UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Maestría en Matemática Educativa

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL TÓPICO EXTENSIÓN LINEAL DESDE LA TEORÍA APOE

Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Juanita Nayeli Cabral Venegas

Directores de tesis:

Dra. Ofelia Montelongo Aguilar

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Lorena Jiménez Sandoval

Zacatecas, Zac. 06 de Diciembre 2018

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el valioso apoyo económico proporcionado para mi formación académica y desarrollo personal durante la realización de mis estudios de maestría.

Becaria No. 774596

M.C. Nancy Calvillo Guevara

Responsable del Programa de Maestría en Matemática Educativa

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "*Construcción Cognitiva del Tópico Extensión Lineal desde la Toeoría APOE*" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. *Juanita Nayeli Cabral Venegas*, egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior, cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquélla establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 05 de Noviembre del 2018

____

Dra. Ofelia Montelongo Aguilar

Asesora de Tesis

____________________________________	____________________________________
Dra. Lorena Jiménez Sandoval	Dra. Darly Alina Kú Euán
Coasesora de Tesis	Coasesora de Tesis

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 4 del mes de diciembre del año 2018, la que suscribe, Juanita Nayeli Cabral Venegas, egresada del Programa de Maestría en Matemática Educativa con número de matrícula 29100485, manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado ***"CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL TÓPICO EXTENSIÓN LINEAL DESDE LA TEORÍA APOE"*** bajo la dirección de la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar, la Dra. Lorena Jiménez Sandoval y la Dra. Darly Alina Kú Euán.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

____

Juanita Nayeli Cabral Venegas

Agradecimientos

Al finalizar un trabajo tan arduo y lleno de dificultades como es el desarrollo de una tesis de maestría no queda más que agradecer a las personas que hicieron posible que este trabajo llegará a término, primeramente me gustaría agradecer a la Dra. Ofelia Montelongo Aguilar, la Dra. Darly Alina Kú Euán y la Dra. Lorena Jiménez Sandoval ya que sin su conocimiento y asesoría este trabajo no hubiera sido posible realizarlo.

Durante el transcurso de la realización de la recibí clases que me ayudaron a mejores cuestiones importantes en mi trabajo, y me gustaría agradecer a todos los maestros de la maestría en matemáticas educativa que me ayudaron a perfeccionar mi trabajo y que fuera de mayor calidad.

Me gustaría dedicar este trabajo a alguien muy especial para mí, alguien que ya no está conmigo y que extraño mucho, pero que estoy segura me apoyo desde el cielo, mi abuelo Carlos, alguien que siempre me hacía sentir lo orgulloso que estaba de mí y me hacía querer seguir mejorando día con día.

No podría faltar el agradecer a mi familia:

mi mama Angélica , Mario mi papa, mi hermana Valeria, mi abuela Amalia, etc., ya que sin ellos no hubiera podido haber culminado este trabajo, ya que en ocasiones me sentía sin ganas de avanzar, y eran ellos quienes me daban la fuerza para seguir y terminar, me ponía a pensar cómo voy a defraudar a mi mama quien a la par trabajaba y estudiaba al mismo tiempo y aparte nos cuidaba mi hermana y a mí, y logro culminar sus estudios satisfactoriamente y seguir trabajando, ella fue y es mi mayor inspiración para todo lo que hago.

Personas importantes que me estuvieron apoyando en el transcurso de este trabajo dando ánimos y ayudándome a desestresarme cuando ya no podía avanzar porque no fluían las ideas fueron mis amigos, especialmente Chely, Luis, Aloo, Itzel, Hector, Faby, Arturo, Verde, Diana, Andrea, Diego, Marisol, Alondra, Angy, Tisca, Yadi, y muchos más que siempre estuvieron conmigo cuando los necesite. También quiero agradecer a todos mis compañeros de maestría que estuvieron acompañándome en este trayecto, con quienes los viernes y los sábados pasaba más tiempo con ellos que con mi familia, y en especial agradecer a Fati una compañera que se volvió más que una amiga como mi hermana, con quien viví muchas aventuras inolvidables y muy divertidas.

