UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS COGNITIVO DEL CONCEPTO ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU SOLUCIÓN EN EL NIVEL SECUNDARIA

Informe de Práctica de Desarrollo Profesional

para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Sara Gabriela Rosales Dorado

Directoras del Informe de Práctica de Desarrollo Profesional:

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Lorena Jimenéz Sandoval

Zacatecas, Zac., Diciembre 2018

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) POR SU APOYO Y PATROCINIO EN LA REALIZACIÓN DE ESTE PROYECTO DE DESARROLLO PROFESIONAL.

BECARIO Nº 773951

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradezco a Dios por todas las oportunidades brindadas, por poner en mi camino a las personas correctas para lograrlas, y por nunca soltarme de su mano.

A mi esposo Meny, que sin su apoyo no hubiera podido lograr esta etapa de mi vida profesional, mil gracias por todo. Te amo.

A mis hijos Daniel, Johana y Alejandro, porque me prestaron el tiempo que les dedicaba a ellos, para realizar mí sueño. Los amo y todo esto vale la pena por ustedes.

A mis hermanos, porque siempre han creido en mi, mil gracias por sus palabras de aliento.

A mis padres que ya no están presentes, pero que gracias a los valores que me inculcaron soy lo que soy, un beso hasta el cielo.

Gracias a mi asesora Dra. Darly por compartirme sus conocimientos y por su tiempo invertido en este proyecto, mil gracias.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 12 del mes de diciembre del año 2018, el (la) que suscribe C. Sara Gabriela Rosales Dorado alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 36173010; manifiesta que es el autor (a) intelectual del trabajo de grado intitulado bajo la dirección de la Dra. Darly Alina Kú Euán y Dra. Lorena Jiménez Sandoval.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Sara Gabriela Rosales Dorada

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "ANÁLISIS COGNITIVO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU SOLUCIÓN EN EL NIVEL SECUNDARIA" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Sara Gabriela Rosales Dorado egresado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 10 de Diciembre del 2018

________________________	________________________
Dra. Darly Alina Kú Euán	Dra. Lorena Jimenéz Sandoval
Asesora	Coasesora

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "ANÁLISIS COGNITIVO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU SOLUCIÓN EN EL NIVEL SECUNDARIA" del y que fue realizado bajo mi asesoría por la C. Sara Gabriela Rosales Dorado de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 10 de Diciembre de 2018

Dra. Darly Alina Kú Euán

Asesora

Dra. Lorena Jimenéz Sandoval

Coasesora

Índice

Índice de diagramas

Índice de tablas

Índice de imágenes

Resumen

El estudio del concepto ecuación cuadrática y su solución comienza en el nivel secundaria, y se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades en los métodos de resolución, pocas veces identifican las soluciones, y si lo hacen carecen de argumentos para su interpretación. Por tal motivo el objetivo de este trabajo es que los estudiantes construyan cognitivamente el concepto de ecuación cuadrática y su solución, para ello utilizamos como sustento teórico a la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas). De acuerdo a ello se realizó una descomposición genética hipotética (DGH) del objeto matemático en estudio; posteriormente se diseño el ciclo de enseñanza del concepto de estudio y finalmente una entrevista.

Los resultados del análisis de datos dan evidencia que la DGP es una ruta viable para la construcción del concepto ecuación cuadrática y su solución, con estudiantes de nivel secundaria.

Palabras clave: ecuaciones cuadráticas, teoría APOE, nivel secundaria.

Abstract

The study of the quadratic equation concept and its solution begins at the secondary level, and it has been detected that the students present difficulties in the resolution methods, seldom identify the solutions, and if they do, they lack arguments for their interpretation. For this reason the objective of this work is for students to cognitively construct the concept of quadratic equation and its solution, for this we use as a theoretical basis the theory APOE (Actions, Processes, Objects, Schemes). Accordingly, a hypothetical genetic decomposition (DGH) of the mathematical object under study was carried out; Later the teaching cycle of the study concept was designed and finally an interview.

The results of the data analysis give evidence that the DG is a viable route for the construction of the quadratic equation concept and its solution, with students of secondary level.

Keywords: quadratic equations, APOS theory, secondary level.

Introducción

El álgebra para los estudiantes se torna “difícil” y muy pocos logran los aprendizajes que se esperan, lo cual repercute a lo largo de su vida académica. Es aquí donde entra nuestro papel de profesores, porque no podemos continuar “enseñando” de la manera tradicional, sólo por cumplir un programa en tiempo y forma, sin percatarnos si realmente los estudiantes están aprendiendo.

Este trabajo se enfoca en la construcción del concepto de ecuación cuadrática en el nivel secundaria, porque es cuando empiezan a trabajar este contenido y consideramos importante que se apoderen de él, pero como un aprendizaje significativo. Desafortunadamente los estudiantes sólo memorizan la fórmula general para solucionar las ecuaciones cuadráticas, pero sin comprender lo que realizan y mucho menos interpretar las soluciones, por ejemplo para el método de factorización no logran su comprensión matemática.

En la actualidad se trabaja con este contenido dejando de lado el surgimiento del mismo, cuándo ésta tiene una génesis geométrica y no sólo el trabajo algebraico. Por lo que consideramos que al presentar más actividades enfocadas a lo geométrico, dando interpretación de los resultados obtenidos y contexto práctico, favorecerá la comprensión del mismo.

Para lograr lo anterior se usará el sustento teórico la teoría APOE (Acción- Proceso-Objeto-Esquema) que son las construcciones mentales que un individuo realiza para obtener significados de las situaciones problemas en matemáticas (Kú, 2007). Dentro de la teoría APOE no encontramos investigaciones que aborden este contenido, debido a que la teoría se enfoca principalmente en nivel superior, pero, ¿Por qué esperar hasta nivel superior, si podemos contribuir en el aprendizaje de los alumnos de una manera significativa desde los niveles anteriores a éste?

De acuerdo a ello, el presente documento consta de ocho capítulos los cuales se describen de la siguiente manera:

En el *Capítulo 1*, se presentan los antecedentes históricos, didácticos y cognitivos sobre el concepto de escuación cuadrática y su solución, se describe de manera general cómo se ha abordado el concepto en cada una de los dominios antes mencionados.

En el *Capítulo 2*, se describe la problemática del concepto de ecuación cuadrática y su solución, posteriormente se presenta el problema de investigación y objetivos de investigación.

En el *Capítulo 3*, se presentan el referente teórico que da sustento a nuestra investigación, la teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema) que permitió dar un posible camino para la construcción del concepto de ecuación cuadrática y su solución.

En el *Capítulo 4*, se describen los procedimientos metodológicos que fueron utilizados para tratar de alcanzar los objetivos de la investigación.

En el *Capítulo 5*, se presenta el análisis teórico del concepto ecuación cuadratica y su solución, primero se realizó un análisis de libros de matemáticas de secundaria. Posteriormente se describen las principales dificultades y errores que han surgido con respecto al concepto de estudio. Y finalmente se presenta la DGH del concepto de escuación cuadrática y su solución.

En el *Capítulo 6*, se presenta el diseño de los instrumentos que se implementaron en el aula, primero se presenta el cuestionario diagnóstico, luego las seis actividades en las que se baso el ciclo de enseñanza y finalmente la entresvista. Cabe mencionar que para cada instrumento se describe el análisis a priori. Finalmente se da a conocer a los estudiantes que participaron en la puesta en escena y una breve descripción del contexto en el cual se desenvuelven.

En el *Capítulo 7*, se presenta el análisis de los datos que se obtuvieron de la aplicación de los instrumentos. Se presenta el análisis del cuestionario, luego el análisis del ciclo de enseñanza y posteriormente el análisis de la entrevista.

Finalmente en el *Capítulo 8*, se presentan las conclusiones a las cuales se llegó después de realizar el análisis de datos. Distribuidas de la siguiente manera: conclusiones con respecto a la DGH del concepto de estudio, conclusiones con respecto al ciclo de enseñanza y conclusiones con respecto al aprendizaje del concepto de estudio. Finalmente se describe la reflexión sobre mi práctica docentes, después de realizar este trabajo de investigación.

Motivación

Lo que motiva la realización de este estudio es que en mi experiencia como profesora de matemáticas en el nivel secundaria, he detectado que los estudiantes presentan dificultades en aprender los conceptos en álgebra, en específico con ecuaciones cuadráticas. Me interesa saber ¿cómo los estudiantes de secundaria construyen cognitivamente el concepto de ecuaciones cuadráticas? para poder ayudarlos por medio de actividades que fomenten el desarrollo de la construcción cognitiva de este concepto, ya que a lo largo de su vida estudiantil se enfrentarán con él.

Como profesora es frustrante ver cómo nuestros alumnos presentan dificultades en matemáticas y no tienen los elementos suficientes para poder resolver ciertas situaciones donde requieren conocimientos, especialmente de álgebra, porque sólo mecanizan y no entienden, y se dan por vencidos porque argumentan que es difícil. Entonces es mi responsabilidad encaminarlos a que sean capaces de resolver diversas situaciones matemáticas donde resuelvan ecuaciones cuadráticas. Para esto, debo de saber cómo ellos construyen su conocimiento.

Las ecuaciones cuadráticas se trabajan durante todo el curso de matemáticas de tercer grado. Primero deben resolverlas con “procedimientos propios” (el estudiante hace uso de sus conocimientos algebraicos para resolver situaciones sencillas donde están implícitas las ecuaciones cuadráticas para adentrarlos en el tema, “tanteo”), posteriormente por método de factorización y por último usando la fórmula general. Los alumnos presentan serias dificultades con los dos primeros métodos mencionados, cuando se trabaja la resolución de ecuaciones cuadráticas haciendo uso de la fórmula general se les facilita más, tal vez es porque únicamente deben de seguir una serie de pasos para encontrar las soluciones y mecanizar el proceso.

Entonces, para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos consideramos que como profesores debemos saber cómo es que se apropian de un conocimiento en particular, en este caso: las ecuaciones cuadráticas, ya que esto nos facilitará realizar actividades que fomenten el desarrollo y aprendizaje del mismo, además nos permitirá elegir la forma de enseñanza ad hoc para el nivel secundaria.

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES

En este apartado se describe la revisión bibliográfica que se realizó en torno al concepto de ecuación cuadrática, con la intención de conocer lo que se ha realizado con respecto a su enseñanza, aprendizaje y cómo surgió en la historia. De acuerdo a ello, hemos dividido este capítulo de la siguiente manera:

- Investigaciones referentes a la historia del concepto, lo cual brinda la posibilidad de conocer el surgimiento de la ecuaciones cuadráticas, y diferenciar la forma en que se trabajan actualmente en el aula.
- Investigaciones sobre la didáctica del concepto de estudio, éstas nos permitirán conocer las estrategias de enseñanza, que materiales didácticos usaron, asi como los procedimientos utilizados por los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas.
- Investigaciones referentes al aspecto cognitivo de los estudiantes cuando aprenden el concepto ecuación cuadrática, permitirán conocer cuáles son los errores, obstáculos y dificultades que surgen cuando aprenden el concepto.

1.1 Antecedentes en torno a la Historia del concepto Ecuación Cuadrática

Al enseñar matemáticas tenemos una gran responsabilidad como profesores, es decir, tenemos que tener en cuenta diferentes aspectos de lo que enseñamos en matemáticas, como por ejemplo: no debemos olvidar el surgimiento de la disciplina misma, debemos de tener presente que cada concepto matemático surgió para cubrir una necesidad, por esta razón, la historia de las matemáticas puede ser un recurso infalible del que pueden hacer uso los profesores.

Protti (2003) realizó una investigación en la cual cual hace evidente el uso de la historia de las matemáticas como un instrumento pedagógico, para simplificar y hacer más práctico el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina, pues el enseñar de una ciencia está estrechamente relacionado con su desarrollo histórico.

El uso de la historia en el proceso de enseñanza de las matemáticas se puede dar desde diversas formas y con diferentes propósitos, por ejemplo:

- Se puede usar como motivación. El profesor puede hacer uso del desarrollo de las matemáticas del concepto a estudiar o presentar la vida de un matemático que haya contribuido al desarrollo del concepto que trabajarán, para captar la atención del estudiante.
- Para introducir un nuevo concepto matemático. El profesor puede hacer uso de un problema relacionado con el concepto de estudio, presentando al alumno cómo se resolvió históricamente, con esto, mostraría la estructura interna de los mecanismos

> conceptuales que permitieron solucionar el problema y no basados en la mecanización de algoritmos.
>
> (Protti, 2003, p. 252)

El autor considera que la historia de las matemáticas es parte esencial de la historia del razonamiento humano, es decir, si el profesor se remonta a los orígenes de un concepto, analizando el contexto en el que surgió, se podrán encontrar los métodos y el razonamiento lógico que llevaron a dar solución a un problema dado.

Con respecto al desarrollo de la historia del álgebra, Protti (2003) describe que a la humanidad le tomó varios siglos realizar la trancisión de lo aritmético a lo algebraico, es decir, pasar del pensamiento concreto a la abstracción. Ello se puede reflejar en el desarrollo histórico del álgebra, Dantzing (citado por Protti (2003) las dividió en las siguientes tres etapas:

- Retórica. En esta etapa no se utilizaban los símbolos y los problemas se describían totalmente con palabras. Se puede decir que se utilizaba el pensamiento concreto, el lenguaje abstracto estaba lejos de ser usado, en este sentido y tomando en cuenta el desarrollo intelectual del estudiante, el autor sugiere plantear problemas en estos términos antes de incluir el lenguaje y símbolos algebraicos.
- Sincopada. En esta etapa ya se simplificaban palabras olvidando sus orígenes y sin tener aparentemente relación con lo que representaban, por ejemplo: el uso del signo menos (-), que se expresaba por la palabra latina *minus*, después se usó la letra *m* con una raya encima, hasta que desapareció la letra, dejando únicamente la raya, usado como el signo de la resta. Antes de pasar a la siguiente etapa que es el lenguaje simbólico, en estas dos etapas es importante insistir en el uso adecuado de lo algebraico, como es: conmutatividad, asociatividad, distributividad, operaciones con enteros, racionales, raíces, potencias, por supuesto se debe de hacer mediante ejemplos y problemas concretos pues, se está realizando la transición de la aritmética al álgebra.
- Simbólica. Al dar el paso a la abstracción es donde aparece el lenguaje simbólico, donde las letras tienen un significado diferente a lo que representan. En la simbología actual se utilizan las primeras letras del alfabeto para representar las constantes y las ultimas para las variables, se puede rescatar una ventaja con el uso del lenguaje simbólico, pues exime de la ambigüedad del lenguaje cotidiano. Según el autor, se debe de considerar que el uso del lenguaje posicional no es tarea fácil, pues aunque se los aprendan los alumnos, si no hay comprensión no se verá reflejado en el avance intelectual del estudiante.

(p.253-254)

De acuerdo a ello, es comprensible que los estudiantes de secundaria presenten dificultades cuando inician con el aprendizaje del álgebra. Según Piaget el conocimiento avanza debido a que en el proceso de aprendizaje hay un desarrollo mental, en relación con esto Protti (2003) considera que si se quiere por parte de los alumnos un aprendizaje exitoso del álgebra, se debe de trabajar paulatinamente, respetando el desarrollo intelectual del estudiante. Si a la humanidad le llevó siglos esta transición, a los estudiantes también les tomará cierto tiempo, por esta razón debemos de tener en mente que es un proceso lento, y que además va ligado al desarrollo intelectual del estudiante.

Es por ello que Protti (2003) realizó una propuesta para la transición de la aritmética al álgebra, en donde se puede observar cada una de las etapas del desarrollo histórico del álgebra, él sugiere que en lugar de introducir al inicio definiciones, parte literal, monomios, etc., se debe de comenzar con la etapa retórica (figura 1), posteriormente la sincopada (figura 2) y por último la simbólica (figura 3), por ejemplo:

"En la biblioteca del colegio hay mil trecientos veinte libros y trecientas revistas. En la semana de lectura, los estudiantes lograron reunir otros doscientos diez libros y cincuenta y tres revistas, ¿cuántos libros y cuántas revistas tendremos a disposición ahora?"

mil trescientos veinte libros más
doscientos diez libros son
mil quinientos treinta libros,

trescientas revistas más
cincuenta y tres revistas son
trescientas cincuenta y tres revistas.

Figura 1. Solución retórica al ejemplo.

$$1320\ L + 210\ L = 1530\ L$$
$$300\ R + 53\ R = 353\ R$$

Podemos escribir a continuación una sola ecuación, la cual nos permite analizar lo realizado; libros se suman con libros, revistas con revistas:

$$1320L + 300R + 210L + 53R = 1530L + 353R$$

Respuesta: En la biblioteca tenemos ahora 1530 libros y 353 revistas para disfrutar. ¡Claramente no podríamos decir que tenemos 1883 libros!

Figura 2. Solución sincopada.

En la ecuación:

$$1320L + 300R + 210L + 53R = 1530L + 353R$$

las letras L y R pueden representar cualquier objeto o concepto, podemos entonces utilizar cualquier otra letra y escribir, por ejemplo,

$$1320\,a + 300\,b + 210\,a + 53\,b = 1530\,a + 353\,b,$$

o también,

$$1320\,x + 300\,y + 210\,x + 53\,y = 1530\,x + 353\,y.$$

Figura 3. Solución simbólica.

Por otra parte, Stewart (2007) describe que en los textos antiguos se presentan problemas sobre una cantidad desconocida y posteriormente preguntan su valor. En la educación, el álgebra es una rama de las matemáticas en donde una cantidad que se desconoce se representa con letras, las operaciones aritméticas se representan por símbolos, y el propósito es que, a partir de ecuaciones se encuentren los valores de las cantidades desconocidas.

Cabe mencionar que en la antigüedad para las ecuaciones, se habían aceptado las soluciones positivas pero no las negativas. Por ejemplo en el caso de las ecuaciones cuadráticas, donde se tienen una raíz positiva y otra negativa, la raíz negativa no era aceptada. Sin embargo, en la actualidad los números negativos tienen un significado razonable y ya son aceptados dentro de las matemáticas para su estudio.

Respecto al surgimiento del álgebra; la palabra álgebra proviene del árabe al-jabr que significa "sumar cantidades iguales a ambos miembros de la ecuación", en ella lo que apareció primero fueron los problemas y los métodos, más tarde fue inventada la notación simbólica, lo cual se refleja en las etapas del desarrollo de álgebra que propone Dantzing (1947, citado en Protti, 2003).

En relación a las ecuaciones existe evidencia de que los babilonios en el 2000 a.C. ya resolvían ecuaciones complicadas, y en el año 1700 a.C. resolvían problemas más sencillos, esto se hace evidente en una tablilla cuneiforme donde se muestra un problema geométrico algebraico. Dentro de la tablilla (Figura 4) se pueden observar problemas que se solucionaban con lo que ahora conocemos con ecuaciones lineales de la forma: $ax + b = 0$ con solución $x = -\frac{b}{a}$, pero como se mencionó anteriormente, en la antigüedad no se trabajaban los números negativos, ni la representación simbólica. En cuanto a las ecuaciones cuadráticas donde la incógnita aparece elevada a la segunda potencia, es decir, es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, se le dice al lector lo que tiene que hacer, sin embargo se desconoce si en las escuelas de babilonios se enseñaba el procedimiento o se explicaba su funcionamiento (Stewart, 2007).

Figura 4. Tablilla cuneiforme babilónica.

Con respecto a los símbolos algebraicos los matemáticos de Italia desarrollaron bastantes métodos algebraicos pero su notación aún era primitiva. Con lo cual se hace evidente que se necesitaron siglos para desarrollar el simbolismo algebraico actual. Diofanto de Alejandría fue de los primeros en usar símbolos en lugar de números desconocidos, en sus libros se hace alusión a la solución de ecuaciones algebraicas tanto con números enteros como racionales, la notación que usó Diofanto era complicada para realizar los cálculos.

El proceso de la notación simbólica tuvo un crecimiento notable en el periodo renacentista. En el siglo XV aparecieron símbolos para suma y resta, que eran respectivamente *p* y *m*, también en esa misma época surgieron los signos – y +, más tarde William Oughtred introdujo el símbolo “x” para representar la multiplicación y en 1557 Robert Recorde inventó para la igualdad el símbolo =. Los símbolos > y < fueron inventados por Thomas Harriot, entre 1544 y 1593 aparecen los paréntesis redondos ( ), cuadrados [ ] y los corchetes {}. Descartes utilizaba el símbolo √ para la raíz cuadrada. Por otra parte Stewart (2007) describe que el álgebra inició como una forma de metodizar los problemas de aritmética.

De acuerdo a ello, podemos rescatar la evolución del álgebra desde la antigüedad hasta como la conocemos actualmente y cuando se enseña el álgebra en el nivel escolar, se pierde el surgimiento de la misma, y se le da prioridad a lo procedimental, dejando a un lado el surgimiento del álgebra como medio para abstraer el contenido matemático.

Por otra parte Yuste (2008), realizó un análisis comparativo entre los diversos procedimientos creados por los babilonios y Diofanto de Alejandría para resolver ecuaciones cuadráticas. De ese análisis, encontró que para los babilonios las ecuaciones cuadráticas, significaban reconocer el algoritmo que las resolvía. Ya que no se encuentran en este contexto expresiones del tipo $ax^2 \pm bx = c$, ni cantidades concretas.

Por otra parte, en las tablillas, no aparecen deducciones, razonamientos, ni demostraciones, sino el enunciado de un ejercicio y una serie de cálculos que, tomados conjuntamente, descubren la expresión final o fórmula que lleva al algoritmo geométrico, porque describe una composición o conjunto de figuras.

Asimismo, Yuste (2008) encontró que los métodos usados por los babilonios eran geométricos, para encontrar las medidas que requerían, componían a una figura dada en diferentes figuras planas y posteriormente la descomponían en superficies equivalentes. Aunque en los textos las soluciones indican aparentemente un algoritmo aritmético, éste es meramente geométrico, debido a que las operaciones que realizan se basan en la construcción de cuadrados y rectángulos y al calcular las raíces cuadradas. El algoritmo geométrico de los babilonios es analógico, pues consistía en trazar líneas y superficies; determinar la equivalencia entre un rectángulo y la diferencia de dos cuadrados. También pueden utilizarse para resolver otra clase de ejercicios, por ejemplo: repartos de herencias, sucesiones aritméticas y geométricas, cálculo de intereses, etc.

El autor describe que Diofanto de Alejandría fue el primero en dar una definición de ecuación cuadrática, de la siguiente forma: *igualdades en las que dos especies son iguales a una especie [$ax^2 \pm bx = c$]*. Diofanto propuso un algoritmo aritmético para resolver las ecuaciones donde decía que dos términos son iguales a un término, pero carecían de todo significado geométrico. Tal algoritmo lo obtuvo mediante el desarrollo algebraico de completar el cuadrado, pero aún tenía limitaciones (Yuste, 2008).

En el 2008, Mesa y Villa realizaron una investigación de elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. Los autores describen que al realizar una revisión bibliográfica en relación con las nociones cuadráticas encontraron cuatro momentos claramente diferenciados que son: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones.

En su investigación presentan la génesis de los cuatro momentos de las nociones cuadráticas que identificaron, pero en este escrito sólo presentaremos evidencia sobre las ecuaciones y funciones:

- Para los babilonios el concepto de cuadrado lo percibían como un producto de la cantidad misma que se representaba por medio de un álgebra retórica que lo hacía ver de forma aritmética porque carecían de estrategias o símbolos que les permitiera registrar generalizaciones. En la cultura griega se pone en manifiesto cómo las ecuaciones cuadráticas están implícitas en diferentes situaciones, pero en todas aluden a su explicación geométrica, a diferencia de Diofanto que usó álgebra sincopada con el propósito de expresar potencias. Posteriormente los árabes usaban representaciones geométricas que fueron heredadas de los griegos, donde el cuadrado se representa como una cantidad, pero necesitaba representación geométrica.

- Sobre el concepto de función, Del Río (1996, citado por Mesa y Villa, 2008, p.928) señala: "Descartes encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra" por lo que ya se tiene dos características de la noción de función, la primera es considerar dos cantidades variables y la segunda una cierta relación de dependencia. Dirichelt dio la definición de función que es la más empleada ahora: "*y* es una función de *x* cuando el valor de *x* en un intervalo dado, le corresponde un número *y* "(Kline, 1992, citado por Mesa y Villa, 2008, p. 928).

Dentro de la historia de las ecuaciones cuadráticas podemos identificar que tienen su origen tanto geométrico como algebraico. Cuando se estudian las ecuaciones cuadráticas en el nivel secundaria que es donde empieza el acercamiento de los estudiantes con estas, frecuentemente se deja de lado lo geométrico dando importancia a lo algebraico. Es decir, los estudiantes generalmente siguen ciertos algoritmos para darle solución, ya sea por el método de factorización o por fórmula general. Por tanto consideramos que trabajar únicamente de forma algebraica puede generar dificultades en la comprensión del concepto, ya que no se les brinda un enfoque práctico, sólo algorítmico, donde para ellos lo más importante es aprenderse los métodos de solución dejando a un lado el razonamiento matemático de lo que están realizando.

Por otro lado, hemos identificado que los alumnos presentan dificultades al diferenciar ecuaciones y funciones cuadráticas, es decir, confunden la ecuación cuadrática con la función cuadrática, ya que creen que representan lo mismo, y como podemos observar el surgimiento de las ecuaciones y de las funciones es de diferente naturaleza. Con las ecuaciones cuadráticas se pretende encontrar soluciones que satisfagan la ecuación, es decir, que se cumpla la igualdad, y en las funciones representa la relación entre dos variables.

Como profesores debemos de conocer el origen del concepto matemático que estemos trabajando, en este caso, podemos observar que algo que favoreció el surgimiento del concepto ecuación cuadrática es el aspecto geométrico. Ya que esto puede ayudar a planificar e impartir de forma más dinámica y eficaz la clase relacionada con el concepto matemático de estudio, además los estudiantes al saber el surgimiento del concepto, pueden tomarle interés y darle sentido del por qué es necesario que lo estudien.

1.2 Antecedentes Didácticos en torno al concepto de Ecuación Cuadrática

Es importante conocer el trabajo que se ha realizado en el aula respecto al concepto de ecuación cuadrática, conocer las propuestas o estrategias didácticas que surgen cuando se enseña el concepto de estudio. Lo anterior nos brindará la pauta para plantear nuestras actividades en torno al concepto, con el propósito de cumplir nuestros objetivos y robustecer el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto.

Pérez (2004) realizó una investigación para beneficiar los aspectos geométricos de la solución general de la ecuación cuadrática, y propiciar la experimentación en el proceso de aprendizaje. La idea es ofrecer una alternativa para hacer "visible" la solución general de las ecuaciones cuadráticas, en su estudio denominado: las cuadráticas. Una aproximación constructivista, en donde se considera que un buen razonamiento se apoya en un dibujo representativo. Por esta razón realizó la observación de la parábola $y = x^2$, donde se va describiendo cada una de las características que presenta (p.e los cortes de la parábola en el eje *x*), y va llevando al estudiante por medio de ella a relacionarla con la solución de la ecuación cuadrática, observa la simetría de raíces, y por último la ecuación cuadrática en forma general, y al hacer los cálculos pertinentes se llegó a la fórmula general para solucionar ecuaciones cuadráticas.

En los comentarios finales describe que la experimentación consistió en realizar la introducción de gráficas sobre situaciones particulares, además sugieren reducir el tiempo que se emplea en graficar, pues se puede realizar digitalmente o en papel cuadriculado.

Peréz (2004) da un panorama diferente de comenzar a trabajar las ecuaciones cuadráticas, de tal forma que los alumnos vayan relacionando las diferentes representaciones de las mismas, y construyan su conocimiento. Por otra parte Vaiyavutjamai, Ellerton y Clements (2005) aplicaron un cuestionario que contenía las siguientes ecuaciones cuadráticas: $x^2 = K$ donde $(K > 0)$ y $(x - a)(x - b) = 0$ (donde a y b pueden ser números reales), realizaron la aplicación a 235 alumnos en Tailandia (noveno año), 29 alumnos en Estados Unidos (segundo de universidad) y en Brunei Darussalam trabajó con 205 alumnos (décimo año) respectivamente.

Los estudiantes que participaron en la investigación intentaron resolver estas dos ecuaciones, así como muchas otras. Antes y después del estudio tuvieron clases sobre ecuaciones cuadráticas, los estudiantes estadounidenses también estaban cursando álgebra, como parte de su preparación especializada para profesor de matemáticas de secundaria.

La mayoría de los estudiantes de Tailandia y de Brunei no resolvieron correctamente la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 = 9$, a diferencia de los estudiantes de Estados Unidos. Con respecto a la ecuación: $(x - 3)(x - 5) = 0$, la mayoría de los estudiantes de Estados

Unidos y Tailandia la contestaron correctamente, a diferencia de los alumnos de Brunei que sólo el 31% la contestaron correctamente.

En la aplicación del cuestionario, más de la mitad de los estudiantes que participaron de los tres países se confundieron con el concepto de variable, pues no identificaban que en la ecuación $(x-a)(x-b)=0$ la *"x"* representaba el mismo valor.

De acuerdo a ello, los autores concluyen que se requiere realizar investigación de corte cognitivo que pueda orientar a los profesores acerca de cómo piensan los alumnos con respecto al concepto de ecuación cuadrática.

La conclusión de los autores se torna interesante para nuestra investigación, en el sentido que consideran importante realizar estudios sobre cómo piensan o razonan los estudiantes, ya que el estudio realizado reveló que los estudiantes de diferentes países presentan la misma dificultad al abordar la ecuación cuadrática, la cual recaía en el uso que se le dio a la varible.

Por otro lado, en la investigación realizada por Cruz (2008) se diseñó una secuencia cuyo objetivo general fue buscar la manera de generalizar el método de factorización en la solución de ecuaciones cuadráticas, con el fin de esclarecer algunas de sus formas, usos e interpretaciones de las ecuaciones, y así, dotar de elementos constructores para el diseño de una secuencia didáctica que permita a los alumnos apropiarse de este conocimiento matemático.

Los resultados que obtuvo al aplicar a estudiantes y profesores un cuestionario, fue que los métodos más conocidos en el ambiente escolar son: factorización, fórmula general, completando el trinomio cuadrado perfecto. Casi todos los entrevistados conocen el método de factorización. Cuando se presentan raíces enteras pequeñas, la mayoría opta por utilizar el método de factorización. Cuando se involucran raíces racionales, entonces prefieren utilizar la fórmula general. Cuando se tiene una ecuación cuadrática con números irracionales, nadie utiliza el método de factorización. La mayoría de los entrevistados puede percibir a una ecuación cuadrática como el producto de binomios con un término común (Cruz, 2008). Entonces estos resultados le favorecieron para realizar su secuencia didáctica, ya que uno de los métodos más conocidos y usados es el método de factorización.

Posteriormente realizó un estudio y análisis para encontrar la relación que existe entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números, del cual obtiene los siguientes resultados: las operaciones de suma, multiplicación y diferencia; entre dos números guardan una relación numérica $d^2 = s^2 - 4m$; donde: d = diferencia, s = suma, y m = multiplicación. Conociendo la suma y el producto de dos números se puede conocer la diferencia de esos números. Asimismo, conociendo la suma y la diferencia de dos números se pueden conocer los números. La suma y la diferencia de dos números forman un sistema de ecuaciones lineales. Por lo que siempre es posible encontrar los números que den una cierta suma y un cierto producto (Cruz, 2008).

Con los resultados obtenidos realizó el diseño de la secuencia didáctica, además considera que la investigación realizada responde a sus cuestionamientos, además de que cumple con los objetivos planteados, sin embargo cree necesario verificar si las actividades de la secuencia propuesta en verdad ayudan a mejorar y dar significado a la solución de una ecuación cuadrática. Ya que la metodología utilizada en esta investigación fue la ingeniería didáctica, sólo se han realizado dos puntos, falta aún la parte de experimentación y validación. Deja la invitación hecha a toda persona quien guste realizar las dos etapas que faltan de su secuencia didáctica.

En este sentido no podemos determinar si la generalización realizada puede resultar exitosa, ya que no presenta la aplicación y resultados.

López (2008) también realizó una propuesta para bachillerato titulada Productos Notables, Factorización y Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita, que tiene como objetivo mejorar el aprendizaje de los alumnos en estos temas, ya que ella considera que los productos notables y la factorización son básicos, porque son considerados como conocimientos previos para la solución de ecuaciones cuadráticas. Por esta razón la propuesta se basa en darle un enfoque geométrico a los productos notables, a la factorización y a la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Al aplicar una evaluación diagnóstica dio como resultado por un lado que los estudiantes son cognitivamente competentes y no hay ningún inconveniente de permanecer en el curso, por otro lado hay alumnos que no poseen las aptitudes cognitivas mínimas para tomar el curso. La autora consideró que los conocimientos previos demandan la implementación de diferentes estrategias por parte del profesor que le permita a los alumnos construir sobre estos conocimientos los nuevos contenidos.

Al aplicar el material didáctico notó que a los estudiantes se les facilitó la comprensión de estos temas relacionándolos con lo geométrico, pero en cuanto a la resolución de problemas que impliquen la formulación y solución de ecuaciones de segundo grado presenta la mayoría de los alumnos dificultades.

Consideramos que estas dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas están relacionadas con los conocimientos previos, pues al igual que Bastidas (2010), las dificultades al resolver problemas, se manifiestan por que los a los alumnos se les dificulta traducir el lenguaje natural al algebraico. En otro sentido, una recomendación que realizó la autora, y considero conveniente llevarla a cabo, es que entre profesores tengamos comunicación sobre las estrategias de enseñanza aprendizaje que utilizamos, para aportar al proceso de enseñanza y por consecuencia poder ayudar a nuestros alumnos a franquear sus errores.

Por otro lado Mejía (2008) presenta un proyecto de investigación llamado: El álgebra geométrica como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar, el cual tiene como objetivo hacer uso del álgebra geométrica como recurso didáctico para lograr un acercamiento al álgebra escolar, ya que didácticamente brinda a los procedimientos y objetos sentido por medio de la modelación geométrica. La autora consideró que el álgebra en la escuela ha ido dejando de lado los contextos geométricos a las expresiones que modelan situaciones o fenómenos y la relación con el marco histórico que es importante conocer sobre el origen del álgebra, ya que esto facilitará la identificación de situaciones concretas que dieron origen a conceptos y procedimientos algebraicos.

Con base en el contexto histórico, se diseñaron las actividades que permitieron al estudiante entender la génesis de ciertas expresiones, desde el punto de vista que los conceptos matemáticos surgieron de una necesidad específica pero en la actualidad se trabajan sin ningún contexto, además de que contribuye a su cultura general. En cuanto al contexto didáctico, diferentes investigaciones ponen en manifiesto que los estudiantes presentan dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, no le encuentran sentido al lenguaje algebraico y por consecuencia hacen mal uso de él (Mejía, 2008).

Con el uso de material manipulativo, específicamente de fichas o representaciones de figuras geométricas, se realizó la secuencia con el fin de que el alumno encuentre sentido a las relaciones entre expresiones y representaciones geométricas. Dicha propuesta tiene el sustento de los lineamientos curriculares de Colombia y la metodología que considera la teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau. El trabajo desarrollado desde un contexto geométrico permitió identificar que algunos errores relacionados con el sentido y el significado que los estudiantes construyen en la escuela frente a la expresión y simbolización algebraica, lograron ser superados a partir del trabajo realizado. Después de la aplicación de la secuencia, como resultados destacó que para los estudiantes cobró sentido y significado algunas de las expresiones algebraicas por medio del referente geométrico, ya que el álgebra geométrica permitió la identificación de equivalencia entre una ecuación y áreas de figuras geométricas (Mejía, 2008).

Podemos destacar de lo anterior que el conocer el origen de un concepto matemático como profesores nos puede brindar oportunidades de presentar a los alumnos de formas diferentes ese concepto, haciendo uso de su historia y de la necesidad del surgimiento del mismo, además podemos destacar que el álgebra geométrica es un recurso del cual todos los profesores debemos de echar mano, para que el estudiante logre el sentido del concepto que estamos trabajando.

En otro sentido, Bastidas (2010) realizó una investigación que tiene como objetivo el diseño de una estrategia didáctica para el desarrollo de la creatividad en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales y ecuación de segundo grado en el tercer año en Valencia. Ella consideró que se debe desarrollar por parte de estudiante la flexibilidad, fluidez y sobretodo la originalidad de ideas para que se logre la creatividad matemática en la solución de problemas. Entendiendo por creatividad matemática y de acuerdo con Arteaga (2002, citado en Bastidas, 2010, p. 16) como procesos incentivados, que una vez entendidos, construidos e interiorizados se transforman en procesos imaginativos que permanecen a través del tiempo y que se reflejan directamente en los aprendizajes de los estudiantes y su conducta. La propuesta realizada la dividió en tres unidades para facilitar los procesos de aprendizaje.

- La primera unidad la diseñó con el propósito de realizar un repaso de los conocimientos previos de los sistemas de ecuaciones, y también los relacionados con las ecuaciones cuadráticas, como son: polinomio, productos notables, factorización y raíz cuadrada.
- Para la unidad dos contempló todos los conocimientos de los que debe apropiarse el estudiante tanto de los sistemas de ecuaciones y resolución de ecuaciones de segundo grado, es decir, identificar si es una ecuación cuadrática completa o incompleta, y una vez identificada como se puede proceder a la solución, es decir, si se utiliza el método de factorización o la fórmula general, en este apartado explican cada uno de los procedimientos anteriores.
- En la unidad tres se desarrollaron los contenidos utilizando: el método de Polya, el cual lo resume en cuatro pasos: Entender el problema, configurar el plan, ejecutar el plan y verificar el resultado, la intensión de este método es generar en el estudiante el pensamiento creativo.

Para favorecer la creatividad matemática que es el objetivo de su estrategia didáctica, en cada una de las unidades cuentan con una sección llamada: “Piensa Creativamente”, en ella se les brindan a los estudiantes sugerencias que promueven la imaginación y permiten identificar todos los elementos del problema. Asimismo se les solicita a los estudiantes que anoten todas sus ideas, dibujen un diagrama o un gráfico, y variar datos.

Los resultados que obtuvo el autor, es que la mayoría de los estudiantes tienen un bajo nivel de creatividad, considerando entonces que la estrategia no tuvo resultados favorables. En cuanto a la comprensión más de la mitad de los estudiante presentan dificultades para identificar en el sistema de ecuaciones la incógnita, en cuanto a las ecuaciones de segundo grado encontraron que no pueden determinar el dato que se desea calcular, esto se debe a que no comprenden el enunciado, aun cuando se contextualice con temas de su vida cotidiana, también tienen dificultades para traducir ecuaciones de segundo grado de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

En este sentido observando los resultados de la investigación que realizó Bastidas (2010), podemos identificar que los estudiantes presentan dificultades al identificar la incógnita en las ecuaciones de primer grado, y esta dificultad la arrastran hasta las ecuaciones cuadráticas, además llama la atención que al cambiar de lenguaje natural al algebraico también presentan dificultades y es por esta razón que no pueden diseñar una ecuación que represente un problema a resolver, y aunándole la falta de comprensión en la lectura, se vuelve muy complicado para ellos resolver problemas que impliquen ecuaciones cuadráticas.

Considerando lo anterior, tanto las autoridades educativas y los profesores debemos reflexionar como lo sugieren Vaiyavutjamai, Ellerton, y Clements (2005), si en la educación secundaria es adecuada para comenzar a trabajar con el concepto de ecuación cuadrática, es decir, ¿los alumnos estarán cognitivamente preparados para trabajar este concepto?

Por otro lado, Didiş, Baş & Erbaş (2011) en su artículo "Students' Reasoning in quadratic Equations with one unknown" realizaron un estudio con 113 estudiantes de 10° grado en una escuela secundaria en Antalya. Ellos investigaron los procesos para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita usando el método de factorización.

Para su estudio diseñaron un cuestionario, en el análisis de los resultados arrojados de la aplicación del mismo, se obtuvo que los estudiantes sabían algunas reglas o procedimientos relacionados con la solución de las ecuaciones cuadráticas, sin embargo, los estudiantes intentaron aplicar estas reglas sin pensar en las razones por las que lo hicieron, o no tenían la seguridad si lo que hicieron era matemáticamente correcto. Aunque la mayoría de los alumnos identificaron el resultado correcto, estos no eran capaces de justificar por qué su elección, en conclusión, los estudiantes sabían cómo obtener respuestas correctas pero no eran conscientes de identificarlas y justificarlas.
En los resultados que obtuvieron podemos destacar que los estudiantes solamente mecanizan procesos, es por eso que incurren en los errores porque al presentarles situaciones con diferente contexto, muchas de las veces son incapaces de aplicar ciertas reglas o no las entienden.

Al final de su estudio, y con base en el análisis de resultados Didiş et al. (2011) realizaron las siguientes sugerencias para contribuir a la comprensión de ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización:

- Se recomienda que los profesores introduzcan diversos tipos de ecuaciones cuadráticas y no sólo la forma estándar.

- Es conveniente que los estudiantes comprendan las técnicas de factorización, como método para resolver las ecuaciones cuadráticas.
- Los profesores deben enfatizar el significado de los símbolos algebraicos, porque es útil para los estudiantes entender lo que los símbolos representan en las ecuaciones cuadráticas.
- Si los profesores animan a los estudiantes a usar diferentes técnicas mientras resuelven las ecuaciones, el aprendizaje de los estudiantes puede mejorar, y también pueden obtener una comprensión.

(Didiş et al. 2011,p. 9)

En las sugerencias que dieron se puede observar cómo el papel del profesor es de suma importancia, y por lo tanto se tiene una gran responsabilidad de mejorar la propia práctica para lograr el aprendizaje en los estudiantes.

Por otro lado, Mora (2011) en su estudio "Desarrollo de competencias algebraicas basado en la resolución de problemas", propone desarrollar las competencias algebraicas a través de la resolución de problemas. Entendiendo por competencia el adquirir conocimientos, ejecutar destrezas y desarrollar talentos que se manifiestan en el saber, el saber hacer y el saber ser.

Debido a que identificó que la enseñanza de las matemáticas se han concretado únicamente en aprenderse ciertas reglas y algoritmos, dejando al alumno como un ente pasivo, solamente captando lo que el profesor diga, caso que debe ser distinto a la realidad, porque los alumnos deben participar activamente en el proceso de enseñanza aprendizaje, necesitan expresarse y resolver problemas. Por otro lado, existen las concepciones que se tienen sobre las matemáticas, influenciados por personas que no les fue muy bien en la materia. Otro aspecto relevante es la forma en que el profesor conduce la materia, si es de manera "tradicional".

Para llevar a cabo su investigación se presentaron definiciones y propiedades básicas de los números reales, de álgebra y geometría, como apoyo para la comprensión y solución de los problemas. Posteriormente varios problemas, en los cuales al solucionarlos permitirá observar las estrategias utilizadas para el desarrollo de las competencias. Dichos problemas están seleccionados y organizados de acuerdo a su naturaleza de solución, para la mayoría, se presentan diferentes maneras de resolverlos, es decir, prueba y error, hacer uso de ecuaciones de primero y segundo grados y sistemas de ecuaciones.

Al terminar Mora (2011) realizó las siguientes sugerencias pedagógicas:

- Es deseable que no le llamemos problemas, sino retos; usar los problemas con diferentes propósitos como inicio de clase, ejercicios, para divertirse pensando.
- Dejar que los alumnos resuelvan los problemas con métodos propios, esto beneficiará que desarrolle sus competencias; y dejar trabajar a los alumnos en

parejas o equipos, esto les ayudará a entenderse entre pares; darle tiempo a los estudiante para que presenten sus planteamiento y resultados, ya que todos son diferentes.

- Como profesor presentarles la forma de resolverlos algebraicamente y hacerles ver que es una manera de resolverlos fácilmente, con esto mostrar la potencia que tiene al usar el álgebra; no dejar de lado los fundamentos matemáticos del procedimiento que se está realizando.

Al trabajar los problemas, observaron que los alumnos se interesaron y motivaron cuando en lugar de problemas se llamaron retos, al darle la solución a los retos algunos alumnos mostraron gran capacidad mental y otros cuantos utilizaron el álgebra para solucionarlos, los retos se utilizaron al inicio de clase, como ejercicios y tareas, se logró ver que los alumnos tenían interés por resolverlos.

Al trabajar los retos facilitaron que fueran relacionados con matemáticas y con otras disciplinas. En cuantos a los profesores, los retos que se presentan pueden ser de gran utilidad para los que no tienen perfil en matemáticas, y para los que sí, pueden hacer uso de los retos como material para la enseñanza.

Desarrollar las competencias en los alumnos es uno de los propósitos del programa de estudios, favorecer estas competencias con problemas es de gran utilidad al profesor, pero tomando en cuenta las bases matemáticas y que los alumnos comprendan lo que estén realizando esto facilitará que tomen consciencia de lo que realizan matemáticamente y no se van solo a la mecanización, es lo que se pretende hacer con el estudio de ecuaciones cuadráticas, lo ideal al presentar esta serie de retos, es que el alumno comience a realizarlos con procedimientos propios, pero después de un tiempo que vayan haciendo uso del álgebra para solucionar problemas.

Por otro lado, Pulido, Cuervo, Acuña y Bustos (2012) realizaron una investigación que tiene por título "El uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a través del Método Griego: Experimento de Enseñanza", debido a que observaron que los estudiantes tienen dificultades cuando se trabaja la ecuación cuadrática para llegar a la solución. Al hacer uso de la fórmula general, no saben de donde proviene, cuando la aplican no saben identificar los coeficientes para sustituir la fórmula, tanto en el nivel superior como educación básica. En este sentido, como no existe la compresión de la ecuación cuadrática se generan dudas sobre la forma de abordar la enseñanza de la misma.

Vasco (1986, citado en Pulido et. al 2012, p.10), consideró que al momento de resolver distintas ecuaciones nos remitimos directamente a un algoritmo sin conocer de donde proviene éste; un ejemplo es el caso de la ecuación cuadrática donde se hace un uso memorístico de la fórmula general sin reflexionar el porqué es necesario aplicar dicha fórmula en una situación determinada. Por esta razón existen dificultades en el aprendizaje del álgebra, porque no se hace uso de diferentes formas de representación de los objetos matemáticos trabajados en el álgebra.

En la investigación se llevaron a cabo dos metodologías:

- En la primera se toma como referencia la formulación de un problema de investigación, además de un diseño de las situaciones que presentan un problema, su aplicación, recolección de datos, análisis y conclusiones de los mismos.
- En la segunda metodología se basó en las acciones que realiza el profesor en el salón de clases, donde se identifican cuatro etapas, que son: planeación, acción, observación y reflexión, que además tienen un comportamiento cíclico.

Por lo anterior decidió realizar una representación geométrica de expresiones algebraicas como puente, que permitió la enseñanza de la ecuación cuadrática a través de las soluciones propuestas por los griegos, quienes obtuvieron sus respuestas partiendo de las sumas entre áreas de rectángulos.

Como resultados obtuvieron que la secuencia de actividades permitió que los estudiantes relacionaran el álgebra con la geometría, además facilitó que superaran errores y dificultades, tanto en álgebra y geometría, porqué estos errores traerían consecuencias al momento de presentar la ecuación cuadrática, por ejemplo al trabajar con ecuaciones algebraicas, algunos estudiantes confundían el área con el perímetro. En cuanto al profesor, participó activamente, ya que cuestionaba a los estudiantes, para que por sí solos detectaran sus errores, ya sea entre pares o alumno y profesor.

Dentro de las actividades realizadas se puede observar que los alumnos afianzaron los conceptos de área y perímetro, gracias al desarrollo de las actividades con base en los métodos usados por los griegos. Los estudiantes tuvieron dificultad para resolver las ecuaciones de la forma $x^2 + c = bx$, ya que el proceso para solucionarla no es directamente con áreas, es decir, consiste en realizar relaciones a partir de la figura inicial. En este sentido, pudieron llegar a la conclusión de que el álgebra geométrica como recurso, resulta favorable para trabajar la ecuación cuadrática y llegar a la comprensión.

Esta investigación se torna interesante, debido a que abarca tres aspectos importantes en relación a la ecuación cuadrática, el primero es la historia que nos permite visualizar el surgimiento de la misma y con esto fundamentar su estudio en la actualidad, por otra parte el aspecto matemático en donde nos podemos percatar de los conocimientos previos con los que debe de contar un alumnos para comenzar el trabajo con las ecuaciones cuadráticas, y por otro lado el aspecto didáctico, que no se puede dejar fuera, debido a que es parte fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, donde para generar el conocimiento deben de participar activamente tanto el profesor como los alumnos.

En este sentido resulta muy enriquecedora, pues se acerca a lo que se pretende investigar en este trabajo, sin embargo la diferencia recae en que pretendemos observar si es que los alumnos al exponerse a la ecuación cuadrática son capaces de resolverla, fuera de la situación de actividades diseñadas para el estudio, es decir, si se logra que adquiera una comprensión del objeto matemático en cuestión.

Posadas (2013) en su investigación evaluó la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones cuadráticas en 3º de educación secundaria obligatoria (ESO). Ella realizó una reflexión sistemática que se apoya en el uso de la noción de idoneidad didáctica y en el sistema de indicadores de idoneidad desarrollados por Godino y colaboradores. Su investigación aborda las siguientes preguntas: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º de ESO? y ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica?

La unidad didáctica que describió y analizó se centra en el estudio de las ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, así como la resolución de problemas contextualizados. La distribuyó en siete sesiones de una hora cada una, siguió la forma de enseñar "tradicional" (el profesor presenta la expresión general de la ecuación cuadrática, explica el significado de los parámetros, presenta algunos ejemplos, y los alumnos realizan ejercicios (Posadas, 2013). Se utilizó como guía el libro de texto de Colera, Gaztelu y Oliveira (2010), el cual propone el estudio de las ecuaciones cuadráticas enfocado al aprendizaje de la fórmula general para hallar las raíces para la forma general $ax^2+bx+c=0$, una vez presentada la fórmula, se explica la aplicación con un ejemplo particular, posteriormente la resolución de ejercicios resueltos y actividades, cabe mencionar que en el libro de texto no justifican la obtención de la fórmula general por considerar el proceso "largo y complicado".

En las actividades propuestas en el libro no hay una problematización previa que lleve a la búsqueda, tras un proceso de generalización, de soluciones para las ecuaciones cuadráticas (Posadas, 2013), para aplicar la fórmula general hay que seguir una serie de pasos para encontrar las soluciones. En este sentido, considera necesario contemplar el uso de situaciones introductorias que lleven al planteamiento de ecuaciones cuadráticas y motiven la búsqueda de procedimientos eficaces para su solución. Los conceptos de variable, incógnita y parámetro no se discuten y aclaran con ocasión del estudio de las ecuaciones cuadráticas, como también algunas propiedades básicas involucradas en su resolución, como la ley del factor nulo (Posadas, 2013).

En ese sentido, Posadas considera pertinente y deseable que la situación didáctica se diseñe de tal forma que contemple la introducción de las técnicas de completar el cuadrado y factorización, en ejemplos sencillos, además cree conveniente usar lenguaje algebraico y geométrico conjuntamente, como muestran los trabajos de Radford y Guerete (1996) y Galván (2006), ya que en el libro de texto que se llevó como guía no se utilizan y no se hacen evidentes. Según Posadas (2013) facilitaría la comprensión de las transformaciones algebraicas que llevan a establecer la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado. En consecuencia, se puede calificar la idoneidad epistémica del proceso implementado como baja por las razones mencionadas (Posadas, 2013).

Al analizar los datos obtenidos, los resultados arrojaron dificultades al solucionar ecuaciones cuadráticas, y el más destacado es en aspectos procedimentales. Además considera que los instrumentos de evaluación de los aprendizajes deberán ser mejorados para obtener información tanto de aspectos procedimentales como aspectos conceptuales y de interpretación. "*Sería deseable introducir cambios en el proceso de enseñanza orientados a que los alumnos planteen cuestiones y presentan soluciones; exploren ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos*" (Posadas, 2013, p.48). En este sentido concuerdo con ella, ya que si a los alumnos sólo se les enseñan procedimientos y no lo relacionan con ejemplos, difícilmente se logrará que comprendan y con facilidad olvidarán los contenidos estudiados.

Por otro lado, Gustin y Avirama (2014) realizaron una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo, con el objetivo de propiciar un acercamiento al reconocimiento y soluciones de la ecuación cuadrática en grado noveno (Colombia) de la educación básica a través de actividades que involucran el uso del Puzzle Algebraico. Las actividades se componen de tres situaciones, las actividades planeadas integraron el material manipulativo Puzzle Algebraico, fichas y plenarias, las cuales se realizaron de manera individual.

Los resultados que obtuvieron fueron que los estudiantes pueden identificar las cantidades conocidas y desconocidas del problema, unos cuantos lo hacen de forma verbal y otros en forma algebraica. Sin embargo existe una dificultad en algunos estudiantes que asocian las cantidades conocidas a aquellas en las que se expresa un valor numérico, sin determinar que estas cantidades pueden estar dependiendo de otro valor, además se involucraron en el concepto de ecuación cuadrática, en el que se identifican y representan cantidades conocidas y desconocidas de un problema que lo puedan representar con una ecuación y en la cual en su proceso de solución se identifican característica y propiedades generales de las ecuaciones cuadráticas.

Apoyándose en el Puzzle Algebraico, se logra que los estudiantes puedan establecer la relación entre representaciones geométricas y representaciones algebraicas, que identifiquen expresiones algebraicas equivalentes, y la relación entre expresiones asociadas a las dimensiones y al área de figuras geométricas (Gustin y Avirama, 2014).

De acuerdo a ello, afirman que la mayoría de los estudiantes tienen mayor familiaridad con los métodos de factorización y de raíz cuadrada, y logran comprender el significado de la ecuación cuadrática e identificar los procedimientos más convenientes a la hora de resolver un problema que tenga relación con este tipo de ecuaciones.

Por otra parte, Guayacundo (2014) realizó una propuesta didáctica de enseñanza en el aula, ecuaciones lineales-cuadráticas y modelos, donde el foco es la modelación de fenómenos simples de la física (caída libreo aceleración) y de la matemática, que a través del análisis de variables, formulación de hipótesis, realizar su verificación, experimentación directa o haciendo uso de simuladores, los estudiantes logren realizar un modelo lineal o cuadrático.

Para fortalecer su propuesta Guayacundo realizó una muy minuciosa y completa revisión bibliográfica de los conceptos de ecuación cuadrática o lineal y la modelación. El principal foco de cada situación es la modelación a partir de problemas básicos de física y matemáticas. El autor consideró que para construir el concepto mental es importante que se le proporcionen a los estudiantes problemas de diferentes contextos, concuerda con Sánchez y Valcárcel (1994, citado en Guayacundo 2014) que presentarles las situaciones problema en diferentes disciplinas son ejemplos que ayudan al alumno a abstraer conceptos, reglas o principios.

Guayacundo (2014) estima que tradicionalmente se les presentan a los alumnos las funciones y ecuaciones formalmente, y sólo se proponen los ejercicios de rutina, es decir, seguir procedimientos identificando características formales, lo cual no permite al estudiante visualizar su utilidad y aplicación en diferentes conceptos y están en la creencia que son meramente matemáticos.

La unidad didáctica comenzó con actividades que permitieron identificar conocimientos previos de los estudiantes, es decir, un diagnóstico, planteando ejercicios y problemas. Después se guió al estudiante a trabajar por etapas para que logre obtener un modelo o una expresión matemática, se les presentan actividades de refuerzo y de ampliación, antes de comenzar con problemas estructurados de modelación, se presentan algunos problemas simples que motivan al estudiante en el reconocimiento de las ecuaciones, sus usos y/o aplicaciones, además los ejercicios le dan un verdadero significado a la variable en un problema dado.

Al aplicar la propuesta se demostró que la modelación favoreció la comprensión de los estudiantes con respecto a las relaciones cuadrático-lineales, el comportamiento y la representación. Los simuladores favorecieron la asimilación de los conceptos, pues al realizar cambios en las variables ellos podían observar cómo cambia la gráfica. También en la aplicación diagnóstica se hace evidente que los estudiantes únicamente memorizan la fórmula general para solucionar las ecuaciones de segundo grado y carece de habilidades para relacionarla con una solución gráfica.

En este sentido como profesores debemos enfatizar además de lo algebraico, lo geométrico para solucionar las ecuaciones cuadráticas. En cuanto al simulador que se utilizó consideró que es un buen recurso, ya que permitió al estudiante observar el comportamiento de una ecuación cuadrática, debido a que algunos estudiantes aprendían visualmente y esto les permitía identificar un comportamiento que no obtenían únicamente con la ecuación algebraica.

Como podemos observar la manera de enseñar "tradicionalmente" resulta ser muy poco conveniente en el concepto de ecuación cuadrática, ya que no se logra que los estudiantes comprendan y razonen matemáticamente, sólo siguen una serie de pasos, que no permiten que el estudiante comprenda el concepto de estudio.

Por otra parte, Yahya y Shahrill (2015) realizaron un estudio de caso en una de las escuelas secundarias de Brunei Darussalam, con el propósito de investigar las estrategias que utilizan los estudiantes de secundaria para resolver problemas algebraicos. Las preguntas de investigación en este estudio fueron: ¿cuáles son las estrategias correctas e incorrectas comúnmente empleadas por los estudiantes para resolver problemas al despejar una variable de una fórmula dada, factorización de expresiones cuadráticas y resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general? y ¿cuál es el patrón de error de los estudiantes en la resolución de problemas relacionados con los temas antes mencionados?

Para su estudio los autores diseñaron una prueba de álgebra y una entrevista que se aplicó a un grupo de 21 estudiantes repetidores del grupo de Yahya, por lo tanto, ella conocía al grupo, sabía sus fortalezas y debilidades en los temas algebraicos.

Los resultados que obtuvieron de la aplicación mostraron que las estrategias que usan los estudiantes para despejar una variable dada en una ecuación es cambiando la operación, un aspecto que coincide con el estudio de Lim (2000, citado en Yahya y Shahrill, 2015, p.1193). Particularmente, al intentar resolver las ecuaciones, los alumnos argumentan sobre "números y letras cambiándose al otro lado de la ecuación, y sobre el signo (+) que se convierte en un signo (-), y la multiplicación en división" (Yahya y Shahrill, 2015).

Desafortunadamente podemos detectar que estos estudiantes carecen de las bases para despejar una variable, solo mecanizan, cambian una literal o un número al otro lado de la igualdad con operaciones contrarias. De acuerdo a mi experiencia he detectado que los alumnos se olvidan que si quieren eliminar un término en la ecuación, por ser igualdad, y según la operación que esté realizando ese término, a ambos miembros de la igualdad se debe sumar, restar, multiplicar, y/o dividir el término en cuestión.

Según el estudio de Yahya y Shahrill (2015), los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes fueron, la factorización de expresiones lineales y el uso de la cancelación, operaciones con fracciones, el uso de la raíz cuadrada o el cuadrado (exponente) y la presencia de términos comunes. Para factorizar las expresiones cuadráticas, la mayoría de los estudiantes usaron prueba y error. Los errores en este sentido fueron: errores en la comprensión al factorizar la expresión cuadrática muchos de ellos no podían relacionar la factorización con la ley distributiva, errores en la multiplicación de factores, esto sugiere que los estudiantes tienen dificultad con las tablas de multiplicar, lo que concuerda con el estudio de Kotsopoulos (2007 citado en Yahya y Shahrill,2015, p. 1193); errores en la adición de enteros negativos; y errores en la formación de soluciones para la factorización, sólo dos de cada diez participantes obtuvieron valores para x, estos resultaron demostraron que la mayoría de los estudiantes carecen del concepto fundamental de distinguir términos utilizados matemáticamente y llegar a la solución.

En cuanto a resolver ecuaciones cuadráticas con la fórmula general, los estudiantes aplicaron la fórmula incorrectamente y eran propensos a cometer errores en la sustitución de enteros negativos. Durante las entrevistas, la mayoría de los participantes coincidía que su profesor esperaba que memorizaran la fórmula cuadrática y la aplicaran para resolver ecuaciones cuadráticas, y no esperaba que comprendieran de dónde se derivaba la fórmula.

De este apartado podemos concluir que los métodos más utilizados por los estudiantes al solucionar ecuaciones cuadráticas son el método de factorización y la fórmula general, desafortunadamente incurren en una serie de errores, como no identificar las soluciones de la ecuación cuadrática, cambiar operaciones al otro lado de la igualdad, sin saber su origen matemático, cuando trabajan con factorización presentan dificultades en encontrar los factores, falta de comprensión de la propiedad del factor nulo, de igual manera si en las ecuaciones se encuentran números negativos cometen errores al trabajar con los mismos por carecer conocimiento de las leyes de los signos, de esto nos podemos percatar que los alumnos traen deficiencias en conceptos algebraicos y que aún no comprenden la ecuaciones lineales, cuando ya se encuentran trabajando en ecuaciones cuadráticas, de lo anterior, podemos preguntarnos: ¿la forma en la que se lleva una clase de matemáticas es adecuada?, ¿Qué podemos hacer como profesores para disminuir los errores en los estudiantes?, ¿Qué estrategias podemos utilizar para lograr la comprensión de las ecuaciones cuadráticas?

