



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"Francisco García Salinas"



UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Sucesiones figurales, una secuencia didáctica  
Utilizando las variables como números generales

TESIS

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

*Presenta:*

*L. en M. JOSÉ ROLANDO PALOMINO IRABURO*

*Asesores:*

*M. en C. NANCY JANETH CALVILLO GUEVARA*

*Dra. LETICIA SOSA GUERRERO*

*Dr. MARTÍN M. SOCAS ROBAYNA*

Zacatecas, Zac., México Noviembre 2016



---

*Este trabajo ha sido realizado gracias al  
apoyo financiero otorgado por el  
Consejo Nacional de Ciencia y  
Tecnología (CONACyT) de  
Septiembre de 2014 a Julio de 2016.*

*N.º de Becario: 331230*

---



## *Dedicado a*

*El presente proyecto lo dedico especialmente a mis padres, que hicieron todo lo posible para darme la oportunidad de superarme, a mis hermanas por su apoyo moral a lo largo de mi carrera, a mi esposa e hijas, que me dieron la motivación, sustento y amor que necesitaba para lograr con éxito esta importante meta en el ámbito profesional y personal.*

*Gracias a todos ellos, que me dan confianza, seguridad y que me inspiran para seguir adelante.*

# *Agradecimientos*

A mis padres Elida y Noé

Por todo su apoyo y gran esfuerzo para

que cumpliera mi meta profesional

A mi esposa Fátima y a mis hijas

Ximena y Valeria por su amor incondicional

y motivación para seguir adelante

A la M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Por ser guía y soporte en este proyecto

A la Dra. Leticia Sosa Guerrero, Dr. Martín M. Socas Robayna,

Dra. Mercedes Palarea, M en C. Elvira Borjón Robles, Dra. Darly Alina Kú y

Dr. Luis Manuel Aguayo, por su aportación, orientación, sugerencias y paciencia

## ***Carta de responsabilidad y cesión de derechos***

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 15 del mes de Noviembre del año 2016, el que suscribe **José Rolando Palomino Iraburo**, alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 97402477; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado titulado ***“Sucesiones figurales, una secuencia didáctica utilizando las variables como números generales”*** bajo la dirección de la M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, la Dra. Leticia Sosa Guerrero y el dr. Dr. Martín M. Socas Robayna.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

ATENTAMENTE

José Rolando Palomino Iraburo.





*A quien corresponda:*

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre *“Sucesiones figurales, una secuencia didáctica utilizando las variables como números generales”* y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. **José Rolando Palomino Iraburo**, egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 15 de Noviembre del 2016.

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Dr. Martín M. Socas Robayna

## Índice

<i>Resumen</i> .....	1
<i>Abstract</i> .....	2
<i>Introducción</i> .....	3
Capítulo 1. Planteamiento del problema .....	6
1.1 Motivación del estudio .....	8
1.2 Antecedentes .....	10
1.3 Planteamiento del problema de investigación .....	13
1.3.1 Problemática .....	13
1.3.2 Problema de investigación .....	14
1.4 Objetivo General .....	14
1.4.1 Objetivos Específicos .....	14
1.5 Hipótesis .....	14
1.6 Justificación .....	15
Capítulo 2. Fundamento Teórico .....	18
2.1 Teoría de Situaciones Didácticas .....	20
2.2 Fundamento Matemático .....	27
2.3 Metodología .....	29
2.3.1 La Ingeniería Didáctica .....	30
2.3.2 Análisis Preliminares .....	30
2.3.3 Concepción y Análisis a priori .....	31
2.3.4 Experimentación .....	31
2.3.5 Análisis a posteriori y Validación .....	32
Capítulo 3. Análisis Preliminares, Concepción y Análisis a priori .....	34
3.1 Análisis preliminares .....	36
3.1.1 Análisis epistemológico de las sucesiones numéricas .....	36
3.1.2 Análisis didáctico .....	39
3.1.3 Análisis cognitivo de las sucesiones numéricas .....	57
3.2 Concepción de la situación didáctica .....	60

3.2.1 Propósito de la situación diseñada.....	60
3.2.2 Situación fundamental .....	61
3.2.3 Las variables macrodidácticas .....	61
3.3 Análisis a priori .....	63
3.3.1 Situación de Acción (Actividad I).....	67
3.3.2 Situación de Formulación (Actividad I).....	67
3.3.3 Situación de Validación (Actividad I).....	69
3.3.4 Situación de Institucionalización (Actividad I).....	70
3.3.5 Situación de Acción (Actividad II).....	73
3.3.6 Situación de Formulación (Actividad II).....	73
3.3.7 Situación de Validación (Actividad II).....	76
3.3.8 Situación de Institucionalización (Actividad II).....	76
Capítulo 4. Experimentación, análisis a posteriori y validación.....	80
4.1 Experimentación.....	82
4.2 Análisis a posteriori.....	82
4.3 Actividad I.....	83
4.3.1 Situación de Acción.....	83
4.3.2 Situación de Formulación - Actividad I .....	85
4.3.3 Situación de Validación - Actividad I .....	90
4.3.4 Situación de Institucionalización - Actividad I .....	95
4.4 Actividad II .....	98
4.4.1 Situación de Acción - Actividad II.....	98
4.4.2 Situación de Formulación - Actividad II .....	99
4.4.3 Situación de Validación - Actividad II.....	105
4.4.4 Situación de Institucionalización - Actividad II.....	108
4.5 Fase Validación.....	115
4.5.1 Validación – Etapa de Acción (Actividad I) .....	115
4.5.2 Validación – Etapa de Formulación (Actividad I).....	116
4.5.3 Validación – Etapa de Validación (Actividad I) .....	117
4.5.4 Validación – Etapa de Institucionalización (Actividad I) .....	117
4.5.5 Validación – Etapa de Acción (Actividad II).....	118

4.5.6 Validación – Etapa de Formulación (Actividad II) .....	118
4.5.7 Validación – Etapa de Validación (Actividad II) .....	119
4.5.8 Validación – Etapa de Institucionalización (Actividad II) .....	119
Anexos .....	136
Anexo 1: Transcripción de la clase del 7 de abril de 2016 .....	138
Anexo 2: Transcripción de la clase del 8 de abril de 2016 .....	145

## Índice de Figuras

Figura 1. Podio de premiación para “minions” .....	23
Figura 2. Aproximación de $\pi$ .....	36
Figura 3. Números triangulares, cuadrados y pentagonales. ....	37
Figura 4. Números triangulares.....	38
Figura 5. Secuencia planteada para introducir el tema de sucesiones ( Sánchez, 2012). ....	40
Figura 6. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones (Sánchez, 2012).....	41
Figura 7. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones (Sánchez, 2012).....	42
Figura 8. Fórmulas geométricas al considerar a las literales como números generales. ....	43
Figura 9. Formulas geométricas al considerar a las literales como números generales. ....	44
Figura 10. Fórmulas geométricas al considerar a las literales como números generales. ....	45
Figura 11. Ejercicios para encontrar términos a partir de una regla general. ....	46
Figura 12. Ejercicios de sucesiones para encontrar una expresión algebraica. ....	47
Figura 13. Sucesiones en los que intervienen enteros negativos. ....	48
Figura 14. Figuras con palillos.....	49
Figura 15. Términos de una sucesión general.....	50
Figura 16. Método de diferencias. ....	51
Figura 17. Ejercicios propuestos para encontrar una expresión algebraica de las sucesiones.....	52
Figura 18. Ejercicios propuestos para obtener primeras y segundas diferencias.....	53
Figura 19. Ejercicios propuestos para obtener el término enésimo. ....	54
Figura 20. Ejemplo de sucesión figurativa. ....	55
Figura 21. Ejercicios con sucesiones numéricas.....	56
Figura 22. Ejercicios con sucesiones numéricas.....	56
Figura 23. Reactivo 1 del análisis cognitivo .....	57
Figura 24. Actividad I de la secuencia didáctica propuesta en el fichero.....	61
Figura 25. Cubos que se entregan a cada equipo. ....	64
Figura 26. "Minions" que se entregan a cada equipo.....	64
Figura 27. Premiación de los "minions". ....	65
Figura 28. Cubos para podio. ....	66
Figura 29. "Minions". ....	67
Figura 30. Podio número 4.....	68

Figura 31. Podio número 5.....	68
Figura 32. Posible error cometido por un equipo. ....	68
Figura 33. Podio 4.....	74
Figura 34. Podio 5.....	74
Figura 35. Podio incorrecto.....	75
Figura 36. Formación de equipos y entrega de material. ....	84
Figura 37. Manipulación del material.....	84
Figura 38. Elaboración del podio 4 por el equipo 1.....	85
Figura 39. Dibujo de los podios 4 y 5.....	86
Figura 40. Error del equipo 7 al colocar los bloques.....	86
Figura 41. Estrategia para la pregunta <i>d</i> ). ....	87
Figura 42. Estrategia del equipo 7. ....	87
Figura 43. Respuesta del Equipo 2. ....	88
Figura 44. Respuesta del equipo 4.....	88
Figura 45. Respuesta del equipo 5.....	88
Figura 46. Respuesta equipo 1.....	89
Figura 47. Respuesta del equipo 7.....	89
Figura 48. El profesor explicando lo que es una sucesión.....	96
Figura 49. Respuestas del equipo 9.....	98
Figura 50. Equipo 1 resolviendo el inciso <i>b</i> ). ....	99
Figura 51. Equipo 3 resolviendo el inciso <i>c</i> ). ....	99
Figura 52. Trabajo del equipo 7.....	100
Figura 53. Respuestas del equipo 3.....	100
Figura 54. Figuras realizadas por el equipo 4.....	100
Figura 55. Respuestas del equipo 2.....	100
Figura 56. Cubos propuestos por el equipo 2 - Podio 4.....	101
Figura 57. Cubos propuestos por el equipo 2 - Podio 5.....	101
Figura 58. Respuesta del equipo 2.....	102
Figura 59. Respuesta del equipo 4.....	102
Figura 60. Respuesta del equipo 7.....	102
Figura 61. Operación realizada por el equipo 5.....	102
Figura 62. Respuesta del equipo 2.....	103
Figura 63. Respuesta del equipo 6.....	103
Figura 64. Respuesta del equipo 7.....	103
Figura 65. Respuesta del equipo 4.....	103
Figura 66. Respuesta del equipo 5.....	104
Figura 67. Respuesta del equipo 2.....	104
Figura 68. Respuesta del equipo 6.....	104
Figura 69. Diferentes representaciones, razonamientos y operaciones de las sucesiones.....	127

## Índice de Tablas

Tabla 1. Tratamiento del tema de sucesiones en los planes de estudio (Torres, Borjón y Sosa, 2012).....	15
Tabla 2. Aciertos Reactivo 1.....	57
Tabla 3. Respuestas Reactivo 1.1 .....	58
Tabla 4. Aciertos Reactivo 2.....	58
Tabla 5. Respuestas Reactivo 2.1 .....	59
Tabla 6. Respuestas Reactivo 2.2 .....	59
Tabla 7. Respuestas al ejercicio completa las sucesiones numéricas .....	60
Tabla 8. Organización de la actividad I. ....	63
Tabla 9. Organización de la actividad II.....	63
Tabla 10. Relación entre podio y "minions".....	65
Tabla 11. Relación entre podio y "minions" llena. ....	71
Tabla 12. Premiación de los "minions" Actividad II. ....	72
Tabla 13. Relación podio - "minions" Actividad II. ....	73
Tabla 14. Diferencias - Actividad II. ....	77
Tabla 15. Segundas diferencias de una sucesión (llena).....	77
Tabla 16. Diferencias de la expresión $an^2 + bn + c$ , para llenar en clase.....	78
Tabla 17. Diferencias de la expresión $an^2 + bn + c$ , llenada en clase. ....	78
Tabla 18. Resultados actividad I.....	89
Tabla 19. Aciertos y errores en actividad II.....	104







---

## *Resumen*

Las sucesiones tanto numéricas como figurales son empleadas para que los estudiantes de nivel de secundaria logren usar la variable como número general. Durante su aprendizaje podrían experimentar diferentes tipos de dificultades como son: no identificar el patrón que rige a la sucesión, no coordinar la estructura espacial a la numérica, pasar de una representación numérica a una algebraica, entre otras. Además de esto, consideramos que en algunas ocasiones el tiempo que se dedica a esta actividad no es suficiente y desafortunadamente los ejercicios propuestos por algunos profesores y por ciertos libros de texto oficiales, son en su mayoría sucesiones del tipo lineal y numérico, sólo algunos ejercicios planteados son con sucesiones figurales del tipo cuadrático. Es por eso que el propósito de esta investigación es implementar una secuencia didáctica en la que se involucren sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático, en la que los estudiantes consigan por sí solos visualizar el comportamiento o el patrón de la figura y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a una generalización algebraica.

Como modelo en esta investigación se utilizó La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau se trata de una teoría de la enseñanza, en la que los objetos matemáticos que se van a enseñar podrían tener un origen que sea generado o construido por el profesor, con una cierta intencionalidad. Como metodología se propuso a La Ingeniería Didáctica de Artigue, que se compone de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y de análisis a posteriori y validación.

Uno de los principales resultados que se encontraron es que, estudiantes de tercer año de secundaria (edades entre 15 y 16 años), lograron reconocer el patrón y llegar a la generalización de una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático, debido a las secuencias utilizadas. Primero resolviendo una sucesión figural del tipo lineal, lo que generó un primer acercamiento, para posteriormente trabajar con la sucesión del tipo cuadrático.

**Palabras Clave:** Sucesiones, variable, generalización, sucesión del tipo lineal, sucesión del tipo cuadrático, patrón.

---

## *Abstract*

Both numerical and figural sequences are used on secondary level students in order to visualize variables as general numbers. During their apprenticeship participants could experience different kinds of difficulties and are unable to identify the pattern that governs the succession, not coordinate the spatial structure to the number, and going from a numerical representation to an algebraic. We believe that sometimes the time devoted to this activity is not enough and exercises proposed by some teachers and some official textbooks are mostly successions of linear and numeric. Only some exercises raised are with figural sequences of type quadratic. The purpose of this research is to implement a teaching sequence in which figural succession of linear and quadratic involved in which students are able to visualize the behavior or pattern of figure and thereby have greater chances of reaching an algebraic generalization.

As a model in this research Theory of Didactic Situations Brousseau that is a theory of teaching, in which mathematical objects that will teach could have an origin that is generated or built by professor were use with some intentionality. As it was proposed methodology Didactic Engineering Artigue, which consists of four phases: preliminary analysis, design and a priori analysis of teaching situations, experimentation and subsequent analysis and validation.

One of the main results found is that students of junior year (aged 15 to 16 years), were able to recognize the pattern and reach the generalization of a figural succession of linear and quadratic due to the sequences used. Figural first solving a linear succession, generating a first approach, then work with quadratic succession.

**Keywords:** Successions, variable, generalization, linear succession, quadratic succession, pattern.

---

## *Introducción*

En esta investigación, se propone crear una herramienta que sirva a los profesores como modelo para ayudar a los estudiantes a reconocer patrones de una sucesión del tipo lineal y cuadrático y su posible generalización, ya que muchos estudiantes en la educación secundaria no cuentan con las herramientas algebraicas para poder resolver este tipo de problemas, sobre todo cuando estos son del tipo cuadrático, tal y como lo comenta Osorio (2012).

No obstante cuando los estudiantes trabajan con sucesiones y logran identificar el patrón que la rige, esto no es suficiente para llegar a la expresión algebraica (Velasco y Acuña, 2010). Dicha problemática no solo se presenta en el nivel de educación secundaria, también se constata en el nivel medio superior y, a pesar de que en este nivel los estudiantes ya han cursado varios cursos de álgebra elemental, siguen sin tener herramientas algebraicas suficientes para resolver este tipo de problemas como lo menciona Londoño, Kakes y Álamo (2014).

Además, el hecho de que los estudiantes trabajen con sucesiones les podría permitir: el desarrollo del pensamiento algebraico, llegar a una generalización a partir de casos particulares, ser un preámbulo para abordar el Álgebra en el nivel de secundaria, transitar por diferentes representaciones (figural, numérica, algebraica, mixta), experimentar algunos razonamientos (partes – todo, heurístico, inductivo) y trabajar con distintas operaciones (aditivas, multiplicativas, numéricas – algebraicas), entre otros.

Por otro lado es importante mencionar que desde la perspectiva matemática, generalizar significa:

- a) Identificar lo que es común en un conjunto de casos.
- b) Extender un razonamiento más allá del rango en que se ha originado.
- c) Obtener resultados generales de casos particulares (Kaput, 1999).

Pero desde el punto de vista de la actividad cognitiva del sujeto, generalizar implica realizar una serie de acciones que conducen precisamente a extender y obtener resultados más generales.

(Callejo, 2015, p.5)

Así, estamos de acuerdo con Callejo (2015, p. 6) en que “la generalización debe contemplarse en el marco de un conjunto de procesos relacionados entre ellos”. Es por esta razón que en nuestra investigación más que hablar de "generalización" se hablará del "proceso de generalización"

como un vínculo con el desarrollo del pensamiento algebraico, en particular, trabajando con una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.

Ahora, según Ruano, Socas y Palarea (2015, p. 20) desde el punto de vista educativo,

El planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de generalización algebraica se puede organizar a partir de situaciones diversas: numéricas, geométricas, ... en las que no viene explicitada la regla, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular.

A partir de la situación problemática, que supone la identificación o el reconocimiento de la misma, ésta se puede describir mediante cuatro pasos o momentos que facilitan el planteamiento y la resolución, y que la caracterizan matemáticamente:

1. Sistematización: mediante la construcción de tablas u otro tipo de representación.
2. Reconocimiento de la regla o patrón.
3. Explicitación de la regla en una expresión o fórmula.
4. Verificación de la expresión o fórmula con ejemplos.

Por su parte, Radford (2008, en Fernández y Sánchez-Matamoros, 2015, p. 42) considera que el proceso de generalización en tareas de identificar patrones en una sucesión implica: "tomar conciencia de una propiedad común, generalizar dicha propiedad a todos los términos de la sucesión y usar esa propiedad común a fin de encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la sucesión".

En este mismo sentido, según Zapatera (2015) una manera de iniciar a los estudiantes en el pensamiento algebraico es trabajar el proceso de generalización y, más específicamente, proponerles "problemas de generalización lineal". En estos problemas se presenta una situación cuyo enunciado proporciona los primeros términos de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular qué valor tendrá la sucesión para  $n$  pequeños (generalización cercana) y  $n$  grandes (generalización lejana), y así obtener la regla general, para lo cual tienen que identificar un patrón en la sucesión.

Otra interpretación que puede darse a la generalización cercana, se refiere a las "cuestiones que pueden ser resueltas paso a paso a través de un dibujo, o contando. Por su parte, la generalización lejana se refiere a cuestiones que difícilmente pueden resolverse paso a paso, por ejemplo, obtener el término 100 de una sucesión" (Fernández y Sánchez-Matamoros, 2015, p. 41)

Es decir, en una sucesión numérica o de figuras, se podría transitar por diferentes procesos para llegar a la generalización, como el reconocer y calcular los "primeros" términos de la sucesión (generalización cercana), calcular términos más "distantes" (generalización lejana), el reconocimiento de una regla o patrón y por último obtener la regla general de los casos

---

particulares (Zapatera, 2016, p.36) es decir, entenderemos la generalización como un proceso, una serie de acciones que podrían llevarnos a pasar de casos particulares, a establecer la expresión algebraica que genera una sucesión.

Por otra parte, se considerará como modelo en esta investigación a La Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, ya que es una teoría en la que los objetos matemáticos que se van a enseñar podrían tener un origen que se ha generado o construido por el profesor, con una cierta intencionalidad. Además nos sirve para analizar lo que hacen por una parte los profesores y los alumnos, nos provee la oportunidad de fabricar problemas que sean acomodados a los alumnos, mediante la adaptación de los saberes convirtiéndose así en una oportunidad para la comunicación entre la labor del profesor y la del investigador.

Por tal motivo se decidió plantear el siguiente objetivo general: Diseñar e implementar una situación didáctica que ayude a los estudiantes a desarrollar e identificar el comportamiento y la posible generalización de una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.

De manera que se presenta una situación didáctica para ayudar a estudiantes de tercer año de secundaria a comprender mejor el uso de la variable como número general, mediante la implementación de sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático, la cual se organizó de la siguiente manera:

En el primer capítulo se mencionan los motivos que nos llevaron a plantear y desarrollar esta investigación, también se realizó un análisis detallado de las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo con referencia a las sucesiones numéricas y figurales.

En el capítulo dos se estudió la Teoría de Situaciones Didácticas como modelo en esta investigación; en general el objetivo de esta teoría es que alguien aprenda algo y en nuestro caso, es que los estudiantes de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” reconozcan patrones y lleguen a la generalización de una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.

En el capítulo tres se analizó la Ingeniería Didáctica como metodología de esta investigación, la cual, Artigue (1995, p. 36) caracteriza como “un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias de enseñanza”.

Los resultados obtenidos en esta investigación nos muestran si estudiantes de tercer año de secundaria lograron reconocer el patrón que rige a una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático y llegaron a su generalización. Asimismo se hace mención de algunas consideraciones que podrían ayudar a mejorar la secuencia didáctica.

Por último añadir que este tipo de investigación podría servir como una herramienta importante, para que profesores de educación secundaria la tomen como referencia y aborden este tópico matemático con base en este trabajo, pues la investigación que se realizó y los resultados obtenidos nos dan muestra de la funcionalidad de la situación didáctica.



---

# Capítulo 1. Planteamiento del problema

---



En este apartado se describen algunos motivos que han llevado a planear esta investigación, para después realizar un análisis de los antecedentes y así poder hacer una reflexión de los mismos.

### 1.1 Motivación del estudio

El tema de sucesiones en los tres niveles de educación secundaria se aborda como un concepto que ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de las variables como números generales. “Hay quienes consideran que el álgebra tiene que ver esencialmente con los procesos de generalización, y ponen énfasis en el uso de expresiones generales en las que los símbolos literales representan números generales” (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005, p. 21). En ese sentido, Ferrini, Lappan y Phillips (1997, p. 282) señalan que “el estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos”.

El tema “Patrones y Ecuaciones” constituyen ya una parte de la curricula o propuestas institucionales de algunos sistemas educativos como el que propone la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México mediante Los Programas de Estudio 2011 de educación secundaria en Matemáticas, en los que precisamente uno de los propósitos de esta disciplina en la educación secundaria es que los estudiantes “Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p.14).

Asimismo uno de los estándares curriculares de Matemáticas que comprende el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos al terminar la educación secundaria es que “el alumno resuelva problemas que impliquen expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p.16), el cual se encuentra dentro del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.

En lo que se refiere a las competencias matemáticas una de ellas es:

“Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; se trata de que los alumnos puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.

(Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 23)

Como se mencionó anteriormente, las sucesiones aparecen en el estudio de la variable como número general, la cual se aborda desde primero hasta el tercer año de educación secundaria, por lo que los estudiantes comienzan a trabajar con sucesiones numéricas y figurales:

(“conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite encontrar todas las figuras, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión; luego la que ocupa



el segundo lugar; luego la que ocupa el tercer lugar y así sucesivamente”).

(Araujo, García, García, y López, 2006, p. 40).

presentándose en ese momento una serie de conflictos o dificultades en el aprendizaje, como son: el no comprender el uso de literales, no reconocer el comportamiento de patrones, dificultades asociadas a la ausencia de sentido, entre otras. Como consecuencia, éstos podrían transferir a los estudiantes obstáculos y errores durante su trayecto en la educación secundaria y por consiguiente en el nivel medio superior y superior. Al respecto, la principal conclusión del estudio realizado por Przenioslo (2005, p. 75) con estudiantes del nivel secundaria y de universidad, fue que muchas de las concepciones con respecto a las sucesiones de los estudiantes universitarios que ya habían cursado análisis matemático, probablemente habían sido formadas desde que estudiaron en secundaria.

Por otro parte analizando el libro de texto “Fractal 3” (García y Mendoza, 2008) que corresponde al libro de apoyo de los estudiantes con los que se trabajará, si bien se abordan las sucesiones de tipo cuadrático, consideramos que son pocos los ejercicios propuestos para encontrar la expresión algebraica, pues, cuando se trabaja con sucesiones figurales, solamente cuatro son del tipo cuadrático, mientras que son trece del tipo lineal. Además de esto señalemos que el sentido de las sucesiones numéricas se ve limitado al tipo de situaciones en la que se pide "encontrar la regla definida por  $x$  sucesión"; es decir, la enseñanza de este tema deja de lado aquellas situaciones en las que el estudiante habría de descubrir el por qué o para qué encontrar dicha regla. Posteriormente se profundizará en el análisis preliminar sobre este aspecto.

Otro aspecto a señalar es que algunos profesores cuando abordan este tema solo plantean ejercicios con sucesiones numéricas. Esto se pudo corroborar al revisar las notas de clase de una estudiante de tercer grado de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” ubicada en la cabecera municipal de General Pánfilo Natera, Zacatecas, en la que se observa que la profesora organizó el estudio de las sucesiones numéricas retomando del libro únicamente los ejemplos en los que la sucesión está dada de manera numérica, omitiendo así el trabajo con sucesiones figurales. Más adelante el análisis preliminar en el aspecto didáctico se encuentra este análisis.

Es por esto que consideramos importante que cuando el profesor aborde contenidos con sucesiones numéricas tanto del tipo lineal como cuadrático, ponga especial atención sobre todo en proponer ejercicios con sucesiones figurales en las que los estudiantes logren identificar y deducir las reglas que las rigen, se espera que mediante la implementación de éstas podrían tener una mejor comprensión de la generalización, y por ende, de la variable. En ese sentido, Osorio (2012) menciona que: “los estudiantes identifican mejor el patrón cuando se trata con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permite observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura” (p. 81).

A continuación se analizarán algunas investigaciones que se han hecho respecto al tema de sucesiones, para después examinar el planteamiento del problema de investigación y por último indicaremos una breve introducción al Fundamento Teórico.

## 1.2 Antecedentes

En este apartado se presentan diferentes investigaciones relacionadas con el tema de sucesiones y patrones. Están organizadas de la siguiente manera: para el primero se analiza una primer investigación que está relacionada a la generalización de patrones en educación temprana con estudiantes de 9 y 10 años (Vergel, 2015); en la segunda se analiza el tránsito de lo aritmético a lo algebraico utilizando sucesiones con figuras en primer año de secundaria (Pérez, Pérez y Hernández, 2013); la tercera y cuarta enfocada a la problemática y dificultades que tienen los alumnos al hacer uso de sucesiones, en tercer año de secundaria (Osorio, 2011 y 2012); para la quinta y sexta se analiza la problemática de los estudiantes al trabajar con sucesiones para el nivel medio superior (Londoño, Kakes y Álamo, 2014; Velazco y Acuña, 2010), y por último se analiza una investigación relacionada con las dificultades en la interpretación del concepto de variable con profesores de Matemáticas de secundaria (Juárez, 2011).

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las Matemáticas escolares (Pérez, Pérez y Hernández, 2013, p. 863).

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el Álgebra en la escuela (Radford 2010b, citado en Vergel, 2015, p. 197), Polya (1945) afirma que este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico porque permite descubrir leyes generales, a partir de la observación de casos particulares.

Además, es considerada un medio que conlleva hacia la abstracción; por tanto el aprender un lenguaje algebraico, requiere de la comunicación y ésta se presenta cuando el alumno identifica un patrón e intenta expresarlo a alguien (Mason, Graham, Pimm y Gower, 1985, citado en Osorio 2012, p. 75). En este mismo sentido, Osorio (2012, p. 81) y Vergel (2015, p. 212) concluyen que al tratar con sucesiones figurales los estudiantes conjeturan y se inician en los principios del Álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabras, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización.

Sin embargo, en algunas ocasiones, el profesor de Matemáticas no logra comprender o no tiene el conocimiento sobre las diferentes actitudes que se generan en los estudiantes en la educación primaria al tratar sucesiones numéricas y que son diferentes a las que se generan con sucesiones figurales ya que éstas, como lo menciona Vergel (2015, p. 212) movilizan en los estudiantes formas perceptivas y gestuales.

Por otra parte es importante que los estudiantes desde una edad temprana se vayan relacionando con este tipo de situaciones, ya que según Vergel (2015, p. 212) el hecho de contar con

secuencias figurales favorece una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.

La acción de que los estudiantes interactúen en la educación primaria con sucesiones numéricas y figurales podría facilitar el proceso de la transición de lo aritmético a lo algebraico; normalmente este proceso se da en primer año de educación secundaria tal y como lo señala Pérez, Pérez y Hernández (2013, p. 870) a los estudiantes se les facilita el tránsito entre lo aritmético a lo algebraico mediante la construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos, y en esta situación pudieron detectar semejanzas y diferencias entre las figuras y los números, así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares hasta llegar a formular una regla general.

Si bien el trabajar con sucesiones figurales o numéricas podría permitir a los estudiantes llegar a la generalización y analizar los diferentes comportamientos de patrones, del mismo modo tienen ciertas dificultades para llegar a la misma, ya que según Osorio (2011, p. 21) en una investigación que realizó con estudiantes de secundaria (14 a 15 años) proponiendo actividades que involucraron sucesiones, se pudo observar que los alumnos usaron el ensayo y error para determinar valores faltantes en una sucesión, pero desafortunadamente no pudieron llegar a la generalización; las sucesiones eran tres del tipo lineal y una del tipo cuadrático.

Respecto a las sucesiones figurales, cuyo patrón se comporta de forma lineal y cuadrático, Osorio (2012) realizó una investigación con estudiantes de tercero de secundaria en el que encontró que cuando se presentan actividades a los estudiantes con sucesiones figurales o numéricas tanto del tipo lineal como cuadrático, solo algunos estudiantes perciben una regularidad y logran observar lo que va pasando de una figura o número a otro, pero identifican mejor el patrón cuando se trata con figuras. La mayor dificultad se presentó cuando se intentaba relacionar una figura o número cuyo patrón era de tipo cuadrático.

Las actividades con sucesiones igualmente están presentes en el nivel medio superior muestra de ello es una investigación que realizó Londoño, Kakes y Álamo (2014) con estudiantes que estaban cursando 2.º, 4.º y 6.º semestres, en la que se presentaron ejercicios que involucraban sucesiones con figuras. Entre los resultados obtenidos se tuvo que los estudiantes pudieron presentar una solución dialogada correcta, pero cuando se les pidió expresar eso mismo por escrito perdían la noción de las ideas. Además mencionan que los estudiantes de nivel medio superior a pesar de haber aprobado varios cursos de Álgebra elemental, no cuentan con herramientas algebraicas que les permitan llegar al proceso de generalización.

En este mismo trabajo se descubrió que los alumnos, al pasar de la identificación de patrones a la generalización, cuando se pide completar una tabla en forma correcta para valores específicos, no encuentran dentro de su lenguaje algebraico una expresión que represente, de manera correcta, lo que se solicita.

Otra investigación que se realizó con estudiantes de nivel medio superior fue la de Velasco y Acuña (2010) cuyas actividades comprendían la forma en que identificaban un patrón de una sucesión de figuras, cómo la formulaban mediante el análisis de progresión y cómo la generalizaban. Solo se analizaron las respuestas de dos estudiantes en las que una de las conclusiones fue que, aunque ambas detectan los cambios en la sucesión, esto no es suficiente para concretar la expresión simbólica y los investigadores deducen que para muchos estudiantes es difícil introducirse en el manejo del lenguaje simbólico, sin antes tener una aproximación personal y directa que sea resultado de sus propias reflexiones.

Ya hemos analizado algunas situaciones a las que se enfrentan los estudiantes al realizar actividades con sucesiones, pero ¿qué pasa con los profesores? Para esto Juárez (2011) en su investigación da a conocer las dificultades que tienen 74 profesores de educación secundaria con los diferentes usos de la variable en el Álgebra elemental (solo se analizarán los resultados obtenidos cuando se hizo uso de la variable como número general). Algunas de sus conclusiones fueron las siguientes: los profesores contestan correctamente actividades que implican la manipulación; logran desarrollar expresiones algebraicas simples, pero cuando la complejidad de la expresión aumenta, presentan dificultades en la interpretación y la simbolización; muestra de ello fue que de los 74 profesores en la pregunta “escribe una fórmula que muestre cómo vas agregando puntos hasta llegar a la figura enésima” se obtuvo un 0% de aciertos.

Una vez que se analizaron los antecedentes se consigue apreciar que hay varias investigaciones relacionadas con sucesiones numéricas y figurales sobre todo del tipo lineal (Osorio, 2011, p. 13) pero son pocas las relacionadas con el tipo cuadrático. Además cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, los estudiantes no se percatan de qué está sucediendo de un término a otro, no observan lo qué pasa de una figura a otra, no alcanzan a identificar el modelo que las rige y mucho menos llegan a la generalización (Osorio, 2012). Asimismo, Lozano (1998, citado en Juárez, 2011) encontró resultados poco alentadores sobre la comprensión de los distintos usos de la variable (incógnita específica, número general y en relación funcional) que tienen los alumnos de secundaria, bachillerato y universidad.

Por otra parte, un punto importante a resaltar es que los estudiantes identifican mejor el patrón de una sucesión cuando está relacionada con figuras (Osorio, 2012), llegando en algunos casos a la generalización, en la que utilizan expresiones orales, diseños y símbolos, lo cual podría ayudarles al desarrollo del pensamiento algebraico.

Asimismo, queremos expresar que la mayoría de las investigaciones que están relacionadas con sucesiones figurales, tienen que ver con aspectos correspondientes a las dificultades de los alumnos y profesores, y, solo algunas, corresponden a la manera en la que los profesores las ponen en juego en el salón de clases y más aún, al carácter en la que las sucesiones pueden convertirse en una herramienta didáctica eficiente.

### 1.3 Planteamiento del problema de investigación

Enseguida se describen la problemática, el problema de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos, la hipótesis, la justificación y una breve descripción del fundamento teórico y metodológico. Específicamente, en la problemática se trabaja con el tema de sucesiones lineales y cuadráticas cuando se abordan con sucesiones numéricas y figurales.

#### 1.3.1 Problemática

En los Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas, en Tercer Grado en el Bloque IV, en el Eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, cuando se aborda el tema de Patrones y Ecuaciones, el contenido es:

- La obtención de una expresión general cuadrática para definir el  $n$ -ésimo término de una sucesión.

Los aprendizajes esperados son que los estudiantes utilicen en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el  $n$ -ésimo término de una sucesión. En ese sentido cuando se aborda el tema de sucesiones del tipo cuadrático en tercer año de secundaria, algunas veces se recurre al uso de sucesiones numéricas y figurales y es entonces cuando los estudiantes se enfrentan a una serie de problemas como son:

- Llegar a la generalización de una sucesión, ya que algunos utilizan el ensayo y error para determinar valores faltantes, lo cual no es suficiente para resolver la actividad planteada, (Osorio, 2011).
- Algunos alumnos no se percatan sobre qué está sucediendo de un número a otro, no observan qué pasa de una figura a otra, lo que les impide que lleguen a la generalización (Osorio, 2012), sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático.
- Si bien los estudiantes logran identificar el patrón de una sucesión, esto no es suficiente para llegar a la expresión algebraica (Velasco y Acuña, 2010).
- Algunos manifiestan oralmente una solución correcta en un ejercicio relacionado con sucesiones, pero cuando se les pide que lo expresen de forma escrita, no tienen elementos para hacerlo o lo hacen de una manera incorrecta (Londoño, Kakes y Álamo, 2014).

Así que se puede sospechar que las dificultades que enfrentan los estudiantes en los procesos de generalización y cuando trabajan con sucesiones en los niveles de educación básica, media superior y superior mucho dependerán de la experiencia vivida con las mismas y como consecuencia les podría afectar su comprensión.

Es de suma importancia que cuando el profesor aborde actividades con sucesiones de los tipos lineal y cuadrático, contemple actividades con sucesiones figurales, con esto se podría tener mayor posibilidad de comprensión del mismo por parte de los estudiantes, tal y como lo comenta Osorio (2012, p. 81) en una investigación con estudiantes de tercero de secundaria “la población de estudio identificó mejor el patrón cuando se trataba con figuras, debido al tipo de arreglos,

pues permitía observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura”.

Por otra parte, en secundaria se da cierta preferencia a los modelos lineales cuando se presentan sucesiones para generalizar y el número de actividades con sucesiones figurales del tipo cuadrático que se plantean son escasas, lo cual se antepone a los estándares curriculares en los que al egresar de la educación secundaria el estudiante “Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p.15).

### **1.3.2 Problema de investigación**

Los estudiantes de tercer año de educación secundaria presentan dificultades al no poder identificar patrones o comportamientos al trabajar con sucesiones, tanto numéricas como figurales y en consecuencia no llegan a su generalización, sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático.

### **1.4 Objetivo General**

Diseñar e implementar una situación didáctica que ayude a los estudiantes a desarrollar e identificar el comportamiento y la posible generalización de una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.

Con esto se pretende que los estudiantes logren fortalecer su aprendizaje con respecto al proceso de generalización.

#### **1.4.1 Objetivos Específicos**

- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de una secuencia didáctica.
- Diseñar una secuencia didáctica relacionada con sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático.
- Implementar la secuencia didáctica a estudiantes de tercer año de secundaria.
- Analizar los resultados obtenidos para mejorar el diseño.

Se espera que a través de la situación didáctica los estudiantes logren identificar el patrón en la sucesión y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a la generalización.

### **1.5 Hipótesis**

“Se considera que con la implementación de la situación didáctica, los estudiantes lograrán el reconocimiento de patrones en sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático y por ende podrían llegar a la generalización”.

El hecho de que el profesor sólo sea un guía en el desarrollo de la secuencia didáctica y el acto de que los estudiantes logren por sí solos llegar a la generalización, podría generar en ellos una comprensión más significativa de las sucesiones.

### 1.6 Justificación

El tema de sucesiones constituye ya una parte de la currícula o propuesta institucional en diferentes niveles de educación en México, en los que los objetivos y los temas que se promueven están descritos en la tabla 1:

Nivel	Objetivo	Se promueve
Preescolar (3 a 6 años).	Establecer relaciones comparativas respecto a un sistema de referencia entre los elementos de un conjunto, y ordenarlos según su diferencia, ya sea en forma creciente o decreciente.	Noción de orden por medio de la adición, reconocimiento de antecesor y sucesor dentro de un grupo de objetos. Martínez (2012).
Primaria (6 a 12 años).	Descubrir la relación entre dos términos consecutivos, Operar números enteros, Completar una serie numérica. Perseverar en la búsqueda de soluciones.	Número, relaciones y funciones donde el alumno desarrolla la capacidad de interpretar y formular sucesiones con números naturales. Secretaría de Educación Pública (2011).
Secundaria (12 a 15 años).	Llevar a cabo procedimientos descritos de forma clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciadas. Transitar de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.	Obtención de reglas de sucesiones numéricas y figurativas. Utilización de números con signo y deducción de expresión algebraica. Secretaría de Educación Pública (2011).
Medio Superior	Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	La construcción e interpretación de modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos algebraicos, geométricos y variacionales. Para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Secretaría de Educación Pública (2010).

Tabla 1. Tratamiento del tema de sucesiones en los planes de estudio (Torres, Borjón y Sosa, 2012).

Como se puede apreciar, durante todo el proceso educativo básico los estudiantes deben estar trabajando con actividades en las que se vea implícito el tema de sucesiones, pero en el nivel medio superior algunos no cuentan con herramientas algebraicas que les permitan llegar al proceso de generalización (Londoño, Kakes y Álamo 2014), más aún los resultados encontrados en (Ursini y Trigueros, 2006) (Juárez, 2011, p. 83) permiten expresar que estudiantes universitarios que habían llevado cursos de Matemáticas avanzadas siguen teniendo dificultades



para manejar este concepto, llegando a evitar cualquier acercamiento algebraico y retornando a procedimientos de carácter aritmético. Esto quiere decir que respecto al currículo, de manera transversal, es necesario reforzar este tema.

