una vez que tengan esas nociones comenzarán a utilizar los números para distintas tareas: secuencias verbales, etiquetar, contar, medir y ordenar.

En conclusión, el pensamiento numérico permite, a quienes lo hemos desarrollado, que observemos las magnitudes, el orden y las características que podemos tener acerca de los números y las relaciones que pueden tener con la vida cotidiana. Podemos observar a varias personas que no tienen alguna formación escolar y la necesidad hace que comprendan el valor y la relación que tienen los números entre sí.

Al hablar de pensamiento algebraico se debe tener en cuenta que es distinto al Álgebra formal, Butto y Rojano (2004) establecen que el pensamiento algebraico desarrolla algunas ideas del Álgebra y al compararlo con la formalización algebraica son actividades de niveles cognitivos distintos.

El pensamiento algebraico es una forma de ver la Aritmética un poco "más allá"; teniendo bien definidos los propósitos de los ejercicios que se deben de presentar a los aprendices de este tipo de pensamiento, para lograr que lleguen al propósito deseado, regularmente una generalización, Billings *et al.* (2007) establecen que definiendo correctamente la forma de trabajo se involucra positivamente a los estudiantes para comenzar a tener ideas sobre generalización de patrones y formulación de conclusiones.

El término Álgebra tiene en la actualidad connotaciones diversas; en nuestro caso tomaremos como referencia del término la definición de la Real Academia Española (RAE):

> Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita (RAE, 2001).

El Álgebra será tomada en cuenta como un proceso de generalización de la Aritmética, porque con base en ello se comienza a trabajarla con alumnos de primer grado de secundaria (11 – 12 años). Trujillo (2008) manifiesta que la generalización de la aritmética tradicionalmente es utilizada para comenzar el trabajo del Álgebra en el ámbito escolar.

El pensamiento algebraico servirá de apoyo para llegar a la formalización del Álgebra dentro del currículo escolar, porque el pensamiento algebraico desarrolla en los alumnos un primer acercamiento al proceso de generalización de patrones que se representan en un pensamiento numérico.

Pregunta de investigación

La pregunta de investigación que se pretende contestar en este trabajo es:
¿Cómo comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico con alumnos de primero de secundaria, para que tal pensamiento los oriente a un buen desempeño al trabajar Álgebra?

Se diseñó, aplicó y validó una propuesta didáctica que apoyara la transición entre la Aritmética y el Álgebra, basada en los resultados de investigaciones en Matemática Educativa, intentando dar respuesta a la pregunta de investigación, teniendo como hipótesis que la aplicación y validación de la secuencia didáctica mencionada ayudará a que los estudiantes adquieran herramientas para evolucionar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, centrándose en sus formas de pensar.

Marco conceptual

En la formulación del marco conceptual de esta investigación se tomaron en consideración diferentes aspectos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986), de la transposición didáctica (De Faria, 2006) y del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001, 2007).

De esta manera el diseño de la secuencia didáctica se fundamenta en las situaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas, adecuándola en un medio que esté organizado para que los estudiantes adquieran nuevos conocimientos, utilizando la transposición didáctica.

En el análisis de resultados se caracterizarán algunas herramientas bajo el fundamento de seis etapas: operaciones, proceso, estructuras, situación problemática, razonamiento (argumentos) y representaciones; que marcan la fenomenología, el campo conceptual[11] y la funcionalidad de las Matemáticas, aspectos que para Socas (2012) caracterizan a la Matemática como disciplina científica.

[11]Un espacio de problemas o de situaciones – problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión (Vergnaud, 1981, p. 7).

Las categorías tienen la finalidad de mejorar la "matematización de la cultura", a la que hace alusión Socas (2010 y 2012) como parte del ELOS[12] (Enfoque Lógico Semiótico), y ayuda en la producción de actividades de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, caracterizando el dominio de la actividad matemática desde la Competencia Matemática Formal[13] (CMF), la cual tiene la intención de ayudar en la docencia y en la investigación de la Matemática Educativa. Socas (2010) menciona que la Competencia Matemática Formal enfatiza la diferencia del objeto matemático y su forma de representarlo.

Por "Matematización de la Cultura" se entenderá el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que se genera al situarlas como un conocimiento cultural para todas las personas. En este trabajo se hará buscando la manera de transformar el "saber sabio" en "saber a enseñar" a través del análisis de las categorías: operaciones, estructuras y procesos que caracterizan el campo conceptual

Las tres categorías están relacionadas de la siguiente manera:

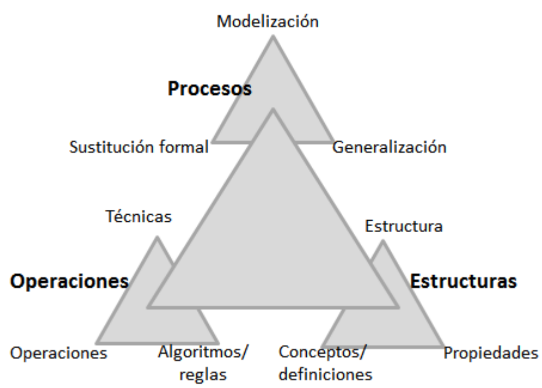


Imagen 1. Relación de las tres categorías que describen la Competencia Matemática Formal en relación el campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Junto con las categorías que determinan el campo conceptual se describe también el contexto, en el que aparecen y se desarrollan los objetos matemáticos considerados. Las categorías que determinan el contexto son: situación problemática, representaciones y argumentos, y se representa de la siguiente manera:

[12]El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiósis) (Socas, 2012, p. 2).

[13]La Competencia Matemática Formal, es un modelo que considera a la Matemática como disciplina científica, desde la triple perspectiva del conocimiento matemático: Fenomenología, epistemología (campo conceptual) y semiótica (especialmente desde la funcionalidad de las representaciones de los objetos matemáticos).

Imagen 2. Relación de las tres categorías que describen en la Competencia Matemática Formal contenidas en la Competencia Matemática Formal el contexto del campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Estas categorías establecen diferentes conexiones que permiten relacionarlas entre sí, mostrando que a través de la situación problemática llegaremos a relacionar representaciones y a utilizar argumentos que sean válidos para el resultado requerido. Además de lo anterior, Socas (2012) plantea que las seis categorías que describen el campo conceptual y el contexto, respectivamente, permiten establecer diferentes caminos (fenomenología) que facilitan el análisis de las características que debe tener el conocimiento matemático tratado.

Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se diseñó y aplicó una secuencia didáctica que utiliza los pasos de la Ingeniería Didáctica, con un grupo de 40 alumnos de primero de secundaria en Jerez, Zacatecas (México), los cuales se organizaron en diez equipos de cuatro personas cada uno, se nombraron con el nombre del encargado de cada equipo: Jorge, Itzel, Toño, Arantza, Ricardo, Manuel, Alí, Karla, Paulina y Andrea; con dicha organización, en este artículo, se muestran los resultados de una actividad desarrollada en la secuencia de actividades.

Análisis preliminar

El diseño de la actividad toma en cuenta resultados de diferentes investigaciones; por ejemplo, Barallobres (2000) nos sugiere idear una estrategia en la que se haga ver a los alumnos que es necesario seguir cierto tipo de reglas y pasos para facilitar la resolución de ejercicios. Es importante tener en cuenta que los ejercicios pensados no se puedan resolver fácilmente por métodos aritméticos, ya que los alumnos preferirán hacerlo por ese método porque es el que conocen. Carraher et al., (2006) y Radford, (2010) aconsejan que es mejor diseñar problemas en los que los estudiantes necesiten alguna herramienta matemática que pueda usarse dentro del pensamiento algebraico para detectar qué es lo que está ocurriendo o para generalizar información de una manera algebraica.

La actividad se basa, en uno de los tres usos de la letra que mencionan Ursini et al., (2005), la literal como número generalizado. La secuencia didáctica pretende ayudar a los alumnos a comenzar con el álgebra escolar, pero es indispensable comentar que no hay una fórmula específica para trabajar el álgebra con los distintos estudiantes, ya que cada uno de ellos piensa y actúa de manera diferente a sus compañeros y a estudiantes de otras generaciones; como menciona Brousseau (1986) no es permisible que los profesores trabajen con las mismas actividades desde hace bastantes años.

En relación con las características del grupo con el que se trabajaron las actividades, debemos señalar que los alumnos están acostumbrados a contestar las tareas por medio de operaciones matemáticas y de forma mecánica. En este tipo de contrato didáctico el profesor es quien posee el saber y determina lo que está bien o mal. No existen momentos de discusión y razonamiento grupal por parte de los estudiantes, sólo pueden reflexionar individualmente cuando están explicándole al profesor en el pizarrón; además, éste señala explícitamente que no le gusta que trabajen en equipo porque pierden tiempo y generalmente alborotan.

Los estudiantes ya tienen conocimientos acerca de actividades en las que utilizan las letras (algebraicas), porque el nuevo currículo de secundaria de México marca algunos temas referentes al uso de la variable con alumnos de primer grado de secundaria.