Para contestar a las preguntas anteriores como profesores tenemos una amplia responsabilidad con los estudiantes, y comprometernos con su aprendizaje, realizando los cambios que creamos pertinentes en nuestra práctica. Por esta razón es el interés de la investigación, ya que la revisión de estos antecedentes nos permitirá tener un panorama de los aspectos que están involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje de la ecuación cuadrática.

1.3 Antecedente sobre los procesos cognitivos en la comprensión del concepto ecuación cuadrática

Kotsopoulos (2007) en su artículo "Desafiando los retos de los estudiantes con la cuadrática: Un enfoque cognitivo", supone que los problemas con las relaciones cuadráticas están vinculados a las formas en que el cerebro construye las representaciones cognitivas, estima que si el profesor sabe cómo el estudiante construye las representaciones cognitivas puede ser utilizado para tomar decisiones pedagógicas.

Según Butterworth (1999, citado en Kotsopoulos, 2007, p.20) sugiere que hay tres tipos de memoria que nuestros cerebros pueden crear: La memoria autobiográfica, memoria semántica de largo plazo, que es donde se pretende que los conceptos matemáticos permanezcan, para poder trabajar con ellos como conocimientos previos cuando trabajemos un concepto matemático específico; y la memoria a corto plazo.

Dentro de la memoria semántica matemática encontró dos tipos diferentes: el conocimiento procedimental y el conocimiento conceptual. Es decir, el conocimiento conceptual es la comprensión profunda de las relaciones matemáticas más allá de los cálculos, mientras que el conocimiento procedimental involucra los cálculos y el uso del algoritmo (Boaler, 1998; Hiebert & Carpenter, 1992 citado en Kotsopoulos, 2007, p.20).

Entonces, respecto a la ecuación cuadrática, Kotsopoulos (2007) se planteó estas preguntas; ¿Por qué entonces los estudiantes experimentan dificultades al factorizar una ecuación cuadrática? ¿Qué es lo que hace que la factorización sea una tarea difícil? Detectó que los estudiantes presentan dificultades conceptuales cuando se les presentan las ecuaciones cuadráticas diferentes a la forma estándar, además para encontrar los factores en el método de factorización como profesores debemos de ser conscientes que en el cerebro el orden importa, es decir, no procesa de la misma forma 5*7 que 7*5.

Kotsopoulos (2007) tiene claro que como profesores debemos crear las oportunidades de aprendizajes en los alumnos para que se queden los conocimientos matemáticos en su memoria semántica.

De lo anterior podemos destacar que es la única investigación que aborda lo cognitivo con respecto al concepto de ecuaciones cuadráticas, pero únicamente como sugerencia, esto nos da pauta para saber cómo podemos abordar nuestra investigación. Es decir, si como profesores conocemos qué construcciones y mecanismos mentales están presentes en el estudiante para la comprensión del concepto de ecuación cuadrática, éste nos permitirá contribuir al diseño de actividades que disminuyan la incidencia en errores y poder reducir las dificultades que presentan el aprender y enseñar el concepto de ecuación cuadrática.

CAPÍTULO 2
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se describen: el problema de investigación, la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos particulares, por último la justificación.

2.1 Problema de investigación

Con la revisión de los antecedentes podemos destacar que hay diferentes perspectivas en las que han trabajado el concepto de ecuación cuadrática, desde los que presentan la historia, los que trabajan didácticamente el concepto y la de Kotsopoulos (2007) donde compartimos la misma postura cognitiva. Entonces retomando las ideas de Kotsopoulos (2007) consideramos que es importante que los conceptos matemáticos permanezcan en la memoria semántica (a largo plazo), ya que con ello alcanzaremos que los alumnos afiancen conocimientos previos que le puedan servir como andamios para construir los nuevos. En este sentido para lograr alcanzar lo anterior como profesores debemos conocer cómo se construyen los conceptos matemáticos los estudiantes de nivel secundaria.

Podemos percatarnos también que los procedimientos para solucionar ecuaciones cuadráticas son la factorización y aplicando la fórmula general, los estudiantes muestran tendencia a usar la segunda por que únicamente sustituyen valores, pero presentan dificultades para diferenciar los coeficientes. En cuanto a la factorización, también únicamente siguen ciertas reglas, pero realmente no comprenden los que realizan matemáticamente.

Además nos podemos percatar que los errores que se cometen al resolver ecuaciones cuadráticas no son exclusivos de nuestro país, sino que es una constante en los estudiantes de otros países cuando trabajan este concepto.

En cuanto a las investigaciones que hacen uso del material manipulativo realmente no podemos ver el impacto que tienen las situaciones, porque si bien es cierto favorecen la representación geométrica, no podemos conocer ¿qué tanta trascendencia tendrán cuando los estudiantes se exponga fuera de la situación al concepto?, ¿realmente se logró la comprensión? en nuestra investigación el uso de material manipulativo, únicamente será un medio para lograr la construcción del concepto de ecuación cuadrática.

Por otra parte, podemos rescatar en la investigación de Posadas (2013), que la manera tradicional de enseñar no favorece la comprensión del concepto en los estudiantes, de lo anterior, podemos reflexionar cómo profesores y comprometernos con nuestra práctica profesional, para brindarle a los alumnos clases dinámicas, haciendo uso de todos los recursos que estén a nuestro alcance para lograr los aprendizajes esperados.

Estas investigaciones analizadas en torno a las ecuaciones cuadráticas nos ayudan a conjeturar por una parte, según la revisión, que una de las dificultades con respecto al aprendizaje del concepto ecuación cuadrática esta relacionada con los métodos para solucionar las ecuaciones cuadráticas, y por otra parte en la interpretación de la solución de ecuación cuadrática. Otro punto que surge de los antecedentes, es que un elemento importante en el surgimiento del concepto ecuación cuadrática es el aspecto geómetrico y su relación con el aspecto algebraico. Y finalmente desde la práctica docente en el tema rescatamos que se han diseñado diferentes estrategias didácticas, sin embargo apuntan a situaciones puntuales, por ejemplo, para utilizar el método de factorización al solucionar la ecuación cuadrática, sin embargo no se enfocan en las razones de por qué los estudiantes cometen los errores con respecto al tema o porqué realizan ciertos procedimientos inadecuadamente. Por ejemplo en Didiş, Baş & Erbaş (2011) en su investigación describieron "..los estudiantes intentaron aplicar estas reglas sin pensar en las razones por las que lo hicieron, o no tenían la seguridad si lo que hicieron era matemáticamente correcto" Entonces surge la pregunta ¿será que no estan pensando en las razones de porque realizaron la aplicación? O bien ¿ qué estan pensando al resolver las ecuaciones cuadráticas?

Por tanto consideramos que una investigación de corte cognitivo nos permitirá indagar sobre las construcciones mentales que realizan los estudiantes cuando aprenden el concepto de ecuación cuadrática y su solución.

2.2 Pregunta de investigación

De acuerdo a lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué construcciones y mecanismos mentales se requieren para comprender el concepto de ecuación cuadrática de manera algebraica y geométrica, y su solución en nivel secundaria?

2.3 Objetivo General

Caracterizar las construcciones y mecanismos mentales que hacen los estudiantes de secundaria al construir el concepto de ecuación cuadrática y su solución de manera geométrica y algebraica.

2.3.1 Objetivos particulares

- Diseñar una descomposición genética que permita a los estudiantes desarrollar la comprensión del concepto de ecuaciones cuadráticas y su solución con un enfoque geométrico y algebraico en nivel secundaria.
- Valorar si la descomposición genética es viable para la comprensión del concepto de ecuaciones cuadráticas y su solución con un enfoque geométrico y algebraico en nivel secundaria.
- Dar sugerencias didácticas en torno al concepto de ecuación cuadrática y su solución en nivel secundaria.

2.4 Justificación

En el ámbito de la Matemática Educativa se han realizado diferentes estudios en álgebra escolar que abordan las dificultades cognitivas que están presentes en los estudiantes cuando se enseñan diferentes temas de este tópico. Sin embargo son pocos los trabajos que abordan ¿cómo se construye cognitivamente un concepto en álgebra escolar? Por tal motivo consideramos necesario este tipo de estudio. Y por otra parte, el sustento teórico que se utilizará está diseñado para el nivel superior, pensamos que es importante que los profesores de matemáticas de cualquier nivel conozcan cómo el estudiante construye su conocimiento, para poder desarrollar actividades que fomenten la comprensión del mismo a través de este constructo teórico.

Por otro lado, se considera importante que los estudiantes no únicamente sigan procedimientos o algoritmos en álgebra, sin encontrarle sentido a lo que hacen, sino que realicen interpretaciones de los resultados obtenidos. En este sentido, se puede visualizar que los conocimientos del estudiante son deficientes en torno a las ecuaciones cuadráticas, porque cuando se les presentan diferentes tipos, por ejemplo: desarrollar productos notables, ecuaciones cuadráticas incompletas puras y mixtas, presentan dificultades para resolverlas. Al tratar de resolver un problema contextualizado incurren en errores para formular la ecuación, pues presentan dificultades al cambiar del lenguaje natural al algebraico.

En cuanto a los métodos usados por los estudiantes para solucionar ecuaciones cuadráticas generalmente recurren a la fórmula general, porque es seguir un algoritmo únicamente, pero generalmente, también, presentan dificultades debido a que no identifican los coeficientes para sustituir la fórmula general. Cuando utilizan el método de factorización realmente no saben lo que están realizando, por ello argumenta que es difícil, pues carecen de conocimientos previos para factorizar. Lo mencionado anteriormente pudimos confirmarlo, ya que se les aplicó un cuestionario a alumnos de 3° y 5° semestre de preparatoria.

Entonces, consideramos que la descomposición genética de la ecuación cuadrática nos permitirá construir este conocimiento en el estudiante de nivel secundaria, y con ello, contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje de este concepto.

CAPÍTULO 3

LA TEORIA APOE Y SU CICLO DE INVESTIGACIÓN

3.1 Teoría APOE

La teoría APOE fue desarrollada por Ed Dubinsky y ampliamente trabajada por el Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). La teoría es de corte constructivista y se basa en la idea fundamental de abstracción reflexiva (proceso que se nombra al extraer información de los procesos realizados sobre un objeto) de Piaget utilizada como clave en la construcción de conocimiento (Kú, 2007).

El nombre de la teoría es el acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema que son las principales etapas que realiza un individuo para apropiarse de un concepto matemático y que la teoría APOE llama construcciones mentales.

Por otro lado, según Arnon, Cottil, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros, & Weller, (2014), la teoría APOE puede ser utilizada como una perspectiva estrictamente de desarrollo, Dubinsky señala que puede utilizarse como herramienta evaluativa estrictamente analítica y en esta ocasión se utilizará como una herramienta que permita construir contenido matemático en alumnos de educación secundaria.

Cabe mencionar que la teoría APOE propone un ciclo de investigación, que esta integrado por tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y análisis y verificación de datos (ver diagrama 1):

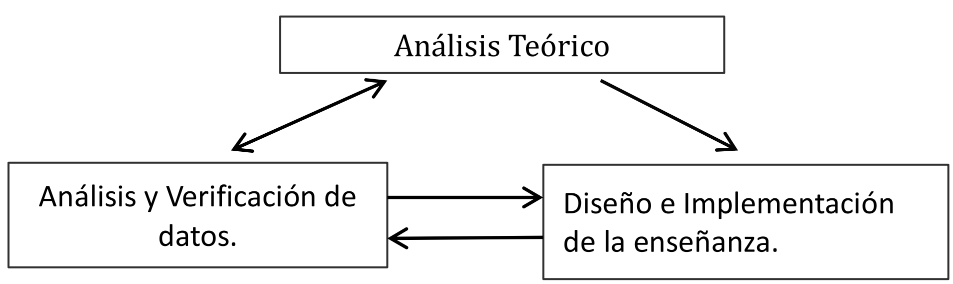


Diagrama 1. Ciclo de Investigación que propone la teoría APOE

A continuación se describirá cada una de las tres componentes.

3.2 Análisis Teórico

El análisis teórico es el primer paso de una investigación que tiene como sustento la teoría APOE, este análisis se realiza con el objetivo de definir y aclarar, que es lo que significa entender un concepto matemático y como se construye su comprensión en el estudiante, todo esto con el propósito de sugerir una epistemología, es decir, presentar las posibles construcciones mentales que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático en particular. Para realizar este análisis el investigador principalmente se basa en su experiencia, ya sea como profesor o aprendiz del concepto matemático.

Como resultado de este análisis se obtiene una descomposición genética del concepto, Arnon et al. (2014).

El análisis teórico conduce a diseñar una estrategia de enseñanza con el propósito de que los estudiantes logren las construcciones mentales que se propusieron en el análisis teórico inicial, con lo anterior se obtiene datos que se analizan bajo la mirada de la misma descomposición genética preliminar. Este proceso es cíclico y se puede repetir una y otra vez (como se muestra en el diagrama 1) , hasta lograr que las construcciones que realizan los alumnos se empaten con las construcciones mentales planteadas.

3.2.1 Descomposición Genética

En una descomposición genética se describen las construcciones y mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico. Esta comienza con una hipótesis realizada por los investigadores, basadas en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento respecto a la teoría de APOE, su conocimiento matemático, investigación previamente publicada sobre el concepto, y el desarrollo histórico del concepto, entre otros, (Arnon et al., 2014).

La descomposición genética puede trazar el camino para la construcción del objeto y pueden existir distintas descomposiciones genéticas para un mismo concepto matemático. Es decir, "pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto" (Trigueros, 2005, p.8)

Además de describir cómo un concepto matemático puede ser construido mentalmente por el estudiante, una descomposición genética también refleja los resultados esperados de los estudiantes, que a su vez nos brindan las diferencias en el desarrollo de las construcciones mentales de cada estudiante (Arnon et al.,2014).

3.2.2 Construcciones mentales

Las construcciones mentales son etapas por las cuales transita un individuo con el objetivo de construir objetos matemáticos, se establecen gracias a mecanismos mentales que las constituyen. Las cuatro etapas fundamentales de la teoría se describen a continuación.

Acción: Una Acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación necesita ser realizada explícitamente y guiada por instrucciones; además, cada paso pide el siguiente, es decir, los pasos de la Acción todavía no se pueden imaginar y no se pueden omitir (Arnon et al.,2014, p. 19).

Es un concepto matemático la acción es la primera construcción que se concibe y es necesaria, para desarrollar otras construcciones.

Proceso: Según Arnon et al., (2014 p. 20), un proceso se da a medida que las acciones se repiten y se reflejan, el individuo pasa de confiar en señales externas para tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por una capacidad de imaginar realizar los pasos sin necesariamente tener que realizar cada uno explícitamente y por ser capaz de saltar pasos, así como invertirlos.

Los procesos se pueden construir utilizando uno de dos mecanismos mentales: interiorización o coordinación.

Objeto: Según Trigueros (2005, p.9) los objetos cognitivos se pueden construir de dos maneras: una es encapsulando un proceso para que el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él. Es decir, cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del concepto. La otra manera de construir un objeto ocurre cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema, de lo que hablaremos más adelante.

Esquema: Un esquema se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Triguero, 2005, p.11).

3.2.3 Mecanismos mentales

Para que el aprendiz transite por cada una de las construcciones mentales antes mencionadas, realiza abstracciones reflexivas las cuales son llamadas mecanismos mentales (interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y generalización). Un mecanismo mental es un medio por el cual puede desarrollarse una construcción mental en el individuo.

A continuación se describen los mecanismos mentales:

Interiorización de una acción: Es el mecanismo mental que da lugar a un proceso después de realizar una reflexión sobre la acción involucrada. Cuando una serie de acciones sobre objetos cognitivos pueden ser realizadas o imaginadas para ser ejecutadas en la mente del estudiante sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos, decimos que la acción se ha interiorizado a un proceso (Dubinsky, 1991, p. 10).

Coordinación: Piaget se refiere a este mecanismo como coordinación general de acciones, la cual se refería a que en la construcción de una nueva acción o de un proceso intervenían dos o más acciones que se relacionan entre sí (Dubinsky, 1991, pág. 10). Es decir, el proceso de coordinación de acciones o de procesos conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más concreto.

Reversión: Cuando un proceso existe interiormente es posible pensar en la reversión, como un medio de construir un nuevo proceso que consiste en revertir el proceso que le dio origen (Dubinsky, 1991, p. 11).

Encapsulación: Se refiere al cambio que hay de una concepción proceso a una concepción objeto. Este objeto puede considerarse como una idea total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Entonces, la encapsulación es el proceso de conversión de un proceso dinámico en un objeto estático (Dubinsky, 1991, p. 10).

Desencapsulación: Es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen (Dubinsky, 1991, p. 11).

A continuación se muestra la relación entre las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático Arnon et al. (2014).

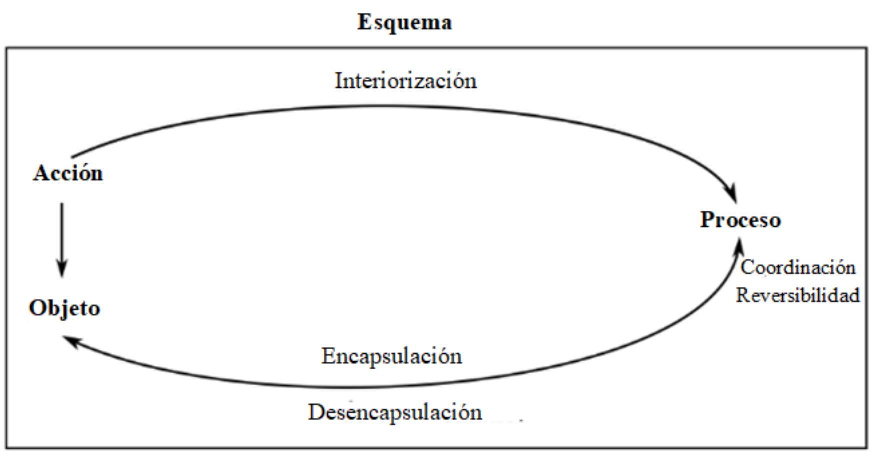


Diagrama 2. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción de un objeto matemático.

La interacción de los elementos del diagrama 2 se puede describir de la siguiente manera:

"Cada una de las construcciones que componen la Teoría APOE se construye a través de un mecanismo: una Acción es interiorizada en un Proceso mental, un Proceso es encapsulado en un objeto cognitivo, un proceso puede ser invertido para construir otro Proceso, dos procesos pueden ser coordinados para formar un nuevo proceso, y un esquema puede ser tematizado en un Objeto cognitivo". (Arnon et al. 2014, p. 26).

3.2.4 Relación de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático en el nivel básico

Según Piaget, se espera que los estudiantes de post-secundaria estén en la etapa de operaciones formales. Esto significa que los objetos sobre los que realizan acciones son abstractos[1] en lugar de concretos[2], a diferencia que en el nivel primaria, que los objetos en los que aplican las acciones son concretos, es decir, pueden ser percibidos por los sentidos, Arnon et al. (2013).

Las diferencias en la Teoría APOE entre un contexto abstracto (educación postsecundaria) y un contexto concreto (educación primaria) se muestran en el diagrama 3.

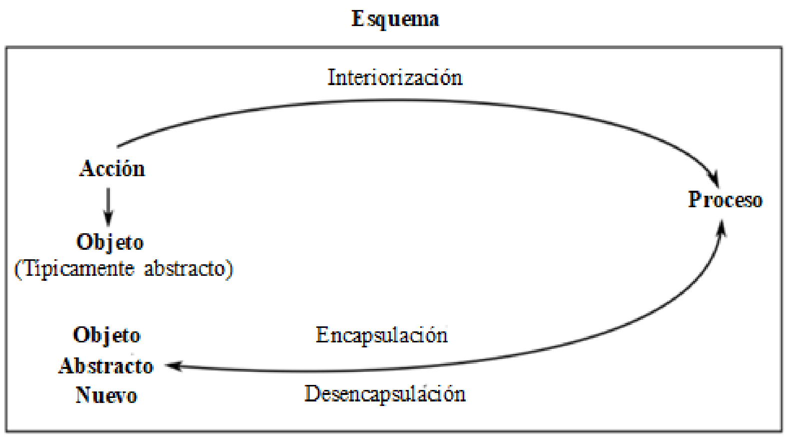


Diagrama 3. Teoría APOE para estudiantes de postsecundaria

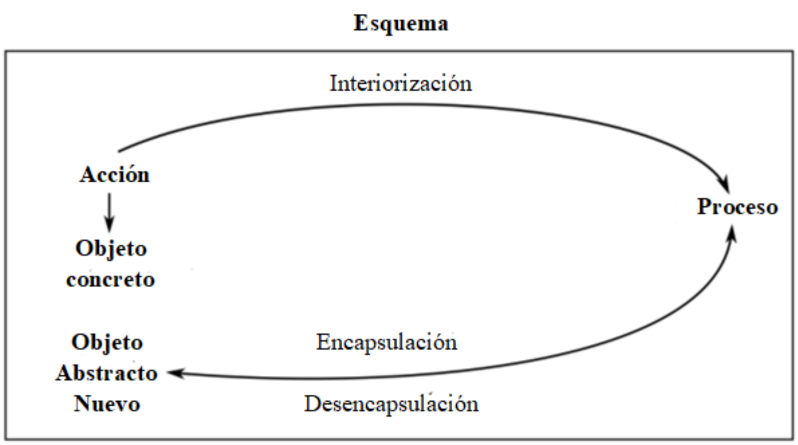


Diagrama 4. Teoría APOE para estudiantes de nivel básico

[1] El término abstracto se refiere al uso de un concepto matemático sin ninguna representación física del mundo (Arnon et al., 2001, p.171, citado en Arnon et al. (2013).

[2] lo concreto significa que una experiencia concreta necesita involucrar los sentidos del alumno, Arnon et al. (2013).

El diagrama 4 es una adaptación del diagrama 3, que se realizó para representar la implementación de la teoría APOE, para estudiantes en etapa de operaciones concretas, se puede observar cómo las Acciones aplicadas a Objetos físicos generan Objetos matemáticos abstractos en la mente de un estudiante de este nivel. En la etapa de las operaciones concretas, los objetos sobre los que actúa el estudiante deben ser concretos. Los Objetos que surgen de la encapsulación de las Acciones interiorizadas son abstractos, al igual que para los estudiantes de nivel postsecundario, Arnon et al. (2013).

En este nivel, la teoría APOE sugiere el uso de material concreto, hasta después que se haya interiorizado la acción.

3.3 Diseño e implementación de la enseñanza

Dentro de la teoría APOE se plantea un ciclo de enseñanza ACE (Actividades en clase, Discusión en clases, Ejercicios extraclase) cuyo objetivo es construir específicamente algunas construcciones mentales en el aprendizaje de un concepto matemático en particular, en nuestra investigación haremos uso de este ciclo para construir el concepto de ecuación cuadrática.

Este ciclo de enseñanza se diseña con base en la DG, el siguiente diagrama 5 muestra la relación que existe entre la DG y el ciclo ACE:

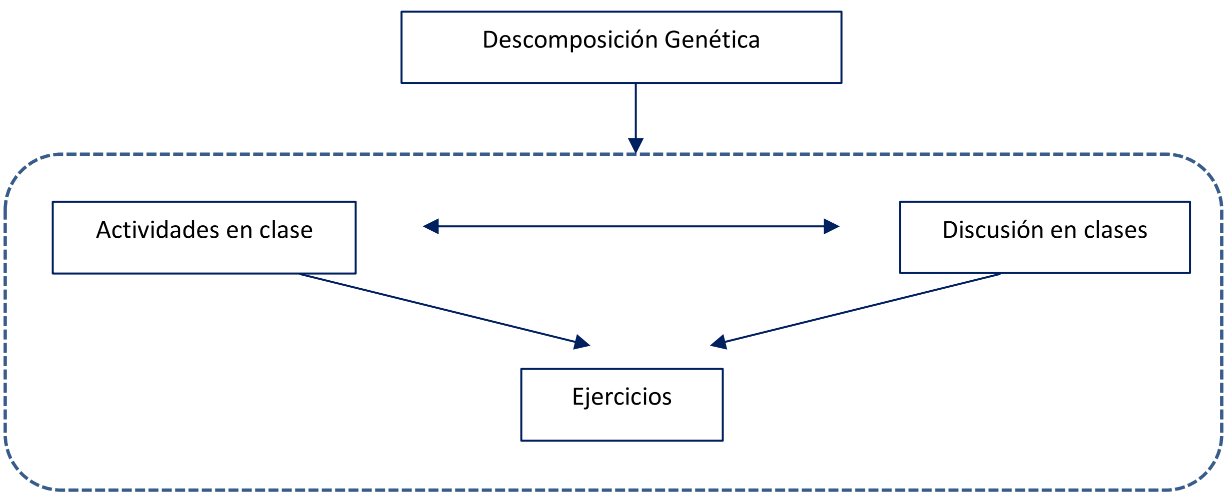


Diagrama 5. Relación entre el ciclo de enseñanza y la descomposición genética (Arnon, et al., 2014, p. 58)

De acuerdo al diagrama 5, se puede observar que la descomposición genética afecta cada uno de los componentes del ciclo de enseñanza (ACE). La flecha bidireccional entre las actividades y la discusión en clase muestra por un lado que las actividasdes promueven la discusión en clases; y por otro lado la discusión en clases provee una oportunidad para que el estudiante reflexione sobre las actividades. Las flechas que van de las actividades y discusión de clases hacia los ejercicios muestran que estos refuerzan el trabajo de las dos componentes antes mencionadas (Arnon et al., 2014, p. 58-59).

El ciclo ACE permite diseñar un ciclo de enseñanza conformado por actividades (A) para realizar en clase y en laboratorio de computación (C), dentro de nuestra investigación utilizaremos material concreto para desarrollar ciertas actividades en lugar de laboratorio de computación, debido a que la teoría se aplica en nivel secundaria y no en superior, y posteriormente de las actividades los estudiantes realizarán ejercicios (E) tradicionales para practicar lo aprendido en la actividad.

Dentro de nuestro ciclo de enseñanza se realizarán discusiones grupales con el propósito de ayudar a los estudiantes a reflexionar y a exponer sus ideas sobre lo realizado en las actividades, además de las dudas que puedan surgir. Dentro de la discusión el profesor guía con preguntas para lograr las construcciones que se pretenden y en un momento determinado formalizar los aspectos importantes del concepto de ecuación cuadrática que se quieren lograr con las actividades.

Se aplicará el diseño de enseñanza en cuatro sesiones de 100 minutos cada una en el grupo antes mencionado.

3.4 Análisis y verificación de datos

El análisis y verificación de datos es la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE. Ésta es importante para la investigación, pues es en ella se valida la DGP, y se intenta responder las siguientes preguntas, a través de la evidencia empírica (Arnon, et al., 2014):

1. ¿los estudiantes describen las construcciones mentales descritas en la DGP?

2. ¿los estudiantes construyeron el concepto matemático en estudio?

Las respuestas para esas preguntas dependen en gran parte del objetivo que se tiene en el trabajo de investigación y de los instrumentos que se utilicen. Por ejemplo, se pueden incluir cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (audio y /o video), exámenes y/o software. Asimismo dentro del diseño metodológico se puede incluir observaciones de clase, análisis de libros de texto y estudios histórico/epistemológico (Arnon et al., 2014).

3.4.1 Cuestionario Diágnostico

Con base en la teoría APOE los cuestionarios son cuidadosamente diseñados para ayudar a evidenciar la presencia de las construcciones mentales descritas en la descomposición genética preliminar y sugerir modificaciones en la descomposición genética cuando éstas no están presentes. También permite a los investigadores centrar su atención en los aspectos de la construcción del conocimiento que están estudiando (Arnon et. al., 2013).

3.4.2 Entrevista

La entrevista, cuyo objetivo principal es determinar si los estudiantes han hecho las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética utilizada en un estudio en particular (Arnon et. al., 2013), en nuestro estudio, en el concepto de ecuación cuadrática.

Considerando que nuestra investigación es de carácter cualitativo y descriptivo las concepciones de los estudiantes son primordiales. En este sentido creemos pertinente y necesario la aplicación de esta técnica de recolección de datos, pues nos brindará información muy puntual y confiable sobre lo que los estudiantes piensan, conocer sus respuestas y la justificación que les dan a las mismas.

3.5 Diseño de la Investigación

En este apartado se describirá el diseño de investigación que se utilizó en este trabajo de investigación.

Utilizamos el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE, sin embargo aplicamos una etapa antes del diseño de DGP (Borja, 2015). A continuación se describen las etapas que se siguieron en este trabajo:

Etapa 1: Trabajo inicial para el diseño y aplicación de un cuestionario diagnóstico como parte de la elaboración de la DGP.

Etapa 2. Diseño de la Descomposición Genética Preliminar (DGP)

Etapa 3. Diseño y aplicación de la enseñanza con base en la DGP

Etapa 4. Análisis y verificación de los datos

En la **etapa 1** se analizaron las investigaciones relacionadas con el tema de estudio, cuyo objetivo fue identificar las dificultades que conmunmente presentan los estudiantes cuando trabajan con el concepto de estudio. Asimismos se realizó un análisis de algunos de los libros de texto que se utilizan en el nivel secundaria, con el objetivo de observar cómo se presenta el concepto de estudio.

Todo ello sirvió para identificar los conocimientos previos que posiblemente requieren los estudiantes. Con base en ello se diseñó un cuestionario diagnóstico que abordaba algunas de las dificultades que con frecuencia se presentaban en las investigaciones relacionadas con el tema. Posterior al diseño, se aplicó el CD a un grupo de estudiantes que cursaban el tercer año de secundaria. Los datos obtenidos de la aplicación nos permitieron realizar la DGP tomando en cuenta los aspectos matemáticos que no fueron favorables en el diagnóstico.

En la **etapa 2** se realizó la DGP del concepto ecuación cuadrática y su solución, que tomo en cuenta los resultados que se obtuvieron del CD y el análisis previo al CD que se realizó. También se tomo una postura matemática en la cual se basa la DGP.

En la **etapa 3**, se realizó el diseño y aplicación del ciclo de enseñanza ACE, y posteriormente se aplicó una entrevista sobre el concepto de estudio. Ésta se describirá con más detalle en el capítulo 5.

En la **etapa 4**, se realizó el análisis y verificación de los datos obtenidos del ciclo de enseñanza ACE y la entrevista realizada.

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

En este capítulo se presenta el análisis de algunos elementos teóricos del concepto de ecuación cuadrática para el diseño de la DGP, primero se describe un análisis de libros de matemáticas de tercer año en el nivel secundaria, posteriormente se exponen las dificultades y errores relacionados con el concepto de ecuación cuadrática y su solución. Con base en los análisis antes descritos, se presenta el diseño de un cuestionario diagnóstico y los resultados de su aplicación que fueron importantes para el diseño de la DGP. Por último se presenta el diseño de la DGP del concepto ecuación cuadrática y su solución.

4.1 Análisis de libros de matemáticas de tercer año de nivel secundaria

Para el diseño de la descomposición genética del concepto de ecuación cuadrática, es importante analizar cómo se presenta el concepto de estudio, en diferentes libros de texto, en específico algunos de los libros de matemáticas de tercer grado de secundaria propuestos por la Secretaría de Educación Pública (SEP), con el propósito de analizar la forma en que trabajan el concepto de ecuación cuadrática, así mismo, la definición que presentan y su relación con otros conceptos matemáticos.

Libro de texto: **Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias (**Bárcenas, Espinosa & Ruiz, 2016).

El tema de ecuaciones cuadráticas se presenta en el primer bloque del libro, y se comienza con ejercicios donde el estudiante debe de encontrar la ecuación que representa el área de diferentes figuras geométricas como: cuadrado, rectángulo y rombo, además deben encontrar sus dimensiones, posteriormente, se les presenta la siguiente información, a manera de cierre de estas actividades:

Una ecuación como $x^2 + 3\text{x} = 130$ *es de segundo grado porque el mayor exponente de la incógnita es dos. Un número que satisface la ecuación es -13, porque*

$$(-13)^2 + 3(-13) = 169 - 39 = 130$$

(Bárcenas et al., 2016, p. 19)

Después se les presenta diferentes problemas de los tres tipos de ecuaciones: completas, incompletas puras e incompletas mixtas (sin mencionar que se trata de este tipo de ecuaciones) para que las resuelvan en equipos, enseguida se les pide a los estudiantes que averigüen en cuál de los problemas planteados, también puede ser una solución el simétrico de la solución que encontraron, con este referente, les presentan la siguiente información:

En una ecuación de segundo grado como $x^2 = 25$, una solución es 5, porque $5^2 = 25$. Sin embargo -5 también es una solución, porque $(-5)^2 = 25$. Esto significa que las ecuaciones de segundo grado pueden tener dos soluciones. En ciertos casos las soluciones son dos números simétricos.

(Bárcenas et al., 2016, p. 20)

Luego se les presenta un problema en lenguaje natural, donde los estudiantes deben de identificar la ecuación que resuelve dicho problema, y una vez encontrada la solución, se les da la siguiente información:

Al igual que sucede con las ecuaciones lineales, una manera de hallar la solución de una ecuación de segundo grado es simplificarla mediante operaciones inversas, hasta que resulte evidente el valor de la incógnita, A este proceso se le llama ***despejar la incógnita****. Por ejemplo:*

$$x^2 + 13 = 49$$

$$x^2 + 13 - 13 = 49 - 13$$

$$x^2 = 36$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

(Bárcenas et al., 2016, p. 22)

Después les proponen una serie de ejercicios de ecuaciones cuadráticas del tipo incompleta puras, para que sean resultas, y por último se les proporciona la siguiente información:

Las ecuaciones de segundo grado de esta lección son de la forma $ax^2 + c = 0$ y, como posiblemente has notado, se pueden resolver con operaciones inversas hasta rescribirlas en la forma $x = \pm\sqrt{-c/a}$.

(Bárcenas et al., 2016, p. 23)

En este bloque los autores presentan un ejemplo y mencionan por qué se trata de una ecuación cuadrática, posteriormente presentan la solución a una ecuación cuadrática incompleta pura, donde el método para solucionarlas es el despeje de la incógnita y mencionando que la ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, un número y su simétrico.

En el segundo bloque, donde se resuelven las ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, empiezan trabajando un problema de áreas indicando un razonamiento para obtener las dimensiones de un rectángulo partiendo del valor de su perímetro, se les presentan a los alumnos una serie de razonamiento, donde el alumno deberá explicar el porqué de este razonamiento, con lo anterior se busca que lleguen a la ecuación cuadrática para encontrar el área del rectángulo, que es el producto de dos factores. Por ejemplo: Un rectángulo tiene un área de 84cm^2 y un perímetro de 38cm. Completa la siguiente tabla en equipo.

Razonamiento	Explica por que
Paso 1. Si el perímetro del rectángulo mide 38cm, entonces el largo más el ancho miden 19cm	
Paso 2. Si el largo más el ancho miden 19cm, esas medidas se pueden representar así: $ancho = x \quad largo = 19 - x$	
Paso 3. Si el ancho mide x y el largo, $19 - x$, el área se puede expresar así: $x(19 - x) = 84$	
Paso 4. Se pueden buscar las medidas buscadas mediante un cálculo simple: si $x = 1$, el área vale $1(18) = 18$; si $x = 2$, el área vale $2(17) = 34$	

Después se les presenta la siguiente información:

Factorizar *significa escribir un número o una expresión algebraica como un producto de dos o más factores. Por ejemplo, en la ecuación* $x^2 + 8x = 105$*, el miembro izquierdo puede factorizarse como* $x(x+8) = 105$*, pues al desarrollar ese producto se obtiene como resultado* $x^2 + 8x$*. La nueva ecuación,* $x(x+8) = 105$*, es equivalente a la primera y, por lo tanto, tiene las mismas soluciones.*

(Bárcenas et al., 2016, p. 79)

Posteriormente continúan con diferentes ejercicios donde deben de practicar la factorización de diferentes ecuaciones cuadráticas completas y encontrar sus soluciones. Luego continúan con una serie de ejercicios donde tienen que llenar una tabla justificando la búsqueda de los números que sumados den el coeficiente del término lineal y multiplicados el término independiente. Para finalizar se les pide que redacten un método para factorizar ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

Después se les presentan tres problemas que se espera que resuelvan con el método de factorización, pero no lo especifican.

Por último, se les presenta un caso donde el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno; $4x^2 - 12x + 9 = 0$ y se les brinda una ecuación equivalente $x^2 - 3x + 9/4 = 0$, y se les pide a los alumnos que reflexionen sobre lo que se hizo para llegar a la última ecuación. Para posteriormente brindarles la siguiente información:

Cuando en una ecuación de segundo grado el coeficiente del termino cuadrático (x^2*) es un numero distinto de 1, es posible dividir todos los términos de la ecuación entre ese* *coeficiente y buscar una factorización para la nueva ecuación (que es equivalente a la original) y, por tanto, tiene las mismas soluciones.*

(Bárcenas et al., 2016, p. 83)

El tercer bloque presenta la forma general de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, pero no se les explica lo que representa *a, b* y *c*, únicamente se les pide que sustituyan en la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, y que realicen las operaciones indicadas, para dar las soluciones a la ecuación. Posteriormente se les presentan tres problemas que implican área y buscar números desconocidos, para resolverlos usando la ecuación cuadrática. Para terminar se les presentan ejercicios de ecuaciones cuadráticas, pero no están representados en la forma general, sino los estudiantes deben de realizar operaciones previas (productos notables, multiplicación de polinomios y reducción de términos semejantes) para llegar a la forma general y darle solución. Cabe mencionar que no presentan de donde se obtiene la fórmula general.

Como podemos observar, estos autores trabajan el concepto de ecuación cuadrática dejando que el alumno explore y luego les presentan maneras de darle solución, presentan el concepto con el nombre de ecuaciones de segundo grado, pero, en ningún momento se les presentan por nombre los tipos de ecuaciones cuadráticas. Además se plantean problemas geométricos y también de encontrar un número desconocido. Referente a la definición del concepto, la encontramos en el glosario, y la definen de la siguiente manera:

Ecuación de segundo grado*: ecuación de una variable en la que el exponente más grande de la variable es 2; por ejemplo,* $3x^2 + 5x = 2x^2 - 8$.

(Bárcenas et al., 2016, p. 252)

Podemos observar que el libro trabaja la ecuación cuadrática con el orden que propone el Plan de Estudio 2011, por otro lado, aunque presentan situaciones donde intervienen obtener áreas a partir del perímetro dado o de relaciones entre los lados de un polígono, consideramos que no se logra por completo la relación entre el área de un polígono y las ecuaciones cuadráticas. Pues no se hace evidente el uso de las ecuaciones cuadráticas para obtener áreas, por otro lado, los ejercicios propuestos sobre encontrar un número que se pensó, tiende a restarle importancia al uso y aplicación de la ecuación cuadrática, pues cuando se pide plantear un problema que satisfaga una ecuación cuadrática dada, los estudiantes se inclinan por el planteamiento de encontrar un número cualquiera, difícilmente plantean situaciones que involucran área. En otro sentido, se hace evidente que al estar introduciendo un concepto nuevo, no se les presenta una definición, únicamente por medio de ejemplos se presenta la ecuación cuadrática, lo cual repercute en la comprensión del concepto de estudio.

Libro de texto: **Matemáticas 3. Secundaria. Savia. (**Balbuena, Block, García, & Mendoza, 2016).

La forma de trabajar este libro es muy parecida al anterior, considerando que es la misma editorial, pero los autores son diferentes. Para iniciar parten de problemas de áreas, en este libro los autores presentan dos formas de llamar al concepto: ecuaciones cuadráticas y ecuaciones de segundo grado.

Comienzan con ejercicios de áreas de rectángulos, donde el alumno tiene que determinar las magnitudes o el área de los rectángulos, en este sentido el libro los lleva a que una forma de trabajar las ecuaciones cuadráticas, es buscando por ensayo y error números que satisfagan la ecuación, después se les presentan una serie de ejercicios que hace evidente que las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, de ahí pasan a resolver problemas para buscar números desconocidos , de tal forma, que la ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + c = 0$, donde se hace evidente que este tipo de ecuaciones tiene como solución un número y su simétrico. Posteriormente se les presenta la siguiente información:

Las ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$,*, se pueden resolver con operaciones inversas, las soluciones son* x_1 *y* x_2*:*

$$x_1 = \sqrt{-c/a} \text{ y } x_2 = -\sqrt{-c/a}$$

(Balbuena et al., 2016, p. 21)

En cuanto al método de factorización se presenta un ejercicio para obtener las dimensiones de un rectángulo, para posteriormente brindar un procedimiento para factorizar, como sigue:

La ecuación $x^2 + 19x + 84 = 0$ *es de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, esta es una ecuación completa de segundo grado, pues tiene un término al cuadrado con coeficiente a,* (ax^2)*; un término lineal con coeficiente b,* (bx)*, y un término independiente* (c)*.*

En el caso de la ecuación $x^2 + 19x + 84 = 0$*; se tiene a =1, b = -19 y c = 84.*

A continuación se muestra una forma de factorizar una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$*.*

Paso 1. *El término independiente se pasa al segundo miembro:* $ax^2 + bx = -c$

Paso 2. *Se factoriza el primer miembro, considerando que x es factor común:* $x\,(ax + b) = -c$

Esta factorización facilita obtener el valor de x por ensayo y error.

(Balbuena et al., 2016, p. 75)

En este sentido, aunque se da un método para factorizar, podemos observar que las soluciones son encontradas por ensayo y error, se les presentan ejercicios donde les piden que factoricen, y por ensayo y error encuentren las soluciones.

Posteriormente se presenta otra técnica de factorización, que consiste en factorizar el término cuadrático y encontrar dos números que sumados y multiplicados por el término común, se obtenga el término lineal, y que esos mismos números al multiplicarlos den el término independiente, cabe mencionar que el coeficiente del término cuadrático es 1, y después se les presentan a los alumnos una serie de ejercicios para aplicar esta técnica de factorización, y que identifiquen los dos números que cumplen con estas característica.

Como tercera técnica de factorización se presenta al igual que el libro Conect@ (Bárcenas, Espinosa & Ruiz, 2016): $4x^2 - 12x + 9 = 0$, y se les presenta la misma información:

Cuando en una ecuación de segundo grado el coeficiente del termino cuadrático (x^2) es un numero distinto de 1, es posible dividir todos los términos de la ecuación entre ese coeficiente y buscar una factorización para la nueva ecuación (que es equivalente a la original) y, por tanto, tiene las mismas soluciones.

(Balbuena et al., 2016, p. 79)

En cuanto a la solución de ecuación cuadrática por medio de la fórmula general, se les presenta la siguiente información:

Con la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *se resuelve cualquier ecuación de segundo grado, solo hay que sustituir los coeficientes a, b y c por los valores que les corresponden y efectuar las operaciones indicadas.*

(Balbuena et al., 2016, p. 112)

Después de esta información se les presenta un problema de área de un rectángulo, cuadrado, círculo, y ejercicios de ecuaciones cuadráticas donde se les pide que utilicen el método que crean conveniente, en estos ejercicios se presentan coeficientes decimales, productos notables, multiplicación de polinomios, que dan como resultado ecuaciones cuadráticas de los tres tipos: completas, incompletas puras e incompletas mixtas.

Podemos verificar que al presentar la fórmula general, no indican de dónde se obtiene, únicamente se la presentan y les dan las indicaciones de sustituir y realizar operaciones para encontrar las soluciones, un tanto tradicional, la forma de introducir la fórmula general.

Por otro lado este libro presenta una sección aprender a aprender, donde detalla las maneras de resolver una ecuación cuadrática:

Es posible resolver una ecuación de varias maneras: por ensayo y error, con operaciones inversas, por factorización o mediante la fórmula general. Por ello conviene analizarla para determinar el procedimiento más conveniente.

(Balbuena et al., 2016, p. 113)

También dentro de la fórmula general, resalta la importancia que tiene el encontrar el valor del discriminante, para determinar las posibles soluciones, respecto a esto, muestran la siguiente información:

La expresión $b^2 - 4ac$*, que aparece dentro del radical en la fórmula general, recibe el nombre de* ***discriminante.*** *Su valor puede ser 0, mayor que 0 o menor que 0.*
Las ecuaciones cuyo discriminantes menor que 0 no tienen solución en el conjunto de los números reales, pero si tienen solución en los números complejos (que se estudian después de educación secundaria).
Los números reales son los enteros positivos, negativos y el cero, los racionales de la forma a/b y los irracionales, como el número π *o* $\sqrt{2}$.

(Balbuena et al., 2016, p. 114)

También presenta, dentro del glosario, *la forma general de la ecuación de segundo grado, que es* $ax^2 + bx + c = 0$. *Si falta el término lineal* (bx) *o el término independiente* (c)*, se trata de una ecuación incompleta.*

(Balbuena et al., 2016, p. 115)

Posteriormente se presentan situaciones para darle solución, y algunos ejercicios donde el alumno debe identificar tanto el primer miembro de la ecuación, como el segundo miembro y presentarlo de la forma general.

La definición de ecuación cuadrática, se presenta en el glosario, y coincide con la de Conect@ **(**Bárcenas, Espinosa & Ruiz, 2016):

Ecuación de segundo grado*: ecuación de una variable en la que el exponente más grande de la variable es 2; por ejemplo,* $3x^2 + 5x = 2x^2 - 8$.

(Balbuena et al., 2016, p. 242)

Además, nos percatamos, que tanto el libro Conect@**(**Bárcenas, Espinosa & Ruiz, 2016) y Savia (Balbuena, Block, García, & Mendoza, 2016) presentan los mismos ejercicios y la información a los alumnos, pero se estudiaron porque el libro Conect@ era el libro de texto del ciclo pasado y Savia es el que se trabaja actualmente en el Instituto donde se realizará nuestra investigación, y podemos percatarnos, que no existe mucha diferencia entre uno y otro.

Al igual que el anterior, se puede observar que no se les presenta a los estudiantes de manera formal una definición de ecuación cuadrática, y proponen pocos ejercicios de obtención de área donde puedan usar el concepto de estudio (que consideramos por ser un concepto nuevo, se puede hacer uso de la génesis del mismo, para introducir el concepto).

Por otro lado, al resolver escasos problemas contextualizados el estudiante pierde interés en aprender algo nuevo, ya que no le encuentran aplicación a lo que estudia en clase, con estas secuencias que se presentan en el libro, consideramos que difícilmente el alumno logre resolver una ecuación cuadrática con el método que se le facilite, pues mucha información se da por vista, y al ser un concepto nuevo para ellos se debe de introducir con la mayor información posible, en donde puedan hacer uso de sus conocimientos previos, para aprender nuevos conceptos y no verlos como conocimientos aislados.

Libro de texto: **Matemáticas 3. (**Trigueros, Lozano, Schulmaister,Sandoval, Jinich & Lascurain, 2014).

En este libro se comienza trabajando con problemas que requieren la traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa, pero en contexto de las ecuaciones cuadráticas, para que el alumno pueda diferenciarlas de las ecuaciones lineales. Con el planteamiento de problemas y la resolución de ecuaciones cuadráticas, se pretende que los alumnos reflexionen, cuando al encontrar las soluciones a una ecuación cuadrática que da como resultado un número y su simétrico, y les permita determinar qué solución es pertinente en el contexto del problema.

Para ello, se les presenta la siguiente información:

Cuando elevamos un número al cuadrado, el resultado siempre es un número positivo, independientemente de su signo. De este modo si tenemos dos números simétricos (7 y -7, por ejemplo), al elevarlos al cuadrado obtenemos el mismo resultado (49). Es por esto que una ***ecuación cuadrática donde la variable está elevada al cuadrado*** *puede tener* ***dos soluciones****, una positiva y una negativa.*

(Trigueros et al., 2014, p. 20)

Con respecto al comentario anterior, realmente una ecuación cuadrática puede tener soluciones positivas y/o negativas, y la definición antes mencionada puede ocasionar que el estudiante crea que siempre las soluciones son una positiva y una negativa, a pesar de que se utiliza “puede tener”.

En seguida se les presentan tres ecuaciones donde identifican si las expresiones son ecuaciones o no, el número de incógnitas y las soluciones que pueden tener, posteriormente se les pide que formulen tres problemas con contexto que involucren las ecuaciones cuadráticas, además que encuentren una estrategia de solución y la comenten, para posteriormente proporcionarles la siguiente información:

Las ecuaciones pueden clasificarse según los exponentes de sus variables, si el mayor exponente al que esta elevada la variable es dos, se trata de una ecuación de ***segundo grado****, a la que también se le llama* ***ecuación cuadrática***. Esta es la manera en que describen la ecuación cuadrática.

A continuación se menciona el número de posibles soluciones que puede tener una ecuación cuadrática de la siguiente manera.

En general las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones distintas, pero en ocasiones, solamente tienen una solución. Por ejemplo, la ecuación $(x - 4)^2 = 0$ tiene como única solución $x = 4$. En estos casos se considera que la ecuación tiene dos soluciones, pero que consiste en el mismo número, se dice que la ecuación tiene multiplicidad 2.

(Trigueros et al., 2014, p. 22)

Posteriormente se les presentan problemas que implican el uso de ecuación cuadrática, para resolverlos.

En cuanto al método de factorización, la intención es que los alumnos planteen situaciones de su vida cotidiana y matemática, haciendo uso de ecuaciones cuadráticas, donde se percatarán que se pueden resolver por diferentes procedimientos, desde los personales hasta los canónicos, como lo es la factorización (Trigueros et al., 2014).

Para el método de factorización, los autores presentan varios ejercicios de ecuaciones cuadráticas, así como problemas contextualizados, donde deben factorizar, posterior a esto, se presenta la información referente a la factorización:

La factorización es una herramienta muy útil en la solución de ecuaciones cuadráticas. Una ***ecuación igualada a cero*** *puede factorizarse para igualar a cero cada factor por separado y encontrar el valor o los valores de la incógnita que satisfagan la ecuación. Es importante recordar que las soluciones a una ecuación no siempre son soluciones al problema que este modela, pues a veces el valor no satisface las condiciones del problema.*

(Trigueros et al., 2014, p. 78)

Como podemos observar, en esta información proporcionada hace hincapié en cómo se puede factorizar, pero también invita a la reflexión para elegir la solución adecuada que satisfaga la ecuación en problemas con contexto, para que lo puedan visualizar. Cabe mencionar que el libro también propone diferentes problemas que pueden ser solucionados sin factorización, en este sentido, el alumno reflejará sus conocimientos para solucionar ecuaciones cuadráticas. Por otro lado, los autores no brindan un procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas.

En cuanto a la fórmula general, primeramente se presenta un problema contextualizado, para posteriormente, presentar el procedimiento para obtener la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, partiendo de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$.

Para justificar la fórmula general, los autores proporcionan lo siguiente:

La fórmula descrita se llama ***fórmula general****. Este nombre se debe a que funciona para cualquier tipo de ecuación cuadrática de la forma:* $ax^2 + bx + c = 0$*, independientemente de que tenga dos soluciones, una solución o ninguna. Tampoco importa si sus coeficientes son negativos o positivos, enteros o fraccionarios, o incluso cero (excepto a). Lo anterior no significa que sea el mejor camino cada vez que necesitemos resolver una ecuación cuadrática.*

(Trigueros et al., 2014, p. 118)

En la fórmula general, el valor que se encuentra dentro de la raíz, que se calcula como $b^2 - 4ac$*, se llama* **discriminante***. El valor del discriminante puede ser un número positivo, un negativo o cero. De dicho valor depende el número de soluciones de la ecuación, que pueden ser dos, una o ninguna.*

(Trigueros et al., 2014, p. 120)

De lo anterior se presentan ejercicios donde el alumno identificará, con base en el discriminante el número de soluciones que tiene una ecuación.

Resulta interesante que estos autores mencionen que la fórmula general no es el único y mejor camino para resolver las ecuaciones cuadráticas, posteriormente hacen una reflexión de que se pueden usar diferentes métodos para solucionar una ecuación cuadrática, y de ellos dependerá de las condiciones de la misma y de nuestra experiencia al trabajar con el concepto.

De lo anterior, podemos observar, que la definición de ecuación cuadrática está dada en términos del exponente, en ninguno de los libros menciona que sea una igualdad. Esto nos da pauta para considerarlo en nuestro estudio, además, los libros antes mencionados, presentan semejanzas en la introducción del concepto de ecuación cuadrática.

Podemos detectar que presentan una gran variedad de problemas contextualizados, donde el alumno puede conocer diferentes usos de la ecuación cuadrática, y obteniendo las soluciones a la ecuación, determinará qué raíz o solución es la ideal para responder las situaciones propuestas. Es importante brindarles a los estudiantes diversas formas de representación y uso de una ecuación cuadrática, para que encuentren la relación con la vida cotidiana y sirva como estímulo para su aprendizaje.

Al finalizar el análisis de los libros de texto, decidimos usar la definición de Fernández (2002), pues aunque es un libro para nivel medio superior y superior, consideramos que la definición está completa y es un concepto que seguirán trabajando en estos niveles, pues las definiciones que presentan en los libros de texto de nivel secundaria se quedan ambigüas para el estudiante, pues únicamente la ecuación cuadrática la definen en términos del exponente más grande de la variable.

A continuación presentamos la definición que usaremos en nuestra investigación:

Una ecuación cuadrática es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b *y* $c \in R$ *y* $a \neq 0$

Esta ecuación también se conoce como ecuación de segundo grado y tiene como máximo, dos soluciones o raíces que deben satisfacer la ecuación.

Formas incompletas. Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ *se hace c = 0, entonces queda* $ax^2 + bx = 0$*; la solución de esta ecuación incompleta garantiza que una de las raíces es cero ya que el lado o miembro izquierdo de la ecuación se puede factorizar como* $x(ax + b) = 0$*, que equivale a las dos siguientes ecuaciones lineales:* $x = 0$ *y* $ax + b = 0$ *cuyas soluciones son* $x = 0$ *y* $x = -\frac{b}{a}$

Si en cambio se hace $b = 0$ *en la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$*, entonces se tiene la forma incompleta* $ax^2 + c = 0$*. La solución de esta ecuación arroja como resultado dos raíces que son iguales en términos de valor absoluto.*

Ahora, si $b = c = 0$*, entonces* $ax^2 = 0$*; es una ecuación cuadrática incompleta cuyas dos soluciones son iguales a cero.*

(Fernández, 2002)

4.2 Dificultades y errores relacionados con el concepto de ecuación cuadrática

Para diseñar el cuestionario diagnóstico previo al diseño de la descomposición genética preliminar tomamos en consideración los antecedentes revisados, donde se detectaron los errores y dificultades en los que incurren los estudiantes al trabajar el concepto de ecuación cuadrática.

Yahya y Shahrill (2015) describe que los errores que cometen los estudiantes, están relacionados con la aplicación de los métodos de solución, por ejemplo:

Con respecto al método de factorización:

- Errores al factorizar la expresión cuadrática. Muchos de los estudiantes no podían relacionar la factorización con la ley distributiva[3].
- Errores en la multiplicación de factores, esto sugiere que los estudiantes tienen dificultad con la tabla de multiplicación.
- Errores con la adición de enteros negativos.
- Errores en la comprensión de la solución al utilizar el método de factorización.

Con respecto al método de fórmula general:

- Errores en la sustitución de enteros negativos.
- Errores al sustituir la fórmula general, porque la memorizan y no la comprenden, es decir, no conocen el origen de la fórmula, por lo tanto, no identifican los coeficientes *a*, *b* y *c* para su sustitución.

Por otra parte, Vaiyavutjamai y colaboradores (2005), reportaron que una de las dificultades que surge al aprender ecuación cuadrática es que:

- Los estudiantes se confunden con el concepto de variable, pues no identifican en la ecuación $(x - a)(x - b) = 0$ que la "*x*" representaba el mismo valor.

En este sentido Bastidas (2010), en su estudio también hace evidente que:

- Los estudiantes presentan dificultades al identificar la incógnita en las ecuaciones de primer grado, y en nuestra experiencia podemos detectar que esta dificultad la arrastran hasta las ecuaciones cuadráticas.

Didiş et al. (2011) menciona que los estudiantes tienen dificultades con el método de factorización porque:

- Llegan a la solución de las ecuaciones cuadrática, pero no pueden identificarla y justificarlas, es decir, sólo mecanizan sin comprender lo que matemáticamente están realizando.

Pulido et al. (2012) detectó que al trabajar con ecuaciones algebraicas:

- Algunos estudiantes confunden el área con el perímetro. En este sentido, para nuestro estudio consideramos importante que los estudiantes conozcan todo lo que implica el área.

---

[3] La Ley distributiva es una propiedad del producto respecto a la suma, que expresa que se obtiene el mismo resultado cuando se multiplica un número por la suma de un conjunto de números, que cuando se hace la suma de cada multiplicación por separado, por ejemplo: A * (B + C) = A * B + A * C.

4.3 Diseño del Cuestionario Diagnóstico previo a la DGP

En este apartado se describen los 9 ejercicios del cuestionario diagnóstico, la primera parte constó de 4 ejercicios cuyo objetivo era conocer cuáles eras los conceptos matemáticos asociados al concepto ecuación cuadrática y su solución, asimismo verificar si las dificultades reportadas se presentaban en los estudiantes que participarían en la aplicación. La segunda parte del cuestionario constó de 5 ejercicios cuyo objetivo era averiguar si los estudiantes después de haber llevado una clase tradicional sobre el concepto de estudio, habían construido el concepto.

4.3.1 Primera parte del cuestionario diagnóstico

I. Resuelve las siguientes operaciones.

1. $(-8) + 8 =$
2. $\frac{2}{7} \div (-\frac{6}{8}) =$
3. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$
4. $4(-2)(0) + 7.5 - 10.5 =$
5. $\frac{3}{4} * (-7) =$
6. $(-4)^2 =$
7. $\sqrt{175} =$

Con este ejercicio se pretende observar si los estudiantes presentan algun tipo de dificultad cuando realizan operaciones con los números reales y con la igualdad. En los ejercicios (1) al (7) el estudiante debe aplicar las operaciones con los números reales, propiedades de los números reales y de la igualdad.

II. Identifica cuál(es) son ecuaciones y justifica tu respuesta

		¿Es ecuación?	¿Por qué?
i.	$4x + 5$		
ii.	$5m + 3 = 38$		
iii.	$\frac{y}{7} = 8$		
iv.	$9b$		
v.	$x^2 - 3 = 0$		

Con este ejercicio se pretende que el estudiante identifique y justifique su respuesta de por qué consideran que son ecuaciones. Por otro lado, también nos percataremos si el estudiante puede identificar la igualdad entre dos miembros, además que puede estar formada por una expresión algebraica y/o numérica, sólo en caso que el estudiante conteste los incisos ii, iii y v si son ecuaciones.

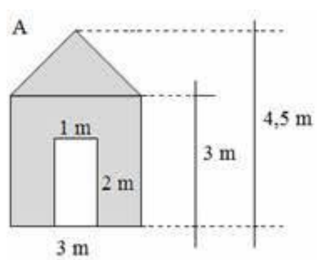
III. Resuelve las siguientes ecuaciones

1. $4x - 8 = 0$
2. $7(y + 9) = 119$

Con este ejercicio se pretende que el estudiante encuentre el valor de la incógnita que satisfaga cada ecuación. Asimismo tiene que aplicar las propiedades de la igualdad y operaciones inversas de las operaciones básicas con números reales, al igual que la propiedad distributiva.

IV. Resuelve los siguientes problemas

1. ¿Cuánto mide el perímetro del terreno cuadrangular, cuyo lado mide 12m de longitud? Si se quiere poner piso a este terreno ¿cuántos metros cuadrados de piso tendrán que comprar?
2. Calcula el área del frente de la casa, sin incluir la puerta:



3. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado de $121cm^2$ de área?

Con estos ejercicios se pretende identificar si los estudiantes presentan dificultades con respecto al área y perímetro de figuras planas. Si el estudiante resuelve los tres ejercicios, consideramos que puede operar con las fórmulas de área y perímetro de cuadrado, rectángulo y triángulo, además opera con áreas de figuras compuestas. Asimismo, si contesta correctamente el inciso (3) también identificaremos el uso de las propiedades de los números reales, específicamente la propiedad de radicación.

4.3.2 Segunda parte del cuestionario diagnóstico

I. Menciona si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y en cada caso justifica tu respuesta.

a) $(x+3)(x-4)=x^2+x-12$

____

b) $(a+b)^2=a^2+b^2$

____

c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$

____

Con este ejercicio, se pretende si los estudiantes identifican que los incisos propuestos son falsos, pues no mantienen la misma igualdad. Por otra parte, también nos interesa analizar cómo desarrollan los productos que se les proponen, lo cual nos dará información sobre que dificultades presentan con respecto a los productos notables.