Además, cuando se abordan problemas relacionados con sucesiones del tipo cuadrático en tercer año de secundaria se presentan pocas actividades con sucesiones figurales, en algunos casos no se proponen actividades con dichas secuencias y en otros más ni siquiera se alcanza a desarrollar el tema, esto tal vez porque en el programa no se menciona que trabajen con sucesiones figurales. Es por eso que nosotros proponemos implementar una secuencia didáctica en la que se involucren sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático, “en las que la regla no viene explicitada, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular” (Socas, Ruano y Hernández, 2016, p. 13) para que los estudiantes logren por sí solos visualizar ese comportamiento y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a una deducción.







---

# Capítulo 2. Fundamento Teórico

---



En este capítulo se analizará la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau en los años setenta; dicha teoría servirá como modelo en esta investigación, además se explicará lo que se entiende por error, dificultad y obstáculo, así como sus diferentes orígenes. Después se definirán algunos conceptos relacionados con sucesiones numéricas y figurales del tipo lineal y cuadrático. Con esto tendremos los elementos teóricos y matemáticos necesarios para llevar a cabo la aplicación de la situación didáctica.

También se analizará el método que se llevará a cabo para realizar esta investigación. La metodología que se propone es la de La Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que se compone de cuatro fases: la primera de Análisis Preliminares, la segunda de Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas, la tercera de Experimentación y finalmente la cuarta, de Análisis a posteriori y Validación.

## 2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

La enseñanza de las Matemáticas no es un proceso trivial, pues los conocimientos por enseñar pueden ser recontextualizados<sup>1</sup> y repersonalizados<sup>2</sup> por parte del profesor con el propósito de darle cierto sentido, con el fin de que los estudiantes se sientan familiarizados con un determinado problema; el profesor juega un doble papel, primero hacer saber a los estudiantes que ellos están construyendo algo y segundo, que en efecto eso que construyen en Matemáticas tiene un significado, tal como lo comenta Brousseau (1994, p. 1):

Se ven bien las dos partes, bastante contradictorias, del rol del maestro: hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, además, transformar esa “respuesta razonable” en un “hecho cognitivo extraordinario, identificado, reconocido desde el exterior.

Es por eso que como modelo en esta investigación se utilizará La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, quien la desarrolló en la llamada “Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática” a principios de los años setenta. “Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea” (Panizza, 2004, p. 60); es decir, que los objetos matemáticos que se van a enseñar podrían tener un origen que sea generado o construido por el profesor, con una cierta intencionalidad.

Guy Brousseau (1999, citado en Panizza 2004, pp.60-61) afirma,

---

<sup>1</sup> Recontextualizar alude al proceso que realiza el profesor cuando modifica cierto saber brindándole un cierto contexto (Chevallard, 1991).

<sup>2</sup> refiere al proceso inverso que realizan los académicos cuando comparten un saber al interior de la disciplina (Chevallard, 1991)

(...) La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores.

Así, se tiene que la teoría de situaciones didácticas nos sirve para analizar lo que hacen por una parte los profesores y los alumnos, además nos provee la oportunidad de fabricar problemas que sean acomodados a los alumnos, mediante la adaptación de los saberes y se convierte así en una oportunidad para la comunicación entre la labor del profesor y la del investigador.

La Teoría de Situaciones es caracterizada por Brousseau (1986, p.14) de la siguiente forma:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.”

En esta Teoría de Situaciones Didácticas quien juega un papel primordial en la construcción del conocimiento es la situación didáctica y se define de la siguiente manera:

**Situación didáctica:** Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1982, citado en Gálvez, 1994, p. 42).

En este sentido se puede decir, que el estudiante logra adquirir un conocimiento, que el profesor ayuda a construir mediante una situación didáctica organizada preliminarmente.

Esta situación didáctica será la que ayude a provocar el conocimiento matemático en los estudiantes, se puede presentar como un juego en el que hay implícitas reglas y acuerdos para el profesor y los alumnos que deberán ser respetadas, mediante un “contrato didáctico”, que Chavarría (2006, p. 33) lo define como: “la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente”.

Asimismo para que el alumno aprenda un determinado tópico, éste se debe transformar, modificar, hacer ciertas adecuaciones, reajustarlo, para que le sea más fácil apropiarse de saberes

en un mínimo de tiempo, tal proceso es llamado transposición didáctica y se explica de este modo:

La presentación axiomática...proporciona al estudiante y a su profesor un medio para organizar su actividad y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de “saberes” bastante próximos al “saber erudito”... pero esta presentación elimina completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para plantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y cuestiones nacidas de los progresos de otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados, y las innumerables discusiones que han ocasionado... para hacer más fácil su enseñanza, aísla ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en el cual tuvieron su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Las transpone al contexto escolar. Los epistemólogos llaman transposición didáctica a esta operación.

(Brousseau, 1986, p.37)

Entonces la transposición didáctica es ineludible pero a la vez podría ser contradictoria, ya que algunas veces esos cambios hechos por el profesor pudieran no ser los adecuados, lograrían producir ciertos efectos. Algunos de ellos son descritos de la siguiente manera:

El efecto Topaze: Brousseau lo identifica como “aquella circunstancia en la que el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema.” (Chavarría, 2006, p. 33). En ese sentido se puede decir que el efecto topaze surge cuando el profesor le dice al estudiante como realizar un determinado problema.

El efecto Jourdain: consiste en la “actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que “está bien”, que es la respuesta correcta” (Chavarría, 2006, p.33). El profesor aquí no asume la responsabilidad de hacerle ver al alumno que lo que realizó no fue de manera correcta y es asumido como válido.

El deslizamiento Meta-Cognitivo: Consiste en la “actitud de tomar una heurística en la resolución de un problema y asumirla como el objeto de estudio” (Chavarría, 2006, p.34). En este caso el profesor toma sus propias explicaciones como el objeto de estudio en lugar del auténtico conocimiento matemático.

Por otra parte la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau propone para su estudio experimental cuatro tipos de situaciones didácticas: Acción, Formulación, Validación e Institucionalización.

**1. Las Situaciones de Acción.** El alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.

**2. Las Situaciones de Formulación.** Un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base al conocimiento contenido en el mensaje.

**3. Las Situaciones de Validación.** Dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

(Panizza, 2004, pp.66-67)

Es decir una Situación de Acción se va a presentar cuando los estudiantes pongan en juego medios de acción como pudieran ser objetos, herramientas, emprender la actividad, entre otros. Por ejemplo a los estudiantes se les presenta una sucesión numerada de figuras, es decir, se les muestra la figura 1 (un cubo), figura 2 (cuatro cubos) y figura 3 (nueve cubos) y se les pide que construyan las figuras 4 y 5. Cuando comiencen a ver cómo pueden resolver la pregunta planteada, con qué materiales y recursos cuentan, estarán en una situación de acción, como se muestra en la siguiente figura:

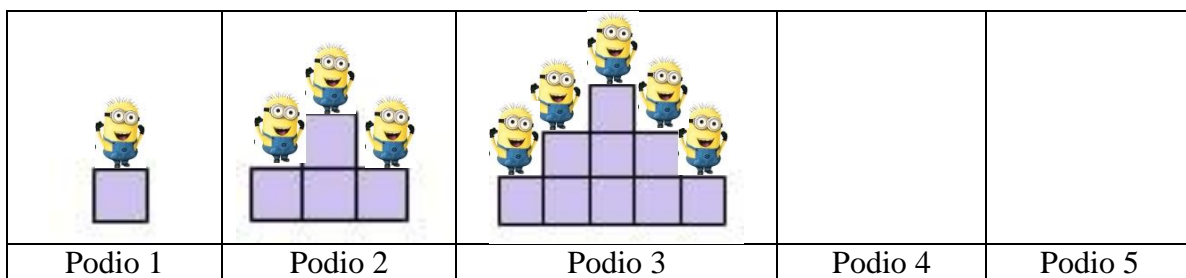


Figura 1. Podio de premiación para “minions”.

En cambio, la Situación de Formulación es cuando los estudiantes se comunican mediante un lenguaje más apropiado las posibles estrategias de solución de manera que todos entiendan ese mensaje que se quiere transmitir. Retomando el ejemplo anterior, para que entren en una situación de formulación los alumnos formularán las respuestas a las preguntas planteadas o a otras, como puede ser los cubos que tendría la figura 15 de la sucesión serían 225, para ello los alumnos podrían dibujar toda la sucesión hasta llegar el número que se les pide.

Para las Situaciones de Validación los alumnos deben construir pruebas para explicar sus afirmaciones, no basta con presentar alguna solución, se tendrá que demostrar con argumentos

sólidos la validez de ésta; en el caso de las sucesiones de figuras con cubos tendrán que evidenciar tanto al profesor como a sus compañeros porqué su respuesta es la correcta.

Estas tres situaciones pueden clasificarse dentro de las situaciones a-didácticas, las cuales serán definidas posteriormente.

Por último se tiene a la Institucionalización definida de la siguiente manera:

**4.- Las situaciones de institucionalización.** Destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

(Gálvez, 1994, p. 44)

El profesor es quien debe tomar el control de la situación y debe hacerles saber que lo que ellos han construido en las diferentes situaciones tanto de Acción, Formulación y Validación tiene un significado matemático, o en el mundo de las Matemáticas. Siguiendo el mismo ejemplo de las sucesiones con cubos, una vez concluidas las diferentes fases descritas, el profesor podría dar el significado socialmente establecido para definir una característica de una sucesión del tipo cuadrático.

Por otra parte, además de las situaciones didácticas Brousseau identifica otro tipo de situaciones o fases, las a-didácticas:

“El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego” (Brousseau, 1986 citado en Panizza, 2004, p. 62).

La finalidad de una situación didáctica es que los estudiantes adquieran un conocimiento, pero dicho objetivo no elimina a la etapa a-didáctica, ya que igualmente el alumno debe tener relación con el problema solucionándolo con base en sus conocimientos, debe sentir interés y motivación por solucionarlo y no por satisfacer una tarea impuesta por el docente, además éste no tiene que intervenir directamente auxiliándolo para solucionarlo, solo deberá ser un apoyo. En consecuencia, una situación a-didáctica es la etapa en la que se da el proceso de aprendizaje.

La definición de situación a-didáctica contempla diferentes características que son importantes examinar una a una:



El carácter de necesidad de los conocimientos: la “situación” se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación “no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende”.

La noción de “sanción”: No debe entenderse como “castigo” por una “culpa, o equivocación”. La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción. Que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción, y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones.

Este análisis permite también advertir sobre la importancia y el significado del principio de “no intervención” del docente en este proceso: la situación a-didáctica es concebida como un momento de aprendizaje (y no de enseñanza); los alumnos deben encontrar por sí mismos relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtienen.

(Panizza, 2004, pp. 63-64)

En consecuencia, no es el silencio del maestro lo que identifica las fases a-didácticas, sino lo que el docente expone, además, se enfatiza que la "no intervención del maestro" no representa que éste se aísle o se convierta en un observador, sino que las participaciones de los docentes serán pensadas para colocar y mantener a los alumnos en las diferentes actividades a desarrollar.

Asimismo, el comienzo en una fase a-didáctica es algo que concierne tramitar al maestro. Esto dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau (1998, citado en Panizza, 2004., p. 65): “La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”.

Otra noción trascendental de la teoría es la de variable didáctica:

El docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.

(Brousseau, 1995, citado en Panizza, 2004, p. 66)

Un ejemplo de variables didácticas en el ejemplo de los cubos se podría dar al cambiar el número de cubos en cada figura o plantear a los estudiantes que en lugar de contar los cubos, cuenten cuántas caras se ven en la figura uno, la dos, la tres y la cuatro.

En cuanto a los errores, se pueden encontrar en diferentes momentos y por consecuencia es importante analizarlos, por ejemplo, cuando se desarrolla algún problema matemático, cuando se realiza una investigación, pero también pueden presentarse cuando existe una interpretación errónea de un concepto, por tal motivo diferentes investigadores se han preocupado por saber qué circunstancias lo hacen posible, como lo menciona (Rico, 1998, p. 73) “admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento” y señala que “no hay fuentes últimas de conocimiento”.

Pero, ¿qué es el error? Como lo señala Matz (1980, citado en Ruano, Socas, y Palarea, 2003) “Los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”.

Es decir un error aparece cuando se intenta resolver un problema o adquirir un nuevo conocimiento pero no se logra llegar al objetivo.

Existen muchos países, por ejemplo Estados Unidos, España y Alemania, que han investigado y realizado aportaciones importantes en cuanto a su clasificación (Rico, 1998, pp. 77-78): errores que pueden ser repetitivos, suelen aparecer porque el concepto no se entendió correctamente e incluso algunas veces los estudiantes crean sus propios métodos originales para resolver alguna situación sin que esta sea exitosa, también puede influir el profesor, los planes y programas de estudio, el entorno social, emocional y la combinación de éstos, de aquí la importancia en señalar que los errores son parte del conocimiento y por lo tanto no hay que evadirlos o darles la vuelta, sino todo lo contrario hay que enfrentarlos ya que podrían ayudar a que los estudiantes en el transcurso del aprendizaje logren entender un determinado concepto.

Asimismo los errores aparecen casi de la mano con las dificultades, pues el error es el síntoma de una dificultad, es decir, la mayoría de los estudiantes tienen dificultades con el aprendizaje de las Matemáticas y por lo tanto cometen errores. Estas dificultades en la enseñanza-aprendizaje se pueden establecer en cinco categorías, como lo menciona (Socas, 2011, p. 12): “la complejidad de los objetos de las matemáticas, procesos de pensamiento matemático, procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, procesos de desarrollo cognitivo y actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas”.

En lo que se refiere a obstáculo se va a considerar como “un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas” (Brousseau 1983, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2003, p. 313), es decir, se tiene el conocimiento que es válido para ciertos contenidos pero cuando se quiere utilizar en otros, este no es correcto. El obstáculo se revela, por sus errores, que no son por descuido, sino que éstos se repiten y son

difíciles de erradicar. Los obstáculos que se presentan en el “sistema didáctico pueden organizarse en : cognitivos, didácticos y epistemológicos” (Ruano et al, 2003, p. 313).

## 2.2 Fundamento Matemático

A continuación se van a definir algunos conceptos matemáticos que nos permitirán tener las herramientas necesarias para llevar a cabo la secuencia didáctica.

Como ya se ha mencionado las sucesiones se ven explícitas en diferentes niveles de educación en México, en las cuales se ve implícito el proceso de generalización, mediante una situación o contexto que se puede planear de diferentes maneras, por ejemplo, numérica o figural. Por lo tanto los estudiantes podrían resolver la situación planteada mediante cuatro pasos o momentos, tal y como lo comenta Ruano, Socas y Palarea (2015, p. 20) “(1) Sistematización: mediante la construcción de tablas u otro tipo de representación; (2) Reconocimiento de la Regla o Patrón (arreglo repetitivo de números, colores y formas ); (3) Explicitación de la regla en una expresión o fórmula; (4) Verificación de la expresión o fórmula con ejemplos”.

Por lo tanto los estudiantes podrían transitar por esos momentos para poder resolver una determinada generalización, que Mason, Burton y Stacey (1992, p.21) la citan de la siguiente manera:

“Las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática. Los resultados particulares pueden ser útiles por sí, sin duda, pero el resultado típicamente matemático es el resultado general”.

Ahora bien, ¿qué es una sucesión?

Una sucesión infinita se define como:

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es  $\mathbb{N}$ . Desde el punto de vista de esta definición, debería designarse una sucesión mediante una simple letra tal como  $a$ , y los valores particulares mediante  $a(1)$ ,  $a(2)$ ,  $a(3)$ ,...,pero la notación con subíndices  $a_1, a_2, a_3, \dots$  es la que se usa casi siempre, y la misma sucesión se suele designar mediante un símbolo tal como  $\{a_n\}$ . Así pues,  $\{n\}$ ,  $\{(-1)^n\}$  y  $\{\frac{1}{n}\}$  designan las sucesiones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  definidas por:

$$\alpha_n = n,$$

$$\beta_n = (-1)^n$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

(Spivak, 1992, pp.613-614)

Por ejemplo dada la sucesión 2, 4, 6, 8, 10... se puede decir que esta sucesión está compuesta por los números pares, en este caso el primer término sería el dos, el segundo el cuatro, el tercero el seis y así sucesivamente.

En lo que sigue se definirá lo que es una progresión aritmética y geométrica.

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por  $d$ .

$$d = a_n - a_{n-1}$$

El término general de una progresión aritmética sería:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

Las progresiones aritméticas constituyen un ejemplo de sucesiones del tipo lineal, las cuales han estado presentes en la historia de las Matemáticas y fueron aplicadas sobre todo en el comercio.

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija  $r$ , llamada razón.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Y el término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_k r^{n-k}$$

<http://www.vitutor.net/1/50.html>

Por otra parte tenemos que:

“Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales pero las segundas si lo son, entonces la expresión que le corresponde a la sucesión es de segundo grado y, por lo tanto, tiene la forma:

$$an^2 + bn + c$$

El método para encontrar la expresión de una sucesión se llama método de diferencias. En el caso de que sea una expresión de segundo grado, consiste en:

1. Calcular las primeras y segundas diferencias de la sucesión.
2. Las segundas diferencias siempre son iguales a  $2a$ , de ahí se encuentra el valor de  $a$ .
3. La primera diferencia entre los dos primeros términos de la sucesión siempre es igual a  $3a + b$ , de ahí se obtiene el valor de  $b$ .
4. El primer término de la serie siempre es igual a  $a + b + c$ , de ahí se obtiene el valor de  $c$ .

Una vez que se obtienen los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  se sustituyen en  $an^2 + bn + c$ .

(García y Mendoza, 2008, pp. 164-165)

Estos elementos teóricos matemáticos nos ayudaron para el diseño de la secuencia didáctica y la situación de institucionalización, con el objetivo de tener la mayor comprensión de los elementos matemáticos involucrados en una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.

### 2.3 Metodología

En este apartado se analiza el método que se llevará a cabo para realizar esta investigación. Según Schmelkes y Elizondo (2010) el método es el plan ordenado para el desarrollo del proyecto. Para este trabajo se optará por una investigación con enfoque cualitativo, pues, “se estudia la realidad en su contexto natural, tal como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 32), en este estudio se trabajará con estudiantes de tercer año de educación secundaria, implementando una secuencia didáctica.

Como metodología de la investigación se propone La Ingeniería Didáctica de Artigue, que se compone de cuatro fases: la primera de análisis preliminares, la segunda de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la tercera de experimentación y finalmente la cuarta, de análisis a posteriori y validación.

### 2.3.1 La Ingeniería Didáctica

Comenzaremos el análisis de la Ingeniería Didáctica haciendo la siguiente pregunta ¿Cuál es la actividad de un ingeniero? Se podría responder que algunas de las tareas que puede realizar consisten en hacer investigación, diseñar, desarrollar, producir, construir y llevar a cabo un determinado trabajo con un excelente uso de recursos, pero también admite someterse a una revisión de tipo científico, así, se tiene que la Ingeniería Didáctica debe su nombre a la comparación que tiene esta forma de trabajo didáctico con el trabajo de un ingeniero.

Además la Ingeniería Didáctica juega una doble función, como lo comenta Artigue (1995, p. 38) “Ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica”.

Asimismo la Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación se caracteriza por ser: “un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995, p. 36), esto alude tanto a la manera en que elaboramos una situación didáctica como a su validación: por “el registro de los estudios de caso cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori” (Artigue, 1995, p. 37).

Como se ha señalado, la metodología de la Ingeniería Didáctica, se compone de cuatro fases que serán descritas en lo sucesivo.

### 2.3.2 Análisis Preliminares

Dentro de los análisis preliminares más comunes se tienen los siguientes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones en el que se va a situar la realización didáctica efectiva.

Artigue (1995, p. 38).

El realizar este tipo de análisis en nuestra investigación ayudará a la construcción de la situación didáctica, así pues, se efectuará un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo referente a las sucesiones, para tener un mejor acercamiento sobre este tópico matemático, analizando la forma

en que se ha trabajado históricamente, el cómo abordan el tema los libros de texto y analizando algunas notas de clase, para finalizar a través de una actividad se identifican posibles errores y dificultades que tienen estudiantes de tercero de secundaria al estudiar este tema.

### 2.3.3 Concepción y Análisis a priori

**Concepción de la situación.** En esta etapa se considera el problema de investigación que se va a plantear a los estudiantes, se analizan las variables didácticas que están involucradas, la forma en cómo estará organizado el “medio” y las acciones a realizar para llevar a cabo la puesta en escena de la secuencia didáctica. En concreto Brousseau (1981, citado en Artigue, 1995, p. 44) argumenta que “Hay que asegurarse constantemente de la capacidad de la concepción general para permitir la invención, la organización y el devenir de las situaciones locales (correspondientes a los cuadros teóricos generales en los que se basa la ingeniería)”.

**Análisis a priori.** El Análisis a priori es el conjunto de supuestos que esperamos sucedan en la situación didáctica, las posibles respuestas de los estudiantes, las estrategias que pudieran presentarse. Generalmente se obtiene una parte descriptiva y una predictiva, se describen las características de la situación, se analiza lo que está en juego en la situación, los campos de comportamiento posible, entre otros, algo de lo que ya ha mencionado Artigue (1995, p. 45).

- **Situación de Acción.** Aquí estarán descritos los supuestos que creemos van a ocurrir cuando los estudiantes comiencen a analizar: la situación problema, las posibles instrucciones, material con el que pueden contar, las reglas a seguir, entre otros.
- **Situación de Formulación.** En esta etapa se presentarán las posibles soluciones que pudieran presentar los estudiantes, así como algunos posibles errores que pudieran llegar a presentarse.
- **Situación de Validación.** Para esta situación se espera que los alumnos confirmen sus resultados obtenidos, primero con sus compañeros de equipo y después frente a grupo.
- **Situación de Institucionalización.** Por último, en esta etapa se considera llegar a la Institucionalización de las características de una sucesión del tipo lineal y cuadrático, se les pondrán ejemplos y por último se les propondrá ejercicios que consideramos ayudarán a reforzar lo aprendido en las situaciones anteriores.

### 2.3.4 Experimentación

La experimentación es cuando se lleva a cabo la situación didáctica que previamente fue diseñada, con la intención de que los estudiantes aprendan algo. En esta etapa se manifiesta el lugar en el que se experimentó la situación didáctica, el tipo de escuela, las características generales del grupo, sesiones impartidas, las evidencias, la dinámica que se siguió, el material utilizado, en general todo lo que pasó para poner en marcha la situación didáctica.

- **Técnicas de recogida de datos**

Se planea hacer una grabación de la experimentación, ya que este hecho permite analizar con exactitud una y otra vez lo que sucedió en la puesta en marcha de la situación didáctica. Asimismo se hará una recopilación de fotografías que reflejen los diferentes momentos por los que están pasando los alumnos, es decir, en la situación de Acción, Formulación, Validación y cuando el profesor este en la etapa de Institucionalización.

En lo que se refiere al trabajo realizado por los alumnos se les proporcionarán hojas, para que realicen sus cálculos y se les pedirá que todo lo hagan con pluma, para, al final recopilar las hojas y tener un mejor análisis de su trabajo.

Una vez que se tengan las grabaciones y las hojas de trabajo, para nuestro análisis y para proteger el anonimato de los estudiantes, se utilizarán códigos para los alumnos, se nombrarán A1, A2, A3 y así sucesivamente. El profesor con la inicial “P” en mayúscula, “As” para cuando varios alumnos hablen al mismo tiempo y den una misma respuesta y por último “Ax” se utilizará cuando varios alumnos hablen y no se les entienda lo que dicen.


### **2.3.5 Análisis a posteriori y Validación**

En esta etapa se analiza todo lo que realmente pasó en la experimentación de la situación didáctica, qué fue lo que los estudiantes realizaron, cuáles fueron sus estrategias, qué errores se presentaron, sus acciones, las formulaciones, en general se realiza un análisis riguroso de todo lo que sucedió en la situación didáctica. Éste se organiza en coordinación con el tipo de situaciones didácticas que se fueron presentando en la experimentación.

Para terminar, la fase de validación se dará cuando confrontemos el análisis a priori con el a posteriori. Se podría constatar cuáles, de nuestras hipótesis son las que se presentaron en la situación didáctica. Esto aportará información para la mejora de la secuencia didáctica propuesta.







---

# Capítulo 3. Análisis Preliminares, Concepción y Análisis a priori

---



La Ingeniería Didáctica en su primera fase se compone de los análisis preliminares, éstos se pueden fundamentar en tres áreas esenciales: el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico, que en lo sucesivo se explicaran con detalle. En la segunda fase, que es la de concepción y análisis a priori, primero se tendrá que tener una idea general, clara y precisa sobre la situación que se vaya a implementar, para poder producirla, desarrollarla y anticiparnos a posibles detalles, para tratar de obtener los resultados propuestos. Por último el análisis a priori, en general trata de la realización de una descripción y predicción de la secuencia didáctica.

### 3.1 Análisis preliminares

Para el desarrollo de este apartado se comenzó en primer lugar, con un análisis epistemológico de las sucesiones numéricas, estudiando cómo a lo largo de la historia de las Matemáticas se trabajó con sucesiones. En segundo lugar, se realizó el análisis didáctico, investigando en algunos libros de texto y notas de clase, la manera de cómo se trabaja con sucesiones numéricas y figurales en tercer año de educación secundaria. Por último se efectuó el análisis cognitivo, mediante la elaboración de una actividad para trabajar con sucesiones numéricas y figurales que desarrollaron los estudiantes de tercer año de educación secundaria.

#### 3.1.1 Análisis epistemológico de las sucesiones numéricas

En este apartado se analizó la propuesta de los pitagóricos, los cuales trabajaron con números figurados, como los solían llamar, además de algunas otras civilizaciones que trabajaron con sucesiones, para aproximar raíces cuadradas y aproximar el valor de  $\pi$ .

En la historia de las Matemáticas podemos encontrar que en algunas civilizaciones se construyeron ciertas sucesiones particulares al aproximar raíces cuadradas y raíces de ecuaciones, además de la sucesión que se crea al aproximar el valor de  $\pi$ , utilizando el método de exhaustión, inscribiendo y circunscribiendo en un círculo polígonos de muchos lados.

(Calvillo, 2007, p. 49)

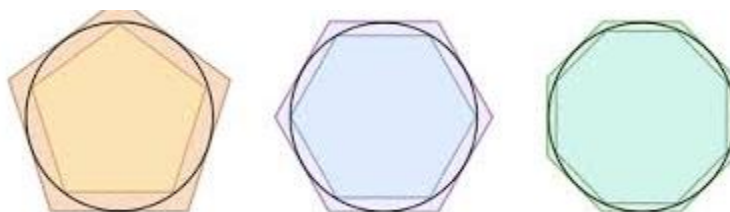


Figura 2. Aproximación de  $\pi$ .

A continuación se dará una breve descripción de cómo desde hace algunos años, ya se trabajaba con números figurados, como lo solían llamar los pitagóricos (540 a. c.) que estudiaban diferentes figuras geométricas que estaban constituidas por puntos, entre los que destacan los números triangulares, números cuadrados y números pentagonales. La siguiente figura muestra un ejemplo de estos tipos de números.

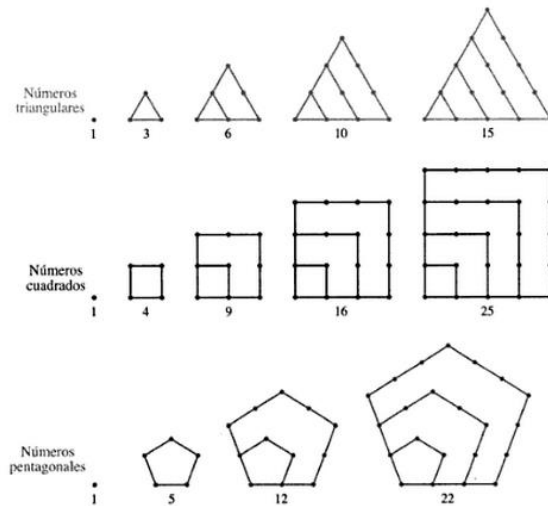


Figura 3. Números triangulares, cuadrados y pentagonales.

Los números figurados poseen numerosos patrones interesantes. Cada número cuadrado mayor que 1 es la suma de dos números triangulares consecutivos. (Por ejemplo,  $9 = 3+6$  y  $25 = 10+15$ ). Cada número pentagonal puede representarse como la suma de un número cuadrado y un número triangular. (Por ejemplo,  $5 = 4+1$  y  $12 = 9+3$ ).

En la expresión  $T_n$ ,  $n$  se conoce como subíndice,  $T_n$  se lee “te subíndice ene”, y representa el número triangular en la posición  $n$  de la sucesión. Por ejemplo:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6 \quad \text{y} \quad T_4 = 10.$$

$S_n$  y  $P_n$  representan los números cuadrado y pentagonal en la posición  $n$ , respectivamente.

(Miller, Heeren y Hornsby, 2006, p.14)

Los números figurados, concebidos como los números de puntos en ciertas configuraciones geométricas, constituyen un nexo directo entre la Geometría y la Aritmética. La nomenclatura geométrica de estos números es abundante y

comienza generalmente con los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

Triangular:  $\frac{n(n+1)}{2}$

Cuadrado:  $n^2$

Pentagonal:  $\frac{n(3n-1)}{2}$

Hexagonal:  $2n^2 - n$

Numerosos e interesantes teoremas relativos a propiedades maravillosas de estos números figurados, pueden ser demostrados utilizando únicamente diagramas de puntos. Por ejemplo, para obtener el resultado: <todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos>, basta con trazar los diagramas siguientes:

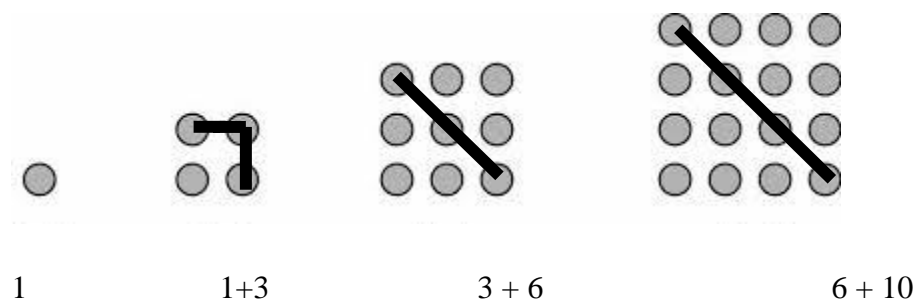


Figura 4. Números triangulares

Y así sucesivamente.

Establecida la forma general de estos números, se puede, evidentemente, expresar también en lenguaje algebraico los teoremas conocidos. Así el  $n$ -ésimo número triangular viene dado por la suma de la serie aritmética:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Y el resultado relativo al número cuadrado  $n^2$  se expresa, en lenguaje algebraico.

$$\frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = n^2$$

En la que  $\frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$  son los dos números triangulares sucesivos.

Se puede aumentar fácilmente la nomenclatura de estos números figurados sin más que introducir los números poligonales, y los números poliédricos (en el espacio de tres dimensiones) como, por ejemplo, los números cúbicos, piramidales, etc.

Collette, J.P. (1985, pp. 74-76)

### **3.1.2 Análisis didáctico**

En este apartado se analizaron los libros de “Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento” (Sánchez, 2012), “Matemáticas 2” de Escareño y López (2013) y “Fractal 3” (García y Mendoza, 2008), que son los libros que tienen de apoyo en la secundaria en la que se llevó a cabo la experimentación y específicamente se analizó la forma en cómo estos libros abordan el tema de sucesiones numéricas y figurales. Asimismo se analizaron algunas notas de clase referentes al trabajo con sucesiones que experimentaron estudiantes de tercer año de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” ubicada en la cabecera municipal de Gral. Pánfilo Natera, Zacatecas y de la Escuela Secundaria Técnica No. 1 “José Reyes Martínez” del estado de Aguascalientes.

Para primer año de secundaria, en específico con el libro de “Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento” (Sánchez, 2012) se le propone al estudiante resolver tareas con sucesiones numéricas y figurales que puede resolver con “cierta facilidad”, en las que pocas veces se le plantean ejercicios en los que pueda llegar a la generalización, como se puede ver en las siguientes tres figuras.

**La letra L**

Lorena usó puntos rojos para dibujar la letra L de diferente tamaño cada vez, pero siguiendo una regla dada.

Figura 1      Figura 2      Figura 3      Figura 4      Figura 5

A partir de lo anterior, realiza lo siguiente:

1. Observa y analiza las figuras de Lorena. Piensa y razona acerca de las regularidades que se presentan entre los elementos de la **sucesión figurativa**. Dibuja en tu cuaderno las figuras que le faltaron a Lorena.
2. Completa en tu cuaderno la tabla numérica que corresponde a la sucesión de figuras de Lorena.

Número de figura	1	2	3	4	5
Número de puntos					

3. ¿Cuál es la regla de formación de los términos de la sucesión figurativa dibujada por Lorena?

4. ¿Cómo se puede calcular el número de puntos de la figura 10?

5. Ahora de manera general, si  $n$  indica el número de una figura de la sucesión de Lorena, ¿cómo se puede calcular el número de puntos necesarios para dibujarla?

6. Escribe en tu cuaderno un concepto de sucesión figurativa.

7. Compara cada una de tus respuestas con las obtenidas por otros compañeros y completa lo que te haga falta.

**sucesión figurativa.** Colección ordenada de figuras que cumplen con una regla o ley de formación.

Figura 5. Secuencia planteada para introducir el tema de sucesiones ( Sánchez, 2012).



Haz lo que se indica en cada caso.

1. Verifica que la sucesión numérica que se obtuvo a partir de las letras L es una sucesión aritmética.
2. Escribe en tu cuaderno una tabla que contenga una sucesión aritmética que cumpla con las siguientes indicaciones.
  - a) El primer término es 11.
  - b) Cada vez, el siguiente término se obtiene sumando 8 al último término escrito.

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Término							
3. Describe las características que cumplen los términos de la sucesión numérica que se presenta en la siguiente tabla:
 

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Término	20	35	50	65	80	95	110

Justifica que se trata de una sucesión aritmética.

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas.

Figura 6. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones (Sánchez, 2012).

¿Cómo se pueden calcular los términos de una sucesión numérica, cuando se conoce una regla de formación para la sucesión?

1. El primer término de la sucesión es 5.
2. A partir del último término escrito se calcula el siguiente, multiplicándolo por el número 3.

En tu cuaderno, elabora una tabla en la que escribirás los primeros cinco términos de la sucesión.

Posición	1	2	3	4	5
Término					

Consideren que la regla de una sucesión numérica se puede expresar por medio de palabras. Completen en su cuaderno lo que falta en cada caso.

1. Analicen la sucesión numérica presentada en la tabla y establezcan la regla de formación que permite calcular los primeros términos de la sucesión. Calculen el sexto término de esta sucesión.

Posición	1	2	3	4	5	6
Término	3	12	48	192	768	

2. Números pares. El valor de la posición se multiplica por 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6							

3. Números impares. El valor de la posición se multiplica por 2 y al resultado se le resta 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5							

4. Sucesión aritmética. Se comienza con 10 y cada vez se suma 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	14	18							

5. Sucesión geométrica. Se comienza con 5 y cada vez se multiplica por 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	15	45							

Figura 7. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones (Sánchez, 2012).

Como se pudo observar en las figuras anteriores se le había preguntado acerca del término general, pero en la mayoría de las preguntas no hacen mención a éste, sólo se consideran ejercicios en los que se les pide que lleguen a una generalización numérica y lo que sugieren para introducir a las literales como números generales es poner ejercicios relacionados al área y perímetro de diferentes figuras geométricas (cuadrados, triángulos, rectángulos) como se puede observar en las siguientes figuras; se espera que utilicen las literales en lugar de números. Los estudiantes podrían entender que las literales sólo sirven para construir operaciones y fórmulas, tal como lo mencionan Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) “Por lo general, ni los libros

ni el profesor consideran necesario aclarar la diferencia entre la letra usada como número general y la letra usada como incógnita”.

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Bloque UNO


### Explicación del significado de fórmulas geométricas al considerar a las literales como números generales con los que es posible operar.

RECUERDO Y COMIENZO

#### Perímetro de cuadrados

Analiza y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:


- ¿Cuál es la fórmula que se puede utilizar para calcular el perímetro de un cuadrado?
- Si el cuadrado de la derecha representa un marco de madera, ¿cuál es el procedimiento que se puede usar para calcular la longitud de la moldura que se usó para fabricarlo?
- ¿Cómo se puede calcular el perímetro de un cuadrado?
- Si la longitud de los lados de un cuadrado es de 45 cm, ¿cómo calcularías el perímetro?
- ¿Cómo se puede calcular el perímetro de cualquier cuadrado?
- Si  $l$  representa la longitud de cada uno de los lados de un cuadrado, ¿cómo se puede calcular el perímetro?




25 cm

25 cm

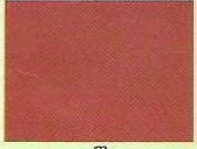
- Calcula el perímetro de cada uno de los cuadrados.



$a$



$b$



$m$

- Analiza y justifica la equivalencia de las siguientes **expresiones algebraicas**.
 

Perímetro = lado + lado + lado + lado

$P = l + l + l + l$        $P = 4 \times l$        $P = 4l$

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas.

**Glosario**

**expresiones algebraicas.** Son colecciones de números y **literales** relacionadas por las operaciones y signos matemáticos.

**literales.** Letras que se usan para representar números generales y con las que se pueden hacer operaciones.


Figura 8. Fórmulas geométricas al considerar a las literales como números generales.



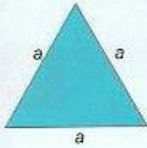
Patrones y ecuaciones

**CONSTRUYO MIS  
CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES**

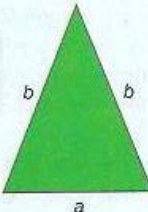
El perímetro de un triángulo se puede calcular con la suma de las longitudes de cada uno de sus lados.

 Reúnete con un compañero y resuelvan lo siguiente:

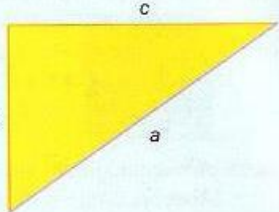
1. Calculen el perímetro de cada uno de los triángulos de la figura.



$a$   $a$   
 $a$



$b$   $b$   
 $a$



$c$   
 $b$   $a$

2. Expliquen la equivalencia de las siguientes expresiones algebraicas. Verifiquen que en los tres casos se obtiene el mismo resultado cuando se le asigna un valor a la literal  $a$ .

$P = a + a + a$

$P = 3 \times a$

$P = 3a$

3. Usen las expresiones algebraicas anteriores para calcular el perímetro de un triángulo equilátero, en el que la longitud de cada uno de sus lados es de 3.5 metros.



 Comparen sus respuestas con las de otra pareja.

Figura 9. Formulas geométricas al considerar a las literales como números generales.


Sentido numérico y pensamiento algebraico

**Bloque UNO**

¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un cuadrado?  
 Calcula el área de los dos cuadrados de la derecha.  
 ¿Cuánto es el área si  $l = 16$  cm?  
 Si  $l$  es la longitud de cada uno de los lados de un cuadrado, ¿cómo se puede calcular el área?  
 La expresión  $l^2$  se usa para indicar que debe multiplicarse una cantidad  $l$  por ella misma, por ejemplo,  $l^2 = l \times l$ .