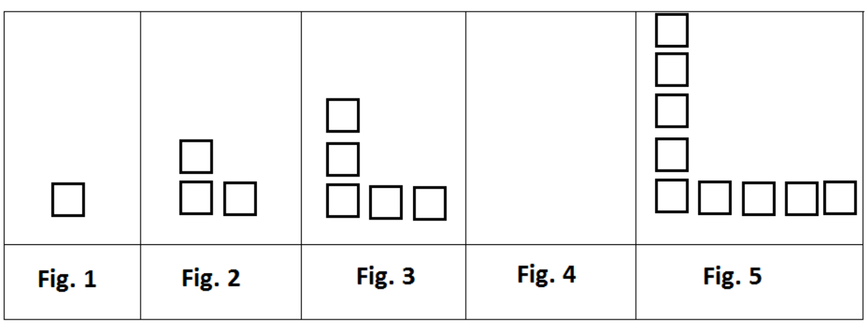
Análisis a Priori

Tratamos a continuación el análisis *a priori* de la actividad en la que se considera el uso de la letra como número generalizado

Actividad. Número Generalizado
Consideramos las siguientes situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización.
Situación de Acción
La pretensión de esta actividad es que los estudiantes detecten una relación entre figuras y expresiones numéricas con la intención de que, por medio de la búsqueda de la representación de las figuras en forma numérica, encuentren una regla que exprese la forma general del incremento que tienen las figuras, que sirva para todos los casos y para uno en particular. Ursini et al. (2005) al considerar la variable como número generalizado, regularmente proponen utilizar símbolos que representan una situación general, una regla o un método. Al hacer uso de la literal de esta manera se busca desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos.

La actividad es la siguiente:

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.



Dibujen la Fig. 4

Describan cada figura, relacionándolas entre sí.

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?

¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?

> ¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?
>
> ¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras? si es así, intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

Se esperaba que los estudiantes detectaran que, conforme avanza el número de figura, aumenta dos cuadrados, y que lo puedan representar mediante una expresión algebraica. Las variables didácticas consideradas en este ejercicio son: el acomodo de cuadros en cada figura, las preguntas que se hacen para que detecten que pueden representarlo mediante otro tipo de representación.

Situación de Formulación

Las preguntas que se formularon tenían la intención de que los estudiantes comenzaran contestando las preguntas por medio de respuestas gráficas; es decir, que hicieran los cuadros que pedían los términos de la sucesión para que detectaran cuál iba a ser la proporción en la que aumentaba, después se consideraba el aumento en mayor cantidad para que pensaran otra manera de hacerlo y ya no fuera gráfica o aritmética, sino que desarrollaran un pensamiento más profundo.

Situación de Validación

Se consideró que se llevaría a cabo cuando los estudiantes ya tuvieran las respuestas de las actividades y que éstos expondrían sus resultados ante sus compañeros y los discutirían en caso de que no estuvieran correctos.

Situación de Institucionalización

El profesor debería reafirmar y mostrar el resultado correcto que tuvieran los estudiantes, para que todos dispusieran de un resultado común y estuvieran convencidos que en realidad ése era el resultado. Se pretendía crear la visualización del resultado correcto a través de preguntas para no mostrarles el resultado, sino que ellos descubrieran si su resultado era correcto o no.

Análisis *a Posteriori*

Se optó por llevar a los estudiantes a un buen desarrollo por medio de preguntas que ocasionaran la devolución de la actividad; en el momento de repartirla se observó que éstos se involucraron buscando las estrategias necesarias para resolverla, logrando una buena situación de acción. En seguida se pasó a la situación de formulación estando pendiente de lo que contestaban los estudiantes, pasando por los lugares de los equipos, observando sus procesos y lanzando preguntas que ocasionaran reflexión acerca de la actividad.

A pesar de tener bien orientado el trabajo y que todos los equipos llegaron a tener una buena respuesta en la primer pregunta, hubo concepciones inadecuadas en las respuestas en que los alumnos intentaban establecer la solución (imagen 3), pero no pudieron llegar a una expresión algebraica; el signo igual sirvió como apoyo para seguir con la sucesión, dando por resultado una respuesta errónea, que para los alumnos era válida.

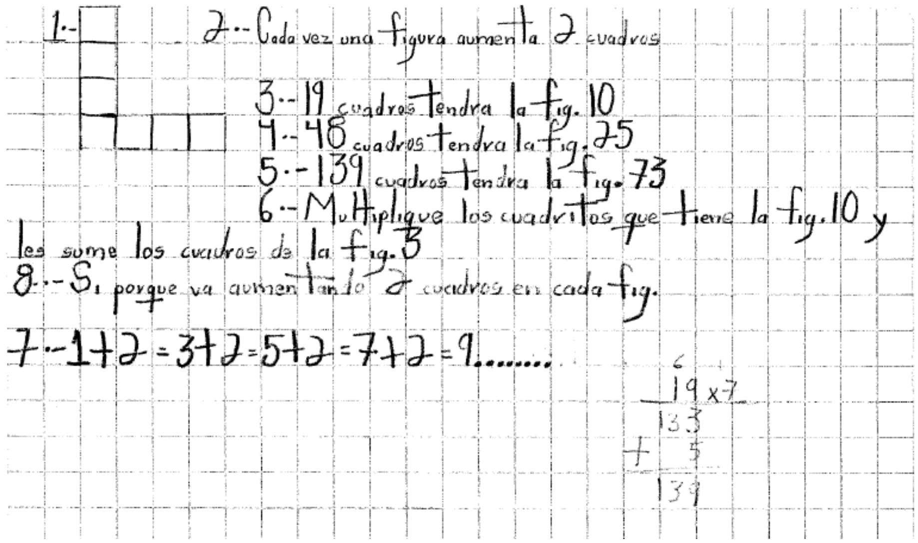


Imagen 3. Resultado del equipo de Arantza, una de las concepciones inadecuadas que se mostraron en la resolución de la actividad

El equipo de Andrea sí llegó a la formulación de una expresión algebraica, con la cual podían saber la cantidad de cuadros en cada término que se les pidiera (Imagen 4), lo nombraron “Fórmula”, ésa es la manera en que ellos conocen a las expresiones en las que intervienen las letras y los números, porque regularmente se han trabajado en contextos geométricos.

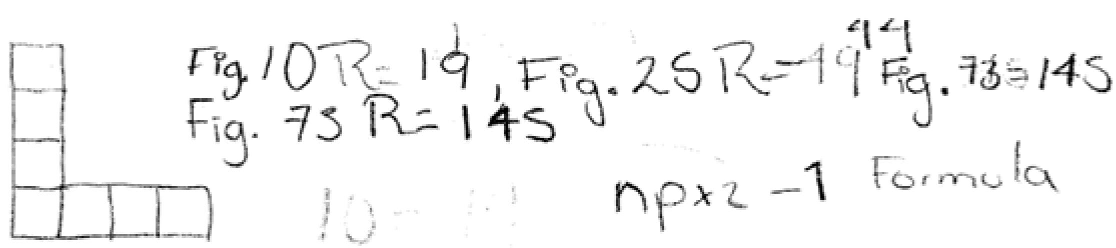


Imagen 4. Respuesta dada por el equipo de Andrea, en la que llegaron a la formulación de una expresión algebraica

En general los estudiantes tenían una buena idea sobre lo que pretendía esta actividad; sin embargo, existieron quienes no llegaron a establecer más allá de lo aritmético; es decir, sólo llegaron a concluir que se iba sumando de dos en dos para lograr formar todos los términos de la secuencia. Se pueden hacer varias conjeturas para mostrar el error de los estudiantes, pero vamos a tener la idea de que no han cambiado su forma de pensar numéricamente, impidiéndoles pensar en la obtención de una letra para representar un número, Pierce (1931-1958, citado en Radford 2013) a ese proceso le llama “abducción” y establece que es la forma que utiliza un alumno para pasar de un término a otro, llegando a una generalización aritmética, sin pensar en una forma de representarlo en otro lenguaje.
La situación de validación se conjuntó con la institucionalización, porque el investigador detectó que hacía falta un moderador que dirigiera la actividad para llegar a una buena conclusión, entonces como en todo el transcurso de la actividad, el investigador participó en la conclusión de la respuesta por parte de los alumnos con preguntas que los orientaran hacía el buen establecimiento de la respuesta pedida.

A pesar de que los estudiantes tenían bien la respuesta, se detectó en la revisión de hojas de trabajo que no cambió su forma de pensar, porque seguían estableciendo que sumando dos cuadros se llegaba a la respuesta deseada, sin relacionar la respuesta con la expresión algebraica a la que se había llegado.

Resultados y discusión

Con la resolución de esta actividad podemos comenzar a detectar los elementos que intervienen o debieran de intervenir al comenzar a desarrollar un pensamiento algebraico. Se ha intentado llegar a la detección de elementos que hacen falta tomar en cuenta para lograr que el desarrollo de este pensamiento sea adecuado para transitar al Álgebra, a través de la forma en que los alumnos contestaron la actividad.

Se llega a la conclusión de que la mayoría de los alumnos pudieron contestarla, gracias a la participación de "una figura de autoridad", era necesario que existiera un moderador, porque los alumnos por sí solos no desarrollarían tales reflexiones. La costumbre que tienen para la resolución de actividades es que el profesor proponga ejercicios y ellos los resuelven de manera mecánica, sin darle significado a lo que están haciendo, es una metodología en la cual los estudiantes sólo contestan como respuesta al contrato didáctico que se crea en la clase.