Las personas que son inspiración para ti hacen posible que siempre quieras continuar con tus metas y proyectos, y para mí el maestro Arturo Escalante y el maestro Javier Livier Arteaga fueron las personas que más me inspiraron para primeramente entrar a la licenciatura en matemáticas y posteriormente para estudiar la maestría en matemática educativa, ya que me emocionaba el llegar a ser tan grande como ellos.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo describir las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes al construir el tópico de Extensión Lineal. Para esto se pone en marcha el ciclo de investigación de la teoría APOE modificado, el cual consta de tres fases: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. Como resultado del análisis teórico se obtuvo una descomposición genética preliminar donde el mecanismo de coordinación juega un papel fundamental en la construcción del tópico de extensión lineal. Se diseñaron como instrumentos para la recogida de datos un cuestionario y una entrevista semiestructurada. El análisis de estos arrojó que si bien los estudiantes desarrollan las estructuras propuestas en la descomposición genética preliminar, esta requiere ser refinada para que dé cuenta de una mejor manera el cómo los estudiantes construyen cognitivamente dicho tópico.

Palabras Claves: Extensión Lineal, construcción cognitiva, teoría APOE, ciclo de investigación, descomposición genética.

Índice

Capítulo I. Planteamiento del problema de investigación

1.1 Motivación

El interés sobre esta investigación surge desde mi experiencia como estudiante ya que me impactó mucho la materia de Álgebra Lineal por el tipo de problemas que en ella se resuelven, no basta con realizar operaciones o seguir un algoritmo para poder llegar a la solución, a lo que estábamos acostumbrados en otras materias, se requiere ir más allá, comprender una gran cantidad de conceptos y las relaciones entre estos, las cuales están dadas por teoremas que su vez deben ser comprendidos junto con sus demostraciones. En la mayoría de los problemas se requiere reflexionar sobre estos y sus posibles soluciones.

Además durante la carrera también me di cuenta de que el álgebra lineal es una materia de suma importancia pues los conceptos que se abordan en ella son base para otras materias de semestres superiores como: ecuaciones diferenciales, topología, álgebra abstracta, análisis, por mencionar solo algunas.

Sin embargo la razón principal por la cual decidí investigar un tópico del Álgebra Lineal es porque a pesar de que me gustaba resolver problemas de esta materia no me era tan fácil hacerlo, pero esto no era exclusivo de mí, también veía que a mis compañeros les costaba trabajo, lo que ocasionó que en la materia de Álgebra Lineal no fuera aprobada por varios de mis compañeros, es una materia que desde mi punto de vista causa muchas dificultades a los estudiantes.

Ver de dónde y cómo se generan las dificultades en los estudiantes en su paso por el curso de Álgebra Lineal es mi mayor motivación, considero que si se conocen estas se pueden proponer estrategias de enseñanza que ayuden a superarlas y por lo tanto a que los estudiantes comprendan mejor los conceptos de esta materia.

1.2 Problemática

El Álgebra Lineal es una materia que es importante por su aplicación en otras disciplinas como: informática, ingeniería, economía, entre otras; en las cuales sirve como herramienta para resolver problemas que antes hubieran sido imposibles de resolver, como por ejemplo problemas de informática que décadas atrás no tenían solución como expresan Carlson et al. (1993) y Trigueros y Oktaç (2010). A pesar de que el Álgebra Lineal es de utilidad no podemos negar que causa dificultades en los alumnos que cursan esta materia, tales dificultades han sido analizadas por varios investigadores (Trigueros y Oktaç, 2010; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2012; Parraguez y Uzuriaga, 2014; Molina y Oktaç, 2007; entre otros).

Estas dificultades de las que hablamos que existen en los alumnos de nivel superior con el Álgebra Lineal son las que hacen que los alumnos vean esta materia como lo más difícil del mundo o como su peor enemigo y se frustren al enfrentarse a un problema perteneciente a esta rama de las matemáticas.