$l = 2$  cm




$l = 3$  cm

🗨️ Escribe en tu cuaderno la fórmula para calcular el área de los siguientes cuadrados, primero con un producto y después usando el exponente  $l^2$ .




s

A =  
A =




m

A =  
A =



a

A =  
A =




t

A =  
A =

👥 Compara tus respuestas con las de algún compañero.


🗨️ Realiza las siguientes actividades.

Traza en tu cuaderno, dos rombos, dos rectángulos y dos romboides. Describe un procedimiento que se pueda utilizar para calcular el perímetro de cada una de las figuras trazadas. Usa las siguientes figuras y explica el significado de cada una de las fórmulas.



a


$P = a + a + a + a$



b

a

$P = a + b + a + b$



m

n


$P = m + n + m + n$

¿Cómo se pueden simplificar las fórmulas anteriores? Simplificalas.

👥 Compara tus respuestas con las de un compañero.


Figura 10. Fórmulas geométricas al considerar a las literales como números generales.

Por su parte en el libro para segundo año de secundaria “Matemáticas 2” de Escareño y López (2013) en el bloque cuatro, para el tema de sucesiones se proponen ejercicios en los cuales los estudiantes, a partir de reglas generales dadas, llegan a construir patrones numéricos y cuestiones acerca de las diferencias como se puede ver en la siguiente figura.

 Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo las características que tienen los términos de una sucesión de la forma  $an + b$ , tales como cuál es el primer término y cómo se obtienen los que le siguen, tomando como base los valores de  $a$  y  $b$ . Anoten en su cuaderno las conclusiones que obtengan.

**Actividades adicionales**

- La regla algebraica de una sucesión es  $4n + 2$ .
  - Encuentra los primeros 10 términos de la sucesión.
  - ¿Cuál es la diferencia entre un término cualquiera de esta sucesión y su inmediato anterior? ¿Por qué?
- La regla algebraica de otra sucesión es  $3n + 7$ .
  - Encuentra los primeros 10 términos de la sucesión.
  - ¿Cuál es la diferencia entre un término cualquiera de esta sucesión y su inmediato anterior? ¿Por qué?
- Las siguientes preguntas se refieren a las sucesiones cuyas reglas son  $4n + 2$  y  $3n + 7$ .
  - En alguna posición, ¿los términos de las sucesiones  $4n + 2$  y  $3n + 7$  son iguales? ¿En cuál? ¿Cómo podrían averiguarlo sin recurrir al uso de tablas? Reúnete con un compañero para realizar esta tarea.
  - ¿Alguna de las dos sucesiones está formada por números pares únicamente? ¿Cuál? ¿En qué se basarían para afirmar que esa sucesión no contiene números impares?
  - ¿Cuál de las dos sucesiones crece más rápidamente? ¿En qué se basan para suponer que sucede esto?
  - Un número que pertenece a ambas sucesiones es el 70. ¿En cuál de las dos sucesiones suponen que se obtiene primero? ¿En qué razones basan su suposición?
  - La diferencia entre un término cualquiera y el inmediato posterior de una sucesión es 10. ¿Cuáles podrían ser sus primeros cinco términos?
  - ¿Cuál es la regla general de esa sucesión?
  - Mencionen otra regla de una sucesión que tenga la misma característica que la anterior.

 Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores y los argumentos que las respaldan.

**¡Vamos por T.I.C.**

Puedes consultar en Internet:

GIS, segundo grado, "Tema 24. Sucesión de números a partir de una regla".

Contesta los reactivos y verifica tus respuestas. Utiliza los recursos que se proponen para generar las sucesiones numéricas a partir de su regla algebraica.

Figura 11. Ejercicios para encontrar términos a partir de una regla general.

Para la siguiente lección el libro plantea que los estudiantes dada una sucesión, lleguen a una “regla algebraica”, “regla de la sucesión”, como se puede ver en la figura siguiente.



a) ¿Qué operación debe hacerse con el número de la posición para obtener el término que le corresponde?  
 b) ¿Qué término ocupa la posición 100 de esta secuencia?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cómo se obtiene? \_\_\_\_\_

Término	5	10	15	20	25...
	↑	↑	↑	↑	↑
Posición	1	2	3	4	5...

c) ¿Cuál es la regla algebraica de esta sucesión?  
 d) Si a cada uno de los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, 25, ... se le suma 1, se obtiene la sucesión 6, 11, 16, 21, 26, ... ¿Cómo se obtiene el término que ocupa la posición 100 de esta sucesión?  
 ¿Cuál es el término?  
 e) ¿Cuál es la regla de la sucesión 6, 11, 16, 21, 26, ...? ¿Cómo la obtuviste? Compara tu respuesta con la de un compañero. Si no coinciden, expliquen sus argumentos para llegar a una misma respuesta.  
 f) ¿En qué se parecen las reglas algebraicas que generan las sucesiones anteriores?  
 g) ¿Alguna de sus partes es igual en las dos? ¿Por qué?

Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo el procedimiento que pueden seguir para determinar la regla algebraica de una sucesión de la forma  $an + b$ ; prueben ese procedimiento con algunos ejemplos. Anoten en su cuaderno las conclusiones que obtengan.

**Actividades adicionales**

1. Considera la siguiente sucesión para contestar las cuestiones que se plantean.

2, 4, 6, 8, 10, ...

- a) ¿Cuál es la diferencia entre un término cualquiera y el inmediato anterior de esta sucesión?
- b) ¿Cuál es la regla de esta sucesión?
- c) ¿Qué tienen en común las sucesiones 2, 4, 6, 8, 10, ... y 3, 5, 7, 9, 11, ...?
- d) ¿Cuál es la regla de la sucesión 3, 5, 7, 9, 11, ...?
- e) ¿Qué tienen en común las sucesiones 2, 4, 6, 8, 10, ... y 102, 104, 106, 108, 110, ...?
- f) ¿Cuál es la regla de la sucesión 102, 104, 106, 108, 110, ...?

2. Considera la siguiente sucesión para contestar las cuestiones que se plantean.

4, 8, 12, 16, 20, ...

- a) ¿Cuál es la diferencia entre un término cualquiera y el inmediato anterior o posterior de esta sucesión?
- b) ¿Cuál es la regla de la sucesión?
- c) ¿Qué tienen en común las sucesiones 4, 8, 12, 16, 20, ... y 3, 7, 11, 15, 19, ...?
- d) ¿Cuál es la regla de la sucesión 3, 7, 11, 15, 19, ...?

**Figura 12. Ejercicios de sucesiones para encontrar una expresión algebraica.**

Para la última lección el libro propone ejercicios con sucesiones en los que ya intervienen números enteros negativos, como se puede ver en la figura siguiente. Recordemos que en las lecciones anteriores solo se planteaban ejercicios de sucesiones numéricas con enteros positivos. Otro punto interesante a resaltar es que en todas estas lecciones no hubo un solo ejemplo con sucesiones figurales.


2,	4,	6,	8,	10,	12,...
-2,	-4,	-6,	-8,	-10,	-12,...
-1,	-3,	-5,	-7,	-9,	-11,...


c) En las siguientes sucesiones, ¿qué operación debe efectuarse con cada término de la primera para obtener el término correspondiente de la segunda?

d) Si la regla algebraica que rige a la primera sucesión es  $2n$ , ¿cuál sería la regla de la segunda sucesión?

e) ¿Cómo se obtiene cada término de la tercera sucesión a partir de la segunda?

f) ¿Cuál es la regla algebraica que genera la sucesión  $-1, -3, -5, -7, -9, -11, \dots$ ?

g)  Comparen sus respuestas con las de otro equipo exponiendo las razones que las respaldan. En caso necesario, corrijan para obtener una misma respuesta.

 Coordinados por su profesor, expliquen el procedimiento que pueden seguir para obtener sucesiones de números enteros negativos, y verifiquenlo aplicándolo en algunos ejemplos. Anoten en su cuaderno sus conclusiones.

**Actividades adicionales**

1. De las siguientes reglas algebraicas, ¿en cuál o en cuáles se generan sucesiones que contengan únicamente enteros negativos? Márcalas con una “✓” y escribe los primeros 10 términos.

$-3n + 1$  \_\_\_\_\_

$-2n + 5$  \_\_\_\_\_


$-5n + 4$  \_\_\_\_\_


2. ¿Qué valores debe tener  $b$  en la regla  $-6n + b$ , para que la sucesión que se genera contenga algunos términos positivos?

3. Escribe la regla algebraica para hallar cualquier término de cada una de las siguientes sucesiones.

	Regla
a) $-7, -10, -13, -16, -19, \dots$	
b) $-1, -6, -11, -16, -21, \dots$	
c) $2, -2, -6, -10, -14, \dots$	

¿Qué procedimiento aplicaste para obtener las reglas que las generan?

 Compara tus respuestas con las de un compañero. En caso de no coincidir, expongan las razones que las respaldan para llegar a una misma respuesta.

 Coordinados por su profesor, expliquen los procedimientos que aplicaron para obtener las reglas algebraicas o los términos de las sucesiones descritas en las actividades anteriores. Seleccionen los más eficaces y anótenlos en su cuaderno.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

**Usos de la literal**  
Forma tu equipo de trabajo con tres integrantes. Reúnan los materiales necesarios para elaborar el cartel. Con ayuda de su profesor, analicen y comenten las actividades que han desarrollado en el estudio de sucesiones. Describan qué representa una literal en cada actividad y den ejemplos para mostrarlos en el cartel.

Figura 13. Sucesiones en las que intervienen enteros negativos.

Por otra parte, algunos de los libros de apoyo para tercer año de secundaria, como el de “Fractal 3” (García y Mendoza, 2008) específicamente en el bloque cuatro aparece como tema “Método de diferencias finitas para sucesiones cuadráticas” en el que los conocimientos y habilidades esperadas son que los estudiantes determinen una expresión general cuadrática para definir el  $n$ ésimo término en sucesiones numéricas y figurales utilizando el método de diferencias. Las lecciones sugeridas son cuatro: en la primera se plantean varios ejercicios de sucesiones figurales con palillos, los cuales son del tipo lineal y solo uno cuadrático, en la que se tiene que llegar al término  $n$ ésimo, como se puede ver en la siguiente figura.



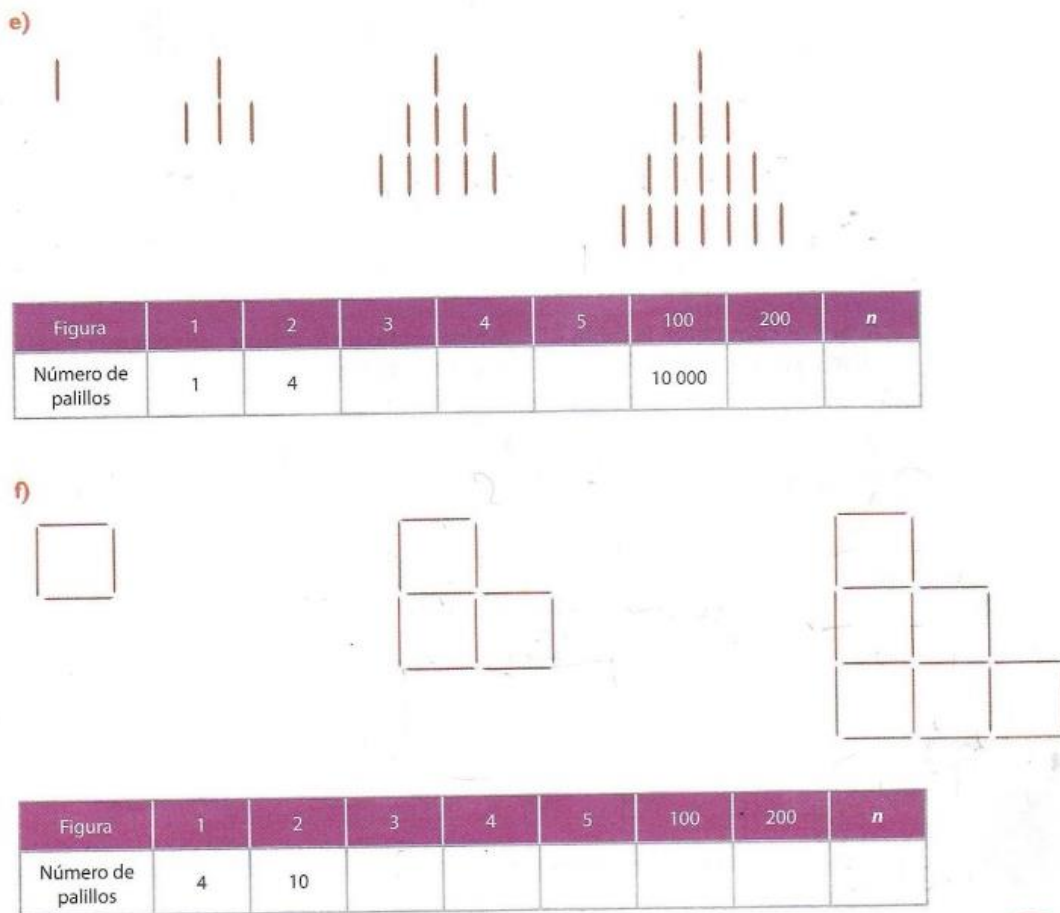


Figura 14. Figuras con palillos.

Con respecto a la lección dos, se les explica a los estudiantes cómo obtener las primeras y segundas diferencias de una sucesión. También se les menciona que las sucesiones cuyas diferencias son iguales, son de primer grado y aquellas cuyas segundas diferencias son iguales, son de segundo grado o cuadráticas. Una vez que éstos logran identificar las primeras y segundas diferencias, en la lección 3 se les explica el método para encontrar la expresión de una sucesión; es decir, el método de diferencias, que consiste en encontrar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  los cuales se sustituyen en  $an^2 + bn + c$ , como se puede ver en las siguientes figuras.



Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales pero las segundas sí lo son, entonces la expresión que le corresponde a la sucesión es de segundo grado y, por lo tanto, tiene la forma:

$$an^2 + bn + c$$

Asesorados por su maestro realicen todas las actividades de la lección.

**1** Completen la siguiente tabla para calcular los términos de una sucesión general de segundo grado, observen los ejemplos.

$n$	1	2	3	4	5
$an^2 + bn + c$	$a(1)^2 + b(1) + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$		
	$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$		

Observen que esta sucesión no es numérica sino que sus términos son expresiones algebraicas. La ocuparán para la actividad que sigue.

**2** Van a encontrar la expresión general de la sucesión:

4, 6, 12, 22, 36, 54, 76, 102...

a) La expresión para esta sucesión es de segundo grado, ¿por qué?

b) Entonces, la expresión tiene la forma  $an^2 + bn + c$  y necesitamos conocer los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Del lado izquierdo está la sucesión y del lado derecho está una sucesión general de segundo grado. Calculen las primeras y segundas diferencias de cada una.

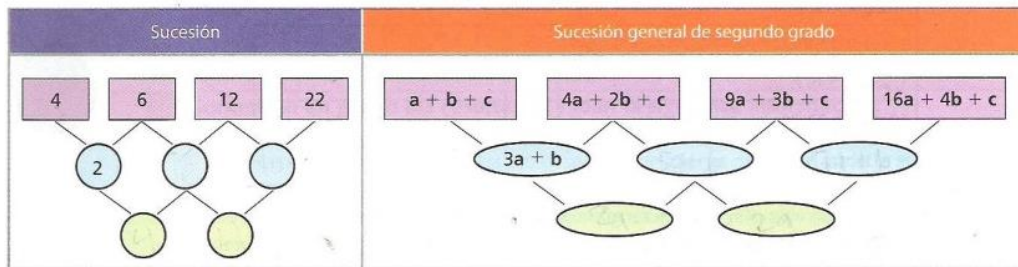


Figura 15. Términos de una sucesión general.

- c) Analicen cuidadosamente las diferencias en ambas sucesiones
- Observen lo que escribieron en los óvalos verdes; de ahí se deduce que  $2a = 4$ . ¿Cuánto vale  $a$ ? \_\_\_\_\_
  - Observen lo que está escrito en el primer óvalo azul de ambas sucesiones; de ahí se deduce que  $3a + b = 2$ . ¿Cuánto vale  $b$ ? \_\_\_\_\_
  - Finalmente, el primer término de la sucesión numérica es 4 y el primer término de la sucesión general es  $a + b + c$ , entonces:  $a + b + c = 4$ . ¿Cuánto vale  $c$ ? \_\_\_\_\_
- d) Para tener la expresión que corresponde a la sucesión numérica, sustituyan los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $an^2 + bn + c$ . La expresión queda: \_\_\_\_\_
- e) Comprueben que la expresión está bien sustituyendo  $n$  por 1, 2, 3, 4 ...; obtendrán los valores de la sucesión: 4, 6, 12, 22, 36, etc.

Este método para encontrar la expresión de una sucesión se llama **método de diferencias**. En el caso de que sea una expresión de segundo grado, consiste en:

1. Calcular las primeras y las segundas diferencias de la sucesión.
2. Las segundas diferencias siempre son iguales a  $2a$ , de ahí se encuentra el valor de  $a$ .
3. La primera diferencia entre los dos primeros términos de la sucesión siempre es igual a  $3a + b$ , de ahí se obtiene el valor de  $b$ .
4. El primer término de la serie siempre es igual a  $a + b + c$ , de ahí se obtiene el valor de  $c$ .

Una vez que se tienen los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  se sustituyen en  $an^2 + bn + c$ .

Figura 16. Método de diferencias.

Para la última lección propuesta se plantean una serie de ejercicios de sucesiones numéricas como de figuras, en los que se les pide a los estudiantes lleguen a la expresión correspondiente para calcular cualquier lugar de la sucesión propuesta, como se puede ver en la siguiente figura.

**1 Encuentra la expresión algebraica que corresponde a cada sucesión.**

Sucesión	Expresión
<p>Expresión para calcular el número de cuadrados de cada figura</p>	
<p>Expresión para calcular el número de palillos de cada figura</p>	
<p>Expresión para calcular el número que corresponde a cualquier lugar de la sucesión</p> <p style="text-align: center;">12, 14, 16, 18, 20...</p>	
<p>Expresión para calcular el número que corresponde a cualquier lugar de la sucesión</p> <p style="text-align: center;">3, 8, 18, 33, 53...</p>	
<p>Expresión para calcular el número de círculos de cada figura</p>	

Figura 17. Ejercicios propuestos para encontrar una expresión algebraica de las sucesiones.

Una vez que se realizó el análisis de estos libros se puede decir que los ejercicios propuestos con sucesiones figurales son pocos, ya que para primer año de secundaria sólo fueron cuatro ejercicios, para segundo año hubo una ausencia de éstos y para el último año en el que se comienza con sucesiones del tipo cuadrático sólo fueron 5 ejercicios con sucesiones figurales del tipo cuadrático lo cual podría ser un obstáculo para que los estudiantes logren comprender las sucesiones figurales del tipo cuadrático.

Por otro parte al revisar las notas de clase de una estudiante de tercer grado de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” ubicada en la cabecera municipal de Gral. Pánfilo Natera, Zacatecas, se observa que la profesora organizó el estudio de las sucesiones numéricas

retomando del libro únicamente los ejemplos en los que la sucesión está dada de manera numérica, omitiendo así el uso de sucesiones figurales.

Como primer punto el profesor plantea ejercicios para obtener primeras y segundas diferencias, como se puede comprobar en la figura siguiente.

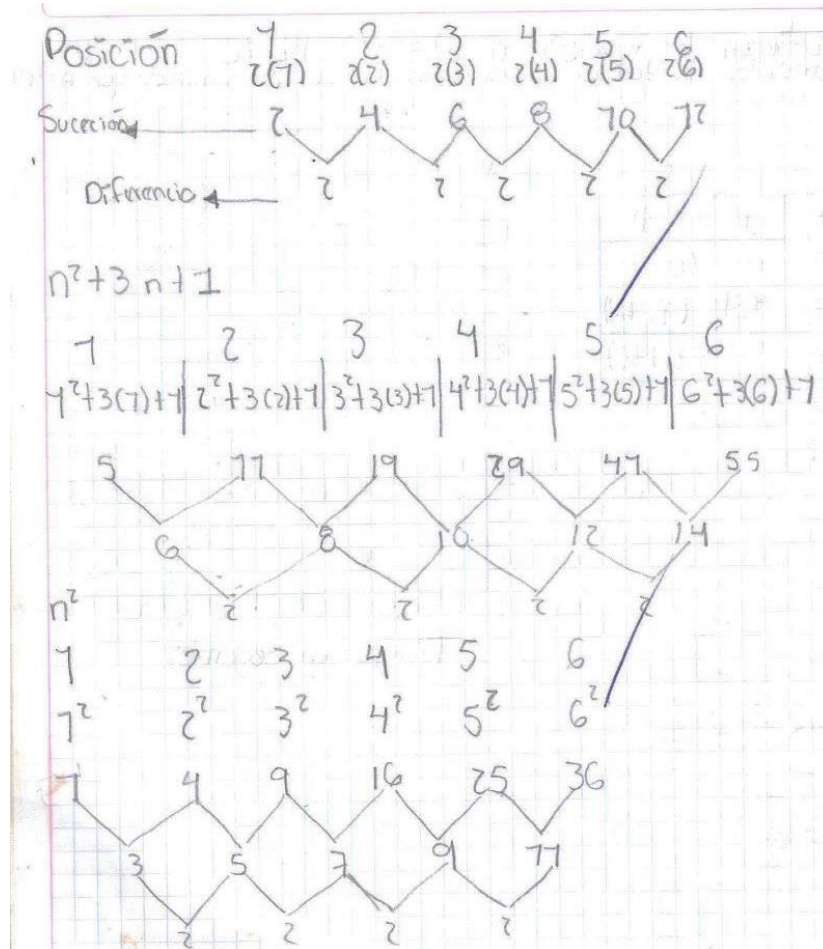


Figura 18. Ejercicios propuestos para obtener primeras y segundas diferencias.

Y por último se proponen ejercicios con sucesiones numéricas para obtener el término enésimo de sucesiones del tipo lineal y cuadrático, como se puede ver en la siguiente figura.



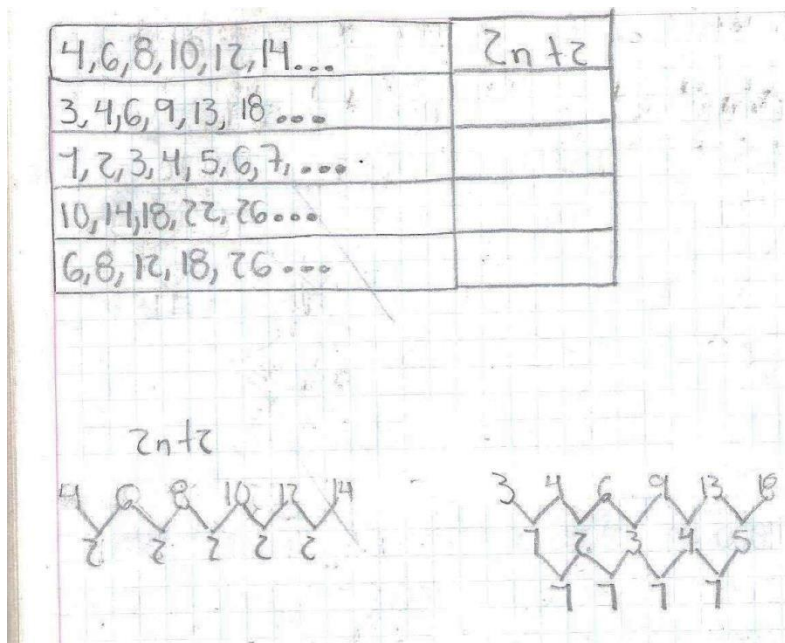


Figura 19. Ejercicios propuestos para obtener el término enésimo.

En este último caso se puede ver cómo la estudiante sólo resuelve el primer ejercicio, dejando varias interrogantes ¿Realmente la estudiante identificó el patrón o fue un ejemplo del profesor?, ¿Por qué no logró resolver los demás ejercicios, especialmente el de la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... que era relativamente “fácil”?

Analizando otra nota de clase con una estudiante de tercer año de la Escuela Secundaria Técnica N.º 1 “José Reyes Martínez” del estado de Aguascalientes, México, podemos mencionar que en este caso se propuso un ejemplo de una sucesión figural como se puede ver en la figura siguiente:

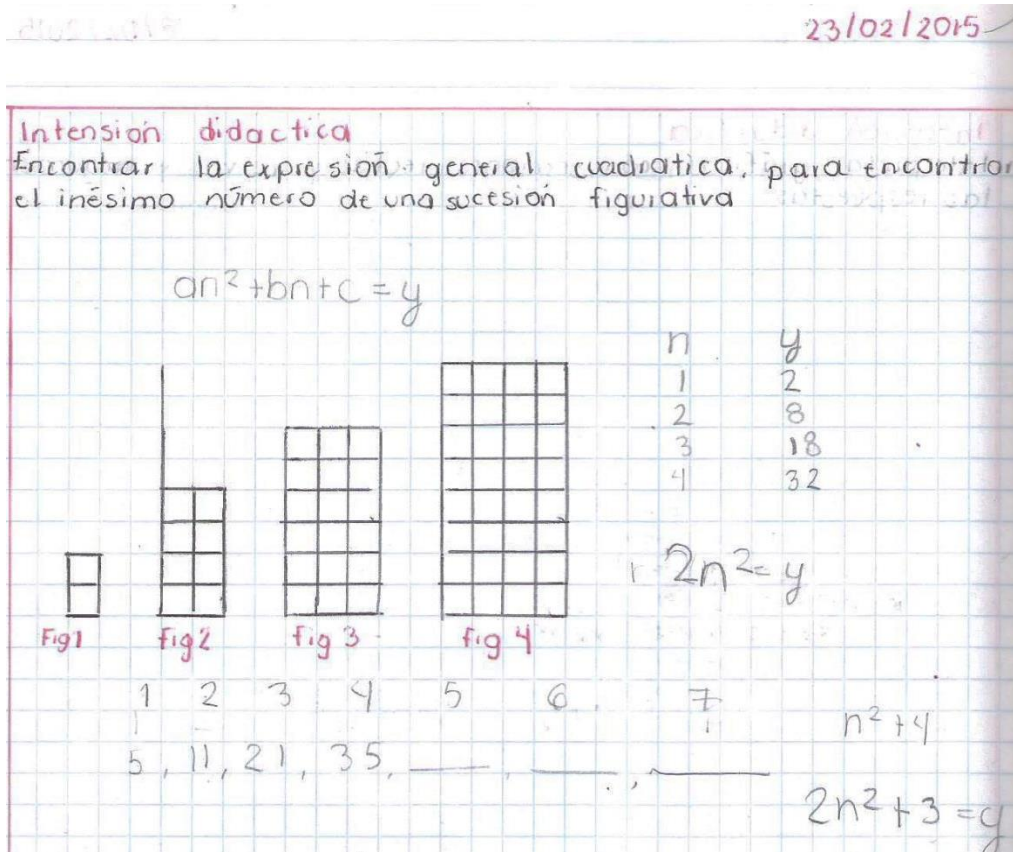


Figura 20. Ejemplo de sucesión figurativa.

Se logra ver cómo la estudiante escribe la expresión algebraica  $2n^2 = y$ , que posiblemente describa la sucesión figurativa, pero no es la solución correcta. Posteriormente el profesor se centra en plantear actividades con sucesiones numéricas como se puede ver en las figuras siguientes:

25/02/2015

3, 14, 31, 54, 83

1	3			
2	14			
3	31			
4	54			
5	83			

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a(1)^2 + b(1) + c =$	$a(2)^2 +$	$a(3)^2 + b(3) + c =$	$a(4)^2 + b(4) + c =$	$a(5)^2 + b(5) + c =$
$a + b + c =$	$b(2) + c =$	$9a + 3b + c =$	$16a + 4b + c =$	$25 + 5b + c =$
$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b =$	$(9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) = 5a + b =$	$(16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) = 7a + b =$	$(25 + 5b + c) - (16a + 4b + c) = 9a + b =$	
	$(5a + b) - (3a + b) = 2a =$	$(7a + b) - (5a + b) = 2a =$	$(9a + b) - (7a + b) = 2a =$	
	$2a$	$2a$	$2a$	

$a = 1$   
 $b = 3$   
 $c = 0$

$2a = 2$	$2a = 2$	$2a = 2$
$3a + b = 6$	$5a + b = 8$	$7a + b = 10$
$a + b + c = 3$	$9a + 2b + c = 9$	$16a + 3b + c = 17$

Figura 21. Ejercicios con sucesiones numéricas.

02/03/2015

2, 7, 10, 29, 46

$\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$   
 5 9 13 17  
 $\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$   
 4 4 4

Posicio 10 = 191

$2a = 4$     $2a = 4/2 = 2$     $a = 2$   
 $3a + b = 5$     $b = 1$   
 $a + b + c = 2$     $c = 1$     $(2n^2 - n + 1)$

---

5, 11, 21, 35, 53

$\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$   
 6 10 14 18  
 $\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$   
 4 4 4

$2a = 4$     $2a = 4/2 = 2$     $a = 2$   
 $3a + b = 6$     $b = 0$   
 $a + b + c = 5$     $c = 3$     $(2n^2 + 3)$

Figura 22. Ejercicios con sucesiones numéricas.



En general vemos cómo las notas de clase de los estudiantes de tercer año de secundaria de dos escuelas secundarias muestran que algunos profesores no plantean ejercicios suficientes con sucesiones figurales y en particular del tipo cuadrático, solo se limita a que los estudiantes resuelvan algunas sucesiones numéricas.

En otras dos notas analizadas, de clases<sup>3</sup> de una secundaria del municipio de Rio Grande, Zacatecas, y otra del Estado de Durango no se logró observar que el tema fuera contemplado, lo cual nos deja varias interrogantes como son: ¿el profesor no tuvo tiempo para abordarlo?, ¿el estudiante no tomó notas?, ¿el estudiante posiblemente no estuvo presente en esas sesiones?, ¿el profesor le dio importancia a otro tema?

### 3.1.3 Análisis cognitivo de las sucesiones numéricas

Para realizar este análisis se aplicó una actividad a 22 alumnos del Tercer grado, grupo B, de la Escuela Secundaria “J. Jesús Larios Guzmán”, cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años. Se presentan los resultados obtenidos.

1. Analiza la siguiente sucesión figural y dibuja los términos que faltan. Explica los procedimientos empleados.



Figura 1



Figura 2



figura 3

Figura 4

Figura 5

Figura 23. Reactivo 1 del análisis cognitivo

	Figura 4	Figura 5
Aciertos	13	11

Tabla 2. Aciertos Reactivo 1

Observaciones. Solo un estudiante no trató de hacer las secuencias. Seis estudiantes hicieron la secuencia en forma de pirámide.

- 1.1 ¿Cuántos círculos tendrá la figura 10 en el ejercicio anterior?

**Aciertos: 19**

<sup>3</sup>Con la intención de tener notas de clase de diversas escuelas secundarias, se pidió la colaboración de algunos estudiantes de la Maestría en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas generación 2014-2016 de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Una vez analizadas las respuestas de las dos preguntas anteriores, podemos ver que 19 de 22 estudiantes contestaron correctamente la pregunta anterior y en la primera pregunta, que era relativamente más sencilla solo la mitad pudo realizarlo de forma correcta, lo cual nos deja la interrogante de saber cómo tuvieron tanto éxito.

1.2 ¿Cuál sería la expresión algebraica para saber el número de círculos de cualquier figura?

**Aciertos: 0**

Respuestas	Número de alumnos
No contestaron nada	7
$a \times b - c = ?$	1
Una relación entre una figura y "x"	1
$x + 2$	7
$a + b = 2$	3
$a = b + 2$	1
2	1
Sumar de 2 rueditas	1

Tabla 3. Respuestas Reactivo 1.1

Podemos observar cómo la mayoría de los estudiantes tiene cierta intuición sobre la expresión algebraica, si bien ninguno logra responder de manera correcta; sí hacen referencia a que hay una diferencia de dos en cada figura.

2. Analiza la siguiente sucesión figural y dibuja los términos que faltan. Explica y justifica los procedimientos empleados.

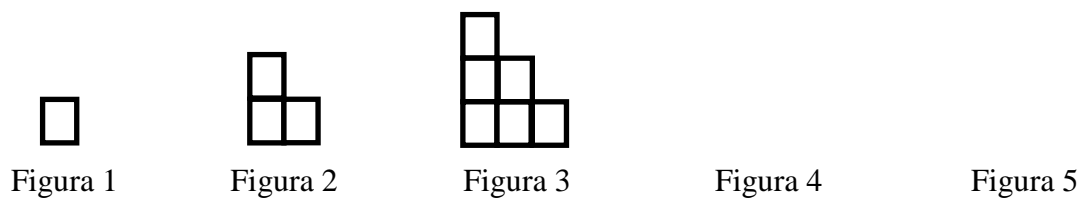


	Figura 4	Figura 5
Aciertos	11	11

Tabla 4. Aciertos Reactivo 2

**Observaciones.** Solo dos estudiantes no hicieron las figuras.

2.1 ¿Cuántos cuadrillos tendrá la figura 20 en el ejercicio anterior?

Respuestas	Número de alumnos
210 cuadritos	4 (aciertos)
No contestaron	5
54 cuadritos	7
60 cuadritos	4
57 cuadritos	1
173 cuadritos	1

Tabla 5. Respuestas Reactivo 2.1

**Observaciones.** La mayoría de los estudiantes no logra dar una respuesta correcta, ya que en este caso es una secuencia figural del tipo cuadrático, por lo que identificar el patrón de comportamiento, no es una tarea fácil.

2.2 ¿Cuál sería la expresión algebraica para saber el número de cuadritos de cualquier figura?

**Aciertos: 0**

Respuestas	Número de alumnos
No contestaron	11
$x + (x + 1)$ $x + 2$ $a + b + 2$ $x^2$ $A + b = 3$ $n + 3$	11

Tabla 6. Respuestas Reactivo 2.2

**Observaciones.** Cabe resaltar que la mitad de los estudiantes no contestaron nada y la otra parte intento responder pero lo hizo de manera incorrecta; algunos relacionaron su respuesta con el número 2 y 3, esta relación podría ser posiblemente porque en la figura 2 se aumentan dos cuadritos más que en la figura 1 y en la figura 3 son tres cuadritos más que en la figura 2.

3. Completa las siguientes sucesiones numéricas y explica tus procedimientos empleados:

	Sucesión	Aciertos	Ejemplo de justificaciones
Lineales	3,9,27,81,____,____,____	13	$x \times 3$ Sucesión de 3 Se multiplica el número que da como resultado 3 Multipliqué 3
	3,6,9,12,15,____,____,____	21	De 3 en 3, sumé 3
	1,2,3,4,5,____,____,____	22	$x \times 1$

			sucesión de 1 números consecutivos numérico sumé 1
	2,4,6,8,10,____,____,____	21	$x + 2$ sucesión de 2 de 2 en 2 sumé 2
	5,10,15,20,____,____,____	21	$x + 5$ sucesión de 5 de 5 en 5 sumé 5
Cuadráticas	1,4,9,16,25,____,____,____	5	$x + (x + 2)$ voy sumando cada cantidad de la suma
	1,5,12,22,____,____,____	6	$x + (x + 5)$

Tabla 7. Respuestas al ejercicio completa las sucesiones numéricas

Cabe resaltar que solo tres estudiantes lograron realizar de forma correcta todos estos ejercicios. Como se pudo observar en las sucesiones numéricas y figurales del tipo lineal sí logran identificar cómo es el comportamiento de las sucesiones, y en las sucesiones del tipo cuadrático, no.

En general este análisis preliminar nos permite señalar lo siguiente:

- Desde siglos atrás se trabajó con diferentes representaciones del número, del cual se puede mencionar que los números figurados jugaron un papel primordial para el análisis de diferentes sucesiones y después para las series numéricas.
- Cuando se aborda el tema de sucesiones en tercer año de secundaria, algunos maestros y libros de texto no proponen ejercicios o problemas en los que se trabaje con sucesiones figurales del tipo cuadrático o en su defecto son pocos los ejercicios propuestos.
- Algunos estudiantes en tercer año de secundaria no cuentan con herramientas suficientes para llegar a la generalización de una sucesión del tipo lineal y cuadrático.

### 3.2 Concepción de la situación didáctica

En este apartado se contemplará la idea de la situación didáctica, es decir, el propósito por el cual se han diseñado las actividades que fueron planteadas con base en los análisis epistemológico, didáctico y cognitivo.

#### 3.2.1 Propósito de la situación diseñada

Para esta investigación se consideraron 2 actividades. Se contempla trabajar con sucesiones figurales del tipo lineal y cuadrático. Estas actividades fueron aplicadas a estudiantes que están cursando el tercer año de educación secundaria. En general se pretende que los estudiantes logren reconocer patrones y lleguen a su posible generalización.

### 3.2.2 Situación fundamental

La secuencia didáctica fue tomada del fichero de actividades didácticas (Espinoza, García y García, 1999), que lleva por nombre Patrones y Ecuaciones, la cual fue rediseñada para su aplicación. Se pretendió dotar de sentido al problema a través de su contextualización; es decir, que el estudiante percibiera un para qué resolverlo, ya que la secuencia propuesta en el fichero de actividades plantea una serie de ejercicios en los que se propone a los estudiantes trabajar con cubos en el contexto matemático, como se puede observar en la siguiente figura:

↑ Observen la sucesión numerada de dibujos que se muestra a continuación.

a) Construyan (con los cubos o mediante dibujos) las figuras 4 y 5 que siguen en la sucesión.

b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión?

d) Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión?

The image shows three figures made of green cubes. 'Figura 1' consists of a single cube. 'Figura 2' consists of four cubes arranged in a 2x2 square. 'Figura 3' consists of nine cubes arranged in a 3x3 square. The labels 'Figura 1', 'Figura 2', and 'Figura 3' are placed below their respective figures.

Figura 24. Actividad I de la secuencia didáctica propuesta en el fichero.

Nosotros proponemos trabajar con la misma situación fundamental, pero en un contexto, explicando que la figura propuesta es un podio (Plataforma sobre la que se sube el triunfador en ciertas pruebas deportivas) para premiar a determinados “minions” (personajes de la película “*Mi villano favorito*”). La intención es que los estudiantes puedan sentirse atraídos para resolver el problema, así, se espera que esto estimule para lograr la devolución. Cabe señalar que con este tipo de contextualización se pretende originar que los estudiantes tengan disposición de trabajar, dado que nuestro propósito va más allá de solo provocar una motivación.

### 3.2.3 Las variables macrodidácticas

Las variables macrodidácticas, que en general hacen referencia a como está organizada la situación didáctica, son las siguientes:

- La situación didáctica estará compuesta por dos actividades.

**Actividad I.** Se le entregará a cada equipo (conformado por tres alumnos) cubos, “minions”, hojas en blanco y una hoja con la actividad a realizar para cada alumno. Se les va a pedir a los alumnos que den respuesta a las diferentes preguntas planteadas que están orientadas a trabajar con una sucesión figural del tipo lineal, comenzando con una generalización cercana (primeros términos) hasta llegar a la generalización lejana y la expresión algebraica. Finalmente se pasará al pizarrón a dos representantes de dos equipos para que expongan sus resultados.

**Actividad II.** Se le entregará a cada equipo: 25 cubos, 3 hojas en blanco y una hoja con la actividad a realizar para cada alumno. Al igual que en la actividad I se les pedirá a los alumnos que den respuesta a las diferentes preguntas planteadas en la actividad II, que en

este caso están diseñadas para que los estudiantes trabajen con una sucesión figural del tipo cuadrático, comenzando con una generalización cercana (primeros términos) hasta llegar a la generalización lejana y a la expresión algebraica. Por último pasan al pizarrón dos representantes de dos equipos para que expongan sus resultados.