A pesar de que los estudiantes tuvieran nociones correctas acerca de lo que iban a contestar, es necesario señalar que aún se les hacía difícil la forma de representar una literal que pudiera valer algún número, porque en las actividades se pudo detectar que algunos equipos pudieron llegar a la formulación de una expresión algebraica, no de manera formal, pero era una expresión en la que una letra representaba el número que variaba o por lo menos un símbolo que representaba un número desconocido, pero la mayoría solo lo hicieron de manera numérica, estableciendo que iba a ir aumentando de dos en dos cada término, afirmando lo que dicen las investigaciones, que a los estudiantes se les hace difícil el cambio de pensamiento.

Haciendo uso de la teoría que asegura la existencia de dificultades, errores y obstáculos, pueden relacionarse algunos pensamientos inadecuados de los estudiantes en esta secuencia con las que marcan como generales en el momento de iniciar el trabajo con el Álgebra escolar, por ejemplo, no pueden cambiar la idea de que una letra puede representar cualquier número; Palarea (1998) menciona que regularmente cuando iniciamos el tratamiento del Álgebra escolar no significamos el uso de la letra, sino que utilizamos símbolos para representar un valor desconocido, obteniendo por resultado que los estudiantes terminan haciendo "*una 'no interpretación' de la letra… y en este proceso los estudiantes ignoran la letra, o la reconocen pero no tiene significado*" (p. 62).

Los estudiantes tienden a la *necesidad de clausura*, esto se observó cuando un equipo supo establecer una "fórmula" que satisfacía lo pedido, en el momento de plasmarla en el pizarrón tenían que igualarla con algún término, haciendo notar que les hacía falta la necesidad de que esa "fórmula" fuera igual a un número específico, para dar un valor indicado, Ruano *et al.*, (2003) atribuyen a este tipo de procesos a un error común que tienen los alumnos cuando comienzan a desarrollar el pensamiento algebraico, denominándolo *necesidad de clausura*, estableciendo que los estudiantes no pueden asimilar una expresión numérica o algebraica "abierta", porque no aceptan que esas expresiones no puedan cerrarse y no generen expresiones numéricas o algebraicas "cerradas", como resultado.

Se observó que también hubo casos en que los estudiantes utilizaban de manera errónea el signo igual, estableciendo un signo de igualdad para separar cada término de la secuencia, independientemente de que sean expresiones equivalentes o no; en realidad al hacer esta acción el resultado es incorrecto, porque al separar con signos que denotan una igualdad, se está asegurando que $1 = 3 = 5 = 7 = \cdots$, caso que no es cierto; podemos atribuir a ello que los alumnos siguen buscando una forma de encontrarle sentido a la expresión buscada, que sea equivalente para cada término y lo hacen a través de signos incorrectos, detectando que están haciendo una cerradura de las operaciones a través de errores en la Aritmética, Socas (2011) establece que los errores en la Aritmética que se basan en la limitada interpretación del signo igual ya ha sido estudiado y caracterizado como un error frecuente en los alumnos al momento de trabajar con el Álgebra escolar.

Finalmente se encuentra que existen errores en los que los estudiantes muestran una ausencia de sentido, término que caracterizan Matz (1980), Palarea (1998), Ruano *et al.*, (2003) y Socas (2011), a lo que se les pregunta, contestando solamente que saben razonar matemáticamente sin poder llegar a la expresión de algún resultado ni siquiera en términos aritméticos.

La detección de errores y aciertos por parte de los estudiantes se pudo observar en las respuestas que dieron los alumnos, encontrando que aún no pueden significar la letra como un número cualquiera. Se llegó a la conclusión que se necesita un mejor análisis de las actividades, aparte del que se ha hecho de las respuestas de los estudiantes para poder caracterizar dónde están las deficiencias que muestran al contestarlas, pues las que se hicieron no dan la muestra suficiente para llegar a esa caracterización, debido a que no buscaban fines matemáticos específicos, sino que la intención era que llevaran a los estudiantes a pensar algebraicamente; es preciso señalar que no se consideró ninguna propuesta para hacerlo, por ello, se utiliza el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF) para rescatar los elementos que deben afinarse en la fenomenología matemática que debe contener la secuencia y, de esta manera, pueda llevar a los estudiantes a un mejor pensamiento algebraico.

Si la secuencia didáctica hubiera considerado aspectos pertenecientes a las etapas de la Competencia Matemática Formal, se cree que el resultado de este diseño aportaría mejores actividades y herramientas para desarrollar el comienzo del pensamiento algebraico, las cuales servirían para centrarnos solamente en las respuestas de los estudiantes. Aunque al hacerlo de esta manera se ha concluido que es necesario diseñar las actividades de una manera congruente con los conocimientos que poseen los estudiantes, con la fenomenología matemática para el desarrollo de un pensamiento algebraico, que potencien lo que intentan establecer y que lleven un incremento de dificultad que vaya guiando a los estudiantes "paso a paso" en la construcción de términos algebraicos.

Enfatizando los elementos que debe contener la secuencia didáctica correspondientes a la CMF, la actividad necesita una mejora. Se han caracterizado algunos elementos que se deben considerar para potencializar el conocimiento que deben adquirir los estudiantes, con la finalidad de que ahora no quede sólo en una secuencia aritmética, sino que se compruebe que en realidad la secuencia resultante sea algebraica, como lo menciona Radford (2013).

Dentro del campo conceptual se tiene que considerar lo siguiente:

Operaciones	Estructura	Proceso
• A través de operaciones conocer el patrón que rige la secuencia • Operar aritméticamente para cumplir la secuencia • Representación formal de las operaciones • Manipulación de elementos mediante el cambio de registro para ayudar a visualizar el crecimiento de las figuras	• Variable como número generalizado • Definir las reglas de la sucesión en cualquier registro • El aumento proporcional de elementos en los términos generales de una sucesión • Distributiva, asociativa, conmutativa, factor común	• Cambiar la representación de registro común – gráfico a registro aritmético • Encontrar el patrón mediante el tratamiento en el registro aritmético • Llegar a una representación algebraica

Para la creación de una situación problemática que considere los conocimientos anteriores se tiene que desarrollar bajo los siguientes aspectos:

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
• Leer una actividad y detectar que prosiguiendo con lo que indica se puede encontrar una secuencia numérica que aumenta constantemente (la progresión que debe llevar la actividad) • Llegar al cambio de representación mediante el razonamiento de un tratamiento de valores	• Descripción de la regla en cada representación (registro) • Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla deducida • Representación mental • Representación aritmética y algebraica	• Saber que se necesita cambiar el registro para resolver la situación problemática • Saber considerar la variable como número general con el que es posible operar • El aumento proporcional de una sucesión puede ser representado por una regla

Conclusiones

La intención de elaborar la secuencia didáctica basándonos en estos elementos para el comienzo del pensamiento en estudiantes de primer grado de secundaria, pretende llegar a entender cómo podemos comenzar a desarrollar esta forma de razonar, esperando obtener conclusiones que nos doten de herramientas para que exista una mejora al momento de trabajar Algebra.

En la actualidad se está trabajando en el rediseño de la secuencia de actividades, con la intención de considerar los mayores elementos posibles que intervienen al momento de su experimentación, así como la suposición de errores que pueden cometer al momento de contestar este tipo de actividades, los cuales ya estaban caracterizados por algunos autores y se detectaron en la solución de algunos estudiantes, esperando que la nueva secuencia didáctica nos permita comenzar a caracterizar los elementos que se deben considerar para fomentar el pensamiento algebraico.

Queremos señalar finalmente que encontramos diferentes maneras de desarrollar el pensamiento algebraico, ya que cada alumno piensa de una manera distinta, y cada grupo de estudiantes tiene diferentes formas de interpretar la información. Ahora bien, en nuestro trabajo se espera llegar a concretar qué elementos matemáticos es posible considerar para la elaboración de la secuencia didáctica; después se tendrá que conocer a los grupos en los que se trabajará dicha secuencia para adecuarla a su contexto.

Referencias bibliográficas

Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra. *“Álgebra: enseñanza, aprendizaje y evaluación” organizado por el departamento de Cs. Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Cs. de la Educación*. U.N.L.P entre junio y noviembre del año 2004.

Billings, E.; Tiedt, T.; y Slater, L. (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics, 14* (5), 302–308.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 7 (2), 33-115.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1) 113-148. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3) 55-86. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516678004

Cañadas M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, *Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática*, Granada, España.

Carraher, D.; Schliemann, A.D.; Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: *definición, epistemología, objeto de estudio. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 1 (2), Costa Rica.

Godino, J.; Castro, W.; Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental Boletim de Educação Matemática, *Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho*, *26 (42B)* abril, 483-511.

Matz, M. (1980). Towards a Computational. Theory of Algebraic Competence. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, 3, 1, pp.93-166.

Mcintosh, A.; Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics,* 12(3), 2-44.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3* (3), 135-156.

Obando, G. y Vázquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica.* Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. *Tesis doctoral, Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático*. Tenerife, España.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6* (1), 41-72.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%A1lgebra.

Rojas, P. (2010). Iniciación al álgebra escolar: Elementos para el trabajo en el aula, *Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Colombia, pp. 115-131.*

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 312-322.