Lamentablemente muchos maestros al sentirse decepcionados por no lograr que sus alumnos entiendan los conceptos del Álgebra Lineal se resignan a la idea a que esto se debe a la misma naturaleza del Álgebra Lineal, como menciona Hillel (2000). Este pensamiento hace que los profesores crean que sea cual sea la manera en que se enseñe el curso los estudiantes van a seguir teniendo dificultades (Dorier y Sierpinska, 2000). También está el hecho de que los alumnos no llegan a ver o entender la aplicabilidad o utilidad del Álgebra Lineal, sus cursos no los motivan lo suficiente para interesarse por esta materia, como expresa Carlson et al. (1993)

Las dificultades provenientes del Álgebra Lineal son principalmente conceptuales y cognitivas, como lo mencionan Dorier y Sierpinska (2000). Las conceptuales tienen que ver con la naturaleza de los conceptos, es decir son difíciles *per se*. En cambio, las dificultades cognitivas están relacionadas con el tipo de pensamiento y razonamiento que requiere un estudiante para comprender los conceptos.

Dentro de las dificultades conceptuales podemos encontrar que los conceptos del Álgebra Lineal no surgieron por la necesidad de resolver problemas de ciencias aplicadas a diferencia de los conceptos del cálculo. El Álgebra Lineal surgió para darle formalidad y orden a la matemática, esto hace que los conceptos sean abstractos y formales y cause dificultades a los estudiantes, los cuales se quejan de que existen demasiadas definiciones, teoremas, demostraciones y no ven relación alguna entre ellos, según Dorier y Sierpinska (2000).

Otra dificultad conceptual proveniente del Álgebra Lineal es que en esta materia para comprender un nuevo concepto el estudiante debe abstraer y generalizar los conceptos previos que son necesarios para desarrollar el nuevo concepto, buscando características comunes entre estos para así unificarlos, o como bien se expresa en Dorier y Sierpinska (2000) la comprensión de los conceptos de esta disciplina al ser unificadores y generalizadores, implica que el alumno debe llevar a cabo dos procesos mentales:

- Reconocimiento de similitudes entre objetos, herramientas y métodos, unificar y generalizar el ser del concepto.
- La concepción unificadora y generalizadora explícita como un objeto induce una reorganización de viejas competencias y elementos de conocimiento. (p. 257).

Se mencionó que el otro tipo de dificultades que presentan los alumnos en el Álgebra Lineal son las cognitivas, por ser de naturaleza abstracta los estudiantes necesitan un tipo de pensamiento o razonamiento específico que les permita enfrentarse a los conceptos de esta disciplina. Como causantes de este tipo de dificultades en los estudiantes de nivel superior tenemos la generalidad que caracteriza a esta materia, los diferentes modos de lenguaje o de descripción que se utilizan para dar a conocer un concepto o una operación, y también las distintas representaciones de los objetos del Álgebra Lineal, otra cuestión que causa dificultades cognitivas en los estudiantes universitarios es el tender a pensar en realizar operaciones a los objetos matemáticos y no tener un razonamiento más allá de la mecanización todo esto ha sido abordado por distintos autores como Hillel (2000), Dorier y Sierpinska (2000), etc.

Profundizando un poco más acerca de lo que causa dificultades cognitivas con el Álgebra Lineal mencionábamos la generalidad de ésta, y es que ésta causa conflicto en los estudiantes porque ya no deben pensar en los objetos y en las operaciones en términos de relaciones entre objetos como matrices, vectores, etc., ahora el estudiante de Álgebra Lineal debe pensar en estos objetos y operaciones como estructuras tales como menciona Hillel (2000) y como ejemplo de éstas tenemos la estructura de los espacios vectoriales, la cual es el centro de estudio del Álgebra Lineal.

Un aspecto del Álgebra Lineal que causa dificultades cognitivas en los estudiantes es el uso de diferentes modos de lenguaje o de descripción para dar a conocer un concepto o una operación dentro de esta disciplina, existen 3 tipos de modos de lenguaje en el Álgebra Lineal que son el modo abstracto, el modo algebraico y el modo geométrico que según Hillel (2000) se definen de la siguiente manera:

- El modo abstracto: Usa los lenguajes y los conceptos de la teoría formal generalizada e incluye: espacios vectoriales, Span, dimensión, operadores, kernel, etc.
- El modo algebraico: Usa el lenguaje y los conceptos más específicos de la teoría de $\mathbb{R}^{n,}$ incluyendo n-tuplas, matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones, espacio en fila, etc.
- El modo geométrico: Usa el lenguaje y los conceptos de espacios de dos y tres dimensiones incluyendo: segmentos de línea dirigida, puntos, líneas, planos, transformaciones geométricas, etc.