- Libertad para que los alumnos organicen los equipos: Con esto se pretende que los equipos logren mejores resultados al resolver las actividades.
- Número de estudiantes por equipo: Cada equipo estará conformado por tres estudiantes, cantidad que podría ayudar a que todos los integrantes expresen sus opiniones referentes a cómo resolver la actividad, las estrategias que podrían usar, entre otras, tratando de evitar equipos numerosos, en los que existan mayores posibilidades de que algunos estudiantes se muestren pasivos a la hora de resolver la situación.
- Tiempo que se dedica a cada actividad: Para cada una de las actividades I y II se dedicará una sesión de 50 minutos.
- Material utilizado: Se proporcionará a cada equipo cubos y “minions” para que desarrollen las primeras cuestiones de las actividades, se pretende con esto “motivarlos” a realizar las actividades.
- Organización de las situaciones didácticas:
  - Acción: la situación de acción se presentará cuando se les entregue el material y comiencen a leer las indicaciones para resolver la actividad y al comenzar a dar respuesta a la pregunta del inciso *a*), en la que los equipos solamente tienen que contar cuantos “minions” y cubos hay en los podios 1, 2 y 3 de las actividades I y II respectivamente.
  - Formulación: esta situación se va a presentar tanto en la actividad I como en la II, cuando los equipos comiencen a dar respuesta a los incisos *b*), *c*), *d*) y *f*) analizando cuáles serán las mejores estrategias de solución.
  - Validación: ésta se va a presentar en las dos actividades propuestas en dos momentos: cuando los integrantes de cada equipo expresen, discutan y opinen sobre las estrategias de solución y cuando los representantes de dos equipos expongan sus estrategias y resultados a todo el grupo.
  - Institucionalización: toda vez que los estudiantes pasaron por las situaciones de acción, formulación y validación en cada una de las actividades el profesor retomará dichas situaciones para exponer a los estudiantes lo que caracteriza a una sucesión del tipo lineal y cuadrática.

Así la organización de la actividad I queda como sigue:

	<b>Propósito</b>	<b>Tiempo estimado</b>
Situación de Acción	Interacción con el medio	5 minutos
Situación de Formulación	Identificar patrones y su posible generalización, en una sucesión del tipo lineal	10 minutos
Situación de Validación	Ratificar posibles respuestas	15 minutos
Situación de Institucionalización	Definir sucesión y característica de una sucesión del tipo lineal	10 minutos

Tabla 8. Organización de la actividad I.

Y la de la actividad II, de esta manera:

	<b>Propósito</b>	<b>Tiempo estimado</b>
Situación de Acción	Interacción con el medio	5 minutos
Situación de Formulación	Identificar patrones y su posible generalización	10 minutos
Situación de Validación	Ratificar sus respuestas	10 minutos
Situación de Institucionalización	Dar una de las características de una sucesión del tipo cuadrático y el método de las diferencias.	15 minutos

Tabla 9. Organización de la actividad II.

### 3.3 Análisis a priori

El análisis a priori, como mencionamos anteriormente, consiste en establecer hipótesis sobre lo que se espera de las respuestas y comportamientos de los alumnos a lo largo de la situación didáctica, además, permitirá realizar el análisis que admite anticiparnos a las bondades de la situación para la experimentación, y después hacer la confrontación con el análisis a posteriori.

Un requisito para comprender el uso de la variable como número general y poder trabajar con él consiste en desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos (Ursini, Escareño y Montes, 2005, p. 31). De igual forma se demanda que el estudiante sea capaz de usar símbolos para representar una situación general, una regla o un procedimiento.

Para esta investigación se consideraron dos actividades, las cuales serán aplicadas en dos sesiones de 50 minutos cada una. Se pretende que los estudiantes logren reconocer el patrón que rige a una sucesión figural del tipo lineal o cuadrático y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a su posible generalización.

**Propósito de la Actividad I:** Se pretende que los estudiantes logren identificar el patrón que rige a una sucesión figural del tipo lineal, que analicen las diferencias que hay de un término a otro y puedan llegar a su posible generalización. Con esta actividad se intenta lograr que los estudiantes



recuerden qué es una sucesión del tipo lineal y darles a conocer una de sus características, con ello se espera que tengan mayores argumentos para poder resolver la actividad II.

**Propósito de la Actividad II:** Se desea que los estudiantes logren identificar el patrón que rige a una sucesión figural del tipo cuadrático y su posible generalización. Se intenta que analicen las primeras y segundas diferencias de una sucesión del tipo cuadrático y por último, el método de las diferencias que les permitirá llegar a la generalización de una sucesión del tipo cuadrático.

## Actividad I

**Propósito de la Actividad I:** En esta actividad se pretende que los estudiantes observen la sucesión figural del tipo lineal y logren identificar el patrón que la rige, con ello se espera que tengan mayores posibilidades de llegar a la generalización.

### Material didáctico

**Para cada equipo:** 25 cubos, 9 “minions”, 3 hojas en blanco, 1 hoja de actividades para cada alumno.



Figura 25. Cubos que se entregan a cada equipo.



Figura 26. "Minions" que se entregan a cada equipo.



### Variables didácticas

- Número de “minions” en los Podios.
  - Podio 4, Podio 5. Con los bloques y los “minions” que sean entregados a los equipos podrían deducir el número de “minions” en cada podio.
  - Al solicitar a los equipos la cantidad de “minions” que tiene el podio 100, ellos podrían darse cuenta que necesitarán otro tipo de estrategia y con esto podrían poner en juego otro tipo de razonamiento que cuando dan respuesta al número de “minions” en los primeros podios.
  
- Contexto: Podio y “minions”. Se espera que este contexto ayude para que los estudiantes se sientan atraídos y motivados para resolver los problemas que se les plantean.
  
- **Consigna**

En una competencia de atletismo se desean colocar bloques para premiar a diferentes “minions” (personajes de la película “*Mi Villano Favorito*”). La adaptación del podio de premiación con los bloques y los “minions” a premiar se debe realizar mediante etapas, como se muestra en la siguiente sucesión:

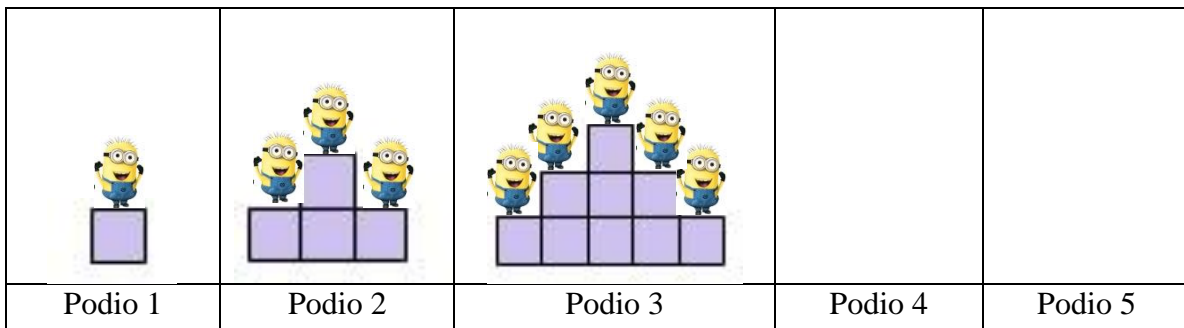


Figura 27. Premiación de los "minions".

a) ¿Cuántos “minions” se pueden premiar en el podio 1, podio 2, podio 3? Realiza tus anotaciones en la siguiente tabla:

Podio	1	2	3	4	5
“Minions”					

Tabla 10. Relación entre podio y "minions".

b) Construir con los bloques y los “minions” el Podio 4 ¿Cuántos “minions” se pueden premiar en este podio? Anota tu resultado en la tabla anterior.

- c) Construir con los bloques y los “minions” el Podio 5 ¿Cuántos “minions” se pueden premiar en este podio? Anota tu resultado en la tabla anterior.
- d) ¿Cuántos “minions” se podrán premiar en el Podio 100 en la sucesión de la premiación?
- e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?
- f) ¿Cuál es la expresión algebraica o la regla que permite conocer el número de “minions” que se puede premiar en cualquier Podio en la sucesión?

**Dinámica de trabajo:** Se organizará al grupo en equipos de tres, se dejará que los estudiantes conformen los equipos por sí solos; el hecho de que se formalicen los equipos por ellos mismos podría facilitar que trabajen de una manera mejor.

**Devolución:** El profesor se presentará a los estudiantes y les preguntará a todo el grupo ¿saben que es un “minions”?, aquí, se espera que todos los alumnos contesten que sí, se sugiere que el profesor haga participar a dos o tres estudiantes con su respuesta a la pregunta, con esto se pretende eliminar alguna situación tensa que pudiera presentarse entre profesor y alumnos.

Enseguida el profesor comentará que tiene que resolver un problema de premiaciones para una carrera de atletismo en la que participan unos “minions” y quiere que le ayuden a resolverlo. Se pretende que con esto los alumnos se sientan atraídos por la situación problema que se les propone y todos acepten el reto de ayudar a resolverlo, con ello se comenzaría a obtener la devolución.

Otra pregunta para los estudiantes podría ser ¿han visto los podios que se colocan para las premiaciones? Por ejemplo en los juegos olímpicos, cuando hacen la premiación de los clavados, en el atletismo; se espera que la mayoría de los estudiantes conteste que sí.

Después el profesor comenzará a entregar a cada equipo 25 cubos y 9 “minions” (como los que se muestran en las siguientes figuras), una hoja con la actividad 1 a realizar y hojas en blanco para que realicen sus anotaciones. A continuación se le pedirá a un estudiante que lea la actividad I.



Figura 28. Cubos para podio.



Figura 29. "Minions".

### 3.3.1 Situación de Acción (Actividad I)

Como mencionamos anteriormente, en una situación de acción se da la interacción de los estudiantes con el medio y en nuestro caso ésta se dará cuando se entregue el material a cada equipo, y los alumnos comiencen a leer el problema e intenten comprender las preguntas que tienen que resolver.

En este caso se espera que los estudiantes no tengan ningún problema para realizar la actividad, sin embargo, el profesor deberá estar analizando a todos los equipos para comprobar que están haciendo las cosas tal y como se les pide; en caso contrario deberá auxiliar al equipo que de alguna manera no haya entendido la actividad I. Se les comentará que se necesita analizar cuál es el comportamiento que tiene el podio para la premiación y cuántos “minions” se puede premiar en cada podio, con lo cual los estudiantes comenzarán a realizar un análisis de cuál es el proceder de los podios y los “minions”; se espera que esto podría ayudar a los equipos a que comprendan lo que tienen que hacer.

La pregunta *a)* tiene como intención que los alumnos analicen la manera de cómo se va construyendo la sucesión en los primeros 3 podios, por lo que no tendrán dificultad para responder la pregunta, ya que solo necesitarán contar el número de “minions” que aparece en cada podio y todos los equipos lograrán dar la respuesta correcta mencionando que los “minions” que se pueden premiar en los podios 1, 2 y 3 son 1, 3 y 5 “minions” respectivamente, realizando sus anotaciones en la tabla. En este caso los estudiantes solo emplearán una escritura numérica realizando únicamente operaciones de suma.

### 3.3.2 Situación de Formulación (Actividad I)

Las preguntas *b)* y *c)* tienen como intención comprobar que los alumnos comprendieron cómo se va generando la sucesión, es decir, los estudiantes necesitarán encontrar la regularidad de la secuencia para los podios 4 y 5; dicha regularidad está relacionada con la distribución espacial de los elementos de la figura y el número de elementos que componen cada figura, coordinando la estructura espacial y la numérica (Radford, 2010). Para responder las preguntas podrían recurrir a diferentes procedimientos, como por ejemplo, dibujando los bloques y los “minions” para poder contar los “minions”, o por medio de una estrategia recursiva añadiendo dos “minions” a cada podio anterior; además, algunos estudiantes podrían reconocer el patrón que rige la sucesión, con las cuestiones realizadas hasta el momento.

De la misma forma que en la pregunta *a)*, los estudiantes continuarán con una escritura numérica realizando sus anotaciones en la tabla que se les proporcionó. La mayoría de los equipos podrán

hacer los Podios 4 y 5 de forma correcta con 16 y 25 bloques respectivamente y sus siete y nueve “minions” correspondientemente, como se muestra en las siguientes figuras:



Figura 30. Podio número 4.



Figura 31. Podio número 5.

Sin embargo se considera que algunos equipos tendrán dificultad para coordinar la estructura espacial y la numérica, teniendo errores al acomodar los bloques, por ejemplo, al colocar uno encima de otro, posiblemente lo coloquen en la intersección de dos como se muestra en la siguiente figura:



Figura 32. Posible error cometido por un equipo.

Igualmente se pretende que los estudiantes analicen si hay algún patrón que rija la sucesión. Para esto se les podría preguntar ¿cómo podrían establecer una relación entre el número de podio y el número de “minions”? También se sugiere preguntar a todos los equipos ¿Ven alguna regularidad en la sucesión?, con la finalidad de que logren identificar el patrón que la rige.

La pregunta *d)* tiene como propósito analizar si los equipos han logrado establecer el patrón que rige a la sucesión, ya que en los incisos *b)* y *c)* los equipos pueden realizarlo por ensayo y error.

Se espera que la mayoría de los equipos traten de dar la respuesta correcta y posiblemente dirán que son 199 “minions”.

Para esta pregunta los equipos podrían lograr una generalización numérica o algebraica, de forma verbal o escrita, mediante diferentes estrategias, por ejemplo identificando una relación funcional entre el número de podio y el de “minions”, realizando las figuras podio a podio (el procedimiento sería laborioso). Las operaciones numéricas o algebraicas que podrían estar implícitas son de suma, resta y multiplicación.

Entre los posibles errores que comentan algunos equipos están: error por exceso de confianza en el cálculo numérico, errores en la representación de la figura, el no reconocer el comportamiento de la sucesión, obteniendo una expresión numérica incorrecta.

En la pregunta *e*) se pretende conocer qué equipos han logrado encontrar el patrón que rige la sucesión. Se espera que seis o siete equipos logren dar respuesta de forma correcta. Entre las posibles respuestas por parte de los estudiantes están: la suma de dos, va aumentando de dos en dos, entre otras.

Los estudiantes podrían tener errores relacionados con: no reconocer el comportamiento del patrón o las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Por último, la pregunta *f*) tiene como finalidad que los estudiantes propongan una expresión algebraica que represente el comportamiento de la sucesión. Se espera que algún equipo logre contestar de forma correcta esta pregunta, ya que la mayoría tendrá dificultad para llegar a la expresión algebraica, tal vez algunos equipos sí lograrán interpretarlo de forma verbal pero tendrán errores a la hora de escribirlo, tal y como lo señala Londoño, Kakes y Álamo (2014) “los estudiantes hablan de una solución correcta en un ejercicio relacionado con sucesiones, pero cuando se les pide que lo expresen de forma escrita, no tienen elementos para hacerlo o lo hacen de una manera incorrecta”.

Al igual que la pregunta anterior aquí los estudiantes también podrían tener errores relacionados a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, errores por ausencia de sentido al no poder establecer la expresión algebraica que genera la sucesión.

Para ayudar a los estudiantes el profesor necesitará orientarlos con algunas preguntas como: ¿Qué se tiene que hacer para determinar el número de “minions” que hay en cualquiera de los podios de la secuencia? Si no nos referimos a un determinado podio de la secuencia, sino a uno cualquiera ¿Cómo podríamos representar cuántos “minions” se podrían premiar para ese podio cualquiera?

### 3.3.3 Situación de Validación (Actividad I)

La situación de validación se va a presentar en dos momentos:

**Primero:** Cuando un estudiante o más intenten convencer a sus compañeros de equipo que sus respuestas son las correctas en los diferentes incisos.

**Segundo:** El profesor pasará al pizarrón a tres estudiantes de tres equipos diferentes a dar respuesta a todos los incisos, tomando en cuenta que sean de dos equipos con el mayor número de aciertos y el tercero que sea el que obtuvo menor número de aciertos. La dinámica de exposición consistirá en que cada estudiante de cada equipo, a partir de cada inciso tendrá que ir explicando sus procedimientos empleados. El profesor necesitará conocer qué equipos lo hicieron de forma correcta y cuáles no.

En caso de que ningún equipo logre encontrar la expresión algebraica se volverán a plantear una serie de preguntas por parte del profesor como son:

¿Qué podemos observar en la sucesión?, ¿Hay algo que tengan en común? ¿Podemos establecer una regla para encontrar el número de “minions” de cualquier podio? ¿Qué pueden deducir de la tabla?

### 3.3.4 Situación de Institucionalización (Actividad I)

Aquí el profesor deberá estar atento a las posibles respuestas de los estudiantes, sobre todo si algún equipo logró encontrar la expresión algebraica; será importante que un integrante de ese equipo participe y explique a todo el grupo cuáles fueron sus estrategias. Como un repaso el profesor necesitará expresar a los estudiantes qué es una sucesión, la característica de una sucesión del tipo lineal, exponiendo a todo el grupo lo siguiente:

El profesor necesitará preguntar a todo el grupo ¿alguien sabe que es una sucesión? Se espera que algunos estudiantes respondan que una sucesión “es una secuencia de números”, algunos otros dirán que es “algo que se va repitiendo”, posiblemente la mayoría de los estudiantes tendrá cierta intuición de lo que es una sucesión, aquí el profesor aprovechará para decirles que una sucesión se define de la siguiente manera:

“Una sucesión es un conjunto de números escritos en un orden específico y se denota de la siguiente manera:

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$$

Donde:

$a_1$  es el primer término.

$a_2$  es el segundo término.

$a_3$  es el tercer término.

$a_n$  es el enésimo término.”

(Ibañez y García, 2004, p. 129)

Ahora el profesor propondrá a los estudiantes que analicen la tabla que llenaron:

Podio	1	2	3	4	5
“Minions”	1	3	5	7	9

Tabla 11. Relación entre podio y "minions" llena.

Enseguida se les preguntará ¿Será ésta una sucesión? ¿Qué notan en la tabla? ¿Podrían establecer alguna relación entre el número de podio y el número de “minions”? ¿Notan alguna regularidad?

Los estudiantes en la primera pregunta la mayoría contestará que sí “porque hay un orden”. Para la segunda pregunta algunos estudiantes podrían contestar que abajo son los números impares y arriba son “números consecutivos”, también podrían decir que abajo van “de dos en dos”. En caso de que ningún estudiante vea esas regularidades el profesor puede preguntar directamente por la regularidad de los podios y la regularidad de los “minions”, una vez establecido el posible patrón, el profesor aprovechará para comentar a los estudiantes que precisamente una de las características de una sucesión del tipo lineal o de primer grado es que las primeras diferencias entre un término y otro es constante y se define de la siguiente manera:

Definición: diremos que una sucesión de números reales denotada por  $\{a_n\}$  es una sucesión del tipo lineal o de primer grado si la diferencia entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante (definido como  $d$ ).

Es decir:  $a_{n+1} - a_n = d$

Ahora el profesor preguntará ¿Y si esto lo aplicamos en el ejemplo anterior, cómo quedaría?

Se espera que los estudiantes estén un poco confundidos por el uso de la notación, se sugiere que el profesor auxilie a los estudiantes para comprender que precisamente el término  $a_n$  es el inmediatamente anterior al término  $a_{n+1}$  y comenzará a poner un primer ejemplo expresando al grupo lo siguiente:

Si yo propongo el término 5 de la sucesión (que en este caso sería nuestro término  $a_{n+1}$ ), ¿Cuál será el término anterior (es decir el término  $a_n$ )? La mayoría de los estudiantes contestarán que el término anterior es el 3, enseguida el profesor deberá preguntar ¿Y cuál sería la diferencia de



esos dos términos? Los estudiantes contestarán que es 2 (el valor constante “ $d$ ”), después el profesor hará participar a 3 o 4 estudiantes para que ellos mismos propongan algunos otros ejemplos, con esto se espera que los estudiantes se den cuenta que las diferencias entre dos términos consecutivos siempre es la misma, el profesor puede preguntar ¿Cómo son las diferencias de los términos que han propuesto?, ¿La sucesión sería del tipo lineal? ¿Por qué si o por qué no?

## Actividad II

**Propósito de la Actividad II:** Se pretende que los estudiantes logren identificar el patrón que rige a una sucesión figural del tipo cuadrático y su posible generalización. Se intenta que los estudiantes analicen las primeras y segundas diferencias de una sucesión del tipo cuadrático y por último, el método de las diferencias que les permitirá llegar a la generalización de una sucesión del tipo cuadrático.

### Material didáctico

**Para cada equipo:** 25 cubos, 3 hojas en blanco, 1 hoja de actividades para cada alumno.

### Variables didácticas

- Número de bloques en los Podios.
  - Podio 4, Podio 5, con los bloques que se han entregado al equipo podrían construirlos.
  - Al solicitar a los equipos la cantidad de bloques que tiene el podio 100, ellos podrían darse cuenta que necesitarán otro tipo de estrategia y con esto podrían poner en juego otro tipo de razonamiento que cuando dan respuesta al número de bloques que tendrán los primeros podios.
- Contexto: Podio. Se espera que este contexto ayude para que los estudiantes se sientan atraídos y motivados para resolver el problema que se les plantea.
- **Consigna**

Continuando con la misma secuencia de los podios para la premiación de los “minions” en la actividad I, ahora contesten las siguientes preguntas:


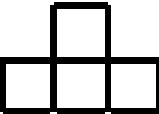
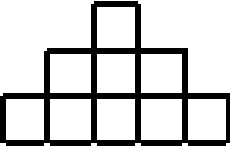
				
Podio 1	Podio 2	Podio 3	Podio 4	Podio 5

Tabla 12. Premiación de los "minions" Actividad II.



- a) Tomando en cuenta únicamente los bloques ¿Cuántos bloques se necesitaron para construir el Podio 1, Podio 2 y Podio 3? Anota tus resultados en la siguiente tabla:

Podio	1	2	3	4	5
Bloques					

Tabla 13. Relación podio - "minions" Actividad II.

- b) Construir ahora únicamente con los bloques el Podio 4 ¿Cuántos bloques se necesitaron para construir este Podio? Anota tu resultado en la tabla anterior.
- c) Construir únicamente con los bloques el Podio 5 ¿Cuántos bloques se necesitaron para construir este Podio? Anota tu resultado en la tabla anterior.
- d) ¿Cuántos bloques tendrá el Podio 100 en la sucesión de la premiación?
- e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?
- f) ¿Cuál es la expresión algebraica o que regla permite conocer el número de bloques de cualquier Podio en la sucesión?

### 3.3.5 Situación de Acción (Actividad II)

Ésta se dará cuando se entregue el material a cada equipo, y los alumnos comiencen a leer el problema e intenten comprender las preguntas que tienen que resolver.

Lo primero es que les queden claras las reglas del juego, se les comentará que necesitamos analizar cuál es el comportamiento que tiene el podio para la premiación, con lo cual los estudiantes comenzarán a realizar un análisis de cuál es el proceder de los podios, se espera que esto podría ayudar a los equipos a que comprendan lo que tienen que hacer.

La pregunta a) tiene como intención que los alumnos centren su atención en la manera cómo se construyó la sucesión, por lo que no tendrán dificultad para contestar que los bloques que se necesitan para los Podios 1, 2 y 3, son 1, 4 y 9 respectivamente y todos los equipos podrán realizarlo de forma correcta, ya que solo necesitarán contar el número de bloques que aparece en cada Podio, realizando sus anotaciones en la tabla. En esta pregunta los estudiantes solo emplearán una escritura numérica realizando operaciones de suma.

### 3.3.6 Situación de Formulación (Actividad II)

Las preguntas b) y c) tiene como intención corroborar si los alumnos han comprendido cómo se va generando la sucesión, es decir, los estudiantes necesitarán encontrar la regularidad de la sucesión para los podios 4 y 5, dicha regularidad está relacionada a la distribución espacial de los elementos de la figura y el número de elementos que componen cada figura, coordinando la estructura espacial y la numérica (Radford, 2010).

Para responder a estas cuestiones se podría recurrir a diferentes procedimientos, como por ejemplo, dibujando los bloques para poder contarlos, o elevando al cuadrado al número de cada Podio. Además algunos estudiantes podrían reconocer el patrón que rige la sucesión, con las cuestiones realizadas hasta el momento. Aquí la mayoría de los equipos podrán hacer los Podios 4 y 5 de forma correcta, contestando que son 16 y 25 bloques respectivamente, los cuáles se pueden observar en las siguientes figuras:



Figura 33. Podio 4.



Figura 34. Podio 5.

Sin embargo algunos equipos podrían tener dificultad para coordinar la estructura espacial y la numérica, teniendo errores al acomodar los bloques, por ejemplo, al colocar uno encima de otro, posiblemente lo coloquen en la intersección de dos como se muestra en la siguiente figura:



Figura 35. Podio incorrecto.

De la misma manera se pretende que los estudiantes analicen si hay algún patrón que rija la sucesión. Para esto se les podría preguntar ¿cómo podrían establecer una relación entre el número de Podio y los bloques? También se sugiere preguntar a todos los equipos ¿Ven alguna regularidad en la sucesión?, esto con la finalidad que logren identificar el patrón que la rige.

La pregunta *d)* tiene como propósito analizar si los equipos han logrado establecer el patrón que rige a la sucesión, ya que en los incisos *b)* y *c)* los equipos podrían realizarlo por ensayo y error. Se espera que la mayoría de los equipos no logren dar la respuesta correcta, posiblemente por tratarse de una sucesión del tipo cuadrático, ya que los estudiantes podrían presentar dificultades para establecer el patrón que rige la sucesión, solo algunos podrían decir que la respuesta es diez mil bloques.

Para esta pregunta los equipos podrían lograr una generalización numérica o algebraica, de forma verbal o escrita, mediante diferentes estrategias, por ejemplo identificando una relación funcional entre el número de podio y los bloques, realizando las figuras podio a podio (el procedimiento sería laborioso). Las operaciones numéricas o algebraicas que podrían estar implícitas son de suma, resta, multiplicación y exponencial.

Entre los posibles errores que cometan algunos equipos están: respuesta inconclusa, error por exceso de confianza en el cálculo numérico, errores en la representación de la figura, no reconocer el comportamiento de la sucesión, obtener una expresión numérica o algebraica incorrecta.

Se espera que solo uno o dos equipos logren identificar el comportamiento de la sucesión analizando sus resultados y observando que es una relación de  $n^2$ .

En la pregunta *e)* se pretende conocer qué equipos han logrado encontrar el patrón que rige la sucesión. Se espera que uno o dos logren dar respuesta de forma correcta, mencionando que el patrón que rige la sucesión es elevar al cuadrado el número de podio.

Los estudiantes podrían tener errores relacionados con: no reconocer el comportamiento del patrón, las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Por último, la pregunta *f)* tiene como finalidad que los estudiantes propongan una expresión algebraica que represente el comportamiento de la sucesión. Se espera que algún equipo logre contestar de forma correcta esta pregunta, ya que la mayoría tendrán dificultad para llegar a la expresión algebraica, tal vez algunos equipos sí lograrán interpretarlo de forma verbal pero tendrán errores a la hora de escribirlo, tal y como lo señalamos en la actividad I.

Al igual que la pregunta anterior aquí los estudiantes podrían tener errores relacionados a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, errores por ausencia de sentido al no poder establecer la expresión algebraica que genera la sucesión.

El profesor necesitará orientarlos con algunas preguntas como: ¿Qué se tiene que hacer para determinar el número de bloques que hay en cualquiera de las figuras de la sucesión? Si no nos referimos a un determinado podio de la sucesión, sino a uno cualquiera ¿Cómo podríamos representarlo?

### 3.3.7 Situación de Validación (Actividad II)

La situación de validación se va a presentar en dos momentos:

**Primero:** Cuando un estudiante o más, intenten convencer a sus compañeros de equipo que sus respuestas son las correctas en los diferentes incisos.

**Segundo:** El profesor pasará al pizarrón a tres estudiantes de tres equipos diferentes a dar respuesta a todos los incisos, tomando en cuenta que sean dos equipos con el mayor número de aciertos y el tercero que sea el que obtuvo menor número de aciertos. La dinámica de exposición consistirá en que cada estudiante de cada equipo a partir de cada inciso tendrán que ir explicando sus procedimientos empleados. El profesor necesitará conocer qué equipos lo hicieron de forma correcta y cuáles no.

En caso de que ningún equipo logre encontrar la expresión algebraica se volverán a plantear una serie de preguntas por parte del profesor como son:

¿Qué podemos observar en la sucesión?, ¿Hay algo que tengan en común?, ¿Podemos establecer una regla para encontrar el número de bloques de cualquier podio?, ¿Qué pueden deducir de la tabla?, estas preguntas podrían ayudar a los estudiantes a tratar de comprender cuál podría ser la expresión algebraica, aunque tendrán dificultades para hacerlo de forma escrita.

### 3.3.8 Situación de Institucionalización (Actividad II)

El profesor deberá relacionar las posibles respuestas que den los equipos con la sucesión del tipo cuadrático, se espera que de ellos hayan surgido algunas características como que el número de

bloques para cada podio corresponde al cuadrado del número de podio y a continuación realizar las siguientes preguntas.

¿En las sucesiones del tipo lineal, la diferencia entre un término y otro cómo debe de ser? ¿Creen que pase lo mismo con esta sucesión? A ver, hagamos las diferencias. Se espera que en la primera pregunta la mayoría de los estudiantes contesten que las diferencias deben de ser iguales y en la segunda pregunta algunos estudiantes posiblemente contestarán que tal vez si pase lo mismo.

Se sugiere que el profesor lleve una tabla en “papel bond” y aleatoriamente seleccione a estudiantes para que la rellenen, preguntando uno a uno dependiendo del cuadro a rellenar el valor que corresponde escribir (en este momento también se les entregará una hoja tamaño carta con la tabla, para que los estudiantes uno a uno conjuntamente lo vayan realizando).

Podio:	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Bloques:					
Primera diferencia					
Segunda diferencia					

Tabla 14. Diferencias - Actividad II.

Con esto se espera que los alumnos se den cuenta que las primeras diferencias no son iguales y las segundas sí lo son, se aprovechará para decirles que precisamente una de las características de una sucesión del tipo cuadrático es que las segundas diferencias de los términos de una sucesión son iguales como se muestra en la siguiente tabla y se puede expresar lo siguiente:

Podio:	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Bloques:	1	4	9	16	25
Primera diferencia		3	5	7	9
Segunda diferencia		2	2	2	

Tabla 15. Segundas diferencias de una sucesión (llena).

“Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales pero las segundas sí lo son, entonces la expresión que le corresponde a la sucesión es de segundo grado y, por lo tanto, tiene la forma:

$$an^2 + bn + c$$

A continuación el profesor les mostrará que a partir de la expresión  $an^2 + bn + c$  se puede generar una sucesión y así obtener las diferencias respectivas, se sugiere que el profesor lleve escrito en “papel bond” una tabla como la que se muestra a continuación.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de $n$ .					
Primera diferencia					
Segunda diferencia					

Tabla 16. Diferencias de la expresión  $an^2 + bn + c$ , para llenar en clase.

Enseguida el profesor irá relleno la tabla, preguntando a los alumnos qué se obtendría al sustituir  $n$  por 1 en la expresión algebraica, y luego para  $n = 2$  y así sucesivamente, para obtener las primeras 5 expresiones y continuando con la misma dinámica para sacar la primera y segunda diferencia, hasta terminar con una tabla como la que se muestra a continuación:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de $n$ .	$a(1)^2 + b(1) + c$ $= a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$ $= 4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$ $= 9a + 3b + c$	$a(4)^2 + b(4) + c$ $= 16a + 4b + c$	$25a + 5b + c$
Primera diferencia:		$4a + 2b + c - a - b - c = 3a + b$	$9a + 3b + c - 4a - 2b - c = 5a + b$	$7a + b$	$9a + b$
Segunda diferencia:		$2a$	$2a$	$2a$	

Tabla 17. Diferencias de la expresión  $an^2 + bn + c$ , llenada en clase.

Ahora el profesor deberá comentar que combinando estas relaciones con los resultados obtenidos en la sucesión generada por el conteo de los bloques, pueden establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 3a + b &= 3 \\ 2a &= 2 \end{aligned}$$

El profesor deberá tener cuidado en hacerles ver a los estudiantes cómo se establecen las igualdades, haciendo una comparación de la primer tabla con la segunda. El profesor necesitará hacer la primera igualdad y las siguientes entre todo el grupo.

Al resolver el primer sistema de ecuaciones se obtiene:

$$2a = 2, \text{ entonces } a = 1.$$

$$3a + b = 3; 3(1) + b = 3, \text{ entonces } b = 0.$$

$$a + b + c = 1; 1 + 0 + c = 1, \text{ entonces } c = 0.$$

En seguida el profesor deberá preguntar ¿Qué pasa si sustituimos los valores de  $a, b$  y  $c$  en la expresión  $an^2 + bn + c$ ? Aquí se espera que la mayoría de los estudiantes traten de sustituir los valores en la ecuación anterior aunque algunos otros no podrán hacerlo de forma correcta ya que tendrán dificultad al combinar los números con las literales, a lo cual, el profesor comenzará a realizar la primera sustitución en este caso el valor de  $a$  y después se le pedirá a otro estudiante que realice la sustitución de  $b$  y  $c$ , hasta llegar a la siguiente expresión:

$$(1)n^2 + (0)n + 0$$

Entonces resolviendo la expresión anterior se llegará a que es  $n^2$ , justo la expresión algebraica que genera la sucesión para conocer cuántos bloques tendrá cualquier podio, sustituyendo el número de podio por  $n$  y saber cuántos bloques tendrá éste.

Lo que aquí se presentó fue una forma de ir llevando a los estudiantes para que logren identificar patrones en sucesiones figurales del tipo cuadrático, lo cual para muchos no es tan fácil de percibir y mucho menos llegar a la generalización, por lo cual es indispensable dotar a los estudiantes de un método para encontrar la expresión algebraica de una sucesión del tipo cuadrático y para que tengan mayores oportunidades de poder entender el comportamiento de dicha sucesión.



---

# Capítulo 4. Experimentación, análisis a posteriori y validación

---





La fase de experimentación es cuando se lleva a cabo la secuencia didáctica. En nuestro caso se analiza dónde se aplicará, el tipo de escuela, la cantidad de alumnos, el horario de sesiones, el grupo, las evidencias que se tomarán, entre otras. En el análisis a posteriori se analiza lo que realmente se produjo en la experimentación, para finalmente en la Fase de Validación confrontar el análisis a priori con el a posteriori.

#### **4.1 Experimentación**

La implementación de la secuencia didáctica se aplicó a 29 estudiantes de tercer año de educación secundaria cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años, específicamente al grupo “B” de la Escuela Secundaria Federal “J. Jesús Larios Guzmán”, que está ubicada en la cabecera municipal del municipio de General Pánfilo Natera, del estado de Zacatecas, México.

Esta escuela secundaria recibe alumnos de diferentes localidades del municipio como son: La Tesorera, Guanajuatillo, El Saucito, El Saladillo, El Tule, Santa Elena, San Pablo, Rancho Nuevo, San Ramón y La Unión de San Antonio.

La institución se encuentra aproximadamente a 55 km de la capital. Se cuenta con transporte público de las localidades a la cabecera municipal y de ésta a la capital. Una de las principales actividades económicas es la agricultura, aunque una parte importante de trabajadores son migrantes.

La Escuela Secundaria se fundó en 1974 y actualmente cuenta con 12 aulas para clase, una cancha de básquet bol, una de fut-bol, una plaza cívica con domo, 1 sala de cómputo, dos cuartos para baño, se cuenta con 25 computadoras y solo 3 con internet. Tiene servicios de drenaje, energía eléctrica, internet y teléfono. Está conformada una asociación de padres de familia y el número total de docentes es de 29 y de alumnos es 316, 110 en primer año, 104 en segundo y 102 en tercero.

Por otro lado el grupo de 3 “B” está constituido por 29 alumnos de los cuales 15 son hombres y 14 mujeres, cabe señalar que hay un alumno que tiene dificultades para escuchar y hablar, por lo cual uno de sus compañeros es quien le ayuda o explica las actividades que el profesor presenta.

Los estudiantes acuden de lunes a viernes de las 8:00 a las 14:30 horas, teniendo un receso de 5 minutos cada 50. De las 10:30 a las 11 horas se les concede un receso y posteriormente continúan con sus clases.

#### **4.2 Análisis a posteriori**

Como ya se comentó, en este análisis se considera todo lo que pasó en la experimentación de la situación didáctica y el proceso de validación se dará cuando confrontemos el análisis a priori con el a posteriori. En este capítulo consideraremos el análisis a posteriori de la situación didáctica en sus diferentes situaciones, como son la de Acción, Formulación, Validación e

Institucionalización, para posteriormente pasar a realizar la confrontación del análisis a priori con el a posteriori.

En esta investigación se implementó una secuencia didáctica, la cual se desarrolló en equipos de 3 integrantes, los días 6 y 7 de abril de 2016 de las 8:50 a las 9:40 horas, en dos sesiones de 50 minutos cada una. Los estudiantes desarrollaron dos actividades las cuales se videograbaron y se realizó una recopilación fotográfica de las diferentes actividades. A cada equipo se le entregó el siguiente material: dos actividades impresas en hojas de máquina, 25 bloques, 9 “minions” y 3 hojas en blanco.

### 4.3 Actividad I

En esta actividad se pretende que los estudiantes logren identificar el patrón que rige a una sucesión figural del tipo lineal, que analicen las diferencias que hay de un término a otro y puedan llegar a su posible generalización. Con esta actividad se intenta lograr que los estudiantes recuerden qué es una sucesión del tipo lineal y darles a conocer una de sus características, con esto se espera que los estudiantes tengan mayores argumentos para poder resolver la actividad II.

#### 4.3.1 Situación de Acción

Recordemos que en una situación de acción los alumnos ponen en práctica medios que están directa o indirectamente proporcionados en el juego o problema; es decir, los estudiantes comienzan la interacción con la situación a través de la manipulación con el material proporcionado y familiarizándose con el problema que se les propone. Así, en lo que sigue se describe el desarrollo de esta situación, en la actividad I.

El profesor comienza saludando a todo el grupo y, para romper un poco la tensión entre él y los estudiantes, comienza haciendo una serie de preguntas cómo se muestra en los siguientes registros:

- 3 P: Para comenzar con la actividad les haré la siguiente pregunta ¿alguien sabe qué es un “minions”?
- 4 As: ¡síííí!
- 5 P: A ver, ¿qué son?
- 6 A1: Pues son como unos “animalillos” que salen en una película.
- 7 P: Bien ¿Alguien más que quiera participar?
- 8 A2: Son unos monillos que todos se parecen.
- 9 P: Bueno, los “minions” son los personajes que salen en la película “*mi villano favorito*”. Entonces vamos a tratar de resolver un problema de atletismo con “minions”. Les voy a entregar unas actividades, donde ustedes van a contestar unas preguntas, les voy a entregar este material y ahorita entre todos resolvemos, perdón, leemos la actividad y si tienen alguna duda, me preguntan.

A continuación el profesor comienza a organizar el grupo en equipos de tres, es importante destacar que desde aquí ya inicia de alguna manera la devolución del problema, de hecho uno de los alumnos que estaba ya organizado en uno de los equipos pregunta al profesor ¿vamos a hacer un “minions”? con esto de alguna manera podemos decir que los estudiantes ya están de acuerdo

en tratar de resolver la actividad, es decir, aceptan la responsabilidad de resolver el problema y por lo tanto aceptan la devolución del mismo, por lo que ya están en una situación a didáctica.