Secretaría de Educación Pública (2006). Educación Básica. *Secundaria, Matemáticas*. *Programa de Estudio*. México, D. F.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En Rico, L. y otros (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Ess.), *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. En M. M. Socas, M. Camacho, A. Morales y A. Noda (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* (pp. 9 – 42). Tenerife, España: Ediciones «Campus».

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Trujillo, P. (2008). Procesos de generalización que realizan futuros maestros (Tesis de maestría inédita*). Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada*. Granada, España.

Ursini, S.; Escareño, F.; Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches francaises en didactique des mathématiques. In Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME Internacional Conference, 2, 7-17.*

Un diseño para la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico

José Alonso del Río Ramírez, Nancy Janeth Calvillo Guevara (UAZ, México)
Martín Manuel Socas Robayna, María Mercedes Palarea Medina (ULL)

Resumen

En este artículo se hace un análisis de investigaciones que buscan la transición del pensamiento numérico al algebraico, y otras, que clasifican las dificultades que regularmente tienen los estudiantes para apropiarse de los conceptos del Álgebra escolar, a efecto de identificar recursos matemáticos que desarrollan el pensamiento algebraico.

Con el mismo propósito se diseñó una secuencia didáctica que toma en consideración las conclusiones de estas investigaciones, y se aplicó en una escuela secundaria de México. Los resultados ponen de manifiesto que en la transición del pensamiento numérico al algebraico, surgen junto a los aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del Álgebra, otros, como las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrollan en las clases. Se analiza, finalmente la propuesta desde el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), como un modelo fenomenológico, que permite caracterizar con mejor precisión la introducción de los estudiantes a la adquisición del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento numérico, pensamiento algebraico, Álgebra, incógnita específica, número generalizado.

Abstract

This article analyses research works on the transition from numerical to algebraic thinking, and others, which classified the difficulties pupils regularly find when appropriating school algebra concepts, in order to identify mathematical resources that develop algebraic thinking.
With the same aim, a teaching sequence was designed take into account the findings of these research works and they are applied in a secondary school in Mexico. The results show that in the transition from numeric to algebraic thinking, not only do aspects related to the complexity of the algebraic objects and methods appear, but others, such as the teaching contract, the teaching methods, and the learning situations developed in class also appear. Finally, there is an analysis of the proposal from the model of Formal Mathematical Competence (FMC) as a phenomenological model to allow a more accurate characterization of how the pupils are introduced to the acquisition of algebraic thinking.

Keywords: Numerical thinking, algebraic thinking, Algebra, specific unknown, generalized number.

1. Introducción

En este artículo se muestra una prolongación de lo presentado en la reunión interuniversitaria en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en mayo del 2014; este documento se describe una prolongación, añadiendo al estudio otra situación problemática que considera a la literal como incógnita específica. Se mencionan algunos problemas que tienen los estudiantes al transitar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico; se han detectado mediante la experiencia docente, investigaciones y algunas otras situaciones que causan dificultad a los aprendices de Álgebra cuando comienzan a trabajarla. Regularmente tienen referentes geométricos para utilizar la letra en una expresión matemática, como lo mencionan Ursini, Montes, Escareño y Trigueros (2005), pero en este aspecto una misma letra funciona para cualquier área o perímetro, asignándoles un valor que regularmente se les proporciona para que lo sustituyan y encuentren el valor pedido.

La existencia de dificultades al trabajar con el Álgebra ha ocasionado que se tenga una motivación por comprender cómo desarrollar el pensamiento algebraico con alumnos que tienen una forma numérica de considerar las Matemáticas, para ello es preciso diferenciar pensamiento numérico, pensamiento algebraico y Álgebra.

Se sabe que existen varias definiciones de Álgebra y varias maneras de tomarla en cuenta al trabajarla, en este artículo se considera como: "*parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos… Cuando uno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita" (RAE, 2001)*.

El pensamiento numérico se considera como la comprensión que tiene una persona sobre los números y las cantidades; capaz de desarrollar una serie de intuiciones pudiéndolos etiquetar, contar, medir y ordenar. Permite a quien lo ha desarrollado observar las magnitudes, el orden y las características que tienen los números relacionándolos con la vida cotidiana.

El pensamiento algebraico sólo desarrolla algunas ideas del Álgebra, es una forma distinta de considerar la aritmética como consecuencia del razonamiento que se tiene "un poco más allá" de lo numérico, esperando que sientan la necesidad de expresar de otra manera las generalizaciones aritméticas.

Se tiene la idea de que el pensamiento algebraico sirve para apoyar la formalización del Álgebra dentro del currículo escolar; se cree que ayuda a los alumnos a tener un primer acercamiento al proceso de generalización de patrones. Además cumple con el objetivo de la Secretaría de Educación Pública (SEP), organización que regula la educación en México: que los alumnos puedan comprender el uso de las literales de tres diferentes formas: como incógnita específica, como número generalizado y en relación funcional.

2. Existencia de dificultades al transitar de la Aritmética al Álgebra

La adquisición de un pensamiento algebraico, generalmente ocasiona dificultad en los alumnos, debido a que tienen que hacer un cambio desde un enfoque numérico; esto se puede afirmar porque se ha hecho una revisión de investigaciones (Ruano, Socas y Palarea, 2003; Sessa, 2005, Butto y Rojano, 2010; Radford, 2010; Socas, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhemi, 2012) que caracterizan dificultades, errores, obstáculos y problemáticas en general que muestran los estudiantes al momento de aprender Álgebra y otras que, dan propuestas de como comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Billings, Tied y Slater, 2007; Cañadas, 2007; Molina, 2009; Rojas, 2010), partiendo de la existencia de dificultades en los estudiantes.

De las investigaciones anteriores se rescatan las conclusiones y se toman de referente para diseñar una secuencia didáctica que intenta caracterizar los elementos que están presentes en el momento de trabajar con temas referentes a Álgebra, por ejemplo: Molina (2009) pide que se integre el pensamiento algebraico en el currículo de educación primaria, porque de esa manera los alumnos transitaran más pronto a considerar números desconocidos; Ruano *et al.* (2003) mencionan que los alumnos tienden a particularizar alguna regla que tiene que ser una generalización y eso dificulta que lleguen a pensar algebraicamente; Cañadas (2007) establece una estrategia para que los alumnos comprendan la naturaleza del pensamiento algebraico; Butto y Rojano (2010) llegan a la noción de que los estudiantes resuelven mejor los ejercicios de generalización con lápiz y papel que utilizando software, sin embargo, no llegan a encontrar reglas para representar la generalización, sólo concluyen con la formulación del siguiente término en una progresión aritmética.

Es preciso señalar que muchas de las investigaciones que se hacen en este campo de las Matemáticas, regularmente se hacen para otros investigadores y no para profesores; Socas (2011) menciona que es necesario diseñar las investigaciones con mira a la forma en que interpretan y deliberan la información los profesores, quienes regularmente se basan en los libros de texto.

3. Planteamiento del problema de investigación

La intención de este trabajo es apoyar en el desarrollo del pensamiento algebraico, proponiendo que los estudiantes adquieran la noción de que existen otros números que se consideran como desconocidos y variables, los cuales se pueden representar con una letra. Se diseñó una secuencia didáctica que tiene situaciones problemáticas correspondientes a tres formas de trabajar con las literales, el modelo 3UV de Ursini *et al.* (2005), además se promueve el trabajo con patrones, producto de una secuencia aritmética; son situaciones problemáticas sencillas, pero intentan comprobar la hipótesis de que los alumnos pueden generalizar información a partir de casos particulares, de esta manera ya tendrán referentes acerca del pensamiento que deben desarrollar al momento de trabajar con el Álgebra formal.

De la información que se ha recabado surge la siguiente pregunta, ¿Cómo comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico con alumnos de primero de secundaria, para que tal pensamiento los oriente a un buen desempeño al trabajar Álgebra?

Para contestar la pregunta se ha propuesto el objetivo de diseñar, aplicar y validar una secuencia didáctica que apoye la transición entre la Aritmética y el Álgebra, basada en los resultados de investigación en Matemática Educativa, teniendo la noción de que la aplicación de secuencias didácticas diseñadas con base en las conclusiones de investigaciones referentes al pensamiento algebraico, ayuda a la obtención de herramientas para la transición del pensamiento numérico al algebraico.

4. Marco conceptual

Para el marco conceptual de esta investigación se tomaron elementos de distintas teorías: la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), de la transposición didáctica (Chevallard, 1991, citado en De Faria, 2006) y características del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001, 2007).

El diseño de la secuencia se fundamenta en las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización elaboradas por Brousseau (1986). Al transformarlas en un medio propicio para la enseñanza, organizado para que los estudiantes obtengan nuevos conocimientos se utilizó la transposición didáctica (Chevallard, 1991, citado en De Faria 2006). El análisis de resultados se hace bajo seis competencias (operaciones, estructuras, procesos, situación problemática, representaciones y razonamientos) que marcan la fenomenología, el campo conceptual y la funcionalidad de las Matemáticas y están dentro del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001, 2007), manejados desde la Competencia Matemática Formal (CMF).

La CMF, es un modelo que considera a la Matemática como disciplina científica, desde la triple perspectiva del conocimiento matemático: Fenomenología, epistemología (campo conceptual) y semiótica (especialmente desde la funcionalidad de las representaciones de los objetos matemáticos), tiene la intención de ayudar en la docencia y en la investigación de la matemática educativa. Socas (2010) menciona que la CMF enfatiza la diferencia del objeto matemático y su forma de representarlo.