II. Encuentra el valor de x, en caso de no encontrarlo di por qué.

a) $x+2=9$
b) $x^2-36=0$
c) $2x^2+32=0$
d) $3(x-2)=9$
e) $3(x-2)^2=9$

En estos ejercicios se proponen ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas incompletas, por tanto queremos observar si el estudiante puede resolver las ecuaciones y además identifica que el inciso (a) y (d) son ecuaciones lineales, y los otros incisos son ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, también se pretende observar el uso de las propiedades distributivas en los incisos (d) y (e).

*III. El producto del siguiente polinomio $4x^2(3x+2)$ es:*______________________

*IV. El producto del siguiente polinomio $(2x+3)(2x-3)$ es:*____________________

*V. La factorización del siguiente polinomio $x^2+3x-10$ es:*____________________

Con los incisos III-V se pretende observar si los estudiantes han construido los conceptos de productos notables y factorización después de haber llevado el tema de manera tradicional. En el inciso III y IV se pretende observar si el estudiante ha construido el concepto de productos notables. Por otra parte con respecto al inciso V, queremos observar si el estudiante puede factorizar el polinomio dado.

La intención de aplicar un cuestionario tiene como objetivo, por un lado, obtener información sobre los conceptos previos que consideramos que debe poseer el alumno, en nuestra descomposición genética, para iniciar la construcción de la ecuación cuadrática. Por otro lado, indagar cómo los estudiantes trabajan la ecuación cuadrática, con el propósito de conocer elementos importantes que puedan ser considerados en el diseño de la DGP.

4.4 Aplicación y resultado de los datos del cuestionario diagnóstico

En este apartado se presentará el resultado de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario diagnóstico, a continuación se presenta el contexto en el que se aplicó el cuestionario diagnóstico y posteriormente se presenta cada uno de los ítems del cuestionario diagnóstico con su respectivo análisis.

4.4.1 Contexto de la aplicación del cuestionario diagnóstico

El cuestionario diágnostico (CD) se aplicó al grupo de tercero de secundaria del Instituto de Educación Monreal Sandoval, ubicado en Fresnillo, Zacatecas. El grupo está conformado por 26 estudiantes, 16 niñas y 10 niños, entre los 14 y 15 años de edad.

Cabe mencionar que el grupo al que se le aplicó el CD, no era con el cual pretendíamos aplicar el ciclo de enseñanza, pues se encontraban concluyendo la clase del tema de estudio, cuando se les aplicó el CD. Sin embargo, los resultados que se obtuvieron del diágnostico, evidencian que los estudiantes no tenían construído el concepto de ecuación cuadrática, a pesar de haber terminado una clase sobre el tema de estudio. Por tal motivo, se tomo la descisión de aplicar el ciclo de enseñanza con ese grupo.

La aplicación del cuestionario diagnóstico se llevó a cabo en una sesión de 50 minutos, respecto a la implementación de la enseñanza se aplicó en 8 sesiones de 50 minutos cada una, en la entrevista el tiempo de aplicación fue variable, osciló entre los 49 minutos y 1hr. con 30 minutos, pues se les dio el tiempo que requirió cada alumno.

4.4.2 Análisis de la primera parte del cuestionario diagnóstico

I. Resuelve las siguientes operaciones.

Ejercicio	**Respuestas Correctas**	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
1. $(-8)+8=$	17	9	65	35
2. $\frac{2}{7}\div(-\frac{6}{8})=$	12	14	46	54
3. $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$	11	15	42	58
4. $4(-2)(0)+7.5-10.5=$	14	12	46	54
5. $\frac{3}{4}*(-7)=$	11	15	42	58
6. $(-4)^2=$	23	3	88	12
7. $\sqrt{175}=$	10	16	38	62

Tabla 1. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección I (primera parte)

En la tabla 1, podemos observar que con respecto a los ítems del ejercicio 1, en el ítem (1) 17 alumnos respondieron correctamente, sin embargo 9 alumnos contestaron incorrectamente. De las respuestas incorrectas 8 respondieron que el resultado era -16 lo cual muestra que utilizaron la suma de números con el mismo signo, y un estudiante respondió -64 lo cual es el resultado de un producto.

En el ítem (2), únicamente dos alumnos de los que contestaron correctamente simplificó la fracción a su mínima expresión, y uno de los errores más común en este ejercicio fue la falta de signo.

Para el ítem (3), cuatro alumnos simplificaron el resultado y la mayoría de los que contestaron incorrectamente, incurrieron en el error de sumar numerador más numerador y denominador más denominador.

En el ítem (4), tres alumnos de los que contestaron incorrectamente dieron como resultado 3 positivo, y dos más respondieron que era menos once, pues principalmente multiplicaron $4(-2)(0) = -8$ (que es incorrecto) y posteriormente realizaron $7.5 - 10.5 = -3$, por último sumaron $-8 + (-3)$ obteniendo como resultado -11.

En el ítem (5) solo un estudiante que contestó correctamente simplificó el resultado, cinco estudiantes manifestaron no recordar y la dejaron en blanco, un estudiante multiplicó por siete tanto el numerador como el denominador.

Por otro lado en el ítem (6), los errores más recurrentes es que multiplicaron la base por el exponente y daban como resultado menos ocho, también ignoraban el signo de la base y presentaban el resultado como menos dieciséis.

Por último en el ítem (7) los que contestaron correctamente obtuvieron el resultado a prueba y error, excepto una alumna, y los que están incorrectos omitieron una respuesta.

II. Identifica cuál(es) son ecuaciones y justifica tu respuesta.

Ejercicio	**Respuestas Correctas**	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
i. $4x + 5$	11	15	42	58
ii. $5m + 3 = 38$	25	1	96	4
iii. $\frac{y}{7} = 8$	14	12	54	46
iv. $9b$	22	4	85	15
v. $x^2 - 3 = 0$	25	1	96	4

Tabla 2. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección II (primera parte)

En la tabla 2, podemos visualizar que el 96% identifica los incisos (ii) y (v) como ecuación y argumentan que tiene todos los elementos para serlo, la mayoría no menciona cuáles, excepto dos estudiantes que mencionan que tiene incógnita y resultado. En el inciso (iv) el 85% identificó que no es ecuación y explican que le falta el resultado. Cabe mencionar que una estudiante contestó todos los incisos correctamente y justificaba claramente su respuesta, pues argumentaba, que las ecuaciones llegan a un resultado y las otras son expresiones, además identificó los incisos (ii) y (iii) como ecuaciones de primer grado.

III. Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ejercicio	**Respuestas Correctas**	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
1. $4x - 8 = 0$	18	8	69	31
2. $7(y + 9) = 119$	11	15	42	58

Tabla 3. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección III (primera parte)

En la tabla 3, podemos observar que el 69% de los alumnos contestaron correctamente el ítem (1), en esta ecuación llama mucho la atención que una estudiante intentó aplicar la fórmula general para darle solución. Por otro lado, en el inciso (2) los errores más comunes fueron al aplicar la ley distributiva con respecto a la suma, y cinco estudiantes obtuvieron el resultado a prueba y error.

IV. Resuelve los siguientes problemas.

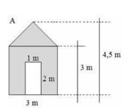
Ejercicio	**Respuestas Correctas**	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
1. ¿Cuánto mide el perímetro del terreno cuadrangular, cuyo lado mide 12m de longitud? Si se quiere poner piso a este terreno ¿cuántos metros cuadrados de piso tendrán que comprar?	15	11	58	42
2. Calcula el área del frente de la casa, sin incluir la puerta: 	5	21	19	81
3. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado de 121cm^2 de área?	14	12	54	46

Tabla 4. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección IV (primera parte)

En la tabla 4, se observa que en el ítem (1), diez estudiantes únicamente contestaron una de las dos preguntas. Sólo cinco alumnos en el ítem (2) contestaron correctamente, y el resto dejó en blanco el ejercicio. Para el ítem (3) el 54% de los alumnos contestó correctamente, pero cabe mencionar, que no escribieron procedimiento, solo la respuesta.

4.4.3 Análisis de la segunda parte del cuestionario diagnóstico

I. Menciona si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y en cada caso justifica tu respuesta.

Ejercicio	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas	% respuestas correctas	% respuestas incorrectas
a) $(x+3)(x+4)=x^2+x-12$	17	9	65	35
b) $(a+b)^2=a^2+b^2$	11	15	42	58
c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$	22	4	85	15

Tabla 5. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección I (segunda parte)

En la tabla 5 observamos que en el inciso (a) el 65% contestó correctamente, la mayoría argumentó que el signo estaba incorrecto, “que el más era menos”. En el inciso (b) de los once que contestaron correctamente, tres estudiantes trataron de desarrollar el binomio al cuadrado, sólo una estudiante lo logró, el restó únicamente comentó que era falsa, pero no justificaron. En el inciso (3) el 85% contestó correctamente que es falso y su justificación es que el signo de a^2+b^2 está incorrecto.

II. Encuentra el valor de x, en caso de no encontrarlo argumenta por qué.

Ejercicio	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas	% respuestas correctas	% respuestas incorrectas
a) $x+2=9$	19	7	73	27
b) $x^2-36=0$	18	8	69	31
c) $2x^2+32=0$	2	24	8	92
d) $3(x-2)=9$	11	15	42	58
e) $3(x-2)^2=9$	0	26	0	100

Tabla 6. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección II (segunda parte)

En este ejercicio, el 73% de los estudiantes contesto correctamente el inciso (a). En el inciso (b) los 18 alumnos que contestaron correcto, únicamente dan la solución positiva. En el inciso (c) de los dos que contestaron correctamente, sólo un estudiante justificó: “porque es raíz negativa”, y el otro estudiante escribió: ¨por el signo”, pero no explicaban cual. El inciso (e), el 100% de los estudiantes respondió incorrectamente, ningún estudiante trato de desarrollar el binomio al cuadrado y posteriormente aplicar la ley distributiva. Podemos observar que se les facilita resolver ecuaciones, ya sean lineales o cuadráticas por transposición de términos.

III. El producto del siguiente polinomio $4x^2(3x+2)$ es:

Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
7	19	27	73

Tabla 7. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección III (segunda parte)

En la tabla 7, observamos que el 73% contestó incorrectamente, entre los errores más comunes resalta que al multiplicar $4x^2(3x)$, multiplican el coeficiente, pero no suman los exponentes y obtienen de resultado $12x^2$, cuando el resultado es $12x^3$. Una estudiante obtiene la respuesta correcta $12x^3 + 8x^2$, pero después suma y obtiene como resultado $12x^3 + 8x^2$=20x^5, es decir, suma coeficientes y exponentes. Podemos detectar que la ley distributiva respecto a la suma y las leyes de los exponentes no las dominan del todo.

IV. El producto del siguiente polinomio $(2x+3)(2x-3)$ es:

Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
9	17	35	65

Tabla 8. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección IV (segunda parte)

Observamos en la tabla 8, que de los nueve alumnos que contestaron correctamente, uno realizó el producto utilizando la ley distributiva respecto a la suma, no identificó el producto notable, es decir, se trataba de binomios conjugados y da como resultado una diferencia de cuadrados, tres estudiantes que contestaron incorrectamente omitieron el exponente, es decir, contestaron $4x - 9$, y dos estudiantes que contestaron correctamente igualaron a cero.

V. La factorización del siguiente polinomio $x^2 + 3x - 10$ es:

Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**	**% respuestas correctas**	**% respuestas incorrectas**
6	20	23	77

Tabla 9. Resultados del cuestionario diagnóstico, sección V (segunda parte)

En este punto, observamos en la tabla 9, que sólo seis estudiantes contestaron correctamente, el error más recurrente en las respuestas incorrectas fue el signo de los factores, y cinco estudiantes no contestaron nada, argumentaron que no recordaban. En este inciso podemos detectar que la mayoría de los alumnos no factorizó correctamente el trinomio cuadrado.

4.5 Descomposición Genética Preliminar del concepto de Ecuación Cuadrática y su solución en el Nivel Secundaria

En este apartado, se describirá el modelo cognitivo preliminar para la construcción del concepto ecuación cuadrática en el nivel secundaria. Primero se describirán los conocimientos previos que se requieren para la construcción del concepto, y posteriormente el modelo cognitivo del concepto de estudio.

4.5.1 Construcciones previas necesarias para la construcción del concepto de ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria

Para poder construir el concepto de ecuación cuadrática consideramos que los estudiantes deben de tener algunos conocimientos previos que se requieren para el aprendizaje del concepto de estudio, ya que sin ellos, consideramos que no se podrá construir el concepto de estudio.

Para empezar, los estudiantes deben manejar los números reales en una concepción proceso, lo que implica que el estudiante identifique y opere con los números enteros, racionales y el cero. Y por otra parte deberá tener una concepción proceso de las propiedades de las operaciones con números reales, así como un proceso de las propiedades de la potenciación y radicación de los números reales.

Por ejemplo, las propiedades de las operaciones que con frecuencia son utilizadas al abordar una ecuación cuadrática son:

- Distributiva del producto con respecto a la suma $a\,(b + c) = a * b + b * c$
- Conmutatividad del producto $a * b = b * a$
- Asociatividad del producto $(a * b) * c = a\,(b * c)$

Con respecto a las propiedades de la potenciación y radicación de los números reales que con frecuencia se utilizan para abordar este concepto son:

- Producto de potencia de igual base $a^n * a^m = a^{n+m}$
- Raíz n-ésima de un número $b^n = a \longrightarrow \sqrt[n]{a}$

Por otra parte es importante que los estudiantes tengan una concepción proceso de operaciones inversas de las operaciones básicas con números reales, lo cual se coordinará en su momento con el proceso de las propiedades de la igualdad.

Por lo tanto, consideramos que el estudiante tiene que tener una concepción proceso de igualdad, lo cual implica darle solución a una operación aritmética o una ecuación lineal de una o dos variables, es decir, interpretar que el signo igual (=) indica el resultado de la operación que se encuentra en alguno de los miembros de la igualdad, y que ambas expresiones numéricas o algebraicas representan los mismo. Además debe tener una concepción objeto de las propiedades de la igualdad, lo cual implica que pueda identificar y operar con ellas, a continuación se describe las propiedades de la igualdad que se requieren:

- Propiedad para la suma, la cual se refiere que al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtendremos una nueva igualdad. Por ejemplo: $a = b\ entonces\ a + 2 = b + 2$

- Propiedad para la sustracción, la cual se refiere que al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtendremos una nueva igualdad. Por ejemplo: $a = b\ entonces\ a - 5 = b - 5$
- Propiedad para la multiplicación. Se refiere a que si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por un número real, entonces se obtendrá una nueva igualdad. Por ejemplo: $x = 4\ entonces\ x * 2 = 4 * 2$
- Propiedad para la división, se refiere a que si dividimos ambos miembros de la igualdad por un número real (distinto de cero), entonces se obtendrá una nueva igualdad. Por ejemplo: $6x = y\ entonces\ \frac{6x}{2} = \frac{y}{2}$

Por otra parte consideramos que es necesario que el estudiante, tenga una concepción proceso del concepto ecuación, lo cual implica que el estudiante identifica que una ecuación es una igualdad entre dos miembros, y que puede estar compuesta por una expresión algebraica y/o numérica, además identifica cuando se trata de una ecuación lineal de una o dos variables. Asimismo consideramos que el estudiante requiere de una concepción proceso de ecuaciones equivalentes, lo cual implica que el estudiante identifique que dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución, por ejemplo: si se multiplican o dividen las dos expresiones por una misma constante diferente de cero, se obtiene dos expresiones nuevas que son iguales para el mismo valor de la incógnita.

Otros aspectos que consideramos, son el objeto de área y perímetro de figuras planas, esto implica que el estudiante opere con las fórmulas que implican el área y perímetro de un cuadrado o un rectángulo. Además de que pueda identificar y operar las áreas de figuras compuestas. Por lo cual requiere también del proceso de composición y descomposición de figuras geométricas, que implica que el estudiantes pueda percibir que una figura geométrica puede estar compuesta por dos o más figuras.

4.5.2 Descomposición Genética Preliminar de la ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria.

Para iniciar con la construcción del concepto ecuación cuadrática, el estudiante debe tener los conocimientos previos, mencionados anteriormente.

Para construir el concepto ecuación cuadrática, el estudiante realizará acciones sobre el objeto área de una figura geométrica (cuadrado y rectángulo). Estas acciones consisten en multiplicar los lados de las figuras geométricas cuadrado y rectángulo, para encontrar el área de la figura dada (numéricamente y algebraicamente).

Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite concebir al área como un producto, asimismo al resultado del producto como la medida del área de una figura geométrica, en específico las figuras geométricas cuadrado o rectángulo. Si el proceso ha sido interiorizado, el estudiante podría ser capaz de revertirlo para resolver actividades en donde se dé la medida del área de una figura geométrica, y se desee encontrar las medidas de los lados de dicha figura.

Posteriormente, dicho proceso se coordinará con el proceso de descomposición de figuras geométricas. Esta coordinación genera el proceso expresión algebraica de segundo grado como una expresión que se genera de la composición de figuras geométricas que forman una nueva figura geométrica, y que su área representa una expresión cuadrática, a este proceso lo llamaremos área como expresión algebraica cuadrática. Ese proceso se coordina con el proceso de igualdad para formar el proceso de factorización, que consiste en verificar que el producto del área es igual a la expresión algebraica de segundo grado obtenida de la composición de figuras geométricas. Este proceso se encapsula en un objeto donde una expresión algebraica de segundo grado se escribe como un producto, a lo cual se le llama factorización de un trinomio cuadrado; lo cual permite que el estudiante pueda aplicar acciones sobre el objeto factorización como, por ejemplo: para resolver una ecuación cuadrática el estudiante tendrá que aplicar acciones al objeto factorización que consiste en identificar cada factor de la expresión cuadrática factorizada para encontrar la solución de una ecuación.

Por otra parte, el proceso de área como producto de una figura geométrica, el proceso de área como expresión algebraica cuadrática y el proceso de ecuación se coordinan en el proceso de ecuación cuadrática. Lo cual implica que el estudiante identifique que en la ecuación que surge de la coordinación de los procesos anteriores, el exponente más grande de la variable es 2, es decir, este proceso involucra que el estudiante identifique ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$. Dicho proceso se encapsula en el objeto ecuación cuadrática, cuando pueden operar con y sobre la ecuación cuadrática en la medida que lo necesiten, por ejemplo, para encontrar la solución de la ecuación.

Posteriormente, el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y factorización se coordinan para generar el proceso de solución de una ecuación cuadrática. Lo cual implica que el estudiante identifique que la ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, dos soluciones iguales que tienen el mismo valor absoluto o ninguna solución que satisfacen la ecuación. Este proceso se encapsula en el objeto solución de una ecuación cuadrática, cuando el estudiante puede operar con y sobre la solución de la ecuación cuadrática, por ejemplo, pueden ejercer acciones sobre la solución de la ecuación cuadrática para determinar sus propiedades, por ejemplo: proponer una ecuación cuadrática a través de sus soluciones.

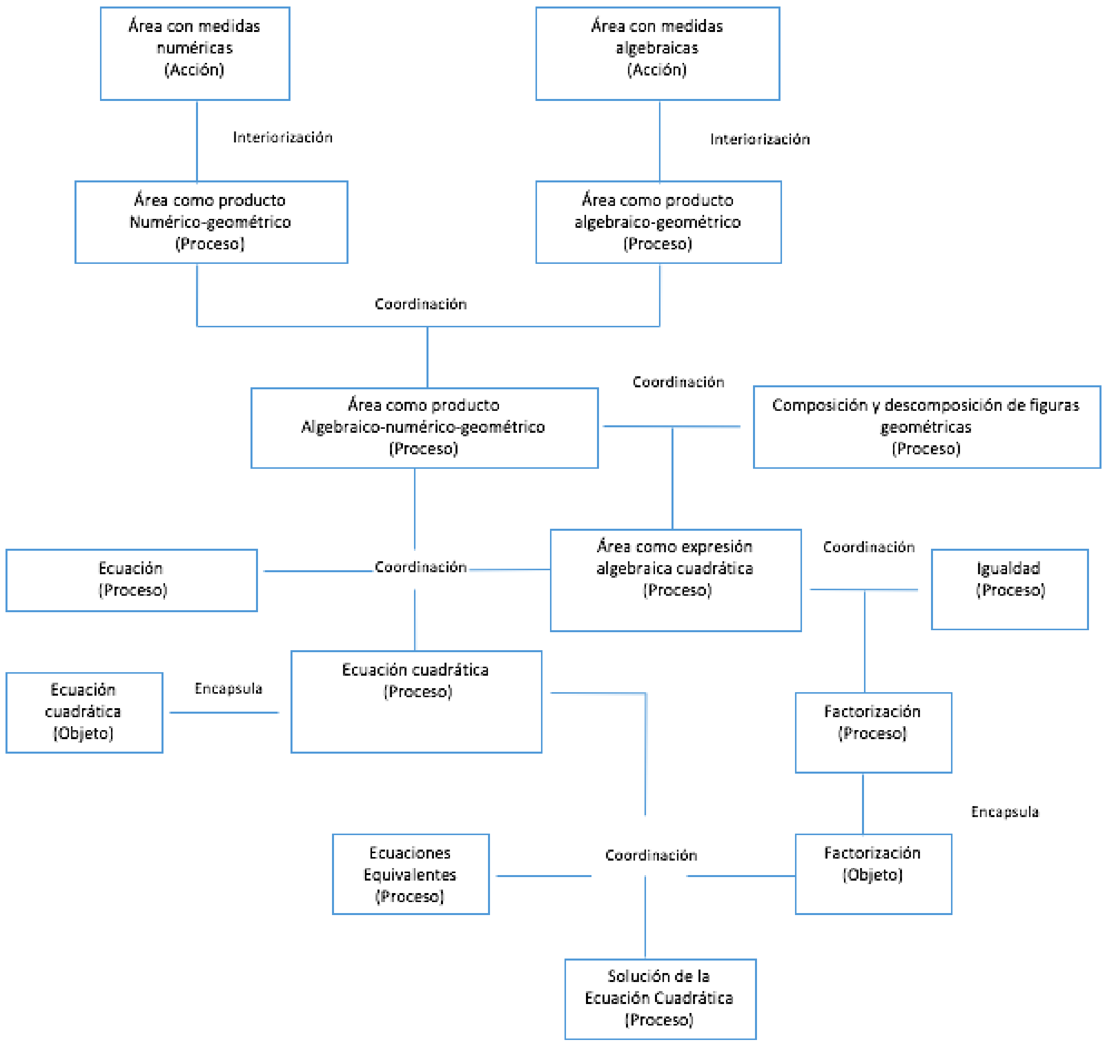


Diagrama 5. Descomposición Genética hipotética de la ecuación cuadrática en el nivel secundaria.

CAPITULO 5

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA ENSEÑANZA

En este capítulo se presenta el diseño de los instrumentos que se implementaron para construir el concepto de ecuación cuadrática. Primero se describe el diseño del ciclo de enseñanza, considerando la descomposición genética y los conocimientos previos que tenían los estudiantes. Posteriormente se describe la entrevista aplicada, que tiene como objetivo contrastar si la DG logró la construcción del concepto en el ciclo de enseñanza y poder determinar en qué construcción se encuentran los estudiantes entrevistados.

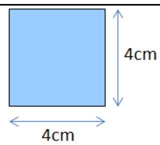
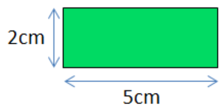
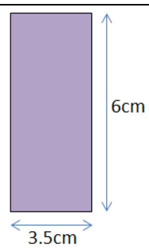
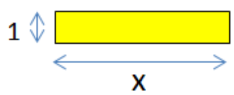
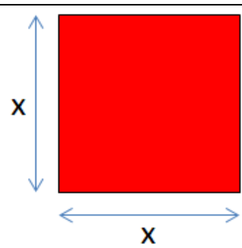
5.1 Ciclo de Enseñanza del Concepto Ecuación Cuadrática en el nivel secundaria

En esta sección se describirá el diseño del ciclo de enseñanza del concepto de ecuación cuadrática en el nivel secundaria.

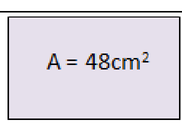
5.1.1 Diseño y Análisis a priori del Ciclo de Enseñanza

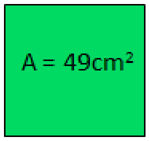
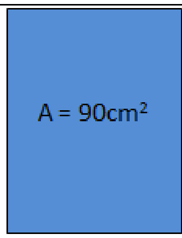
ACTIVIDAD 1

I. Completa la siguiente tabla, anotando de qué figura se trata y calcula su área.

Figura	Nombre de la figura	Área
a) 		
b) 		
c) 		
d) 		
e) 		
f) 		

II. Completa la siguiente tabla, anotando de que figura se trata y a partir de su encuentra las dimensiones de la figura.

Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
		

Con el ejercicio I, se quiere construir la concepción proceso del área como producto numérico y algebraico, para ello el estudiante realizará acciones sobre el objeto área de una figura geométrica, en específico del cuadrado y rectángulo. Dichas acciones se interiorizan en un proceso cuando el estudiante percibe al área como un producto numérico y algebraico, el cual está dado por medio del área de un cuadrado o un rectángulo según sea el caso.

De acuerdo a ello, en el ejercicio II se pretende que el estudiante utilice el mecanismo de reversión del proceso de área como producto numérico y algebraico, para resolver las actividades propuestas. Este mecanismo se percibirá si el estudiante ha interiorizado el proceso de área como producto numérico y algebraico. Cabe mencionar que este ejercicio puede tener diferentes soluciones en el caso de los incisos (a) y (b).

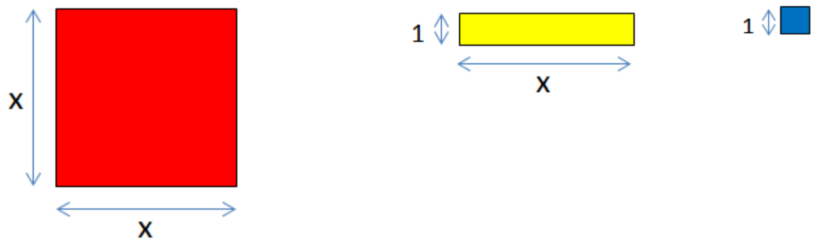
DISCUSIÓN GRUPAL DE LOS EJERCICIOS I Y II:

Después de realizar los ejercicios I y II, se continúa con una discusión grupal, en la cual se describen las acciones que realizaron para llegar a las respuestas dadas, con el objetivo que socialicen sus respuestas y reflejen la interiorización de dichas acciones. Por ejemplo en el ejercicio II, en donde tienen que revertir el proceso de área como producto numérico y algebraico, los estudiantes podrán constatar que se pueden generar diferentes factores que dan como resultado el producto del área dada.

Después de la discusión grupal, se formarán equipos de tres alumnos y se les entregará el material didáctico (objeto concreto), como se muestra en la imagen 1, con el objetivo de manipularlas y realizar el ejercicio III.

Imagen 1. Material didáctico (por equipos)

A continuación se presenta el material que se les proporcionará a los estudiantes para realizar el ejercicio III:



Cabe mencionar que el material que se les entregará a los estudiantes individualmente, corresponde a la representación que se les proporcionó en el ejercicio I (incisos d), e) y f)), pues tienen las mismas dimensiones (imagen 2).

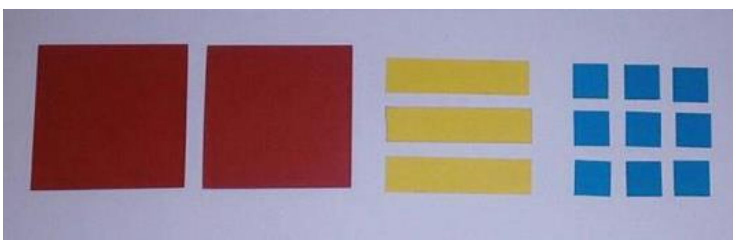


Imagen 2. Material didáctico (individual)

III. Con las piezas que se les entregaron, formarán las siguientes figuras, al formar cada figura deberán llenar la tabla de abajo correspondiente a cada una.

Figura 1. Un **rectángulo**, con una pieza de área x^2; tres piezas de área x; y dos piezas de área *1*.

Figura 2. Un **cuadrado**, con una pieza de área x^2; ocho piezas de área x; y dieciséis piezas de área *1*.

Figura 3. Un **rectángulo**, con una pieza de área x^2 y cinco piezas de área x.

Figura 4. Un **rectángulo**, con dos piezas de área x^2, tres piezas de área *x;* y una pieza de área *1*.

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
Con las piezas de papel que se les entregaron reproduzca las figura que se les solicita y pégala en cada espacio.	Escribe el área de la figura que formaste en la columna 1, con base en cada una de sus partes.	En la columna 1 anota las dimensiones de la figura y a partir de ellas expresa simbólicamente el área (A=bxh ó A=LxL).	Desarrolla el producto de la columna 3.
1.			
2.			
3.			
4.			

IV. Comenta con tu equipo la actividad anterior y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?
b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?
c) En los rectángulos que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?
d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales?_____________ ¿Por qué?
e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

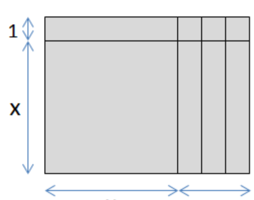
Con estos ejercicios se pretende que el estudiante coordine el proceso de área como producto numérico y algebraico con el proceso de descomposición de figuras geométricas. Con lo cual se pretende generar la composición de figuras geométricas que forman una nueva figura geométrica (cuadrado o rectángulo) con lo cual se puede representar el área como producto algebraico, en específico dicho producto es una expresión cuadrática (ejercicio IV, incisos a-c). Posteriormente en el inciso (d) se pretende que el estudiante coordine el proceso de expresión algebraica con el proceso de igualdad, para formar el proceso de factorización, que consiste en verificar que el producto del área es igual a la expresión algebraica de segundo grado la cual se obtuvo de la composición de figuras geométricas.

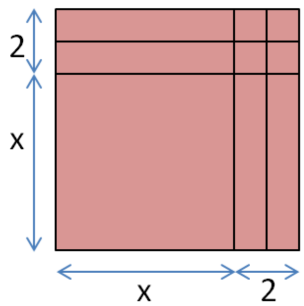
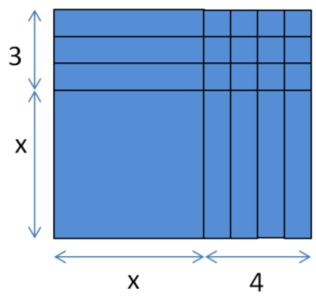
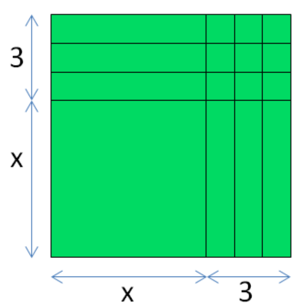
DISCUSIÓN GRUPAL DE LOS EJERCICIOS III Y IV:

Después de resolver los ejercicios III y IV, el profesor realizará de nuevo las preguntas del ejercicio IV con el objetivo de que cada uno de los equipos dé su respuesta de la actividad. Se espera que los estudiantes identifiquen que lo realizado en el ejercicio III, representa en todos los casos la misma área de la figura geométrica dada, ya sea que esté escrita en expresión algebraica o producto. Por otra parte el profesor, deberá cerrar la discusión haciendo énfasis que cuando se expresa el área en forma de producto, se está trabajando la factorización.
En este sentido se pretende que los alumnos perciban la relación de expresión cuadrática y el área de una figura, incluyendo la relación estrecha que existe cuando se expresa el área en forma de expresión algebraica cuadrática y cuando se expresa en forma de producto. Un punto importante, es que también están obteniendo el área de figuras compuestas por medio de expresiones cuadráticas.

Posteriormente se continuará con el siguiente ejercicio:

V. Comenten en equipo y lleguen a un acuerdo para completar la siguiente tabla, utilicen el método o técnica que crean conveniente.

Figura y área de la figura	Fórmula que permite calcular su área:	Sustituye la fórmula y encuentra la medida de sus dimensiones:	¿Cuál es el valor de x?
a) Área de la figura: $48cm^2$ 			
b) Área de la figura: 81 cm^2			

			
c) Área de la figura: $90cm^2$ 			
d) Área de la figura: $49cm^2$ 			

e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

f) ¿Cómo encontraste el valor de x para cada figura?

Con este ejercicio se pretende que el estudiante coordine el proceso de área como producto de una figura geométrica, el proceso de expresión algebraica cuadrática y el proceso de ecuación, para generar el proceso de ecuación cuadrática. Esta coordinación se refleja cuando el estudiante sustituye los valores en la fórmula del área de la figura dada con lo cual puede darse cuenta de que se trata de una ecuación, posteriormente en la última columna se le pide que de los valores de x con lo cual se pretende que el estudiante desarrolle una técnica para dar solución a la ecuación que obtuvo, se espera que el estudiante utilice la técnica de ensayo y error. Esto con el objetivo de que al igual que en el Plan de Estudios 2011, al empezar a trabajar con ecuaciones cuadráticas los alumnos lo hacen con métodos propios, incluso pueden llegar al resultado por medio de ensayo y error, además en este apartado ya se está pidiendo que encuentren el valor de *x*.

DISCUSIÓN GRUPAL DEL EJERCICIO V:

En la discusión grupal, el profesor solicitará a los alumnos que describan las técnicas que utilizaron para obtener el valor *de x,* en la cual se espera que los estudiantes comenten que utilizaron el método de ensayo y error, de igual forma se espera que los estudiantes comenten que son dos valores que satisfacen la ecuación. Posterior a ello, el profesor presentará las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $6x + 32 = 80$

y posterior a ello, se les preguntará lo siguiente:

- ¿Cuál de las ecuaciones presentadas anteriormente, es una ecuación?
- ¿Cuál es la diferencia entre una y otra?

Con estas preguntas se pretende que los estudiantes reflexionen sobre las características de las ecuaciones propuestas, y determinen que ambas son ecuaciones y que el inciso (a) es una ecuación que tiene exponente 2. También se espera que los estudiantes relacionen el grado del exponente con la solución de la ecuación cuadrática o lineal.

De acuerdo a lo anterior, el profesor concluirá explicando a los estudiantes que fue lo que construyeron, y les dará la definición del concepto de ecuación cuadrática que manejamos en nuestro trabajo.

Una ecuación cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c ∈ *R y a≠ 0*

Esta ecuación también se conoce como ecuación de segundo grado y tiene como máximo, dos soluciones o raíces que deben satisfacer la ecuación

Formas incompletas.

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ *se hace c = 0, entonces queda:*

$$ax^2 + bx = 0$$

la solución de esta ecuación incompleta garantiza que una de las raíces es cero ya que el lado o miembro izquierdo de la ecuación se puede factorizar como:

$$x(ax + b) = 0,$$

que equivale a las dos siguientes ecuaciones lineales, cuyas soluciones son:

Ecuaciones lineales:	$x = 0$	$ax + b = 0$
Soluciones:	$x = 0$	$x = -\frac{b}{a}$

Si en cambio se hace $b = 0$ en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se tiene la forma incompleta:

$$ax^2 + c = 0.$$

La solución de esta ecuación arroja como resultado dos raíces que son iguales en términos de valor absoluto.

Ahora, si $b = c = 0$, entonces $ax^2 = 0$; es una ecuación cuadrática incompleta cuyas dos soluciones son iguales a cero.

Por último, se realizará una retroalimentación de los ejercicios realizados en la actividad 1. Por ejemplo, se hará énfasis en el ejercicio V, comentando que observen la segunda columna en donde se presenta el producto, y que ellos reflexionen que el área como producto representa una factorización de la ecuación cuadrática.

Posterior a ello, se les presentará la actividad 2, que tiene como propósito trabajar las ecuaciones cuadráticas con la factorización como método de solución.

ACTIVIDAD 2

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

I. En binas, completen la siguiente tabla, eligiendo de las siguientes ecuaciones cuadráticas las que tienen la forma $ax^2 + bx = 0$:

$y^2 - 3y - 28 = 0$	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 2x = 0$
$x^2 + 7x = 0$	$x^2 - 5x + 4 = 0$	$t^2 + 5 = 0$

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
De las ecuaciones anteriores, ¿cuáles tienen la forma $ax^2 + bx = 0$?	¿Cuál es la figura geométrica que expresa el área del miembro izquierdo de la ecuación?	Anota las dimensiones de la figura de la columna 1, y a partir de ellas expresa simbólicamente el área.	De acuerdo a lo que obtuviste en la columna 3, ¿qué valores hacen que el área sea igual a cero?

Observa la columna 3, ¿qué características tienen los productos que obtuviste?

a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

c) Analiza la tabla anterior y propongan un método que permita encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$:

d) ¿Cómo puedes comprobar que los valores que encontraste de x satisfacen la ecuación?

e) Comprueba las tres ecuaciones de la tabla:

Posteriormente se les pedirá a los estudiantes que realicen los siguientes ejercicios, completando la siguiente tabla:

II. Completa la siguiente tabla:

Ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$	Representa la ecuación en forma de producto (factorización)	De acuerdo con los factores de la columna anterior, ¿Qué ecuaciones lineales obtienes?	¿Cuáles son los valores de *x* que satisfacen la ecuación?
1) $x^2 + 3x = 0$			
2) $x^2 - 16x = 0$			
3) $x^2 + 7x = 0$			
4) $x^2 - 1/2x = 0$			
5) $x^2 + 2.5x = 0$			
6) $x^2 + 3x = 0$			
7) $x^2 - 16x = 0$			
8) $x^2 + 7x = 0$			
9) $x^2 - 1/2x = 0$			
10) $x^2 + 2.5x = 0$			

El ejercicio I y II de la actividad 2 tiene como propósito trabajar la factorización en ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, donde el alumno elegirá de varias ecuaciones las que tengan esa forma, con la intención de que identifiquen el tipo de ecuación con su factorización y que, a través de las acciones de encontrar la solución, puedan percibir el método de solución que se está trabajando. En este sentido, el alumno coordina el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y factorización para generar el proceso de solución de una ecuación cuadrática, lo cual implica que el estudiante identifica que la ecuación cuadrática tiene dos raíces o soluciones que satisfacen la ecuación.

Continuando, la siguiente actividad tiene el propósito de encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma general $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, pero con las características que es un trinomio cuadrado perfecto que al factorizarlo se obtiene un binomio al cuadrado.

Actividad 3

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

I. Completa la siguiente tabla:

a) Traza un cuadrado de lado $x + 3$	
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	
c)Desarrolla el producto del área del inciso (b)	

1. De acuerdo al producto obtenido del inciso (c), calcula la raíz cuadrada del término cuadrático y del término independiente:
   Raíz del término cuadrático:______
   Raíz del término independiente:_____

2. Multiplica las raíces encontradas en el punto anterior:

(Raíz del término cuadrático)(Raíz del término independiente) = (   )(   ) = _____

3. Al resultado anterior, ¿Qué operación aplicarías para obtener el término lineal, que obtuviste en el trinomio resultante?
4. ¿Cuáles serán los pasos para desarrollar un binomio al cuadrado?
5. Ahora, con las raíces obtenidas en el punto 1, forma un binomio, el cuál llevará el signo del término lineal del trinomio resultante, ¿Qué obtienes como resultado?

6. Si quieres obtener el área del cuadrado, que tiene de lado el binomio del punto anterior, ¿Qué obtienes como resultado?
7. De acuerdo a lo realizado anteriormente, supongamos que el valor del área propuesta en el inciso (b) es igual a cero, ¿qué valor tendría *x*? Explica tu respuesta.
8. ¿Cuáles serán los pasos para desarrollar un binomio al cuadrado?

La actividad 3 tiene como propósito trabajar la factorización en ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, en este se le plantea al estudiante un ejercicio que está conformado por 8 preguntas. Lo que se pretende con las preguntas es que el estudiante hago uso de su concepción proceso de ecuación cuadrática, lo cual implica que identifique que el área de la figura que construyo puede verse como el producto de dos expresiones algebraicas, y que el resultado de ese producto es una expresión algebraica cuadrática. Por tanto, ese proceso lo coordinará con el proceso de las propiedades de la radicación de los números enteros, para construir el proceso de factorización de una expresión algebraica cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, pero con las características que es un trinomio cuadrado perfecto. Dicho proceso se coordina con el proceso de ecuación cuadrática para generar el proceso de solución de una ecuación cuadrática.

DISCUSIÓN GRUPAL DEL EJERCICIO I DE LA ACTIVIDAD 3:

Como parte de la discusión grupal del ejercicio I de la actividad 3, el profesor realizará las siguientes preguntas:

i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?

El objetivo de esta pregunta es que los alumnos reflexionen sobre las características que debe tener un trinomio cuadrado perfecto, que son: que el primer y tercer término son cuadrados exactos, es decir tienen raíz cuadrada exacta y el segundo término tiene la característica que es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto?

Está pregunta tiene como objetivo que el alumno contraste la diferencia entre un trinomio cuadrado perfecto y un trinomio que no es cuadrado perfecto, ya que esta información les servirá para que puedan factorizar ambos trinomios.

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado?

El estudiante al identificar un trinomio cuadrado perfecto se pretende que reflexione y asocie que al factorizar un TCP se obtiene como resultado un binomio al cuadrado.

iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto?

Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante identifique que el TCP se puede factorizar como un binomio al cuadrado y con la misma encontrar las raíces o soluciones e identificar que en esta situación ambas soluciones representa el mismo valor. Una vez que identifiquen que al factorizar un trinomio cuadrado perfecto se obtiene un binomio al cuadrado y que al desarrollar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto realizarán los siguientes ejercicios.

Con base en lo realizado anteriormente, encuentra los valores que satisfacen las siguientes ecuaciones:

1) $(x+2)^2=0$
2) $(2x+4)^2=0$
3) $x^2+14x+49=0$
4) $9x^2+12x+4=0$

Posteriormente se les presentará la actividad 4 a los estudiantes, en la cual se pretende que los alumnos factoricen una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde el trinomio no es cuadrado perfecto, es decir no muestra las características antes mencionadas.

Actividad 4

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$

I. Completa la siguiente tabla:

a) Traza una figura que tenga cómo base $x+4$ y de altura $x+3$:	
b) ¿De qué figura se trata?	
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	

e) Desarrolla el producto de los binomios:	
f) ¿El trinomio resultante es?:	
g) ¿Será un trinomio cuadrado perfecto el trinomio que obtuviste en el inciso anterior? ¿Por qué?	
h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de *x* en el inciso (c)?	
i) ¿Cuáles son los valores de *x*?	

La actividad 4 tiene como propósito trabajar la factorización en ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, en este se le plantea al estudiante una tabla que debe completar. Lo que se pretende con las preguntas de la tabla, es que el estudiante hago uso de su concepción proceso de ecuación cuadrática, lo cual implica que identifique que el área de la figura que construyo puede verse como el producto de dos expresiones algebraicas, y que el resultado d ese producto es una expresión algebraica cuadrática. Por tanto, ese proceso lo coordinará con el proceso de las propiedades de la radicación de los números enteros, para construir el proceso de factorización de una expresión algebraica cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, pero con las características que no es un trinomio cuadrado perfecto. Dicho proceso se coordina con el proceso de ecuación cuadrática para generar el proceso de solución de una ecuación cuadrática.

DISCUSIÓN GRUPAL DEL EJERCICIO I DE LA ACTIVIDAD 4:

Cuando ya esté terminado el ejercicio de la actividad 4, viene la intervención del profesor para llevar a los estudiantes por medio de preguntas y la reflexión al método para resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización, cuando el trinomio no es cuadrado perfecto y al factorizarlo obtenemos binomios con término común. Con base en lo anterior contesta la siguiente tabla:

i. Completa la siguiente tabla y con base en ella contesta los puntos A y B.

Anota el área expresada simbólicamente en el inciso (c):	
Anota el trinomio resultante al desarrollar el producto de los binomios en el inciso (f).	

A. ¿Qué relación hay entre los términos independientes de cada binomio y el término independiente del trinomio resultante?

B. ¿Qué relación existe entre los términos independientes de los binomios y el término común de los binomios con el valor del término lineal del trinomio resultante? Considera que el término lineal tiene signo positivo.

i. ¿Qué ocurrirá cuando el signo del término lineal sea negativo? Como el siguiente: $x^2 - 7x + 10 = 0$

Analicen y comenten las respuestas anteriores, posteriormente contesten lo siguiente:

ii. ¿Qué procedimiento propones para factorizar un trinomio cuadrado **no** perfecto?

iii. El procedimiento que describiste, ¿también será útil pata trinomios cuadrados perfectos? ¿por qué?

Estas preguntas tienen la finalidad de que el estudiante reflexione y relacione un trinomio que no es cuadrado perfecto con su factorización en la cual se obtiene binomios con termino común, donde al elevar al cuadrado el término común se obtiene el termino cuadrático del trinomio, así mismo que al sumar los términos independientes y multiplicarlos por el término común se obtiene el segundo término del trinomio (término lineal) y además al multiplicar los términos independientes de los binomios se obtiene el término independiente del trinomio. En esta actividad el estudiante puede coordinar el proceso de ecuación cuadrática con el proceso de factorización y poder darles solución a las ecuaciones cuadráticas, para posteriormente trabajar con las siguientes ecuaciones:

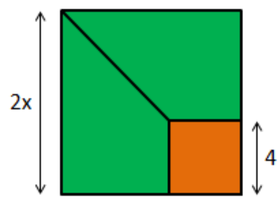
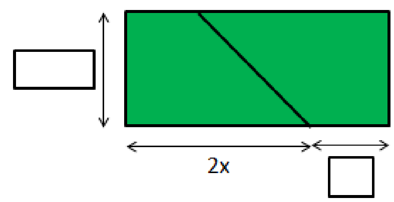
Con base en lo anterior, encuentra el valor de *x* en las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + 11x + 30 = 0$
2) $x^2 + 14x + 49 = 0$
3) $x^2 - 16x + 64 = 0$
4) $x^2 + 12x + 27 = 0$
5) $x^2 - x - 6 = 0$

Posterior a ello, se les presentará a los estudiantes la siguiente actividad 5 en donde se propone determinar por medio de la factorización la solución a las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, cuando se trata de diferencia de cuadrados y al factorizarlo se obtienen binomios conjugados.

Actividad 5

II. Completen la siguiente tabla:

Observa la “Figura 1” y analízala, ¿De qué figura se trata?______ ¿Por cuáles figuras está formada?_______	Sólo con los trapecios se formó un rectángulo “Figura 2”, analízalo y anota sus dimensiones:
 Figura 1	 Figura 2

Comenta con tu compañero y posteriormente contesten lo siguiente:

i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?

ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:

iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?

iv. Con base en los factores que encontraste. ¿cómo puedes obtener el valor de *x*?

v. ¿Cuáles son los valores de *x*?

vi. Obtén el área de la figura 2:

vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?

viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:

ix. ¿Son equivalentes las áreas obtenidas en el inciso vi y vii?_____ ¿por qué?

En este apartado al resaltar las diferencias de los binomios del iii,

DISCUSIÓN GRUPAL DEL EJERCICIO I DE LA ACTIVIDAD 5:

Dentro de la discusión grupal el profesor hará evidente que los binomios conjugados difieren en el signo del término independiente de cada binomio, y al desarrollarlos se obtiene una diferencia de cuadrados destacando sus características, además se mencionará que la diferencia de cuadrados es una ecuación incompleta, como la siguiente:

Cuando se hace $b = 0$ *en la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$, *entonces se tiene la forma incompleta* $ax^2 + c = 0$. *La solución de esta ecuación arroja como resultado dos raíces que son iguales en términos de valor absoluto.*

Contestar las siguientes preguntas:

¿Qué procedimiento proponen para factorizar una diferencia de cuadrados?

Aparte de factorizar una diferencia de cuadrados, ¿de qué otra forma puedes encontrar los valores de *x*?

Estas preguntas son con el fin que los alumnos por medio de la actividad y la reflexión de la misma puedan plantear un método de solución para factorizar una diferencia de cuadrados y además identifiquen que este tipo de ecuaciones también se pueden solucionar mediante el despeje. Con esta actividad el alumno podrá coordinar el proceso de ecuación cuadrática con el proceso de factorización para solucionar ecuaciones cuadráticas de este tipo.

Realiza lo siguiente, factoriza y encuentra los valores de *x*:

1) $x^2 - 81 = 0$
2) $4x^2 - 100 = 0$
3) $x^2 - 36 = 0$
4) $x^2 - 9 = 0$
5) $x^2 - 81 = 0$

Por medio de despeje soluciona las siguientes ecuaciones cuadráticas:

6) $2x^2 - 32 = 0$
7) $3x^2 = 75$
8) $4x^2 - 2 = 0$
9) $x^2 - 16 = 0$

La siguiente actividad tiene el propósito de presentar la fórmula general como método de solución de ecuaciones cuadráticas.

ACTIVIDAD 6

Como se trabajó en las actividades anteriores, una ecuación cuadrática es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$; Donde a, b y c ∈ R y a≠ 0

Esta ecuación también se conoce como ecuación de segundo grado y tiene como máximo, dos soluciones o raíces que deben satisfacer la ecuación.

En la siguiente tabla identifica en cada ecuación: El valor del coeficiente del término cuadrático “a”, el valor del coeficiente del término lineal ”b”, y el valor del coeficiente del término independiente ”c”, además identifica respecto a los coeficientes de qué tipo de ecuaciones cuadráticas se trata: completa o incompleta.

Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:
a) $x^2 + 3x - 10 = 0$			
b) $4x^2 - 36 = 0$			
c) $9x^2 - 27x = 0$			
d) $16x^2 = 0$			
e) $3x^2 - 10x - 25 = 0$			

Analiza las ecuaciones anteriores y responde las siguientes preguntas:

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores?
ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones?

En este punto se realizará una discusión grupal donde se comentará la identificación de los coeficientes cuadráticos, lineal e independiente de una ecuación cuadrática, así mismo que identifiquen en las ecuaciones cuales son completas e incompletas para poder determinar los valores de los coeficientes y preguntar qué sucede cuando carecen del coeficiente del termino lineal o del termino independientes, y mencionar que existe una fórmula que nos permite solucionar cualquier tipo de ecuación cuadrática, siempre y cuando identifiquemos los coeficientes de los términos de la ecuación cuadrática, para continuar con la siguiente pregunta:

¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática?

En esta parte se pretende que el estudiante reflexionen sobre el origen de la fórmula general, la cual se obtiene de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, donde se completa el trinomio cuadrado perfecto y despejando *x*, obtenemos dicha fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en donde sustituyendo los valores de los coeficientes *a, b* y *c*. podemos encontrar las raíces o soluciones.

Enseguida y de acuerdo a la tabla anterior, donde identificaron los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas, completa la siguiente tabla:

Ecuación cuadrática	Solución por fórmula general	Comprobación	Raíces o soluciones

Reflexiona y anota en el siguiente espacio lo aprendido, ¿qué método te parece mejor para solucionar ecuaciones cuadráticas?

Esta pregunta tiene el propósito de identificar el método preferido de los alumnos para solucionar una ecuación cuadrática y el porqué de su elección.

5.2 Entrevista

En esta sección se describirá el diseño de la entrevista que se aplicó del concepto de ecuación cuadrática en el nivel secundaria.

6.3.1 Diseño y análisis a priori de la entrevista

I. Encierra en un círculo las ecuaciones cuadráticas, y justifica porqué son cuadráticas.

a) $x + 4 = 0$

b) $2x(4 + x) = 0$

c) $(x + 3)(x - 2) = 0$

d) $4x^2 + 2x = 20$

e) $10 – x = -x^2$

El objetivo de este ejercicio es identificar en qué construcción se encuentra el estudiante con respecto al concepto de ecuación cuadrática. De acuerdo a nuestra DG preliminar, describimos que el estudiante al estar en construcción proceso de ecuación cuadrática identifica que en una ecuación cuadrática el exponente más grande de la variable es dos, y por otra parte implica que el estudiante identifique ecuaciones del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

II. Menciona si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y en cada caso justifica tu respuesta.

a) $(x + 3)(x - 4) = x^2 + x - 12$

b) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$

El objetivo de este ejercicio es observar la concepción proceso del concepto de igualdad despues del ciclo de enseñanza. Al estar en esta construcción de igualdad los estudiantes identifican que los incisos propuestos son falsos, pues no mantienen la misma igualdad, Por otro lado, también nos interesa analizar cómo desarrollan los productos que se les proponen, ya que son productos notables, los cuales forman parte de la construcción del concepto de ecuación cuadrática.

III. Resuelve las siguientes ecuaciones, y en cada caso comprueba su solución.

Ecuación	Solución	Comprobación
a) $x^2 - 36 = 0$		
b) $2x^2 + 32 = 0$		
c) $3(x-2)^2 = 12$		
d) $x^2 - 2x = 0$		
e) $x^2 - 4x = 12$		
f) $x^2 - 14x + 51 = 3$		
g) $2x^2 = 3x$		

El ejercicio anterior tiene como objetivo observar la concepción proceso del concepto de ecuación cuadrática. Es decir, si identifica que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones entonces podremos decir que tiene una concepción objeto del concepto de estudio.

Por otra parte, también se quiere identificar la concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, es decir si el estudiante encuentra las soluciones de la ecuación cuadrática y las comprueba entonces se encontrará en dicha concepción.

IV. Responde lo siguiente:

a) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	
b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	

Finalmente en el ejercicio IV, tiene como propósito verificar si los estudiantes tienen la concepción objeto de ecuación cuadrática, pues ejercen acciones sobre la ecuación para determinar sus propiedades. Por ejemplo, dadas las raíces o soluciones propondrán una ecuación cuadrática que se satisfaga con dichas raíces

5.3 Implementación del Ciclo de Enseñanza y Entrevista

La implementación del ciclo de enseñanza se llevó a cabo con el grupo de tercer año grupo "A" de secundaria del Instituto de Educación Monreal Sandoval, en Fresnillo Zacatecas, el cual está integrado por 26 alumnos, 16 niñas y 10 niños, entre los 14 y 15 años (imagen 3), en cuanto a la entrevista, se realizó a cinco alumnos, seleccionados con el criterio antes mencionado.

Imagen 3. Grupo 3° "A" IEMS

A continuación describimos el contexto externo e interno del grupo:

El Instituto de Educación Monreal Sandoval se encuentra sobre una avenida poco transitada, se observa que no hay muchas carencias en las calles aledañas, pues las casas se encuentran en buenas condiciones, hay comercios cercanos, pero no distraen a los alumnos.

Las comisiones que cumplen los docentes son estar al pendiente de los alumnos, conocer sus problemáticas, acercarse a ellos si observan algún comportamiento raro, motivarlos al estudio, fungir como tutores y mantener el orden y buen comportamiento de los alumnos. Los padres de familia participan asistiendo a las reuniones, estando al pendiente de que sus hijos realicen la tarea en casa y motivando a sus hijos al estudio.

El grupo de 3° "A" suele ser muy participativo, normalmente se encuentran muy atentos y con disposición a trabajar tanto en equipo como de forma individual, tiene alumnos sobresalientes, siempre están atentos a las indicaciones que se dan y realizan el trabajo rápidamente, son alumnos interesados en la materia, en cuánto al orden y disciplina tiende a distraerse con facilidad y platicar mucho.

Con respecto a la primera actividad de enseñanza, se organizó al grupo en equipos de tres estudiantes, integrados por estudiantes aproximadamente del mismo nivel académico en la asignatura de Matemáticas con el propósito de que todos participaran activamente en las actividades. Las actividades 2 a la 6 las realizaron en parejas, las cuales se formaron con el mismo criterio de los equipos de la actividad 1, realizaban sus actividades e interactuaban entre ellos, exponían sus ideas y dudas, al final de cada actividad había una discusión grupal dirigida por el profesor con el propósito de analizar los puntos clave y precisar la información del propósito de cada actividad.

Después de la implementación de la enseñzanza, se seleccionaron cinco estudiantes que participaron en la entrevista sobre el concepto de estudio. Los estudiantes fueron elegidos de acuerdo a su desempeño en el cuestionario diagnóstico (aplicado dos meses atrás del implementación), su desempeño en el ciclo de enseñanza y su desempeño en la clase de matemáticas (dos de nivel bajo, dos de nivel medio y uno de nivel alto)[4].

Se aplicó la entrevista a cinco estudiantes que habían contestado dos meses atrás el cuestionario diagnóstico, y que tambien participaron en la implementación del ciclo de enseñanza. Esto fue con el propósito de obtener más información sobre sus construcciones mentales en relación al concepto de ecuación cuadrática y su solución.

[4] En México la escala de calificaciones en nivel básico es de 5 a 10, en nuestro estudio nivel bajo lo consideramos de 5-6; nivel medio de 7-8 y nivel alto de 9-10.

CAPÍTULO 6

RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se describe la recolección y análisis de los datos de esta investigación. Primero se reporta el análisis de los datos obtenidos de la implementación del ciclo ACE, y por último se presenta el análisis de los datos obtenidos de la entrevista sobre el concepto de estudio.

6.1 Análisis de los datos del ciclo de enseñanza

Para realizar el análisis de los datos del ciclo de enseñanza, se eligieron cinco estudiantes considerando el nivel de desempeño en el cuestionario diagnóstico, con el propósito de contrastar su desempeño antes y después de la aplicación del ciclo de enseñanza. Los identificamos de la siguiente manera: dos estudiantes de nivel bajo: estudiante 2 (E2) y estudiante 4 (E4), dos de nivel medio: estudiante 1 (E1) y estudiante 5 (E5) y uno de nivel alto: estudiante 3 (E3).

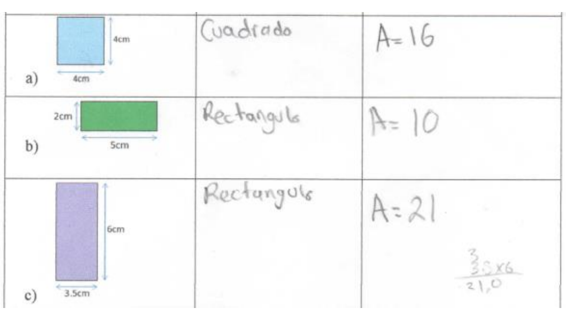
6.1.1 Construcción proceso del área como producto algebraico, numérico y geométrico (Actividad 1_ Ejercicios 1 y 2)

El ciclo de enseñanza del concepto ecuación cuadrática empieza con la construcción del área de una figura geométrica (cuadrado y rectángulo) como producto algebraico, numérico y geométrico.

A continuación se muestra los resultados que obtuvieron los estudiantes que se seleccionaron para este análisis:

- ***Estudiante E1***

Para construir esta concepción, se destinaron los ejercicios 1 y 2 de la actividad 1 de nuestra propuesta didáctica. Con respecto al estudiante E1, escribe lo siguiente:



E1 muestra las acciones de reconocer el tipo de figura y logra obtener el área numéricamente, pero omite unidades de medición.

Figura 5

En la figura 6, podemos observar que al obtener el área algebraicamente presenta errores en el inciso (d) y (e), pues a pesar de que representa correctamente el área como producto, al momento de realizar la operación muestra que no utiliza correctamente las propiedades del producto de monomios (en ese caso).

Figura 6

Con respecto a la coordinación entre el área como producto numérico y algebraico, consideramos que esa coordinación se dio en la medida que E1 puede percibir los dos procesos como uno solo, es decir, que no existe diferencia entre el procedimiento de la longitud numérica y la longitud algebraica, y por otra parte se refleja esa coordinación del proceso, cuando el estudiante puede revertirlo, como se muestra en el ejercicio 2.

Con respecto al ejercicio 2 (figura 7), E1 muestra que a pesar de no utilizar el sistema métrico para el área, E1 logra obtener las dimensiones de la figura y realiza una justificación. Dicha justificación muestra implícitamente el uso del proceso de reversión del área como producto numérico.

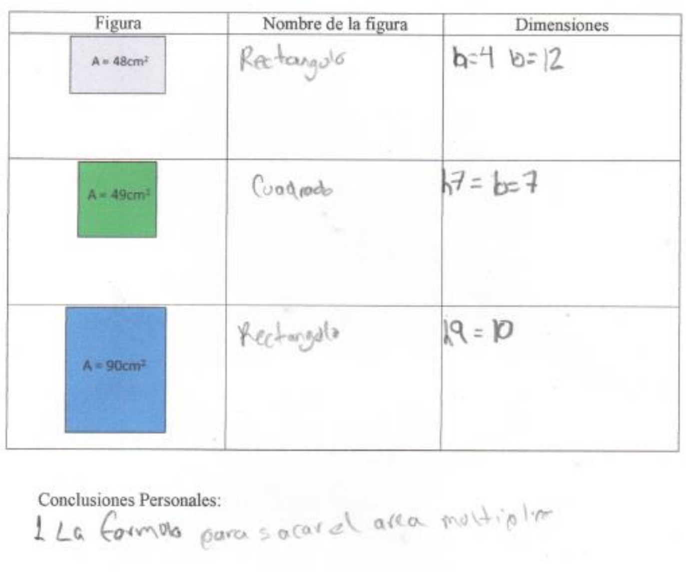
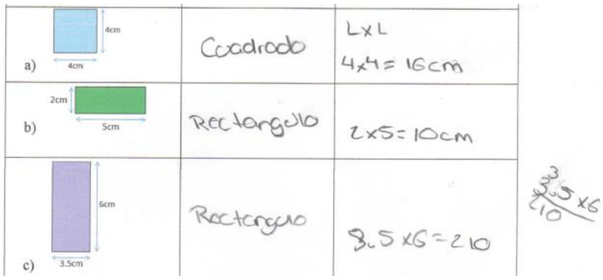


Figura 7

Estudiante 2

La estudiante E2 logra hacer las acciones de representar el área como producto y luego obtener la medida numérica del área de las figuras, pero las unidades de medición las deja como lineales y no cuadráticas, además, otro error en el que incurrió fue en el inciso (c) al realizar la operación olvidó ponerle el punto decimal en el producto, en el inciso (e) al obtener el área algebraicamente la representó como el producto de los lados y llegó al resultado esperado (figuras 8 y 9).



a) 4cm, 4cm	Cuadrado	LxL 4x4= 16cm
b) 2cm, 5cm	Rectangulo	2x5= 10cm
c) 6cm, 3.5cm	Rectangulo	3.5x6= 210

Figura 8

d) 1, x	Rectangulo	1xx= x
e) x, x	Cuadrado	$(x)(x)=x^2$
f) 1	Cuadrado	1x1= 1

Figura 9

Por otra parte en el ejercicio 2 de la actividad I, E2 logra obtener las dimensiones de cada figura, expresando que logró obtenerla enfocándose en las fórmulas de las figuras, lo cual muestra que ha utilizado el mecanismo de reversión al utilizar el proceso inverso de cuando obtiene el área de una figura geométrica (figura 10).