En seguida el profesor se da cuenta que faltan varios equipos por organizarse y para no perder tiempo pregunta ¿ya están? y les sugiere que se formen como en anillo o en círculo, con lo cual los estudiantes comienzan a formar los equipos que faltan y el profesor pasa a entregarles el material (25 bloques, 9 “minions”, Actividad I, 3 hojas en blanco), como se puede ver en la siguiente figura:



Figura 36. Formación de equipos y entrega de material.

Al principio algunos estudiantes se mostraron un poco intimidados por la cámara, pero después de un tiempo se expresaron más confiados al participar. La mayoría de los equipos manifestó gran interés al iniciar la actividad, pues se pudo observar en su rostro una actitud positiva al estar trabajado con los “minions”, muestra de ello se puede ver en la figura siguiente en la que se logró captar el momento en que algunos estudiantes están entusiasmados manipulando el material.



Figura 37. Manipulación del material.

Para que quede claro lo que tienen que hacer el profesor pide a un estudiante que lea la actividad I y terminando éste el profesor menciona lo siguiente:

- 18 P: Si se fijan en el podio 1, hay un bloque y hay un “minions” que se está premiando, en el podio 2 ¿Cuántos hay?  
19 As: Tres  
20 P: ¿Y en el podio 3?  
21 As: Cinco  
22 P: Entonces lo que se les pide en el inciso *a*) es: Cuántos “minions” se pueden premiar en el podio 1, podio 2 y podio 3 y lo van a anotar en la tabla. Ahí van a anotar cuantos “minions” hay en cada pido de premiación y así van a seguir contestando las preguntas. La pregunta que sigue es ¿construyan con los bloques y los “minions” el podio 4? ¿Cómo creen que se va a formar el podio 4? Y anotan cuantos “minions” se pueden premiar.

Hasta aquí sigue siendo una situación de acción ya que los estudiantes pueden responder las diferentes cuestiones sin ninguna complicación, el propósito sigue siendo que los estudiantes entiendan las reglas del juego, para que puedan realizar la actividad de forma correcta.

#### 4.3.2 Situación de Formulación - Actividad I

En lo que sigue se presentarán las soluciones que mostraron los estudiantes, así como algunos errores que se manifestaron en el desarrollo de la actividad.

Las preguntas *b*) y *c*) tienen la intención de comprobar si los estudiantes han comprendido el comportamiento de la sucesión para los primeros términos. En la siguiente figura se muestra cómo el equipo 1 está en una situación de formulación, ya que está analizando la forma en la que debe acomodar los bloques y los “minions”, coordinando la estructura espacial y la numérica, además de contar cuántos se podrán premiar en el podio 4. Este tipo de estrategia también fue realizada por los equipos 2, 3, 5, 6 y 9.



Figura 38. Elaboración del podio 4 por el equipo 1.

Algunos equipos como el 1, 4, 7 y 8 realizan sus estrategias dibujando las figuras del podio 4 y 5 en la hoja de actividad que se les entregó, como ejemplo se muestran las figuras que realizó el equipo 1.

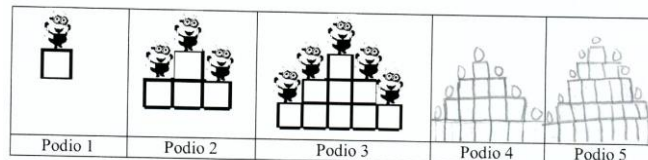


Figura 39. Dibujo de los podios 4 y 5.

Por otra parte, dentro de esta situación también se presentaron algunos errores, muestra de ello fue lo que realizó el equipo 7, ya que en lugar de colocar un bloque encima de otro, lo colocaban en la intersección de dos bloques, como se puede observar en la siguiente figura:



Figura 40. Error del equipo 7 al colocar los bloques.

Aunque cabe señalar que al terminar de colocar los “minions” se dieron cuenta del error que tenían al colocar los bloques, no hubo necesidad de que el profesor interviniera ya que las mismas integrantes del equipo se dieron cuenta y volvieron a realizarlo de forma correcta.

25 Equipo 7

A5: Pon ese otro “minions” allá.

A6: ¿Y luego, ya no tenemos “minions”?

A6: ¿Por qué nos faltaron?

A5: A ver los demás (refiriéndose a los podios propuestos en la actividad).

A5: ¡Ah!, no era así, es uno arriba de otro.

A6: ¡Ah, sí!

Es importante mencionar que la pregunta *d)* implicaba otro tipo de estrategia para dar respuesta a la cuestión, por ejemplo estableciendo una relación funcional entre el número de podios y los “minions”, es decir, necesitan otro tipo de razonamiento al utilizado en los primeros tres incisos, en la que todos los equipos lograron dar una respuesta correcta.

Se logró observar que los equipos 2, 3, 4, 5 y 7 comenzaron sus estrategias mediante una relación funcional entre el número de podios y los bloques realizando una lista numérica en forma vertical para ver cuántos “minions” podrían premiarse en el podio 100. Por ejemplo, parte del trabajo que realizó el equipo 5 se puede observar en la siguiente figura.



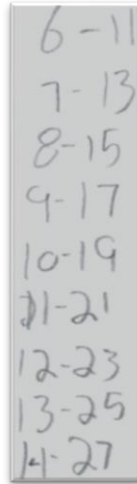


Figura 41. Estrategia para la pregunta d).

Se puede observar cómo el equipo anterior realiza la relación funcional en forma vertical, en cambio el equipo 7 lo realiza de manera horizontal como se puede ver en la siguiente figura:

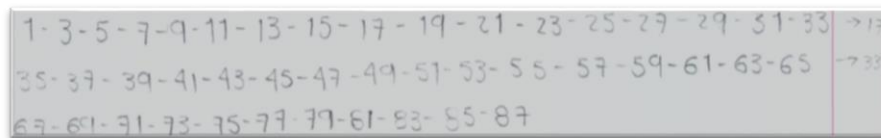


Figura 42. Estrategia del equipo 7.

De los equipos 2, 3, 4, 5 y 7 el único que no logra contestar de forma correcta fue el equipo 2, ya que su respuesta es que son 99 “minions”, este error podría estar relacionado por: un exceso de confianza en el cálculo numérico, no reconocer la regla o patrón. Por su parte el equipo 4, comenzó con su estrategia mediante una relación funcional y después se dan cuenta que hay algo que se va repitiendo.

- 27 (Algo interesante que surgió en el equipo 4 fue que comienzan su estrategia podio a podio, pero logran identificar que se repite un patrón que ellos entendieron de la siguiente manera: por ejemplo, si ellos querían saber cuántos “minions” hay en el podio 4, comentaban que al 4 le debían quitar 1 y ese resultado deberían sumárselo nuevamente al número de podio, dando como resultado 7, que es precisamente el número de “minions” que hay en el podio 4 y con esa estrategia podrían saber el número de “minions” que hay en cualquier podio que les pidieran).

Cabe señalar que el equipo 1 y 8 no entregaron las hojas en las que realizaron sus estrategias, por lo cual no podemos realizar un análisis de cuáles fueron éstas, lo que sí podemos afirmar es que lograron hacerlo de forma correcta para esta pregunta. En cambio el único equipo que no intentó una estrategia de solución fue el 9, ya que desde un principio tuvo problemas para entender la actividad y no lograron terminar lo que se les proponía, teniendo errores que podrían tener su

origen principalmente a la ausencia de sentido y a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En general los equipos 1, 3, 4, 5, 7 y 8 logran dar la respuesta correcta, mencionando que eran 199 “minions” y los equipos 2, 6 y 9 no lograron hacerlo de forma efectiva; por ejemplo, el equipo 2 responde que son 99 “minions”, como se puede ver en la siguiente figura:

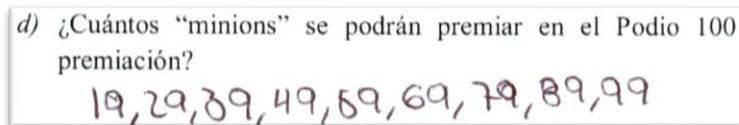


Figura 43. Respuesta del Equipo 2.

Este último equipo trató de encontrar cierto patrón que pudiera generar el número de “minions” para el podio 100 sin tener éxito. El equipo tiene un error que podría tener su origen en la ausencia de sentido al no reconocer el patrón, ya que hace sus aproximaciones sumando 10, es decir, de 19 pasa a 29, después a 39 y así sucesivamente hasta llegar al 99 por lo que ellos consideran que esa sería la respuesta correcta.

En la pregunta e) que pedía encontrar el patrón que rige la sucesión, todos los equipos, a excepción del 9, logran dar una respuesta correcta, ya que hacían referencia a respuestas como las que se pueden ver en las siguientes figuras:



Figura 44. Respuesta del equipo 4.

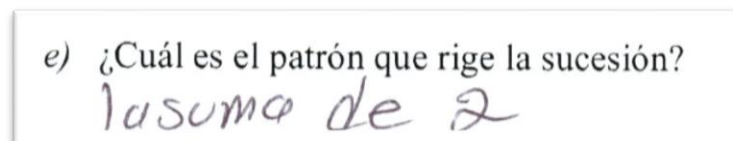


Figura 45. Respuesta del equipo 5.

Por último en la pregunta f) en la que se les pedía que encontraran la expresión algebraica desafortunadamente ningún equipo logra hacerlo de forma correcta, aunque sí hubo equipos como el 1, 2, 4, 5, 6 y 7 que intentaron dar una respuesta como se muestra en las siguientes figuras:



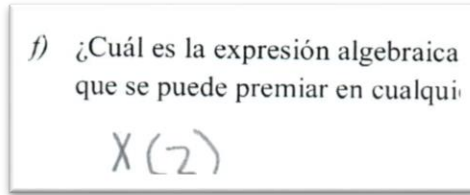


Figura 46. Respuesta equipo 1.

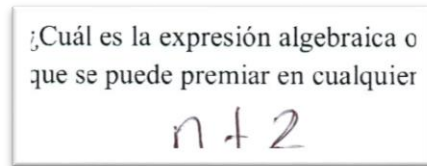


Figura 47. Respuesta del equipo 7.

Como se puede observar en las hojas de trabajo, los equipos 1, 4, 5, 6 y 7 logran reconocer que la respuesta tiene alguna relación con el número dos. Consideramos que estos errores pudieran estar relacionados a: argumentaciones incompletas, sustituir una expresión numérica por una algebraica incorrecta. Por su parte los equipos 3, 8 y 9 no contestaron la pregunta.

Es importante resaltar que el equipo 4 sí hablaba de una solución correcta, pero no logró hacerlo de forma escrita, posteriormente se hará un análisis más puntual de esta situación. Con esto podemos afirmar que la mayoría de los equipos sí logra reconocer el patrón que rige la sucesión, a pesar de que algunos de ellos no pudieron contestar de forma correcta el número de “minions” que se podía premiar en el podio 100, lo cual nos deja como evidencia que si bien logran identificar el patrón y de alguna manera interpretarlo, se les dificulta llegar a establecerlo numéricamente y algebraicamente, algo de lo que ya se ha comentado en otras investigaciones como la de Londoño, Kakes y Álamo (2014) en la que mencionan que los estudiantes hablan de una solución correcta en un ejercicio relacionado con sucesiones, pero cuando se les pide que lo expresen de forma escrita, no tienen elementos para hacerlo o lo hacen de una manera incorrecta.

En la Tabla 18 se muestran los aciertos (1) y errores (0) que tuvieron los equipos en esta actividad. En general los primeros 3 incisos son resueltos de forma correcta por todos, para el inciso d) cuatro de ellos no logran hacerlo de forma correcta; en el e) solo el nueve no consigue dar una respuesta correcta y para el último inciso ninguno logró tener un resultado positivo.

Tabla 18. Resultados actividad I

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
<b>Equipo 1</b>	1	1	1	1	1	0
<b>Equipo 2</b>	1	1	1	0	1	0
<b>Equipo 3</b>	1	1	1	1	1	0
<b>Equipo 4</b>	1	1	1	1	1	0

<b>Equipo 5</b>	1	1	1	1	1	0
<b>Equipo 6</b>	1	1	1	0	1	0
<b>Equipo 7</b>	1	1	1	0	1	0
<b>Equipo 8</b>	1	1	1	1	1	0
<b>Equipo 9</b>	1	1	1	0	0	0

### 4.3.3 Situación de Validación - Actividad I

En esta situación analizaremos cómo se dan las explicaciones en uno de los equipos y las que se dieron a todo el grupo, además de, cómo se realizaron las validaciones con respecto a las diferentes estrategias que aparecieron. Aunque en un principio se tenía contemplado analizar las validaciones que se dieron en cada uno de los equipos, éstas no se lograron obtener, debido a la mala calidad del audio. Lo que sí se logró observar en el video es cómo por lo menos 7 equipos trabajan colaborativamente entendiendo, discutiendo, planteando, diferentes estrategias para dar respuesta a las preguntas; es decir, se puede apreciar en las gesticulaciones cómo los integrantes de cada equipo participan en las diferentes actividades, además, esto se corrobora con las notas de campo del profesor - investigador.

Por ejemplo, del equipo 2 se logró rescatar una pequeña conversación, en la que un estudiante está tratando de convencer o explicar a sus compañeros que existe una diferencia de dos o el cambio que hay en cada podio; y aunque logró convencerlos, desafortunadamente su estrategia no fue la correcta. En el siguiente registro, se muestra parte de lo que menciona este estudiante.

31 Equipo 2:

A7: Es que mira, ya después de sumarle dos, le vas sumando de dos en dos, así hasta que salga el 19 y luego se lo sumas de dos en dos hasta el 29 y así hasta llegar al 99.

Con la anterior conversación y las diferentes gesticulaciones que realizan los estudiantes, se puede expresar que sí se presentaron validaciones en cada equipo, por lo menos en el mencionado antes. Para la validación en grupo que se tenía contemplada y una vez que el profesor comprobó que algunos equipos ya habían terminado y los demás ya no intentaban responder las preguntas, pasó al pizarrón a dos integrantes de dos equipos diferentes para que respondieran a las preguntas planteadas en la actividad I.

Cabe mencionar que el profesor previamente había analizado a cada equipo y uno de los que tuvo mayor participación y aciertos en las preguntas fue el equipo 4, por lo que se eligió a un integrante de éste y a uno del 2, que también estuvieron participativos, pero con más errores. Como los primeros tres incisos eran preguntas que el profesor consideró que todos los equipos podrían contestar con facilidad, decidió preguntarles a todo el grupo las respuestas, como se puede evidenciar en los registros del 39 al 49.

- 39 P: Pongan atención todos para que vean cómo resolvieron la actividad sus compañeros. En el podio 1 ¿Cuántos “minions” debíamos de tener? (Preguntando a todo el grupo).
- 40 As: Uno.
- 41 (El profesor le pide a un estudiante que vaya anotando los resultados en la tabla que está en la hoja de papel bond colocada previamente en el pizarrón)
- 42 P: ¿En el 2?
- 43 As: Tres.
- 44 P: ¿En el 3?
- 45 As: Cinco.
- 46 P: ¿En el 4?
- 47 As: Siete.
- 48 P: ¿En el 5?
- 49 As: Nueve.

En los registros anteriores se pudo percibir cómo la mayoría de los equipos contestaron de manera correcta los primeros tres incisos, para el siguiente inciso el profesor decidió que era importante preguntar a los integrantes sus estrategias empleadas y comenzó con el integrante del equipo 2:

- 50 P: Ahora bien, les pedía que ¿Cuántos “minions” se pueden premiar en el podio 100 de la sucesión? Tú, ¿cómo le hiciste para saber cuántos “minions” hay en el podio 100? (refiriéndose al integrante del equipo 2 que pasó al pizarrón).
- 51 A12: Es que como yo...inaudible... y me salió 19 y lo seguí contando así sucesivamente y el resultado me salió 99.

Así tenemos que el resultado que da el equipo 2 es incorrecto, pero el equipo 4 hace una estrategia muy interesante y vale la pena puntualizar tal y como la explicó, misma que se aprovechó para contrastar con la respuesta que dio su compañero y esto lo podemos analizar en los registros del 52 al 55.

- 52 ...
- P: Este, ¿tú obtuviste un resultado igual? ¿Cuál fue tu estrategia? (Preguntando al estudiante del equipo 4).
- 53 A13: Por ejemplo en el 5 (refiriéndose al podio 5) menos 1, te da 4, pero en vez de restárselo yo se lo sumé y te da 9.
- 54 P: Nueve, ¿Y en el podio 4?
- 55 A13: Igual en el 4,  $4 - 1$ , te da 3, pero en vez de restárselo se lo sumo,... inaudible..., te dan 5.

Es evidente que el estudiante tiene un error a la hora de hacer la suma, pues en lugar de sumar  $4 + 3$ , suma  $4 + 1$ , de hecho el profesor tampoco se percató del error y continúa con la clase. Más adelante con otro ejemplo se comprobará que la estrategia que utilizaron los integrantes del equipo 4 es correcta.

- 57 P: Si se fijan su compañero utilizó esa estrategia, dice que él le restaba un uno, cinco menos uno, cuatro pero ese cuatro se lo sumaba al cinco y le daba nueve, le daba el resultado correcto. Entonces ¿para el podio 100 como le hiciste?
- 58 A13: Para el 100 ya nada más hice, cien menos uno, te da noventa y nueve y en vez de restárselo se lo sumas y te da 199.

- 59 P: Entonces ése es el resultado correcto, para el podio 100, este ¿algunos otros tuvieron otra estrategia?  
60 (El profesor espera algunos segundos para ver si algún equipo presentó otra estrategia lo cual no sucede y continúa con la clase).

Como se puede leer en el registro 59, el profesor no pregunta a los estudiantes cuál de las respuestas de sus compañeros es la correcta, inmediatamente comenta que el resultado correcto es el que evidenció el estudiante del equipo 4, con esto podemos decir que el profesor cayó en un error y no permitió que los estudiantes validaran y discutieran el resultado.

Por otra parte el equipo 4 logró identificar el comportamiento que tiene la sucesión y que funcionó para poder saber cuántos “minions” puede haber en el podio 100 e incluso para cualquier podio. En lo que sigue se analizarán algunas respuestas que dieron los estudiantes en la última pregunta, cuando buscaban la expresión algebraica de la sucesión. Si bien ellos se mostraron tímidos cuando se les preguntó sobre las respuestas que dieron, en sus hojas de trabajo se puede comprobar cómo al menos 4 equipos proponen una expresión algebraica. En los registros del 61 al 68 se analizará la respuesta del equipo 4.

- 61 P: Ahora viene la otra pregunta ¿Cuál es la expresión algebraica? es decir, si ponemos por ejemplo una expresión algebraica que al momento de sustituir esa variable nos da el número de “minions” de cualquier podio. ¿Tú encontraste alguna? (pregunta para el estudiante del equipo 2).  
62 A12: Mmm no.  
63 P: ¿Alguien encontró una expresión algebraica?  
64 Como nadie contesta el profesor pregunta al integrante del equipo 4 si en su equipo habían encontrado alguna a lo que contesto:  
A13: Pues no estoy seguro si sea.  
65 P: Vamos a ver y ahorita lo vamos a resolver entre todos.  
66 El alumno anota en el pizarrón que la expresión que ellos consideraron fue  $x + 2$ .  
66 Se escuchan pláticas entre los equipos.  
P: A ver, pongan atención, su compañero dice que es  $x + 2$ , esta expresión algebraica lo que nos dice es que si sustituimos aquí (refiriéndose a la variable) cualquier número de podio nos tiene que dar este valor (refiriéndose al número de “minions”), vamos a ver si es cierto.  
Supongamos que  $x$  vale uno, uno más dos, ¿Cuánto nos da?  
67 As: Tres.  
68 P: Pero en el podio uno nos tiene que dar uno, entonces esta no es (la expresión algebraica que propuso el equipo 4), para que sea esta correcta, se necesita que la expresión algebraica que proponamos nos de cualquier resultado.

Recordemos que el equipo 4 logró identificar el patrón que rige la sucesión y la explicación que propuso para encontrar el número de “minions” de cualquier podio era correcta, pero a la hora de que se le pide que lo haga de forma escrita o que lo represente como una expresión algebraica no tuvo éxito, aunque más adelante conforme avanza la clase hay una propuesta adecuada de este estudiante, la cual analizaremos posteriormente.

Cuando los alumnos ven la propuesta que propuso el equipo 4 se muestran con más confianza para participar, lo cual podemos observar en los registros del 70 al 75.

- 70 Equipo 2

- A15:  $x + 1$  profe.
- 71 P:  $x + 1$ , dice su compañero (el profesor anota la expresión algebraica en el pizarrón). Vamos a sustituir cuando vale 4 por ejemplo, cuatro más uno, ¿igual?
- 72 As: Cinco.
- 73 P: Cinco verdad y es 7 (refiriéndose al número de “minions” en el podio 4), esa expresión propuesta por su compañero no nos sirve, ¿alguna otra? ¿Quién propuso otra? ¿Ustedes? (equipo 7).
- 74 Equipo 7:  
A16: Pero yo lo hice :  $n + 2$ .
- 75 P: :  $n + 2$  fue la misma que dio tu compañero, si se fijan lo único que cambia es la variable  $n$  por  $x$ , no nos da el resultado que queremos, ¿otra propuesta? No sé ¿qué se les ocurre?  
El profesor espera unos segundos y nadie participa, por lo que intenta ayudarlos y continua preguntando:  
P: Fíjense ¿qué números son estos? (señalando a los números que generan la sucesión en la tabla), uno, tres, cinco, siete, nueve, ¿Cómo se le llama a estos números? ¿Los números qué?

Como puede observarse en el registro 75, el profesor se da cuenta que ya no hay más propuestas, por lo que comienza a realizar una serie de preguntas relacionadas con la sucesión, para llevarlos poco a poco a generar la expresión algebraica, lo cual se puede comprobar en los registros del 76 al 90.

- 76 A17: Impares ¿no?
- 77 P: Así es, son los números impares como dijo su compañero, son puros impares. Por ejemplo si tuviera dos, cuatro, seis, ocho, ¿Qué números son estos?
- 78 As: Pares.
- 79 P: Son números pares y estos ¿con cuál expresión algebraica podemos representar estos números pares?
- 80 Los alumnos no proponen ninguna expresión y el profesor intenta que propongan alguna mencionando lo siguiente:
- 81 P: ¿Con  $x$ ? ¿ $x + 2$ ?
- 82 A18: Así sí, es cierto con  $x + 2$ .
- 83 P:  $x + 2$ , a ver vamos a ver, por ejemplo cuando  $x$  vale uno, es uno más dos, tres, ya no nos dio, porque debería ser dos (refiriéndose al primer término).
- 84 El profesor valora la situación y se da cuenta que los estudiantes no logran encontrar la expresión algebraica que genera los números pares y decide explicarles cual debería ser.
- 85 P: Entonces la expresión algebraica para generar los pares es  $x^2$  o  $2x$ , es lo mismo, por ejemplo, vamos a sustituir cuando  $x$  vale uno, ¿dos por uno?
- 86 As: Dos.
- 87 P: Y si nos da dos (primer número de la sucesión 2,4,6,8). Cuando  $x$  vale tres, ¿dos por tres?
- 88 As: Seis.
- 89 P: Y si nos da el seis. Cuando  $x$  vale cuatro ¿Dos por cuatro?
- 90 As: Ocho.

Hasta aquí el profesor intentó que los estudiantes lograran comprender cómo se podría generar la expresión algebraica de los números impares una vez que se les explica cuál es la expresión algebraica de los pares, lo cual le resultó exitoso, ya que el estudiante del equipo 4 logra proponer la expresión  $a + (a - 1)$ , como se puede ver en los registros 91 al 99.

- 91 P: ... Y si nos da el ocho. Entonces, ya tenemos la expresión algebraica para los pares y para los impares ¿Cuál sería? Dijiste que tú ya la tenías (integrante del equipo 4), a ver anótale, vamos a intentarlo.
- 92 S13: O sea, si le pone por ejemplo  $a + (a - 1)$ , yo lo pondría así, o sea, el número más el número

- menos uno.
- 93 P: Dice su compañero que es el número más el número menos uno, entonces vamos a comprobar. Por ejemplo para el tres, sería tres más el número menos uno, ¿tres menos uno?
- 94 As: Dos.
- 95 P: Dos ¿y nos da?
- 96 As: Cinco.
- 97 P: Que sería este (refiriéndose al número 5), ¿verdad? que es correcto. Vamos a ver con otro, con el cinco. Si  $a$  vale cinco, más ¿ $a$  menos uno?
- 98 A18: Cuatro.
- 99 P: Cuatro. Y cinco más cuatro sería nueve, ahí estamos comprobando que si nos da el nueve como en la tabla, por lo tanto la expresión algebraica propuesta por su compañero es correcta.

Se puede decir que en particular este estudiante logró encontrar una expresión algebraica que genera la sucesión propuesta y que es diferente a la que se tenía contemplada como respuesta a esta pregunta, lo cual nos refleja lo importante de saber llevar a los estudiantes para que por sí solos intenten resolver el problema que se les presente, además, aunque la expresión propuesta no es la más simplificada, es de relevancia comprobar que ésta refleja el cómo el alumno interpreta el comportamiento de la sucesión.

En seguida en los registros del 99 al 119 el profesor menciona que hay otra expresión algebraica que puede generar la sucesión.

- 99 P: ... Otra expresión algebraica podría ser  $2x - 1$  que es similar a la que propuso su compañero, por ejemplo, ¿Qué valor quieren que le pongamos a  $x$ ? ¿Cuándo vale cuánto?
- 100 (El profesor espera unos segundos para ver si se propone algún valor, pero no hay participación).
- 101 P: ¿Cuándo vale 5?
- 102 As: Si.
- 103 P: ¿Dos por cinco?
- 104 As: Diez.
- 105 P: Dos por cinco, diez ¿menos uno?
- 106 As: Nueve.
- 107 P: Nueve y nos dio el resultado correcto.
- 108 A19: ¿Y con el uno?
- 109 P: ¿Perdón?
- 110 A19: ¿La del uno?
- 111 P: La del uno, dos por uno menos uno ¿dos por uno?
- 112 A19: Dos.
- 113 P: ¿Dos menos uno?
- 114 As: Uno.
- 115 P: Uno, nos da el uno, entonces ustedes rápidamente cuando yo les pedía el de 100 (al número de “minions” que se puede premiar en el podio 100), podrían a ver hecho, dos ¿por cien?
- 116 As: Doscientos
- 117 P: Doscientos ¿menos uno?
- 118 As: Cien noventa y nueve
- 119 P: Ciento noventa y nueve y ahí encontraría el número de “minions” que se pueden premiar en el podio 100, con esta expresión rápido encuentran cualquier valor, si les hubiera pedido el mil, el dos mil, nada más tendría que sustituir el número que se les pide en esta expresión, es decir, multiplicarlo por dos y restarle uno.

En general se observó cómo los estudiantes validaron tanto en equipo, como en forma grupal y se logró que un estudiante propusiera una expresión algebraica correcta. Se hace mención solo al estudiante y no al equipo, porque la propuesta que el presentó la formuló cuando estaba frente a grupo y no trabajando con su equipo.

#### 4.3.4 Situación de Institucionalización - Actividad I

Recordemos que en esta situación, el profesor es quien toma el control y debe hacerles saber que lo que ellos han construido en las diferentes situaciones tanto de Acción, Formulación y Validación tiene un significado matemático (Brousseau, 1986). Así que una vez que se concluyeron las diferentes fases descritas, el profesor, primero da el significado socialmente establecido de lo que es una sucesión, lo cual se puede observar en los registros del 120 al 138.

- 120 P: Entonces, si la mayoría lo notó, hay un patrón que rige este comportamiento (el profesor se acerca para realizar un señalamiento en la tabla) ¿Cuál es?
- 121 As: Dos.
- 122 (El profesor se acerca nuevamente a la tabla y señala)  
P: Aquí se le van agregando dos, aquí dos, etc.
- 123 (Una vez que todo el grupo se dio cuenta de que existe un patrón o comportamiento, considera que es conveniente definir lo que es una sucesión y realiza la siguiente pregunta).
- 124 P: ¿Alguien sabe qué es una sucesión?
- 125 (Silencio por unos segundos)
- 126 P: Lo que piensen.
- 127 A10: Lo que se va siguiendo.
- 128 P: Lo que se va siguiendo (mencionando lo que dijo la alumna) ¿Alguien más?
- 129 P: Lo que se les venga a la cabeza.
- 130 A11: Pues lo que lleva continuidad.
- 131 (El profesor espera unos segundos para ver si alguien más quiere participar, pero ninguno lo hace, así que decide definir una sucesión).
- 132 P: Entonces una sucesión es un conjunto de números escritos en un orden específico y se denota como  $a_1, a_2, a_3 \dots$  así sucesivamente hasta  $a_n$ . A  $a_1, a_2, a_3$  se les llama a cada uno término de la sucesión, que en este caso (refiriéndose a la sucesión 1, 3, 5, 7, 9 escrita en la tabla) sería término 1, término 2, término 3, etc. Hasta llegar al término enésimo. ¿Alguien me puede decir otro ejemplo de una sucesión?
- 133 A11: Por ejemplo la de los pares, 2, 4, 6, 8 y así.
- 134 P: Muy bien y cuáles serían los términos de la sucesión.
- 135 A11: Pues los mismos.
- 136 P: En este caso ¿Cuál sería el término 1?
- 137 A11: El dos
- 138 P: ¿Y el término 2?
- 139 A11: El cuatro.
- 140 P: Muy bien, así como esas sucesiones existen muchas más, como por ejemplo 3, 6, 9, 12... o por ejemplo 5, 10, 15, 20, 25... en donde ustedes tendrán que identificar el patrón que rige a la sucesión y su expresión algebraica.

En la siguiente figura se puede observar cómo el profesor está explicando al grupo lo que es una sucesión.





Figura 48. El profesor explicando lo que es una sucesión.

En los registros anteriores se observa que el profesor definió lo que es una sucesión y con base en las respuestas que fueron dando los alumnos, como son: “algo que se va siguiendo”, “lo que lleva continuidad” el profesor aprovecha para decirles que precisamente una sucesión “es un conjunto de números escritos en un orden específico y se denota como  $a_1, a_2, a_3 \dots$  así sucesivamente hasta  $a_n$ ” y les menciona que “ $a_1, a_2, a_3$  son los términos de la misma”, además les hace referencia de algunos otros ejemplos, esto para después definir una de las características de una sucesión del tipo lineal y algunos otros ejemplos, lo cual se puede observar en los siguientes registros:

- 141 P: Como ven aquí, hay una diferencia de éste término a éste, de éste a éste (refiriéndose a las diferencias entre los términos de la sucesión en la tabla). ¿Cuál es la diferencia del 3 y el 1?
- 142 As: Dos.
- 143 P: ¿Y del 5 al 3?
- 144 As: Dos.
- 145 P: ¿Y del 7 al 5?
- 146 As: Dos.
- 147 P: ¿Y del 9 al 7?
- 148 As: Dos.
- 149 P: ¿Qué es lo que notan?
- 150 As: Pues que siempre nos da dos.
- 151 P: Siempre les da dos, entonces ¿siempre es la misma?
- 152 As: Sí.
- 153 P: Entonces esa diferencia no cambia, siempre es la misma, para cualquiera de los términos que ustedes elijan, en este caso siempre va a haber una diferencia de dos, esa es una característica de una sucesión que se llama del tipo lineal o de primer grado. Entonces se dice que: “una sucesión de números reales denotada por  $a_n$ , es una sucesión del tipo lineal o de primer grado si la diferencia entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante.  
¿Este será un valor constante? (Refiriéndose a la diferencia entre términos anotada en la tabla).
- 154 (El profesor espera unos segundos pero los estudiantes no contestan.)



155 P: Sí o ¿no? Constante se refiere a que siempre es un valor, que nunca cambia, entonces ¿será un valor constante.

Se observa que los alumnos ya tenían idea de lo que es una sucesión y aunque se percibe que también ya habían visto el comportamiento de éstas, su lenguaje matemático no les permitía responder la pregunta planteada y el profesor después de observar a los estudiantes un poco confundidos sin saber qué decir, decide modificar (o adecuar) su lenguaje para poder lograr una devolución de parte de los estudiantes, de manera que entendieran la pregunta, como se puede observar en los registros del 156 al 172.

- 156 A20: Yo pienso que sí, porque siempre nos da dos, siempre va ser así.  
157 P: Su compañero dice que en la sucesión la diferencia es constante o que siempre se repite ¿están de acuerdo con su compañero?  
158 As: Sí, siempre es dos, dos, dos.  
159 P: ¿Entonces dijimos que si las diferencias eran constantes de que tipo era la sucesión?  
160 A13: Lineal profe.  
161 P: Así es, pero también puede llamarse de otra forma ¿no?  
162 A13: ¡Ah, sí!, lineal o de primer grado profe.  
163 P: ¿Y qué pasa con las diferencias de la sucesión: 5, 10, 15, 20, 25... cómo son?  
164 As: Es 5  
165 P: ¿En todas es 5?  
166 As: Sí.  
167 P: ¿Y de qué tipo será esta sucesión?  
168 A15: También igual.  
169 P: ¿Igual a qué?  
170 A15: A la otra, también siempre nos da lo mismo, no más (sic) que ahora siempre es cinco.  
171 P: Muy bien, ¿están de acuerdo con lo que dice su compañero?  
172 As: Sí.

En general, en la situación de institucionalización se definió qué es una sucesión y la característica de una sucesión del tipo lineal. Se les hizo hincapié con algunos ejemplos y dado que esta primera actividad era solo para que afianzaran los conceptos antes mencionados, el profesor consideró terminar con la actividad I.

Por otra parte se observó cómo el profesor utiliza un contrato fuertemente didáctico, en particular el de la Mayéutica Socrática, ya que durante el desarrollo de las actividades, va generando una serie de preguntas encaminadas a generar en los estudiantes un determinado razonamiento y cuando no se tiene una respuesta positiva o se genera un silencio, el profesor modifica las preguntas o los hace caer en ciertas contradicciones para así poder lograr que modifiquen sus respuestas y respondan lo que el profesor considere necesario para poder continuar con la actividad.

## 4.4 Actividad II

La intención de la Actividad II es que los estudiantes logren identificar el patrón que rige una sucesión figural del tipo cuadrático y su posible generalización. Se intenta que los estudiantes analicen las primeras y segundas diferencias de la sucesión y por último analizar el método de las diferencias el cual les permitirá llegar a la generalización de la misma.

### 4.4.1 Situación de Acción - Actividad II

Cabe señalar que la actividad I se terminó 10 minutos antes de lo contemplado, por tal motivo se decidió aprovechar ese tiempo para continuar con la actividad II, y el profesor menciona a los estudiantes lo siguiente:

174 (Actividad II)

P: Ésta es otra actividad parecida a la anterior, traten de resolver las preguntas que se les plantean, ahora tienen que centrar su atención únicamente en los bloques; si tienen alguna duda me preguntan.

Cuando se les entrega la actividad II a los equipos, inmediatamente comienzan a leer la actividad y se dan cuenta que ahora solo trabajarán con los bloques, aunque cabe señalar que un estudiante cuestiona al profesor comentando lo siguiente:

175 A8: Profesor ¿verdad que ahora solo vamos a contar los cubos?

176 P: Así es, si se fijan es la misma sucesión, pero ahora todas las preguntas están relacionadas con los bloques, ya no con los “minions”.

177 A8: ¡Ya ven!, ¡les dije!

El hecho de que el alumno realizó la pregunta a una distancia considerable del profesor, se aprovechó para que la mayoría de los equipos escucharan nuevamente que solo se trabajaría con los bloques aún y cuando en un principio ya se les había recalado esto, de cierta manera se toma esto como evidencia de que los equipos aceptan la devolución de la actividad II.

Con esto los equipos comienzan a analizar la actividad II. Como la sucesión es parecida a la actividad I, inmediatamente abordan el primer inciso, en el que únicamente se les pregunta por el número de bloques que hay en el podio 1, 2 y 3, lo cual todos los equipos logran contestar de manera correcta, ya que lo único que tenían que hacer era contar los bloques que aparecían en cada podio, algunas respuestas se pueden ver en las siguientes figuras:

Podio	1	2	3
Bloques	1	4	9

Figura 49. Respuestas del equipo 9.

Como se pudo observar los estudiantes aceptaron trabajar con la segunda actividad sin ningún inconveniente. Esta pregunta estaba orientada a que los estudiantes analizaran el proceso de construcción de la sucesión figural, para después pasar a otro tipo de razonamiento, en el que ya estaría implícito si los estudiantes han logrado reconocer ese comportamiento y cuáles fueron sus estrategias empleadas, por lo cual damos pie a los momentos que se vivieron en la situación de formulación.

#### 4.4.2 Situación de Formulación - Actividad II

Continuando con la situación de formulación, la mayoría de los equipos muestra gran interés por seguir trabajando en la actividad, por ejemplo, se puede observar en las siguientes figuras cómo los integrantes de los equipos 1 y 3 muestran disposición a la hora de participar para resolver los incisos *b)* y *c)*, en los que se les pedía conocer el número de bloques que tienen los podios 4 y 5:



Figura 50. Equipo 1 resolviendo el inciso *b)*.



Figura 51. Equipo 3 resolviendo el inciso *c)*.

En estas preguntas, el razonamiento de los estudiantes es diferente, ya que deberán analizar cómo será la construcción del podio 4 y 5 y contar el número de bloques que se necesitan para cada uno, coordinando la estructura espacial y la numérica, a diferencia de la primera pregunta en la que los estudiantes solamente contaron los bloques que había en la figura de cada podio, por eso consideramos que para esta pregunta ya están en una situación de formulación.

Para estos dos incisos los equipos deberían hacer los podios con el material entregado anteriormente, como lo realizó el equipo 7, para el inciso *c)*, lo cual se puede apreciar en la siguiente figura:

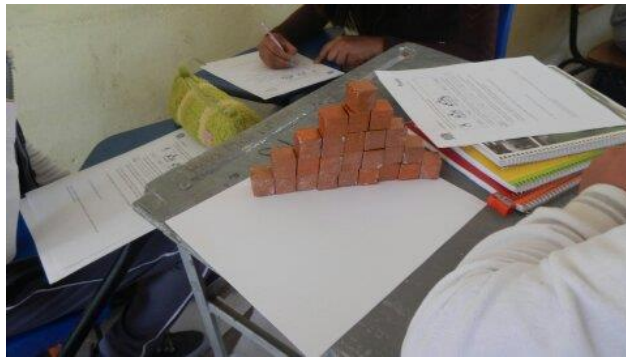


Figura 52. Trabajo del equipo 7.

De esta manera los equipos 1, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 logran dar la respuesta correcta en ambos incisos, mencionando que son 16 y 25 bloques respectivamente, por ejemplo, las respuestas del equipo 3 se pueden ver en las siguientes figuras.

Podio	1	2	3	4	5
Bloques	7	4	9	16	25

Figura 53. Respuestas del equipo 3.

Cabe señalar que algunos equipos 4, 7 y 8, realizaron las figuras en la hoja de actividad que se les entregó. Lo que realizó el equipo 4 se muestran en la siguiente figura, a modo de ejemplo.

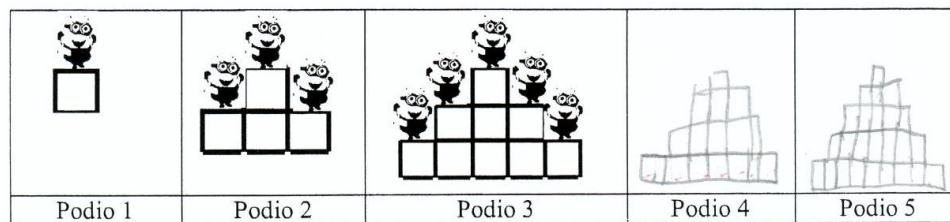


Figura 54. Figuras realizadas por el equipo 4.