Las tres categorías están relacionadas de la siguiente manera:

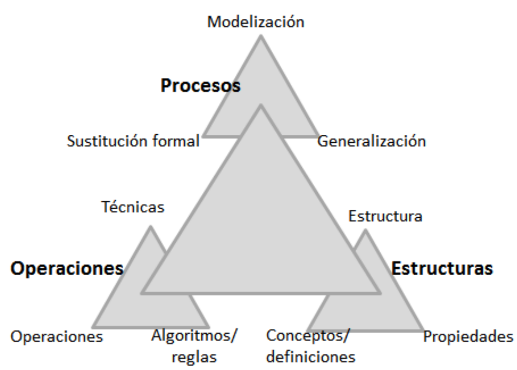


Imagen 1. Categorías que describen la Competencia Matemática Formal en relación con el campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Junto con las categorías que determinan el campo conceptual se describe también el contexto, en el que aparecen y se desarrollan los objetos matemáticos considerados. Las categorías que determinan el contexto son: situación problemática, representaciones y argumentos, y se representa de la siguiente manera:

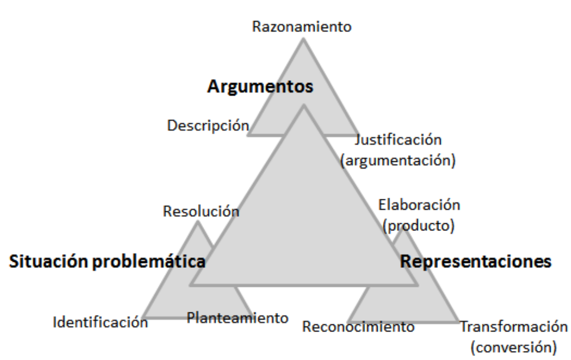


Imagen 2. Categorías que describen en la Competencia Matemática Formal el contexto del campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Estas categorías establecen diferentes conexiones que permiten relacionarlas entre sí, mostrando que a través de la situación problemática llegaremos a relacionar representaciones y a utilizar argumentos que sean válidos para el resultado requerido. Además de lo anterior, Socas (2012) plantea que las seis categorías que describen el campo conceptual y el contexto, respectivamente, permiten establecer diferentes caminos (fenomenología) que facilitan el análisis de las características que debe tener el conocimiento matemático tratado.

5. Metodología

La secuencia diseñada se aplicó siguiendo los pasos de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), con un grupo de 40 alumnos de primero de secundaria (12 años) en Zacatecas, México; los cuales se organizaron en 10 equipos, llamando a cada uno por el nombre de su representante: Jorge, Itzel, Toño, Arantza, Ricardo, Manuel, Alí, Karla, Paulina y Andrea; desarrollaron las situaciones problemáticas contenidas en la secuencia, en este trabajo se tomarán dos: como incógnita específica y como número generalizado. Se intentará detectar la forma en que las consideraron y si su resolución es permisible para decir que piensan algebraicamente o señalar qué elementos hicieron falta para lograr el cambio de pensamiento.

Se realizó un análisis preliminar el cual toma en cuenta directamente las propuestas que hacen algunas investigaciones como: Peled y Carraher (2007) dicen que llevemos a los estudiantes a contestar problemas con cantidades representados geométricamente en planos cartesianos o en rectas para que a partir de algo que ya conocen (aritmética) puedan desarrollar un pensamiento algebraico mediante generalizaciones, Barallobres (2000) propone que se tiene que idear una estrategia donde se les haga ver a los alumnos que es necesario seguir cierto tipo de reglas y pasos para facilitar la resolución de ejercicios, Carraher *et al.* (2006) aconsejan diseñar problemas en los que los estudiantes necesiten alguna herramienta matemática que pueda usarse dentro del pensamiento algebraico que detecte lo que está ocurriendo o que pueda generalizarlo, Ursini *et al.* (2005) proponen tres usos que se le asignan a la literal regularmente cuando se trabaja Álgebra: como incógnita específica, como número generalizado y en relación funcional; se tomaron en cuenta dos usos para la elaboración de esta secuencia, Cañadas (2007), Billings *et al*. (2007), Molina (2009) y Radford (2010) utilizan el razonamiento inductivo con un proyecto llamado *Early-Algebra* propiciando que se comience a considerar el Álgebra como una generalización de la Aritmética.

Además se caracterizó la forma de trabajo que tienen los alumnos dentro del grupo, detectando que no existe una puesta en común de explicación acerca de las respuestas, sino que algún alumno elegido pasa al pizarrón a resolver el problema y explicárselo al profesor mientras los demás están realizando otras actividades; esta forma de trabajo tiene la finalidad de que los alumnos no distraigan a los demás compañeros; el profesor titular del grupo será quien aplique las situaciones problemáticas con los estudiantes. También se detectó que los estudiantes ya tienen conocimientos acerca de cómo resolver ecuaciones de primer grado con una y con dos incógnitas.

6.1. Análisis a Priori

Se muestra a continuación el análisis *a priori* de dos usos de las letras: incógnita específica y número generalizado, se consideraron las siguientes situaciones: acción y formulación.

6.1.2. Situación problemática 1. Incógnita específica

La acción de la primera situación problemática consideró lo que realizarían los estudiantes y las variables didácticas que se eligieron. El planteamiento fue la siguiente:

Mary viajó desde su casa al norte de la ciudad para ir a una fiesta a la casa de Ale, cuando Mary estaba ya en la fiesta le habla por teléfono su papá y le dice que necesita que vaya a recogerlo porque se le ha descompuesto el carro, entonces Mary le pregunta que a dónde. El papá le dice que si está en casa de Ale recorra 61 km. hacia el sur, quedando 17 km al sur de su casa.

1. ¿A qué distancia está la casa de Ale de la casa de Mary?
2. ¿Cómo podemos expresar este problema con términos matemáticos? Exprésenlo
3. Establezcan otra manera matemática de representar el recorrido de Mary.
4. ¿Si el papá estuviera en otro punto de la ciudad, más al sur o al norte, podrían establecerlo matemáticamente sin saber su distancia?
5. ¿Existirá alguna forma general matemática que represente la distancia que recorrió Mary para ir a casa de Ale? ¿Cómo podrían establecerla? ¿por qué lo consideran así?

Las variables didácticas fueron: considerar números que regularmente les cuesta restar, cómo 61 – 17, porque las unidades del sustraendo son mayores, mencionar como norte y sur el trayecto que hace Mary para que puedan representarlo en una recta; es decir, cuando representen el primer trayecto, para el regreso tendrán que hacerlo en un sentido a 180° con respecto al primero.

En la situación de formulación de la primera situación problemática se pretendía que los estudiantes llegaran a establecer una relación entre la distancia del coche del papá y la casa de Mary; se pensaron dos formas de posibles respuestas, una de forma gráfica y otra de forma aritmética, considerando que las dos nos llevarían a la generalización de una expresión algebraica manejando la literal como incógnita específica.

6.1.3. Situación problemática 2. Número Generalizado

La situación de acción pretendía que los estudiantes detectaran una relación entre figuras y expresiones numéricas con la intención de que por medio de la búsqueda de la representación de las figuras en forma numérica, encontraran una regla que expresara la forma general del incremento que tienen las figuras, que sirva para todos los casos y para uno en particular. Ursini *et al*. (2005) dicen que al considerar la literal como número generalizado regularmente se usan símbolos que representan una situación general, una regla o un método. Al hacer uso de la literal de esta manera se buscó desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos.

La situación problemática es la siguiente:

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

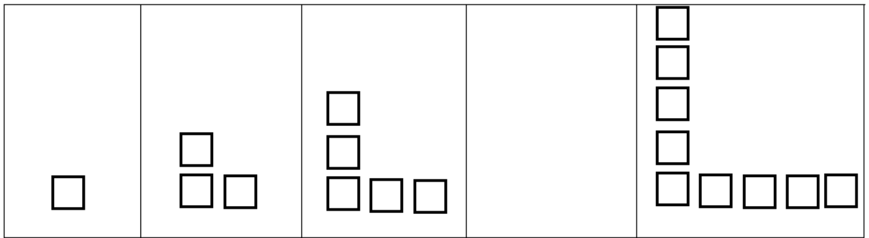


Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

1. Dibujen la Fig. 4
2. Describan cada figura, relacionándolas entre sí.
3. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?
4. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?
5. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?
6. ¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?
7. ¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?
8. ¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras?, si es así intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

Se esperaba que los estudiantes detectaran que, conforme avanza el número de figura, aumenta dos cuadrados, y que lo representaran mediante una expresión algebraica. La variable didáctica en esta situación problemática que se consideró fue el acomodo de los cuadros en cada figura, teniendo la idea que hace más fácil detectar que van incrementando de dos en dos.

La situación de formulación se ideó pensando que los estudiantes comenzaran contestando las preguntas por medio de respuestas gráficas; es decir, que hicieran los cuadros que pedían los términos de la sucesión para que detectaran cuál iba a ser la proporción en la que aumentaba, después se consideraba el aumento en mayor cantidad para que pensaran otra manera de hacerlo y ya no fuera gráfica o aritmética, sino que desarrollaran un pensamiento más profundo.