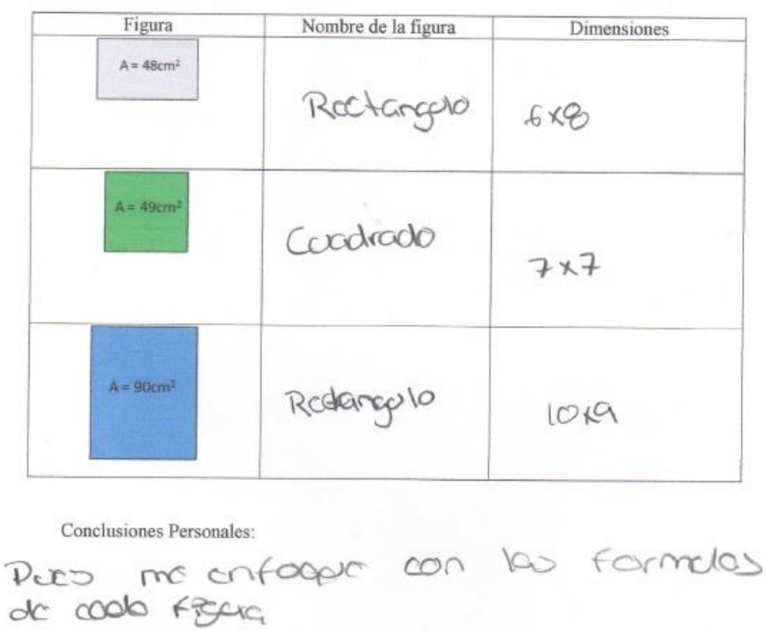


Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
A = 48cm²	Rectangulo	6x8
A = 49cm²	Cuadrado	7x7
A = 90cm²	Rectangulo	10x9

Conclusiones Personales:

Pues me enfoque con las formulas de cada figura

Figura 10

Estudiante E3

En el caso de E3, realizó correctamente las acciones de área como producto numérico y algebraico, se puede percibir que si representa el área con las unidades de medida cuadráticas (figura 11).

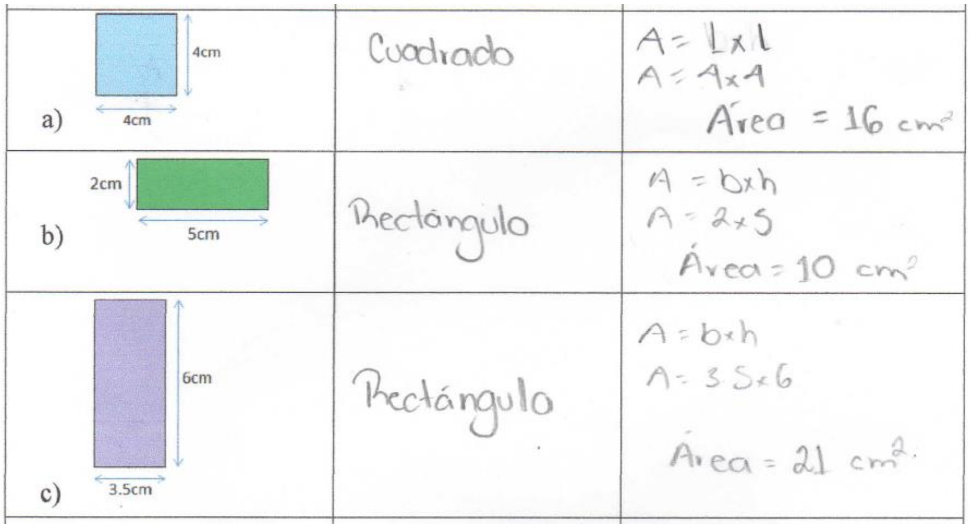


Figura 11

Posteriormente, en el inciso (d) al obtener el área del rectángulo algebraicamente lo representa correctamente, pero el resultado que presenta para el área es incorrecto (figura 12).

Figura 12

Por otra parte en el ejercicio 2 de la actividad I, E3 logra completar correctamente la actividad y además justifica cada una de sus respuestas.

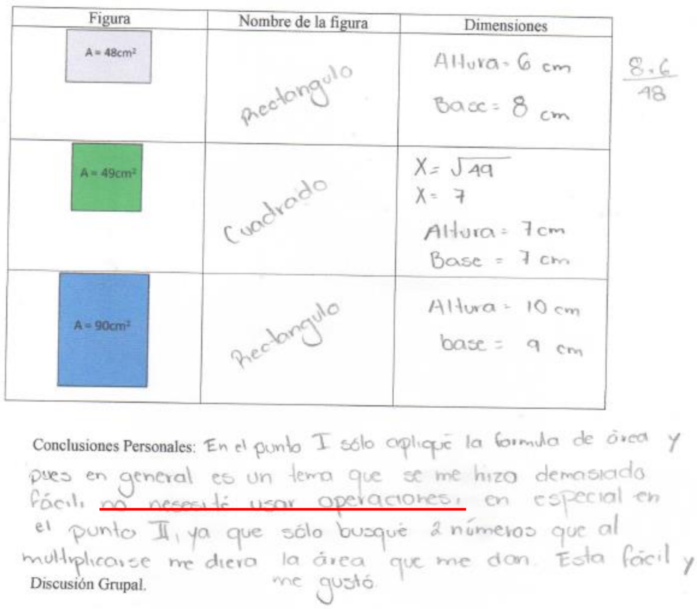


Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
A = 48cm²	Rectangulo	Altura= 6 cm Base= 8 cm
A = 49cm²	Cuadrado	X= √49 X= 7 Altura= 7cm Base = 7 cm
A = 90cm²	Rectangulo	Altura= 10 cm base= 9 cm

8·6
48

Conclusiones Personales: En el punto I sólo apliqué la formula de área y pues en general es un tema que se me hizo demasiado fácil, no necesité usar operaciones, en especial en el punto II, ya que sólo busqué 2 números que al multiplicarse me diera la área que me dan. Esta fácil y me gustó.

Discusión Grupal.

Figura 13

E3 refleja que ha interiorizado las acciones de área como producto numérico y algebraico, pues manifiesta "*No necesite usar operaciones…(sic)*" y a su vez utilizó el mecanismo de reversión para contestar el ejercicio 2. Además, refleja que tiene una concepción proceso de las propiedades de la radicación y puede coordinarlo con el proceso de área de una figura geométrica para dar respuesta a lo que se le está solicitando.

Estudiante E4

En el caso de la estudiante E4, en el ejercicio 1 de la actividad 1 realizó las acciones que se le pedían, como se muestra en la siguiente figura 14:

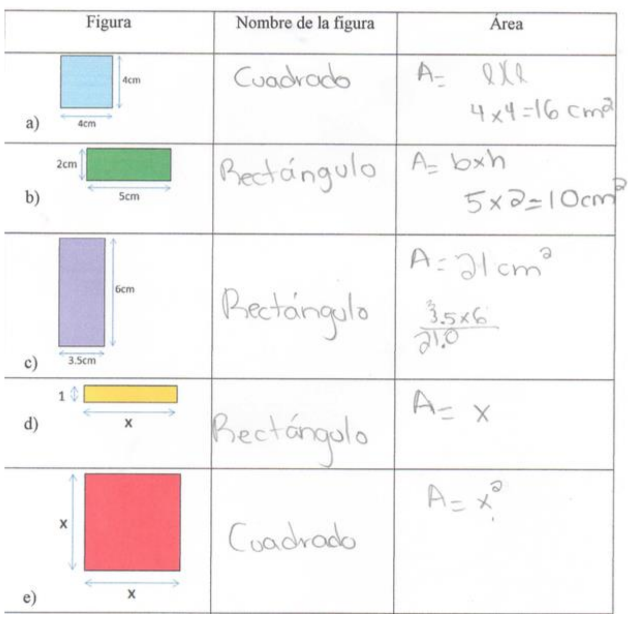
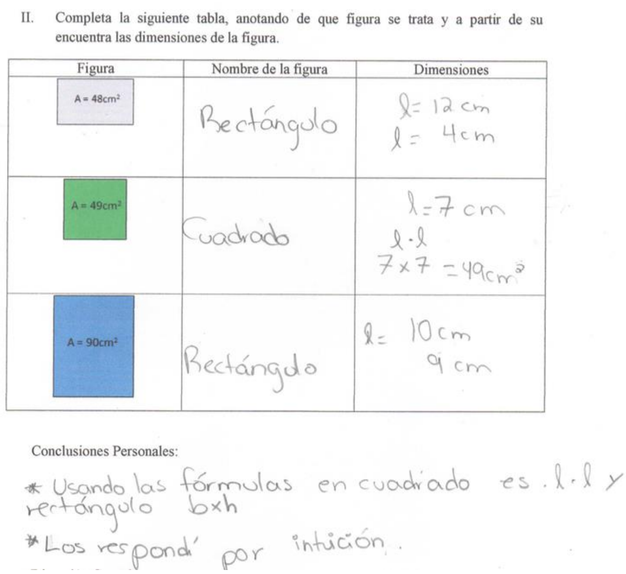


Figura	Nombre de la figura	Área
a) 4cm, 4cm	Cuadrado	A= l×l 4×4=16 cm²
b) 2cm, 5cm	Rectángulo	A= b×h 5×2=10cm²
c) 6cm, 3.5cm	Rectángulo	A=21cm² 3.5×6 21.0
d) 1, x	Rectángulo	A= x
e) x, x	Cuadrado	A= x²

Figura 14

Se puede observar en la figura que E4, utiliza la acción de encontrar el área del cuadrado y lo expresa como el producto de los lados, esto ocurre en los incisos (a) y (b). Posteriormente hace uso de sus cálculos mentales para dar el valor del área solicitada, lo cual muestra una interiorización del área como producto de los lados en el caso del cuadrado y rectángulo, ello se refleja en los incisos (c), (d) y (e).

En el ejercicio 2 de la actividad 1, E4 responde lo siguiente:



II. Completa la siguiente tabla, anotando de que figura se trata y a partir de su encuentra las dimensiones de la figura.

Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
A = 48cm²	Rectángulo	l= 12 cm l= 4cm
A = 49cm²	Cuadrado	l=7 cm l·l 7x7 =49cm²
A = 90cm²	Rectángulo	l= 10cm 9 cm

Conclusiones Personales:

* Usando las fórmulas en cuadrado es . l·l y rectángulo bxh

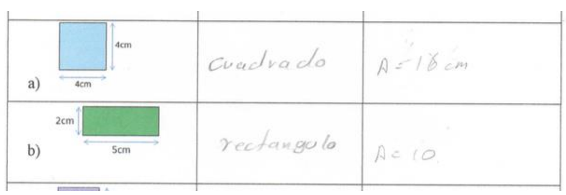
*Los respondí por intuición.

Figura 15

Se puede observar en el siguiente ejercicio que E4, utiliza el mecanismo de reversión para dar respuesta al ejercicio 2. Pues propone los posibles valores que puede tener la figura geométrica dada, según sus características. En las conclusiones, E4 describe que pudo hallar los valores utilizando las fórmulas de cada una de las figuras geométricas, lo cual muestra que dada la fórmula encontró dos valores que multiplicados dieran el valor del área dada, esto refleja el mecanismo de reversión.

Estudiante E5

En el caso del estudiante E5, responde el ejercicio 1 de la actividad 1, de manera correcta, como se muestra a continuación:

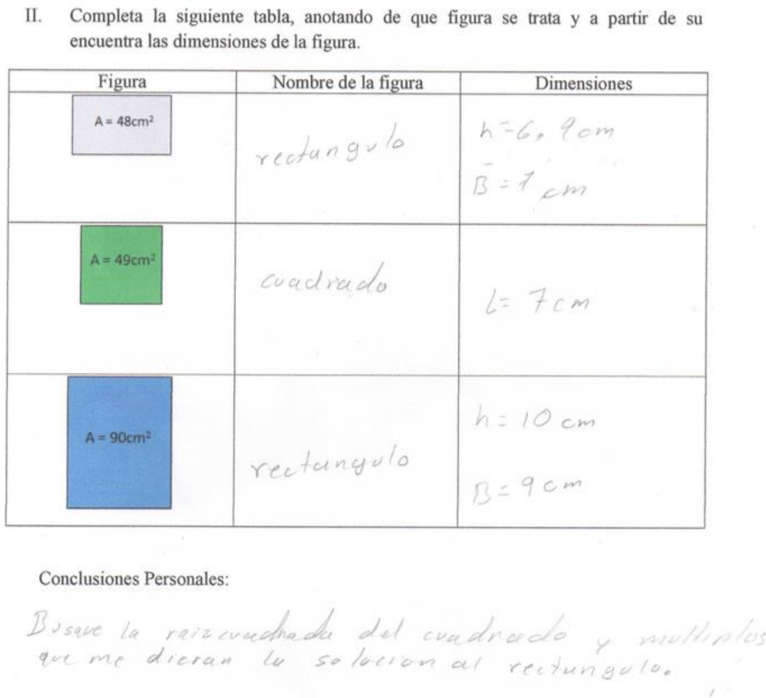


a) 4cm, 4cm	Cuadrado	A = 16 cm
b) 2cm, 5cm	rectangulo	A = 10

Figura 16

En este caso E5, respondió todos los incisos sin expresar el área como producto, lo cual muestra que este estudiante muestra una concepción proceso del área como producto numérico y algebraico.

Posteriormente en el ejercicio 2 de la actividad 1, responde lo siguiente:



II. Completa la siguiente tabla, anotando de que figura se trata y a partir de su encuentra las dimensiones de la figura.

Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
A = 48cm²	rectangulo	h=6, 9 cm B = 7 cm
A = 49cm²	cuadrado	L= 7 cm
A = 90cm²	rectangulo	h: 10 cm B= 9 cm

Conclusiones Personales:

Busque la raiz cuadrada del cuadrado y multiplos que me dieran la solucion al rectangulo.

Figura 17

En este caso E5, responde de manera adecuada cada uno de los incisos. Y en su conclusión se puede percibir que hace uso del mecanismo de reversión para dar respuesta a lo que se le solicita.

6.1.2 Construcción proceso de área como expresión algebraica cuadrática y el proceso de factorización (Actividad 1_ Ejercicio 3).

En este apartado se presentan las evidencias sobre lo que realizaron los estudiantes durante la actividad 3. Como se mencionó anteriormente, esta actividad se trabajó en equipos de tres estudiantes (imagen 4), pero cada uno también lo realizaba en sus hojas de la actividad (imagen 5).

Imagen 4. Trabajo en equipo

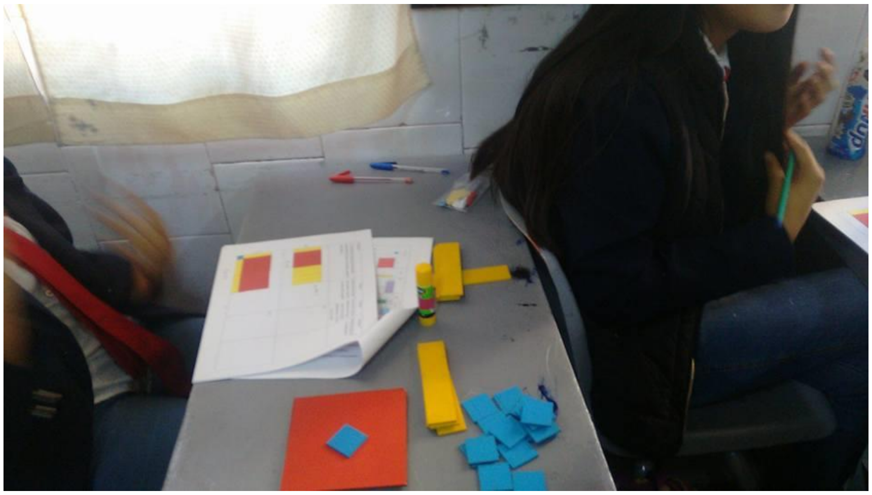


Imagen 5. Trabajo individual

Estudiante 1

Con respecto al ejercicio 3 de la actividad I, el estudiante E1 es capaz de representar el área en forma de expresión algebraica y en forma de producto de una figura compuesta, ya sea cuadrado o rectángulo, así mismo muestra que puede desarrollar el producto de los binomios, para un cuadrado y rectángulo (figuras 18 y 19).

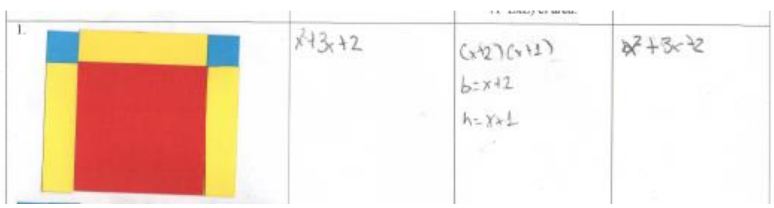


Figura 18

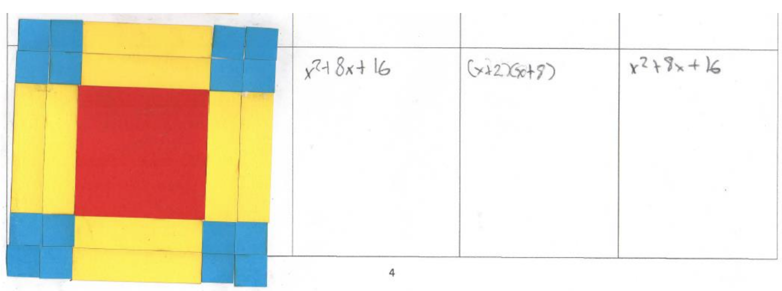


Figura 19

En la figura 20, podemos observar que en los incisos *a-b*, E1 justifica como obtiene el área en forma de expresión algebraica y muestra que el área en forma de producto representa la factorización.

a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

Separe ; Por ejemplo si hay 2 cuadrados rojos los sumaba y los ponia abia 2y ponia $2x^2$ o rectangolos que habia 3 3x o 2 cuadros azules 2

b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Factorise la respuesta de la columna 2

Figura 20

Se puede observar (figura 20) que en el inciso b, describe la palabra "factorización" podemos afirmar que en este caso el estudiante ha coordinado el proceso de área como expresión algebraica cuadrática y la igualdad, lo cual ha generado el proceso de identidad matemática. Esto se refleja cuando el estudiante en el inciso a, describe el producto del área como (b)(h), pero en el inciso b ya no utiliza dicha fórmula ya que ha percibido que se trata de una factorización lo cual muestra que ha encapsulado ese proceso en nuevo objeto, llamado factorización. De igual manera, en la figura 21, se puede percibir en las respuestas que da en el inciso d y e, donde se puede observar que identifica que la expresión algebraica y el área representada en forma de producto representan la misma área, con la afirmación *"factorizar una figura y como se multiplica para sacar su área"*.

d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales? Todas
¿Por qué?

Porque al momento de factorizar sale el mismo resultado

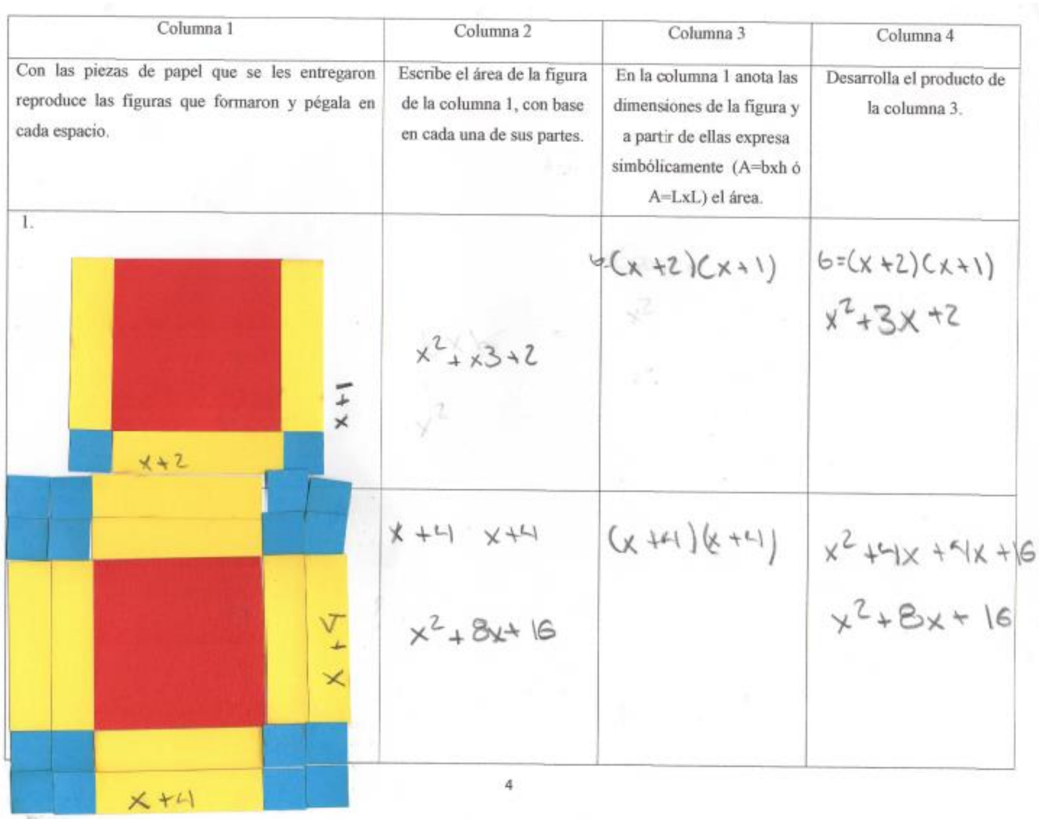
e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

Que con esta actividad podemos factorisar una figura y como se moltiplica para sacar so area

Figura 21

- **Estudiante 2**

Con respecto E2, se puede observar (figura 22) que es capaz de componer figuras determinadas y expresar el área en forma de expresión algebraica cuadrática y también representarlo en forma de producto y anota la medida de los lados para lograrlo, además desarrolla el producto de los binomios correctamente.

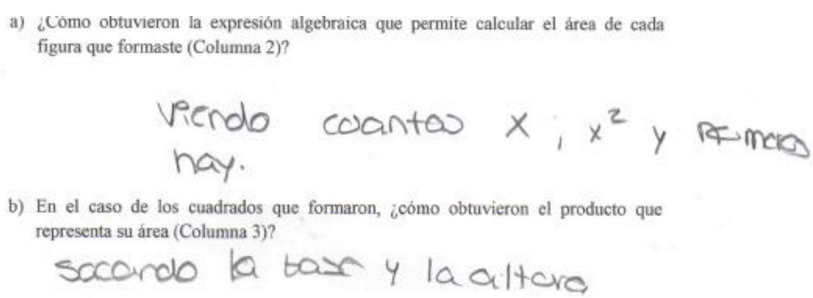


Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
Con las piezas de papel que se les entregaron reproduce las figuras que formaron y pégala en cada espacio.	Escribe el área de la figura de la columna 1, con base en cada una de sus partes.	En la columna 1 anota las dimensiones de la figura y a partir de ellas expresa simbólicamente (A=bxh ó A=LxL) el área.	Desarrolla el producto de la columna 3.
1.	$x^2 + x3 + 2$	$4=(x+2)(x+1)$	$6=(x+2)(x+1)$ x^2+3x+2
	$x+4 \quad x+4$ $x^2+8x+16$	$(x+4)(x+4)$	$x^2+4x+4x+16$ $x^2+8x+16$

4

Figura 22

En la figura 23, podemos observar que justifica cómo obtiene tanto la expresión algebraica cuadrática que representa el área y también en forma de producto.



a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

Viendo cuantas x, x^2 y números hay.

b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

sacando la base y la altura

Figura 23

Identifica que son equivalentes la expresión algebraica cuadrática, pero su justificación no muestra que identifique que se trate de la misma área. Además sus conclusiones no reflejan evidencia de la reflexión de las actividades (figura 24).

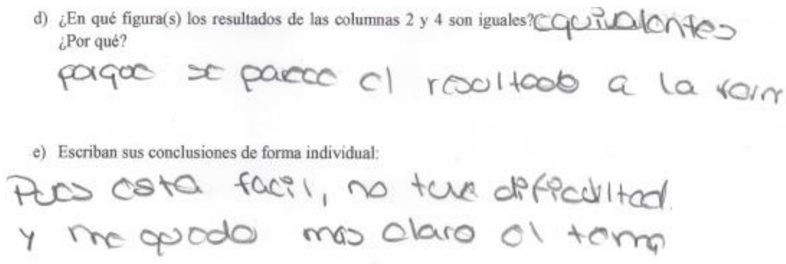


Figura 24

- **Estudiante 3**

Podemos observar que E3 forma cuadrados y rectángulos compuestos con figuras, identifica la expresión cuadrática y el producto que representa el área (figura 25).

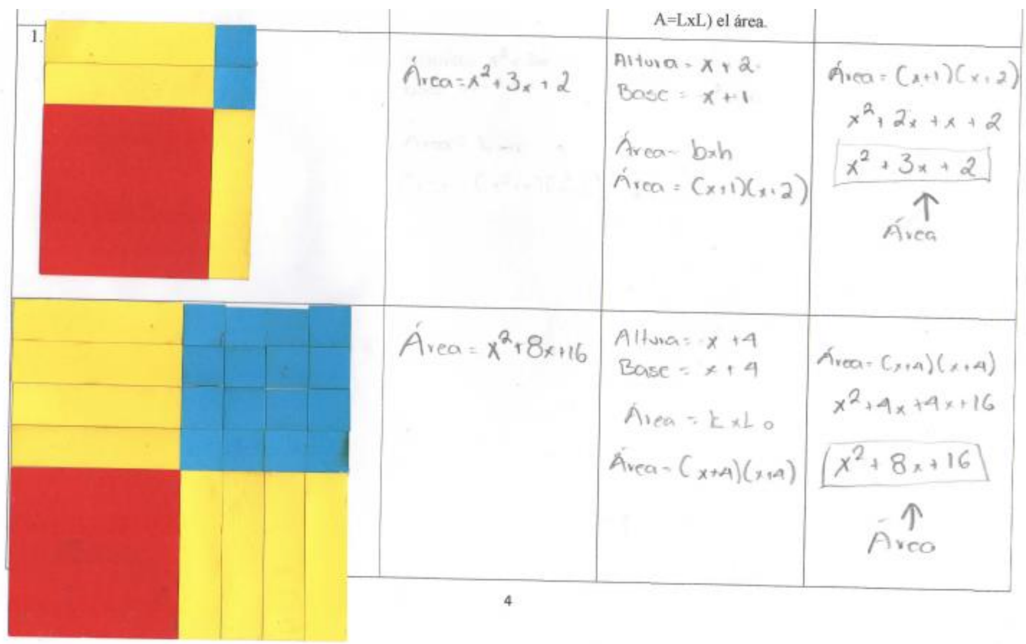
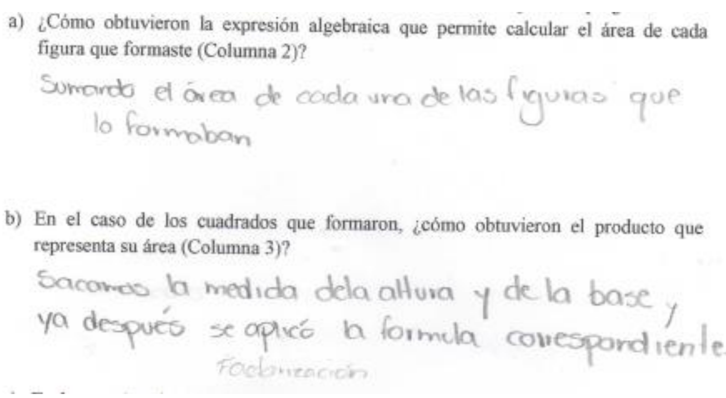


Figura 25

Además, sus justificaciones muestran que coordina la descomposición de figuras con la expresión algebraica cuadrática para formar el proceso de identidad matemática (figura 26).


a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

Sumando el área de cada una de las figuras que lo formaban

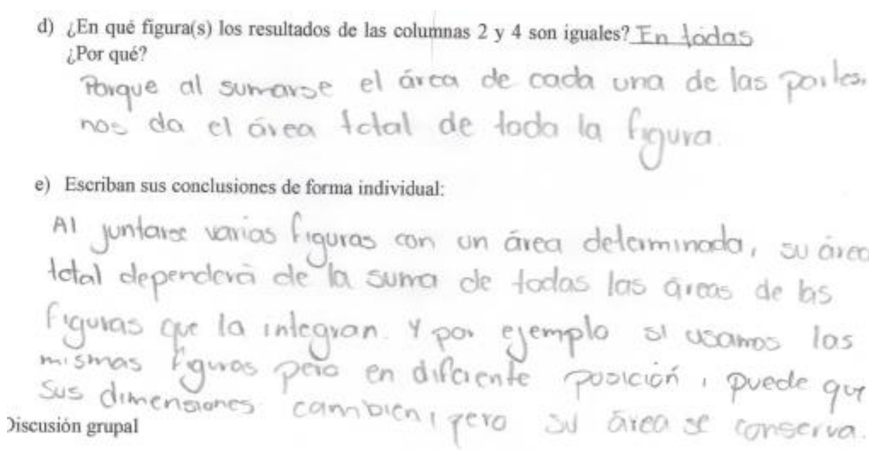
b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Sacamos la medida dela altura y de la base y ya después se aplicó la formula correspondiente.

Factorización

Figura 26

Se puede observar en la figura 27, que identifica que la figura compuesta, la expresión algebraica cuadrática y el área en forma de producto es una identidad matemática, es decir, representan lo mismo.


d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales? En todas
¿Por qué?

Porque al sumarse el área de cada una de las partes, nos da el área total de toda la figura.

e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

Al juntarse varias figuras con un área determinada, su área total dependerá de la suma de todas las áreas de las figuras que la integran. Y por ejemplo si usamos las mismas figuras pero en diferente posición, puede que sus dimensiones cambien, pero su área se conserva.

Discusión grupal

Figura 27

Estudiante E4

En este caso se puede observar que la estudiante E4, muestra que coordina el proceso de área como producto algebraico con el proceso de descomposición de figuras geométricas como se muestra en la figura 28.

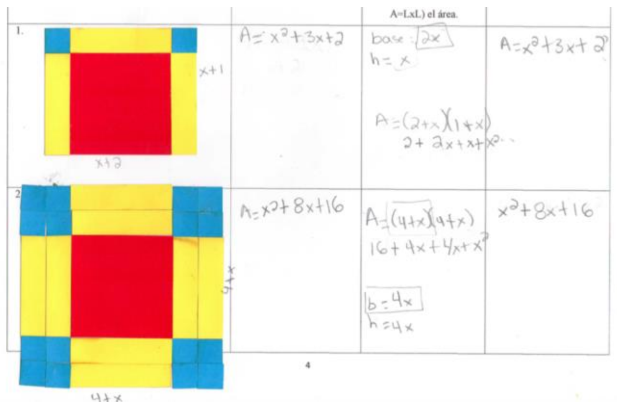
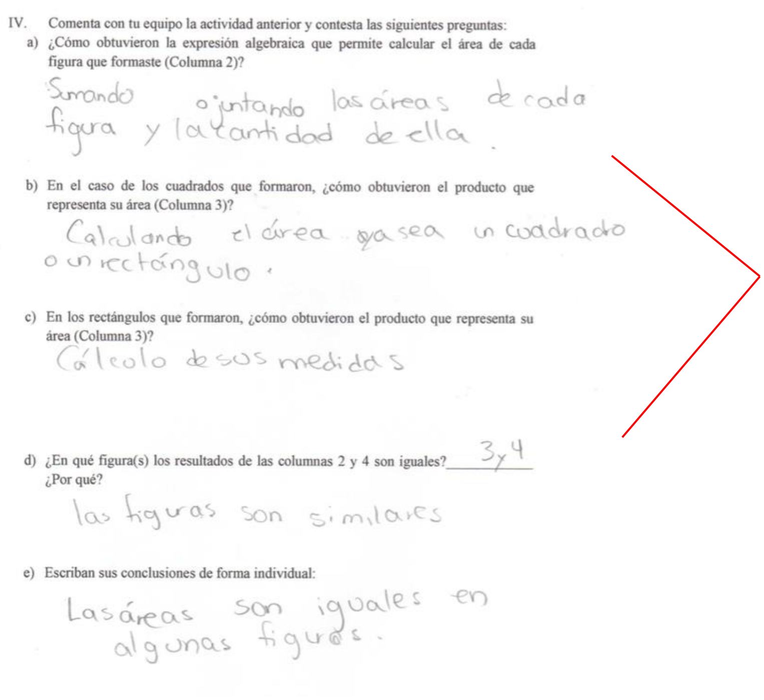


Figura 28

También podemos observar que, a pesar de escribir correctamente los lados de las figuras, al momento de escribir la base y la altura suma ambos valores, por ejemplo: $x+2 = 2x$, al parecer no percibe el lado como $x+2$, lo cual muestra que presenta dificultades con las operaciones algebraicas.

Por otra parte se puede observar en la figura 29, que en las respuestas que da en el ejercicio 4 de la actividad 1, E4 no percibe que en todas las figuras los resultados de la columna 2 y 4 son iguales, incluso describe que en algunos casos son iguales porque en algunos casos son similares las figuras, partimos del supuesto que se refiere a que se trata de rectángulos. Esto muestra que E4 no percibe la coordinación entre la composición de figuras geométricas y el área como producto algebraico.


IV. Comenta con tu equipo la actividad anterior y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

Sumando o juntando las áreas de cada figura y la cantidad de ella.

b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Calculando el área ya sea un cuadrado o un rectángulo.

c) En los rectángulos que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Cálculo de sus medidas

d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales? 3 y 4

¿Por qué?

las figuras son similares

e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

Las áreas son iguales en algunas figuras.

En este caso observamos que no hay coordinación entre la composición de figuras y el proceso de área como producto algebraico.

Figura 29

Estudiante E5

En el caso del estudiante E5, se puede observar en sus respuestas que coordina el proceso de composición de figuras geométricas con el proceso de área como producto algebraico (figura 30).

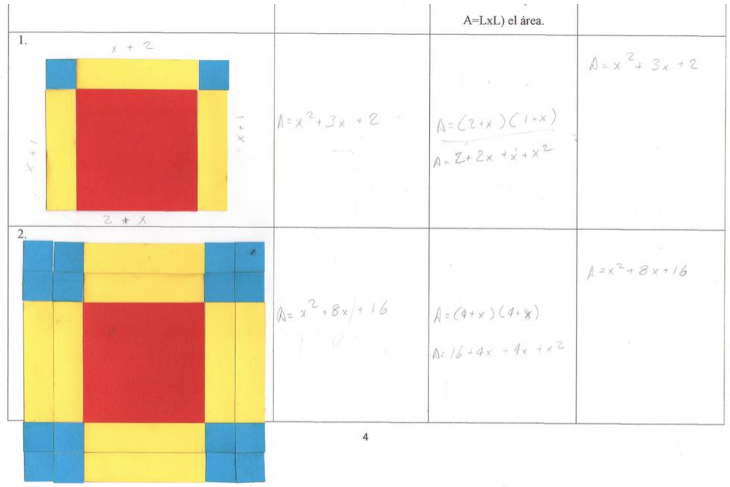
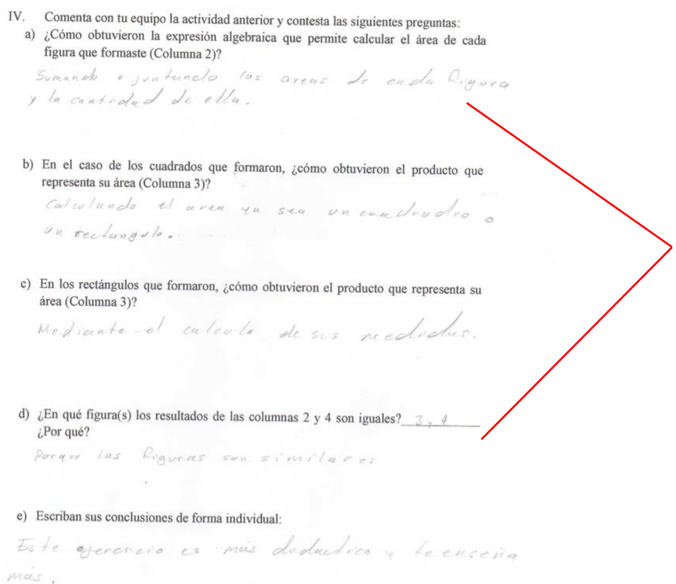


Figura 30

E5 responde las preguntas propuestas en el inciso 4, de la siguiente manera:



IV. Comenta con tu equipo la actividad anterior y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

Sumando o juntando las areas de cada figura y la cantidad de ella.

b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Calculando el area ya sea un cuadrado o un rectangulo.

c) En los rectángulos que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

Mediante el calculo de sus medidas.

d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales? 3, 4
¿Por qué?

Porque las figuras son similares

e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

Este ejercicio es más didactico y te enseña más.

En este caso, al igual que la estudiante E4, se puede observar que no hay coordinación entre la composición de figuras y el proceso de área como producto algebraico. Cabe mencionar que E4 y E5 trabajaron en el mismo equipo, y tal vez por ello tienen el mismo tipo de respuesta.

Figura 31

6.1.3 Construcción proceso y objeto de ecuación cuadrática

En este apartado se presentan las evidencias que se obtuvieron de la aplicación del ejercicio V correspondiente a la actividad 1.

El objetivo de este ejercicio es coordinar los procesos de área como producto de una figura geométrica, el proceso de expresión algebraica cuadrática y el proceso de ecuación para generar el proceso de ecuación cuadrática.

Estudiante 1

En este caso el estudiante E1, realizó correctamente lo que se le pide en cada uno de los incisos que se le proponen, por ejemplo en la figura 32, se puede observar que E1, realizó la coordinación entre el proceso de ecuación y el proceso de área como producto algebraico pero no lo coordina con el proceso de expresión algebraica. Esto debido a que establece la ecuación pero realiza los cálculos intuitivamente, es decir, representa el área en forma de producto y logra obtener el valor de x, justificando que por lógica lo encontró (figura 33), pero se puede observar que hizo uso de la fórmula $A=bxh$.

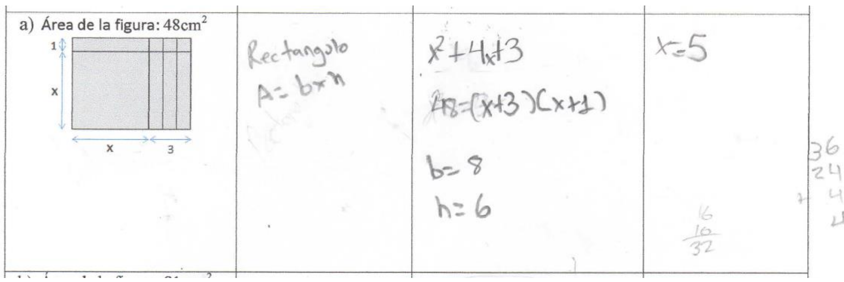
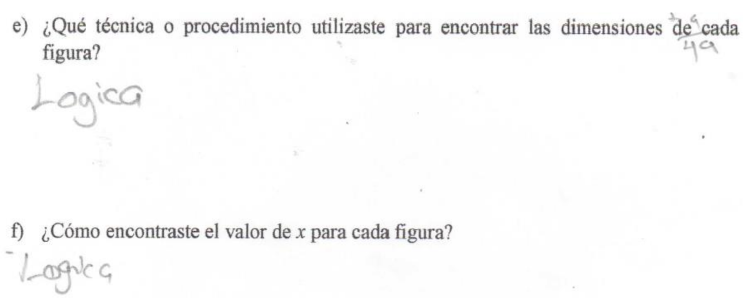


Figura 32


e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

Logica

f) ¿Cómo encontraste el valor de *x* para cada figura?

Logica

Figura 33

Estudiante 2

En este caso, E2 realizó correctamente lo que se le pide en cada uno de los incisos que se le proponen, por ejemplo en la figura 34 se puede observar que E2, realizó la coordinación entre el proceso de ecuación y el proceso de área como producto algebraico pero no lo coordina con el proceso de expresión algebraica. Esto debido a que establece la ecuación pero realiza los cálculos intuitivamente, es decir, representa el área en forma de producto y logra obtener el valor de x utilizando la fórmula $A=bxh$, lo cual se refleja en la figura 35 cuando justifica cómo encontró el valor de x.

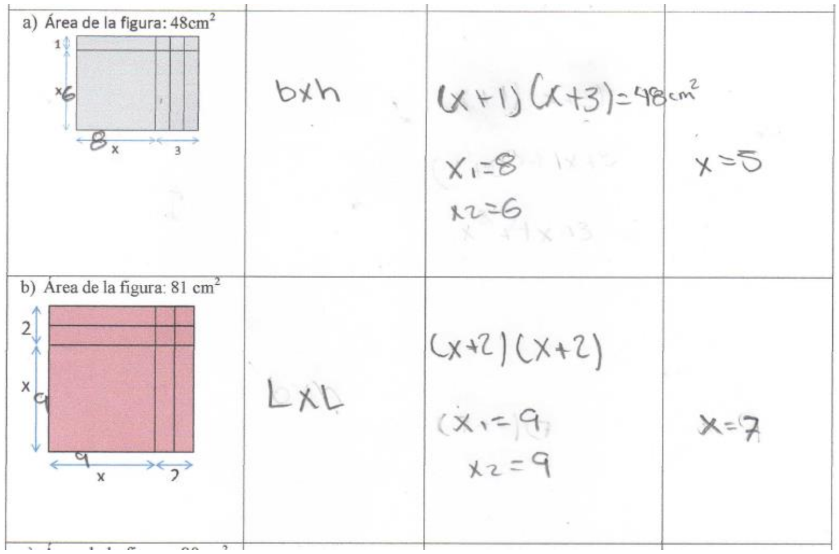


Figura 34

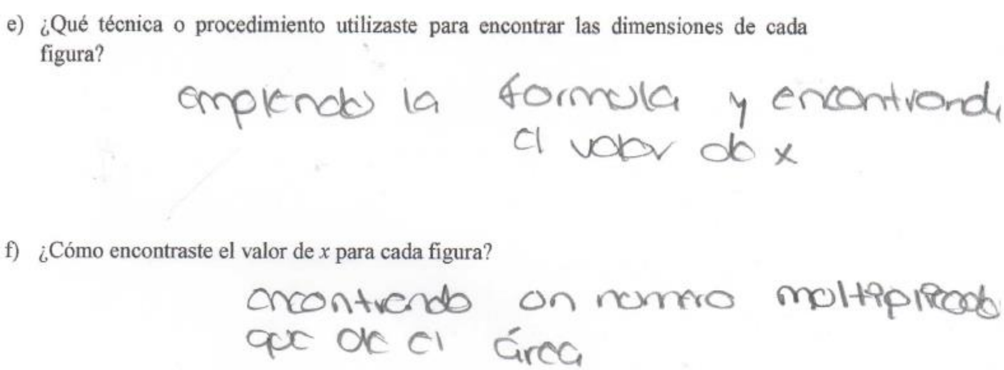


Figura 35

Estudiante 3

En este caso E3, si muestra la coordinación entre el proceso de área como producto de una figura geométrica, el proceso de expresión algebraica cuadrática y el proceso de ecuación, lo cual permitirá generar el proceso de ecuación cuadrática. Lo cual se refleja en la figura 36, en donde se puede observar que E3 expresa el área de la figura geométrica como producto, desarrolla dicho producto para obtener una expresión algebraica cuadrática y por último encuentra el valor que satisface la ecuación cuadrática propuesta.

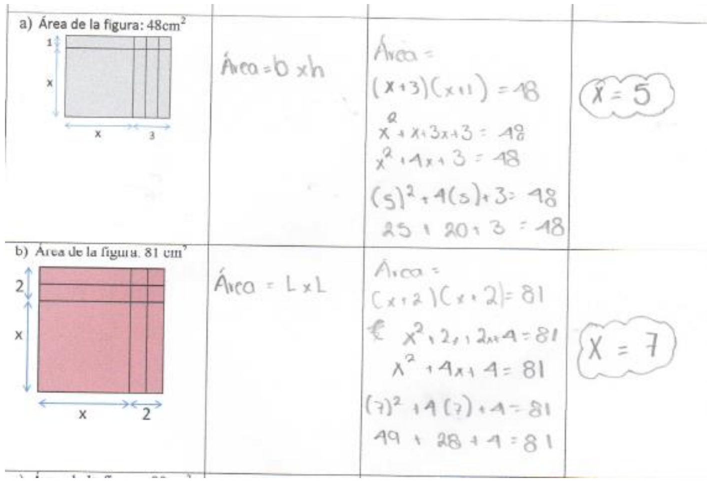
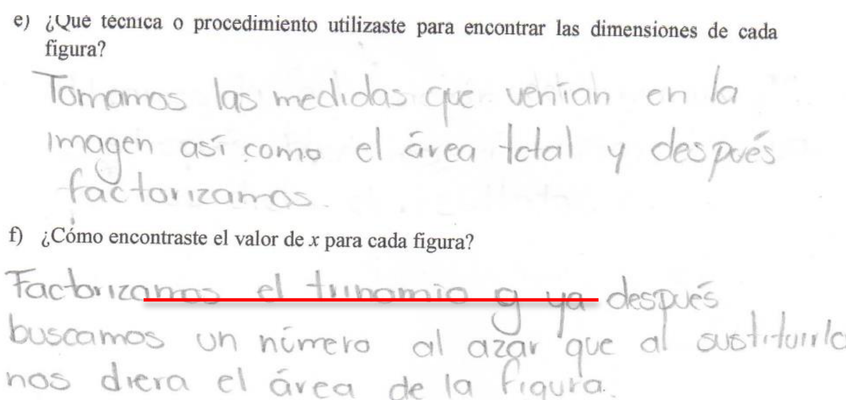


Figura 36

Con respecto a la respuesta que da a las preguntas que se proponen después del ejercicio, E3 responde lo siguiente (figura 37):



e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

Tomamos las medidas que venían en la imagen así como el área total y después factorizamos.

f) ¿Cómo encontraste el valor de *x* para cada figura?

Factorizamos el trinomio y ya después buscamos un número al azar que al sustituirlo nos diera el área de la figura.

Figura 37

Se puede percibir que E3, ha confundido la palabra “factorizar” es decir para E3 “factorizar el trinomio” se refiere a desarrollar el producto del binomio.

Estudiante E4

En este caso E4, muestra la coordinación entre el proceso de área como producto de una figura geométrica y el proceso de expresión algebraica cuadrática, pero no muestra la coordinación con el proceso de ecuación, lo cual se refleja en la figura 38.

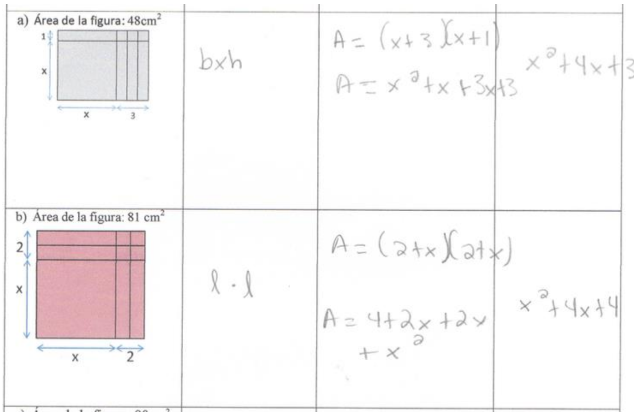
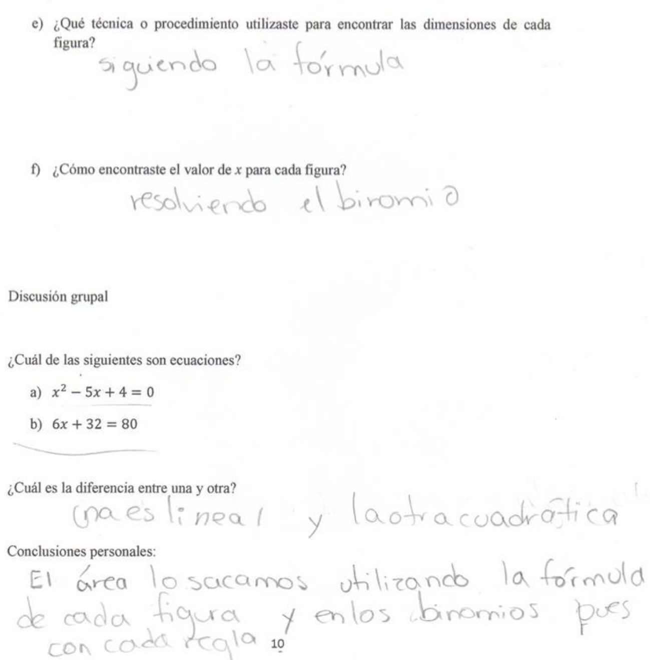


Figura 38

Se puede observar que E4 expresa el área de la figura geométrica como el producto de la base x altura (inciso a) y desarrolla dicho producto para obtener una expresión algebraica cuadrática. Sin embargo, no puede dar el valor de *x*.

Posteriormente responde las siguientes preguntas:



e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

siguiendo la fórmula

f) ¿Cómo encontraste el valor de *x* para cada figura?

resolviendo el binomio 2

Discusión grupal

¿Cuál de las siguientes son ecuaciones?

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $6x + 32 = 80$

¿Cuál es la diferencia entre una y otra?

una es lineal y la otra cuadrática

Conclusiones personales:

El área lo sacamos utilizando la fórmula de cada figura y en los binomios pues con cada regla

10

Figura 39

En sus respuestas E4 muestra que utilizó la fórmula del área para hallar el producto, sin embargo, dado que no coordina el proceso de ecuación no puede encontrar el valor de *x*, y describe que resolvió el binomio lo cual le produjo la expresión algebraica cuadrática y no el valor de *x*. También se puede observar que distingue una ecuación lineal de una cuadrática, pero no puede resolver la ecuación.

Estudiante E5

En este caso E5, muestra la coordinación entre el proceso de área como producto de una figura geométrica y el proceso de expresión algebraica cuadrática, pero no muestra la coordinación con el proceso de ecuación, lo cual se refleja en la figura 40.

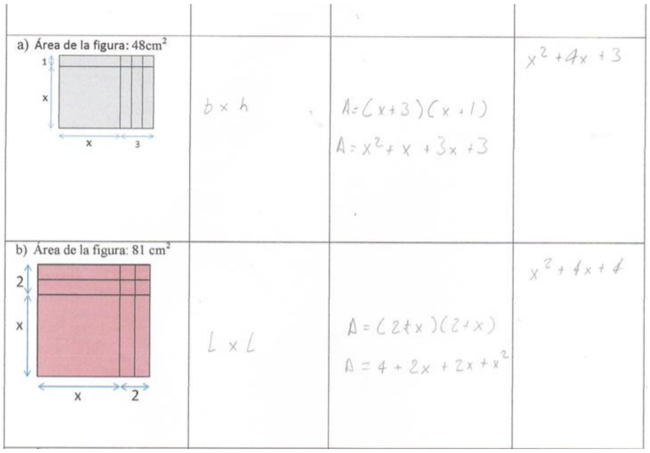
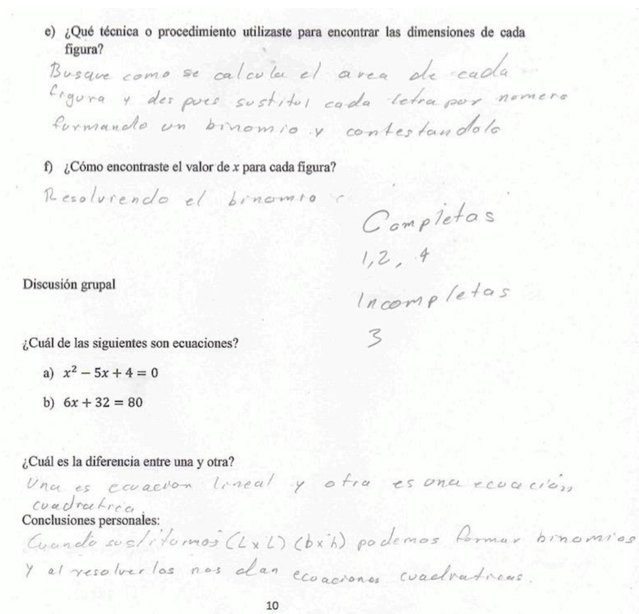


Figura 40

Se puede observar que E5 expresa el área de la figura geométrica como el producto de la base x altura (inciso a) y desarrolla dicho producto para obtener una expresión algebraica cuadrática. Sin embargo, no puede dar el valor de *x*.

Posteriormente E5, responde lo siguiente:


e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

Busque como se calcula el area de cada figura y despues sustitui cada letra por numero formando un binomio y contestandolo

f) ¿Cómo encontraste el valor de x para cada figura?

Resolviendo el binomio

Discusión grupal

Completas 1, 2, 4

Incompletas 3

¿Cuál de las siguientes son ecuaciones?

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $6x + 32 = 80$

¿Cuál es la diferencia entre una y otra?

Una es ecuacion lineal y otra es una ecuación cuadratica

Conclusiones personales:

Cuando sustitumos (L×L) (b×h) podemos formar binomios y al resolverlos nos dan ecuaciones cuadraticas.

10

Figura 41

En sus respuestas E5 muestra que utilizó la fórmula del área para hallar el producto, sin embargo, dado que no coordina el proceso de ecuación no puede encontrar el valor de *x*, y describe que resolvió el binomio lo cual le produjo la expresión algebraica cuadrática y no el valor de *x*. También se puede observar que distingue una ecuación lineal de una cuadrática, pero no puede resolver la ecuación.

Se puede observar que E5, refleja los mismos procedimientos que E4, pues no reflejan la coordinación del proceso de ecuación.

6.1.4 Construcción proceso de la solución de una ecuación cuadrática

6.1.4.1 Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$ (Actividad2)

Estudiante E1

En este caso E1, responde la actividad 2 e identifica correctamente las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$, que son ecuaciones incompletas.

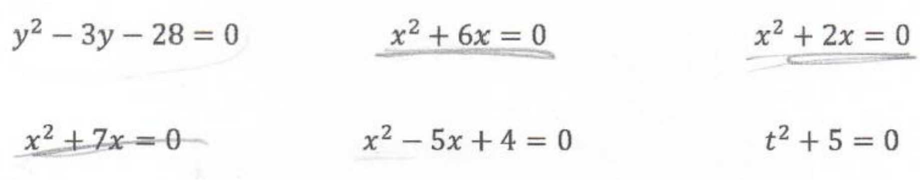


Figura 42

Posteriormente logra representar la ecuación $x^2 + 7x = 0$ geométricamente e identificar el valor de su base y altura, para después representarlos el área en forma de producto (factorización) para poder encontrar las soluciones de la ecuación (figura 43).

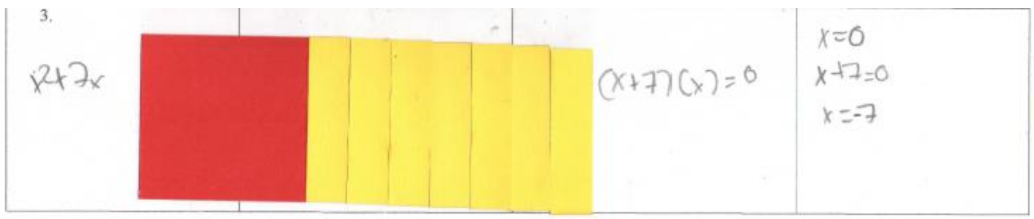


Figura 43

Posteriormente para que haya una reflexión del estudiante de lo que realizó en la actividad anterior se les pregunta cómo obtuvieron el valor de *x*, podemos observaren la figura 44, que justifica que como una ecuación lineal, y con la pregunta del inciso (b), podemos observar que identificó que una ecuación cuadrática puede llegar a tener dos soluciones.

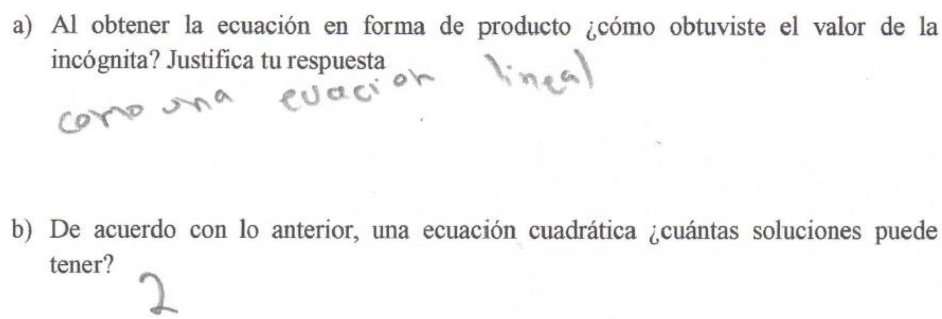


Figura 44

Estudiante E2

En esta construcción la E2 logra representar la ecuación en forma geométrica y también representa el área en forma de producto, para finalmente obtener correctamente las soluciones de la ecuación.

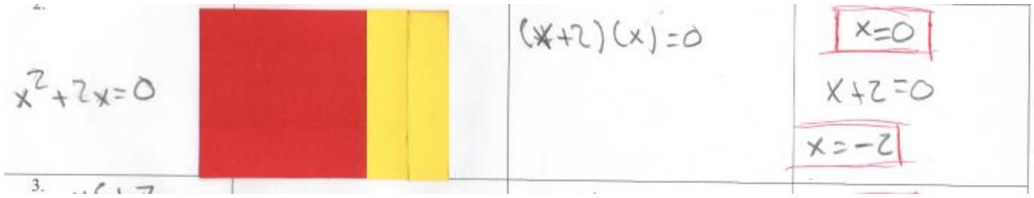
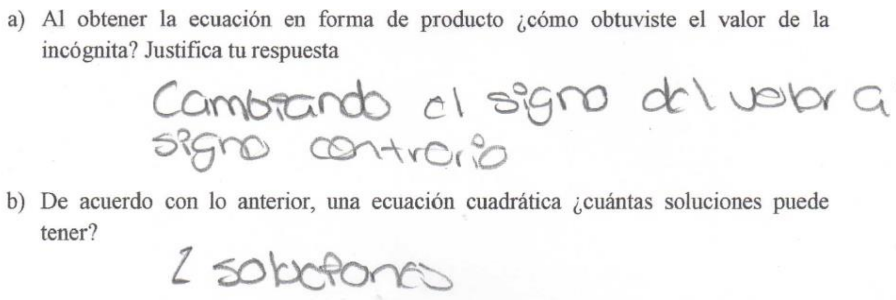


Figura 45

Sus justificaciones aluden a que cambia el signo al contrario, y reconoce que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones (figura 46).



a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

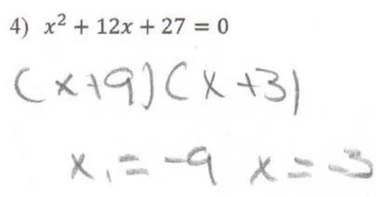
Cambiando el signo del valor al signo contrario

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

2 soluciones

Figura 46

Dentro del ciclo de enseñanza en la E2 podemos observar en la figura 47, que logra factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, obteniendo correctamente las dos raíces de la ecuación cuadrática correctamente.



4) $x^2 + 12x + 27 = 0$

$(x+9)(x+3)$

$x_1=-9 \quad x=-3$

Figura 47

Estudiante E3

En el caso del estudiante E3 responde los ejercicios de la actividad 2 como se muestra en la figura 48.