Por otro lado, el equipo 9 no da ninguna respuesta a estos dos incisos, recordando nuevamente que fue el equipo que menos participación tuvo en las actividades, lo cual pueda corresponder a actitudes afectivas como lo comenta Ruano, Socas y Palarea, (2015, pp. 27-28) “En muchas ocasiones los bloqueos que las actitudes causan en los alumnos son la principal causa que les lleva al error”. Por su parte el equipo 2 no logra dar respuesta correcta a los incisos anteriores, mencionando que son 15 y 21 bloques respectivamente, como se puede observar en la siguiente figura:

Podio	1	2	3	4	5
Bloques	1	4	9	15	21

Figura 55. Respuestas del equipo 2.

En el caso anterior, el equipo 2 tiene un error a la hora de acomodar los cubos y los colocan en las intersecciones de dos cubos y al realizarlo de esta manera, los resultados son precisamente los que ellos evidenciaron, con esto se puede comprobar que este equipo no logró comprender la estructura espacial a la numérica, que los llevó a cometer ese error. En las siguientes figuras se puede observar que la cantidad de cubos en el podio 4 y 5 son los resultados antes descritos.



Figura 56. Cubos propuestos por el equipo 2 - Podio 4.



Figura 57. Cubos propuestos por el equipo 2 - Podio 5.

Para la pregunta *d)* en la que los equipos necesitan otro tipo de razonamiento, como puede ser el establecimiento de una relación funcional entre el número de podio y los “minions”, mediante un razonamiento inductivo, entre otros. Los equipos 1 y 2 sí intentan dar una respuesta, pero lo hacen de forma incorrecta, mencionando que son 190 y 396 bloques respectivamente por cada equipo, lo cual podría deberse a errores por ausencia de sentido a un uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”. La respuesta del equipo 2 se puede ver en la siguiente figura.

$$\begin{array}{r} 197 + 199 \\ \hline 396 \end{array}$$

Figura 58. Respuesta del equipo 2.

Continuando con el mismo inciso, los equipos 3, 8 y 9, no dan ninguna respuesta. En cambio, son cuatro equipos los que logran dar una respuesta correcta para este inciso, el 4, 5, 6, y 7, mencionando que son 10, 000 bloques. Prueba de ello son las respuestas de los equipos 4 y 7 que se muestran a continuación:

d) ¿Cuántos bloques tendrá el Podio 100 en la sucesión de la premiación?  
10,000 bloques

Figura 59. Respuesta del equipo 4.

d) ¿Cuántos bloques tendrá el Podio 100 en la sucesión de la premiación?  
 $100 \times 100 = 10,000$

Figura 60. Respuesta del equipo 7.

Como las respuestas que dan son adecuadas, podemos decir que los equipos antes mencionados lograron identificar el patrón que rige esta sucesión figural del tipo cuadrático, analizando tanto a la figura, como la tabla generada por los primeros podios. El equipo 5 lo único que realizó fue la multiplicación cien por cien y logró el resultado correcto, la cual se puede ver en la siguiente figura:

$$\begin{array}{r} 100 \times 100 \\ \hline 000 \\ 100 \\ \hline 10,000 \end{array}$$

Figura 61. Operación realizada por el equipo 5.

Para el inciso e) en el que se les pedía encontrar el patrón que rige la sucesión, los equipos 1, 3, 8 y 9 no lograron contestar la pregunta, este error podría deberse a que no lograron establecer el patrón que rige la sucesión o bien a las actitudes afectivas hacia las Matemáticas. Por su parte el equipo 2 contesta que es proporcional al ejemplo anterior, posiblemente siguieron pensando en

un comportamiento de la sucesión del tipo lineal o bien la respuesta que ellos hicieron podría tener cierto sentido ya que ellos lo plasman como una sumatoria, lo cual se puede ver en la siguiente figura:

e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?  
 Proporcional - Ejemplo:  
 $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Figura 62. Respuesta del equipo 2.

Si analizamos la respuesta anterior tiene cierto sentido, pues aunque no lo describen tal cual debería ser, sí es verdad que la sucesión 1, 4, 9, ... se da a partir de la suma de los impares, es decir, el primero más el segundo da el segundo término, y luego el primero más el segundo más el tercero, da el tercer término. Cabe señalar que este tipo de respuesta no se esperaba, pero es interesante analizar cómo los estudiantes ya comienzan a formular una sucesión a partir de una serie, siempre y cuando así lo hayan razonado.

Asimismo los equipos 4, 5, 6 y 7 logran dar una respuesta correcta, entre ellas se tienen las de los equipos 6 y 7, en las que mencionan, respectivamente, que “se multiplica el número de podio por sí mismo” y “se multiplica el número de podio al cuadrado, porque tiene esa sucesión en los primeros 5 podios”:

e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?  
 multiplicamos el número  
 del podio por sí mismo

Figura 63. Respuesta del equipo 6.

e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?  
 Se multiplica el número del podio al cuadrado  
 porque tiene esa sucesión en los primeros 5  
 podios

Figura 64. Respuesta del equipo 7.

En cambio las respuestas de los equipos 4 y 5 son muy parecidas, mencionan que es el número al cuadrado, tal y como se puede ver en las siguientes figuras:

e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?  
 el número al cuadrado

Figura 65. Respuesta del equipo 4.



e) ¿Cuál es el patrón que rige la sucesión?  
 Un número al Cuadrado

Figura 66. Respuesta del equipo 5.

Para la última pregunta, referente a encontrar la expresión algebraica, los equipos 1, 3, 8 y 9 no dieron ninguna respuesta y el equipo 2, como en la pregunta anterior, sigue tomando en cuenta el ejemplo de la actividad I y da como respuesta que la expresión algebraica que genera la sucesión es  $2a-1$ , como se puede ver en la siguiente figura:

¿Cuál es la expresión algebraica o que regla permite conocer el número de bloques de cualquier Podio en la sucesión?  
 $2 \cdot a - 1$

Figura 67. Respuesta del equipo 2.

No obstante como se mencionó anteriormente, este equipo consideró una sumatoria de los números 1, 3, 5, 7, 9, ..., tomando en cuenta esto y analizando su respuesta, podríamos decir que para que la respuesta fuera correcta lo único que le faltó es poner el signo de  $\sum$  al principio, pero lógicamente en este nivel no cuentan con las herramientas algebraicas para poder hacerlo.

Por otra parte, los equipos 4, 5, 6 y 7 logran encontrar la expresión algebraica que genera la sucesión figural del tipo cuadrático que se propuso, mencionando que es  $x^2$ . En la siguiente figura se puede observar la respuesta del equipo 6.

¿Cuál es la expresión algebraica o que regla permite conocer el número de bloques de cualquier Podio en la sucesión?  
 $x^2$

Figura 68. Respuesta del equipo 6.

En la tabla siguiente se observan los aciertos (1) y los errores (0) que obtuvieron los nueve equipos, en los diferentes incisos.

Tabla 19. Aciertos y errores en actividad II.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Equipo 1	1	1	1	0	0	0
Equipo 2	1	0	0	0	0	0
Equipo 3	1	1	1	0	0	0
Equipo 4	1	1	1	1	1	1
Equipo 5	1	1	1	1	1	1
Equipo 6	1	1	1	1	1	1
Equipo 7	1	1	1	1	1	1
Equipo 8	1	1	1	0	0	0
Equipo 9	1	0	0	0	0	0



En general, para el primer inciso, todos los equipos lograron dar respuesta correcta. Para el inciso *b)* y *c)* los equipos 2 y 9 no logran hacerlo de manera efectiva y para los siguientes incisos los equipos 1, 2, 3, 8 y 9 no lograron dar una respuesta correcta. Así, se tiene que 4 equipos de 9 fueron los que lograron realizar la actividad de forma correcta y consiguieron establecer no solo el patrón que rige a la sucesión sino que alcanzaron hacerlo de forma escrita, es decir, obtuvieron la expresión algebraica, logrando de esta manera llegar a la generalización. Entre los errores que se pudieron detectar están los que tienen su origen debido a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, a la ausencia de sentido correspondiente a las características propias del lenguaje algebraico.

#### 4.4.3 Situación de Validación - Actividad II

En esta situación analizaremos cómo se dan las explicaciones en uno de los equipos y las que se dieron a todo el grupo, además de, cómo se realizaron las validaciones con respecto a las diferentes estrategias que aparecieron. Por ejemplo, en el equipo 2, no se logra entender la actividad, que correspondía a contar los cubos y la discusión entre los integrantes del equipo fue con relación a los “minions” como se puede leer en los registros del 180 al 182 en los que un estudiante está explicando a sus compañeros las estrategias a seguir.

180 Equipo 2:

A25: Es que miren dos por uno menos uno te da uno y luego dos por dos menos uno te da tres y dos por tres menos uno te da 5 y ése es el número de minions.

181 A26: No sé, ¿Así lo ponemos pues?

182 A25: Pues sí ¿no?, es parecido al ejemplo anterior

Es evidente cómo los integrantes del equipo anterior, trabajan empleando una estrategia muy parecida a la de la actividad I y no se dieron cuenta que tenían que contar los bloques; de hecho instantes antes de que los estudiantes pasaran al pizarrón a ratificar sus respuestas, un integrante del equipo dos le pregunta al profesor ¿está bien? Este último aprovechó para pedirle que pasara al pizarrón para que expusiera sus respuestas a todo el grupo, lo cual se puede evidenciar del registro 196 al 209, asimismo se le hizo la invitación a un integrante del equipo 5 para que presentara sus respuestas.

196 P: ¿Ya terminaron? (preguntando al equipo 2).

197 A27: Como es malo profe, como nos carrerea (risas).

198 (El profesor realiza un análisis de los equipos para saber qué alumnos van a pasar al pizarrón a dar respuesta a las preguntas. Después de pasar los 10 minutos decide que es tiempo justo, para continuar con la validación grupal).

199 P: ¿Cómo van?

200 Equipo 2:

A27: A ver venga profe, ¿si estamos bien?

201 (El profesor se acerca al equipo 2 ya que el alumno A27 le señala con el dedo y pregunta si está bien en la expresión algebraica que propusieron).

202 P: Ustedes dicen que la expresión algebraica es  $2a - 1$  ¿ya lo comprobaron? ¿Qué pasa cuando  $a$  vale 1?, bueno pasa al pizarrón para contestar las preguntas de la actividad II.

203 (El profesor se dirige al equipo 5 para pedirle a un estudiante que pase al pizarrón a contestar las preguntas).

- 204 P: Ahorita vas a pasar al pizarrón a contestar las preguntas de esta actividad (Dirigiéndose a un integrante del equipo 5).
- 205 A30: No profe yo no, es que no sé, mejor ella (apuntando a su compañera, risas) .
- 206 P: No tengas miedo, puedes pasar con tu hoja para que te ayudes y veas los resultados que pusieron y más o menos nos digas cómo le hicieron.
- 207 A30: No, mejor ella profe (risas).
- 208 A31: Ya pásale, ya te dijo el profe que con la hoja (risas).
- 209 (El profesor hace pasar a la integrante del equipo 5 y a uno del equipo 2).

Como se puede observar en los registros anteriores, la integrante del equipo 5 se muestra un poco rejea para pasar al pizarrón, esta misma situación se vivió en la actividad I. Si bien los estudiantes tienen cierto temor o desconfianza, para pasar a exponer sus resultados, poco a poco toman seguridad y comienzan su participación. En los registros del 210 al 238 se puede observar cuáles fueron las respuestas del equipo 2, para las primeras tres preguntas.

- 210 P: A ver, pongan atención por favor, ya vamos a contestar las preguntas. Éste, en el podio uno ¿Cuántos bloques les pusieron ustedes? (preguntando al integrante del equipo 2).
- 211 A27: Uno.
- 212 P: ¿En el dos? (refiriéndose al podio 2).
- 213 A27: Cuatro.
- 214 P: ¿Y en el tres?
- 215 A27: Nueve.
- 216 P: ¿Y en el cuatro?
- 217 A27: Quince.
- 218 P: ¿Por qué quince?
- 219 A27: Pos eso nos salió (risas).
- 220 A30: Son diez y seis (integrante del equipo 5).
- 221 A13: Son diez y seis profe. (Integrante del equipo 4).
- 222 P: ¿Y cómo le hicieron para sacar los 15 bloques?
- 223 A27: Pos cuando los acomodamos eso nos dio.
- 224 P: Este, a ver vuélvelo a hacer.
- 225 A27: ¿Otra vez? Ya ven háganlo (risas, pidiendo a sus compañeros que lo realicen).
- 226 (Los compañeros vuelven a realizar la construcción del podio 4, acomodando los bloques de manera incorrecta ya que los bloques que van encima los colocan en la intersección de dos de abajo).
- 227 P: ¿Ya revisaron bien la construcción del podio?
- 228 A27: ¿Entonces no era así profe?
- 229 P: Revisen bien.
- 230 A26: ¡Ah! es que no era así, era uno arriba de otro.
- 231 A27: Por eso te dije, que estaba mal (Risas).
- 232 (Los integrantes del equipo 2 se dan cuenta que realizaron la construcción de los podios de manera incorrecta y por lo tanto su respuesta no es la adecuada. Enseguida comienza a realizar la construcción de manera correcta).
- 233 P: Entonces ¿cuántos deberían ser?
- 234 A27: Sí, son diez y seis.
- 235 P: ¿Y para el 5?
- 236 A27: Nosotros pusimos que 21, pero no son.
- 237 P: ¿Por qué dices que no son?
- 238 A27: Pues porque no los acomodamos bien.

Como se puede observar en los registros anteriores el equipo 2 no realizó el acomodo de los bloques de forma correcta y mencionó que los bloques para los podios 4 y 5 son 15 y 21

respectivamente y son precisamente los bloques que se utilizan cuando colocan uno encima de la intersección de dos. En los registros del 239 al 243, el profesor pregunta al integrante del equipo 5 cuál fue su respuesta.

- 239 P: Y a ustedes ¿Cuántos les dio? (refiriéndose al equipo 5).  
240 A30: Veinticinco.  
241 P: Entonces ¿están de acuerdo que son 25? (preguntando a todo el grupo), o ¿hay alguno que tenga otra respuesta diferente?  
242 As: Sí son 25.  
243 (El profesor espera unos segundos y no hay respuesta por parte de ningún equipo).

Para la siguiente pregunta que era respecto al número de bloques que tiene el podio 100, el equipo dos responde que son 396 bloques y se le preguntó el por qué habían obtenido ese resultado y simplemente mencionan que sumado 197 más 199 les da 396. Después se continúa preguntando al integrante del equipo 5 por su respuesta, éste menciona que son diez mil bloques y que para obtener ese resultado multiplicaron el número de podio por sí mismo lo cual se puede observar en los registros del 244 al 255.

- 244 P: Y para el podio 100, ¿cuánto les dio?  
245 A27: No profe, nos dio trecientos noventa y seis.  
246 P: Y ¿cómo le hicieron? O ¿por qué obtuvieron ese resultado?  
247 A27: (Risas) Pues no sé, es que nada más sumamos 197 más 199 y nos dio 396 (Risas).  
248 P: ¿Y a ustedes? (pregunta para el estudiante del equipo 5).  
249 A30: Diez mil.  
250 P: ¿Están de acuerdo?  
251 As: Sí.  
252 P: Éste, ¿Por qué? ¿Cómo fue que sacaron esos diez mil? ¿Qué hicieron?  
253 A30: Multiplicamos el número de podio por sí mismo.  
254 P: Muy bien, ¿están de acuerdo con lo que realizó su compañera?  
255 As: Sí.

El profesor sabe que el equipo 2 no obtuvo la respuesta correcta, pero no pregunta al grupo si están de acuerdo o no con la respuesta de su compañero y decide preguntar al equipo 5 cuál fue su respuesta y que fue lo que hicieron, pensando que con esto el grupo lograría entender de una mejor manera como debió haber sido esta respuesta.

Para las dos últimas preguntas es evidente cómo el equipo dos continua dando sus respuestas muy parecidas a la de la actividad I. Cuando se les pregunta por el patrón que rige la sucesión ellos contestaron que era parecido al ejemplo anterior (actividad I), solo que ahora dicen que es  $1+3+5+7+9\dots$ . No obstante, como analizamos anteriormente se puede mencionar que es la serie que genera la sucesión  $n^2$ . Asimismo observamos cómo el equipo cinco menciona que el patrón que rige la sucesión es un número al cuadrado y que la expresión algebraica de la sucesión figural del tipo cuadrático era  $x^2$ , esto se puede evidenciar en los registros del 256 al 284.

- 256 P: ¿Y el patrón que rige la sucesión? ¿Qué fue lo que contestaron? (pregunta para el equipo 2).  
257 A27: Que era proporcional al ejemplo anterior, por ejemplo:  $1+3+5+7+9$

- 258 P: Ustedes pensaron que era proporcional, pero no era así, se confundieron al dar su respuesta.  
259 A27: Es que volvimos a contar los “minions”  
260 P: Y ustedes ¿Qué fue lo que contestaron? (preguntando al equipo 5).  
261 A30: Un número al cuadrado.  
262 P: ¿Están de acuerdo con su compañera? O ¿hay alguna otra respuesta?  
263 A13: También un número al cuadrado  
264 P: ¿Y por qué un número al cuadrado?  
265 A30: Porque siempre es multiplicar el número de podio al cuadrado para que nos dé la respuesta  
266 P: ¿Es correcto lo que dice su compañera?  
267 As. Sí.  
268 P: ¿Y para la expresión algebraica? (pregunta para el equipo 2).  
269 A27: Pos dijimos que dos por  $a$  menos uno.  
270 El equipo 2 se confunde y piensa que la actividad es totalmente igual a la actividad I.  
271 P: Bueno ustedes relacionaron todo con la actividad I, pero ya se han dado cuenta que no era así ¿verdad?  
272 A27: Es que nos confundimos profe, pero ya sabemos cómo (risas).  
273 P: ¿Y ustedes? (pregunta para el equipo 5).  
274 A30: Pues  $x^2$   
275 P: ¿Y por que  $x^2$ ?  
276 A30: Porque multiplicando cualquier número por sí mismo nos da la respuesta  
277 P: ¿Están de acuerdo con la respuesta que da su compañera?  
278 As: Sí.  
279 P: Entonces si les hubiera pedido por ejemplo cuántos bloques tiene el podio 150, ¿qué hubieran hecho?  
280 A30: Pues multiplicar ciento cincuenta por ciento cincuenta.  
281 P: Muy bien ¿y para el podio dos mil?  
282 A30: Pues igual profe multiplicamos dos mil por dos mil.  
283 P: Muy bien ¿Hay algún otro equipo que tenga una respuesta diferente?  
284 (Nadie participa y el profesor decide continuar con la clase).

En general, se observó cómo los estudiantes validaron en forma grupal y se logró que el equipo 2 razonara acerca de las respuestas que habían tenido, con las explicaciones que se dieron entre estos dos equipos creemos que la mayoría de los estudiantes logró entender la actividad, recordando que en ésta, 4 de los 9 equipos obtuvieron todas las respuestas correctas, a diferencia de la actividad I, en la que algunos obtuvieron el patrón que regía la sucesión, pero desafortunadamente ninguno logró obtener la expresión algebraica.

#### 4.4.4 Situación de Institucionalización - Actividad II

Como en la institucionalización de la actividad I, el profesor es quien retoma el control de este momento de la clase y una vez que se concluyeron las diferentes situaciones de acción, formulación y validación por parte de los estudiantes, el profesor da el significado de lo que se conoce como sucesión del tipo cuadrático o de segundo grado, para después explicar el método de las diferencias, con lo cual se pretendía que los estudiantes tuvieran mayores posibilidades de obtener la expresión algebraica de una sucesión del tipo cuadrático.

En los registros del 285 al 303 se hace una pequeña introducción, primero el profesor preguntó sobre una de las características de una sucesión del tipo lineal para después indagar si pasa lo

mismo en una del tipo cuadrático, algunos estudiantes mencionaron que las diferencias no van a ser iguales, otros más, que sí.

- 285 P: Pongan atención por favor, les voy a explicar una de las características de una sucesión de segundo grado y un método para que sepan cómo sacar una expresión algebraica de segundo orden o del tipo cuadrático. Sí, recuerdan ayer en la sucesión ¿la diferencia de los términos cómo era?
- 286 (Los alumnos no contestan nada y el profesor escribe en el pizarrón la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9... propuesta en la actividad I).
- 287 P: ¿Cómo eran estas diferencias? (apuntando hacia la sucesión lineal escrita en el pizarrón).
- 288 A17: Por el dos, diferencia de dos.
- 289 P: Diferencia de dos, pero ¿siempre eran qué?
- 290 A18: Pares
- 291 A17: ¡Iguales!
- 292 P: Así es, siempre iguales, para cualesquiera dos términos consecutivos, las diferencias siempre eran iguales, ¿creen que pase lo mismo, para esta sucesión (refiriéndose a la sucesión de la actividad II)?
- 293 A: No.
- 294 P: Si hacemos las diferencias de estos términos ¿creen que pase lo mismo? ¿Que las diferencias sean iguales?
- 295 A27: No
- 296 P: ¿Por qué?
- 297 A27: Porque, porque se ve (risas).
- 298 A26: No, sí, sí son iguales.
- 299 A27: No, “pa mi no” (sic).
- 300 P: Entonces ¿qué creen que pase? ¿Que si sean iguales o no?
- 301 As: No.
- 302 P: ¿Por qué no?
- 303 A27: Es que se ve (risas), que no van a ser iguales

En los registros anteriores los estudiantes aún no están convencidos de su respuesta ya que se muestran algo temerosos al responder, aunque hay un alumno que percibe que las diferencias no son iguales (A27), su opinión no es considerada por sus compañeros, y el profesor aunque observó que él ya había notado que las diferencias no eran las mismas no le pidió explicarse, pues pensó que si lo hacía los demás alumnos ya no darían más propuestas.

De esta manera es que considerando la respuesta del alumno (registro 299) el profesor decide realizar las primeras diferencias para que así los alumnos pudieran de alguna manera corroborar o no sus afirmaciones. En los registros del 304 al 323 se puede comprobar que el profesor conjuntamente con los estudiantes realizan las primeras diferencias y por lo tanto lograron comprobar que éstas no eran constantes.

- 304 P: Bien, vamos a comprobar lo que dice su compañero. ¿En el primer término cuánto era?
- 305 As: Uno.
- 306 P: ¿En el dos?
- 307 As: Cuatro.
- 308 P: ¿En el tres?
- 309 As: Nueve
- 310 P: ¿En el cuatro?
- 311 As: 16.
- 312 P: ¿Y en el cinco?
- 313 As: 25.

- 314 P: Entonces, ¿Cuál es la diferencia de cuatro y uno?  
315 As: Tres.  
316 P: ¿De nueve y cuatro?  
317 As: Cinco.  
318 P: ¿De 16 y 9?  
319 As: Siete.  
320 P: ¿Y de 25 y 16?  
321 As: Nueve  
322 P: ¿Estas primeras diferencias fueron iguales?  
323 As: No.

Con este ejercicio, los estudiantes se dieron cuenta que las primeras diferencias en la sucesión no eran iguales y en seguida el profesor aprovecha para preguntarles si las segundas diferencias sí lo serán, un estudiante menciona que sí y el profesor decide comprobar lo antes dicho, lo cual se puede observar en los registros del 324 al 334. Asimismo se aprovecha para comentar que precisamente una de las características de una sucesión del tipo cuadrático es que las segundas diferencias son constantes o iguales.

- 324 P: Muy bien, entonces ya no fueron iguales como las diferencias de la sucesión que vimos en la actividad I. Pero ahora vamos a sacar las segundas diferencias, de éste a éste (refiriéndose a los términos de la primera diferencia) ¿Qué creen que pase?  
325 A27: No pues ahora sí van a ser iguales.  
326 P: Bueno, vamos a ver qué pasa. ¿Cuál es la diferencia de cinco y tres?  
327 As: Dos.  
328 P: ¿De siete y cinco?  
329 As: Dos.  
330 P: ¿Y de nueve y siete?  
331 As: Dos.  
332 P: ¿Qué paso?  
333 A17: Sí salió (queriendo decir que ya se repite o ya son constantes las diferencias).  
334 P: Ahora sí ya se repiten ¿verdad? Ya las diferencias son iguales. Siempre da dos, dos, dos. Ésa es precisamente una de las características de una sucesión y se les llama de segundo grado o cuadrática y es que las segundas diferencias sean iguales o constantes. Entonces, recordando que cuando las primeras diferencias de una sucesión las primeras diferencias son una constataste ¿es una sucesión de que tipo?

Como se puede observar, el profesor intentaba no dar él todas las respuestas, sino involucrar a los alumnos para que ellos fueran construyendo las características de una sucesión, en cierta medida les devolvía la responsabilidad del aprendizaje.

En lo que sigue el profesor define una sucesión del tipo cuadrático o de segundo orden y con base en ella explica el método de las diferencias, que les podría ayudar a encontrar la expresión algebraica de dicha sucesión.

- 340 P: Bueno, en esta sucesión, algunos equipos encontraron la expresión algebraica y de cierta manera lograron encontrarla “rápido”, dijeron que era  $x^2$ , pero, en otras ocasiones no es tan “fácil” deducir o encontrar esa expresión algebraica de una sucesión de segundo grado, es más complicado y para eso ahorita les voy a decir un método de cómo encontrar esa expresión algebraica que nos genera una sucesión de segundo orden, pero primero les voy a definir una sucesión de segundo grado, para

después continuar con el método.

341 P: Entonces, escriban por favor, “Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales pero las segundas sí los son, entonces la expresión que le corresponde a la sucesión es de segundo grado y tiene la forma  $an^2 + bn + c$ ”.

Entonces con esa expresión también se puede generar una sucesión y se pueden sacar las primeras y segundas diferencias. Ahorita vamos a sacar las primeras y segundas diferencias de esa expresión.

Entonces tenemos la expresión  $an^2 + bn + c$  que es una expresión que va a tener una sucesión de segundo grado, para poder sacar las diferencias vamos a sustituir cuando  $n$  vale 1. Por ejemplo es  $a(1)^2 + b$  ¿Por qué?

En los registros anteriores el profesor comienza a explicar que con la expresión  $an^2 + bn + c$  se puede generar también una sucesión, dándole valores a  $n$ . A lo largo de la explicación del método, el profesor retoma el contrato de Mayéutica Socrática, ya que intenta con algunas preguntas devolver el compromiso de resolución, al igual intenta que también participen y no sean simples espectadores, como se puede observar en los registros 342 al 354.

342 As: Por uno

343 P: Más  $c$  y nos queda  $a(1)^2 + b(1) + c$ , ¿eso es igual a qué? ¿Uno por uno?

344 As: Uno

345 P: ¿Por  $a$ ? ¿Uno por  $a$ ?

346 A17: Uno.

347 P: ¡No!

348 A17: Dos, tres (risas).

349 P: ¿Uno por  $a$  o  $a$  por uno?

350 A27:  $a$

351 As: Nnaa, aaaaaa (risas).

352 P: ¿Y  $b$  por uno?

353 A17: Pos  $b$  (sic).

354 P: Entonces, al sustituir  $n = 1$  nos da  $a + b + c$ , y entonces cuando  $n = 2$ , ahora sería ¿ $a$  por qué? (el profesor va anotando los resultados en la tabla de papel bond colocada previamente en el piarron).

El profesor mostró el resultado cuando  $n$  es igual a 1 y continúa trabajando con todo el equipo, cuando  $n$  vale 2. En los registros del 368 al 378 se puede observar la labor realizada por el profesor y los alumnos para cuando  $n$  vale 3, para después continuar analizando las primeras y segundas diferencias de esta sucesión.

368 P: Así es, entonces nos queda  $4a + 2b + c$ . ¿Y cuando  $n$  vale 3? ¿Qué sería? ¿ $a$  por qué?

369 As:  $a(3)^2$ .

370 P: ¿Y  $b$  por qué?

371 As:  $b(3)$

372 P: Entonces quedaría  $a(3)^2 + b(3) + c$ . Y ¿tres por tres?

373 As: nueve

374 P: ¿Por  $a$ ?

375 As:  $9a$ .

376 P: ¿Más 3 por  $b$ ?

377 As:  $3b$

378 P: Entonces nos queda  $9a + 3b + c$  y así podemos continuar sustituyendo valores de  $n$  en la expresión



$an^2 + bn + c$ , ahora vamos a sacar las primeras diferencias de estas dos (refiriéndose a las diferencias de  $(4a + 2b + c)$  y  $(a + b + c)$ ). Vamos a restar términos semejantes; es decir, las  $a$  con las  $a$ , las  $b$  con las  $b$  y las  $c$  con las  $c$ . ¿ $4a$  menos  $a$ , cuánto les da?

En los registros 378 al 390 el profesor y los estudiantes continúan analizando las primeras diferencias, se observa cómo el profesor pregunta a los estudiantes cuánto es  $c$  menos  $c$  y ellos no logran dar la respuesta correcta y hay un lapso de silencio, por lo cual decide poner un ejemplo con números naturales y lograr que los estudiantes relacionen la resta de números con la de variables, lo cual le resulta exitoso ya que los estudiantes consiguen dar la respuesta correcta que es cero. A veces los estudiantes no relacionan tan fácil lo aritmético con lo algebraico, esa transición no se da de manera natural (Fuentes, 2016, p. 40).

- 378 P: Entonces nos queda  $9a + 3b + c$  y así podemos continuar sustituyendo valores de  $n$  en la expresión  $an^2 + bn + c$ , ahora vamos a sacar las primeras diferencias de estas dos (refiriéndose a las diferencias de  $(4a + 2b + c)$  y  $(a + b + c)$ ). Vamos a restar términos semejantes, es decir, las  $a$  con las  $a$ , las  $b$  con la  $b$  y las  $c$  con la  $c$ . ¿ $4a$  menos  $a$ , cuántos les da?
- 379 A25:  $3a$ .
- 380 P:  $3a$ , más ¿ $(2b - b)$ ?
- 381 A23:  $1b$ .
- 382 P:  $1b$  o solamente  $b$ , es lo mismo. ¿Y  $c$  menos  $c$ ?
- 383 A21:  $a$
- 384 P:  $c$  menos  $c$  ¿es  $a$ ?
- 385 A21:  $e, r$  (risas).
- 386 (El profesor espera, alguna otra respuesta, pero los estudiantes están confundidos y no saben cuál es el resultado, por lo que el profesor decide poner un ejemplo)
- 387 P: Bueno un ejemplo con un número, ¿uno menos uno?
- 388 As: Cero.
- 389 P: ¿ $c$  menos  $c$ ?
- 390 As: Cero.

En lo que sigue el profesor conjuntamente con los estudiantes continúan la actividad obteniendo las primeras y segundas diferencias de la expresión  $an^2 + bn + c$ , hasta lograr que los estudiantes se den cuenta que precisamente las primeras diferencias de la sucesión no son iguales, pero al obtener las segundas diferencias, los estudiantes logran observar cómo estas ya son constantes o iguales, que en este caso es  $2a$ , lo cual se puede observar en los registros 424 al 427. Además se aprovechó para mencionar que, el siguiente paso es realizar las igualdades de la sucesión  $x^2$  con la expresión  $an^2 + bn + c$ . Cabe mencionar que la tarea que tienen los profesores de adecuar su estrategia de enseñanza para que los alumnos puedan seguirlo y de algún modo facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es muy complicada, pues es difícil que en la planeación éste pueda predecir todas las situaciones que se desencadenarán.

- 424 P: Si nos fijamos aquí ya se repite nuevamente el  $2a, 2a$ , (refiriéndose a las segundas diferencias) y si volvemos a sacar esta otra y las otras diferencias, nos va a volver a dar  $2a$ , siempre nos va dar  $2a$ . Ahora lo que tenemos que hacer es realizar una comparación entre la expresión general y ésta que fue la de nuestros bloques, lo que tenemos que hacer son igualdades, esta primera con esta primera



(refiriéndose al primer término de la sucesión  $x^2$  y al primer término de la expresión  $an^2 + bn + c$ ) nuestra segunda igualdad sería ésta con ésta (refiriéndose a la primera diferencia de la sucesión  $x^2$  y a la primera diferencia de la expresión  $an^2 + bn + c$ ) y nuestra tercera igualdad sería ésta con ésta (refiriéndose a la segunda diferencia de la sucesión  $x^2$  y a la segunda diferencia de la expresión  $an^2 + bn + c$ ). Entonces nos quedaría  $a + b + c = 1$  y nuestra segunda igualdad sería  $3a + b$  ¿igual con quién?

425 (El profesor espera unos segundos y nadie participa).

426 P: En la primera dijimos que es  $a + b + c = 1$  (señalando en la hoja de papel bond), nuestra segunda va a ser  $3a + b = 3$  y ¿ $2a$  igual con quién?

427 As: Con dos.

El profesor nuevamente decide resolver las igualdades conjuntamente con el grupo y no solamente dictarles la solución. Se logró que los estudiantes recordaran o razonaran sobre cómo resolver una igualdad, sin embargo nos limitaremos a realizar el análisis de los resultados que a nuestro juicio sean relevantes y omitiremos algunos procesos, muestra de ello se dio en el registro 434 al 440, en la que un estudiante hace mención a que “lo que se hace de este lado se hace de aquel lado” refiriéndose a la propiedad aditiva de la igualdad encontrar el valor de una variable en una igualdad.

434 P: ¿Saben despejar? Por ejemplo ¿Cómo le hacen para dejar sola a la  $a$ ? ¿Qué es lo que tienen que hacer? ¿No les han explicado eso?

435 A28: Borrarlo (Risas).

436 P: Bueno, sí lo puedes borrar pero no es tan fácil, matemáticamente hablando. Su compañera dijo que  $a = 1$  y sí es correcto pero ¿Pero qué se hace para obtener ese resultado?

437 (El profesor espera unos segundos y nadie responde nada por lo que decide explicarles).

438 P: Bien, cuando en una igualdad se tiene multiplicando una constante por una variable se puede dividir entre dos aquí y entre dos acá (refiriéndose a la propiedad multiplicativa, en este caso por el inverso)).

439 (Cuando el profesor menciona lo anterior una estudiante menciona lo siguiente)

440 A19: Lo que se hace de este lado, se hace de aquel lado.

Se pudo constatar cómo los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas muestran ciertas dificultades, ya que al realizar operaciones básicas como la resta de  $a - a$  que se analizó anteriormente y la que se muestra en los registros del 447 al 454, manifiestan cierta confusión cuando el profesor les pregunta cuánto es  $a(1)$ .

447 P: Entonces ¿ $a$  por uno?

448 A28: Uno  $a$ .

449 P: Entonces uno por  $a$  es igual  $a$ , (el profesor se da cuenta que hay cierta confusión y decide poner un ejemplo con números), les voy a poner un ejemplo con números, ¿dos por uno?

450 As: Dos.

451 P: Dos, en este caso (refiriéndose a la multiplicación  $(1)a$ ), es lo mismo pero con una variable o por una letra, pones ¿ $a(1)$ ?

452 A13:  $a$ .

453 P: En este caso fue lo que hicimos, entonces ya tenemos el valor de  $a$ , ¿Cuánto vale?

454 A13: uno.

Cabe señalar que como en los registros anteriores el profesor siempre trata de que los estudiantes estén participativos, realizando preguntas, haciéndolos caer en contradicciones, modificando las preguntas e intentando adecuarse a su nivel cognitivo, es decir, mediante un contrato “Ligeramente Didáctico”, en el que está buscando constantemente la aprobación, la certeza de que los alumnos lo van siguiendo para resolver el sistema de ecuaciones, obteniendo los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , como se puede ver en los registros 485 al 500.

- 485 P: Ahora bien, ya tenemos el valor de  $a$  el valor de  $b$  y el valor de  $c$ , vamos a sustituirlos en la expresión  $an^2 + bn + c$ , vamos a ver qué nos da. Entonces, ¿Cuánto vale  $a$ ?
- 486 As: Uno.
- 487 P: ¿Cuánto vale  $b$ ?
- 488 As: Cero.
- 489 P: ¿Y cuánto vale  $c$ ?
- 490 As: Cero
- 491 P: Entonces nos quedaría  $1(n^2) + 0(n) + 0$ . ¿Y  $1(n^2)$  cuánto les da?
- 492 As:  $n^2$ .
- 493 P: ¿Y cero por  $n$ ?
- 494 A17:  $n$ .
- 495 P: ¿Segura?
- 496 A17: no, es cero.
- 497 P: Entonces  $n^2 + 0 + 0$  ¿Cuánto es?
- 498 A17: Uno.
- 499 P: ¿Cuánto?
- 500 A17:  $n^2$ .

Por último en los registros del 503 al 512 se puede observar que el profesor explica, a manera de resumen, cuáles son los pasos para poder aplicar este método. Asimismo algunos estudiantes muestran cierto gusto por las actividades que realizaron y el profesor se despide dando las gracias por el apoyo brindado para realizar las actividades.

- 503 P: Este método es el que les puede ayudar en un momento dado, para que puedan obtener la expresión algebraica de una sucesión de segundo grado, realizando los pasos que hemos hecho. Que en resumen sería:
- 1.- Conocer los primeros términos de la sucesión de segundo grado.
  - 2.- Obtener las primeras diferencias.
  - 3.- Obtener las segundas diferencias.
  - 4.- Conocer las igualdades.
  - 5.- Resolver las igualdades.
  - 6.- Sustituir los valores de  $a, b, c$  en la expresión  $an^2 + bn + c$  y obtener la expresión algebraica que genera la sucesión de segundo grado.
- 504 P: Bien, ya tenemos el tiempo encima, me entregan por favor sus hojas de trabajo, júntenlas por favor un integrante de cada equipo y me las traen. ¿Qué les parecieron las actividades?
- 505 As: Bien,
- 506 A17: Sí estuvo bien profe.
- 507 A13: Pues sí estuvo bien y aprendimos algo nuevo.
- 508 P: Muchas gracias por haberme apoyado.
- 509 P: Sí verdad, gracias, nos vemos, con permiso.
- 510 A27: ¿Va a venir mañana?
- 511 P: No ya no, ya terminamos.

En general en esta actividad se pudo observar cómo el profesor también utilizó un contrato de la Mayéutica Socrática, ya que en todo momento realiza preguntas, manteniendo al grupo ocupado y de cierta manera devolviéndoles la responsabilidad de aprendizaje. Por su parte los estudiantes muestran ciertas carencias cuando trabajan con expresiones algebraicas, ya que se pudo observar que en algunas operaciones como  $(a - a)$ ,  $(a)(1)$ ,  $0(n)$ ,  $n^2 + 0$ , no responden de manera correcta, por lo cual se requiere seguir trabajando en este tópico matemático para que los estudiantes afiancen sus conocimientos.

## 4.5 Fase Validación

En esta fase de la Ingeniería Didáctica se pondrá a confrontación el análisis a priori y el a posteriori, esto con el fin de validar o refutar las hipótesis que se formularon precisamente en el análisis a priori, mediante el comportamiento y respuestas que dieron los estudiantes en la situación didáctica, definida en sus cuatro etapas que son la de acción, formulación, validación e institucionalización, pues uno de los propósitos sería el poder realizar algunos cambios que se consideren importantes para mejorar la secuencia.

### 4.5.1 Validación – Etapa de Acción (Actividad I)

Como primer punto el profesor debería de saludar a los estudiantes y para romper un poco la tensión correspondería preguntar a todo el grupo si saben lo que es un “minions” y escuchar algunas respuestas e inmediatamente después mencionarles que tenía un problema en el que había implicados unos “minions”, en una carrera de atletismo. Se consideró que el hecho de darle una contextualización a la secuencia didáctica ayudaría para “enganchar” a los estudiantes al reto de ayudar al profesor a resolver el problema, es decir, que aceptaran la devolución, lo cual en el análisis a posteriori se logró evidenciar que los estudiantes sí aceptaron la responsabilidad de resolver la situación con gran interés.