Se trataron también las situaciones de validación y de institucionalización para ambas situaciones problemáticas y se consideraron de la misma manera para las dos; sin embargo para estas dos situaciones no se realizó un análisis en profundidad, únicamente se hizo una descripción de las mismas.

En el caso de la situación de validación se consideró que se llevaría a cabo cuando los estudiantes ya tuvieran las respuestas de las situaciones problemáticas y que éstos expondrían sus resultados ante sus compañeros y los discutirían en caso de que no estuvieran correctos.

Análogamente en la situación de institucionalización el profesor debería reafirmar y mostrar el resultado correcto que tuvieran los estudiantes, para que todos dispusieran de un resultado común y estuvieran convencidos que en realidad ése era el resultado. Se pretendía crear la visualización del resultado correcto a través de preguntas para no mostrárselos, sino que ellos se convencieran si su resultado había sido correcto o no.

6.2. Análisis a Posteriori

En relación con la primera situación problemática los estudiantes dieron la devolución que se pretendía en la situación de acción. Para la situación de formulación los estudiantes siguen teniendo dudas y preguntando lo que tienen que hacer, el profesor titular les sugiere que busquen una ecuación que lo represente; los alumnos (sin razonar) buscan una ecuación que contenga los datos pedidos (Imagen 3). La mayoría llegó a un resultado incorrecto de la situación problemática porque en lugar de considerar una resta, hicieron una suma que representaba la distancia entre las casas, no se percataban de este error (Imagen 4).

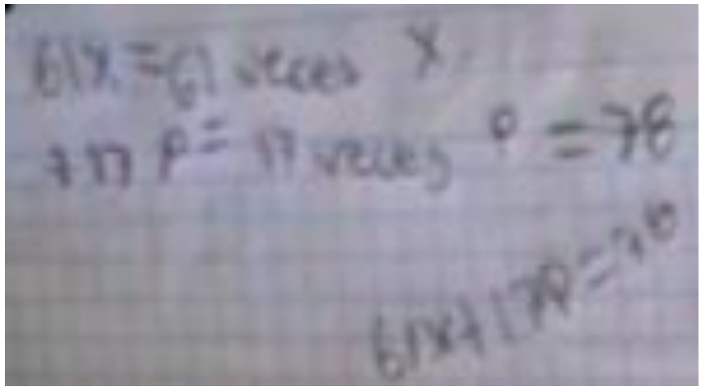


Imagen 3. Ecuación elaborada el equipo de Arantza, intentando cumplir las reglas propuestas por el profesor $61x + 17p = 78$

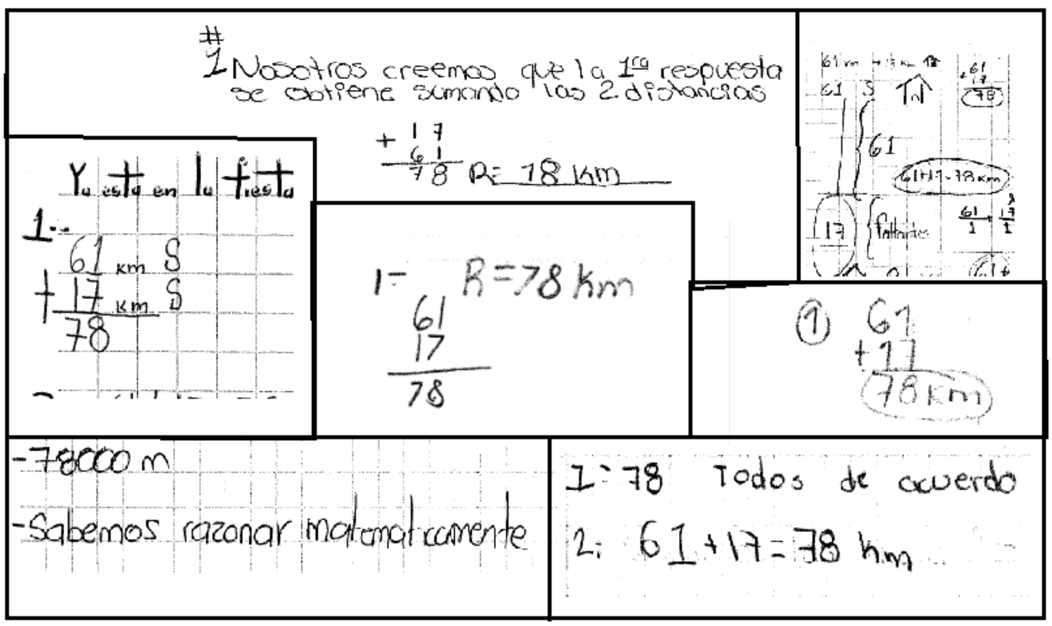


Imagen 4. Respuestas de los equipos de: Jorge, Itzel, Toño, Ricardo, Manuel, Alí y Paulina a las preguntas 1 y 2 de la primera situación problemática

Se detectó que los estudiantes estaban trabajando la situación problemática erróneamente, solamente los equipos de Andrea y de Karla la tenían bien (Imagen 5). Todos los equipos la contestaron de una manera aritmética.

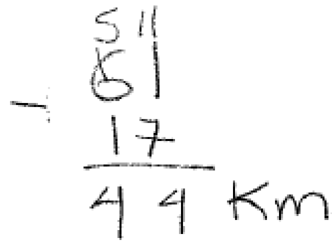


Imagen 5. Respuesta dada por los equipos de Karla y de Andrea, respuesta esperada

En la situación de validación se solicitó a un equipo de los que tenían incorrecta la solución de la situación problemática expusiesen su resultado a sus compañeros, esperando que uno de los dos equipos que la tenía bien, convencieran al resto del grupo de cambiar su respuesta, pero como la mayoría consideraban que estaba bien la respuesta errónea, concluyeron que era la adecuada.

La clase terminó y los estudiantes se fueron con la idea de que se hacía por medio de una suma, el investigador les pidió que siguieran buscando la forma de contestarlo correctamente y lo veían el siguiente día.

Al día siguiente el investigador optó por conjuntar la validación con la institucionalización, para que fuera él quien dijera la respuesta adecuada, lo hizo apoyándose en los equipos que tenían la respuesta contestada correctamente, por medio de cuestionamientos hacia los demás, para intentar que los estudiantes cambiaran su forma de pensar.

En la segunda situación problemática se optó por llevar a los estudiantes a un buen desarrollo por medio de preguntas que ocasionaran la devolución de la situación problemática. Al momento de repartirla se observó que estos se involucraron buscando las estrategias necesarias para resolverla, logrando una buena situación de acción. En seguida se pasó a la situación de formulación estando pendiente de lo que contestaban los estudiantes, pasando por los lugares de los equipos, observando sus procedimientos y lanzando preguntas que ocasionaran reflexión acerca de la situación problemática.

A pesar de tener bien orientado el trabajo y que todos los equipos llegaron a tener una buena respuesta en la primer pregunta, hubo concepciones inadecuadas en las soluciones (Imagen 6), los alumnos intentaban establecer la solución, pero no pudieron llegar a una expresión algebraica; el signo igual lo utilizaron como apoyo para seguir con la sucesión, dando por resultado una respuesta errónea, que para los alumnos era válida.

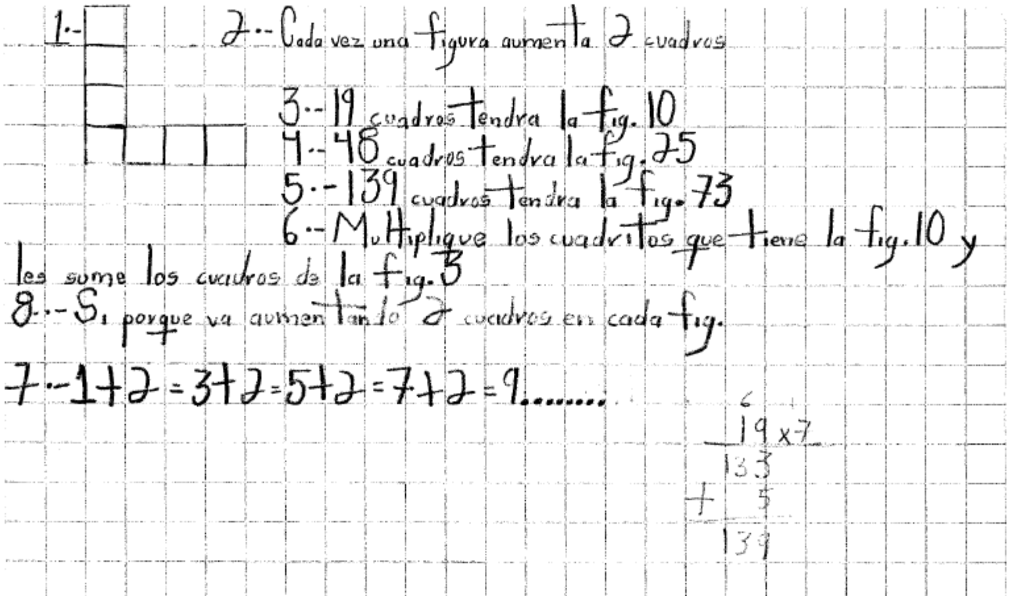


Imagen 6. Resultado del equipo de Arantza, una de las concepciones inadecuadas que se mostraron en la resolución de la situación problemática

El equipo de Andrea si llegó a la formulación de una expresión algebraica, con la cual podían saber la cantidad de cuadros en cada término que se les pidiera (Imagen 7), lo nombraron “Fórmula” esa es la manera en que ellos conocen a las expresiones donde intervienen las letras y los números; porque, como se mencionó anteriormente la primera vez que utilizan las letras en procesos matemáticos lo hacen en contextos geométricos.