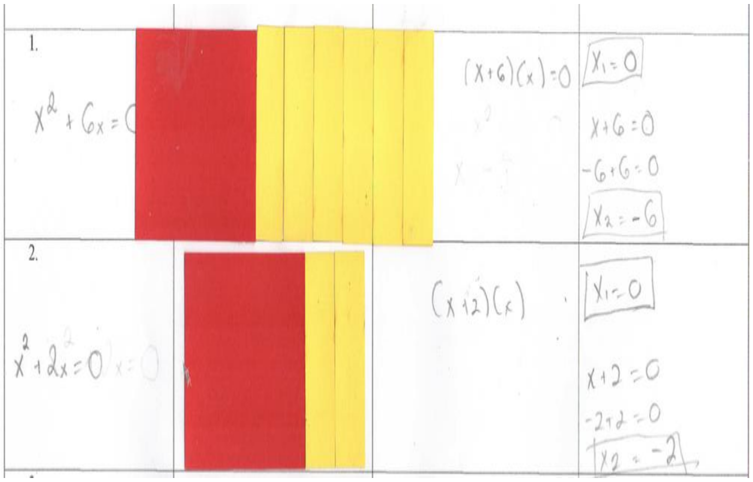
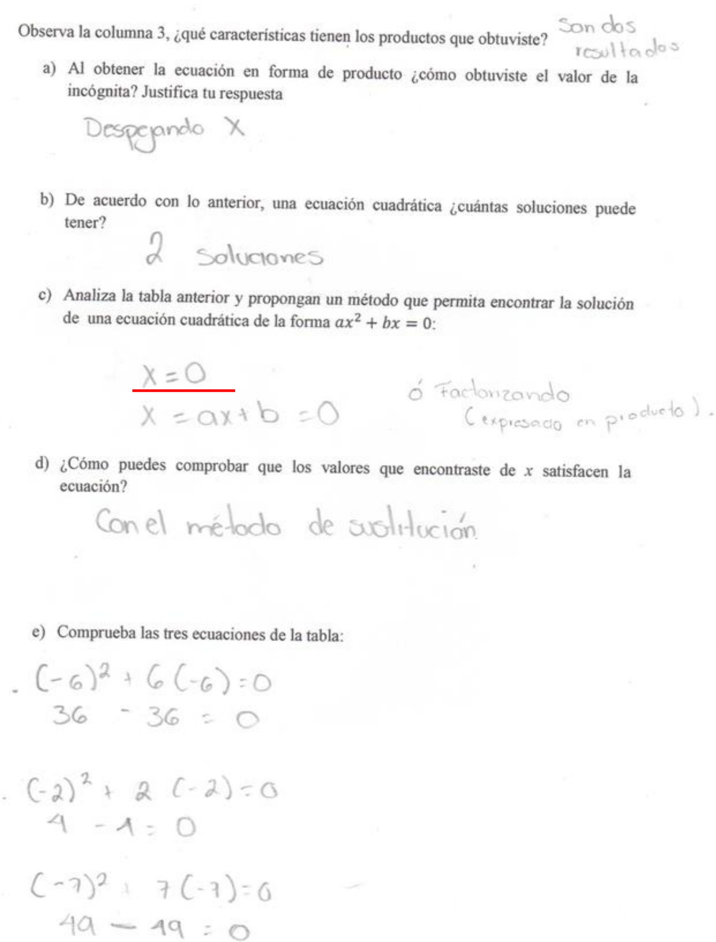


Figura 48

Se puede observar que E3, coordina los procesos de ecuación cuadrática, factorización y ecuaciones equivalentes al expresar el área como producto de la figura geométrica y posteriormente dar los valores de la ecuación cuadrática.

Posteriormente E3, responde lo siguiente:



Observa la columna 3, ¿qué características tienen los productos que obtuviste? Son dos resultados

a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

Despejando X

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

2 Soluciones

c) Analiza la tabla anterior y propongan un método que permita encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$:

$x = 0$

$x = ax + b = 0$ ó Factorizando (expresado en producto).

d) ¿Cómo puedes comprobar que los valores que encontraste de x satisfacen la ecuación?

Con el método de sustitución

e) Comprueba las tres ecuaciones de la tabla:

$(-6)^2 + 6(-6) = 0$
$36 - 36 = 0$

$(-2)^2 + 2(-2) = 0$
$4 - 4 = 0$

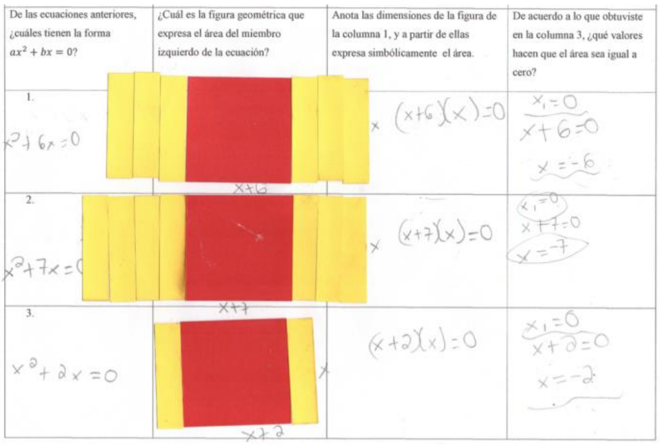
$(-7)^2 + 7(-7) = 0$
$49 - 49 = 0$

Figura 49

En las respuestas de E3, se refleja que ha construido el proceso de solución de una ecuación cuadrática, las respuestas reflejan la coordinación de los procesos de ecuación cuadrática, ecuaciones equivalentes y factorización. Se puede observar que E3 describe que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones, y describe que las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ tendrán una solución $x=0$.

Estudiante E4

En este caso podemos observar que E4 realizó cada uno de los ejercicios propuestos en la actividad 2, como se muestra en la figura 50.

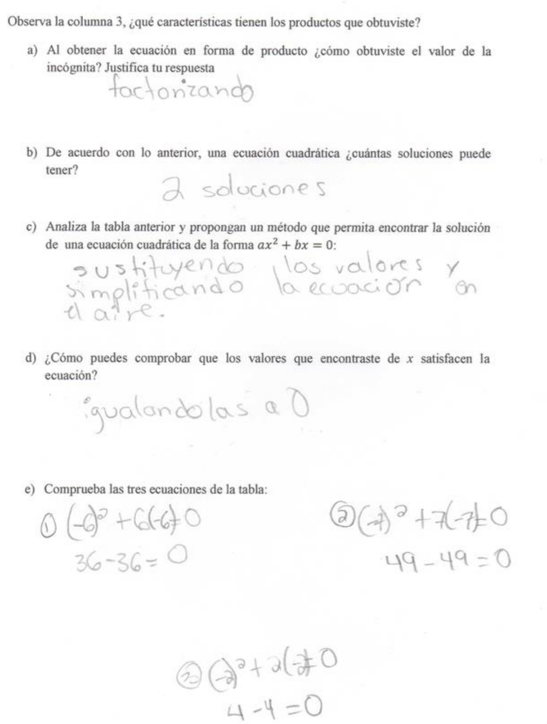


De las ecuaciones anteriores, ¿cuáles tienen la forma $ax^2 + bx = 0$?	¿Cuál es la figura geométrica que expresa el área del miembro izquierdo de la ecuación?	Anota las dimensiones de la figura de la columna 1, y a partir de ellas expresa simbólicamente el área.	De acuerdo a lo que obtuviste en la columna 3, ¿qué valores hacen que el área sea igual a cero?
1. $x^2+6x=0$	x+6	x $(x+6)(x)=0$	$x_1=0$ $x+6=0$ $x=-6$
2. $x^2+7x=0$	x+7	x $(x+7)(x)=0$	$x_1=0$ $x+7=0$ $x=-7$
3. $x^2+2x=0$	x+2	$(x+2)(x)=0$	$x_1=0$ $x+2=0$ $x=-2$

Figura 50

Podemos observar que E4, coordina los procesos de ecuación cuadrática, factorización y ecuaciones equivalentes al expresar el área como producto de la figura geométrica y posteriormente dar los valores de la ecuación cuadrática.

Posteriormente E4 responde lo siguiente:



Observa la columna 3, ¿qué características tienen los productos que obtuviste?

a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

factorizando

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

2 soluciones

c) Analiza la tabla anterior y propongan un método que permita encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$:

sustituyendo los valores y simplificando la ecuación en el aire.

d) ¿Cómo puedes comprobar que los valores que encontraste de x satisfacen la ecuación?

igualandolas a 0

e) Comprueba las tres ecuaciones de la tabla:

① $(-6)^2+6(-6)=0$ $36-36=0$

② $(-7)^2+7(-7)=0$ $49-49=0$

③ $(-2)^2+2(-2)=0$ $4-4=0$

Figura 51

En las respuestas de E4, se refleja que ha construido el proceso de solución de una ecuación cuadrática, las respuestas reflejan la coordinación de los procesos de ecuación cuadrática, ecuaciones equivalentes y factorización. Se puede observar que E4 describe que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones, sin embargo, no describe que las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ tendrán una solución *x=0.*

Cabe mencionar que tampoco se le pidió al estudiante que describiera las características del tipo de solución que tienen ese tipo de ecuaciones.

Estudiante E5

En este caso podemos observar que E5 realizó cada uno de los ejercicios propuestos en la actividad 2, como se muestra en la figura 52.

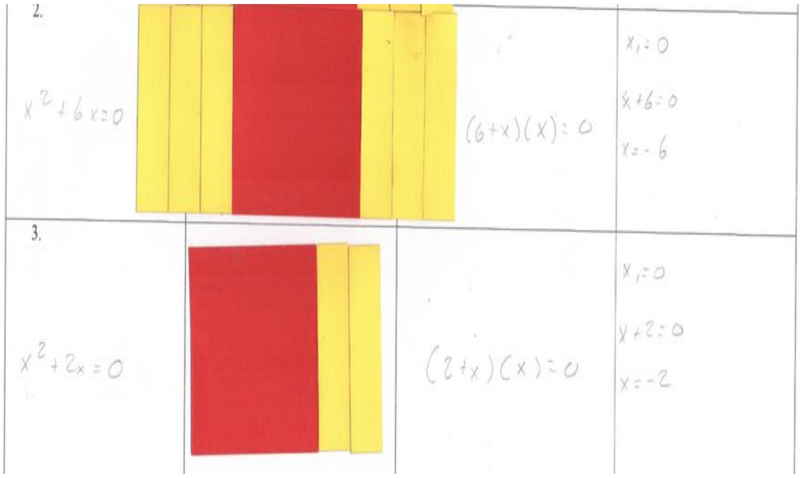


Figura 52

Se puede observar que E5, coordina los procesos de ecuación cuadrática, factorización y ecuaciones equivalentes al expresar el área como producto de la figura geométrica y posteriormente dar los valores de la ecuación cuadrática.

De acuerdo a ello, responde las siguientes preguntas:

Observa la columna 3, ¿qué características tienen los productos que obtuviste?

a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

Factorizando el binomio

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

2 soluciones

c) Analiza la tabla anterior y propongan un método que permita encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx=0$:

Primero tenemos que simplificar la ecuación origina por el are de la figura luego solucionar con $ax^2+bx=0$

d) ¿Cómo puedes comprobar que los valores que encontraste de x satisfacen la ecuación?

Resolviendo la misma pero con los valore de "x"

e) Comprueba las tres ecuaciones de la tabla:

① $(-7)^2+7(-7)=0$

$49-49=0$

② $(-6)^2+6(-6)=0$

$36-36=0$

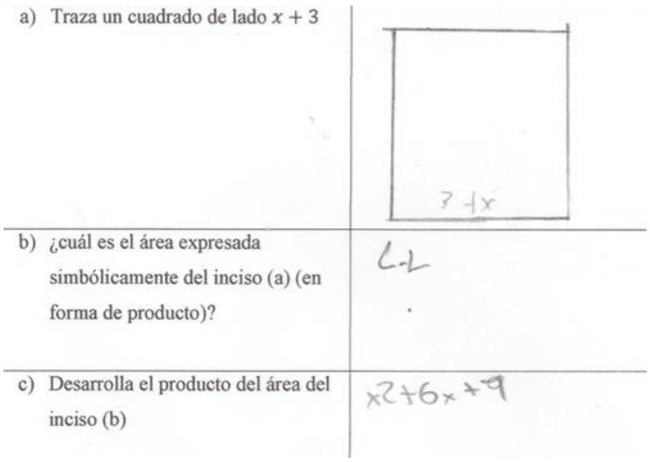
Figura 53

En sus respuestas, E5 refleja que ha construido el proceso de solución de una ecuación cuadrática, las respuestas reflejan la coordinación de los procesos de ecuación cuadrática, ecuaciones equivalentes y factorización. Se puede observar que E5 describe que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones, sin embargo, no describe que las ecuaciones del tipo $ax^2+bx=0$ tendrán una solución *x=0*.

6.1.4.2 Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ cuando es un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP) (Actividad 3)

Estudiante 1

En la actividad 3, se puede observar que cuando a E1 se le proporciona las dimensiones de una figura procede correctamente, pues identifica que se trata de un cuadrado y asigna adecuadamente las dimensiones, ya que le da *x+3* a cada lado y puede desarrollar el área como producto, como se muestra en la figura 54.


a) Traza un cuadrado de lado $x + 3$ — 3 +x

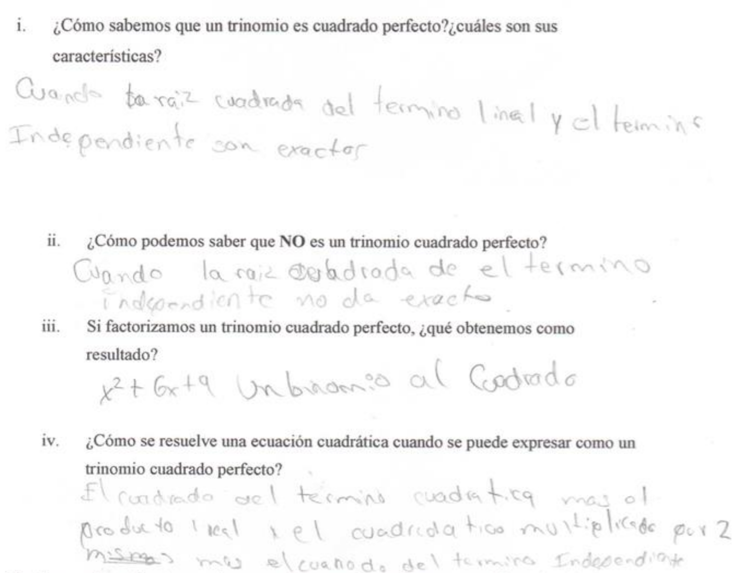
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)? — L·L

c) Desarrolla el producto del área del inciso (b) — x^2+6x+9

Con esta actividad, se puede observar que el estudiante ya no realiza acciones para realizar el área como producto, ya que escribe en el inciso (c) el TCP.

Figura 54

Posteriormente las preguntas las responde de la siguiente manera:


i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?

Cuando la raiz cuadrada del termino lineal y el termino Independiente son exactos

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto?

Cuando la raiz cuadrada de el termino independiente no da exacto

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado?

x^2+6x+9 Un binomio al Cuadrado

iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto?

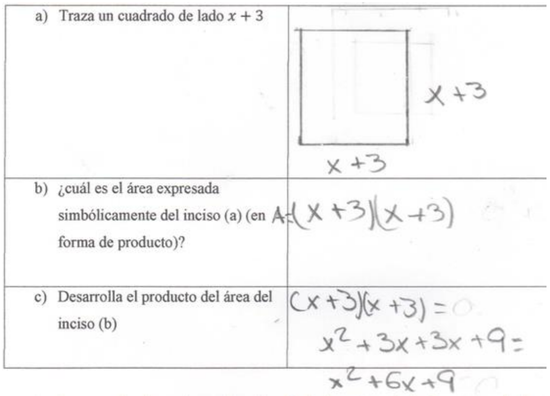
El cuadrado del termino cuadratico mas el producto lineal x el cuadratico multiplicado por 2 mismos mas el cuadrado del termino Independiente

En sus respuestas se puede observar que E1, reconoce las características de un TCP. Además también relaciona que al factorizar el TCP se obtiene un binomio al cuadrado.

Figura 55

Estudiante 2

En la actividad 3, se puede observar que cuando a E2 se le proporciona las dimensiones de una figura procede correctamente, pues identifica que se trata de un cuadrado y asigna adecuadamente las dimensiones, ya que le da *x+3* a cada lado y puede desarrollar el área como producto, como se muestra en la figura 56.

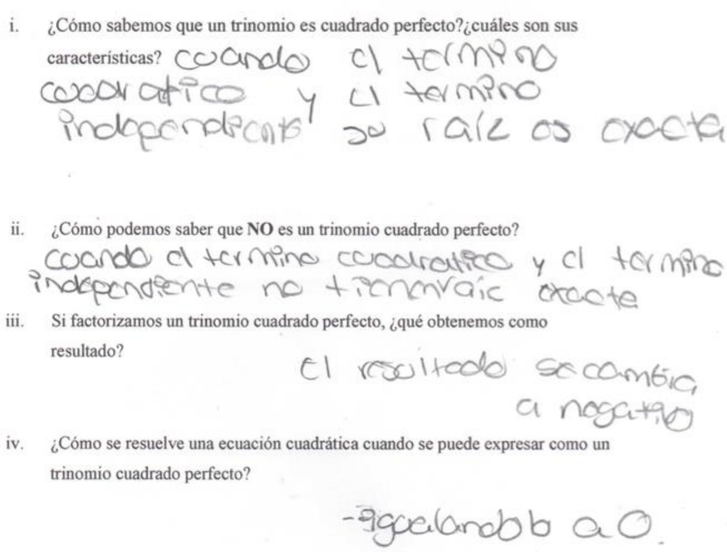


a) Traza un cuadrado de lado $x+3$	$x+3$ $x+3$
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	$A=(x+3)(x+3)$
c) Desarrolla el producto del área del inciso (b)	$(x+3)(x+3)=$ $x^2+3x+3x+9=$ x^2+6x+9

Figura 56

En este caso se puede observar que E2 propone el área como producto y posteriormente lo desarrolla.

De acuerdo a ello, responde las siguientes preguntas:



i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características? cuando el termino cuadratico y el termino independiente su raiz es exacta

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto? cuando el termino cuadratico y el termino independiente no tienen raiz exacta

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado? el resultado se cambia a negativo

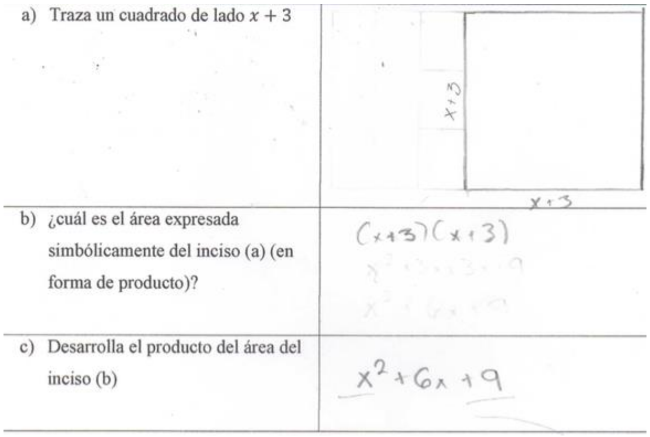
iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto? -igualando a 0.

Figura 57

En sus respuestas se puede observar que E2, reconoce las características de un TCP. En este caso E2 no percibe que al factorizar el TCP se obtiene un binomio al cuadrado.

Estudiante 3

En la actividad 3, se puede observar que cuando a E3 se le proporciona las dimensiones de una figura procede correctamente, pues identifica que se trata de un cuadrado y asigna adecuadamente las dimensiones, ya que le da *x+3* a cada lado y puede desarrollar el área como producto, como se muestra en la figura 58.

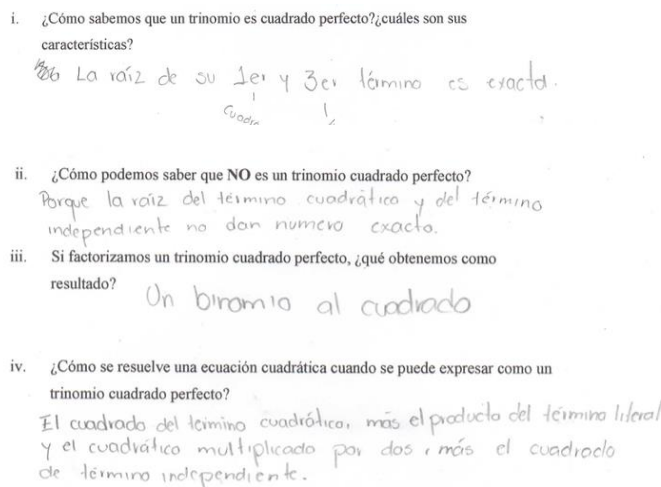


a) Traza un cuadrado de lado $x + 3$	$x+3$ / $x+3$
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	$(x+3)(x+3)$
c) Desarrolla el producto del área del inciso (b)	x^2+6x+9

Figura 58

En este caso se puede observar que E3 propone el área como producto y posteriormente lo desarrolla.

Luego se puede observar en sus respuestas a las preguntas planteadas que E3, reflexiona sobre la diferencia entre un TCP y uno que no lo es.



i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?

La raíz de su 1er y 3er término es exacta.

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto?

Porque la raíz del término cuadrático y del término independiente no dan numero exacto.

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado?

Un binomio al cuadrado

iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto?

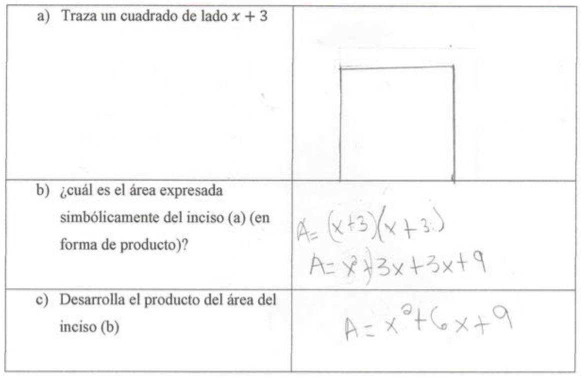
El cuadrado del término cuadrático, más el producto del término literal y el cuadrático multiplicado por dos, más el cuadrado de término independiente.

Figura 59

En sus respuestas se puede observar que E3, reconoce las características de un TCP. Además también relaciona que al factorizar el TCP se obtiene un binomio al cuadrado.

Estudiante 4

En la actividad 3, se puede observar que cuando a E4 se le proporciona las dimensiones de una figura procede correctamente, pues identifica que se trata de un cuadrado y asigna adecuadamente las dimensiones, ya que le da $x+3$ a cada lado y puede desarrollar el área como producto, como se muestra en la figura 60.

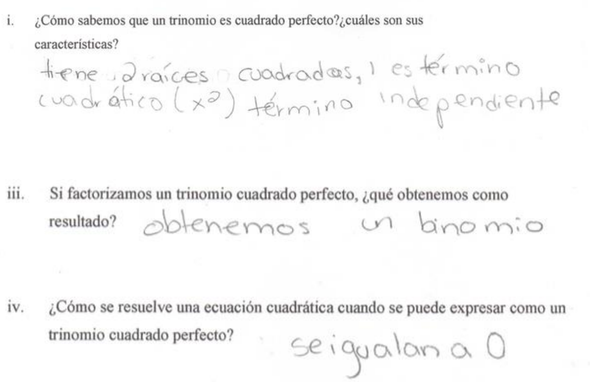


a) Traza un cuadrado de lado $x+3$	
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	$A=(x+3)(x+3)$ $A=x^2+3x+3x+9$
c) Desarrolla el producto del área del inciso (b)	$A=x^2+6x+9$

Figura 60

En este caso se puede observar que E4 propone el área como producto y posteriormente lo desarrolla.

Luego E4 responde los siguiente:



i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?
tiene 2 raíces cuadradas, 1 es término cuadrático (x^2) término independiente

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado? obtenemos un binomio

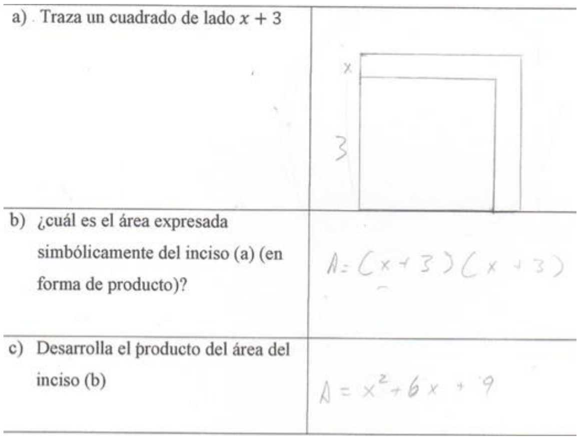
iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto? se igualan a 0

Figura 61

En este caso, se puede observar que E4 describe que las raíces son los términos independiente y cuadrático. Lo cual es incorrecto, pues las raíces son los valores que pueden satisfacer la ecuación. Sin embargo se puede observar que asocia la factorización con el binomio al cuadrado.

Estudiante 5

En la actividad 3, se puede observar que cuando a E5 se le proporciona las dimensiones de una figura procede correctamente, pues identifica que se trata de un cuadrado y asigna adecuadamente las dimensiones, ya que le da *x+3* a cada lado y puede desarrollar el área como producto, como se muestra en la figura 62.

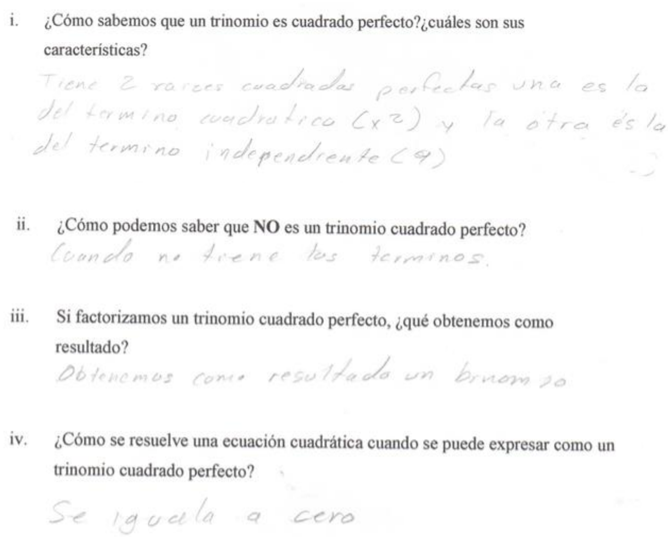


a) Traza un cuadrado de lado $x + 3$	x 3
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	$A = (x+3)(x+3)$
c) Desarrolla el producto del área del inciso (b)	$A = x^2 + 6x + 9$

Figura 62

En este caso se puede observar que E5 propone el área como producto y posteriormente lo desarrolla. Y también se puede observar que E5 es el único estudiante que realizó la figura aproximada de cómo se representa dicha figura.

Luego E5 responde lo siguiente:



i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?

Tiene 2 raices cuadradas perfectas una es la del termino cuadratico (x^2) y la otra es la del termino independiente (9)

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto?

Cuando no tiene los terminos.

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado?

Obtenemos como resultado un binomio

iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto?

Se iguala a cero

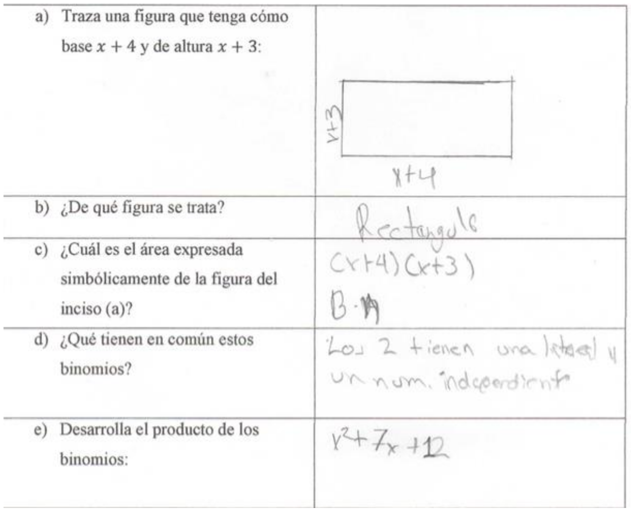
Figura 63

En sus respuestas se puede observar que E5, reconoce las características de un TCP. Además también relaciona que al factorizar el TCP se obtiene un binomio al cuadrado.

6.1.4.3 Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ cuando NO es un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP) (Actividad 4)

Estudiante 1

En este caso el estudiante E1 realiza lo que se le pide en la actividad 4 de la siguiente manera:

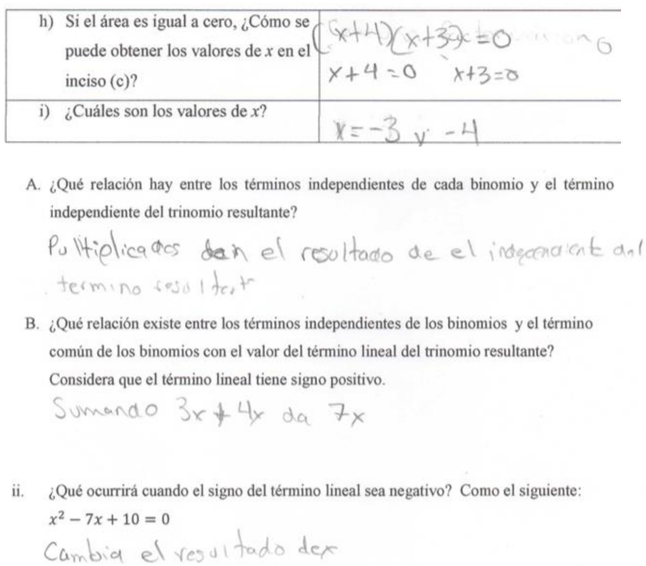


a) Traza una figura que tenga cómo base $x+4$ y de altura $x+3$:	x+3 x+4
b) ¿De qué figura se trata?	Rectángulo
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	(x+4)(x+3) B·h
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	Los 2 tienen una literal y un num. independiente
e) Desarrolla el producto de los binomios:	$x^2+7x+12$

Figura 64

Se puede observar que E1 interpreta los lados del rectángulo con las medidas que se le plantearon y realiza la representación geométrica. E1, puede representar el área como producto y de acuerdo a ello obtener el producto como expresión algebraica, sin embargo en su justificación, no identifica que ambos binomios tienen en común “*x*”.

Posteriormente en las preguntas, responde lo siguiente:



h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de x en el inciso (c)?	(x+4)(x+3)=0 x+4=0 x+3=0
i) ¿Cuáles son los valores de x?	x=-3 y -4

A. ¿Qué relación hay entre los términos independientes de cada binomio y el término independiente del trinomio resultante?

Multiplicados dan el resultado de el independiente del termino resultante

B. ¿Qué relación existe entre los términos independientes de los binomios y el término común de los binomios con el valor del término lineal del trinomio resultante? Considera que el término lineal tiene signo positivo.

Sumando 3x + 4x da 7x

ii. ¿Qué ocurrirá cuando el signo del término lineal sea negativo? Como el siguiente:
$x^2-7x+10=0$

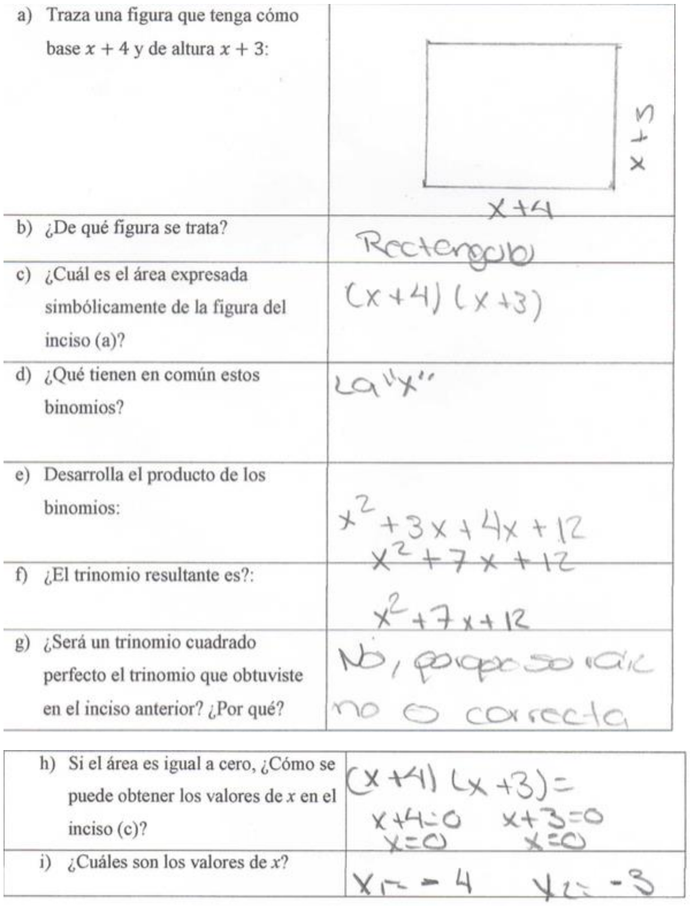
Cambia el resultado de x

Figura 65

Se puede observar que E1 obtiene los valores que satisfacen la ecuación cuadrática, lo cual muestra que tiene una concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática. Además se puede ver que E1 relaciona los binomios con la factorización, y a su vez reflexiona sobre la solución de la ecuación cuando el signo es diferente en el trinomio.

Estudiante 2

En el caso de la actividad 4, E2 responde cada una de las actividades solicitadas como se muestra en la figura 66:



a) Traza una figura que tenga cómo base $x + 4$ y de altura $x + 3$:	$x+3$ $x+4$
b) ¿De qué figura se trata?	Rectangulo
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	$(x+4)(x+3)$
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	La "x"
e) Desarrolla el producto de los binomios:	$x^2+3x+4x+12$ $x^2+7x+12$
f) ¿El trinomio resultante es?:	$x^2+7x+12$
g) ¿Será un trinomio cuadrado perfecto el trinomio que obtuviste en el inciso anterior? ¿Por qué?	No, porque su raíz no es correcta
h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de x en el inciso (c)?	$(x+4)(x+3)=$ $x+4=0 \quad x+3=0$ $x=0 \quad x=0$
i) ¿Cuáles son los valores de x?	$x_1=-4 \quad x_2=-3$

Figura 66

Se puede observar que E2 interpreta los lados del rectángulo con las medidas que se le plantearon, sin embargo no realiza la representación geométrica. E2, puede representar el área como producto y de acuerdo a ello obtener el producto como expresión algebraica. También se puede observar que proporciona la solución de la ecuación cuadrática.

Estudiante 3

Con respecto a la actividad 4, E3 responde lo siguiente:

a) Traza una figura que tenga cómo base $x + 4$ y de altura $x + 3$:	$x+3$ $x+4$
b) ¿De qué figura se trata?	Un rectángulo
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	$A = b \times h$
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	Los dos tienen una X
e) Desarrolla el producto de los binomios:	$X = (x+4)(x+3)$ $x^2+3x+4x+12$
f) ¿El trinomio resultante es?:	$x^2+7x+12$

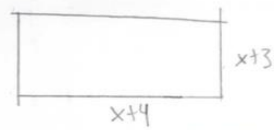
En este caso E3 interpreta los lados del rectángulo con las medidas que se le plantearon, sin embargo no realiza la representación geométrica. E3, puede representar el área como producto y de acuerdo a ello obtener el producto como expresión algebraica. También se puede observar que proporciona la solución de la ecuación cuadrática.

h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de x en el inciso (c)?	$(x+4)(x+3)=0$ Encontrando un número que al sumarle dé 0
i) ¿Cuáles son los valores de x?	$x_1=-4$ $x_2=-3$

Figura 67

Estudiante 4

En el caso de E4, responde la actividad 4 y describe que la figura geométrica es un rectángulo y propone el área como producto, como se muestra en la figura 68.

a) Traza una figura que tenga cómo base $x+4$ y de altura $x+3$:	
b) ¿De qué figura se trata?	rectángulo
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	$(x+4)(x+3)$
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	la misma literal
e) Desarrolla el producto de los binomios:	$x^2+\underbrace{3x+4x}_{7x}+12$
f) ¿El trinomio resultante es?:	$x^2+7x+12$
g) ¿Será un trinomio cuadrado perfecto el trinomio que obtuviste en el inciso anterior? ¿Por qué?	no, sus raíces no son exactas

h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de x en el inciso (c)?	binomio por binomio
i) ¿Cuáles son los valores de x?	-4 y -3

Con base en lo anterior contesta la siguiente tabla:

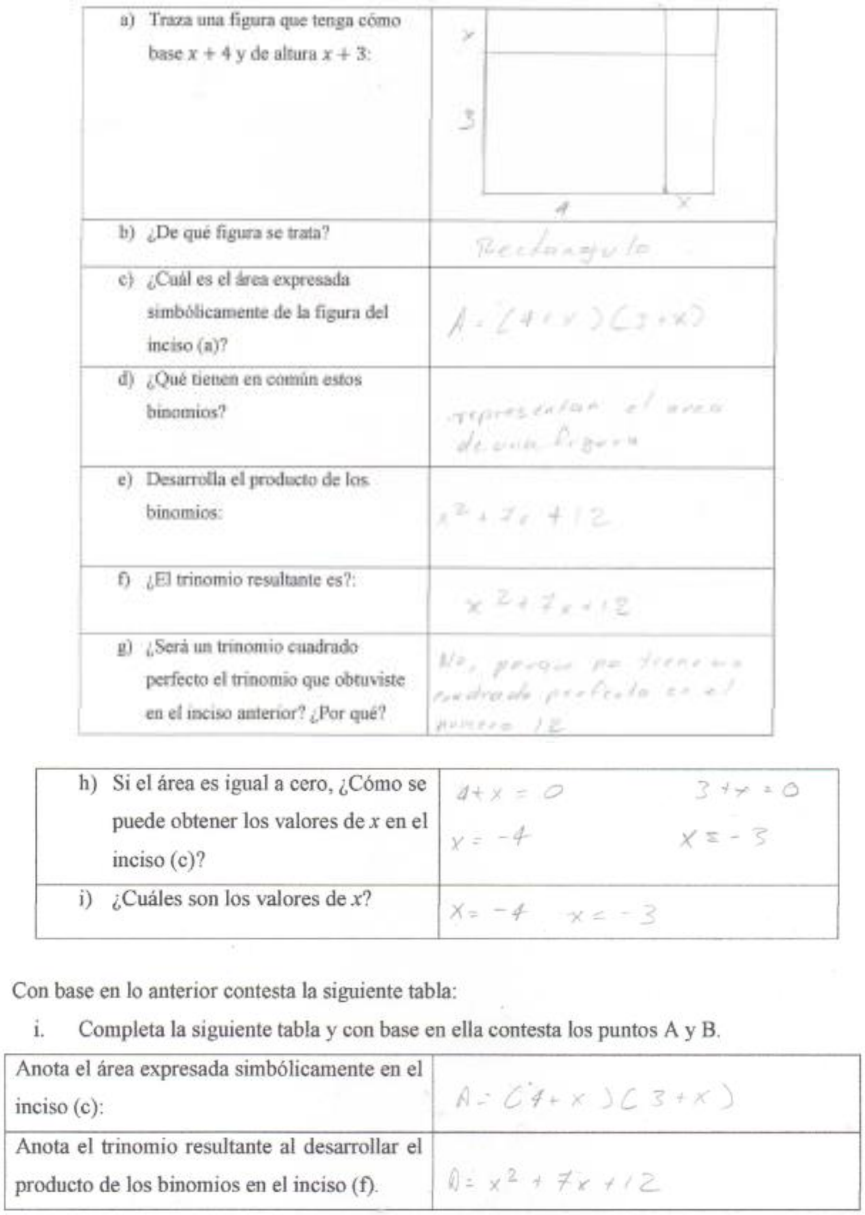
i. Completa la siguiente tabla y con base en ella contesta los puntos A y B.

Anota el área expresada simbólicamente en el inciso (c):	$(x+4)(x+3)$
Anota el trinomio resultante al desarrollar el producto de los binomios en el inciso (f).	$x^2+7x+12$

Figura 68

Estudiante 5

Por otro lado E5 traza correctamente la figura que se le pide, nuevamente haciendo uso adecuado de las dimensiones y al expresar simbólicamente el área toma como referencia la figura que formó y no las que se le dieron en el inciso a), podemos también observar que en el inciso d) comenta que los binomios tienen en común que representan el área de una figura, y lo que se esperaba es que identificara que la x, sin embargo, brinda las soluciones correctas para la ecuación cuadrática (figura 69).



a) Traza una figura que tenga cómo base $x + 4$ y de altura $x + 3$:	x 3 4 x
b) ¿De qué figura se trata?	Rectangulo
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	$A = (4+x)(3+x)$
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	representan el area de una figura
e) Desarrolla el producto de los binomios:	$x^2+7x+12$
f) ¿El trinomio resultante es?:	$x^2+7x+12$
g) ¿Será un trinomio cuadrado perfecto el trinomio que obtuviste en el inciso anterior? ¿Por qué?	No, porque no tiene un cuadrado perfecto en el numero 12

h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de x en el inciso (c)?	$4+x=0$ $x=-4$ $3+x=0$ $x=-3$
i) ¿Cuáles son los valores de x?	$x=-4$ $x=-3$

Con base en lo anterior contesta la siguiente tabla:

i. Completa la siguiente tabla y con base en ella contesta los puntos A y B.

Anota el área expresada simbólicamente en el inciso (c):	$A = (4+x)(3+x)$
Anota el trinomio resultante al desarrollar el producto de los binomios en el inciso (f).	$A = x^2+7x+12$

Figura 69

E4 describe que la figura geométrica es un rectángulo y propone el área como producto. Posteriormente desarrolla el producto y obtiene la expresión algebraica cuadrática, y asume que no es un TCP, también propone que los valores de la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$ son -4 y -3. Por tanto la evidencia que propone E4 muestra que tiene una concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática.

6.1.4.4 Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$ (Actividad 5)

Estudiante 1

En este caso E1, responde correctamente las actividades como se muestra en la figura 70, ya que describe que la “figura 1” se trata de un cuadrado e identifica que el cuadrado está formado por un cuadrado y dos trapecios, para posteriormente determinar las longitudes del rectángulo formado únicamente con los trapecios.

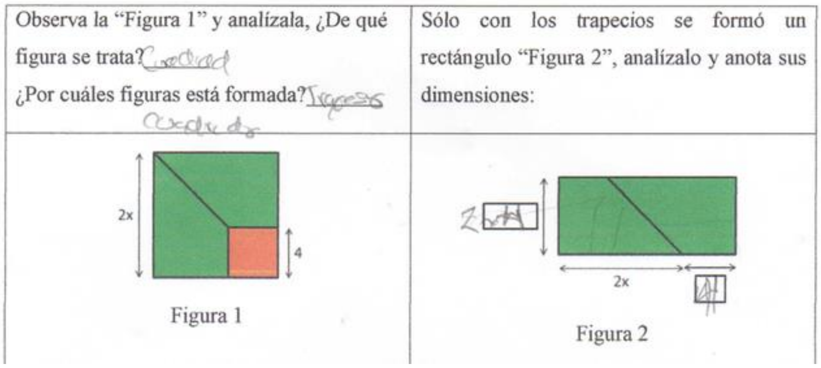


Figura 70

Posteriormente en las respuestas a las preguntas que se les plantea, responde lo siguiente:

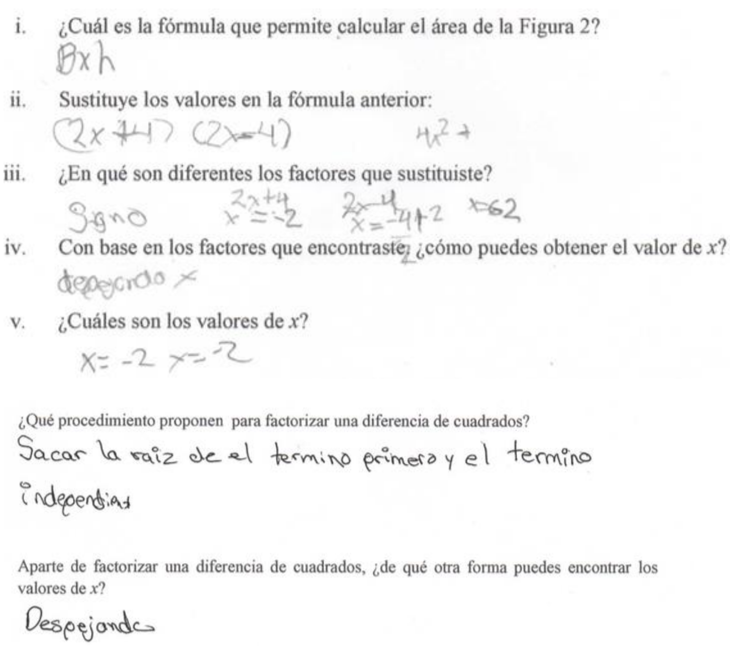
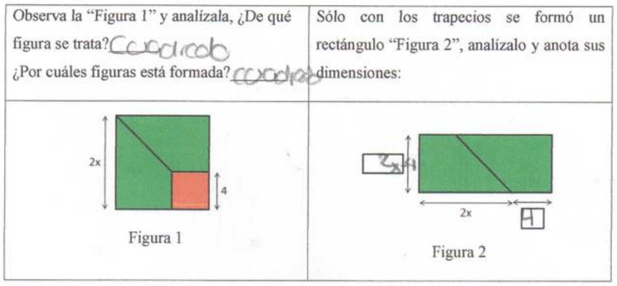


Figura 71

En las respuestas (figura 71) se puede observar que E1, reflexiona que lo que encontró es un binomio conjugado, y además relaciona que la solución la puede obtener al igualarlas a cero e igualar cada expresión del binomio.

Estudiante 2

A continuación en las figura 72 y 73 se presenta el desarrollo de lo que E2 realizó durante la actividad 4.

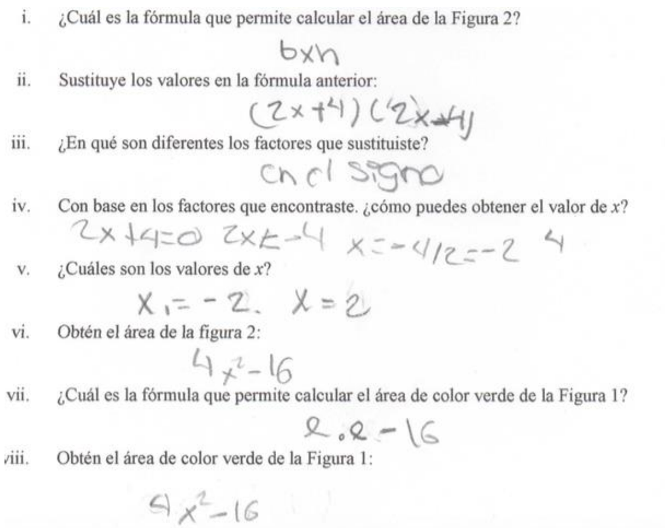

Observa la "Figura 1" y analízala, ¿De qué figura se trata? Cuadrado
¿Por cuáles figuras está formada? cuadrado

Sólo con los trapecios se formó un rectángulo "Figura 2", analízalo y anota sus dimensiones:

Figura 72

En este caso se puede observar que E2, describe que la "figura 1" es un cuadrado pero no describe que el cuadrado está formado por un cuadrado y dos trapecios.

Posterior a ello, responde lo siguiente:


i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?

bxh

ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:

(2x+4)(2x-4)

iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?

en el signo

iv. Con base en los factores que encontraste. ¿cómo puedes obtener el valor de *x*?

2x+4=0 2x=-4 x=-4/2=-2 4

v. ¿Cuáles son los valores de *x*?

$x_1 = -2$. $x = 2$

vi. Obtén el área de la figura 2:

$4x^2-16$

vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?

l.l-16

viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:

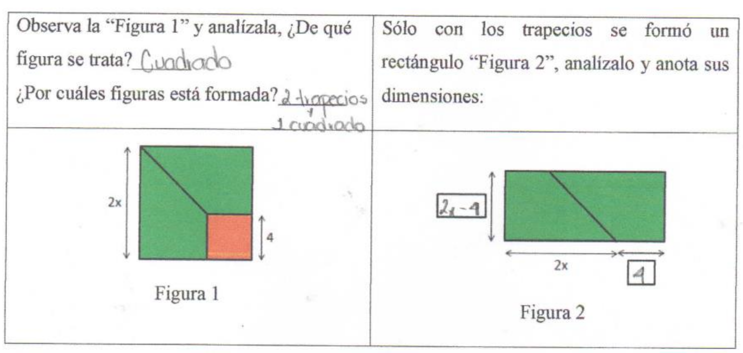
$4x^2-16$

Figura 73

En las respuestas se puede observar que E2, reflexiona que lo que encontró es un binomio conjugado, y además relaciona que la solución la puede obtener al igualar a cero cada expresión del binomio.

Estudiante 3

En la figura 74, podemos observar que E3, describe que la "figura 1" se trata de un cuadrado e identifica que dicho cuadrado está formado por un cuadrado y dos trapecios, para posteriormente determinar las longitudes del rectángulo formado únicamente por los trapecios.


Observa la "Figura 1" y analízala, ¿De qué figura se trata? Cuadrado
¿Por cuáles figuras está formada? 2 trapecios
1 cuadrado

Sólo con los trapecios se formó un rectángulo "Figura 2", analízalo y anota sus dimensiones:

Figura 74

i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?
A: b·h

ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:
A= (2x − 4)(2x + 4)

iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?
En el signo. uno es positivo y otro negativo

iv. Con base en los factores que encontraste, ¿cómo puedes obtener el valor de x?
$2x = -4$, $x = \frac{-4}{2}$, $x_1 = -2$ $2x = 4$, $x = \frac{4}{2}$, $x_2 = 2$

v. ¿Cuáles son los valores de x?
$x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

vi. Obtén el área de la figura 2:
$4x^2 - 16$

vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?
$A = L^2 - 16$ ya que a el área total de toda la figura se le debería restar el área del cuadrado pequeño.

viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:
$4x^2 - 16$

¿Qué procedimiento proponen para factorizar una diferencia de cuadrados?
Se saca la raíz de cada uno de sus términos y solamente se cambia su signo, creando un binomio conjugado

Aparte de factorizar una diferencia de cuadrados, ¿de qué otra forma puedes encontrar los valores de x?
Despejando x

Figura 75

En la figura 75, se puede observar que E3, reflexiona que lo que encontró es un binomio conjugado, y relaciona que la solución la puede obtener al igualar a cero cada expresión del binomio, y además de factorizar que una diferencia de cuadrados, puede encontrar los valores de *x* despejando.

Estudiante 4

Por otro lado, la E4 en la siguiente actividad, se puede observar que los incisos: *i, ii, iii y iv* los responde correctamente muestra que va entendiendo la secuencia, pero en el inciso v al tratar de despejar *x* cada factor lo toma como si fuera una ecuación cuadrática, pues brinda dos posibles resultados para *x*, en total de tres valores diferentes de *x*.

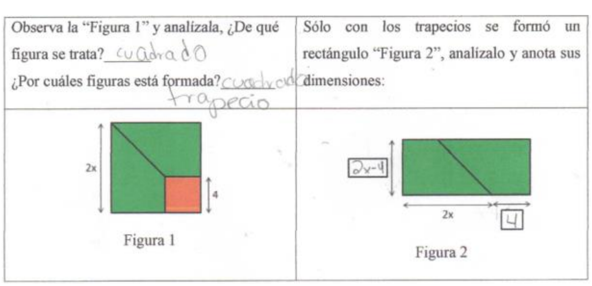
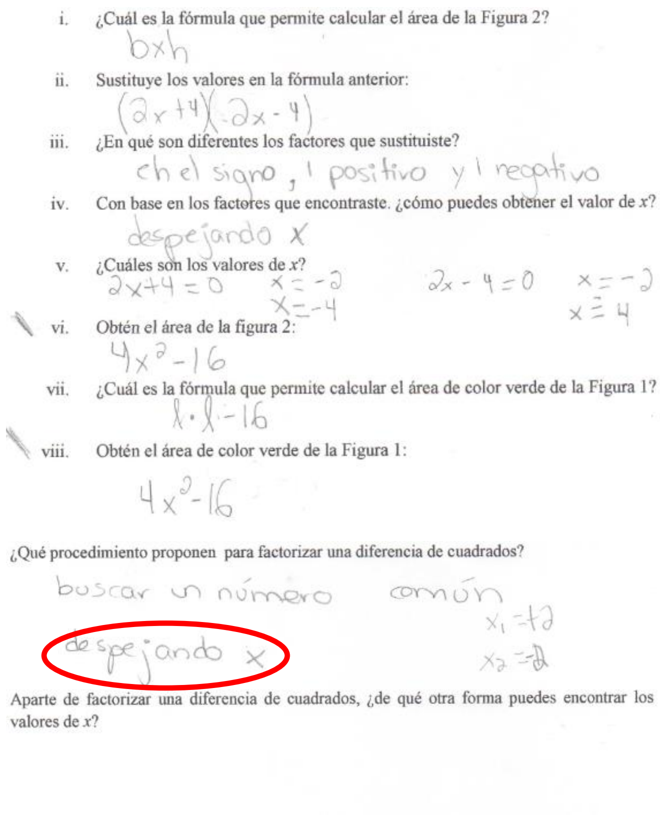


Figura 76

En este caso se puede observar, que E4, describe que la "figura 1" es un cuadrado, pero no describe que el cuadrado está formado por un cuadrado y dos trapecios.

Posteriormente responde lo siguiente:



i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?
b×h
ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:
(2x+4)(2x-4)
iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?
en el signo, 1 positivo y 1 negativo
iv. Con base en los factores que encontraste, ¿cómo puedes obtener el valor de x?
despejando x
v. ¿Cuáles son los valores de x?
2x+4=0 x=-2 x=-4 2x-4=0 x=-2 x=4
vi. Obtén el área de la figura 2:
4x²-16
vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?
l·l-16
viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:
4x²-16

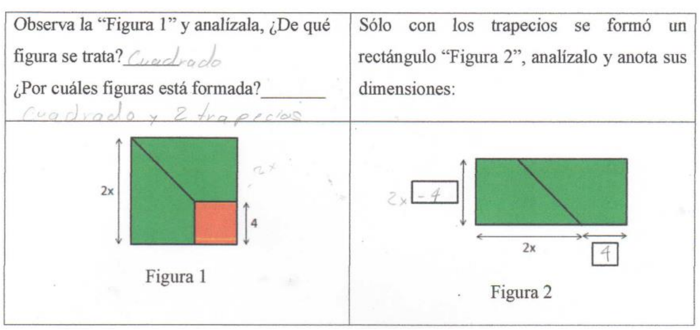
¿Qué procedimiento proponen para factorizar una diferencia de cuadrados?
buscar un número común
despejando x
x₁=+2
x₂=-2

Aparte de factorizar una diferencia de cuadrados, ¿de qué otra forma puedes encontrar los valores de x?

Figura 77

En las respuestas (figura 77), se puede observar que E4, reflexiona que lo que encontró es un binomio conjugado, y relaciona que la solución la puede obtener al igualar a cero cada expresión del binomio, y además de factorizar que una diferencia de cuadrados, puede encontrar los valores de *x* despejando.

Estudiante 5

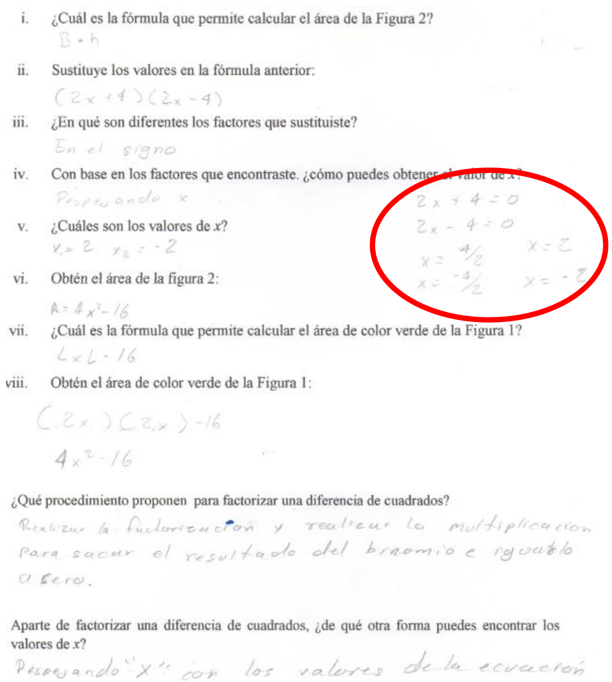


Observa la "Figura 1" y analízala, ¿De qué figura se trata? Cuadrado ¿Por cuáles figuras está formada? Cuadrado y 2 trapecios	Sólo con los trapecios se formó un rectángulo "Figura 2", analízalo y anota sus dimensiones:
2x 2x 4 Figura 1	2x -4 2x 4 Figura 2

Figura 78

En este caso se puede observar que E5, describe que la "figura 1" es un cuadrado, además determina que dicho cuadrado está formado por un cuadrado y dos trapecios.

Después E5 responde lo siguiente:


i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?
B • h
ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:
$(2x+4)(2x-4)$
iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?
En el signo
iv. Con base en los factores que encontraste, ¿cómo puedes obtener el valor de x?
Despejando x
v. ¿Cuáles son los valores de x?
$x_1 = 2$ $x_2 = -2$
$2x+4=0$
$2x-4=0$
$x = 4/2$ $x = 2$
$x = -4/2$ $x = -2$
vi. Obtén el área de la figura 2:
$A = 4x^2 - 16$
vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?
$L \times L - 16$
viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:
$(2x)(2x) - 16$
$4x^2 - 16$

¿Qué procedimiento proponen para factorizar una diferencia de cuadrados?
Realizar la factorización y realizar la multiplicación para sacar el resultado del binomio e igualarlo a cero.

Aparte de factorizar una diferencia de cuadrados, ¿de qué otra forma puedes encontrar los valores de x?
Despejando "X" con los valores de la ecuación

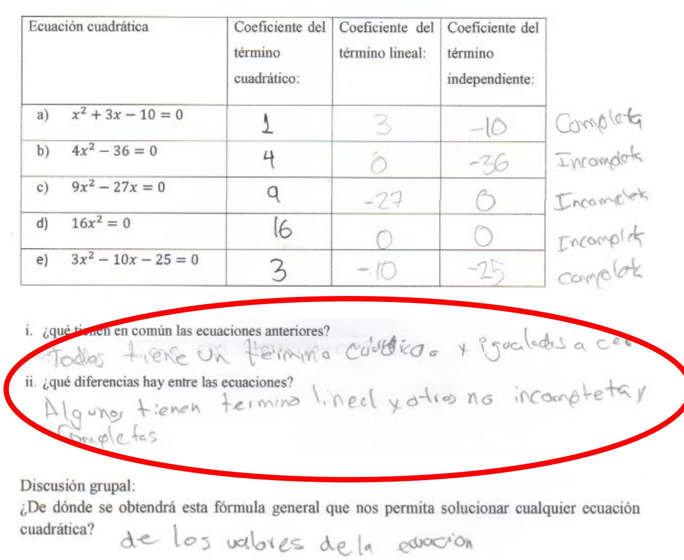
Figura 79

En las respuestas, se puede observar que E5, reflexiona que lo que encontró es un binomio conjugado, y relaciona que las soluciones la puede obtener al igualar a cero cada expresión del binomio para despejar *x*.

6.1.4.5 Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$ por el método de la fórmula general (Actividad 6)

A continuación se presenta por estudiante las respuestas brindadas por en torno a la actividad 6, después se muestra la solución de una ecuación solucionada por medio de la fórmula general.

Estudiante 1



Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:	
a) $x^2 + 3x - 10 = 0$	1	3	-10	Completa
b) $4x^2 - 36 = 0$	4	0	-36	Incompleta
c) $9x^2 - 27x = 0$	9	-27	0	Incompleta
d) $16x^2 = 0$	16	0	0	Incompleta
e) $3x^2 - 10x - 25 = 0$	3	-10	-25	completa

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores?
Todas tiene un término cuadrático y igualadas a cero
ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones?
Algunas tienen término lineal y otras no incompletas y completas

Discusión grupal:
¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática? de los valores de la ecuación

Figura 80

Podemos observar, que E1 ha reflexionado, pues identifica los coeficientes del término cuadrático, lineales e independientes, y con relación a estos determina si se trata de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

Por otra parte, identifica que las ecuaciones cuadráticas el exponente más grande es dos y que está igualada a cero, y que se puede tratar de una ecuación cuadrática si carece del coeficiente lineal, pero aún no puede determinar de dónde se desprende la fórmula general.

En la figura 81, podemos observar que sustituye los coeficientes correctamente y desarrolla la fórmula, llegando a las dos raíces de la ecuación cuadrática, E1 percibe que al aplicar la fórmula general para la solucionar ecuaciones cuadráticas se le hace mejor y más rápido.