Asimismo se les pediría a los estudiantes que conformaran equipos de 3 a su consideración, para después pedir a cada equipo conformar un “círculo” para que trabajaran de mejor manera, lo cual sucedió y se pudo comprobar en el análisis a posteriori. Una vez que se conformaron los equipos se le pediría a un estudiante que leyera en voz alta la actividad I, lo cual sucedió en la experimentación.

La pregunta *a)* tenía la intención de que los alumnos centraran su atención en la manera en cómo se construyó la sucesión y consideramos que todos los equipos lograrían dar la respuesta correcta, mencionando que los “minions” que se pueden premiar en los podios 1, 2 y 3 son 1, 3 y 5 “minions” respectivamente y realizarían sus anotaciones en la tabla, situación que se dio en la experimentación, ya que se logró que todos los equipos dieran la respuesta correcta.

En general se pudo lograr la devolución en la actividad I, ya que el hecho de involucrar las figuras de los “minions” y los cubos para formar los podios contribuyó para lograr enganchar a

los estudiantes y resolver problema. Con respecto al inciso *a*) se obtuvo la respuesta correcta por parte de todos los equipos, tal y como se tenía previsto.

Cabe señalar que desde nuestra perspectiva y con los resultados obtenidos el hecho de utilizar los cubos y los “minions” ayudó en gran medida en la motivación y participación activa de los equipos, aunque para futuras aplicaciones se deja a criterio de cada profesor el implementar la secuencia didáctica con o sin el material antes mencionado, la cuestión de utilizar el material es por el tiempo que se necesita invertir para la elaboración del mismo.

#### **4.5.2 Validación – Etapa de Formulación (Actividad I)**

En seguida se analizarán las situaciones de formulación que esperábamos y las que realmente realizaron los estudiantes.

Para las preguntas *b*) y *c*) cuya intención era conocer si los estudiantes comprendieron cómo se iba generando la sucesión en los primeros podios, esperábamos que la mayoría de los equipos lo pudieran realizar de forma correcta, lo cual en el análisis a posteriori se pudo comprobar cómo todos los equipos logran dar respuesta correcta a estas preguntas.

Si bien, uno de los equipos, al estar acomodando los bloques no logró coordinar la estructura espacial y la numérica, ellos consiguen percatarse de su error, ya que cuando comenzaron a construir el podio 4 les faltaban “minions”, quedando podios vacíos, lo cual hizo que modificaran su estrategia, volviendo a analizar la forma en la que estaban construidos los podios anteriores para posteriormente realizarlo correctamente; cabe señalar que este error que cometió uno de los equipos de colocar un bloque en la intersección de dos, ya se tenía previsto en el análisis a priori.

Respecto a la pregunta *d*) que implicaba otro tipo de razonamiento, ya que era encontrar el número de “minions” en el podio 100, se logró que los equipos 1, 3, 4, 5 y 8 encontraran la respuesta correcta que fue 199 “minions”, en la que la mayoría de las estrategias fue ir obteniendo el resultado podio a podio, realizando una tabla vertical u horizontal y solo el equipo 4 logró encontrar un patrón para determinar el número de “minions”, el cual posteriormente se analizó. Mientras que los equipos 2, 6, 7 y 9 no lograron dar la respuesta correcta, intentando con operaciones erróneas o dejando en blanco la respuesta como fue el caso del equipo 9. Con esto podemos afirmar que nuestra validación se cumple para esta pregunta ya que habíamos contemplado que la mayoría de los equipos lo haría de manera correcta.

En la pregunta *e*) en la que se les preguntó acerca del patrón que rige la sucesión todos los equipos logran dar respuesta correcta, excepto el equipo 9. Entre las respuestas que plasmaron se tienen las siguientes: “la sucesión del número dos”; “2”; “la suma de dos “minions” a cada podio”: “el patrón 2”; entre otras. De todos los equipos, el 9 fue el que tuvo más dificultades para realizar la actividad, ya que a partir de la pregunta *d*) dejó en blanco las respuestas, pues no comprendían o tenían dificultad para poder obtener una respuesta.

Con lo anterior podemos decir que se obtuvo la validación, ya que nuestra hipótesis planteada era que para esta pregunta 6 o 7 equipos lograrían reconocer el patrón que rige la sucesión.

Para la última pregunta suponíamos que al menos un equipo lograría proponer una expresión algebraica correcta, lo cual en el análisis a posteriori se pudo comprobar que no fue así, a pesar de que 5 equipos proponen una expresión algebraica como “ $x + 2$ ”, “ $2(a)$ ”, “ $n + 2$ ”, entre otras, no lograron establecerla de forma efectiva, con lo cual no se logró validar esta pregunta.

#### **4.5.3 Validación – Etapa de Validación (Actividad I)**

En esta situación se pretendía que los estudiantes validaran en equipo y posteriormente se realizaría una validación de forma grupal, lo cual se pudo lograr y se consiguieron ambas encomiendas, en primer lugar los estudiantes analizaban, discutían las diferentes estrategias para dar respuesta a las preguntas en equipo y al terminar de dar sus respuestas se hizo pasar a dos integrantes de dos equipos diferentes a explicar sus procedimientos empleados en todas las preguntas propuestas.

Cabe señalar que para la última pregunta y como ningún equipo logró tener una respuesta correcta, el profesor necesitó explicar cuál era la expresión algebraica que generaba la sucesión y decidió primero explicar cuál era la expresión algebraica que genera los números pares y con esto consiguió que un integrante del equipo 4 propusiera la expresión “ $a + (a - 1)$ ” como respuesta a la expresión algebraica que genera la sucesión de la actividad I, que si bien no es la expresión más simplificada, sí genera la sucesión propuesta, de aquí la importancia de encaminar a los estudiantes para que por sí solos traten de dar una respuesta y conseguir que los estudiantes generen su propio conocimiento y no seguir una enseñanza tradicionalista, que podría no tener los resultados deseados.

#### **4.5.4 Validación – Etapa de Institucionalización (Actividad I)**

Para esta situación mencionaremos en general lo que el profesor pudo institucionalizar y cómo fue la forma de realizarlo. Se tenía contemplado definir lo que era una sucesión y una de las características de una sucesión del tipo lineal, lo cual fue llevado a cabo por el profesor de la siguiente manera:

En primer lugar el profesor preguntó a todo el grupo si sabían lo que era una sucesión, para después escuchar algunas respuestas que dieron los estudiantes como es: “lo que se va siguiendo”; “lo que lleva continuidad”, entre otras, lo cual aprovechó el profesor para definir lo que es una sucesión y explicar algunos ejemplos.

Después el profesor conjuntamente con los estudiantes analizó el comportamiento de la sucesión propuesta en la actividad I, realizando una serie de preguntas que los encaminó a reconocer el patrón de la sucesión. Posteriormente se estudiaron las diferencias de dos términos consecutivos

de la sucesión, puntualizando que las diferencias siempre se repiten y que es una característica de una sucesión del tipo lineal, con esto se definió formalmente una sucesión del tipo lineal.

Cabe señalar que en todo momento el profesor trata, de alguna manera, que los estudiantes participen en la construcción de las definiciones, no se quiso, ni fue la intención que ellos solo escucharan o se vieran como simple espectadores.

Por último se propusieron algunos ejemplos de sucesiones del tipo lineal, con lo cual se puede decir que el profesor logró institucionalizar lo que se había programado.

#### **4.5.5 Validación – Etapa de Acción (Actividad II)**

En un principio se tenía previsto realizar esta actividad en la segunda sesión de clase, pero como la primera se terminó 10 minutos antes, el profesor decidió aprovechar el tiempo para comenzar la actividad II y los estudiantes aceptaron realizarla, por lo cual la devolución se logró y se entregó el material a cada equipo.

En la pregunta *a)* los alumnos tenían que contar el número de cubos que hay en los tres primeros podios, se tenía previsto que todos los equipos contestarían de forma correcta, es decir, que son 1, 4 y 9 bloques respectivamente lo cual así sucedió y todos los equipos lograron dar la respuesta correcta como se pudo observar en el análisis a posteriori, por lo que se cumplió la validación para esta pregunta.

#### **4.5.6 Validación – Etapa de Formulación (Actividad II)**

En las preguntas *b)* y *c)* relacionadas a que los alumnos conocieran cómo se va construyendo la sucesión en los podios 4 y 5 también se logró la validación, ya que los equipos 1, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 obtuvieron la respuesta correcta y se había pronosticado en el análisis a priori que la mayoría lograría realizarlo de forma efectiva. El equipo 2 no logró dar las respuestas correctas ya que las relacionan con la primera actividad; de hecho, una de sus respuestas fue que “era similar al ejercicio anterior (actividad I)”. Por su parte el equipo 9 a partir de la pregunta *b)* no logra obtener ningún acierto y la mayoría de las preguntas las deja en blanco.

Así mismo el equipo 2 a la hora de acomodar los bloques no lo hace de forma correcta y coloca un bloque en la intersección de dos, algo que se tenía previsto que sucediera, por lo cual el profesor debería estar atento para ayudar a los equipos a analizar las estrategias utilizadas y con esto encaminarlos a rectificar las mismas para que lograran realizar la actividad de forma correcta.

Respecto a la pregunta *d)* relacionada a conocer el número de bloques para el podio 100 se logra la validación, ya que los equipos 4, 5, 6 y 7 dieron una respuesta favorable mencionando que son 10,000 bloques, mientras que los equipos 1, 2, 3, 8 y 9 no lograron establecer los bloques que tenía el podio, solo el equipo 2 intentó dar una respuesta y los demás dejaron la pregunta sin contestar, recordemos que nuestra hipótesis fue que la mayoría de los equipos tendría cierta

dificultad para obtener el resultado correcto, ya que se necesitaba otro tipo de razonamiento al que habían utilizado en las preguntas anteriores, pero que entre todos se lograrían generar argumentos para resolver la tarea.

Para la última pregunta que era establecer la expresión algebraica de la sucesión esperábamos que al menos un equipo lograra decir que la expresión era  $x^2$ , lo cual en el análisis a posteriori se pudo comprobar que los equipos 4, 5, 6 y 7 lograron contestar que la expresión era precisamente  $x^2$ . Por su parte los equipos 1, 3, 8 y 9 no contestaron nada. Con esto podemos afirmar que la validación estuvo presente en esta pregunta. Los estudiantes lograron identificar el comportamiento cuadrático.

#### **4.5.7 Validación – Etapa de Validación (Actividad II)**

En general en esta etapa se tenía contemplado que los estudiantes validaran en equipo y posteriormente se pasaría a dos integrantes de dos equipos diferentes a confrontar las respuestas a cada pregunta realizada en la actividad II, lo cual se puede confirmar que así sucedió ya que se logró evidenciar en análisis a posteriori la validación en equipos y cuándo el profesor hace pasar a dos estudiantes al pizarrón para preguntarles sobre las diferentes estrategias empleadas para dar respuesta a sus preguntas.

#### **4.5.8 Validación – Etapa de Institucionalización (Actividad II)**

En la etapa de institucionalización se contempló definir lo que es una sucesión del tipo cuadrático y explicar el método de las diferencias, lo cual si ocurrió y se puede observar en el análisis a posteriori. En primer lugar el profesor comienza preguntando a los estudiantes por las sucesiones del tipo lineal o de primer grado para después abordar la característica de una sucesión del tipo cuadrático o de segundo grado y posteriormente pasar a la definición de la misma.

Cabe señalar que en todo momento el profesor intenta mantener un contrato fuertemente didáctico en el que los estudiantes le ayuden a realizar algunas operaciones, realizando preguntas, es decir, manteniendo a la mayoría del grupo trabajando conjuntamente, para abordar la definición. Posteriormente el profesor comenta a los estudiantes que existe un método para obtener la expresión algebraica de una sucesión del tipo cuadrático, que en un momento dado, les podría ayudar para obtener dicha expresión. Cabe mencionar que el método no es de ninguna manera “fácil”, y tiene su grado de dificultad, por lo cual el profesor vuelve con la misma estrategia de seguir manteniendo a la mayoría del grupo participando en la explicación, resolución, de algunas operaciones tanto numéricas como algebraicas.

Asimismo a los estudiantes les quedó claro que si en una sucesión las segundas diferencias son constantes, entonces la sucesión será del tipo cuadrático.

Durante este proceso se pudo observar cómo los estudiantes no solo tienen dificultades cuando se trata con operaciones algebraicas, sino además, cuando se trabaja con números enteros y el cero, pues al preguntar al grupo cuánto es uno por cero, un estudiante menciona que es uno y los demás no saben qué contestar, entendiendo el silencio como un “no sé”, de aquí la importancia de que el profesor no sea un simple dictador, ya que este hecho que se presentó fue de suma importancia para conocer más acerca de los errores y dificultades que tienen los estudiantes de este grupo en particular, ya que como se pudo constatar, varios errores que cometen los estudiantes tienen su origen en la Aritmética y más aún en la transición de la Aritmética al Álgebra.







---

# Conclusiones

---



Después de llevar a cabo esta investigación con apoyo de la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica como metodología, y al analizar lo ocurrido en la experimentación se concluye que:

La teoría de Situaciones Didácticas nos permitió concebir esa génesis artificial que el profesor necesitaba construir para que estudiantes de tercer año de secundaria lograran por sí solos, a través de las diferentes situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, reconocer el comportamiento de una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático, llegar a la generalización cercana (obtención de los primeros términos mediante recuento, dibujo o tabla) y lejana (obtención de un patrón o términos generales, que difícilmente pueden obtenerse paso a paso), además se logró que algunos equipos llegaran a la expresión algebraica de una sucesión del tipo cuadrático.

Respecto a la metodología se consideró a La Ingeniería Didáctica de Artigue que nos permitió analizar a fondo nuestro diseño de la situación didáctica, realizando un análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de nuestro objeto matemático. Además, con esta metodología se consiguió realizar nuestros supuestos de lo que se podría presentar al experimentar o implementar la secuencia didáctica, realizar un análisis de lo que realmente sucedió para compararlo con lo que esperábamos que pasara y reflexionar sobre las bondades de la situación y las posibles mejoras que pudieran contemplarse para futuras investigaciones.

El hecho de utilizar la Ingeniería Didáctica nos permitió profundizar en la concepción, ejecución, observación y análisis de la secuencia didáctica. Además de realizar una comparación entre nuestras hipótesis y lo que realmente pasó y con esto realizar nuestras adecuaciones necesarias para mejorar la secuencia didáctica.

Si tuviera otra oportunidad de realizar una investigación propondría sin lugar a duda a la Teoría de Situaciones Didácticas que es el encaje teórico natural de la Ingeniería Didáctica como metodología.

Por otra parte, las sucesiones figurales han estado presentes desde siglos atrás. Se puede mencionar que los números figurados, como lo solían llamar los Pitagóricos, jugaron un papel primordial para el análisis de diferentes sucesiones y después para las series numéricas. Con respecto a los libros de texto y maestros, algunos cuando se aborda este tema en tercer año de secundaria, no proponen o, en su defecto, son pocos los ejercicios o problemas en los que se trabaje con sucesiones figurales del tipo lineal o cuadrático, además de que algunos estudiantes en la educación secundaria no cuentan con herramientas suficientes para llegar a la generalización de una sucesión del tipo lineal o cuadrático.

Por tal motivo se consideró rediseñar y aplicar una secuencia didáctica para ayudar a que los estudiantes lograran reconocer el patrón y la posible generalización algebraica de una sucesión

figural del tipo lineal y cuadrático. Se pretendió dotar de sentido al problema a través de su contextualización; es decir, explicando que la figura propuesta es un podio para premiar a determinados “minions”, cambiando el contexto matemático de la actividad propuesta en el fichero de actividades (SEP, 1999). La intención fue que los estudiantes se sintieran atraídos para resolver el problema, sin olvidar que nuestro propósito fue más allá de solo provocar una motivación.

Los resultados obtenidos en la aplicación de la situación didáctica, nos permiten deducir que el hecho de contextualizar la situación y darle cierto “sentido”, ayudó para que los estudiantes lograran en primer lugar aceptar resolver el problema y en segundo, que reconocieran una característica de una sucesión del tipo lineal y cuadrática, así como obtener la generalización cercana y lejana, el reconocimiento de patrones y en algunos casos llegando a la expresión algebraica de las sucesiones figurales.

En general con la implementación de la situación didáctica y con base al análisis realizado a las respuestas de cada una de las preguntas, se puede señalar lo siguiente:

La mayoría de los estudiantes logró coordinar la estructura espacial y la numérica, tanto en la sucesión figural del tipo lineal como del cuadrático.

Algunos estudiantes lograron establecer una relación funcional para encontrar la generalización numérica o algebraica. Aunque algunos otros utilizaron otro tipo de estrategias, como la recursividad, realizando dibujos, entre otros. Cabe señalar que los estudiantes muestran dificultades para llegar a la generalización de las sucesiones del tipo lineal y cuadrático, pero, es importante mencionar que los procesos para llegar a ésta, no deben menospreciarse; es decir, no debemos minimizar los procesos realizados por los estudiantes, pues el hecho de que no logren llegar a la generalización no significa un rotundo fracaso, sino que los estudiantes necesitarán tener más experiencias con este tipo de actividades para que logren por si solos tener una mejor comprensión del tema y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a la generalización.

Por tal motivo consideramos importante que desde edades tempranas (preescolar y primaria), se proponga a los estudiantes, actividades en las que se trabaje de manera implícita con las sucesiones figurales. Posiblemente esto ayudaría para que tengan menos dificultades al generalizar en el nivel secundaria, tal vez así se dé un mejor tránsito entre las diferentes etapas que se necesitan para llegar a una generalización.

La mayoría de los estudiantes en la sucesión figural del tipo lineal lograron encontrar el patrón que la rige, por el contrario en la del tipo cuadrático solo 12 de 29 estudiantes lograron deducir el patrón, por lo que se puede decir que a los estudiantes se les complica trabajar con las sucesiones del tipo cuadrático, para lograr que ellos aprendan este tema se requerirá un número suficiente de situaciones en las que lo trabajen, además, éstas podrían ser con el uso de sucesiones figurales o numéricas.

En la sucesión figural del tipo lineal un equipo logró establecer la expresión algebraica verbalmente y un estudiante de forma escrita. En cambio para la sucesión figural del tipo cuadrático, 4 de 9 equipos lograron establecer la expresión algebraica de forma escrita.

Entre los errores que se presentaron en las dos actividades por parte de los estudiantes se lograron identificar los siguientes: no lograban coordinar la estructura espacial y la numérica, exceso de confianza, no reconocían el comportamiento de la sucesión, obtenían una expresión numérica incorrecta, errores relacionados a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas y por ausencia de sentido al no poder establecer la expresión algebraica que genera la sucesión.

Otra dato importante es mencionar que las integrantes del equipo 9 fueron las que más dificultades tuvieron, pues en la actividad I, solo contestaron los 3 primeros incisos, dejando los siguientes 3 sin resolver y para la actividad II solo se limitaron a contestar el primer inciso, dejando sin respuesta los posteriores. Sería de suma importancia investigar las causas por las cuales los estudiantes tienen este tipo de errores, que generalmente tienen su origen en actitudes afectivas como lo comenta Ruano, Socas y Palarea (2015, pp. 27-28), “En muchas ocasiones los bloqueos que las actitudes causan en los alumnos son la principal causa que les lleva al error. Así, debemos motivarlos y prepararlos para que no tomen el error como negativo, sino como una oportunidad para avanzar en el aprendizaje”.

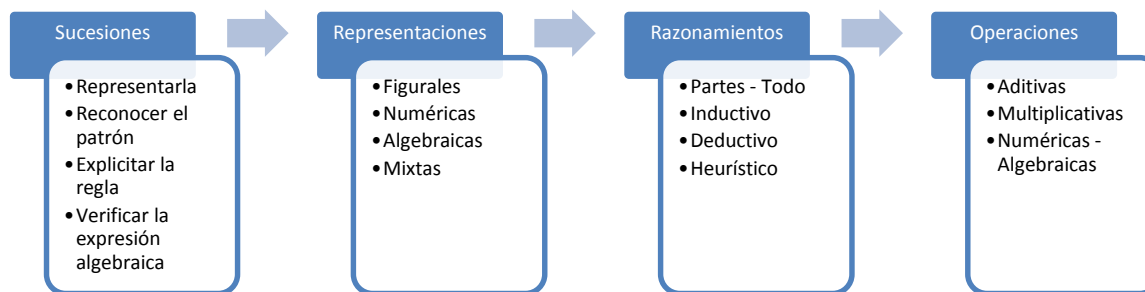
Se considera que el papel que juega el profesor es fundamental para que los estudiantes logren superar las diferentes dificultades que se puedan presentar en los procesos de enseñanza de las Matemáticas, ya que el tema es complejo. Por ejemplo, el profesor deberá analizar la forma de cómo expresar a los estudiantes que encuentren “la expresión algebraica”, “la fórmula”, “el término enésimo”, que si bien la anterior terminología podría referirse a lo mismo, el estudiante podría confundirse al estar cambiando continuamente el vocabulario para un mismo fin.

En síntesis, se puede mencionar que el objetivo general se cumplió y tomando en cuenta que el análisis cognitivo permitió observar que los alumnos tenían dificultades con las sucesiones del tipo lineal, la decisión de realizar una primera actividad con este tipo de sucesiones ayudó a los estudiantes a que reforzaran su conocimiento respecto al tema, lo que posiblemente generó que en la segunda actividad, relacionada con el desarrollo de una sucesión del tipo cuadrático fueran 4 de 9 equipos los que propusieran una expresión algebraica correcta, a diferencia de la primera actividad en la que solo un equipo llegó a la expresión algebraica de forma verbal.

Asimismo es importante mencionar que se realizó un breve análisis de la situación de aprendizaje considerando el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF) desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2014), el cual permitió reforzar el análisis de nuestra investigación identificando lo siguiente:

En la sucesión propuesta los estudiantes necesitan sistematizar (representarla), reconocer el patrón (regla), explicitar la regla y verificar la expresión algebraica, tal y como lo comenta

Ruano, Socas y Palarea (2015, p. 20), lo que podría implicar que los estudiantes transiten por diferentes representaciones figurales, numéricas, algebraicas y mixtas. Los posibles razonamientos podrían ser: esquemas (partes - todo), inductivo, deductivo, heurístico, entre otros; así pues la situación está diseñada para inducir a que los estudiantes trabajen con operaciones aditivas, multiplicativas, tanto numéricas como algebraicas, que se relacionan con una sucesión figural del tipo lineal y cuadrático.



**Figura 69. Diferentes representaciones, razonamientos y operaciones de las sucesiones.**

Por último añadir que el proceso para llegar a la expresión algebraica de una sucesión tanto del tipo lineal como del tipo cuadrático, no es una tarea fácil y los estudiantes presentan dificultades para establecer una relación entre números y variables (letras), como lo comenta Ruano, Socas y Palarea (2015, p. 21) “Este proceso de establecer una relación entre letras y números, por ejemplo, debe ser desarrollado desde su doble vertiente, que explicita la reversibilidad del objeto: pasar de lo particular (partes) a lo general (todo) y ver lo general (todo) en lo particular (partes)”.

El haber utilizado material didáctico provocó que los estudiantes se sintieran más motivados para resolver la actividad propuesta, consideramos que fue un impulso para “engancharlos” a trabajar en la actividad, aunque por otro se necesita invertir tiempo para la elaboración del material.

Algunas de las desventajas y limitantes de una investigación de este tipo es considerar un grupo completo para el análisis, pues aun y cuando se decidió hacer equipos de 3 integrantes, es difícil monitorear a cada uno, saber exactamente qué es lo que comentan, discuten o proponen.

El utilizar audio y video no siempre nos garantiza un éxito ya que pueden surgir problemas para reproducirlo. La recolección de notas de clase en las que estuvieron realizando sus estrategias de solución, muchas veces nos dejan con dudas de cómo realmente dieron solución al problema, así pues, consideramos que esta parte de la recogida de la información deberá ser una combinación entre utilizar audio, video y notas de clase, con la intención de poder tener los mejores resultados en el análisis de los mismos.

Además, en un primer momento, se sugiere omitir de la situación didáctica la explicación del método de las diferencias que se utiliza para encontrar la expresión algebraica de una sucesión del tipo cuadrático, ya que es un método en el que hay que realizar diferentes procedimientos y en el que intervienen diferentes conceptos matemáticos, como son: la igualdad, resolución de una ecuación lineal, operaciones algebraicas, entre otros, en el que los estudiantes pudieran sentirse confundidos.

Por otro lado, mencionar que solo se realizó el análisis de dos situaciones didácticas debido al tiempo otorgado para llevar a cabo las mismas, ya que el profesor investigador no contaba con grupo a su cargo y se pidió la colaboración de la institución para llevar el trabajo de investigación, la cual nos arrojó resultados alentadores que ya se han mencionado y que en próximas investigaciones, con mayor tiempo disponible para la experimentación, se sugiere realizar mínimo 3 situaciones del mismo tipo, dando espacio para que el alumno mejore la técnica con que resuelve las situaciones planteadas.

Es importante mencionar que la mayoría de las investigaciones que se consultaron y que están relacionadas con sucesiones figurales, tienen que ver con aspectos correspondientes a las dificultades de los alumnos y profesores, y solo algunas corresponden sobre la manera en la que los profesores las ponen en juego en el salón de clases y más aún, sobre el carácter en la que las sucesiones figurales de segundo grado pueden convertirse en una herramienta didáctica eficiente, algo de lo que se pudo constatar en esta investigación con la situación didáctica propuesta, pues los alumnos lograron transitar por generalizaciones cercanas, lejanas y en algunos casos llegando a la expresión algebraica de una sucesión del tipo lineal y cuadrático.

Por último, me gustaría añadir que durante mi trayectoria en el posgrado aprendí que la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas no es algo trivial, que el éxito o el fracaso no depende solo del profesor, ni del alumno, existen otros factores como el saber que se pone en juego, el entorno familiar de cada alumno, condiciones culturales, económicas, emocionales, la infraestructura de la escuela, entre otros más, lo importante es saber confrontar cada una de ellas y así poder mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Asimismo, reconocer que existen diferentes teorías en Matemática Educativa, como pueden ser de enfoque cognitivo, constructivista, sistémico, semiótico, crítico, humanista, socioepistemológico, realista, etnomatemática, que nos podrían ayudar a mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y será a consideración de cada profesor el utilizar una, otra, o bien una combinación de varias teorías, con la que considere que podría aportar más a su desarrollo profesional, lo importante es reconocer que la mayoría de las teorías buscan un mismo fin, el de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.







---

# Referencias

---



- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P, Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Colombia: Iberoamérica.
- Araujo, M., García, S., García, J. y López, O. (2006). *Matemáticas I*. Recuperado de [http://issuu.com/sbasica/docs/matematicas1vol1\\_1314](http://issuu.com/sbasica/docs/matematicas1vol1_1314).
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. Parra C. y Saiz I.(comps.): *Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires: Paidós Educador.
- Callejo, M.<sup>a</sup> L. (abril/junio 2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 5-8.
- Calvillo, N. (2007). *Convergencia de sucesiones numéricas: una visión alternativa*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2), 30-40. Recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/10/15>.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Traducción de C, Gilman). Argentina: Aique.
- Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI.
- Escareño, F. y López, O. (2013). *Matemáticas 2*. México: Trillas.
- Espinoza, H., García, S. y García, M. (1999). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (abril/junio 2015). Mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 39-48.
- Ferrini, J., Lappan G. & Phillips E. (1997). Experiencias with Patterning. *Teaching Children Mathematics*. 3(6), 282-289.
- Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 73, 38-44.
- Gálvez, G. (1994). La Didáctica de las Matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (comps.). *Didáctica de las matemáticas, aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós Educador.
- García, S. y Mendoza, T. (2008). *Fractal 3. Matemáticas. Secundaria. Tercer Grado*. México: SM.
- Ibañez, P. y García, G. (2004). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. México: Cengage Learning.
- Icaza, A. (2013). *Matemáticas 3*. México. Santillana.

- Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76, 83-103. Recuperado de [http://www.sineuon.org/numeros/numeros/76/Articulos\\_04.pdf](http://www.sineuon.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf).
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades de los estudiantes. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 77-80). Bogotá: Una empresa docente.
- Londoño, N., Kakes, A. y Álamo, A. (2014). Del reconocimiento de patrones a la generalización. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 361-367. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1992): *Pensar matemáticamente*. Barcelona. Ministerio de Educación y Ciencia / Labor.
- Miller, C. D., Heeren, V.E. y Hornsby, J. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicación*. México. Pearson Educación.
- Osorio, J. C. (2011). Dificultades para la construcción de un modelo algebraico de segundo orden a través de sucesiones, para definir el enésimo término. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 13-22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>.
- Osorio, J.C. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 75-83. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>.
- Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En *Enseñar Matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.; análisis y propuestas*. (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.
- Pérez, A. R., Pérez, A. D. y Hernández, H. (2013). Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 863-871. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>.
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Students in Mathematics*. 60, 71 – 93.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds.). *Educación Matemática*. Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamericana S.A. de C.V. 69-108.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M.<sup>a</sup>, M. (abril/junio 2015). El proceso de Generalización en alumnos de Secundaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 18-29.

- Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M.<sup>a</sup>, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Granada: Editorial Universidad de Granada. 311-322.
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 1: Construcción del pensamiento*. México: Fernández Editores.
- Schmelkes, C. y Elizondo, N. (2010). *Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis)*. México: Oxford.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de estudio 2011, *Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas*. Recuperado de [http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG1EROSEC\\_MAT2013.pdf](http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG1EROSEC_MAT2013.pdf)
- Socas, M., Ruano R. y Hernández J. (marzo, 2016). Mapas competenciales del contenido matemático curricular y de una situación de aprendizaje matemático. *Números*, 9, 7-22.
- Socas, M. M. (2014). El modelo de Competencia Matemática Formal (CMF): Una organización fenomenológica de las Matemáticas de la Educación obligatoria. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 21, pp. 9-43.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (77), 5-34.
- Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. España: Reverte.
- Torres, M., Borjon, E. y Sosa, L. (2012). Representaciones semióticas del concepto de sucesión con uso de tecnología TI-INSPIRE. VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática “ Dr. Eugenio Filloy Yagüe”. México.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y M. Trigueros (2005). Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa. México: Trillas.
- Velasco, K. y Acuña, C. (2010). El uso de patrones geométricos para la construcción del lenguaje simbólico en estudiantes de nivel medio superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 805-811. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme23.pdf>.
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.
- Zapatera, A. (2016). Cómo desarrollar el pensamiento algebraico. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 73, 32-37.





# Anexos

---





## Anexo 1: Transcripción de la clase del 7 de abril de 2016

### Clase de Matemáticas III

7 de Abril de 2016

#### Aplicación de la Situación Didáctica “Premiando a Minions”

L. en M. José Rolando Palomino Iraburo

#### Actividad I

Nomenclatura utilizada:

P: Profesor

Para guardar el anonimato de los alumnos se limitará a poner A1, A2, A3,... y así sucesivamente.

As: Cuando varios alumnos hablen al mismo tiempo y den una misma respuesta.

Ax: Se utilizará cuando varios alumnos hablen y no se les entienda lo que dicen.

El inicio de la clase fue a las 8:51 horas del día 07 de Abril de 2016, en la que surgieron los siguientes momentos:

1	P: Buenos días.
2	As: Buenos días.
3	P: Para comenzar con la actividad les haré la siguiente pregunta ¿alguien sabe qué es un “minions”?
4	As: ¡siiii!
5	P: A ver, ¿qué son?
6	A1: Pues son como unos “animalillos” que salen en una película.
7	P: Bien ¿Alguien más que quiera participar?
8	A2: Son unos monillos que todos se parecen.
9	P: Bueno, los “minions” son los personajes que salen en la película “mi villano favorito”. Entonces vamos a tratar de resolver un problema de atletismo con “minions”. Les voy a entregar unas actividades, donde ustedes van a contestar unas preguntas, les voy a entregar este material y ahorita entre todos resolvemos, perdón, leemos la actividad y si tienen alguna duda me preguntan.
10	P: Se pueden por favor formar en equipos de tres.
11	A3: Ya estamos profe.
12	P: Que sea rapidito por favor para entregarles las actividades.
13	A3: ¿Vamos a hacer un “minions”?
14	P: ¿Ya están? (refiriéndose a los equipos). Entonces si quieren formarse como en un anillo o un círculo.
15	P: Entonces ¿Quién quiere leer la actividad I? A ver, guarden silencio van a leer la actividad.
16	A4: ¿Es ésta?
17	P: Sí es ésa.
18	P: Si se fijan en el podio 1, hay un bloque y hay un “minions” que se está premiando, en el podio 2

	¿Cuántos hay?
19	As: Tres.
20	P: ¿Y en el podio 3?
21	As: Cinco.
22	P: Entonces lo que se les pide en el inciso <i>a)</i> es: Cuántos “minions” se pueden premiar en el podio 1, podio 2 y podio 3 y lo van a anotar en la tabla. Ahí van a anotar cuantos “minions” hay en cada pido de premiación y así van a seguir contestando las preguntas. La pregunta que sigue es ¿construyan con los bloques y los “minions” el podio 4? ¿Cómo creen que se va a formar el podio 4? Y anotan cuántos “minions” se pueden premiar.
23	Los equipos comienzan a realizar la actividad I, mostrando gran interés por efectuar la misma. Las primeras tres preguntas todos los equipos logran dar repuesta de manera correcta.
24	El equipo 7 cuando comienza a acomodar los cubos lo hace de manera incorrecta.
25	Equipo 7 A5: Pon ese otro “minions” allá. A6: ¿Y luego, ya no tenemos “minions”? A6: ¿Por qué nos faltaron? A5: A ver los demás (refiriéndose a los podios propuestos en la actividad). A5: Ah, no era así, es uno arriba de otro. A6: Ah síiiii!
26	Ya para la pregunta <i>d)</i> en la que se les pedía encontrar el número de “minions” para el podio 100 algunos equipos como el 2, 3, 4, 5 y 7, comienzan sus estrategias podio a podio. Los equipos 2, 6 y 9 no lograron dar la respuesta correcta. El único equipo que no intentó una estrategia de solución fue el equipo 9, ya que desde un principio tuvo problemas para entender la actividad y no lograron terminar lo que se les proponía.
27	(Algo interesante que surgió en el equipo 4 fue que comienzan su estrategia podio a podio y logran identificar que se repite un patrón que ellos entendieron de la siguiente manera: por ejemplo, si ellos querían saber cuántos “minions” hay en el podio 4, comentaban que al 4 le debían quitar 1 y ese resultado deberían sumárselo nuevamente al número de podio, dando como resultado 7, que es precisamente el número de “minions” que hay en ese podio y con esa estrategia podrían saber el número de “minions” que hay en cualquier podio).
28	En la pregunta <i>e)</i> que hacía referencia a encontrar el patrón que rige la sucesión todos los equipos a excepción del 9, logran dar una respuesta correcta, ya que hacían referencia a respuestas como: “la suma de dos”, “la suma de dos “minions” a cada podio”, entre otras.
29	Por último en la pregunta <i>f)</i> donde se les pedía que encontrarán la expresión algebraica desafortunadamente ningún equipo logra hacerlo de forma correcta, aunque si hubo equipos como el 1, 2, 4, 5, 6 y 7 que intentaron dar una repuesta como: $x + 2$ , $n + 2$ , $(x)2$ , entre otras. Es importante resaltar que el equipo 4 sí hablaba de una solución correcta pero no logro hacerlo de forma escrita; más adelante se hará un análisis más puntual de esta situación que se presentó.
30	Desafortunadamente no se lograron obtener las conversaciones que hacían los equipos a la hora de estar dando respuesta a las diferentes preguntas, lo que si se logró observar en el video es cómo, por lo menos, siete equipos trabajan colaborativamente entendiendo, discutiendo, planteando, diferentes estrategias para dar respuesta a las preguntas, es decir, se puede apreciar (con las gesticulaciones) cómo los integrantes de cada equipo participan en las diferentes actividades. Del equipo dos se logra rescatar una pequeña conversación en la que un estudiante está tratando de convencer o explicar a sus compañeros que existe una diferencia de dos o el cambio que hay en cada podio y fue la siguiente:
31	Equipo 2: A7: Es que mira, ya después de sumarle dos, le vas sumando de dos en dos, así hasta que salga el 19 y luego se lo sumas de dos en dos hasta...(inaudible).
32	Con la anterior conversación y las diferentes gesticulaciones que realizan los estudiantes, podemos decir que si se presentaron validaciones en cada equipo por lo menos en los antes mencionados.
33	Una vez que el profesor comprobó que algunos equipos ya habían terminado y los demás ya no intentaban responder las preguntas, pasó al pizarrón a dos integrantes de dos equipos diferentes para que respondieran a las preguntas planteadas en la actividad I.
34	P:Vamos a pasar al pizarrón a dos de sus compañeros, para resolver el problema entre todos.