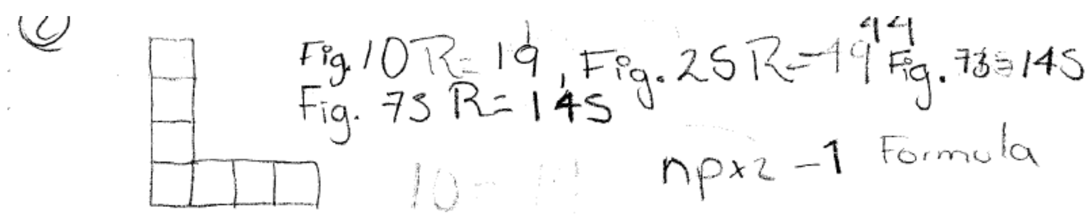


Figura 7. Respuesta dada por el equipo de Andrea, en la que llegaron a la formulación de una expresión algebraica

En general los estudiantes tenían una idea más enfocada sobre lo que pretendía esta situación problemática que lo que pretendía la anterior; sin embargo, algunos no llegaron a establecer el resultado más allá de lo aritmético, ya que sólo concluyeron que se iba sumando de dos en dos para lograr formar todos los términos de la secuencia. Estos estudiantes aún no han cambiado su forma de pensar numéricamente, impidiéndoles pensar en la obtención de una letra para representar un número, Pierce (1931-1958, citado en Radford 2013) a ese proceso le llama “abducción” y establece que es la forma que hace un alumno para pasar de un término a otro, llegando a una generalización aritmética, sin pensar en una forma de representarlo en otro lenguaje.

La situación de validación se conjuntó con la institucionalización, cambiando el contrato didáctico porque se detectó que hacía falta un moderador que dirigiera la situación problemática para llegar a una buena conclusión; el investigador participó en la conclusión de la respuesta por parte de los alumnos con preguntas que los orientaran hacia el buen establecimiento de la respuesta pedida.

A pesar de que los estudiantes tenían bien la respuesta, se detectó en la revisión de hojas de trabajo que no cambió su forma numérica de pensar, porque seguían estableciendo que sumando dos cuadros iban a llegar a la respuesta deseada, sin relacionar la respuesta con la expresión algebraica a la que había expuesto el equipo de Andrea en el que todos los miembros del grupo concluyeron que sí la habían comprendido.

7. Resultados y discusión

Con la resolución de estas situaciones problemáticas se comienzan a detectar los elementos que intervienen o deberían de intervenir al comenzar a desarrollar un pensamiento algebraico. Se ha intentado llegar a la detección de elementos que hace falta tomar en cuenta para lograr que el desarrollo de este pensamiento sea adecuado para transitar al Álgebra, a través de la forma en que los alumnos las contestaron.

En la primera situación problemática pudo detectarse que los estudiantes tenían una noción distinta a lo que ésta proponía, ocasionando dos posibles formas de pensar acerca del diseño de la situación problemática: que estaba mal planteada, o que seguían la respuesta de algún equipo que pensó de esa manera la solución, copiando el procedimiento porque no pudieron darle significado.

Lo anterior se piensa porque sólo tres equipos tenían la solución correcta, una resta de las distancias para conocer la que hay entre las casas, los otros siete equipos llegaron a expresar dicha distancia mediante una suma, porque el razonamiento que hicieron fue que, al hacer la suma nos daba un buen resultado de la distancia entre las casas. A pesar de que las respuestas fueran erróneas o acertadas, no se llegó a lo que pretendía la situación problemática, que los estudiantes tuvieran idea de un número variable, o si lo detectaron no pudieron considerarlo como una literal dentro de una expresión algebraica, sino que esperaban a que se les dieran los datos para resolverla, esta acción la podemos vincular un poco a lo que establecen Ruano et al. (2003), los estudiantes que aún no desarrollan un pensamiento algebraico, necesitan usar la propiedad de cerradura de la suma y el producto para poder estar conformes con una respuesta, en este caso: necesitaban conocer todos los datos para poder establecer alguna operación que marcara las distancias a las que podría estar el coche, por lo tanto no significó para ellos la idea de número variable.

Otra detección que se hizo fue que para los estudiantes no tiene un significado la letra, pues intentaron buscar una manera de establecer una ecuación porque el profesor titular les había dicho que de esa manera podían encontrar la solución; los alumnos en su intento de expresarla, llegaron a la obtención de algo incongruente con la situación problemática, que para ellos era válido. Se detecta que desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes no es fácil y menos si están acostumbrados a trabajar con un contrato didáctico donde el profesor deja ejercicios y los alumnos sólo los resuelven.

Para que la idea de un número variable exista en la mente de los alumnos, la situación problemática debe analizarse detenidamente desde su elaboración, esperando un mejor análisis se hace desde el diseño de las situaciones problemáticas, es propicio elaborarlo desde el campo de la “Competencia Matemática Formal” tomando en cuenta que hace falta detectar la epistemología y la funcionalidad de éstas al considerar la transformación del “saber sabio” al “saber a enseñar” mediante la “matematización de la cultura”.

Por "Matematización de la Cultura" se entiende el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que se genera al situarlas como un conocimiento cultural para todas las personas, buscando la manera de relacionar el "saber sabio" con el "saber a enseñar" a través del análisis de las categorías: operaciones, estructuras y procesos, que caracterizan el campo conceptual y, situación problemática, representación y razonamiento que contextualizan la situación problemática matemática.

En la segunda situación problemática se llega a la conclusión de que la mayoría de los alumnos pudieron contestarla, gracias a la participación de "alguna figura de autoridad", fue necesario cambiar el contrato didáctico que se previó para que existiera una figura de autoridad, porque los alumnos por sí solos no desarrollan tales reflexiones; como se mencionó anteriormente, la costumbre que tienen para la resolución de situaciones problemáticas es que el profesor propone ejercicios y ellos los resuelven de manera mecánica, sin significar lo que están haciendo, es una metodología en la cual los estudiantes sólo contestan como respuesta al contrato didáctico que se crea en la clase.

A pesar de que los estudiantes tuvieran nociones correctas acerca de lo que iban a contestar, es necesario señalar que aún se les hacía difícil la forma de representar una literal que pudiera valer algún número, porque en las situaciones problemáticas se pudo detectar que algunos equipos pudieron llegar a la formulación de una expresión algebraica, no de manera formal, sino con una expresión en la que una letra representaba el número que variaba o por lo menos un símbolo, pero la mayoría lo hicieron de manera numérica, estableciendo que iba a ir aumentando de dos en dos los cuadros en cada término, afirmando lo que dicen las investigaciones, que a los estudiantes se les hace difícil el cambio de pensamiento.

Haciendo uso de la teoría que asegura la existencia de dificultades, errores y obstáculos contenida en ELOS (Enfoque Lógico Semiótico), pueden relacionarse algunos pensamientos inadecuados de los estudiantes en esta secuencia con las que marcan como generales en el momento de iniciar el trabajo con el Álgebra escolar; por ejemplo, no pueden cambiar de idea de que una letra puede representar cualquier número; Palarea (1998) menciona que regularmente cuando iniciamos el tratamiento del Álgebra escolar no significamos el uso de la letra, sino que utilizamos símbolos para representar un valor desconocido, obteniendo por resultado que los estudiantes terminen haciendo "*una 'no interpretación' de la letra… y en este proceso los estudiantes ignoran la letra, o la reconocen pero no tiene significado*" (p. 62).

Los estudiantes tienden a la necesidad de clausura, esto se observó cuando un equipo supo establecer una "fórmula" que satisfacía lo pedido, al momento de plasmarla en el pizarrón tenían que igualarla con algún término, haciendo notar que les hacía falta la necesidad de que esa "fórmula" fuera igual a un número específico, para dar un valor indicado, Ruano et al., (2003) atribuyen a este tipo de procesos como un error común que tienen los alumnos al comenzar a trabajar Álgebra, denominándolo "necesidad de clausura" estableciendo que los estudiantes no pueden asimilar un enunciado incompleto, porque no aceptan que una expresión no pueda cerrarse y no genere un número como resultado, si lo están obteniendo al considerar varios resultados.

También hubo casos en que los estudiantes utilizaban de manera errónea el signo igual, donde establecían un signo de igualdad para separar cada término de la secuencia, en realidad al hacer esta acción el resultado es incorrecto, porque al separar con signos que denotan una igualdad, se está asegurando que $1 = 3 = 5 = 7 = \cdots$ algo no es cierto, podemos atribuir a ello que los alumnos siguen buscando una forma de encontrarle sentido a la expresión que tienen que encontrar que cumpla para cada término y lo hacen a través de signos incorrectos, detectando que están haciendo una cerradura de las operaciones a través de errores en la Aritmética, Socas (2011) establece que los errores en la

Aritmética que se basan en la limitada interpretación del signo igual, ya ha sido estudiado y caracterizado como un error frecuente en los alumnos al momento de trabajar con el Álgebra escolar.