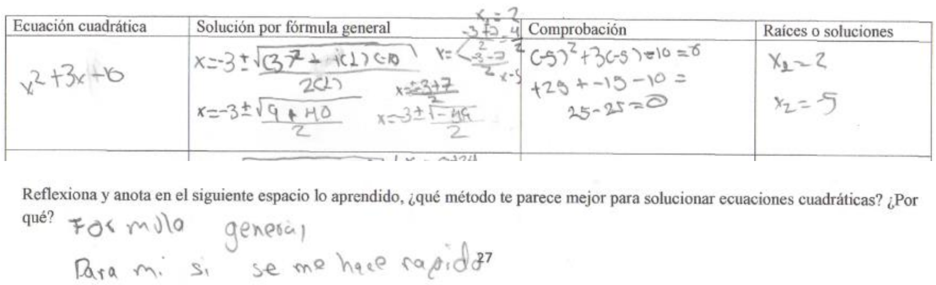


Figura 81

Estudiante 2

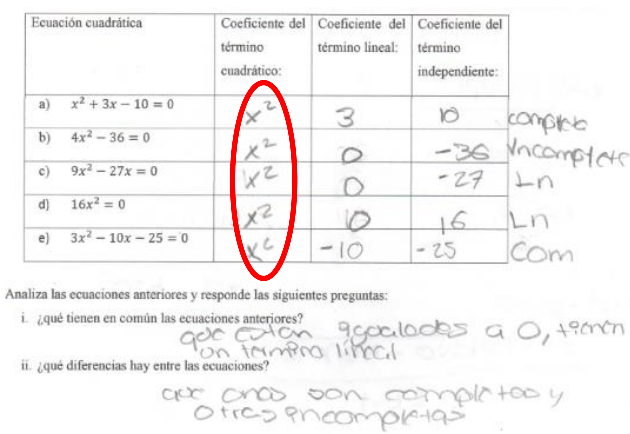
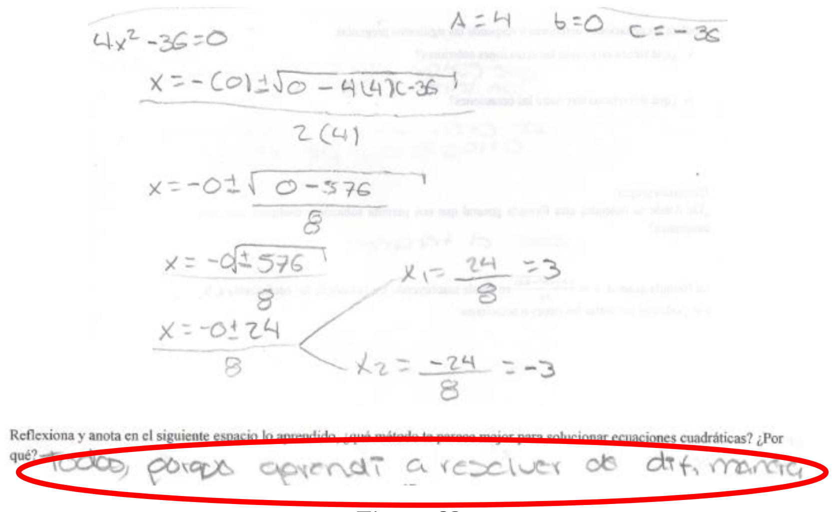


Figura 82

En la figura 82, se puede observar que E2 aún no ha reflexionado en cuanto a los coeficientes de los términos que componen una ecuación cuadrática, pues no identifica los coeficientes del término cuadrático, lo deja en término de x^2, ya que no identifica que su coeficiente es 1, pero aun así puede clasificar las ecuaciones cuadráticas en completas e incompletas.

Por otra parte, no muestra la reflexión de que en las ecuaciones cuadráticas el exponente más grande es dos.

En cuanto a la solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general, podemos observar que sustituye correctamente los coeficientes, aunque en el punto anterior no identificó el coeficiente cuadrático, posteriormente desarrolla la fórmula para llegar a las soluciones que satisfacen la ecuación. Por otro lado, considera que todos los métodos que se trabajaron en el ciclo de enseñanza le parecen adecuados para solucionar una ecuación cuadrática, pues resalta que aprendió a solucionarlas de diferente manera (figura 83).



$4x^2-36=0$ A=4 b=0 c=-36

$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{0-4(4)(-36)}}{2(4)}$

$x=\frac{-0\pm\sqrt{0-576}}{8}$

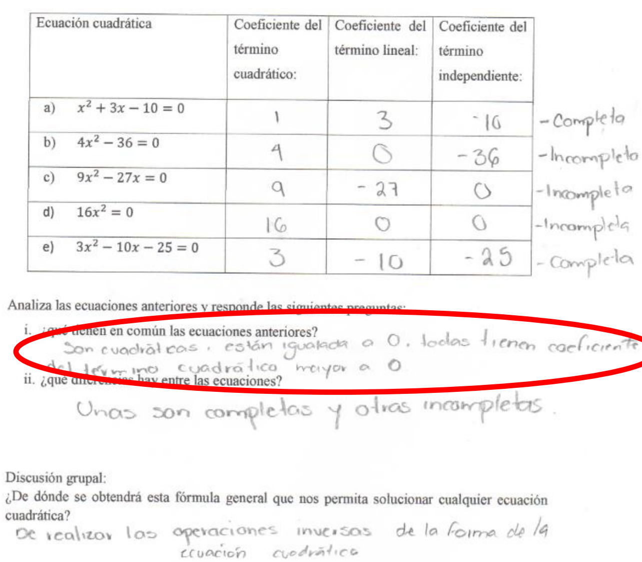
$x=\frac{-0\pm\sqrt{576}}{8}$

$x=\frac{-0\pm 24}{8}$ $x_1=\frac{24}{8}=3$ $x_2=\frac{-24}{8}=-3$

Reflexiona y anota en el siguiente espacio lo aprendido, ¿qué método te parece mejor para solucionar ecuaciones cuadráticas? ¿Por qué? todos, porque aprendí a resolver de dif. manera

Figura 83

Estudiante 3



Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:	
a) $x^2+3x-10=0$	1	3	-10	- Completa
b) $4x^2-36=0$	4	0	-36	- Incompleta
c) $9x^2-27x=0$	9	-27	0	- Incompleta
d) $16x^2=0$	16	0	0	- Incompleta
e) $3x^2-10x-25=0$	3	-10	-25	- Completa

Analiza las ecuaciones anteriores y responde las siguientes preguntas:

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores? Son cuadráticas, están igualadas a 0, todas tienen coeficiente del término cuadrático mayor a 0

ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones? Unas son completas y otras incompletas.

Discusión grupal:
¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática? De realizar las operaciones inversas de la forma de la ecuación cuadrática

Figura 84

Podemos observar (figura 84) que E3 ha reflexionado sobre la solución de ecuación cuadrática, ya que identifica los coeficientes del término cuadrático, lineales e independientes, y con relación a estos determina si se trata de ecuaciones cuadráticas completas o incompletas.

Por otra parte, identifica que las ecuaciones cuadráticas el exponente más grande es dos, y que para ser considerada una ecuación cuadrática el coeficiente del término cuadrático debe ser mayor a 0.

En la figura 84, podemos observar que E3 muestra cómo soluciona correctamente la ecuación, solo que al poner las soluciones en el espacio que se le solícita, se confundió, ya que brinda la solución en fracción y escribe como denominador 3, en lugar de 6, pero es solo error de dedo, pues al solucionar la ecuación muestra que lo realiza correctamente.

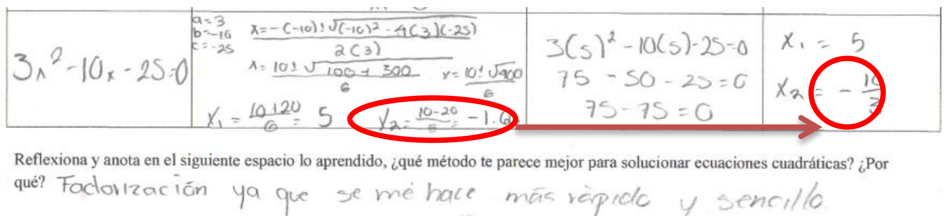
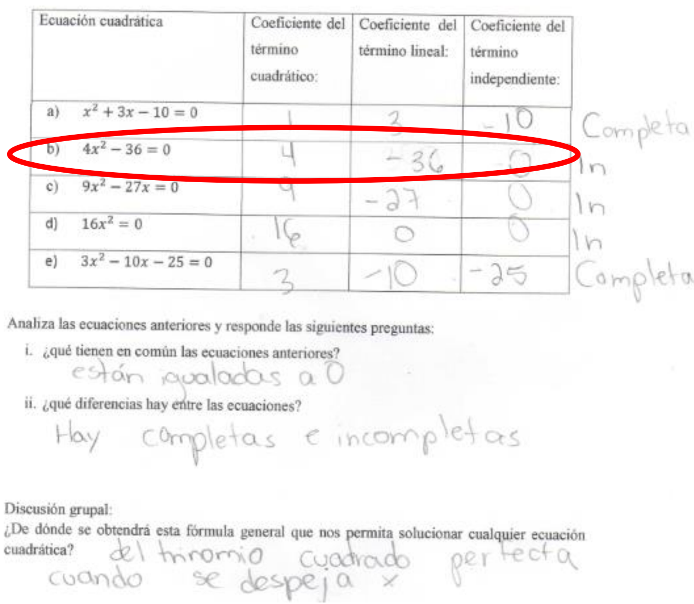


Figura 85

Estudiante 4



Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:	
a) $x^2+3x-10=0$	1	3	-10	Completa
b) $4x^2-36=0$	4	-36	0	In
c) $9x^2-27x=0$	9	-27	0	In
d) $16x^2=0$	16	0	0	In
e) $3x^2-10x-25=0$	3	-10	-25	Completa

Analiza las ecuaciones anteriores y responde las siguientes preguntas:

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores? están igualadas a 0

ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones? Hay completas e incompletas

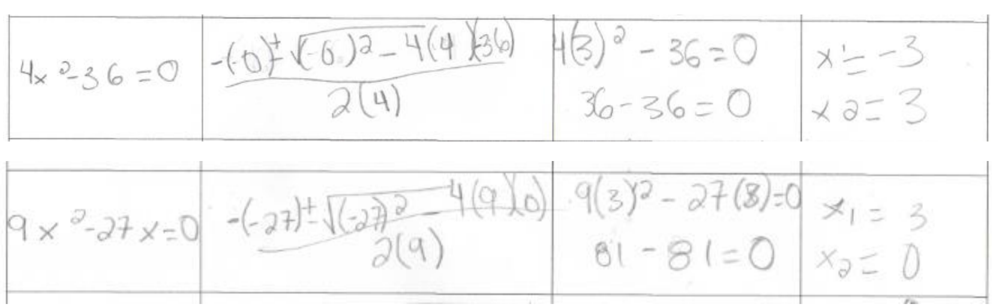
Discusión grupal:
¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática? del trinomio cuadrado perfecta cuando se despeja x

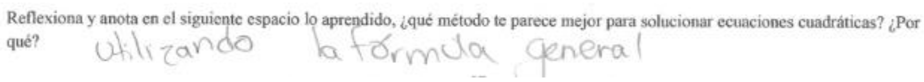
Figura 86

E4 no muestra completa reflexión, pues en el inciso *b* no identifica correctamente los coeficientes del término lineales e independientes, aun así determina si se trata de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

Por otra parte, únicamente identifica que las ecuaciones cuadráticas están igualadas a cero, aun no reflexiona sobre el exponente más grande de la ecuación es 2, ya que no logró identificarla como una semejanza semejanzas entre las ecuaciones.

Por otro lado, en la figura 87 podemos observar que el inciso *b*, donde anteriormente confundió los coeficientes, para darle solución a la ecuación, o realizó correctamente, además en el inciso *c*, también sustituye correctamente la fórmula y no muestra evidencia de cómo llegó a las soluciones, pero las raíces que brindan satisfacen la ecuación, además realiza la comprobación con la solución 3. E4 argumenta que para ella el mejor método para solucionar ecuaciones cuadráticas es la fórmula general, pero no justifica él porque.

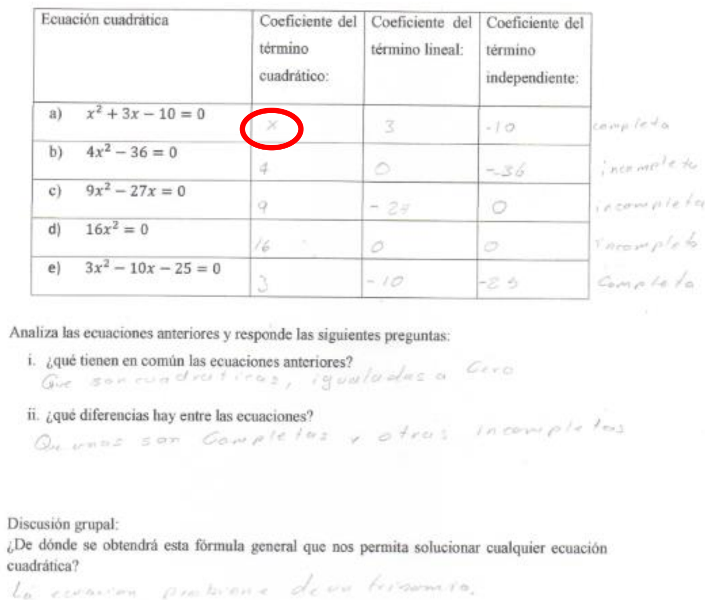




Reflexiona y anota en el siguiente espacio lo aprendido, ¿qué método te parece mejor para solucionar ecuaciones cuadráticas? ¿Por qué? utilizando la fórmula general

Figura 87

Estudiante 5



Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:	
a) $x^2+3x-10=0$	x	3	-10	completa
b) $4x^2-36=0$	4	0	-36	incompleta
c) $9x^2-27x=0$	9	-27	0	incompleta
d) $16x^2=0$	16	0	0	incompleta
e) $3x^2-10x-25=0$	3	-10	-25	Completa

Analiza las ecuaciones anteriores y responde las siguientes preguntas:

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores?
Que son cuadraticas, igualadas a cero

ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones?
Que unos son Completas y otros incompletas

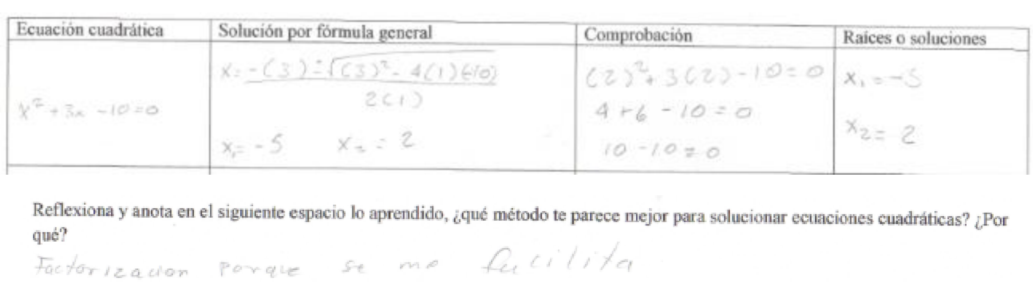
Discusión grupal:
¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática?
La ecuacion proviene de un trinomio.

Figura 88

E5 incurre en un error al determinar el coeficiente del término cuadrático, ya que en el inciso *a*, el coeficiente es 1, y anota que el coeficiente es *x,* en cuanto a la clasificación de ecuaciones completas e incompletas ha reflexionado y la realiza correctamente.

Por otra parte, identifica que las ecuaciones cuadráticas el exponente más grande es dos y que está igualada a cero.

En la figura 89, podemos observar que aunque en la actividad anterior E5 no reconoció el coeficiente del término cuadrático, al solucionar la ecuación si lo identificó, más no muestra evidencia del desarrollo de la fórmula general y únicamente presenta la comprobación con la solución positiva. Para E5 considera que el mejor método para solucionar ecuaciones cuadráticas es el de factorización, pues argumenta que se le facilita.



Ecuación cuadrática	Solución por fórmula general	Comprobación	Raíces o soluciones
$x^2+3x-10=0$	$x=\frac{-(3)\pm\sqrt{(3)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$ $x_1=-5 \quad x_2=2$	$(2)^2+3(2)-10=0$ $4+6-10=0$ $10-10=0$	$x_1=-5$ $x_2=2$

Reflexiona y anota en el siguiente espacio lo aprendido, ¿qué método te parece mejor para solucionar ecuaciones cuadráticas? ¿Por qué?
Factorizacion porque se me facilita

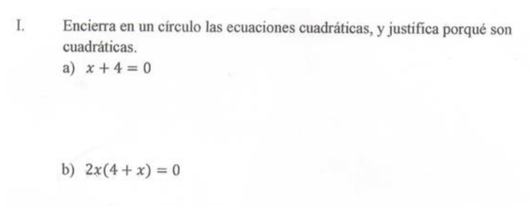
Figura 89

6.5 Análisis de los datos obtenidos de la entrevista

En este apartado se presentan los datos obtenidos de la entrevista que se realizó a cinco estudiantes después de finalizar el ciclo de enseñanza sobre el concepto de ecuación cuadrática en el nivel secundaria. Cabe mencionar, que la entrevista fue realizada una semana después de haber realizado la aplicación del ciclo de enseñanza, y se le destinó un día para cada estudiante entrevistado.

6.5.1 Entrevista estudiante E1

En la sección I de la entrevista, E1 reconoce que el inciso *a* no es ecuación cuadrática, sin embargo, considera que el inciso *b* tampoco lo es, y acertadamente encierra los incisos *c, d* y *e* identificándolas como ecuaciones cuadráticas. A continuación se presenta la entrevista del estudiante al no elegir los incisos a y b como ecuaciones cuadráticas.



I. Encierra en un círculo las ecuaciones cuadráticas, y justifica porqué son cuadráticas.

a) $x + 4 = 0$

b) $2x(4 + x) = 0$

Figura 90

P: ¿esta no? (refiriéndose al inciso *a*, ¿ni esta? (señalando el inciso *b*)

E1: la (a) no, porque no tiene un número elevado al cuadrado.

P: ok, ¿y la b?

E1: y esta sería multiplicarlo, si tiene un número, pero no tiene un número independiente, ósea, sería dos equis por cuatro, serían ocho equis, y luego dos equis por equis, serían dos equis al cuadrado, y ya se acabaría, ósea.

P: ¿Entonces debe de tener los tres términos?

E1: debe de tener los tres para ser una ecuación cuadrática.

En el caso del inciso *b*, no reconoce una ecuación cuadrática incompleta, y considera que para ser cuadrática debe de contener los tres términos.

En seguida se muestra la justificación de por qué considera que el inciso *c* sí es ecuación cuadrática:

c) $(x+3)(x-2)=0$

Porque tiene una icognita elevada a la Segunda

Figura 91

E1: ésta (refiriéndose al inciso *c*), porque pues es una factorización y aparte porque si lo multiplicas equis por equis da equis cuadrada, y luego equis por dos sería menos dos equis, y luego ya sería más tres equis, y luego serían menos seis, y luego ya quitamos, reducimos los términos comunes y ya da una ecuación cuadrática.

P: muy bien

E1: y pues cumple porque tiene una ¿incógnita?, bueno si, elevada a la segunda potencia, eh, se me olvidó, un número independiente y también un numero con una incógnita y cumple.

Continuando, seleccionó el inciso *d* también como ecuación cuadrática, su justificación es la siguiente:

d) $4x^2 + 2x = 20$

Figura 92

P: estamos en el inciso *d* ¿verdad?

E1: en el inciso *d* nada más seria pasar el número independiente para el lado izquierdo y se cambiaría su signo, seria ya al último, sería cuatro equis cuadrada, más dos equis, menos veinte.

P: muy bien

Posteriormente se refiere al inciso *e*:

e) $10 - x = -x^2$

Figura 93

E1: y pues ya aquí seria pasarlo con su signo contrario, que sería positivo, sería equis cuadrada, menos equis, más diez y ya nada más sería acomodándola.

Con base en lo anterior, consideramos que el estudiante E1, se encuentra en concepción proceso del concepto de ecuación cuadrática, pues ya ha interiorizado acciones, puesto que puede determinar que una ecuación es cuadrática cuando se presenta en forma de factorización, es decir, sabe que al desarrollar la multiplicación (ley distributiva) de los factores obtiene como resultado una ecuación cuadrática, y justifica correctamente sus respuestas, excepto al no considerar el inciso *b* como ecuación cuadrática.

Con respecto a la sección II, E1 responde correctamente los incisos que le solicitan, y justifica cada una de sus respuestas correctamente.

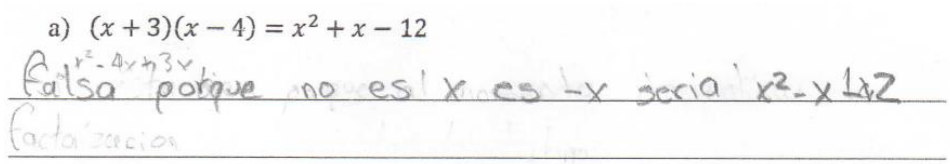


Figura 94

Inicialmente puso que era correcta, pero al resolverla se da cuenta que es correcta, únicamente se confundió. A continuación se presenta la explicación que brindó en su entrevista:

P: Entonces esta dices ¿qué es cierta? (señalando el inciso *a*)

E1: si

P: ¿Por qué?

E1: porque sería: equis por equis, equis cuadrada, y luego sería equis por menos cuatro sería: menos cuatro equis, y luego ya sería: tres por equis, tres equis y luego ya sería: menos doce

P: ok

E1: y se eliminan los términos comunes, sería menos cuatro, más tres, ósea se resta, seria… Está mal porque está bien la equis, pero está mal el signo, porque el número mayor es cuatro y se conserva el signo del mayor.

P: Entonces ¿es falsa o verdadera?

E1: ¡ah sí! Es que le puse que está bien, pero es falsa.

P: muy bien.

Con respecto al inciso (b) no da justificación verbal, pero podemos observar en la figura 95, que puede representar $(a+b)^2$ como producto de dos binomios, y describe lo que se realizó para poner la igualdad a^2+b^2.

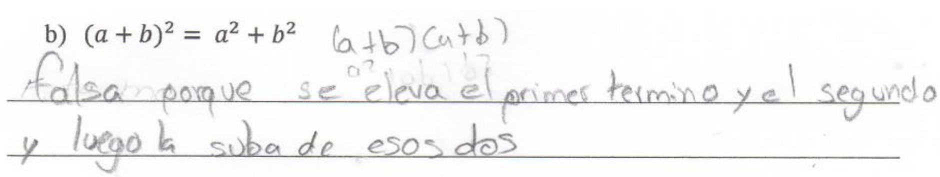


Figura 95

En el caso del inciso (c) responde lo siguiente:

c) $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$

falsa porque el resultado es $a^2 - b^2$ mas por menos = menos

Figura 96

E1: es falsa, porque primero *a* por *a*, *a* cuadrada, y luego *a* por menos *b*, menos *ab*, y luego *b* por *a*, sería más *ab*, y luego sería más por menos, menos *b* cuadrada, y se eliminan los dos términos, son signos contrarios, se restan y aquí dice que es un más (señalando el signo de a^2+b^2), y es un menos.

P: entonces ¿Cómo quedaría?

E1: *a* cuadrada, menos *b* cuadrada.

En este sentido, consideramos que E1 se encuentra en concepción proceso de una expresión algebraica de segundo grado, lo cual coordina con el proceso de igualdad, ya que identifica que pueden existir expresiones algebraicas cuadráticas que se puede escribir como un producto.

En la sección III, E1 en la mayoría de las ecuaciones presentadas utiliza como método de solución la fórmula general, y solo en el caso del inciso *e* y *f* utiliza el método de factorización.

En la figura 97, se muestra que en el inciso *a* responde correctamente lo que se le solicita, aplica adecuadamente la fórmula general, ya que identifica los coeficientes, los sustituye acertadamente y realiza los cálculos correspondientes, así como la comprobación.

Ecuación	Solución	Comprobación
a) $x^2 - 36 = 0$	$a=1$ $b=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ $c=-36$ $x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-(4(1)(36))}}{2(1)}$ $x=\frac{-0\pm\sqrt{0+144}}{2}$ $x=\frac{0\pm 12}{2}$ $x_1 \frac{-0\pm 12}{2}=6$ $x_2 \frac{-0-12}{2}=-6$	x_1 $(6)^2-36=0$ $36-36=0$ x_2 $(-6)^2-36=0$ $36-36=0$

Figura 97

En el inciso *b* que se encuentra en la figura 98, podemos observar que nuevamente identifica los coeficientes, sustituye y desarrolla correctamente la formula general, al llegar a la parte del ovalo rojo comenta lo siguiente:

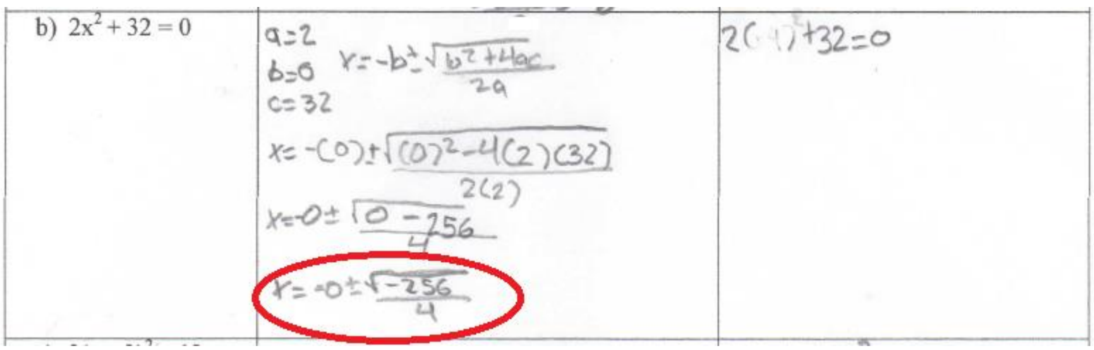


Figura 98

E1: aquí hay una raíz cuadrada de dos cientos cincuenta y seis, pues me salió negativo.

P: ¿Qué puedes determinar con eso?

E1: que equis uno sería: menos cero, más raíz cuadrada de menos dos cientos cincuenta y seis, entre cuatro… Mmm es que un profe, ¿se acuerda del profe M. si lo conoce?

P: si

E1: nos dijo, no pues si les da una raíz cuadrada, conviértalo a positivo.

P: ¿cómo?

E1: ósea, cuando estábamos en este tema, una vez nos salió una raíz cuadrada negativa, y le dijimos, profe que se hace con esto, y dijo, es que no hay raíces negativas, entonces le dijimos: ¿Qué se hace?, y dijo: nada más quítenle el negativo y saquen la raíz.

P: ¿así nada más?

E1: ¡ah!, pero ya después cuando la sacáramos esa raíz, iba a ser negativa, o nada mas la íbamos a dejar así, y si no que la dejáramos así.

P: ¿y si pruebas con factorización u otro método que estuvimos trabajando de las actividades? A ver qué es lo que obtienes.

Al realizarla por despeje llega a una raíz negativa y sostiene lo que dice de la raíz negativa, pero, se le ocurre hacer la comprobación, y posteriormente se da cuenta que no da en la comprobación.

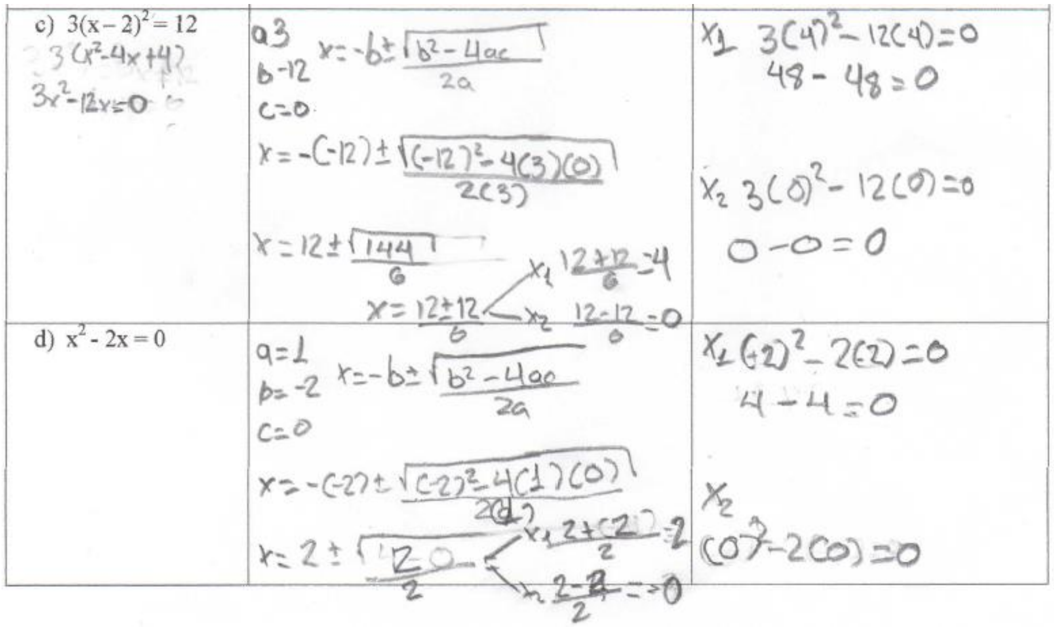
P; ¿entonces qué puedes deducir de esto?

E1: que está mal.

P: entonces ¿cuáles serían las soluciones o raíces de esa ecuación?

E1: pues la dejaría así, como solución, refiriéndose a lo señalado con en el ovalo rojo.

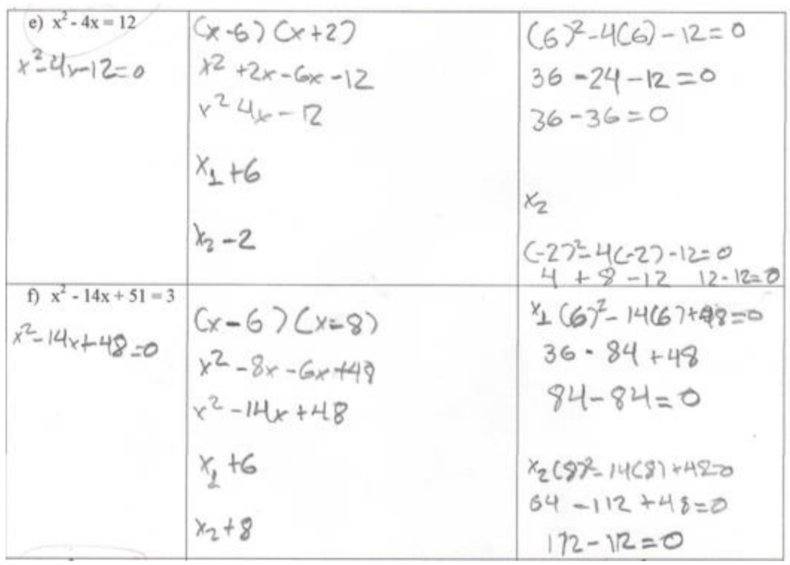
En el inciso *c* podemos observar que sin ayuda desarrolla primero el binomio al cuadrado y obtiene la ecuación cuadrática y posteriormente las soluciones por medio de la fórmula general correctamente, en el inciso *d*, podemos observar que también los solucionó correctamente por el método de la fórmula general (figura 99).



c) $3(x-2)^2 = 12$ $3(x^2-4x+4)$ $3x^2-12x=0$	$a\ 3$ $b\ -12$ $c=0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2-4(3)(0)}}{2(3)}$ $x = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{6}$ $x = \frac{12 \pm 12}{6}$ $x_1\ \frac{12+12}{6} = 4$ $x_2\ \frac{12-12}{6} = 0$	$x_1\ 3(4)^2 - 12(4) = 0$ $48 - 48 = 0$ $x_2\ 3(0)^2 - 12(0) = 0$ $0 - 0 = 0$
d) $x^2 - 2x = 0$	$a=1$ $b=-2$ $c=0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(0)}}{2(1)}$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}\ 0}{2}$ $x_1\ \frac{2+(2)}{2} = 2$ $x_2\ \frac{2-2}{2} = 0$	$x_1\ (2)^2 - 2(2) = 0$ $4 - 4 = 0$ x_2 $(0)^2 - 2(0) = 0$

Figura 99

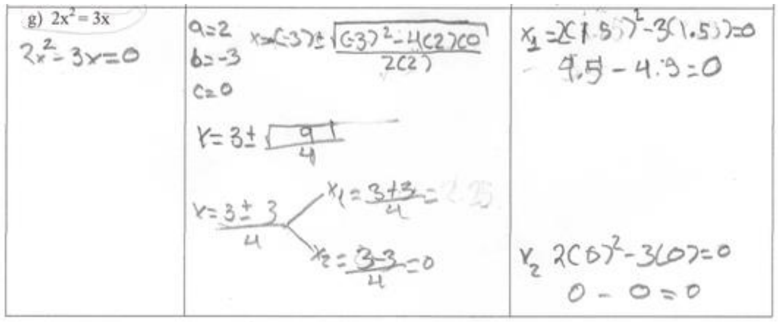
En la figura 100, los inciso *e* y *f* los resuelve por el método de factorización, sin ninguna ayuda y va justificando adecuadamente cada paso que realiza. Al preguntarle porque utilizó en estos incisos el método de factorización, argumentó: "*como tienen los tres (refiriéndose a que es una ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$*), y se me hace fácil*".



e) $x^2 - 4x = 12$ $x^2-4x-12=0$	$(x-6)(x+2)$ $x^2+2x-6x-12$ $x^2\ 4x-12$ $x_1 +6$ $x_2 -2$	$(6)^2-4(6)-12=0$ $36-24-12=0$ $36-36=0$ x_2 $(-2)^2-4(-2)-12=0$ $4+8-12$ $12-12=0$
f) $x^2 - 14x + 51 = 3$ $x^2-14x+48=0$	$(x-6)(x-8)$ $x^2-8x-6x+48$ $x^2-14x+48$ $x_1 +6$ $x_2 +8$	$x_1\ (6)^2-14(6)+48=0$ $36-84+48$ $84-84=0$ $x_2\ (8)^2-14(8)+48=0$ $64-112+48=0$ $112-112=0$

Figura 100

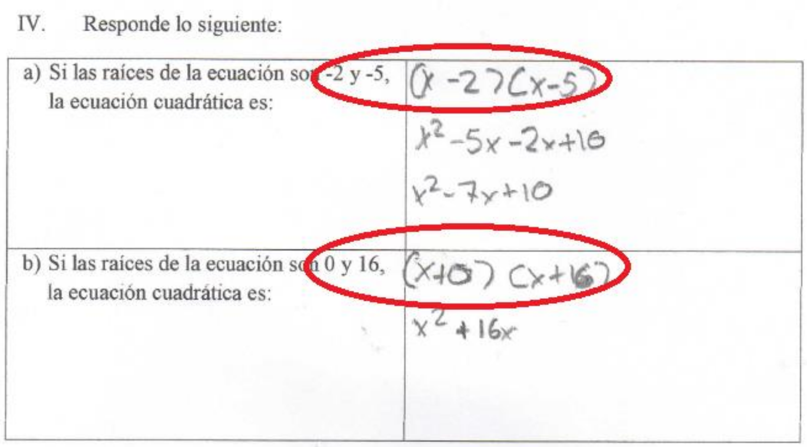
Sin embargo en el inciso *g* no utiliza el método de factorización, sino el de fórmula general, y nuevamente la soluciona satisfactoriamente y las comprobaciones son correctas.



g) $2x^2 = 3x$ $2x^2 - 3x = 0$	$a=2$ $b=-3$ $c=0$ $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)}$ $x = 3 \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ $x = \frac{3 \pm 3}{4}$, $x_1 = \frac{3+3}{4} =$, $x_2 = \frac{3-3}{4} = 0$	$x_1 = 2(1.5)^2 - 3(1.5) = 0$ $4.5 - 4.5 = 0$ $x_2\ 2(0)^2 - 3(0) = 0$ $0 - 0 = 0$

Figura 101

De acuerdo a lo anterior, determinamos que E1 se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues coordina el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y la factorización, debido a que identifica que cada una de las ecuaciones presentadas tienen dos raíces o soluciones que satisfacen la ecuación, y obtiene dichas soluciones, además realiza la comprobación en cada una.



IV. Responde lo siguiente:

a) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	$(x-2)(x-5)$ $x^2 - 5x - 2x + 10$ $x^2 - 7x + 10$
b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	$(x+0)(x+16)$ $x^2 + 16x$

Figura 102

E1: ósea, es como una factorización (realiza cálculos)

P: ¿porque aquí estas poniendo. menos dos y menos cinco? (señalando la factorización que realizó E1)

E1: porque aquí nos dice, si las raíces de la ecuación son; menos dos y menos cinco, entonces puse aquí las raíces, y luego ya desarrollo.

Con respecto a la sección IV, podemos observar que E1 tiene noción de cómo proceder, es decir, puede hacer uso de una factorización, pero no se percata que la debe de plantear con signos contrarios, para que al momento de desarrollar dichos productos coincida con las raíces, desafortunadamente las plantea con el mismo signo de las soluciones que se proporcionaron, e incurre en el error, la ecuación cuadrática que brinda como resultado, no corresponde con la raíces que se propusieron, en este sentido consideramos que se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática.

6.5.2 Entrevista estudiante E2

La estudiante E2, dentro de la primera sección, únicamente considera los incisos *b*, *c* y *d*, podemos observar que justifica cada ecuación como ecuaciones cuadráticas. En el inciso *b* se confunde, ya que escribe sumando, pero al momento de justificar lo explica que tiene que multiplicar. Posteriormente, el inciso *e* no lo encierra, pero comenta que si es cuadrática y anota como quedaría, únicamente le faltó igualar a cero.

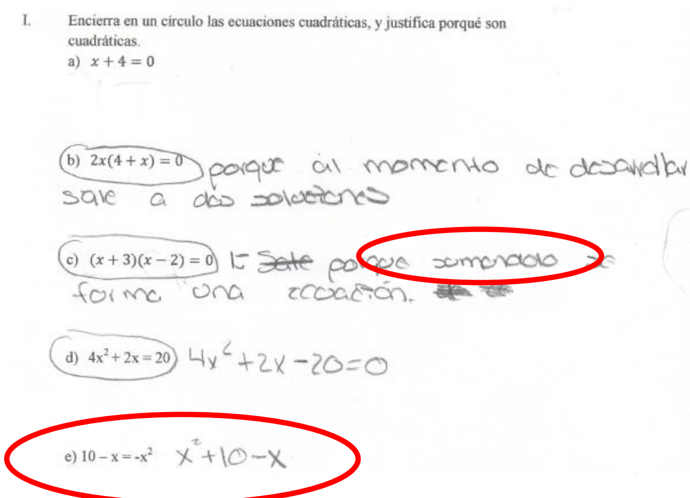


Figura 103

Con lo anterior, consideramos que la estudiante E2 se localiza en concepción proceso del concepto de ecuación cuadrática, debido a que puede determinar que una ecuación es cuadrática cuando se presenta en forma completa e incompleta, y en forma de producto, es decir, sabe que al desarrollar la multiplicación de los factores obtiene como resultado una expresión algebraica cuadrática, de igual manera, considera los incisos *b* y *c* como ecuaciones cuadráticas, lo cual muestra la coordinación del proceso de expresión algebraica de segundo grado con el de igualdad, además acomoda la ecuaciones en forma general descendente, en el caso del inciso *b* identifica que al desarrollar obtendrá dos soluciones.

Por otro lado, dentro de la sección II, en el inciso *a* dice que es falsa y observamos que realiza las anotaciones (flechas) de lo que se multiplicará, es decir, multiplicar cada término del primer binomio, por cada término del segundo binomio.

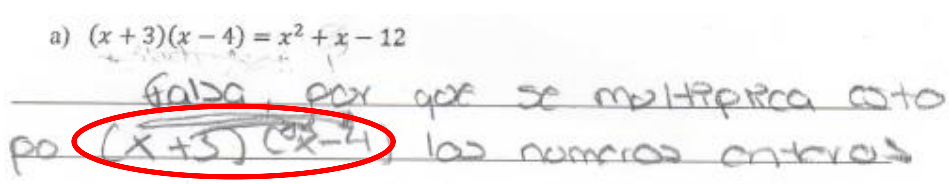


Figura 104

P: En el *a* ¿por qué dices que es falsa?

E2: porque falta, por ejemplo, es equis por equis, y da equis cuadrada, <u>equis por cuatro, da a cuatro equis</u> y tres por equis, igual a tres equis. Y eso es los que le falta, lo de equis, y aquí le faltaría el uno (señalando + *x* en el trinomio).

P: ¿Cuál le faltaría, qué número le falta?

E2: ¡Ah, no, si está correcta!, porque aquí sería uno (señalando nuevamente + *x* en el trinomio) y uno equivale a equis, nada más que me confundí, esta si está correcta.

Considera que está correcta, esto es porque al realizar la multiplicación no considera los signos.

Continuando con el inciso *b*, de la segunda sección.

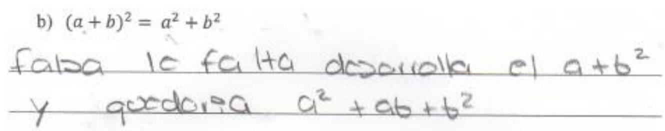


Figura 105

E2: Esta es la que no está correcta

P: Porque

E2: Porque *a* por *a*, es igual *a* cuadrada, y sería más *ab*, y luego ya pues eso es lo que le falta *ab.*

P: Ok

E2: Y aquí (se refiere al inciso c), también está mal, el error porque sería *ab* también aquí, y quedaría *a* cuadrada, más *ab*, más *b* cuadrada.

P: Entonces, ¿porque sería falso en la c?

E2: Porque le falta multiplicar, a por b y b por a.

P: Y ahí ¿cómo te quedaría?

E2: *a* cuadrada, más *ab*, más *b* cuadrada.

P: Si, ¿así quedaría?

E2: O sea, dos *ab*.

P: si quieres puedes hacer cálculos acá, y ya decides (realiza cálculos).

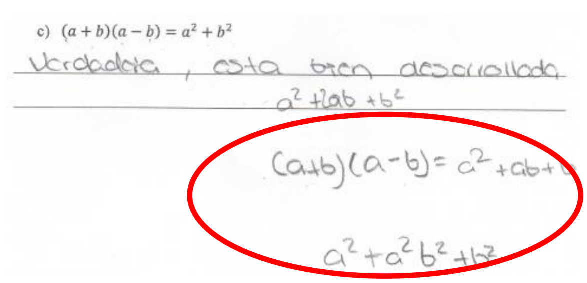


Figura 106

E2: ¡ah no!, no es cierto, estoy mal.

P: Entonces ¿cómo quedaría, verdadera o falsa?

E2: Verdadera, pero es otro tipo de ecuación, bueno es diferente, es diferente desarrollo a las de arriba.

Al estar dando su justificación, observamos que su lenguaje matemático es limitado, y esto hace que incurra en imprecisiones, además cada vez brinda diferentes resultados al querer justificar. Por ejemplo dice "…es otro tipo de ecuación" cuando se está refiriendo a una expresión algebraica.

Con base en las respuestas y a pesar de que el inciso *a* y *b* los consideró falsos, sus justificaciones son incorrectas, pues no identifica que se trata de binomios conjugados.

Por otra parte, E2 tuvo varios inconvenientes en darle solución a cada ecuación de la sección III, el inciso *a* y *b* les dio solución por medios del despeje, lo cual no es incorrecto pero confunde la radicación que utilizará con la fórmula general, inicialmente comienza solucionando el inciso *a* por medio de la fórmula general, pero al momento de realizar cálculos, decidió cambiar de método, lo cual se muestra en su entrevista:

> E2: Esta voy a utilizar (refiriéndose a la fórmula general).
>
> P: Muy bien, es por el método que tú prefieras.
>
> E2: Puedo cambiar de método.
> P: Sí, claro.
> E2: Me queda equis cuadrada, menos treinta y seis, igual a cero.
> P: Muy bien
> E2: es equis cuadrada, igual a menos treinta y seis.
> P: Aquí en este paso ¿qué hiciste?
> E2: Pero creo que se pasa a positivo.
> P: A ver inténtalo así.
> E2: Entonces sería x cuadrada igual a 36, y x es igual a 36 entre 1, porque x cuadrada vale 1.

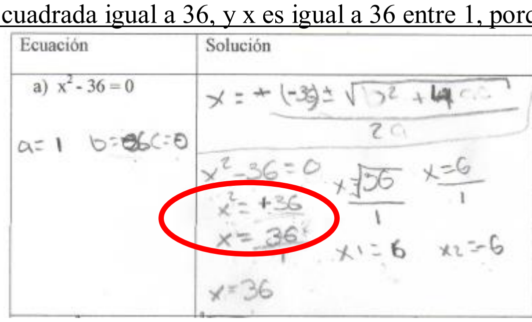


Figura 107

> P: Y éste dos, es decir, este cuadrado, de este pasó a este paso, como representarías el dos.
> E2: Cómo mas dos.
> P: Cuando tenemos el dos como exponente ¿cómo lo pasarías?, porque aquí ya quitaste el exponente, pero ¿cómo reflejarías ese paso?

Después de varios minutos, no pudo justificar ese paso, la profesora le sugiere seguir con la siguiente y después regresar de nuevo al inciso (a).

Por otro lado en el inciso *b* (figura 108) podemos observar que intenta solucionarla por el medio del despeje, además el paso que no pudo justificar en el inciso a, es decir, el exponente dos como lo pasa al segundo miembro de la ecuación, en este caso observamos que lo pasa como raíz cuadrada (señalado en el óvalo color rojo), pero al percatarse de que el radicando de la raíz cuadrada es negativo lo encierra y decide comenzar nuevamente con el despeje.

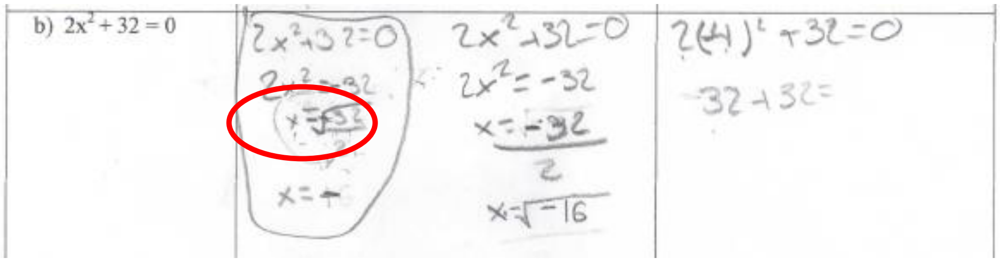


Figura 108

Al llegar al mismo paso que el inciso anterior, no recuerda que hacer con el cuadrado, es decir, lo elimina del primer miembro de la ecuación, pero no lo puede reflejar en el segundo miembro. La profesora decide darle unos minutos para que se distraiga, y posteriormente continúan, pero con el inciso *a*. Después de varios minutos, logra resolver la ecuación del inciso *a* satisfactoriamente, y luego regresan al inciso *b*.

Entonces regresan al inciso (a), y dice lo siguiente:

> E2: Sería la raíz cuadrada.
> P: A ver, inténtalo así.
> E2: (realiza cálculos) aquí ya me da equis uno y equis dos.
> P: ¿Cuánto vale equis uno y equis dos?
> E2: Uno y menos uno, porque seis entre uno, es igual a uno.
> P: entonces, ¿una solución cuál sería?
> E2: uno
> P: ¿porque uno? Puedes hacer la operación en este espacio.
> E2: ¡Ah no! seis, es seis.
> P: equis uno, sería seis.
> E2: uno, seis, es que no me acuerdo si es de las que era seis y menos seis.
> P: Porque crees que podría ser de esas, seis y menos seis.
> E2: Porque seis por seis es igual a treinta y seis.
> P: Muy bien, ya la hiciste con equis uno, ahora hazla con equis dos.

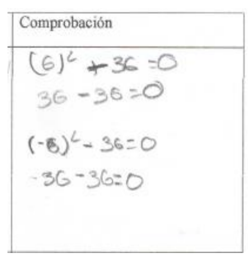


Figura 109

> E2: Positivo porque los estoy multiplicando y si se multiplica negativos se cambia positivo, menos seis por menos seis, porque en la regla de los signos esta si multiplicas y en la división, menos y menos da positivo y en la suma y resta da negativo.

Luego E2 continúo con el inciso (b):

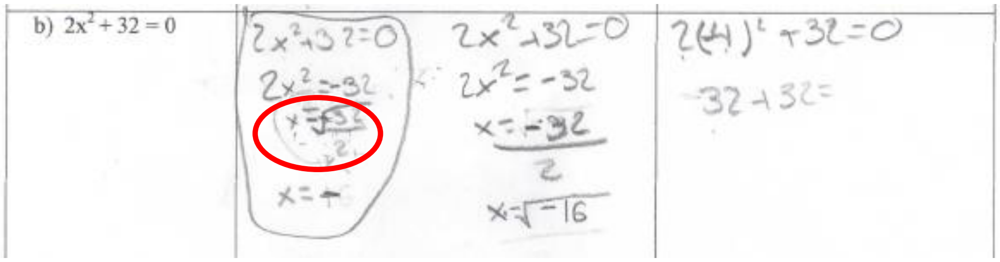


Figura 110

E2: Quedaría dos equis cuadrada igual a menos treinta y dos.

P: Y éste dos (refiriéndose al coeficiente cuadrático).

E2: Aquí (señalando que lo pasó dividiendo al segundo miembro de la ecuación).

> P: Y el exponente cuadrático, ¿cómo lo pasaste el segundo miembro de la ecuación?

E2: dos equis al cuadrado, más treinta y dos es igual a cero.

P: Muy bien, y luego.

E2: Sería, equis cuadrada igual a menos treinta y dos, equis cuadrada es igual a raíz cuadrada de menos treinta y dos, entre dos.

P: Entonces, aquí vas a obtener la raíz cuadrada ¿de quién?

E2: De treinta y dos.

P: ¿treinta y dos, positivo?

E2: No, negativo.

P: muy bien.

E2: Es que equis uno y equis dos, serían ocho y cuatro.

P: ¿porque ocho y cuatro?

E2: Porque ocho por cuatro, treinta y dos, entonces nos da treinta y dos, este y se puede hacer la operación, por ejemplo si hago la comprobación, No es que no tiene solución.

P: ¿Por qué no tiene solución?

E2: Es que si tiene una, qué es la raíz cuadrada de dieciséis, no tiene solución, ¡ah sí! Sería cuatro.

Realiza las comprobaciones con cuatro y menos cuatro, y se da cuenta que no da, y comenta lo siguiente:

> P: A ver ya hiciste la comprobación con cuatro y con menos cuatro, ¿qué puedes concluir?
>
> E2: No tiene solución, y no se puede sacar la ecuación porque no está correcta.
>
> P: Qué es lo que no está correcta.

E2: La raíz de dieciséis

P: pero no estas obteniendo la raíz de dieciséis, estas obteniendo la raíz de menos dieciséis.

E2: sugiero pasarla a positiva.

P: y ¿Cómo justificaríamos eso? Tú comprobaste con las dos soluciones en caso de que fuera positiva.

E2: no tiene solución y no se puede sacar.

P: ¿Por qué?

E2: Porque está negativa.

Después, en el inciso *c (*figura 111) podemos observar que la alumna E2 comienza elevando cada término del binomio al cuadrado y posteriormente lo multiplica por tres, realiza una serie de cálculos (dificultades en la suma algebraica) y quiere despejar “x” y no logra resolverlo.

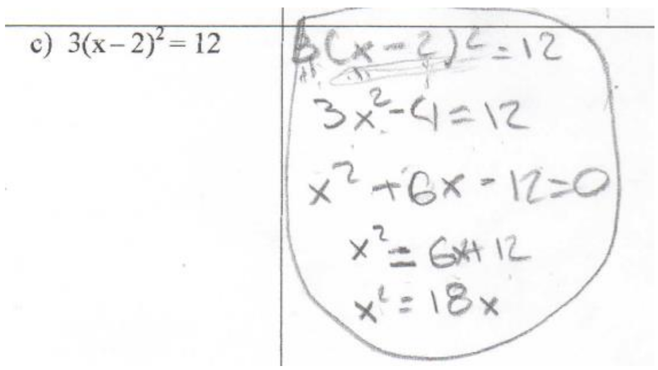


Figura 111

La profesora escribe únicamente el binomio al cuadrado pidiendo que lo desarrolle, es decir, escribe $(x-2)^2=$, y pregunta lo siguiente:

P: ¿Cómo desarrollarías $(x-2)^2$?

E2: es equis, el doble de equis mmm, ¿Cómo sería?

P: Bueno ¿Cómo te quedaría? realízalo y me lo vas diciendo. (La alumna realiza cálculos).

E2: $x^2 - 4x - 4$

P: Entonces te quedaría $x^2 - 4x - 4$. ¿Qué pasaría si este resultado que te dio, lo multiplicamos por 3?

E2: mmm

P: ósea, este trinomio que te dio, por tres

E2: ¿por tres?

P: si, ¿Cómo te quedaría? Realízalo

E2: Pues aquí este se queda igual (refiriéndose al trinomio)

P: Aquí ¿cómo le harías para multiplicarlo?

E2: ah, para multiplicarlo

La alumna escribe: $(x^2 - 4x - 4)\ (3)$

P: Este lo puedes poner adelante (refiriéndose al 3), si quieres, lo puedes cambiar (la alumna escribe (*3*) ($x^2 – 4x - 4$)).

E2: se pasa igual este (refiriéndose x^2)

P: ¿Por qué? ¿Qué le hizo el tres? Está multiplicando

E2: ¿Seria tres al cubo?

P: ¿Porque al cubo?

E2: No, es que se pasa igual o ¿sería 3x al cuadrado?

P: ¿Por qué tres equis cuadrada?

E2: porque se está multiplicando, y luego (escribe el signo menos) tres por cuatro es igual a *12x*, como los dos son iguales (refiriéndose al signo) tres por cuatro igual a doce *12*.

En este momento la profesora observa lo realizado por la alumna y ambas lo revisan, la alumna se da cuenta que al desarrollar el binomio al cuadrado, el término independiente lleva signo positivo y no negativo.

E2: ¡ah! aquí sería más cuatro, si más y más.

Cambiando el signo a ($x^2 – 4x - 4$) y (*3*) ($x^2 – 4x - 4$), dejándolos como: ($x^2 – 4x + 4$) y (*3*) ($x^2 – 4x +4$)

P: ok, y si este trinomio (refiriéndose a $3x^2 – 12x + 12$) lo igualas a doce ¿Cómo te quedaría?

E2: ¿igual a doce?

P: Si, ¿Cómo te quedaría?

E2: mmm $3x^2 – 12x = 12$

P: ¿Qué hiciste?

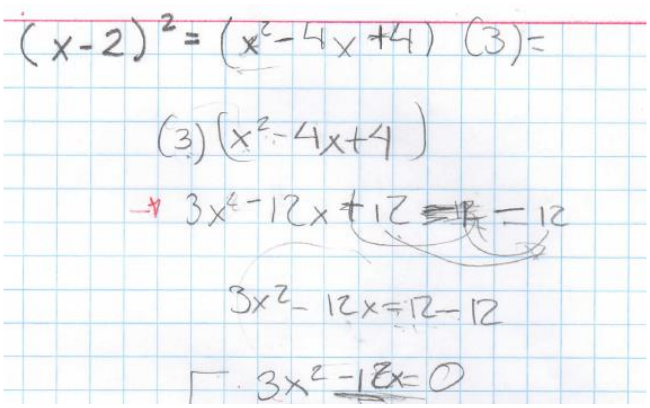


Figura 112

E2: Este lo cambie (refiriéndose al doce), lo simplifique

P: ¿y lo que tenías? Ahí tenías doce

E2: Si, pero aquí me equivoque

P: no te equivocaste porque yo te dije que lo igualaras

E2: ¡ah!, entonces así quedaría (señalando $3x^2 - 12x+12 = 12$)

P: ok, entonces aquí tienes más doce igual a doce

E2: entonces seria *24*, si, ¡ah ya sé cómo!

P: entonces ¿cómo te quedaría?

E2: así refiriéndose a $3x^2 - 12x = 12\text{-}12$

P: Entonces ya simplificándolo ¿Cómo quedaría el siguiente paso?

E2: Sería $3x^2 - 12x =$ y luego ya aquí se hace la resta *12-12*

P: ¿y cuánto te daría?

E2: cero

La alumna escribe $3x^2 - 12x = 0$

P: muy bien, entonces ¿cómo solucionarías esta ecuación? Refiriéndose a $3x^2 - 12x = 0$

Más tarde, intentó factorizar y no logró hacerlo, decide solucionarla por fórmula general (se muestra la alumna ya fastidiada) pero aun así logra llegar a las soluciones, como se muestra en la figura 113.

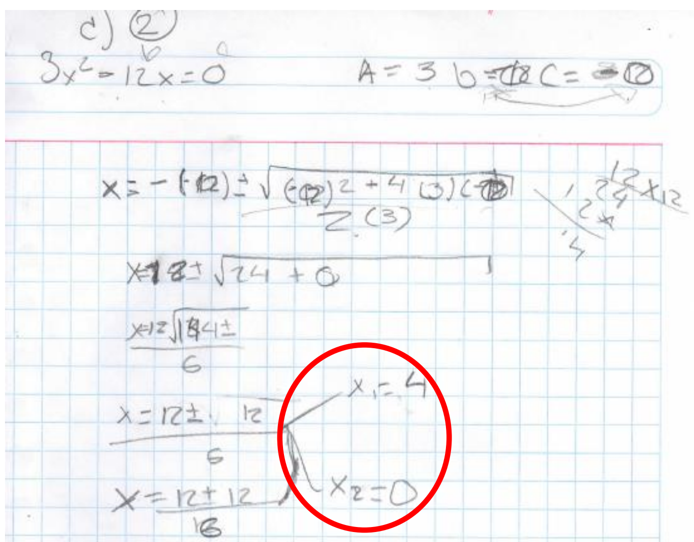


Figura 113

Después pasamos al siguiente inciso (Figura 114)

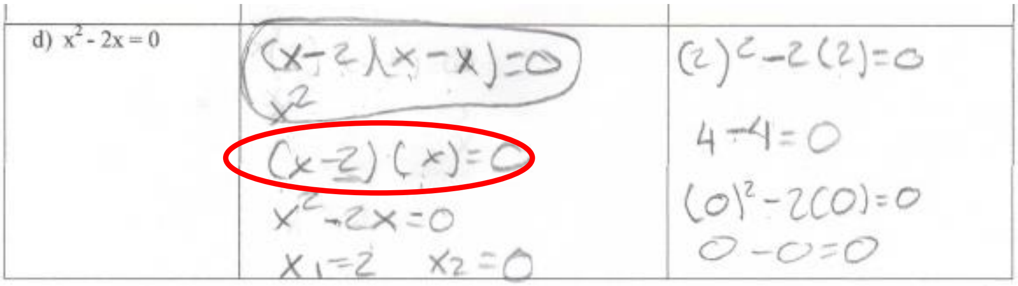


Figura 114

P: Continuamos con esta (refiriéndose al inciso d).
E2: La estaba intentando hacer de esta manera.
P: ¿cuál es esa manera? (la profesora observa que intentó factorizarla)
E2: No me acuerdo cómo se llama (la alumna observa varios errores), y dice: No, no es cierto, ya sé cómo.
P: A ver, no borres, si quieres hazlo aquí abajo, así deja eso por favor.
E2: Sería equis menos dos, equis, igual a cero (lo escribe cómo se muestra en el óvalo rojo).
P: Y ¿cómo te quedaría?
E2: equis por equis, equis cuadrada, dos por equis, menos dos equis.
P: Entonces ¿cuáles son las soluciones de equis?
E2: equis uno es igual a dos y equis dos es igual a menos dos
P: ¿a menos dos?
E2: No, a cero, perdón.
P: ¿De dónde sacaste este dos? (señalando equis uno igual a dos)
E2: De aquí, (señalando el factor equis menos dos)
P: Y la otra solución ¿cuál sería?
E2: cero
P: A ver, puedes hacer la comprobación
E2: (realiza cálculos) sí, sí está bien.

Es grato ver que para el inciso anterior (*d*) trató de solucionarla por medio de factorización, realizándolo exitosamente, y aunque es limitado su lenguaje matemático, da a entender lo que realiza, y conoce que puede dar solución a una ecuación cuadrática por medio de la factorización, es decir, se encuentra en concepción proceso de factorización.

Con respecto al inciso *c*, desafortunadamente, la alumna muestra que no ha reflexionado y sigue haciendo mecanización, es decir, requiere de estímulos externos para resolver este tipo de ecuaciones donde antes de darle solución requiere de pasos previos para llegar a la ecuación cuadrática.

Cabe mencionar que los incisos e, f y g, no alcanzó de tiempo para contestarlos, debido a que ya había tomado mucho tiempo la entrevista, y estaba cansada y fastidiada. La profesora decidió continuar con la sección cuatro.