	¿Quién pasa de ustedes dos? (Refiriéndose al equipo 2).
35	As: Risas...
36	A8: Él, profe (Señalando a su compañero con el dedo).
37	A9: No manches, (risas...).
38	El profesor previamente había analizado a cada equipo y uno de los que tuvo mayor participación y aciertos en las preguntas fue el equipo 4, por lo cual se hizo pasar a un integrante de ese equipo y a uno del equipo 2, quienes estuvieron también participativos pero con más errores . Como los primeros tres incisos eran preguntas que el profesor consideró que todos los equipos podían contestar con facilidad, decidió preguntarles las respuestas a todo el grupo.
39	P: Pongan atención todos para que vean como resolvieron la actividad sus compañeros. En el podio 1 ¿Cuántos “minions” debíamos de tener? (Preguntando a todo el grupo).
40	As: Uno.
41	(El profesor le pide a un estudiante que vaya anotando los resultados en la tabla que está en la hoja de papel bond colocada previamente en el pizarrón).
42	P: ¿En el 2?
43	As: Tres.
44	P: ¿En el 3?
45	As: Cinco.
46	P: ¿En el 4?
47	As: Siete.
48	P: ¿En el 5?
49	As: Nueve.
50	P: Ahora bien, les pedía que ¿Cuántos “minions” se pueden premiar en el podio 100 de la sucesión? ¿Tu cómo le hiciste para saber cuántos “minions” hay en el podio 100? (refiriéndose al integrante del equipo 2 que paso al pizarrón).
51	A12: Es que como yo...inaudible... y me salió 19 y lo seguí contando así sucesivamente y el resultado me salió 99.
52	El profesor sabe que es un resultado incorrecto y para confrontar el resultado con el de su compañero que paso al pizarrón señala lo siguiente: P: Éste, ¿tu obtuviste un resultado igual? ¿Cuál fue tu estrategia? (Preguntando al estudiante del equipo 4).
53	A13: Por ejemplo en el 5 (refiriéndose al podio 5) menos uno, te da cuatro, pero en vez de restárselo yo se lo sumé y te da nueve.
54	P: Nueve, ¿Y en el podio 4?
55	A13: Igual en el cuatro, cuatro menos uno, te da tres, pero en vez de restárselo se lo sumo,... inaudible..., te dan cinco.
56	Es evidente que el estudiante tiene un error a la hora de hacer la suma y en lugar de sumar cuatro más tres, suma cuatro más uno. Más adelante con otro ejemplo se comprobará que la estrategia que utilizaron los integrantes del equipo 4 es correcta.
57	P: Si se fijan, su compañero utilizó esa estrategia, dice que él le restaba un uno, cinco menos uno, cuatro pero ese cuatro se lo sumaba al cinco y le daba nueve, le daba el resultado correcto. Entonces ¿para el podio 100 cómo le hiciste?
58	A13: Para el 100 ya nada más hice, cien menos uno, te da noventa y nueve y en vez de restárselo se lo sumas y te da 199.
59	P:Entonces este es el resultado correcto, para el podio 100, éste ¿algunos otros tuvieron otra estrategia?
60	(El profesor espera algunos segundos para ver si algún equipo presentó otra estrategia, lo cual no sucede y continúa con la clase).
61	P: Su compañero logró encontrar esa estrategia que es correcta, pero ahora viene la otra pregunta ¿Cuál es la expresión algebraica? es decir, si ponemos por ejemplo una expresión algebraica que al momento de sustituir esa variable nos da el número de “minions” de cualquier podio. ¿Tú encontraste alguna? (pregunta para el estudiante del equipo 2).
62	A12:Mmm no.
63	P: ¿Alguien encontró una expresión algebraica?
64	Como nadie contesta el profesor pregunta al integrante del equipo 4 si en su equipo habían encontrado

	alguna, a lo que contestó: A13: Pues no estoy seguro si sea.
65	P: Vamos a ver y ahorita lo vamos a resolver entre todos.
66	El alumno anota en el pizarrón que la expresión que ellos consideraron fue $x + 2$ .
67	Se escuchan pláticas entre los equipos. P: A ver pongan atención, su compañero dice que es $x + 2$ ; esta expresión algebraica lo que nos dice es que si sustituimos aquí (refiriéndose a la variable) cualquier número de podio nos tiene que dar este valor (refiriéndose al número de “minions”), vamos a ver si es cierto. Supongamos que $x$ vale uno, uno más dos, ¿Cuánto nos da?
68	As: Tres.
69	P: Pero en el podio uno nos tiene que dar uno, entonces ésta no es (la expresión algebraica que propuso el equipo 4), para que sea ésta correcta, se necesita que la expresión algebraica que propongamos nos de cualquier resultado.
70	Equipo 2 A15: $x + 1$ .
71	P: $x + 1$ , dice su compañero (el profesor anota la expresión algebraica en el pizarrón). Vamos a sustituir cuando vale 4 por ejemplo, cuatro más uno, ¿igual?
72	As: Cinco.
73	P: Cinco verdad y es 7 (refiriéndose al número de “minions” en el podio 4), esa expresión propuesta por su compañero no nos sirve, ¿alguna otra? ¿Quién propuso otra? ¿Ustedes? (equipo 7).
74	Equipo 7: A16: Pero yo lo hice : $n + 2$ .
75	P: : $n + 2$ fue la misma que dio tu compañero, si se fijan lo único que cambia es la variable, no nos da el resultado que queremos, ¿otra propuesta? No sé ¿qué se les ocurre? El profesor espera unos segundos y nadie participa, por lo que intenta ayudarlos y continua preguntando: P: Fijense ¿qué números son éstos? (señalando a los números que generan la sucesión en la tabla), uno, tres, cinco, siete, nueve, ¿Cómo se les llama a estos números? ¿Los números qué?
76	A17: Impares ¿no?
77	P: Así es, son los números impares como dijo su compañero, son puros impares. Por ejemplo si tuviera dos, cuatro, seis, ocho, ¿Qué números son éstos?
78	As: Pares.
79	P: Son números pares y éstos ¿con cuál expresión algebraica podemos representar estos números pares?
80	Los alumnos no proponen ninguna expresión y el profesor intenta que propongan alguna mencionando lo siguiente:
81	P: ¿Con $x$ ? ¿ $x + 2$ ?
82	A18: Así si es cierto con $x + 2$ .
83	P: $x + 2$ , a ver vamos a ver, por ejemplo cuando $x$ vale uno, es uno más dos, tres, ya no nos dio, porque debería ser dos (refiriéndose al primer término).
84	El profesor valora la situación y se da cuenta que los estudiantes no logran encontrar la expresión algebraica que genera los números pares y decide explicarles cuál debería ser.
85	P:Entonces la expresión algebraica para generar los pares es $x^2$ o $2x$ , es lo mismo, por ejemplo, vamos a sustituir cuando $x$ vale uno, ¿dos por uno?
86	As: Dos.
87	P: Y si nos da dos (primer número de la sucesión 2,4,6,8). Cuando $x$ vale tres, ¿dos por tres?
88	As: Seis.
89	P: Y si nos da el seis. Cuando $x$ vale cuatro ¿Dos por cuatro?
90	As: Ocho.
91	P. Y si nos da el ocho. Entonces, ya tenemos la expresión algébrica para los pares y para los impares ¿Cuál sería? Dijiste que tú ya la tenías (integrante del equipo 4), a ver anótale, vamos a intentarlo.
92	S13: O sea, si le pone por ejemplo $a + (a - 1)$ , yo lo pondría así, o sea el número más el número menos uno.
93	P: Dice su compañero que es el número más el número menos uno, entonces vamos a comprobar. Por

	ejemplo para el tres, sería tres más el número menos uno ¿tres menos uno?
94	As: Dos.
95	P: Dos ¿y nos da?
96	As: Cinco.
97	P: Que sería éste (refiriéndose al número 5), ¿verdad? que es correcto. Vamos a ver con otro, con el cinco. Si $a$ vale cinco, más ¿ $a$ menos uno?
98	A18: Cuatro.
99	P: Cuatro. Y cinco más cuatro sería nueve, ahí estamos comprobando que si nos da el nueve como en la tabla, por lo tanto la expresión algebraica propuesta por su compañero es correcta, pero otra expresión algebraica podría ser $2x - 1$ que es similar a la que propuso su compañero, por ejemplo, ¿Qué valor quieren que le pongamos a $x$ ? ¿Cuándo vale cuánto?
100	(El profesor espera unos segundos para ver si se propone algún valor, pero ninguno participa).
101	P: ¿Cuándo vale 5?
102	As: Sí.
103	P: ¿Dos por cinco?
104	As: Diez.
105	P: Dos por cinco, diez ¿menos uno?
106	As: Nueve.
107	P: Nueve y nos dio el resultado correcto.
108	A19: ¿Y con el uno?
109	P: ¿Perdón?
110	A19: ¿La del uno?
111	P: La del uno, dos por uno menos uno ¿dos por uno?
112	A19: Dos.
113	P: ¿Dos menos uno?
114	As: Uno.
115	P: Uno, nos da el uno, entonces ustedes rápidamente cuando yo les pedía el de 100 (al número de “minions” que se puede premiar en el podio 100), podrían a ver hecho, dos ¿por cien?
116	As: Doscientos
117	P: Doscientos ¿menos uno?
118	As: Cien noventa y nueve.
119	P: Ciento noventa y nueve y ahí encontraría el número de “minions” que se pueden premiar en el podio 100, con esta expresión rápido encuentran cualquier valor, si les hubiera pedido el mil, el dos mil, nada más tendría que sustituir el número que se les pide en esta expresión, es decir, multiplicarlo por dos y restarle uno.
120	P: Entonces, si la mayoría lo notó, hay un patrón que rige este comportamiento (el profesor se acerca para realizar un señalamiento en la tabla) ¿Cuál es?
121	As: Dos.
122	El profesor se acerca nuevamente a la tabla y señala: P: Aquí se le van agregando dos, aquí dos, etc.
123	Una vez que todo el grupo se dio cuenta de que existe un patrón o comportamiento, considera que es conveniente definir lo que es una sucesión y realiza la siguiente pregunta:
124	P: ¿Alguien sabe que es una sucesión?
125	(Silencio por unos segundos).
126	P: Lo que piensen.
127	A10: Lo que se va siguiendo.
128	P: Lo que se va siguiendo (mencionando lo que dijo la alumna) ¿Alguien más?
129	P: Lo que se les venga a la cabeza.
130	A11: Pues lo que lleva continuidad.
131	El profesor espera unos segundos para ver si alguien más quiere participar, pero ninguno lo hace y pasa a definir qué es una sucesión.
132	P: Entonces una sucesión es un conjunto de números escritos en un orden específico y se denota como $a_1, a_2, a_3 \dots$ así sucesivamente hasta $a_n$ . A $a_1, a_2, a_3$ se les llama a cada uno término de la sucesión, que en este caso (refiriéndose a la sucesión 1, 3, 5, 7, 9 escrita en la tabla) sería término 1, término 2,

	término 3, etc. Hasta llegar al término enésimo. ¿Alguien me puede decir otro ejemplo de una sucesión?
133	A11: Por ejemplo la de los pares, 2, 4, 6, 8 y así.
134	P: Muy bien y cuáles serían los términos de la sucesión.
135	A11: Pues los mismos.
136	P: En este caso ¿Cuál sería el termino 1?
137	A11: El dos.
138	P: ¿Y el termino 2?
139	A11: El cuatro.
140	P: Muy bien, así como esas sucesiones existen muchas más como por ejemplo 3, 6, 9, 12... o por ejemplo 5, 10, 15, 20, 25... en las que ustedes tendrán que identificar el patrón que rige a la sucesión y su expresión algebraica.
141	P: Como ven aquí hay una diferencia de este término a éste, de éste a éste (refiriéndose a las diferencias entre los términos de la sucesión en la tabla) ¿Cuál es la diferencia del 3 y el 1?
142	As: Dos.
143	P: ¿Y del 5 al 3?
144	As: Dos.
145	P: ¿Y del 7 al 5?
146	As: Dos.
147	P: ¿Y del 9 al 7?
148	As: Dos.
149	P: ¿Qué es lo que notan?
150	As: Pues que siempre nos da dos.
151	P: Siempre les da dos, entonces ¿siempre es la misma?
152	As: Sí.
153	P: Entonces esa diferencia no cambia, siempre es la misma, para cualquiera de los términos que ustedes elijan, en este caso siempre va a haber una diferencia de dos, esa es una característica de una sucesión que se llama del tipo lineal o de primer grado. Entonces se dice que: “una sucesión de números reales denotada por $a_n$ , es una sucesión del tipo lineal o de primer grado si la diferencia entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante. ¿Este será un valor constante? (Refiriéndose a la diferencia entre términos anotada en la tabla).
154	(El profesor espera unos segundos pero los estudiantes no contestan).
155	P: ¿Sí o no? Constante se refiere a que siempre es un valor, que nunca cambia, entonces ¿será un valor constante?
156	A20: Yo pienso que sí, porque siempre nos da dos, siempre va a ser así.
157	P: Su compañero dice que en la sucesión la diferencia es constante o que siempre se repite ¿están de acuerdo con su compañero?
158	As: Sí, siempre es dos, dos, dos.
159	P: ¿Entonces dijimos que si las diferencias eran constantes de qué tipo era la sucesión?
160	A13: Lineal profe.
161	P: Así es, pero también puede llamarse de otra forma ¿no?
162	A13: Lineal o de primer grado.
163	P: ¿Y qué pasa con las diferencias de la sucesión 5, 10, 15, 20, 25... cómo son?
164	As: Es 5.
165	P: ¿En todas es 5?
166	As: Sí.
167	P: ¿Y de qué tipo será esta sucesión?
168	A15: También igual.
169	P: ¿Igual a qué?
170	A15: A la otra, también siempre nos da lo mismo, no más que ahora siempre es cinco.
171	P: Muy bien, ¿están de acuerdo con lo que dice su compañero?
172	As: Sí.
173	El profesor pide a los alumnos que pasaron al pizarrón, que pasen a sus lugares correspondientes ya que tendrán que resolver otra actividad.

174	Actividad II  P: Ésta es otra actividad parecida a la anterior, traten de resolver las preguntas que se les plantean, ahora tienen que centrar su atención únicamente en los bloques; si tienen alguna duda me preguntan.
175	A8: Profesor ¿verdad que ahora solo vamos a contar los cubos?
176	P: Así es, si se fijan es la misma sucesión, pero ahora todas las preguntas están relacionadas con los bloques, ya no con los “minions”.
177	A8: ¡Ya ven, les dije!
178	(Los estudiantes comienzan a leer la actividad II y se preparan para dar respuesta a las preguntas
179	El equipo 2 no logró entender la actividad y los integrantes del equipo dan sus respuestas prácticamente iguales a las de la actividad I).
180	Equipo 2: A25: Es que miren dos por uno menos uno te da uno y luego dos por dos menos uno te da tres y dos por tres menos uno te da 5 y ese es el número de minions.
181	A26: No sé, ¿Así lo ponemos pues?
182	A25: Pues sí ¿no?, es parecido al ejemplo anterior
183	(Una vez que se terminó el tiempo de la clase el profesor considera lo siguiente).
184	P: Bien chicos se terminó la clase por favor me entregan las hojas de la actividad II, mañana continuarán con la actividad.



## Anexo 2: Transcripción de la clase del 8 de abril de 2016

### Clase de Matemáticas III

8 de Abril de 2016

#### Aplicación de la Situación Didáctica “Premiando a Minions”

L. en M. José Rolando Palomino Iraburo

#### Actividad II

Nomenclatura utilizada:

P: Profesor

Para guardar el anonimato de los alumnos se limitará a poner A1, A2, A3,... y así sucesivamente.

As: Cuando varios alumnos hablen al mismo tiempo y den una misma respuesta.

Ax: Se utilizará cuando varios alumnos hablen y no se les entienda lo que dicen.

El inicio de la clase fue a las 8:51 horas del día 08 de Abril de 2016, en los que surgieron los siguientes momentos:

185	P: Buenos días.
186	As: Buenos días.
187	P: Por favor vuélvanse a juntar en equipos como el día de ayer.
188	(El profesor entrega a los equipos sus actividades correspondientes y considera darles tiempo suficiente para que terminen la actividad II.
189	P: Hay que ponerse a contestar porque nada más tienen 10 minutos.
190	A27: ¿Nada más 10 minutos?
191	P: Sí, nada más 10, porque a la mayoría solo les faltan las últimas dos preguntas.
192	A27: Entonces ¿ésta ya no? (refiriéndose a otra pregunta que les faltaba).
193	P: Bueno si les falta otra pregunta por contestar también hay que hacerla. Ya al final terminando la actividad si alguien quiere un cuadrito y un “minions” pueden pasar por ellos, como recuerdo.
194	As: ¡Ay, yo sí quiero uno!
195	(Después de un tiempo el profesor pregunta).
196	P: ¿Ya terminaron? (preguntando al equipo 2).
197	A27: Cómo es malo profe, cómo nos carrerea (risas).
198	(El profesor realiza un análisis de los equipos para saber qué alumnos van a pasar al pizarrón a dar respuesta a las preguntas. Después de pasar los 10 minutos decide que es tiempo justo, para continuar con la validación grupal.
199	P: ¿Cómo van?
200	Equipo 2: A27: A ver venga profe ¿Sí estamos bien?
201	(El profesor se acerca al equipo 2 ya que el alumno A27 le señala con el dedo y pregunta que si está bien la expresión algebraica que propusieron).
202	P: Ustedes dicen que la expresión algebraica es $2a - 1$ ¿ya lo comprobaron? ¿Qué pasa cuando $a$ vale 1?, bueno pasa al pizarrón para contestar las preguntas de la actividad II.
203	(El profesor se dirige al equipo 5 y le pide a un estudiante que pase al pizarrón a contestar las

	preguntas).
204	P: Ahorita vas a pasar al pizarrón a contestar las preguntas de esta actividad (Dirigiéndose a un integrante del equipo 5).
205	A30: No profe yo no, es que no sé, mejor ella (apuntando a su compañera, risas) .
206	P: No tengas miedo, puedes pasar con tu hoja para que te ayudes y veas los resultados que pusieron y más o menos nos digas cómo lo hicieron.
207	A30: No mejor ella profe (risas).
208	A31: Ya pásale, ya te dijo el profe que con la hoja (risas).
209	(El profesor hace pasar a la integrante del equipo 5 y a uno del equipo 2).
210	P: A ver, pongan atención por favor, ya vamos a contestar las preguntas. Éste, en el podio uno ¿Cuántos bloques les pusieron ustedes? (preguntando al integrante del equipo 2).
211	A27: Uno.
212	P: ¿En el dos? (refiriéndose al podio 2).
213	A27: Cuatro.
214	P: ¿Y en el tres?
215	A27: Nueve.
216	P: ¿Y en el cuatro?
217	A27: Quince.
218	P: ¿Por qué quince?
219	A27: Pos eso nos salió (risas).
220	A30: Son diez y seis (integrante del equipo 5).
221	A13: Son diez y seis profe (integrante del equipo 4).
222	P: ¿Y cómo lo hicieron para sacar los 15 bloques?
223	A27: Pos cuando los acomodamos eso nos dio.
224	P: Éste, a ver vuélvelo a hacer.
225	A27: ¿Otra vez? Ya ven háganlo (risas, pidiendo a sus compañeros que lo realicen).
226	(Los compañeros vuelven a realizar la construcción del podio 4, acomodando los bloques de manera incorrecta ya que los bloques que van encima los colocan en la intersección de dos de abajo).
227	P: ¿Ya revisaron bien la construcción del podio?
228	A27: ¿Entonces no era así profe?
229	P: Revisen bien.
230	A26: Aaaa es que no era así, era uno arriba de otro.
231	A27: Por eso te dije, que estaba mal (Risas).
232	(Los integrantes del equipo 2 se dan cuenta que realizaron la construcción de los podios de manera incorrecta y por lo tanto su respuesta no es la adecuada. Enseguida comienzan a realizar la construcción de manera correcta.)
233	P: ¿Entonces cuantos deberían ser?
234	A27: Sí son diez y seis.
235	P: ¿Y para el 5?
236	A27: Nosotros pusimos que 21, pero no son.
237	P: ¿Por qué dices que no son?
238	A27: Pues porque no los acomodamos bien.
239	P: Y a ustedes ¿Cuántos les dio? (refiriéndose al equipo 5).
240	A30: Veinticinco.
241	P: Entonces ¿están de acuerdo que son 25? (preguntando a todo el grupo), o ¿hay alguno que tenga otra respuesta diferente?
242	As: Sí son 25.
243	(El profesor espera unos segundos y no hay respuesta por parte de ningún equipo).
244	P: Y ¿para el podio 100 cuanto les dio?
245	A27: No profe, nos dio trecientos noventa y seis.
246	P: ¿Y cómo le hicieron? ¿O por qué obtuvieron ese resultado?
247	A27: (Risas) Pues no sé, es que nada más sumamos ciento noventa y siete más ciento noventa y nueve y nos dio trecientos noventa y seis (Risas).
248	P: ¿Y a ustedes? (pregunta para el estudiante del equipo 5).

249	A30: Diez mil.
250	P: ¿Están de acuerdo?
251	As: Sí.
252	P: Éste, ¿Por qué? ¿Cómo fue que sacaron esos diez mil? ¿Qué hicieron?
253	A30: Multipicamos el número de podio por sí mismo.
254	P: Muy bien, ¿están de acuerdo con lo que realizó su compañera?
255	As: Sí.
256	P: ¿Y el patrón que rige la sucesión que fue lo que contestaron? (pregunta para el equipo 2).
257	A27: Que era proporcional al ejemplo anterior, por ejemplo: 1+3+5+7+9.
258	P: Ustedes pensaron que era proporcional, pero no era así, se confundieron al dar su respuesta.
259	A27: Es que volvimos a contar los “minions”.
260	P: Y ustedes ¿Qué fue lo que contestaron? (preguntando al equipo 5).
261	A30: Un número al cuadrado.
262	P: ¿Están de acuerdo con su compañera? O ¿hay alguna otra respuesta?
263	A13: También un número al cuadrado.
264	P: ¿Y por qué un número al cuadrado?
265	A30: Porque siempre es multiplicar el número de podio al cuadrado para que nos de la respuesta
266	P: ¿Es correcto lo que dice su compañera?
267	As: Sí.
268	P: ¿Y para la expresión algebraica? (pregunta para el equipo 2).
269	A27: Pos dijimos que dos por $a$ menos uno.
270	El equipo 2 se confunde y piensa que la actividad es totalmente igual a la actividad I.
271	P: Bueno ustedes relacionaron todo con la actividad I, pero ya se han dado cuenta que no era así ¿verdad?
272	A27: Es que nos confundimos profe, pero ya sabemos cómo (risas).
273	P: ¿Y ustedes? (pregunta para el equipo 5).
274	A30: Pues $x^2$
275	P: ¿Y por que $x^2$ ?
276	A30: Porque multiplicando cualquier numero por sí mismo nos da la respuesta
277	P: ¿Están de acuerdo con la respuesta que da su compañera?
278	As: Sí.
279	P: Entonces si les hubiera pedido por ejemplo cuántos bloques tiene el podio 150, ¿qué hubieran hecho?
280	A30: Pues multiplicar ciento cincuenta por ciento cincuenta.
281	P: Muy bien ¿y para el podio dos mil?
282	A30: Pues igual profe multiplicamos dos mil por dos mil.
283	P: Muy bien ¿Hay algún otro equipo que tenga una expresión algebraica diferente?
284	(Nadie participa y el profesor decide continuar con la clase).
285	P: Pongan atención por favor les voy a explicar una de las características de una sucesión de segundo grado y un método para que sepan cómo sacar una expresión algebraica de segundo orden o del tipo cuadrático. Si recuerdan ayer en la sucesión ¿la diferencia de los términos cómo era?
286	Los alumnos no contestan nada y el profesor escribe en el pizarrón la sucesión 1, 3, 5, 7, 9... propuesta el día anterior en la actividad I.
287	P: ¿Cómo eran estas diferencias? (apuntando hacia la sucesión lineal escrita en el pizarrón).
288	A17: Por el dos, diferencia de dos.
289	P: Diferencia de dos, pero ¿siempre eran qué?
290	A18: Pares
291	A17: Iguales!
292	P: Así es, siempre iguales, para cualesquiera dos términos consecutivos las diferencias siempre eran iguales, ¿creen que pase lo mismo, para esta sucesión (refiriendose a la sucesión de la actividad II)?
293	A: No.
294	P: Si hacemos las diferencias de estos términos ¿creen que pase lo mismo? ¿Qué las diferencias sean iguales?
295	A27: No

296	P: ¿Por qué?
297	A27: Porque, porque se ve (risas).
298	A26: No, sí, sí son iguales.
299	A27: No, “pa” mí no.
300	P: Entonces ¿qué creen que pase? ¿Qué si sean iguales o no?
301	As: No.
302	P: ¿Por qué no?
303	A27: Es que se ve (risas), que no van a ser iguales
304	P: Bien, vamos a comprobar lo que dice su compañero. ¿En el primer término cuanto era?
305	As: Uno.
306	P: ¿En el dos?
307	As: Cuatro.
308	P: ¿En el tres?
309	As: Nueve
310	P: ¿En el cuatro?
311	As: Diez y seis.
312	P: ¿Y en el cinco?
313	As: Veinticinco.
314	P: Entonces, ¿Cuál es la diferencia de cuatro y uno?
315	As: Tres.
316	P: ¿De nueve y cuatro?
317	As: Cinco.
318	P: ¿De diez y seis y nueve?
319	As: Siete.
320	P: ¿Y de veinticinco y diez y seis?
321	As: nueve
322	P: ¿Estas primeras diferencias fueron iguales?
323	As: No.
324	P: Muy bien, entonces ya no fueron iguales como las diferencias de la sucesión que vimos en la actividad I. Pero ahora vamos a sacar las segundas diferencias, de éste a éste (refiriéndose a los términos de la primera diferencia) ¿Qué creen que pase?
325	A27: No, pues ahora sí van a ser iguales.
326	P: Bueno, vamos a ver qué pasa. ¿Cuál es la diferencia de cinco y tres?
327	As: Dos.
328	P: ¿De siete y cinco?
329	As: Dos.
330	P: ¿Y de nueve y siete?
331	As: Dos.
332	P: ¿Qué paso?
333	A17: Sí salió (queriendo decir que ya se repite o ya son constantes las diferencias).
334	P: Ahora sí ya se repiten ¿verdad? Ya las diferencias son iguales. Siempre da dos, dos, dos. Esa es precisamente una de las características de una sucesión y se les llama de segundo grado o cuadrática y es que las segundas diferencias sean iguales o constantes. Entonces, recordando que cuando las primeras diferencias de una sucesión las primeras diferencias es una constante ¿es una sucesión de que tipo?
335	As: Lineal.
336	P: ¿Y cuándo las segundas diferencias ya son iguales cómo se le llama a esa sucesión? ¿Cómo dijimos?
337	Los estudiantes no contestan y el profesor decide recordar nuevamente cómo se les llaman.
338	P: ¿No recuerdan? Les mencione que se les llama de segundo grado o cuadrática, cuando las segundas diferencias ya son iguales, ahorita les voy a dictar la definición.
339	As: Ah sí, es cierto.
340	P: Bueno en esta sucesión, algunos equipos encontraron la expresión algebraica y de cierta manera lograron encontrarla “rápido”, dijeron que era $x^2$ , pero, en otras ocasiones no es tan “fácil” deducir o

	encontrar esa expresión algebraica de una sucesión de segundo grado, es más complicado y para eso ahorita les voy a decir un método de cómo encontrar esa expresión algebraica que nos genera una sucesión de segundo orden, pero primero les voy a definir una sucesión de segundo grado, para después continuar con el método.
341	P: Entonces, escriban por favor, Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales pero las segundas sí los son, entonces la expresión que le corresponde a la sucesión es de segundo grado y tiene la forma $an^2 + bn + c$ , entonces con esa expresión también se puede generar una sucesión y se pueden sacar las primeras y segundas diferencias. Ahorita vamos a sacar las primeras y segundas diferencias de esa expresión. Entonces tenemos la expresión $an^2 + bn + c$ que es una expresión que va a tener una sucesión de segundo grado, para poder sacar las diferencias vamos a sustituir cuando $n$ vale 1. Por ejemplo es $a(1)^2 + b$ ¿Por qué?
342	As: Por uno.
343	P: Más $c$ y nos queda $a(1)^2 + b(1) + c$ , ¿eso es igual a qué? ¿Uno por uno?
344	As: Uno.
345	P: ¿Por $a$ ? ¿Uno por $a$ ?
346	A17: Uno.
347	P:No.
348	A17: Dos, tres (risas).
349	P: ¿Uno por $a$ o $a$ por uno?
350	A27: $a$
351	As:nnaa,aaaaaa (risas).
352	P: ¿Y $b$ por uno?
353	A17: Pos $b$
354	P: Entonces al sustituir $n = 1$ nos da $a + b + c$ , y entonces cuando $n = 2$ , ahora sería ¿La $a$ por qué? (el profesor va anotando los resultados en la tabla de papel bond colocada previamente en el pizarron).
355	A13: $a(2)$ .
356	P: ¿Por dos nada más? O ¿qué les falta?
357	A13: Por dos al cuadrado.
358	P: Mas $b$ ¿por qué?
359	A17: Por uno.
360	P: ¿Seguro?
361	A17: A no por dos, por dos.
362	P: Y mas $c$ , entonces ahora nos queda $a(2)^2 + b(2) + c$ . Entonces ¿dos por dos?
363	As: Cuatro.
364	P: ¿Y cuatro por $a$ ?
365	A13: $4a$ .
366	P: ¿Y dos por $b$ ?
367	A13: $2b$ .
368	P: Así es, entonces nos queda $4a + 2b + c$ . ¿Y cuándo $n$ vale 3? ¿Qué sería? ¿ $a$ por qué?
369	As: $a(3)^2$ .
370	P: ¿Y $b$ por qué?
371	As: $b(3)$
372	P: Entonces quedaría $a(3)^2 + b(3) + c$ . Y ¿tres por tres?
373	As: Nueve.
374	P: ¿Por $a$ ?
375	As: $9a$ .
376	P: ¿Más 3 por $b$ ?
377	As: $3b$
378	P: Entonces nos queda $9a + 3b + c$ y así podemos continuar sustituyendo valores de $n$ en la expresión $an^2 + bn + c$ , ahora vamos a sacar las primeras diferencias de estas dos (refiriéndose a las diferencias de $(4a + 2b + c)$ y $(a + b + c)$ ). Vamos a restar términos semejantes, es decir, las $a$ con las $a$ , las $b$ con la $b$ y las $c$ con la $c$ . ¿ $4a$ menos $a$ , cuantos les da?

379	A25: $3a$ .
380	P: $3a$ , más ¿ $(2b - b)$ ?
381	A23: $1b$ .
382	P: $1b$ o solamente $b$ , es lo mismo. ¿Y $c$ menos $c$ ?
383	A21: $a$
384	P: $c$ menos $c$ ¿es $a$ ?
385	A21: $e, r$ (risas).
386	(El profesor espera, alguna otra respuesta, pero los estudiantes están confundidos y no saben cuál es el resultado, por lo que el profesor decide poner un ejemplo)
387	P: Bueno un ejemplo con un número ¿uno menos uno?,
388	As: Cero.
389	P: ¿ $c$ menos $c$ ?
390	As: Cero.
391	P: Entonces la primera diferencia no queda $3a + b$ . Vamos a sacar la siguiente ¿cuánto es $9a - 4a$ ?
392	A25: $9a - 4a$ es $5a$ .
393	P: ¿Y $3b - 2b$ ?
394	A25: Una $b$ .
395	P: ¿Y $c - c$ ?
396	As: Cero.
397	P: Muy bien, ahora estas son las primeras, si se fijan no son iguales todavía, vamos a sacar las segundas diferencias. ¿Cuánto es $5a - 3a$ ?
398	As: $2b$ , digo $2a$ .
399	P: ¿Y $b - b$ ?
400	As: cero.
401	P: Vamos a sustituir cuando $n$ vale 4 para poder sacar otra diferencia. Entonces ¿es $a$ , por qué?
402	As: Por cuatro al cuadrado.
403	P: ¿Qué más?
404	A13: Es $a$ por cuatro al cuadrado más $b$ por cuatro más $c$ .
405	P: Entonces ¿cuatro por cuatro?
406	A17: Ocho.
407	As: (risas). 16.
408	P: $16a$ ¿más qué?
409	A13: $16a + 4b + c$ .
410	P: Ahora sí podemos realizar la otra diferencia. ¿ $16a - 9a$ ?
411	A27: $5a$ .
412	P: ¿ $5a$ ? ¿Seguro?
413	A25: ¿ $16a + 9a$ ?
414	P: Menos $9a$ .
415	A25: $7a$ .
416	P: ¿ $4b - 3b$ ?
417	A25: $1b$ .
418	P: $1b$ o $b$ es lo mismo. ¿y $c - c$ ?
419	As: Cero.
420	P: Ahora vamos a sacar la segunda diferencia. ¿ $7a - 5a$ ?
421	A17: $2b$ , no $2a$ .
422	P: ¿Y $b - b$ ?
423	As: Cero.
424	P: Si nos fijamos aquí ya se repite nuevamente el $2a$ , $2a$ , (refiriéndose a las segundas diferencias) y si volvemos a sacar esta otra y las otras diferencias, nos va a volver a dar $2a$ , siempre nos va dar $2a$ . Ahora lo que tenemos que hacer es realizar una comparación entre la expresión general y ésta que fue la de nuestros bloques, lo que tenemos que hacer son igualdades, esta primera con esta primera (refiriéndose al primer término de la sucesión $x^2$ y al primer término de la expresión $an^2 + bn + c$ ) nuestra segunda igualdad sería ésta con ésta (refiriéndose a la primera diferencia de la sucesión $x^2$ y a

	la primera diferencia de la expresión $an^2 + bn + c$ y nuestra tercera igualdad sería ésta, con ésta (refiriéndose a la segunda diferencia de la sucesión $x^2$ y a la segunda diferencia de la expresión $an^2 + bn + c$ ). Entonces nos quedaría $a + b + c = 1$ y nuestra segunda igualdad sería $3a + b$ ¿igual con quién?
425	(El profesor espera unos segundos y nadie participa).
426	P: En la primera dijimos que es $a + b + c = 1$ (señalando en la hoja de papel bond), nuestra segunda va a ser $3a + b = 3$ y ¿ $2a$ igual con quién?
427	As: Con dos.
428	P: Si nos fijamos aquí ya tenemos 3 ecuaciones, $a + b + c = 1$ , $3a + b = 3$ y $2a = 2$ , para resolver la primera ecuación es muy difícil porque tenemos 3 incógnitas, no sabemos cuánto vale $a$ , cuánto vale $b$ , ni cuánto vale $c$ , lo más fácil es sacar el valor de la primera ecuación, porque nada más tenemos una incógnita y tenemos dos constantes, si tenemos $2a = 2$ , ¿cuánto valdrá $a$ ?
429	A23: $a$ .
430	A19: Uno.
431	A15: $2(1)$ o $2$ .
432	P: Bien si es uno, pero ¿cómo le hacen para saber que es uno? O ¿Cómo le hacen para dejar sola a la $a$ , a la variable?
433	(El profesor espera unos segundos y los estudiantes no contestan por lo cual decide hacerles otra pregunta).
434	P: ¿Saben despejar? Por ejemplo ¿Cómo le hacen para dejar sola a la $a$ ? ¿Qué es lo que tienen que hacer? ¿No les han explicado eso?
435	A28: Borrarlo (Risas).
436	P: Bueno, sí lo puedes borrar pero no es tan fácil, matemáticamente hablando. Su compañera dijo que $a = 1$ y si es correcto pero ¿Pero que se hace para obtener ese resultado?
437	(El profesor espera unos segundos y nadie responde nada por lo que decide explicarles).
438	P: Bien, cuando en una igualdad se tiene multiplicando una constante por una variable se puede dividir entre dos aquí y entre dos acá (refiriéndose a dividir entre dos en ambos lados de la igualdad).
439	(Cuando el profesor menciona lo anterior una estudiante menciona lo siguiente)
440	A19: Lo que se hace de este lado, se hace de aquel lado.
441	P: Exactamente, si ustedes dividen entre dos en esta parte de la igualdad también lo tienen que hacer en la otra parte. Entonces aquí lo que le estorba a la variable es este 2, ¿Cómo lo podemos quitar?
442	(Nadie participa y el profesor decide ayudarlos)
443	P: Pues como dijo su compañera, hay que hacer en ambos lados lo mismo y lo que tenemos que hacer es dividir entre dos, para que aquí se haga uno. Si aquí le pongo entre dos, acá también tengo que ponerle entre dos (refiriéndose a ambos lados de la igualdad $2a = 2$ ). Entonces hay que dividir entre 2 ¿ $\frac{2}{2}$ ?
444	A28: A uno.
445	P: $(1)a = \frac{2}{2}$ ?
446	A28= Uno.
447	P: Entonces ¿ $a$ por uno?
448	A28: Una $a$ .
449	P: Entonces uno por $a$ es igual $a$ , (el profesor se da cuenta que hay sierta confusión y decide poner un ejemplo con números), les voy a poner un ejemplo con números, ¿dos por uno?
450	As: Dos.
451	P: Dos, en este caso (refiriéndose a la multiplicación $(1)a$ ) es lo mismo pero con una variable o por una letra, pones ¿ $a(1)$ ?
452	A13: $a$ .
453	P: En este caso fue lo que hicimos, entonces ya tenemos el valor de $a$ , ¿Cuánto vale?
454	A13: Uno.
455	P: Entonces recuerden esto, lo que hacen en un lado de la igualdad, lo mismo lo tienen que hacer en el otro, aquí dividimos entre dos y acá también tuvimos que dividir entre dos, entonces ya conocemos el valor de $a$ , ahora lo que vamos a hacer es sustituirlo en esta otra (segunda igualdad $3a + b = 3$ ), para obtener el valor de $b$ , que nos quedaría tres ¿por quién?

456	A28: Por uno.
457	P: ¿Más quién?
458	As: Más $b$ .
459	P: Entonces quedaría $3(1) + b = 3$ , ¿tres por uno?
460	As: Tres.
461	P: Nos quedaría $3 + b = 3$ , ¿qué le estorba aquí a la $b$ para dejarla sola?
462	A28: ¿Vamos hacer lo mismo que en la otra?
463	P: Es parecido, pero ¿Qué harías ahora?
464	A28: Dividirlo en tres y tres ¿no?
465	P: ¿Seguro? ¿Qué pasa si divides entre tres ambos lados?
466	A28: Nos da uno, ¿no?
467	P: Vamos a hacerlo para ver qué pasa, su compañero dice que dividamos entre 3 ambos lados, entonces nos quedaría $\frac{3+b}{3} = \frac{3}{3}$ y no logramos nuestro propósito, que era dejar sola a la variable. ¿Entonces que hacemos?
468	A13: Le podemos restar tres en un lado y en el otro.
469	P: Su compañero dice que restando tres en ambos lados vamos a comprobarlo. $(3 + b) - 3 = 3 - 3$ . ¿tres menos tres?
470	As: Cero.
471	P: Entonces es $0 + b = 0$ . ¿Y cero más $b$ ?
472	As: $b$ .
473	P: Entonces $b = 0$ . Ya tenemos el valor de $a$ y el valor de $b$ , pues ahora vamos a obtener el valor de $c$ . en la primera igualdad ( $a + b + c = 1$ ). Entonces, cómo sería.
474	A17: Uno más cero más $c$ ( $1 + 0 + c$ ).
475	P: ¿Igual con quién?
476	A17: Con uno.
477	P: ¿Quién nos estorba aquí? (refiriéndose a la primera parte de la igualdad $1 + 0 + c = 1$ ).
478	A17: El uno.
479	P: ¿Qué hacemos?
480	A17: Se resta uno a los dos lados.
481	P: Vamos a restar uno en ambas partes. $1 + c - 1 = 1 - 1$ . ¿uno menos uno?
482	As: Cero.
483	P: Entonces nos queda $0 + c = 0$ , entonces ¿ $c$ cuanto vale?
484	As: Cero.
485	P: Ahora bien, ya tenemos el valor de $a$ el valor de $b$ y el valor de $c$ , vamos a sustituirlos en la expresión $an^2 + bn + c$ , vamos a ver que nos da. Entonces, ¿cuánto vale $a$ ?
486	As: Uno.
487	P: ¿Cuánto vale $b$ ?
488	As: Cero.
489	P: ¿Y cuánto vale $c$ ?
490	As: Cero.
491	P: Entonces nos quedaría $1(n^2) + 0(n) + 0$ . Y ¿ $1(n^2)$ cuanto les da?
492	As: $n^2$ .
493	P: ¿Y cero por $n$ ?
494	A17: $n$ .
495	P: ¿Segura?
496	A17: no, es cero.
497	P: Entonces $n^2 + 0 + 0$ ¿Cuánto es?
498	A17: Uno.
499	P: ¿Cuánto?
500	A17: $n^2$ .
501	P: Nos dio el resultado que ustedes sacaron, solo que ustedes pusieron otra variable y su respuesta fue $x^2$ , pero es lo mismo.
502	A13: Ah sí.



503	<p>P: Este método es el que les puede ayudar en un momento dado, para que puedan obtener la expresión algebraica de una sucesión de segundo grado, realizando los pasos que hemos hecho, que en resumen sería:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1.- Conocer los primeros términos de la sucesión de segundo grado.</li><li>2.- Obtener las primeras diferencias.</li><li>3.- Obtener las segundas diferencias.</li><li>4.- Conocer las igualdades.</li><li>5.- Resolver las igualdades.</li><li>6.- Sustituir los valores de <math>a, b, c</math> en la expresión <math>an^2 + bn + c</math> y obtener la expresión algebraica que genera la sucesión de segundo grado.</li></ol>
504	<p>P: Bien, ya tenemos el tiempo encima, me entregan por favor sus hojas de trabajo, júntenlas por favor un integrante de cada equipo y me las traen. ¿Qué les parecieron las actividades?</p>
505	<p>As. Bien,</p>
506	<p>A17: Sí estuvo bien profe.</p>
507	<p>A13: Pues sí estuvo bien y aprendimos algo nuevo.</p>
508	<p>P: Muchas gracias por haberme apoyado.</p>
509	<p>P: Sí verdad, gracias, nos vemos, con permiso.</p>
510	<p>A27: ¿Va a venir mañana?</p>
511	<p>P: No ya no, ya terminamos.</p>