Finalmente se encuentra que existen errores en los que los estudiantes muestran una ausencia de sentido, término que caracterizan Matz (1980), Palarea (1998), Ruano et al., (2003) y Socas (2011), a lo que se les pregunta, contestando solamente que saben razonar matemáticamente sin poder llegar a la expresión de algún resultado ni siquiera en términos aritméticos.

La detección de errores y aciertos por parte de los estudiantes se pudo observar en las respuestas que dieron, además se detectó que la primera situación problemática no promovía el pensamiento algebraico, porque para poder llegar a expresar términos algebraicos, los alumnos tenían que dar un gran salto en sus conocimientos matemáticos. Si aún no pueden significar la letra como un número cualquiera, no van a poder dar ese gran salto. Se llegó a la conclusión que se necesita un mejor análisis de las situaciones problemáticas, aparte del que se ha hecho, de las respuestas de los estudiantes para poder caracterizar dónde están las deficiencias que muestran al contestarlas, aunque las que se hicieron no dan la muestra suficiente para llegar a esa caracterización, debido a que no buscaban fines matemáticos específicos, sino que la intención era que llevaran a los estudiantes a pensar algebraicamente, aunque es preciso señalar que no se consideró ninguna propuesta para hacerlo, por ello, se utiliza el modelo de CMF para rescatar los elementos que deben afinarse en la fenomenología matemática que debe contener la secuencia y de esta manera pueda llevar a los estudiantes a un mejor pensamiento algebraico.

Si la secuencia didáctica hubiera considerado aspectos pertenecientes a las etapas de la Competencia Matemática Formal, se cree que el diseño tendría mejores situaciones problemáticas que aportarían distintas herramientas para desarrollar el comienzo del pensamiento algebraico, las cuales servirían para centrarnos solamente en las respuestas de los estudiantes. Aunque al hacerlo de esta manera se ha concluido que es necesario diseñar las situaciones problemáticas de una manera congruente con los conocimientos que poseen los estudiantes, con la fenomenología matemática para el desarrollo de un pensamiento algebraico, que potencien lo que intentan establecer y que lleven un incremento de dificultad que los vayan guiando "paso a paso" en la construcción de términos algebraicos.

Enfatizando los elementos que debe contener la secuencia didáctica, correspondientes a la Competencia Matemática Formal, para que genere un mejor desarrollo del razonamiento de los estudiantes se concluye que, al diseñar la situación problemática que considera a la literal como incógnita específica han de existir los siguientes aspectos:

Para el marco conceptual se debe considerar lo siguiente

Operaciones	Estructura	Proceso
Tratamiento en un mismo registro para encontrar el valor (Operar para conocer el valor faltante) Sumar, restar, dividir… Realizar operaciones	Uso de la letra como incógnita específica Conocer los conceptos que se utilizan: suma, resta, reglas sintácticas de la representación, incógnita, producto, valor posicional, figuras geométricas,	Cambio de representación Significar un valor faltante Representar con un símbolo el valor faltante Hacer una interpretación (ecuación) de la lectura en un

aritméticas de manera formal	fórmulas	lenguaje distinto
Eliminar los valores de un lado (despejar, restar, dividir) para encontrar la solución	Conmutativa, asociativa, uso del elemento opuesto, cerradura	Una vez conocido el resultado trasladarlo a otro registro para comprobarlo

Para contextualizar en una situación problemática los conocimientos que se pretenden, se utilizará lo siguiente

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
Leer un texto y detectar que faltan datos para conocer todos los valores que pretende describir Representación mental del texto leído con la finalidad de detectar que tenemos que realizar un proceso para conocer todos los valores que involucra	Sumar y/o restar en el mismo registro Saber que el número desconocido será una literal Representar los operadores aritméticos y detectar la coherencia Una vez leída, definir la situación y establecer lo que pretende	Conocer la incógnita mentalmente (una noción) Relacionar el valor desconocido con la representación de una letra Saber que lo desconocido se puede determinar mediante operaciones aritméticas Saber que es necesario cambiar el lenguaje común por una representación diferente Saber las condiciones que debe cumplir la respuesta

La situación problemática que considera la literal como número generalizado también necesita una mejora, se han caracterizado algunos elementos que se deben considerar para potenciar el conocimiento de los estudiantes, con la finalidad de que ahora no quede sólo en una secuencia aritmética, sino que comprobemos que en realidad la secuencia resultante sea algebraica, como lo menciona Radford (2013).

Dentro del campo conceptual se tiene que considerar lo siguiente:

Operaciones	Estructura	Proceso
A través de operaciones conocer el patrón que rige la	Variable como número	Cambiar la representación de registro Común – gráfico a

secuencia Operar aritméticamente para cumplir la secuencia Representación formal de las operaciones Manipulación de elementos mediante el cambio de registro para ayudar a visualizar el crecimiento de las figuras	generalizado Definir las reglas de la sucesión en cualquier registro El aumento proporcional de elementos en los términos generales de una sucesión Distributiva, asociativa, conmutativa, factor común	registro aritmético Encontrar el patrón mediante el tratamiento en el registro aritmético Llegar a una representación algebraica

Para la creación de una situación problemática que considere los conocimientos anteriores se tiene que desarrollar bajo los siguientes aspectos:

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
Leer una situación problemática y detectar que prosiguiendo con lo que indica se puede encontrar una secuencia numérica que aumenta constantemente (la progresión que debe llevar la situación problemática) Llegar al cambio de representación mediante el razonamiento de un tratamiento de valores	Descripción de la regla en cada representación (registro) Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla deducida Representación mental Representación aritmética y algebraica	Saber que se necesita cambiar el registro para resolver la situación problemática Saber considerar la variable como número general con el que es posible operar El aumento proporcional de una sucesión puede ser representado por una regla

8. Conclusiones

Con las situaciones problemáticas mencionadas se detecta que los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para cambiar el enfoque que tienen de las Matemáticas, por ello se debe de elaborar una nueva secuencia didáctica que analice las competencias matemáticas que poseen para caracterizar la forma de pensamiento que tienen al resolver una situación problemática encaminada a propiciar el pensamiento algebraico.

La intención de elaborar una secuencia didáctica para caracterizar los conocimientos que deben tener los estudiantes para el comienzo del pensamiento algebraico, es llegar a entender cómo podemos comenzar a desarrollar en ellos esta forma de razonar, esperando obtener conclusiones que nos doten de herramientas para que exista una mejora en el momento de trabajar Algebra.

La nueva secuencia debe estar basada desde su elaboración en la CMF para detectar los errores, obstáculos y dificultades que tienen los alumnos en su forma de pensar y lograr caracterizar los conocimientos que les hacen falta comprender para considerar una literal como un número que varía y puede tomar distintos valores según lo requiera la solución de la situación problemática.

En la actualidad se está trabajando en el rediseño de la secuencia de situaciones problemáticas desde la CMF, con la intención de considerar los mayores elementos posibles que intervienen en su experimentación, las situaciones problemáticas contenidas en la secuencia tendrán como finalidad, analizar las formas de pensamiento que poseen los estudiantes y servirán de apoyo para cambiar su pensamiento de numérico a algebraico, esperando que permita comenzar a caracterizar los elementos que se deben considerar para fomentar el pensamiento algebraico.

Bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P., (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Barallobres, Gustavo. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra. *"Álgebra: enseñanza, aprendizaje y evaluación" organizado por el departamento de Cs. Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Cs. de la Educación.* U.N.L.P entre junio y noviembre del año 2004.

Billings, E., Tiedt, T., y Slater, L. (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics, 14* (5), 302–308.

Brousseau G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3) pp. 55-86. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516678004

Cañadas M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, *Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática*, Granada, España.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: *definición, epistemología, objeto de estudio. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1 (2), Costa Rica.

Godino J., Castro W., Aké L. y Wilhelmi M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. Boletim de Educação Matemática, *Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho*, *26 (42B)* abril, 483-511.

Matz, M. (1980). Towards a Computational. Theory of Algebraic Competence. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, 3, 1, pp.93-166.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3* (3), 135-156

Palarea, M., (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Tenerife, España

Peled, I. & Carraher, D.W. (2007). Signed numbers and algebraic thinking. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ, Erlbaum*, pp. 303-327 (now Taylor & Francis).

Pierce, C. (1931-1935 y 1957-1958): *Collected Papers*, Cambridge, Harvard University Press; (1958): *Selected Writings*, Dovers Publications Inc., Nueva York, ed. Philip P. Wiener; (1977): *Semiotic and Significs: The correspondence between Charles S. Pierce ad Victoria Lady Welby*, Indiana University Press, Bloomington y Londres, ed. Charls S. Hardwick.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%A1lgebra.

Rojas, P. (2010). Iniciación al álgebra escolar: Elementos para el trabajo en el aula, *Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Colombia, pp. 115-131.*

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 312-322.

Secretaría de Educación Pública (2006). Educación Básica. Secundaria, Matemáticas. *Programa de Estudio.* México, D.F.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. En M. M. Socas, M. Camacho, A. Morales y A. Noda (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* (pp. 9 – 42). Tenerife, España: Ediciones «Campus».

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 5-34.

Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012 (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Ess.), *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa. México: Trillas.