En relación a lo anterior, consideramos que E2 se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues logra coordinar el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y la factorización, por otro lado, necesita estímulos externos para cierto tipos de ecuaciones, es decir cuando no tienen la forma general completa e incompleta directamente.

Posteriormente la profesora le proporciona la sección IV, pero desafortunadamente tampoco hubo respuestas favorables, si intentó resolverlas, pero no lo logró.

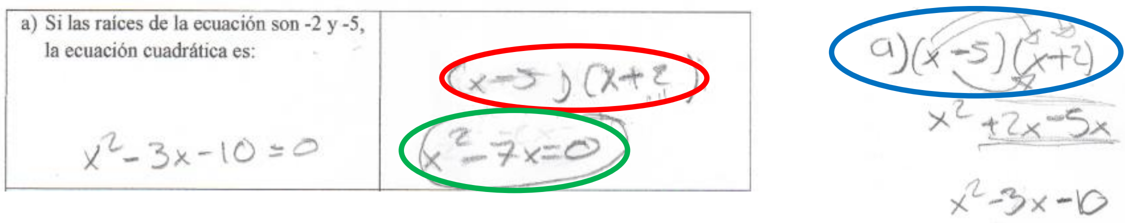


Figura 115

E2: Sería equis cuadrada, pudiera ser así entre paréntesis (señalando lo que está en el óvalo rojo) y sería, aquí podría poner un número que multiplicado de 2 y también 5

P: Ok, aquí te están dando las soluciones, lo que se pide es que nada estas soluciones tú encuentres las raíces, esto es una forma de encontrarlo (señalando nuevamente lo que se encuentra en el óvalo rojo).

E2: Pudiera ser cinco, pudiera ser uno y dos

P: Una pregunta ¿porque sería uno y dos?

Se brinca a resolver el inciso b de esta sección, cuando le da solución vuelve a este inciso, y menciona:

E2: Es que, ejemplo tengo una duda, podrían ser dos números multiplicados que den dos y cinco.

P:¿ porque con esos dos números?

E2: Es que no se me ocurre nada sería x cuadrada menos serían 5 y 2

P: Donde serían cinco y dos dónde los pondrías

E2: Aquí es cinco y el dos, (señalando lo que se encuentra en el óvalo rojo, la alumna escribe el producto de los dos binomios).

Después de varios titubeos e intentos de resolverlo, le pide a la profesora si puede desarrollar el producto de los binomios.

P: Este menos siete equis ¿dónde lo obtuviste? (señalando lo que se encuentra en el óvalo verde).

E2: de más dos equis y menos cinco equis.

P:¿y si te da menos siete equis? ¿Qué pasa cuando tienen signos diferentes?

E2: Se restan, entonces.

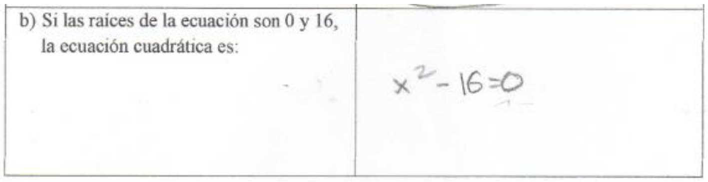
P: ¿cómo te quedaría?

E2: menos tres equis, menos diez

P: Y esto, ¿qué te representaría? (señalando equis cuadrada, menos tres equis, menos diez).

E2: La ecuación (y procede a escribirla en el espacio correspondiente).

Estando resolviendo el inciso *a*, pasa directamente a comentar lo siguiente, para solucionar el inciso *b*:


b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	$x^2-16=0$

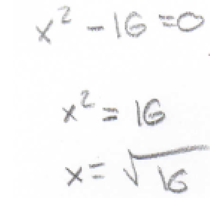


Figura 116

E2: Es que aquí podría ser equis menos dieciséis, igual a cero.

P: ¿Por qué? me cuentas qué es lo que hiciste

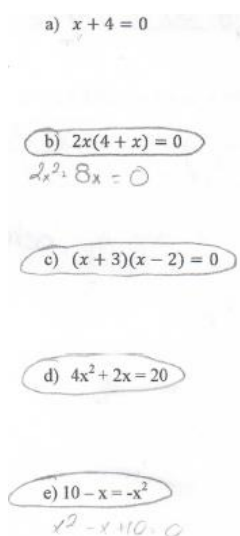
E2: Es que lo hice con el desarrollo de éste (señalando el inciso a, de la sección tres) a) $x^2 - 36 = 0$, pero con el dieciséis, igual a cero, qué es igual a dieciséis.

Podemos observar que intenta dar una ecuación incompleta, y necesita observar otra ecuación para darle la misma forma, pero no logró obtener la correcta, y no cuenta con argumentos para justificar su proceder, además intenta solucionarla para corroborar si le dan las dos soluciones.

En relación a lo anterior, E2 intuye cómo proceder, es decir, puede hacer uso de una factorización, pero comete imprecisiones, tanto al escribir, como al justificar, y si no se le cuestiona, no se percata de los errores, por esta razón determinamos que se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática.

6.5.3 Entrevista estudiante E3

Dentro de la entrevista, la estudiante E3 en la primera sesión identifica en su totalidad todas las ecuaciones cuadráticas, podemos observar que realizó algunos cálculos en los incisos (b) y (e).


a) $x+4=0$

b) $2x(4+x)=0$

$2x^2+8x=0$

c) $(x+3)(x-2)=0$

d) $4x^2+2x=20$

e) $10-x=-x^2$

$x^2-x+10=0$

Figura 117

P: me puedes decir ¿por qué el inciso (a) no lo seleccionaste?

E3: porque como no está elevado al cuadrado, ósea, está en exponente uno, no es cuadrática, en cambio las siguientes todas tienen un término cuadrado, por eso son ecuaciones cuadráticas.

P: muy bien.

En relación a lo anterior, consideramos que la estudiante E3, se encuentra en concepción objeto del concepto de ecuación cuadrática, pues muestra que interioriza acciones, ya que es capaz de determinar que una ecuación es cuadrática, aun cuando se presenta en forma de producto, es decir, que al desarrollarla obtiene como resultado una ecuación cuadrática, y justifica correctamente sus respuestas, e identifica ecuaciones cuadráticas completas e incompleta, además considera los incisos *b* y *c* como ecuaciones cuadráticas, es decir, coordina el proceso de expresión algebraica de segundo grado en forma de producto, con el de igualdad y genera el proceso de factorización.

Continuando con la entrevista, analizamos la segunda sección, podemos observar en la figura 118, que inicialmente escribió que el inciso *a* es verdadero, pero su justificación indica que es falsa, se da cuenta del error, y justifica correctamente su decisión, y brinda la respuesta correcta (óvalo rojo).

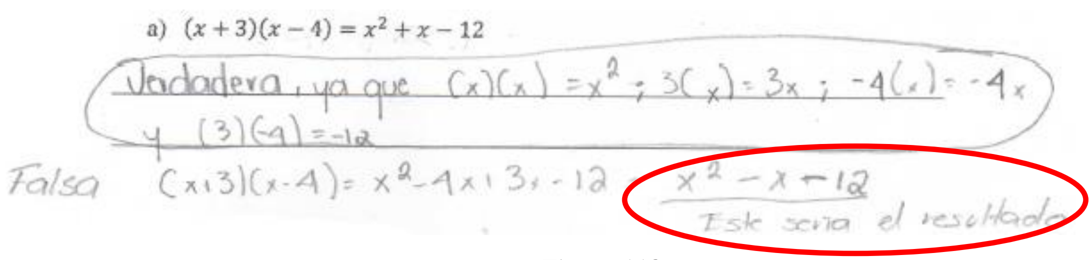


Figura 118

En el inciso *b* (figura 119) comenta que es verdadera, no se percata de que es un binomio al cuadrado, más adelante en la sección tres, que se presenta un binomio al cuadrado, observamos que sí lo identifica y justifica correctamente.

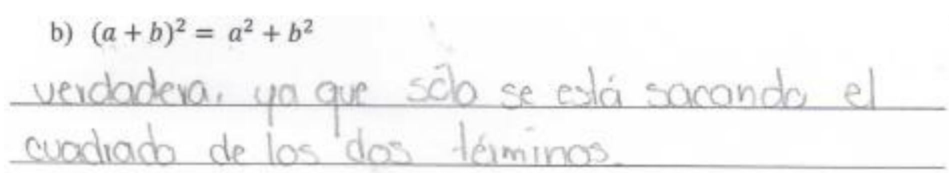
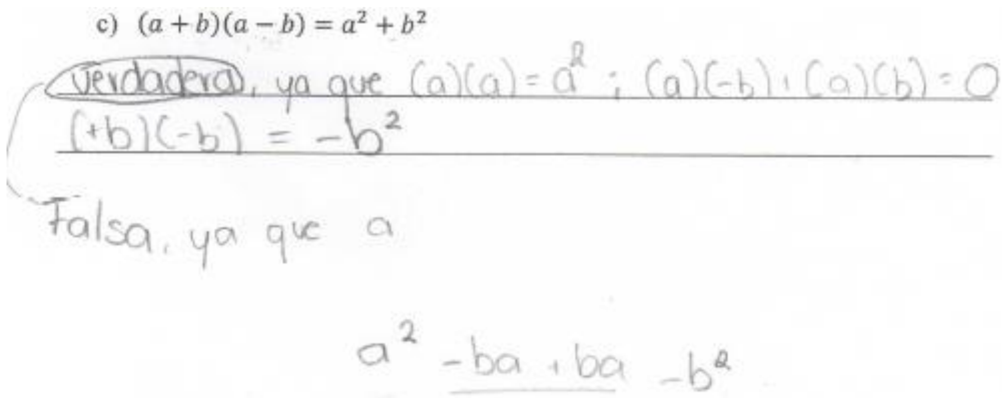


Figura 119

En el inciso *c* (figura 120) contesta acertadamente, justifica porque es falsa, desarrolla los binomios conjugados, y encuentra el error.


c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$

Verdadera, ya que $(a)(a)=a^2$; $(a)(-b)+(a)(b)=0$

$(+b)(-b) = -b^2$

Falsa, ya que a

$a^2 - ba + ba - b^2$

Figura 120

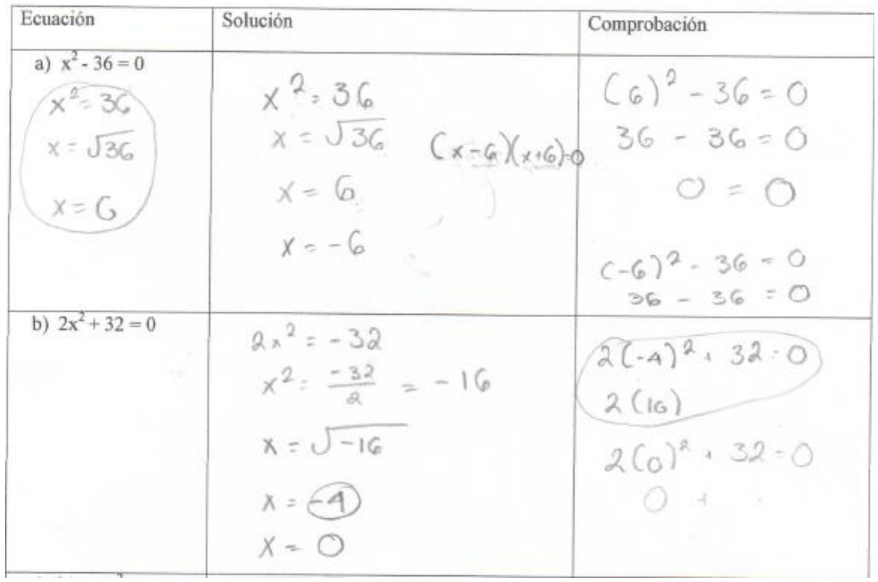
P: ¿Y en el inciso *c*?

E3: Falsa, ya que *a* por *a*, es *a* cuadrada, *a* por menos *b* es, menos *ab*, y *b* por *a*, *ba*, entonces esto se elimina (señalando -*ab* y +*ba*), y *b* por menos *b*, menos *b* cuadrada, y aquí lo están poniendo como *b* al cuadrado pero positivo, entonces también está mal.

P: Muy bien.

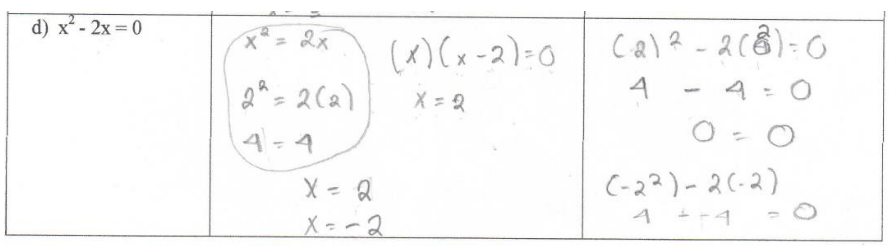
En este sentido, consideramos que la estudiante E3, se encuentra en concepción proceso de factorización, pues identifica que una expresión algebraica de segundo grado se escribe en forma de producto, a pesar de su respuesta incorrecta en el inciso *b* (la profesora conoce a la alumna, y esto atribuye a su nerviosismo en la entrevista), porque en la siguiente sección se encuentra con un binomio al cuadrado y lo desarrolla satisfactoriamente.

Por otro lado, cabe mencionar que en la en la sección III, la estudiante E3 solucionó seis de las siete ecuaciones por el método de factorización y una por despeje (figuras 121, 122 y 123), se analizarán el inciso *b*, ya que cuenta con un binomio al cuadrado y lo identificó, y en la primera sección no lo logró, también el inciso *g*, ya que una de sus raíces, no es número entero y consideramos importante su proceder ante esta situación.



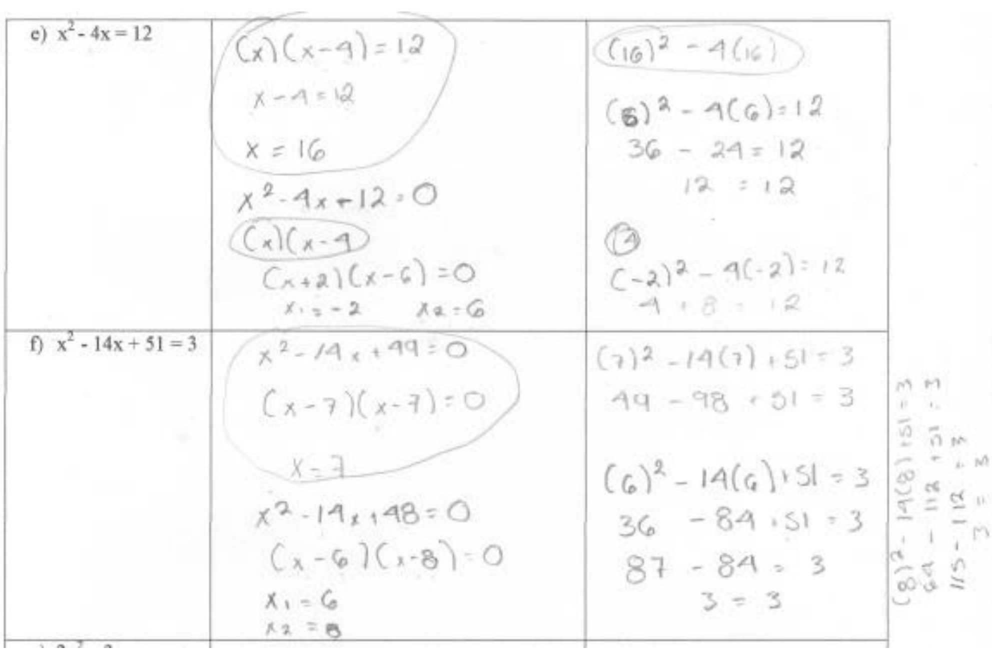
Ecuación	Solución	Comprobación
a) $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $x = 6$	$x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $(x-6)(x+6)=0$ $x = 6$ $x = -6$	$(6)^2 - 36 = 0$ $36 - 36 = 0$ $0 = 0$ $(-6)^2 - 36 = 0$ $36 - 36 = 0$
b) $2x^2 + 32 = 0$	$2x^2 = -32$ $x^2 = \frac{-32}{2} = -16$ $x = \sqrt{-16}$ $x = -4$ $x = 0$	$2(-4)^2 + 32 = 0$ $2(16)$ $2(0)^2 + 32 = 0$ $0 +$

Figura 121



d) $x^2 - 2x = 0$	$x^2 = 2x$ $2^2 = 2(2)$ $4 = 4$ $(x)(x-2)=0$ $x = 2$ $x = 2$ $x = -2$	$(2)^2 - 2(2) = 0$ $4 - 4 = 0$ $0 = 0$ $(-2^2) - 2(-2)$ $4 + 4 = 0$

Figura 122



e) $x^2 - 4x = 12$	$(x)(x-4) = 12$ $x - 4 = 12$ $x = 16$ $x^2 - 4x - 12 = 0$ $(x)(x-4)$ $(x+2)(x-6) = 0$ $x_1 = -2$ $x_2 = 6$	$(16)^2 - 4(16)$ $(6)^2 - 4(6) = 12$ $36 - 24 = 12$ $12 = 12$ (2) $(-2)^2 - 4(-2) = 12$ $4 + 8 = 12$
f) $x^2 - 14x + 51 = 3$	$x^2 - 14x + 49 = 0$ $(x-7)(x-7) = 0$ $x = 7$ $x^2 - 14x + 48 = 0$ $(x-6)(x-8) = 0$ $x_1 = 6$ $x_2 = 8$	$(7)^2 - 14(7) + 51 = 3$ $49 - 98 + 51 = 3$ $(6)^2 - 14(6) + 51 = 3$ $36 - 84 + 51 = 3$ $87 - 84 = 3$ $3 = 3$ $(8)^2 - 14(8) + 51 = 3$ $64 - 112 + 51 = 3$ $115 - 112 = 3$ $3 = 3$

Figura 123

Analizando lo realizado por la estudiante en el inciso *c*, podemos observar que inició multiplicando el tres, por cada término del binomio y luego lo elevó al cuadrado, y comentó:

“me queda un binomio al cuadrado” y recordó que antes de multiplicar por tres el binomio en la ecuación original, primero tenía que desarrollarlo y posteriormente multiplicarlo por tres y procedió a realizarlo.

c) $3(x-2)^2 = 12$	$(3x-6)^2 = 12$ $(x^2-4x+4)(3)=12$ $3x^2-12x+12=12$ $3x^2-12x=0$ $(x)(3x-12)=0$ $3x=12$ $x=\frac{12}{3}$ $\quad x=4 \quad x=0$	$3(4-2)^2=12$ $3(2)^2$ $3(4)=12$ $12=12$

Figura 124

P. En este paso, ¿qué hiciste?

E3: Multiplique este (señalando el 3) por los términos para después elevarlo al cuadrado.

P: ¿Considera que ese sería el primer paso para darle solución?

E3: Es que estoy entre sacar primer cuadrado de lo que está entre el paréntesis, y de hecho sí.

P: A ver, inténtalo de esa forma.

E3: (la estudiante realiza cálculos), me da equis cuadrada, menos cuatro equis, más cuatro.

P: ¿Que seguiría después?

E3: ahora sí, multiplicarlo por tres (la estudiante realiza cálculos).

P: ¿qué obtuviste?

E3: tres equis cuadrada, menos doce equis, igual a cero.

Podemos observar que lo desarrolla satisfactoriamente, y luego procede a usar el método de factorización para darle solución y llegar a ambas raíces.

Analizando el inciso *g*, a continuación se presenta su justificación:

g) $2x^2 = 3x$	$2x^2-3x=0$ $(x)(2x-3)=0$ $2x=3$ $x=\frac{3}{2}$ $x_1=1.5$ $x_2=0$	$2(1.5)^2=3(1.5)$ $4.5=4.5$ $2(0)^2=3(0)$ $0=0$

Figura 125

E3: me da decimal

P: A ver compruébalo para saber si son correctas, ¿Qué fue lo que hiciste para desarrollarlo? (señalando el inciso f)

E3: primero como estaba tres equis después del signo, tenía que igualarlo a cero, y la pasé después del signo, entonces me queda: dos equis cuadrada, menos tres equis, es igual a cero, y como las dos tienen de factor común equis, multipliqué equis, como primer binomio.

P: ¿es un binomio?

E3: no, bueno como factor, y lo multipliqué por dos equis menos tres y si me daba igual a cero, después dos equis es igual a tres porque el menos tres lo pase después del signo, y equis es igual a tres sobre dos, equis es igual a uno punto cinco.

P: ok, ¿y nada más esa es la solución?

E3: o cero

P: ¿Por qué cero?

E3: si porque se queda como factor del equis, igual a cero equis.

Posteriormente realiza cálculos para comprobar los resultados.

E3: ¿puedo hacer una multiplicación?

P: si, si quieres hazla acá abajo.

E3: si, si me da

P: ¿con que solución?

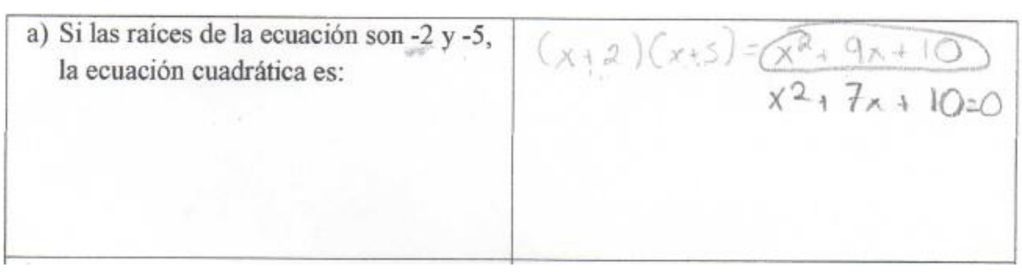
E3: con uno punto cinco.

P: ¿y con cero?

E3: pues igual (realiza cálculos) cero es igual a cero.

Por su desempeño en la sección tres, consideramos que E3 se encuentra en concepción objeto de solución de una ecuación cuadrática, pues coordina el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y el proceso de factorización, debido a que identifica que cada una de las ecuaciones presentadas tienen dos raíces o soluciones que satisfacen la ecuación y llega por medio de la factorización a ellas, y realiza la comprobación en cada una.

En la última sesión donde a partir de las raíces debían encontrar la ecuación, las realiza exitosamente, hace uso de la factorización para poder encontrar la ecuación cuadrática.



a) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	$(x+2)(x+5)=x^2+9x+10$ $x^2+7x+10=0$

Figura 126

E3: tengo que poner ¿Cuál es la ecuación cuadrática?

P: sí, dada estas raíces o soluciones, cual es la…

E3: seria la raíz por ejemplo de…

P: puedes hacer cálculos

E3: ósea, ¿estas serían los resultados?

P: sí, estas serían las raíces o soluciones, entonces se pide que con las soluciones encuentres la ecuación cuadrática.

E3: me la puedo inventar, ji ji, ¿sí?

P: nada más la justificas.

La estudiante realiza cálculos

P: ¿qué fue lo que hiciste?, ¿me platicas?

E3: es que como las anteriores se tenía que igualar a cero, entonces hice lo mismo, en el resultado puse uno que fuera dos y si en este era menos cinco puse uno que fuera cinco (señalando la factorización que realizó), entonces me quedó: equis más dos por equis más cinco, y al multiplicarlo para convertirlo en la ecuación, me da un trinomio, me da equis cuadrada, más nueve equis, más diez.

P: equis cuadrada, más nueve equis…

E3: más siete equis, perdón (realiza la corrección)

P: ¿Y esa sería la ecuación? (señalando $x^2 + 7x + 10 = 0$)

E3: si, y en esta (refiriéndose al inciso b).

b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	$(x)(x-16)=x^2-16x$

Figura 127

Realiza cálculos.

E3: me queda…

P: ¿Qué fue lo hiciste?

E3: pues como tengo que igualar a cero, pues equis ya se queda como el factor, sería equis, al multiplicarla el dieciséis también cambia al contrario para igualar a cero, entonces me quedaría: equis por equis menos dieciséis, y al resolver me da: equis cuadrada, menos dieciséis equis y esa seria.

P: muy bien.

Con base en lo anterior, la estudiante E3 coordina los procesos de: ecuación cuadrática, ecuaciones equivalentes y factorización, estos los encapsulan en el objeto de solución de ecuaciones cuadráticas, ya que la estudiante puede ejercer acciones sobre las soluciones de una ecuación cuadrática, pues determina una de las propiedades, debido a que con las soluciones o raíces, logró proponer una ecuación cuadrática que las satisface.

6.5.4 Entrevista estudiante E4

Continuando con la estudiante 4, es importante mencionar que por motivos técnicos, no se cuenta con el audio de la entrevista, aun así, se describen parte de sus justificaciones, ya que la profesora realizó anotaciones, y recuerda comentarios que manifestó la estudiante.

En la figura 128, podemos observar que en la primera sección, únicamente reconoce como ecuaciones cuadráticas los incisos *c*, *d y e*, ella justifica: el inciso *b “no es, porque no tiene equis cuadrada”* y “el inciso *c* es como factorización, los incisos *d* y *e*, porque tiene equis cuadrada”.

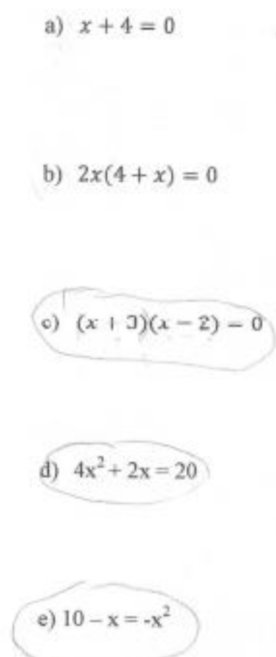


Figura 128

En relación a lo anterior, podemos determinar que la estudiante se encuentra en concepción proceso de concepto de ecuación cuadrática, pues identifica que el exponente más grande es dos, y logró identificar las ecuaciones completas, por otro lado, consideró el inciso *c* como ecuación cuadrática, el cual se presentó como producto de dos factores (factorización), pero el inciso *c*, es decir, no lo identifica como ecuación cuadrática, pues tiene forma incompleta, es decir, aun no coordina completamente el proceso de expresión algebraica de segundo grado en forma de producto, con el de igualdad y se encuentra en concepción proceso de factorización,

En la sección II, menciona: “el inciso *a* es falso por que el resultado debe de ser: x^2-*7x*-*12*”, se le pregunta qué fue lo que realizo y lo explica, al momento de estar explicando se percata que cometió un error, que sumó los términos lineales y los tenía que restar, posteriormente anota el resultado correcto.

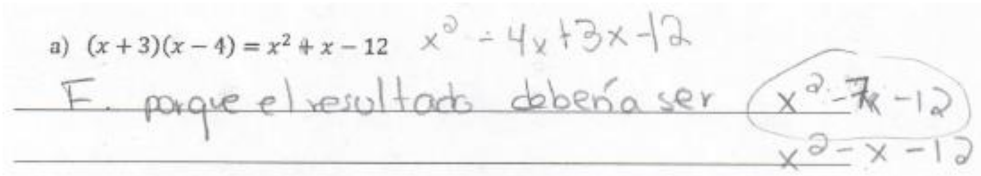


Figura 129

Dentro de esta misma sección el inciso *b* (figura 130), determinó que es verdadero, al preguntar su justificación dijo: "porque es el cuadrado de cada letra o número", después de esto, se le pregunta que si el binomio $(a+b)^2$ lo puede escribir de otra forma, y dice: "si este es como multiplicarlo dos veces" (señalando $(a+b)$ $(a+b)$), se le pide que lo escriba y que lo desarrolle, lo hace y se percata que como resultado es el trinomio $a^2+2ab+b^2$ y dice: "estoy mal".

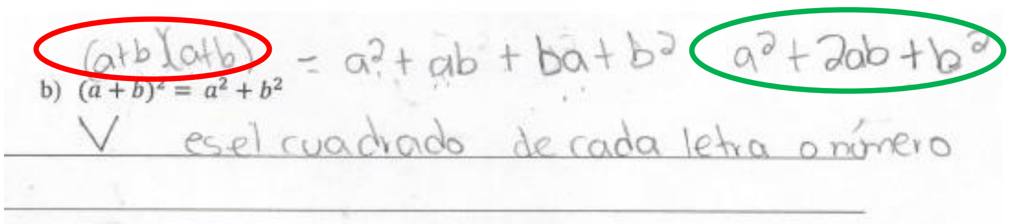


Figura 130

En el inciso *c* argumenta que es falso, porque el resultado debería ser con el signo menos, la profesora le dice: ¿cómo? Y dice: "si, es que debe ser: a^2-b^2", se le pregunta ¿Por qué? Y explica lo que realiza, es decir, va desarrollando los binomios, podemos observar que al simplificar, incurre en el error de sumarlos (errores en la suma algebraica), y solo identifica que debería ser el signo menos.

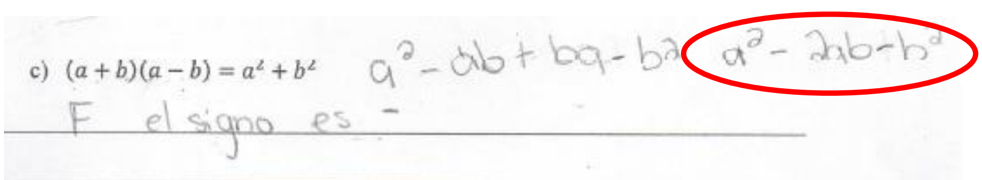


Figura 131

Podemos observar que E4 realiza acciones para poder emitir una respuesta, en esas acciones incurre en varias errores, consideramos que se encuentra en concepción proceso factorización, aunque al simplificar términos semejantes, no se percata de los signos, hasta que se le pide verificar sus resultados, pero sabe cómo corregirlos.

Por otro lado en la sección III de la entrevista, la estudiante soluciona todas las ecuaciones cuadráticas haciendo uso de la fórmula general, argumenta que se le facilita porque sigue una serie de pasos, al momento de escribir la fórmula la escribe de la siguiente manera: $\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}$, es decir, omite elevar al cuadrado *b* dentro del radicando y olvida poner el primer miembro de la ecuación (x=), después de un rato recuerda que le falta el dos del cuadrado, lo escribe y procede a iniciar a resolver la ecuación. En la figura 132, podemos observar que identifica los coeficientes cuadráticos y al ir desarrollando la fórmula general comete un error al multiplicar treinta y seis por cuatro, se percata del error y lo corrige.

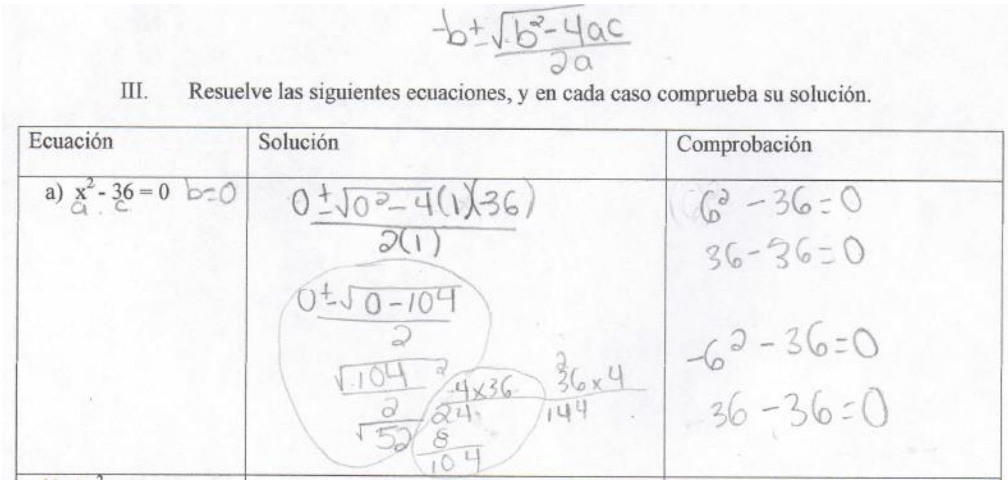


Figura 132

Al ir avanzando en el desarrollo de la fórmula vuelve a incurrir en otro error, debido a que multiplica treinta y seis por cuatro y deja el resultado como positivo, pues realizó la multiplicación sin signos y continuó, hasta que se percató del error.

En la figura 133, podemos observar que nuevamente incurre en otro error, en esta ocasión en jerarquía de operaciones ya que divide primero ciento cuarenta y cuatro entre dos, después de un rato reflexiona y menciona que primero debe de obtener la raíz cuadrada de ciento cuarenta y cuatro y luego el resultado dividirlo entre dos, logra solucionar la ecuación, lo corrobora con la comprobación.

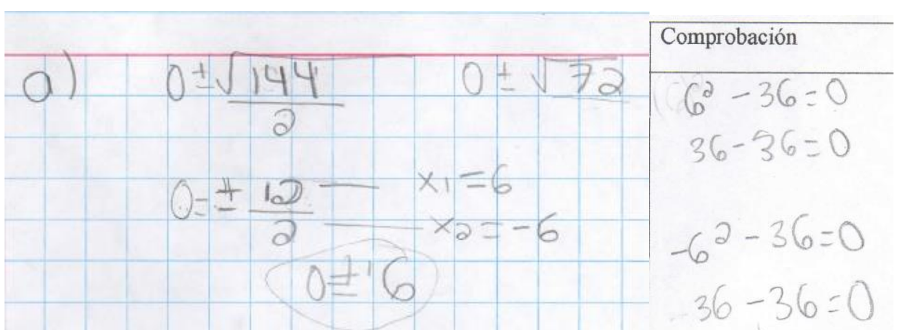


Figura 133

En las siguientes figuras 134 y 135, podemos observar que únicamente utiliza la fórmula general como método de solución, inicialmente identifica los coeficientes, para después sustituirlos en la fórmula general e ir dándoles solución, observamos que en su totalidad las resuelve de manera correcta y comprueba cada ecuación.

b) $2x^2+32=0$ a c b=0	$\frac{0\pm\sqrt{0^2-4(2)(32)}}{2(2)}$ $\frac{0\pm\sqrt{0-256}}{4}$ $\frac{0\pm\sqrt{-256}}{4}$	
c) $3(x-2)^2=12$ 12=0 $3x^2-12x=0$ a b c=0	$\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(3)(0)}}{2(3)}$ $\frac{12\pm\sqrt{144}}{6}$ $x^1=4$ $\frac{12\pm-12}{6}$ $x^2=0$	$3(4)^2-12(4)=0$ 144 - $3(16)-12(4)$ $48-48=0$ $3(0)-12(0)=0$ $0-0=0$
d) $x^2-2x=0$ a b c=0	$\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(0)}}{2(1)}$ $\frac{2\pm\sqrt{4-0}}{2}$ $x^1=2$ $\frac{2\pm\sqrt{4}}{2}$ $\frac{2\pm2}{2}$ $x^2=0$	$2^2-2(2)=0$ $4-4=0$ $0^2-2(0)=0$ $0-0=0$

Figura 134

e) $x^2-4x=12$ a b - $x^2-4x-12=0$ a b c	$\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-12)}}{2(1)}$ $\frac{4+\sqrt{16+48}}{2}$ $\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}$ $x^1=6$ $\frac{4\pm8}{2}$ $x^2=-2$	$6^2-4(6)-12=0$ $36-24-12=0$ 12 $36-36=0$
f) $x^2-14x+51=3$ a b c $x^2-14x+48$ a b c	$\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(1)(48)}}{2(1)}$ $\frac{14\pm\sqrt{196-202}}{2}$ $\frac{14\pm\sqrt{196-192}}{2}$ $\frac{14\pm\sqrt{4}}{2}$ $\frac{14\pm2}{2}$	$36-14(6)+48=0$ $36-84+48=0$ $84-84=0$ $x^1=8$ $64-14(8)+48=0$ $x^2=6$ $64-112+48=0$ $112-112=0$
g) $2x^2=3x$ $2x^2-3x=0$ a b c=0	$\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(0)}}{2(2)}$ $\frac{3\pm\sqrt{9-0}}{4}$ $\frac{3\pm\sqrt{9}}{4}$ $x^1=1.5$ $\frac{3\pm3}{4}$ $x^2=0$	$2(2.25)-3(1.5)=0$ $4.5-4.5=0$ $0=0$

Figura 135

En relación a lo anterior, E4 se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues coordina el proceso de ecuación cuadrática, el proceso de ecuaciones equivalentes y la factorización, debido a que soluciona haciendo uso de la fórmula general, al usar únicamente este método, la justificación que brinda es: “se me hace más fácil porque solo sigo pasos, y la voy haciendo”, aun así identifica que cada una de las ecuaciones cuadráticas tienen dos raíces o soluciones que satisfacen la ecuación, y realiza la comprobación en cada una.

Por otro lado, en la sección IV de la entrevista, E4 no la pudo contestar (figura 136), no lo intentó y argumentó que no sabía qué hacer, un factor que influyó es que está en concepción proceso en solución de ecuación cuadrática, pues aun no encapsula este proceso, para poder proponer ecuaciones cuadráticas con base en las raíces.

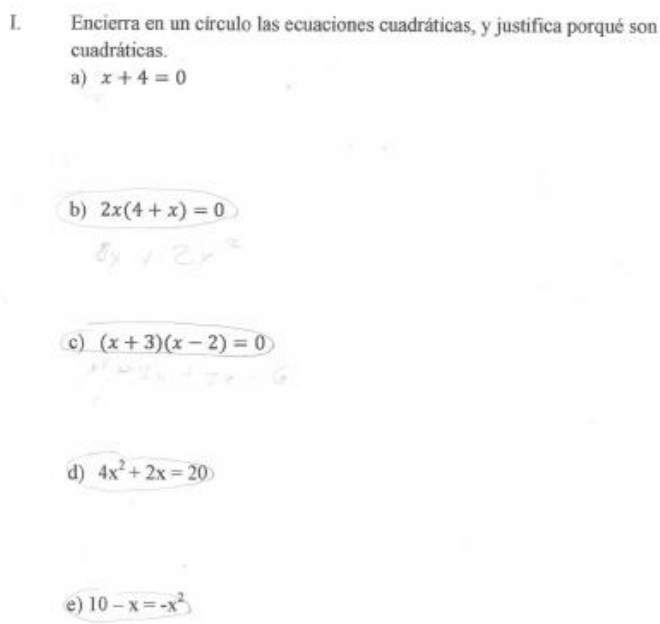
IV. Responde lo siguiente:

a) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	
b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	

Figura 136

6.5.5 Entrevista estudiante E5

En la primera sección, considera acertadamente que los incisos *b, c, d* y *e* son ecuaciones cuadráticas, excepto el inciso *a* (figura 137), además podemos observar que en los incisos *b* y *c* realiza algunos cálculos, a continuación se presenta su justificación:



I. Encierra en un círculo las ecuaciones cuadráticas, y justifica porqué son cuadráticas.

a) $x + 4 = 0$

b) $2x(4 + x) = 0$

$8x$ y $2x^2$

c) $(x + 3)(x - 2) = 0$

d) $4x^2 + 2x = 20$

e) $10 - x = -x^2$

Figura 137

E5: Son todas, menos la *a*.

P: A ver, ¿Por qué dices que la *a* no es cuadrática?

E5: Porque no tiene término cuadrático, la *x* está sola.

P: ok, y la *b*, ¿Por qué consideras que si es cuadrática?

E5: Porque dos equis se multiplica por cuatro más equis y al multiplicarlo genera dos equis cuadrada más cuatro equis, si ¿no?

Al percatarse que incurre en un error al realizarlo mental, la profesora le sugiere que lo realice escrito.

P: a ver, si quieres realízalo.

E5: ¡ah! si, ya me equivoqué, da ocho equis más dos equis cuadrada, son dos equis cuadrada más ocho equis.

P: muy bien, ¿y el inciso c?

E5: Porque el primero se multiplica por el segundo, es un binomio al cuadrado, se multiplican y genera una ecuación cuadrada, mmm, menos dos equis, más tres equis, menos seis, que viene siendo equis cuadrada, menos equis, menos seis.

P: ok, ¿y la siguiente, el inciso d?

E5: Porque tiene el término cuadrático de cuatro equis más dos equis igual a veinte.

P: ¿y la última?

E5: ¿Por qué nada más podemos pasar equis cuadrada al otro lado y es equis cuadrada, más diez, menos equis.

Al considerar E5 los incisos *b* y *c* como ecuaciones cuadráticas, es decir, muestra evidencia de que coordina el proceso de expresión algebraica de segundo grado en forma de producto, con el de igualdad y se encuentra en concepción proceso de factorización, es decir, sabe que al desarrollar el producto de los factores obtiene una ecuación cuadrática. Por otro lado, consideramos que se encuentra en concepción objeto del concepto de ecuación cuadrática, ya que determina que una ecuación es cuadrática tiene dos soluciones, además identifica ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, y justifica correctamente sus respuestas,

Después en la sección II, en el inciso *a* considera que es falso, porque cambiaría el signo que está después del término cuadrático.

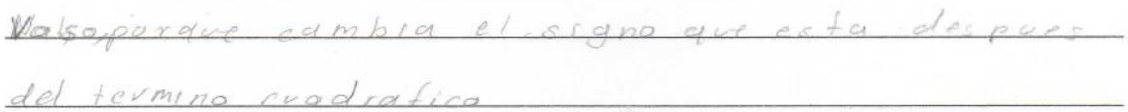


Figura 138

P: En el inciso a ¿consideraste que es verdadero? ¿Por qué?

E5: No, es falso

P: ¡ah perdón!, ah sí, falso ¿por qué es falso?

E5: Es que genera esto con diferencia del signo, nada más. (Señalando lo que se muestra en la figura 138).

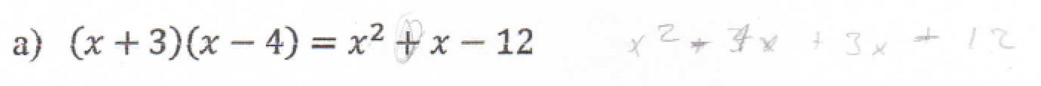


Figura 139

P: ¿de cuál signo?

E5: del que está entre ¿cómo se llama?

P: ¿Cómo quedaría el resultado?

E5: quedaría equis cuadrada, menos equis, menos doce.

P: Muy bien, ¿y en el inciso b?

E5 consideró inicialmente que el inciso *b* era verdadero y justifica que: “porque si elevamos al cuadrado cualquier número y/o letra la convertimos al cuadrado”.

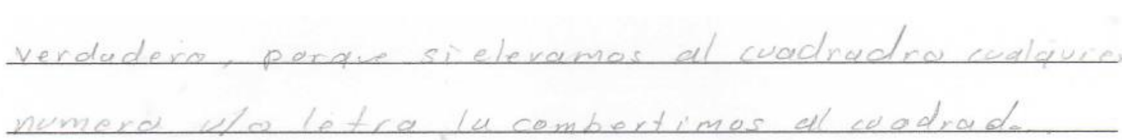


Figura 140

E5: es verdadero, porque aquí nada más se vuelve al cuadrado estos números, ¿estos números?, estas letras. (Señalando el binomio $(a+b)^2$.

P: Éste (señalando: $(a+b)^2$), a más b al cuadrado ¿podrías representarlo de otra forma?

E5: sí, con el mismo signo.

P: ah ¿lo puedes hacer por favor? ¿Cómo te quedaría?

E5: $(a+b)(a+b)$

P: y al momento de desarrollarlo ¿Qué tendrías como resultado?

E5: (realiza cálculos, al momento de desarrollarlos se da cuenta del error y le da risa, la profesora le dice: termínalo). Pues aquí está al revés (señalando lo del óvalo rojo).

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$a^2 + ab + ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 141

P: ¿Qué pasa cuando están así?

E5: Pues no se pueden eliminar porque tienen que ser iguales.

P: Entonces ¿*ab* podías decir que es lo mismo que *ba*?

E5: no

P: por ejemplo si *ba*, lo cambio a *ab* ¿no me representaría lo mismo?

E5: si son letras sí

P: y en números ¿no?, por ejemplo: 7 por 5 y 5 por 7, ¿representará lo mismo?,

E5: sí, también.

P: entonces ¿Cómo te quedaría?

E5: nada más se tendrían que eliminar estos (señalando lo del óvalo rojo).

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$a^2 + ab + ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 142

P: ¿Por qué los eliminas?

E5: porque son iguales

P: aja ¿y cuando son iguales se eliminan?

E5: se suman o se pueden eliminar

P: en este caso ¿Qué puedes hacer: eliminarlos o sumarlos?

E5: pues…

P; ¿Qué determina si los eliminas o los sumas?

E5: estos no los podría sumar, porque no sería ab cuadrada, porque se están sumando

P: ok, pero si tu pones ab cuadrada ahí no los estas sumando, los estas…

E5: (interrumpe el estudiante) multiplicando

P: pero aun así no te daría eso, ¿Qué te daría sumados?

E5: dos ab

P: entonces ¿Cómo te quedaría el trinomio?

E5: a cuadrada, más dos ab, más b cuadrada

P: entonces ya después de determinar, ¿qué consideras, que sigue siendo verdadera?

E5: es falsa.

Continúa con el inciso *c*, E5 indica que es verdadera, como lo muestra la figura 143:

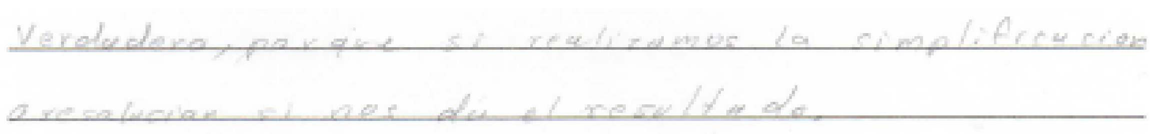


Figura 143

Como justificación comenta, que si la solucionan sí da el resultado, pero al momento de justificarla verbalmente comenta que no está seguro, por lo del inciso anterior, y el solo comienza a analizar si es verdadera o falsa.

P: El inciso *c* consideras que es verdadera, ¿Por qué?

E5: bueno, es que antes de resolver esta (señalando el inciso *b*), estaba seguro, pero ahora ya no.

P: A ver, ahora qué harías diferente o ¿Cómo lo justificarías?

E5: mmm, pues ahorita a lo que vi al resolver la anterior, vi que es falso, aunque podría ser que no, porque se está restando (realiza cálculos).

P: ¿Por qué consideras que es más b cuadrada? (señalando lo el signo que está en el círculo rojo).

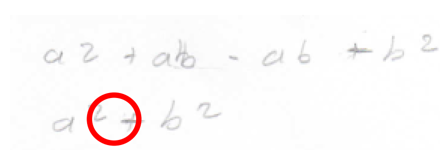


Figura 144

E5: porque si se multiplica más por menos, siempre da menos.

P: entonces ¿Cómo te quedaría?

E5: menos b cuadrada, porque el signo se cambia aquí.

P: entonces ¿falsa o verdadera?

E5: falsa

P: ¿Por qué?

E5: porque aquí es menos, no más (señalando el signo que se encuentra en el círculo rojo).

En este sentido, consideramos que E5 se encuentra en concepción proceso de factorización, debido a que identifica que las ecuaciones cuadráticas se puede escribir como un producto, al realizar acciones en los productos notables, identifica los errores, en este sentido, se encuentra en proceso de factorización.

En la sección II, el inciso *a* podemos observar que lo resolvió por despeje, pero solamente presentó la solución positiva, la profesora se percata de eso, y le pregunta:

Ecuación	Solución	Comprobación
a) $x^2 - 36 = 0$	$x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $x_1 = 6$ $x_2 = -6$	$(-6)^2 - 36 = 0$ $36 - 36 = 0$

Figura 145

P: en el inciso *a* ¿Qué método usaste, como la resolviste?

E5: pues solo estuve pasando lo que viene siendo el treinta seis al lado opuesto, luego después de ahí pase la raíz cuadrada de equis a treinta seis, le saque la raíz cuadrada, para que saliera el resultado de seis.

P: entonces la raíz cuadrada de treinta y seis ¿es seis?

E5: si, seis por seis, treinta y seis

P: ¿y nada más es esa solución para la raíz cuadrada de treinta y seis? ¿o puede haber otro número que también pueda satisfacer la raíz cuadrada de treinta seis?

E5: mmm no

P: a ver ¿una ecuación cuadrática, cuantas soluciones puede tener?

E5: dos

P: y aquí nada más estás dando una ¿Cuál sería la otra?

E5: mmm (realiza cálculos)

P: de este paso donde tienes $x=\sqrt{36}$, ya presentas una solución ¿Cómo obtendrías la otra solución?

E5: menos seis, no, mmm

P: ¿Por qué no?

E5: porque viene siendo menos seis, por menos seis, ¡ah no, si!, porque se multiplican los dos signos.

P: Entonces ¿la otro solución cual sería?

E5: sería: menos seis.

Después de esto, la profesora le hace las siguientes preguntas, para que el alumno reflexione sobre lo que realizó.

P: Entonces, mira, de aquí *x=√36*, tú ya sacaste dos soluciones, ¿qué puedes determinar, respecto a eso?, respecto a la raíz cuadrada.

E5: bueno si la raíz cuadrada está empleada en una ecuación, hay dos soluciones, pero si no, solo una, siempre que la ecuación fuera cuadrática.

P: y en otro contexto ¿no tiene dos?

E5: puede que sí.

P: pues sería la operación raíz cuadrada, entonces ¿una raíz cuadrada en otro contexto puede tener dos soluciones?

E5: sí

Enseguida resuelve el inciso *b*, podemos observar que despejó *x*, pero le da *x=√-16*, obtiene dos soluciones *-4* y *4*. Al momento de querer comprobar no da la comprobación y argumenta que no puede solucionarla porque para que le dé menos dieciséis debe de ser un número positivo y otro negativo, y no se puede.

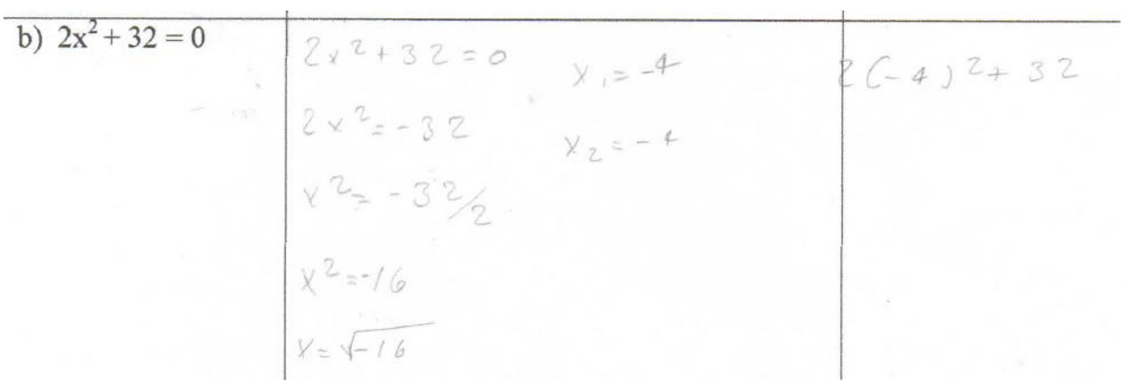


Figura 146

P: ¿te dio la solución?, me puedes platicar qué fue lo que hiciste.

E5: Estoy pasando los términos, bueno igual ando lo acero, nada más la x pues quitándole el dos y la raíz cuadrada, y él treinta y dos (su justificación muestra que está despejando x, para obtener sus soluciones), me queda raíz cuadrada de menos dieciséis.

P: ¿qué te da, sacar la raíz cuadrada de menos dieciséis?

E5: menos cuatro y más cuatro.

P: menos cuatro y más cuatro, ¿cumplen para que te dé menos dieciséis?

E5: Pues para que dé menos dieciséis en una raíz cuadrada, debe de ser un número positivo y un número negativo.

P: ¿Y si puede ser posible en una raíz cuadrada negativa?

E5: Mmm

P: ¿Si existe un número que multiplicado por sí mismo te dé menos dieciséis?

E5: ¿Con el signo o sin el signo? (señalando el radicando menos dieciséis).

P: Con signo

E5: Con el mismo signo no, porque sí si es menos, menos por menos da más, y si es más, más por más da más, tendría que ser menos por más, o más por menos (refiriéndose a qué tiene que ser un número positivo y un número negativo, y viceversa).

P: Entonces ¿qué puedes concluir cuando tienes una raíz de un número negativo?

E5: Mmm

P: ¿si la podrá solucionar, si puedes encontrar un número que multiplicado por sí mismo te dé menos dieciséis?

E5: Se podría y a la vez no, porque aquí me han dicho que una raíz cuadrada de menos dieciséis si se puede sacar, pero con un proceso más difícil, cuándo es un número negativo es un proceso más difícil, más largo, en otras escuelas me han dicho qué de cero para bajo, negativos no se puede sacar.

P: Entonces ¿podría solucionarla en este momento?

E5: No

En la figura 147, podemos observar, primero intenta desarrollar el binomio al cuadrado, pero incurre en el error de únicamente elevar al cuadrado cada término del binomio, la profesora le comenta que está de acuerdo en que primero se realiza el binomio al cuadrado, pero que en la forma en que lo hizo no es la correcta, y le pregunta que puede el binomio representarlo de otra manera, y lo representa como *(x-2) (x-2)*, luego lo desarrolla exitosamente.

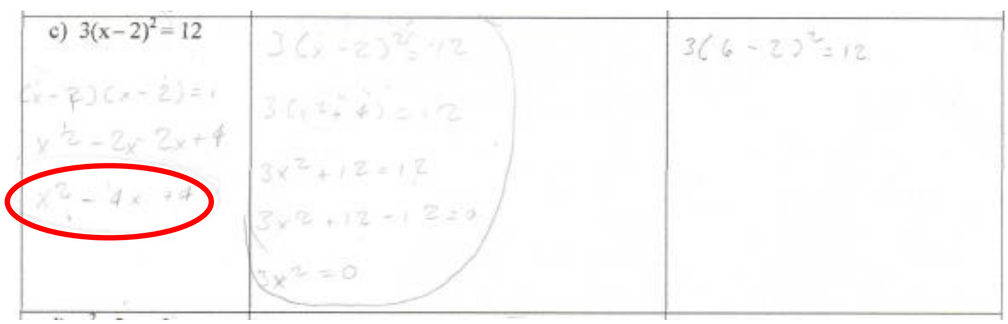


Figura 147

Después de desarrollar el binomio al cuadrado, lo multiplica por tres y cambia el doce del segundo miembro de la ecuación, al primer miembro de la ecuación, reduce términos semejantes y obtiene la ecuación cuadrática equivalente lista para proceder a solucionarla, y propone los factores (*3x-4) (x+3)*, realiza la multiplicación de estos factores y se percata que no coincide con $3x^2-12x=0$ (figura 148) y no intenta solucionarla por el método de ecuación cuadrática.

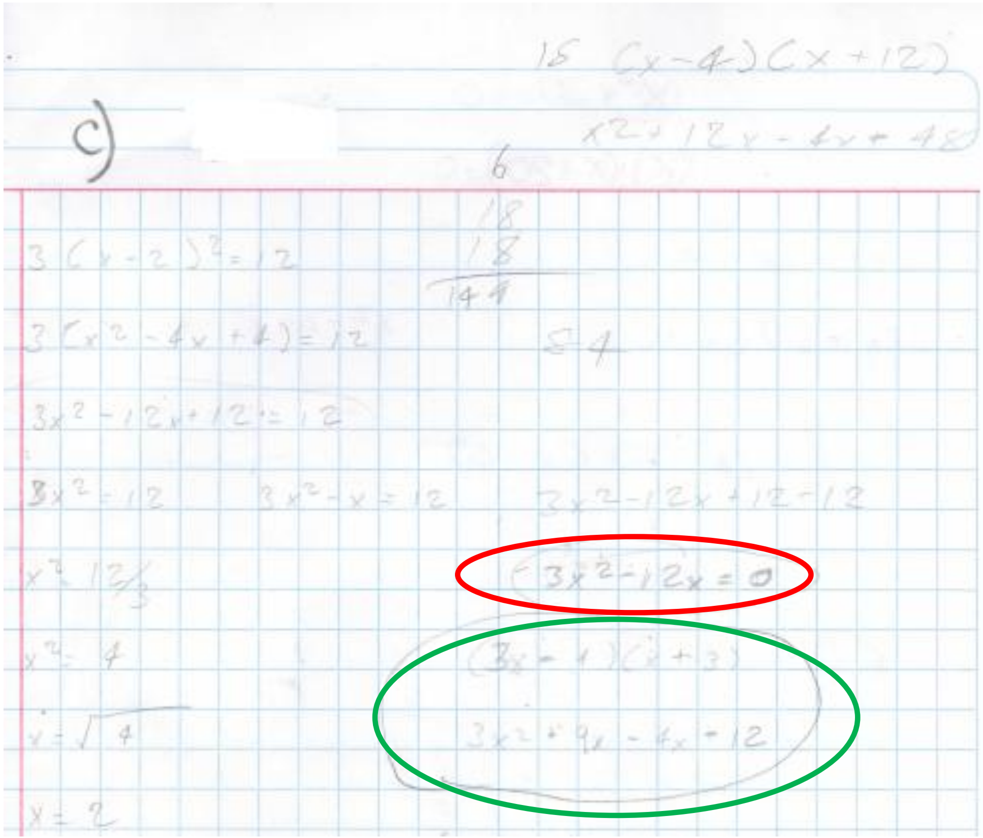


Figura 148

P: ¿de qué forma puedes acomodar los factores para que llegues a esto (señalando $3x^2$-$12x=0$).

E5: No

P: ¿quieres continuar, solucionarla por otro método?

E5: No

P: Muy bien, pasamos a la siguiente, para que te despejes y después regresamos a esta.

Por cuestiones de tiempo, desafortunadamente ya no hubo tiempo de regresar a esta ecuación.

Pasando al incido *d* (figura 149) podemos observar que tampoco pudo factorizarla exitosamente, y el alumno E5 se bloqueó y no logró darle solución.

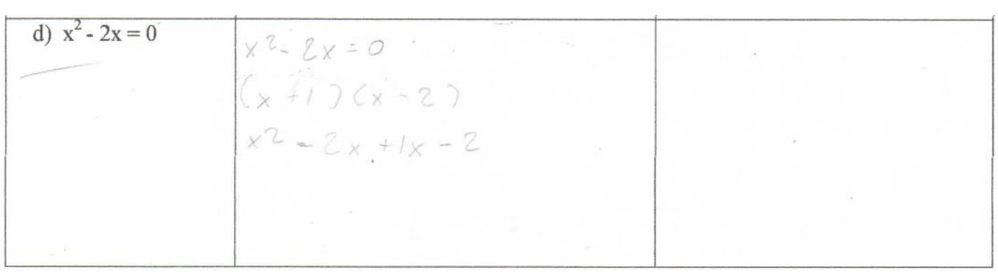


Figura 149

Posteriormente, siguió resolviendo las siguientes ecuaciones, inciso *e* y *f*, eligió el método de factorización para resolverlas, en estas podemos observar que al simplificar resultan ecuaciones cuadráticas completas y en ambas logra factorizarla correctamente para dar las raíces de cada una y realizar las comprobaciones correspondientes.

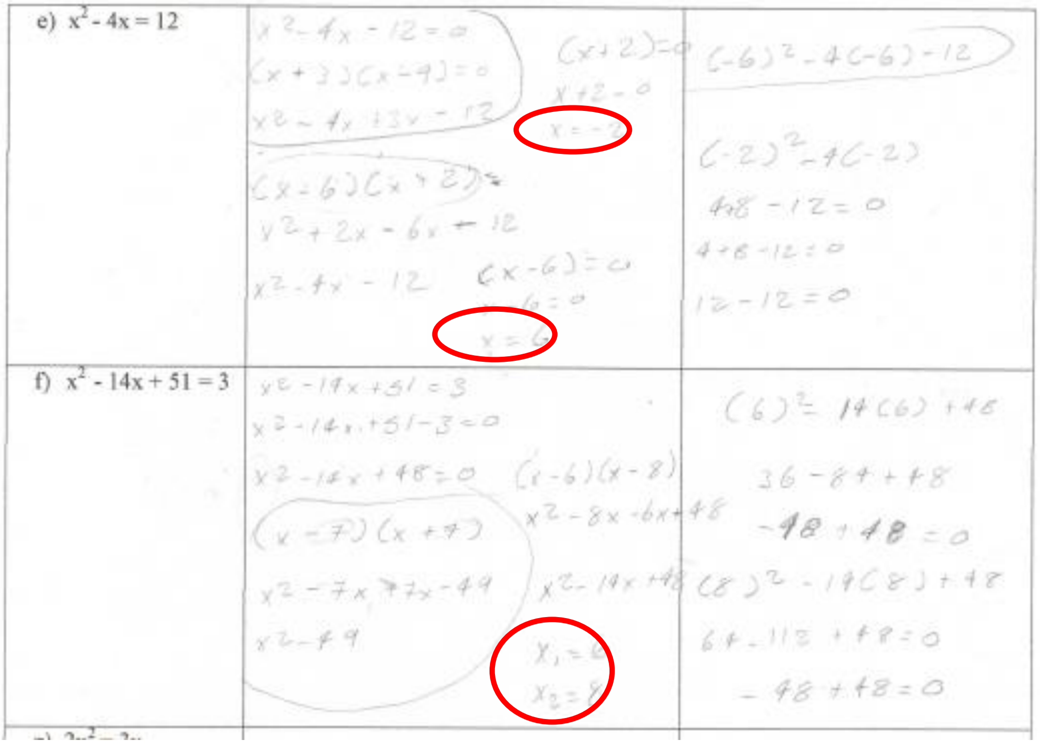


Figura 150

En el inciso *g* (figura 151) donde se presenta otra ecuación cuadrática incompleta, podemos observar que no logra obtener los factores, y tampoco trata de usar el método de la fórmula general para solucionarla y decide dejarla así.

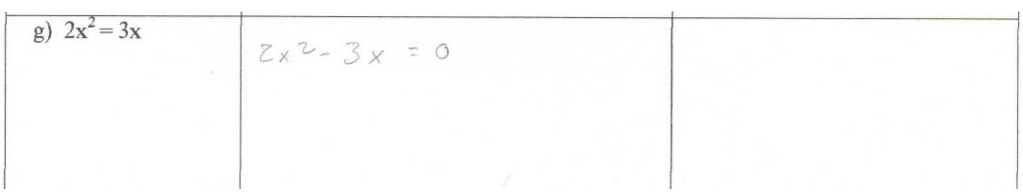
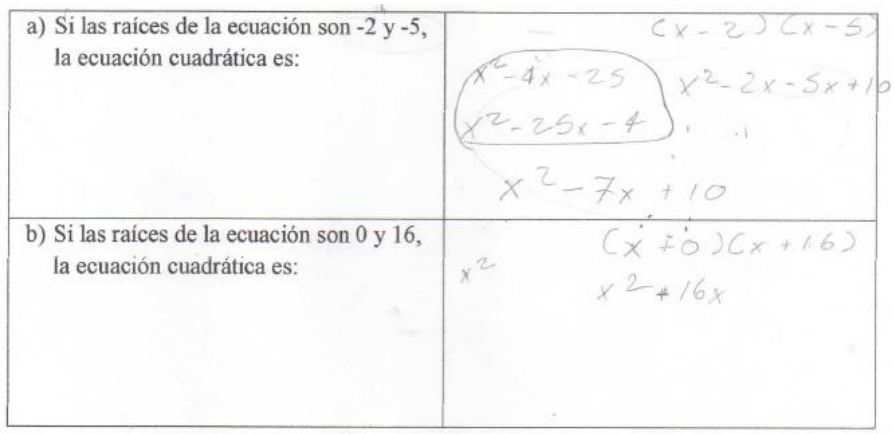


Figura 151

Podemos observar que E5 no logró factorizar ecuaciones cuadráticas incompletas y no contempla el método de factorización para solucionarlas, podemos determinar que encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues en las ecuaciones que solucionó identifica que tienen dos raíces o soluciones que satisfacen la ecuación y logra realizar la comprobación de estas.

En la figura 152, observamos que E5 tiene idea de cómo proceder, es decir, puede hacer uso del proceso de factorización y el proceso de solución de ecuación cuadrática, pero no lo logra encapsular, pues no identifica que las debe plantear los factores con signos contrarios, para que al desarrollar los productos concuerde con las raíces propuestas, y erróneamente las plantea con el mismo signo de las raíces, e incurre en el error, la ecuación cuadrática que propone, no corresponde con la raíces que se proporcionaron, por tal motivo E5 se encuentra en concepción proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues no opera satisfactoriamente con las raíces de una ecuación cuadrática.



a) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	$(x-2)(x-5)$ $x^2-4x-25$ $x^2-25x-4$ $x^2-2x-5x+10$ $x^2-7x+10$
b) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	$(x+0)(x+16)$ x^2 x^2+16x

Figura 152

6.6 Análisis general de la entrevista

En la siguiente tabla se concentró la concepción en que se encuentran los estudiantes según la descomposición genética preliminar con base en la entrevista, después de aplicar el ciclo de enseñanza.

	Expresión algebraica de segundo grado	Factorización	Concepto de ecuación cuadrática	Solución de ecuación cuadrática
Proceso	E1 E2 E3 E4 E5	E2 E4 E5	E1 E2 E4	E1 E2 E4 E5
Objeto		E1 E3	E3 E5	E3

Tabla 10. Análisis general de la entrevista

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En este capítulo se describen las conclusiones que se desprenden de este trabajo de investigación, las cuales se presentan de la siguiente manera: primero se las conclusiones con respecto a la descomposición genética del concepto ecuación cuadrática en el nivel secundaria, cuyo objetivo es validar la descomposición genética después de la aplicación de la enseñanza. Después se describen las conclusiones con respecto al ciclo de enseñanza y por último las conclusiones con respecto al aprendizaje del concepto ecuación de estudio.

7.1 Conclusiones con respecto a la Descomposición Genética del Concepto Ecuación Cuadrática y su solución en el nivel secundaria

Con base en nuestra pregunta de investigación, las construcciones y mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética por los cuales debe transitar un estudiante en el nivel secundaria, tienen como objetivo la comprensión del concepto de ecuación cuadrática de una forma geométrica y algebraica,

Se destaca la importancia de realizar inicialmente acciones concretas sobre el área de figuras planas (cuadrados y rectángulos), las cuales son imprescindibles para desarrollar y lograr la construcción del objeto de ecuaciones cuadráticas.

Empezamos con la construcción de área de una figura geométrica (cuadrado y rectángulo) como producto numérico, geométrico y algebraico. Inicialmente, al realizar acciones sobre áreas numéricas permitió que los estudiantes reconocieran el tipo de figuras que se trataba y la obtención de sus áreas, lo cual facilitó la coordinación con el proceso de área como producto numérico y algebraico, pues el estudiante es capaz de advertir que no existe diferencia entre la longitud numérica y la longitud algebraica, además utiliza el mecanismo de reversión, ya que al conocer el área, puede determinar la medida de las dimensiones de forma numérica y algebraicamente.

En este sentido, el mecanismo de coordinación se da entre el proceso de área como producto numérico, geométrico y algebraico, con el proceso de composición y descomposición de figuras (cuadrado y rectángulo), con esta coordinación el estudiante es capaz de representar el área en forma de expresión algebraica cuadrática y en forma de producto, y al desarrollar el área en forma de producto puede notar que es igual al área expresada en forma de expresión algebraica cuadrática, es aquí donde se presenta nuevamente el mecanismo de coordinación, ahora entre el proceso de igualdad y el proceso de área como expresión algebraica cuadrática, dicha coordinación genera el proceso de factorización. En este punto, es pertinente mencionar que, tal como lo sugiere la teoría APOE para el nivel básico, el trabajar con material concreto, en este caso, en la composición de figuras, las cuales dan como resultado el área en forma de expresión algebraica cuadrática y en forma de producto, permitió que los estudiantes visualizaran la equivalencia entre ambas, y esto favoreció el proceso de factorización.

Posteriormente se trabajó la coordinación entre el proceso de área como producto algebraico, el proceso de expresión algebraica cuadrática y el proceso de ecuación para generar el proceso de ecuación cuadrática, esto implico que el estudiante fuera capaz de diferenciar una ecuación lineal de una ecuación cuadrática, pues reconoce que el exponente más grande en una ecuación cuadrática es dos, además reconocer una ecuación cuadrática de tipo: $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+bx=0$ y $ax^2+c=0$, ya que de varias ecuaciones los estudiantes tenían que identificar el tipo de ecuación que se les solicita, luego al componer rectángulos, y presentar el área en forma de producto de la figura geométrica están coordinando los procesos de ecuación cuadrática, factorización y ecuaciones equivalentes, y a partir de ahí, encontrar los valores de la ecuación cuadrática, es decir, la coordinación de estos procesos generó el proceso de solución de una ecuación cuadrática, pues el estudiante puede reconocer que una ecuación cuadrática tiene dos raíces o soluciones que satisfacen la igualdad.

Por último, al transitar por las construcciones y mecanismos mentales antes mencionados, y poder lograr la construcción objeto del concepto de ecuación cuadrática, el estudiante tiene que transitar por el mecanismo de encapsulación en el proceso de ecuación cuadrática, el cual le permitió operar con las soluciones de una ecuación cuadrática, para poder determinar sus propiedades.

En este sentido, y respondiendo a nuestro segundo objetivo de la investigación, consideramos que las construcciones y mecanismos mentales que se proponen en la descomposición genética favorecen la comprensión del concepto de ecuación cuadrática, al trabajarlo desde un enfoque geométrico y algebraico, ya que así lo evidencia la entrevista realizada.

7.2 Conclusiones con respecto al Ciclo de Enseñanza del concepto Ecuación Cuadrática y su solución en el nivel secundaria

En relación al primer objetivo de nuestra investigación, se propuso la descomposición genética para el concepto de ecuación cuadrática, la cual nos permitió diseñar el ciclo de enseñanza para transitar por las construcciones y mecanismos mentales que se proponen en la misma, y con ello, lograr la comprensión del concepto de ecuación cuadrática en el nivel secundaria.

Al trabajar con la teoría APOE en el nivel básico, se recomienda iniciar con acciones en objetos concretos, para que sea posible que el estudiante transite por cada estructura y mecanismo mental que se proponen en la descomposición genética. En nuestro ciclo de enseñanza trabajamos con áreas donde los estudiantes al manipularlas podían componer figuras geométricas (cuadrados y rectángulos) y obtener su área en forma de expresión algebraica cuadrática y en forma de producto, las cuales son equivalentes, esto favoreció al proceso de factorización.

De acuerdo a lo anterior, y al tratarse de un concepto que involucra muchos saberes matemáticos, toma importancia el trabajar detalladamente cada uno, por ello, en nuestro ciclo de enseñanza consideramos todas las formas posibles en las que se puede presentar una ecuación cuadrática, para lograr su comprensión de forma geométrica y algebraica.

Consideramos que al trabajar las ecuaciones cuadráticas de manera geométrica, y visualizar la relación entre el área de la composición de figuras en forma de expresión algebraica cuadrática y en forma de producto, facilitó la comprensión del concepto, además las discusiones grupales ayudaron a los estudiantes a reflexionar sobre las actividades realizadas, y a plantearse cuestiones que no habían quedado comprendidas durante la actividad. La intención de que el profesor sea el guía de las discusiones grupales, es lograr el paso por los mecanismos que se requieren para generar las construcciones para la comprensión del concepto de ecuación cuadrática.

En este sentido, consideramos adecuadas cada una de las actividades propuestas, ya que logró el objetivo descrito en nuestro análisis a priori. Únicamente, en cuanto a la actividad 6, donde se requiere solucionar ecuaciones cuadrática por medio de la fórmula general, consideramos que se puede mejorar, pues desafortunadamente la trabajamos de esa manera por la falta de tiempo, ya que es un factor muy importante y que se debe tomar en consideración, debido a que muy pocas veces empata el tiempo estimado para una actividad, con el tiempo real.

En relación a nuestro tercer y último objetivo, se brindan sugerencias didácticas al abordar el estudio de ecuación cuadrática:

- Es recomendable realizar una evaluación diagnóstica, tomando en consideración los conocimientos previos que se requieren para comenzar el estudio del concepto de ecuación cuadrática.
- Recomendamos trabajar con material concreto la enseñanza del concepto de ecuación cuadrática, implementado de una manera responsable y siempre cuidando, que únicamente sea un medio y no el foco principal.
- Se recomienda trabajar de manera conjunta el concepto de ecuación cuadrática, de forma geométrica y algebraicamente, para lograr la relación entre ambas, ya que esto favorece la comprensión del concepto de factorización.
- Se recomienda trabajar las actividades en grupo, pero al realizar las conclusiones sean de forma individual, ya que en ese momento el estudiante reflexionará lo realizado en las actividades.
- Es recomendable que el profesor, únicamente sea un guía y haga énfasis en los conceptos importantes de cada actividad, para dar formalización.

7.3 Conclusiones con respecto al aprendizaje del concepto ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria

Con respecto al aprendizaje del concepto de ecuación cuadrática, después de aplicar nuestro ciclo de enseñanza y la entrevista, se rescata una comparación entre el cuestionario diagnóstico y la entrevista, con reactivos que implican la aplicación del concepto de ecuación cuadrática. Cabe mencionar que, al implementar nuestro ciclo de enseñanza los estudiantes ya habían estudiado en la asignatura de matemáticas III este concepto, sin embargo ello no se ve reflejado en el cuestionario diagnóstico.

Podemos observar en la tabla 11, que en la entrevista E1, muestra evidencia de comprender la igualdad entre la factorización respecto a la ecuación cuadrática generada, pues identifica como falsos los tres incisos, en los incisos a y c identifica los errores correctamente, y en el diagnóstico no.

Diagnóstico	Entrevista
a) $(x+3)(x-4)=x^2+x-12$ Falso porque falta es $y^2+4x-12$ b) $(a+b)^2=a^2+b^2$ Verdadero por que esta bien c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$ Falso porque falta $a2-ab+b^2$	a) $(x+3)(x-4)=x^2+x-12$ falsa porque no es x es -x seria x^2-x-12 factorizacion b) $(a+b)^2=a^2+b^2$ $(a+b)(a+b)$ falsa porque se eleva el primer termino y el segundo y luego la suma de esos dos c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$ falsa porque el resultado es a^2-b^2 mas por menos = menos

Tabla 11

En la tabla 12, E1 en el cuestionario diagnóstico no muestra evidencia de cómo resolvió la ecuación $x^2 - 36 = 0$, y presenta solo una solución para x, que es incorrecta, después del ciclo de enseñanza, muestra en la entrevista que la misma ecuación la resolvió satisfactoriamente y presenta las dos raíces o soluciones, además realiza la comprobación con cada una.

Diagnóstico	Entrevista
b) $x^2-36=0$ $x=18$	a) $x^2-36=0$ $a=1$, $b=0$, $c=-36$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ $x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(36)}}{2(1)}$ $x=\frac{-0\pm\sqrt{0+144}}{2}$ $x=\frac{0\pm 12}{2}$; $x_1=\frac{0+12}{2}=6$; $x_2=\frac{0-12}{2}=-6$ $(6)^2-36=0$ $36-36=0$ x_2 $(-6)^2-36=0$ $36-36=0$

Tabla 12

De igual forma en la ecuación *$2x^2+32=0$*, E1 nuevamente no muestra evidencia de lo que realizó durante el cuestionario diagnóstico, y presenta solo una solución de manera incorrecta, posteriormente en el ciclo de enseñanza logra desarrollarla y dejó el resultado en términos de una raíz cuadrada negativa (tabla 13).

Diagnóstico	Entrevista
c) $2x^2+32=0$ $x=\sqrt{32}$	b) $2x^2+32=0$ a=2 b=0 c=32 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ $x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(2)(32)}}{2(2)}$ $x=\frac{0\pm\sqrt{0-256}}{4}$ $x=\frac{-0\pm\sqrt{-256}}{4}$

Tabla 13

Podemos observar (tabla 14) que en el cuestionario diagnóstico y en la entrevista se presenta la misma ecuación, la cual tiene la misma forma, y en el cuestionario diagnóstico E1 no dio evidencia de solucionarla, y en la entrevista, desarrolló primeramente el binomio al cuadrado y posteriormente multiplicó por tres, finalmente aplica la fórmula general para darle solución.

Diagnóstico	Entrevista
e) $3(x-2)^2=9$	c) $3(x-2)^2=12$ $3(x^2-4x+4)$ $3x^2-12x=0$ a 3 b -12 c=0 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(3)(0)}}{2(3)}$ $x=\frac{12\pm\sqrt{144}}{6}$ $x=\frac{12\pm12}{6}$ $x_1\ \frac{12+12}{6}=4$ $x_2\ \frac{12-12}{6}=0$ $x_1\ 3(4)^2-12(4)=0$ $48-48=0$ $x_2\ 3(0)^2-12(0)=0$ $0-0=0$

Tabla 14

En la tabla 15, se observa que en el cuestionario diagnostico E1 no considera que se trata de binomios conjugados, el cual da como resultado una diferencia de cuadrados, y en la entrevista justifica correctamente.

Diagnóstico	Entrevista
IV. El producto del siguiente polinomio *(2x+3)(2x-3)* es: $4x^2-6x-9$	c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$ falso porque el resultado es a^2-b^2 mas por menos = menos

Tabla 15

Posteriormente dentro del cuestionario diagnóstico se les pidió factorizar un trinomio, en el cual E1 no logró realizarlo, pues argumenta que no entiende, y dentro de la entrevista consiguió solucionar dos ecuaciones correctamente por el método de factorización (tabla 16).

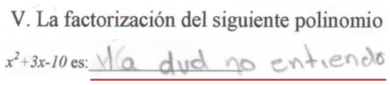
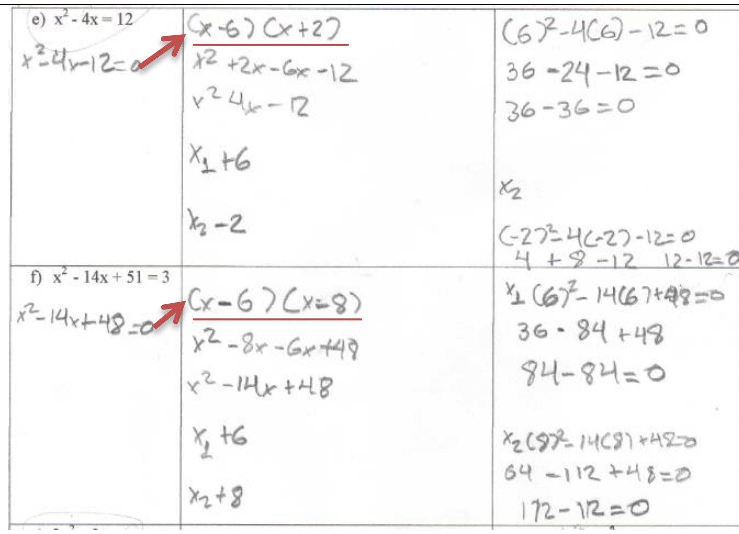
Diagnóstico	Entrevista
 V. La factorización del siguiente polinomio $x^2+3x-10$ es: Ya dud no entiendo	 e) $x^2 - 4x = 12$ $x^2-4x-12=0$ $(x-6)(x+2)$ $x^2+2x-6x-12$ $x^2-4x-12$ x_1+6 x_2-2 $(6)^2-4(6)-12=0$ $36-24-12=0$ $36-36=0$ x_2 $(-2)^2-4(-2)-12=0$ $4+8-12$ $12-12=0$ f) $x^2 - 14x + 51 = 3$ $x^2-14x+48=0$ $(x-6)(x-8)$ $x^2-8x-6x+48$ $x^2-14x+48$ x_1+6 x_2+8 $x_1\ (6)^2-14(6)+48=0$ $36-84+48$ $84-84=0$ $x_2\ (8)^2-14(8)+48=0$ $64-112+48=0$ $112-112=0$

Tabla 16

Con respecto al estudiante E2, se muestran una comparación de lo realizado dentro del cuestionario diagnóstico y en la entrevista, cabe mencionar que se rescataron los siguientes reactivos para evidenciar la mejora con respecto al concepto de ecuación cuadrática, después del ciclo de enseñanza. En la tabla 17, podemos observar que en el cuestionario diagnóstico no dio solución a ninguna ecuación, después en la entrevista logró encontrar las raíces a las siguientes ecuaciones, e incluso utilizó la factorización como método de solución en una de ellas.

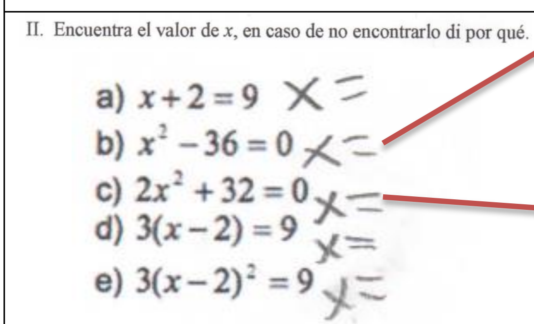
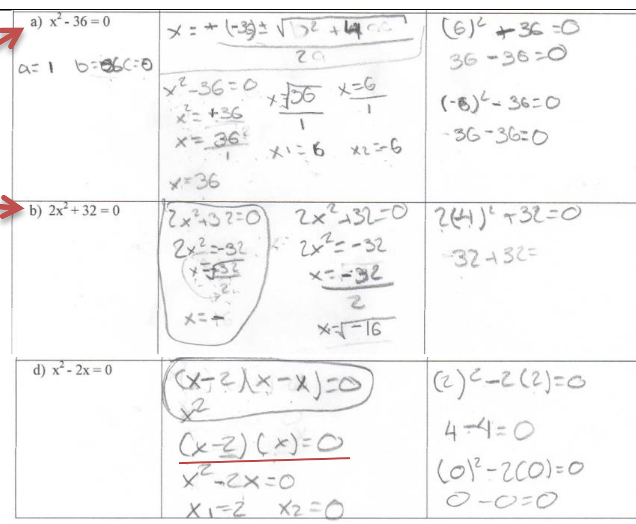
Diagnóstico	Entrevista
 II. Encuentra el valor de x, en caso de no encontrarlo di por qué. a) $x+2=9$ $x=$ b) $x^2-36=0$ $x=$ c) $2x^2+32=0$ $x=$ d) $3(x-2)=9$ $x=$ e) $3(x-2)^2=9$ $x=$	 a) $x^2 - 36 = 0$ $x^2-36=0$ $x^2=+36$ $x=\sqrt{36}$ $x_1=6$ $x_2=-6$ $(6)^2-36=0$ $36-36=0$ $(-6)^2-36=0$ $36-36=0$ b) $2x^2 + 32 = 0$ $2x^2+32=0$ $2x^2=-32$ $x=\frac{-32}{2}$ $x=\sqrt{-16}$ d) $x^2 - 2x = 0$ $(x-2)(x-x)=0$ $(x-2)(x)=0$ $x^2-2x=0$ $x_1=2$ $x_2=0$ $(2)^2-2(2)=0$ $4-4=0$ $(0)^2-2(0)=0$ $0-0=0$

Tabla 17

En relación con la evidencia de aprendizaje del concepto de ecuación cuadrática, podemos observar (tabla 18) que E3 en la ecuación $x^2 - 36 = 0$solo da la raíz positiva y en la entrevista presenta ambas raíces.

Diagnóstico	Entrevista		
b) $x^2 - 36 = 0$ ~ 6	a) $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $x = 6$	$x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $(x-6)(x+6)=0$ $x = 6$ $x = -6$	$(6)^2 - 36 = 0$ $36 - 36 = 0$ $0 = 0$ $(-6)^2 - 36 = 0$ $36 - 36 = 0$

Tabla 18

La tabla 19, muestra como en el cuestionario diagnóstico E3 no desarrolla correctamente los binomios conjugados y en la entrevista detectó el error y justificó acertadamente, además muestra evidencia de cómo lo desarrolló.

Diagnóstico	Entrevista
IV. El producto del siguiente polinomio *(2x+3)(2x-3)* es: $4x^2 - 5x + 6x - 9 = 4x^2 + x - 9$	c) $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$ Verdadera, ya que $(a)(a) = a^2$; $(a)(-b) + (a)(b) = 0$ $(+b)(-b) = -b^2$ Falsa, ya que a

Tabla 19

En relación a E4 podemos observar en la tabla 20, que tanto en el cuestionario diagnóstico como en la entrevista argumenta que las igualdades son falsas, pero lo relevante en este sentido es la justificación, en la entrevista da evidencia de que encontró el trinomio resultante al desarrollar la multiplicación de los binomios.

Diagnóstico	Entrevista
a) $(x+3)(x-4) = x^2 + x - 12$ F, solo es x^2 la otra x sobra	a) $(x+3)(x-4) = x^2 + x - 12$ $x^2 - 4x + 3x - 12$ F. porque el resultado debería ser $x^2 - 7x - 12$ $x^2 - x - 12$

Tabla 20

En la tabla 21, podemos observar que E4 en el cuestionario diagnóstico solamente solucionó la ecuación *x^2-36=0*, y únicamente brinda la solución positiva, en la entrevista soluciona las que tienen la misma forma a las del cuestionario, presentando en cada una las dos raíces, excepto en el inciso *b*, ya que las deja en términos de $x = \frac{-0 \pm \sqrt{-256}}{4}$

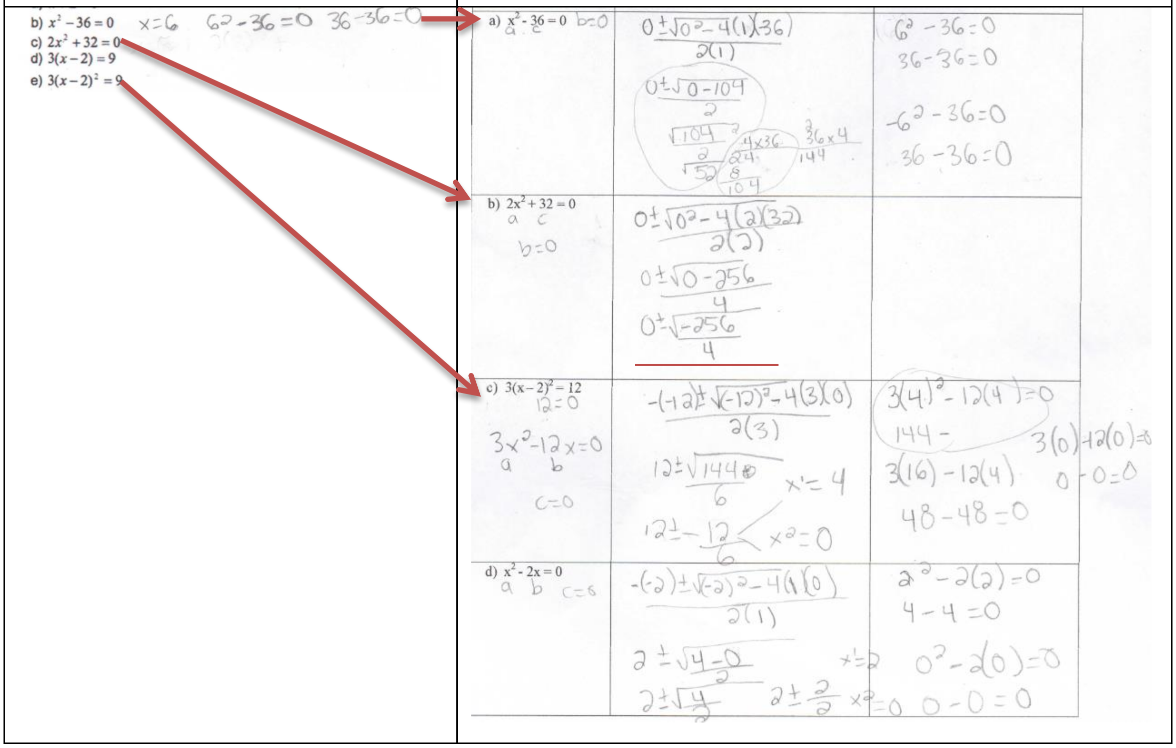
Diagnóstico	Entrevista
	

Tabla 21

Por otro lado, podemos observar (tabla 22) que E5 muestra evidencia en la justificación que el binomio al cuadrado, lo presenta como producto de dos binomios y lo desarrolla satisfactoriamente, así puede percatarse del error, y determinar que la igualdad presentada es falsa.

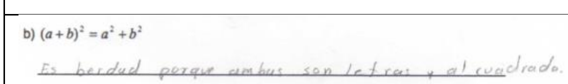
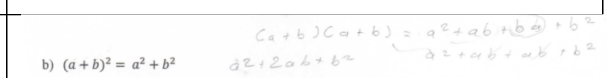
Diagnóstico	Entrevista
	

Tabla 22

En la tabla 23, se puede observar como E5, en la ecuación $x^2 - 36 = 0$, sólo presenta la solución positiva y en la entrevista presenta las dos soluciones, en cuando a la ecuación $2x^2 + 32 = 0$ en el cuestionario diagnóstico argumenta que es incorrecta, pero no muestra evidencia, a diferencia que en la entrevista la deja en términos de $\sqrt{-16}$

Diagnóstico	Entrevista

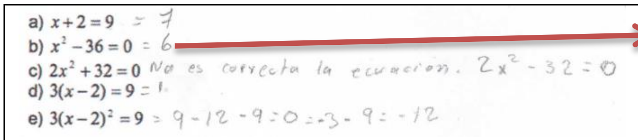
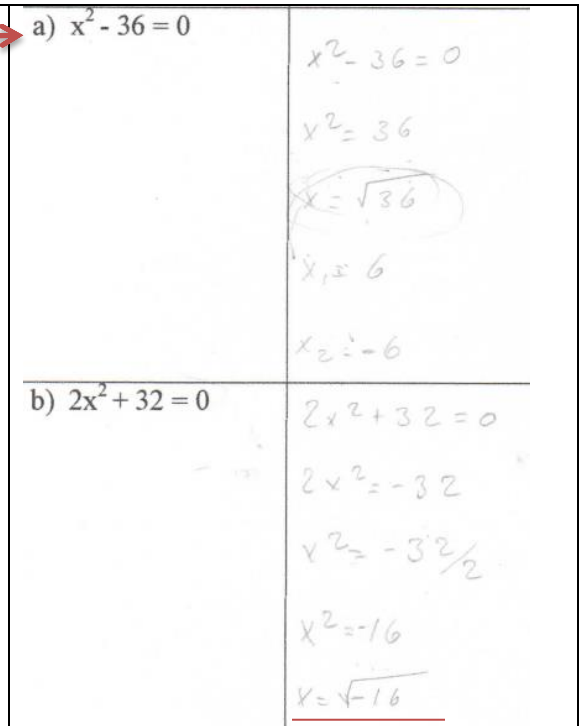
 a) $x+2=9$ = 7 b) $x^2-36=0$ = 6 c) $2x^2+32=0$ No es correcta la ecuación. $2x^2-32=0$ d) $3(x-2)=9$ = 1 e) $3(x-2)^2=9$ = $9-12-9=0=-3-9=-12$	 a) $x^2-36=0$ $x^2-36=0$ $x^2=36$ $x=\sqrt{36}$ $x_1=6$ $x_2=-6$ b) $2x^2+32=0$ $2x^2+32=0$ $2x^2=-32$ $x^2=-32/2$ $x^2=-16$ $x=\sqrt{-16}$

Tabla 23

En cuanto al aprendizaje de factorización, podemos observar que en el diagnóstico no logró factorizar el trinomio, y después del ciclo de enseñanza, consiguió resolver la ecuación $x^2-14x+51=3$ usando el método de factorización (tabla 24).

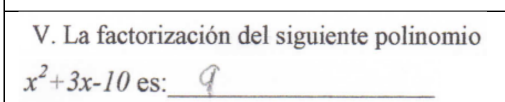
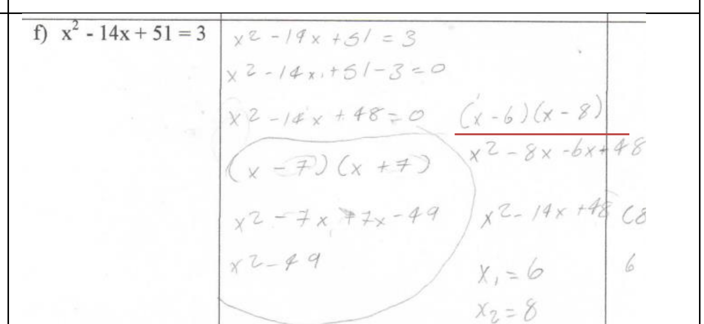
Diagnóstico	Entrevista
 V. La factorización del siguiente polinomio $x^2+3x-10$ es: 9	 f) $x^2-14x+51=3$ $x^2-14x+51=3$ $x^2-14x+51-3=0$ $x^2-14x+48=0$ $(x-7)(x+7)$ $x^2-7x+7x-49$ x^2-49 $(x-6)(x-8)$ $x^2-8x-6x+48$ $x^2-14x+48$ $x_1=6$ $x_2=8$

Tabla 24

Con lo anterior podemos constatar que las actividades realizadas durante el ciclo de enseñanza brindaron los frutos planteados, pues en cada uno de los estudiantes analizados muestra evidencia del aprendizaje del concepto de ecuación cuadrática y su solución, cabe mencionar, que dentro de la entrevista hay más evidencias del aprendizaje del concepto y su solución, pero se retomaron los ejemplos anteriores por ser los que se consideraron en el cuestionario diagnóstico.

7.4 Reflexión sobre mi práctica docente

Diseñar el ciclo de enseñanza teniendo en mente la teoría APOE, resultó un gran reto como profesora, pues se requiere de mucha reflexión sobre la práctica docente, en conjunto con lo que plantea la teoría APOE en el nivel básico, pues resulta interesante contemplar las transiciones sobre las construcciones y mecanismos mentales que requieren los estudiantes para la comprensión del concepto de ecuación cuadrática de forma geométrica y algebraica, además de considerar todos los conocimientos con los que debe contar un estudiante para comenzar con la construcción de este nuevo concepto. Estos conocimientos se consideraron para el diseño del cuestionario diagnóstico, el cual nos permitió percatarnos si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos necesarios para lograr la construcción del concepto de ecuación cuadrática, si no es así, los consideramos en nuestra descomposición genética.

Si bien, en nuestra investigación, ya habían estudiado el concepto de ecuación cuadrática nuestros estudiantes, aun así, el ciclo de enseñanza se diseñó para aplicarse a estudiantes que por primera vez se enfrentan al concepto. Pues el ciclo de enseñanza propuesto puede ser utilizado por profesores que requieren y gusten de actividades diferentes a las planteadas en los libro de texto, también como profesora, creo firmemente en que el ciclo de enseñanza me ayudará a que mis estudiantes logren construir el concepto de ecuación cuadrática, pues fue muy satisfactorio ver a los estudiantes interesados en las actividades y los resultados que arrojaron las entrevistas.

Por otro lado, el aplicar el ciclo de enseñanza es de suma importancia y compromiso, pues de ello depende que se cumplan los objetivos planteados, ya que como profesora únicamente guio a los estudiantes e intervengo en las reflexiones al concluir cada actividad, pues se requiere hacer preguntas apropiadas a los estudiantes para formalizar su conocimiento. Pero no deja de rondar en la mente una pregunta incomoda: ¿con esta investigación, realmente estoy contribuyendo a la construcción del concepto de ecuación cuadrática? Afortunadamente las evidencias del ciclo de enseñanza, y mejor aún, las de la entrevista, señalan que nuestro ciclo de enseñanza contribuyó de manera favorable a cada uno de los estudiantes que se analizaron, ya que muestran evidencias de la comprensión del concepto de ecuación cuadrática. Por tal motivo, consideramos que para transitar por las construcciones y mecanismos mentales propuestos, que se requieren para construir el concepto de ecuación cuadrática, las actividades planteadas en el ciclo de enseñanza son apropiadas para lograrlo.

No podemos dejar de mencionar, la aportación de nuestro trabajo dentro de la teoría APOE en el nivel básico, pues es la primera descomposición genética para la construcción del concepto de ecuación cuadrática, además resulta interesante, ya que se logró trabajar conjuntamente de una manera geométrica y algebraica, y esto favoreció la comprensión del concepto.

Sin duda, nuestra descomposición genética se puede mejorar, y por consecuencia nuestro ciclo de enseñanza, pero consideramos que al aplicarse como está propuesta en este trabajo contribuye positivamente a la comprensión del concepto.

Por último, al aplicar el ciclo de enseñanza, juega un factor importante el tiempo que se le asigna a cada actividad, ya que se requieren mínimo ocho sesiones de 50 minutos cada una para llevarse a cabo, y en la práctica docente no se cuenta con tiempo suficiente, sin embargo con las actividades que se propusieron se abordaron diferentes temas como los productos notables, factorización, la ecuación cuadrática y su solución. Por tanto, se puede decir que hasta cierto punto se pueden cumplir con las planeaciones, enfocandonos en diferentes temas al mismo tiempo de maneta transversal. Por tanto, considero que vale la pena invertir este tiempo requerido, y que sean dobles sesiones, es decir, cien minutos continuos para dar seguimiento y concluir oportunamente cada una de las actividades, ya que los resultados son satisfactorios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., Weller K. (2014). APOS Theory. *A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education III*, 17-23.

Balbuena, H., Block, D., García, S., García, J., Mendoza, T., (2016). *Matemáticas 3. Secundaria. Savia.* (Primera Edición). Ciudad de México. SM.

Bárcenas, S., Espinosa, K., Ruiz, E. (2016). *Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias.* (Tercera edición). Ciudad de México. SM.

Bastidas, M. (2010). *Estrategia Didáctica para el Desarrollo de la Creatividad en la Resolución de Problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Ecuaciones de Segundo Grado en el Tercer Año de la Unidad Educativa "General José Antonio Páez*". (Trabajo de Grado de maestría). Universidad de Carabobo, Carabobo, Valencia.

Borja, I. (2015). *Conjunto solución a un sistema de ecuaciones lineales: Una mirada desde la perspectiva de la teoría APOS* (Tesis de Doctorado), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cruz E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática.*(Tesis de maestría), Centro de Investigación en Ciencia y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México).

Didiş, M., Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów, Poland*.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advancedmathematics. In L. P. Steffe (Ed.), Epistemological foundations of mathematical experience (pp. 160–202). New York: Springer-Verlag.

Fernández, H. (2005). *Matemáticas Previas al cálculo.* Universidad de Medellín.

Gustin, J. & Avirama L. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo* (Tesis de Licenciatura). Área de Educación Matemática. Universidad del Valle e Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación. 3ª Edición*. Colombia: Panamericana Formas e Impresos S.A.

Kieran , C., & Filloy Yagúe , E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Kothari (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques. Second Revised Edition.* New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Kotsopoulos, D. (2007). *Unravelling Student Challenges with Quadratics: A Cognitive Approach.* Australian Mathematics Teacher, *63*(2), 19-24.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE* (Tesis de Maestría), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* (Tesis de Doctorado), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

López, E. (2008). *Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del colegio deficiencias y humanidades*. Recuperada de http://132.248, 9.

Mesa, Y. M., & Villa Ochoa, J. A. (2014). *Elementos Históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa *21, 922-930*. Universidad de Antioquia. Colombia.

Mora, A. (2011). D*esarrollo de competencias algebraicas basado en la resolución de problemas* (Tesis de Licenciatura), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Puebla.

Pérez, J. A. (2004). *Las cuadráticas. Una aproximación constructivista. Educación Matemática*, 16(3), 127-133.

Posadas Prados, P. (2013). *Evaluación de la Idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3° de educación secundaria obligatoria. (*Tesis de maestria no publicada). Universidad de Granada. Granada.

Protti O. (2003). *La historia de la matemáticas cómo instrumento pedagógico*. Uniciencia, 20, 251-257.

Pulido, K., Cuervo, M., Acuña, J., Bustos G., (2012). *Uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a traves del método griego: experimento de enseñanza. (*Tesis de Licenciatura). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación. Bogota.

SEP, Plan y Programa de estudios 2011, Matemáticas,

Stewart, I. (2009). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años* (Segunda ed.). (J. G. Sanz, Trad.) Barcelona, España: Crítica.

Trigueros, M. (2005). La noción del esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17* (1), 5-31.

Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E., Lascurain, M., (2014). *Matemáticas 3* (Primera edición). México, D:F: Santillana.

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). *Students' attempts to solve two elementary quadratic equations: A study in three nations. Building connections:*

Research, theory and practice. Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australia.

Yahya, N., & Shahrill, M. (2015). *The strategies used in solving algebra by secondary school repeating students. Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 186, 1192-1200.

Yuste, P. (2008). *Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia: (Quadratic equations and algorithmic procedures. Diophantus and Mesopotamian mathematics)*. THEORIA. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia, 23(2), 219-244.

ANEXOS

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO, PRIMERA PARTE

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"Francisco García Salinas"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre: ____

Edad: ___________Grado y Grupo: ______________ Fecha: ______________________

INSTRUCCIONES: Lee las indicaciones y contesta en cada caso lo que se te pide, en caso de que te equivoques enciérralo en un círculo, y posteriormente escribe la respuesta correcta.

I. Resuelve las siguientes operaciones.

1. $(-8) + 8 =$
2. $\frac{2}{7} \div (-\frac{6}{8}) =$
3. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$
4. $4(-2)(0) + 7.5 - 10.5 =$
5. $\frac{3}{4} * (-7) =$
6. $(-4)^2 =$
7. $\sqrt{175} =$

II. Identifica cuál(es) son ecuaciones y justifica tu respuesta.

		¿Es ecuación?	¿Por qué?
i.	$4x + 5$		
ii.	$5m + 3 = 38$		
iii.	$\frac{y}{7} = 8$		
iv.	$9b$		
v.	$x^2 - 3 = 0$		

III. Resuelve las siguientes ecuaciones.

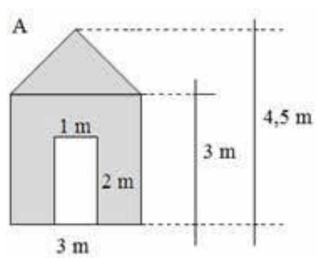
3. $4x - 8 = 0$

4. $7(y + 9) = 119$

IV. Resuelve los siguientes problemas.

4. ¿Cuánto mide el perímetro del terreno cuadrangular, cuyo lado mide 12m de longitud? Si se quiere poner piso a este terreno ¿cuántos metros cuadrados de piso tendrán que comprar?

5. Calcula el área del frente de la casa, sin incluir la puerta:



6. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado de $121cm^2$ de área?

DIAGNÓSTICO, SEGUNDA PARTE

INSTRUCCIONES: Lee las indicaciones y contesta en cada caso lo que se te pide, en caso de que te equivoques enciérralo en un círculo, y posteriormente escribe la respuesta correcta.

I. Menciona si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y en cada caso justifica tu respuesta.

a) $(x+3)(x-4)=x^2+x-12$

____

b) $(a+b)^2=a^2+b^2$

____

c) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$

____

II. Encuentra el valor de x, en caso de no encontrarlo di por qué.

a) $x+2=9$
b) $x^2-36=0$
c) $2x^2+32=0$
d) $3(x-2)=9$
e) $3(x-2)^2=9$

III. El producto del siguiente polinomio $4x^2(3x+2)$ es:______________________

IV. El producto del siguiente polinomio $(2x+3)(2x-3)$ es:___________________

V. La factorización del siguiente polinomio $x^2+3x-10$ es:___________________

CICLO DE ENSEÑANZA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"Francisco García Salinas"

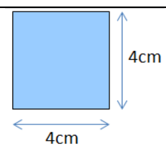
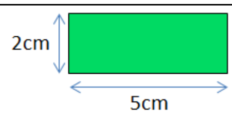
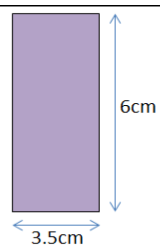
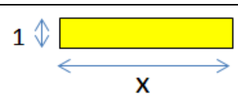
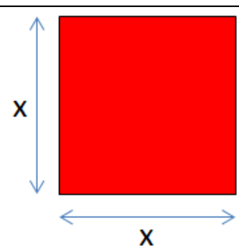
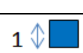
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre del alumno: ____

Edad: ___________Grado y Grupo: ______________ Fecha: ______________________

ACTIVIDAD 1

I. Completa la siguiente tabla, anotando de que figura se trata y calcula su área.

Figura	Nombre de la figura	Área
a) 		
b) 		
c) 		
d) 		
e) 		
f) 		

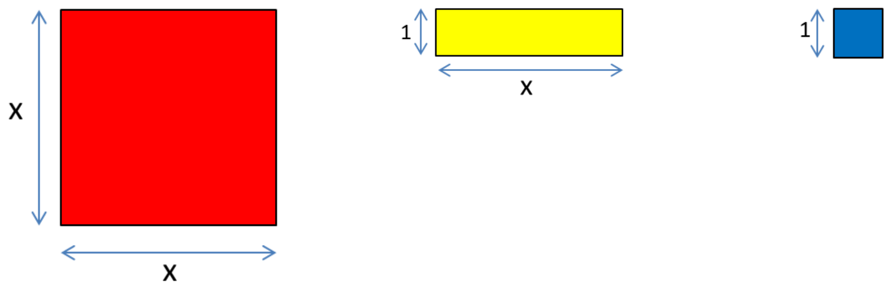
II. Completa la siguiente tabla, anotando de que figura se trata y a partir de su encuentra las dimensiones de la figura.

Figura	Nombre de la figura	Dimensiones
A = $48cm^2$		
A = $49cm^2$		
A = $90cm^2$		

Conclusiones Personales:

Discusión Grupal.

Se les entregarán figuras como las que se muestran a continuación, analízalas y realiza la siguiente actividad.



III. Con las piezas que se les entregaron, en equipo de tres alumnos formen las siguientes figuras. Al formar cada figura deberán llenar la tabla de abajo correspondiente a cada una.

Figura 1. Un rectángulo con una pieza de área x^2; tres piezas de área x; y dos piezas de área 1.

Figura 2. Un cuadrado con una pieza de área x^2; ocho piezas de área x; y dieciséis piezas de área 1.

Figura 3. Un rectángulo con una pieza de área x^2 y cinco piezas de área x.

Figura 4. Un rectángulo con dos piezas de área x^2, tres piezas de área x; y una pieza de área 1.

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
Con las piezas de papel que se les entregaron reproduce las figuras que formaron y pégala en cada espacio.	Escribe el área de la figura de la columna 1, con base en cada una de sus partes.	En la columna 1 anota las dimensiones de la figura y a partir de ellas expresa simbólicamente (A=bxh ó A=LxL) el área.	Desarrolla el producto de la columna 3.
1.			
2.			

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
Con las piezas de papel que se les entregaron reproduzcan las figuras que formaron y pégala en cada espacio.	Escribe el área de la figura de la columna 1, con base en cada una de sus partes.	En la columna 1 anota las dimensiones de la figura y a partir de ellas expresa simbólicamente (A=bxh ó A=LxL) el área.	Desarrolla el producto de la columna anterior
3.			

4.			

IV. Comenta con tu equipo la actividad anterior y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo obtuvieron la expresión algebraica que permite calcular el área de cada figura que formaste (Columna 2)?

b) En el caso de los cuadrados que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

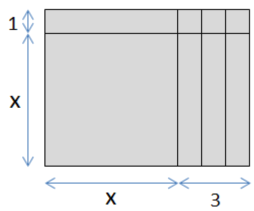
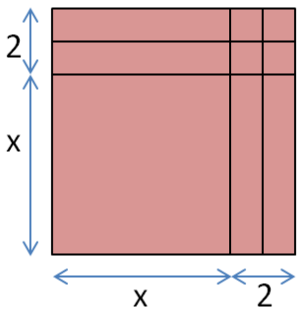
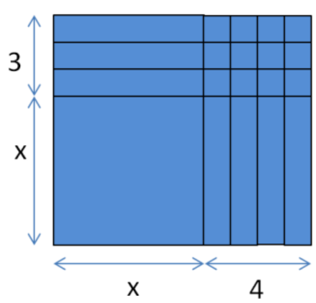
c) En los rectángulos que formaron, ¿cómo obtuvieron el producto que representa su área (Columna 3)?

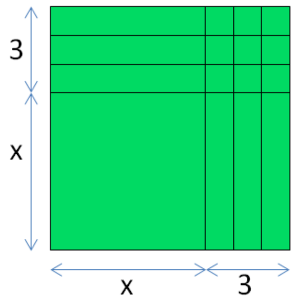
d) ¿En qué figura(s) los resultados de las columnas 2 y 4 son iguales?____________ ¿Por qué?

e) Escriban sus conclusiones de forma individual:

Discusión grupal

f) Comenten en equipo y lleguen a un acuerdo para completar la siguiente tabla, utilicen el método o técnica que crean conveniente.

Figura	Fórmula que permite calcular su área:	Sustituye la fórmula y encuentra la medida de sus dimensiones:	¿Cuál es el valor de *x*?
a) Área de la figura: $48cm^2$ 			
b) Área de la figura: $81\ cm^2$ 			
c) Área de la figura: $90cm^2$ 			
d) Área de la figura: $49cm^2$			

e) ¿Qué técnica o procedimiento utilizaste para encontrar las dimensiones de cada figura?

f) ¿Cómo encontraste el valor de *x* para cada figura?

Discusión grupal

¿Cuál de las siguientes son ecuaciones?

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $6x + 32 = 80$

¿Cuál es la diferencia entre una y otra?

Conclusiones personales:

Una ecuación cuadrática es de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde a, b y c $\in$ *R y a*$\neq$ *0*

Esta ecuación también se conoce como ecuación de segundo grado y tiene como máximo, dos soluciones o raíces que deben satisfacer la ecuación

Formas incompletas.

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ *se hace c = 0, entonces queda:*

$$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$$

la solución de esta ecuación incompleta garantiza que una de las raíces es cero ya que el lado o miembro izquierdo de la ecuación se puede factorizar como:

$$x(\,ax + b) = 0,$$

que equivale a las dos siguientes ecuaciones lineales, cuyas soluciones son:

Ecuaciones lineales:	$x = 0$	$ax + b = 0$
Soluciones:	$x = 0$	$x = -\frac{b}{a}$

Si en cambio se hace $b = 0$ *en la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$*, entonces se tiene la forma incompleta:*

$$\boldsymbol{ax^2 + c = 0.}$$

La solución de esta ecuación arroja como resultado dos raíces que son iguales en términos de valor absoluto.

Ahora, si $b = c = 0$*, entonces* $ax^2 = 0$*; es una ecuación cuadrática incompleta cuyas dos soluciones son iguales a cero.*

ACTIVIDAD 2

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$

I. En binas, completen la siguiente tabla, eligiendo de las siguientes ecuaciones cuadráticas las que tienen la forma $ax^2 + bx = 0$:

$y^2 - 3y - 28 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 6x = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x = 0$

$x^2 + 7x = 0$ $\qquad$ $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\qquad$ $t^2 + 5 = 0$

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4
De las ecuaciones anteriores, ¿cuáles tienen la forma $ax^2 + bx = 0$?	¿Cuál es la figura geométrica que expresa el área del miembro izquierdo de la ecuación?	Anota las dimensiones de la figura de la columna 1, y a partir de ellas expresa simbólicamente el área.	De acuerdo a lo que obtuviste en la columna 3, ¿qué valores hacen que el área sea igual a cero?
1.			
2.			

3.			

Observa la columna 3, ¿qué características tienen los productos que obtuviste?

a) Al obtener la ecuación en forma de producto ¿cómo obtuviste el valor de la incógnita? Justifica tu respuesta

b) De acuerdo con lo anterior, una ecuación cuadrática ¿cuántas soluciones puede tener?

c) Analiza la tabla anterior y propongan un método que permita encontrar la solución de una ecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$:

d) ¿Cómo puedes comprobar que los valores que encontraste de *x* satisfacen la ecuación?

e) Comprueba las tres ecuaciones de la tabla:

Contesta la siguiente tabla:

Ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$	Representa la ecuación en forma de producto (factorización)	De acuerdo con los factores de la columna anterior, ¿Qué ecuaciones lineales obtienes?	¿Cuáles son los valores de *x* que satisfacen la ecuación?
1) $x^2 + 3x = 0$			
2) $x^2 - 16x = 0$			
3) $x^2 + 7x = 0$			
4) $x^2 - 1/2x = 0$			
5) $x^2 + 2.5x = 0$			

Actividad 3

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

I. Completa la siguiente tabla:

a) Traza un cuadrado de lado $x + 3$	
b) ¿cuál es el área expresada simbólicamente del inciso (a) (en forma de producto)?	
c) Desarrolla el producto del área del inciso (b)	

1. De acuerdo al producto obtenido del inciso (c), calcula la raíz cuadrada del término cuadrático y del término independiente:
   Raíz del término cuadrático:______
   Raíz del término independiente:_____

2. Multiplica las raíces encontradas en el punto anterior:

(Raíz del término cuadrático)(Raíz del término independiente) = (   )(   ) = _____

3. Al resultado anterior, ¿Qué operación aplicarías para obtener el término lineal, que obtuviste en el trinomio resultante?

4. ¿Cuáles serán los pasos para desarrollar un binomio al cuadrado?

5. Ahora, con las raíces obtenidas en el punto 1, forma un binomio, el cuál llevará el signo del término lineal del trinomio resultante, ¿Qué obtienes como resultado?

6. Si quieres obtener el área del cuadrado, que tiene de lado el binomio del punto anterior, ¿Qué obtienes como resultado?

7. De acuerdo a lo realizado anteriormente, supongamos que el valor del área propuesta en el inciso (b) es igual a cero, ¿qué valor tendría *x*? Explica tu respuesta.

8. ¿Cuáles serán los pasos para desarrollar un binomio al cuadrado?

Discusión grupal, analizar y comentar las respuestas anteriores, para contestar las siguientes preguntas:

i. ¿Cómo sabemos que un trinomio es cuadrado perfecto?¿cuáles son sus características?

ii. ¿Cómo podemos saber que **NO** es un trinomio cuadrado perfecto?

iii. Si factorizamos un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué obtenemos como resultado?

iv. ¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando se puede expresar como un trinomio cuadrado perfecto?

Con base en lo realizado anteriormente, encuentra los valores que satisfacen las siguientes ecuaciones:

1) $(x+2)^2 = 0$

2) $(2x+4)^2 = 0$

3) $x^2 + 14x + 49 = 0$

4) $9x^2 + 12x + 4 = 0,$

Actividad 4

Solución de una ecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

I. Completa la siguiente tabla:

a) Traza una figura que tenga cómo base $x + 4$ y de altura $x + 3$:	
b) ¿De qué figura se trata?	
c) ¿Cuál es el área expresada simbólicamente de la figura del inciso (a)?	
d) ¿Qué tienen en común estos binomios?	
e) Desarrolla el producto de los binomios:	
f) ¿El trinomio resultante es?:	
g) ¿Será un trinomio cuadrado perfecto el trinomio que obtuviste en el inciso anterior? ¿Por qué?	
h) Si el área es igual a cero, ¿Cómo se puede obtener los valores de *x* en el inciso (c)?	
i) ¿Cuáles son los valores de *x*?	

Con base en lo anterior contesta la siguiente tabla:

i. Completa la siguiente tabla y con base en ella contesta los puntos A y B.

Anota el área expresada simbólicamente en el inciso (c):	
Anota el trinomio resultante al desarrollar el producto de los binomios en el inciso (f).	

A. ¿Qué relación hay entre los términos independientes de cada binomio y el término independiente del trinomio resultante?

B. ¿Qué relación existe entre los términos independientes de los binomios y el término común de los binomios con el valor del término lineal del trinomio resultante? Considera que el término lineal tiene signo positivo.

ii. ¿Qué ocurrirá cuando el signo del término lineal sea negativo? Como el siguiente: $x^2 - 7x + 10 = 0$

Analicen y comenten las respuestas anteriores, posteriormente contesten lo siguiente:

iii- ¿Qué procedimiento propones para factorizar un trinomio cuadrado **no** perfecto?

iv- El procedimiento que describiste, ¿también será útil pata trinomios cuadrados perfectos? ¿por qué?

Con base en lo anterior, encuentra el valor de *x* en las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + 11x + 30 = 0$

2) $x^2 + 14x + 49 = 0$

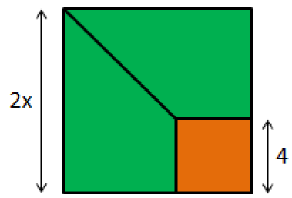
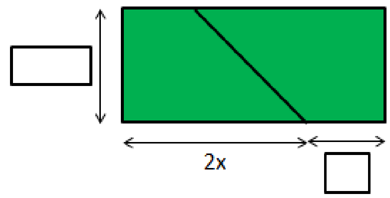
3) $x^2 - 16x + 64 = 0$

4) $x^2 + 12x + 27 = 0$

5) $x^2 - x - 6 = 0$

Actividad 5

II. Completen la siguiente tabla:

Observa la "Figura 1" y analízala, ¿De qué figura se trata?_______ ¿Por cuáles figuras está formada?________	Sólo con los trapecios se formó un rectángulo "Figura 2", analízalo y anota sus dimensiones:
 Figura 1	 Figura 2

Comenta con tu compañero y posteriormente contesten lo siguiente:

i. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la Figura 2?

ii. Sustituye los valores en la fórmula anterior:

iii. ¿En qué son diferentes los factores que sustituiste?

iv. Con base en los factores que encontraste. ¿cómo puedes obtener el valor de *x*?

v. ¿Cuáles son los valores de *x*?

vi. Obtén el área de la figura 2:

vii. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de color verde de la Figura 1?

viii. Obtén el área de color verde de la Figura 1:

ix. ¿Son equivalentes las áreas obtenidas en el inciso vi y vii?_____ ¿por qué?

Discusión grupal, este tipo de ecuaciones son incompletas, de la forma:

Cuando se hace $b = 0$ en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se tiene la forma incompleta $ax^2 + c = 0$. La solución de esta ecuación arroja como resultado dos raíces que son iguales en términos de valor absoluto.

Contestar las siguientes preguntas:

¿Qué procedimiento proponen para factorizar una diferencia de cuadrados?

Aparte de factorizar una diferencia de cuadrados, ¿de qué otra forma puedes encontrar los valores de *x*?

Realiza lo siguiente, factoriza y encuentra los valores de *x*:

1) $x^2 - 81 = 0$

2) $4x^2 - 100 = 0$

3) $x^2 - 36 = 0$

4) $x^2 - 9 = 0$

5) $x^2 - 81 = 0$

Por medio de despeje soluciona las siguientes ecuaciones cuadráticas:

6) $2x^2 - 32 = 0$
7) $3x^2 = 75$
8) $4x^2 - 2 = 0$
9) $x^2 - 16 = 0$

ACTIVIDAD 6

Como se trabajó en las actividades anteriores, una ecuación cuadrática es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$; Donde a, b y c ∈ R y a≠ 0

Esta ecuación también se conoce como ecuación de segundo grado y tiene como máximo, dos soluciones o raíces que deben satisfacer la ecuación.

En la siguiente tabla identifica en cada ecuaciones: El valor del coeficiente del término cuadrático "a", el valor del coeficiente del término lineal "b", y el valor del coeficiente del término independiente "c", además identifica respecto a los coeficientes de qué tipo de ecuaciones cuadráticas se trata: completa o incompleta.

Ecuación cuadrática	Coeficiente del término cuadrático:	Coeficiente del término lineal:	Coeficiente del término independiente:
a) $x^2 + 3x - 10 = 0$			
b) $4x^2 - 36 = 0$			
c) $9x^2 - 27x = 0$			
d) $16x^2 = 0$			
e) $3x^2 - 10x - 25 = 0$			

Analiza las ecuaciones anteriores y responde las siguientes preguntas:

i. ¿qué tienen en común las ecuaciones anteriores?

ii. ¿qué diferencias hay entre las ecuaciones?

Discusión grupal:
¿De dónde se obtendrá esta fórmula general que nos permita solucionar cualquier ecuación cuadrática?

La fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en donde sustituyendo los valores de los coeficientes a, b y c. podemos encontrar las raíces o soluciones.

De acuerdo a la tabla anterior, donde identificaste los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas, completa la siguiente tabla:

Ecuación cuadrática	Solución por fórmula general	Comprobación	Raíces o soluciones

Reflexiona y anota en el siguiente espacio lo aprendido, ¿qué método te parece mejor para solucionar ecuaciones cuadráticas? ¿Por qué?

ENTREVISTA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

"Francisco García Salinas"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre: ____

Edad: ___________Grado y Grupo: ______________ Fecha: ______________________

INSTRUCCIONES: Lee las indicaciones y contesta en cada caso lo que se te pide, en caso de que te equivoques enciérralo en un círculo, y posteriormente escribe la respuesta correcta.

V. Encierra en un círculo las ecuaciones cuadráticas, y justifica porqué son cuadráticas.

f) $x + 4 = 0$

g) $2x(4 + x) = 0$

h) $(x + 3)(x - 2) = 0$

i) $4x^2 + 2x = 20$

e) $10 - x = -x^2$

VI. Menciona si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y en cada caso justifica tu respuesta.

d) $(x + 3)(x - 4) = x^2 + x - 12$

____

____

e) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

f) $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$

VII. Resuelve las siguientes ecuaciones, y en cada caso comprueba su solución.

Ecuación	Solución	Comprobación
h) $x^2 - 36 = 0$		
i) $2x^2 + 32 = 0$		
j) $3(x-2)^2 = 12$		
k) $x^2 - 2x = 0$		
l) $x^2 - 4x = 12$		
m) $x^2 - 14x + 51 = 3$		
n) $2x^2 = 3x$		

VIII. Responde lo siguiente:

c) Si las raíces de la ecuación son -2 y -5, la ecuación cuadrática es:	
d) Si las raíces de la ecuación son 0 y 16, la ecuación cuadrática es:	