Así como los distintos modos de lenguaje que se utiliza en el Álgebra Lineal para la describir objetos y operaciones causa dificultades cognitivas en los estudiantes también mencionábamos a los distintos registros de representación de un objeto matemático, ya que a los estudiantes les causa conflicto el pasar de una representación a otra de un mismo objeto, operación cognitiva llamada *conversión* en la teoría de representaciones de Duval (1999 b), recientemente en los planes y programas de estudio de nivel superior se está atendiendo este problema, por ejemplo en la Universidad de Sonora los planes y programas se las materias se encuentran elementos que toman en cuenta el papel de las representaciones, como el de álgebra (Plan de Estudios de la Universidad de Sonora, s.f.) Esto no se toma en cuenta en las escuelas, no le dan mucha importancia a tener como prerrequisito que los alumnos comprendan las funciones de las representaciones semióticas, y si no tienen este conocimiento de la conversión de las representaciones semióticas los conceptos serán más difíciles de adquirir.

Los principales registros de representación utilizados en el Álgebra Lineal según Pavlopoulou (1993) son: el grafico, el tabular y el simbólico. Donde en el registro gráfico entran por ejemplo las flechas que representan vectores, en los registros tabulares entran las columnas de coordenadas y en el registro simbólico la teoría axiomática de espacios vectoriales.

Otra cuestión causante de dificultades cognitivas en los estudiantes de nivel superior con el álgebra es que son víctimas de la mecanización o como expresa Sierpinska (2001) tienen un pensamiento más práctico que teórico y, no porque no sea necesario tener un pensamiento práctico sino que en el Álgebra Lineal no es suficiente con este pensamiento para poder resolver las situaciones problemáticas, según Sierpinska (2001):

"El pensamiento teórico está centrado o se caracteriza por una reflexión que se basa en conexiones lógicas y semánticas entre conceptos dentro de un sistema; las conexiones entre conceptos son hechas fijándose en sus relaciones a conceptos más generales de los que son casos especiales antes que en asociaciones empíricas" (). Las relaciones entre conceptos y objetos son mediadas por las relaciones de los conceptos a otros conceptos, y que, en particular, las definiciones de conceptos, comparaciones entre los conceptos y su diferenciación, es construida basándose en las relaciones de estos conceptos con conceptos más generales, y no, por ejemplo, enfocándose en sus ejemplos más comunes (falta referencia).

En cambio, el pensamiento práctico según Sierpinska (2000) es una actividad que acompaña y guía otras actividades, el pensamiento es más una acción, forma y estructura de los sistemas de signo.

Como pudimos percatarnos con base en las investigaciones ya mencionadas los estudiantes presentan dificultades conceptuales y cognitivas en el Álgebra Lineal, pero como las dificultades conceptuales se deben al concepto en sí, no hay mucho que hacer respecto a esto, en cambio sí nos enfocamos en analizar de donde provienen o cómo se generan las dificultades cognitivas de los estudiantes en el Álgebra Lineal se podrán buscar estrategias de enseñanza para ayudar a superarlas.

1.3 Problema

La problemática de la enseñanza y aprendizaje de Álgebra Lineal es muy extensa, de manera que sería imposible abordar todas las dificultades cognitivas que se presentan en los estudiantes, también el Álgebra Lineal es extensa como para analizar concepto por concepto cómo es que se generan y a que se deben las dificultades cognitivas en su aprendizaje por los estudiantes de nivel superior, por esta razón nos enfocaremos en un solo tópico, a saber el de Extensión Lineal, el cual describiremos a continuación:

Sean V un especio vectorial dimensionalmente finito, $B = \{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ una base de este espacio vectorial y $T: V \to W$ una transformación lineal. El tópico de extensión lineal consiste en obtener cualquier $T(x)$ con $x \in V$ a partir de conocer $T(B) = \{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)\} = \{w_1,\ w_2, \dots, w_n\}$. (Fraleigh, 1987, p. 185)

Las dos razones principales para investigar sobre este tópico son:

Primero por su importancia para la comprensión de otros conceptos como por ejemplo, matriz asociada a una transformación lineal, la conexión entre transformación lineal y base, entre otros.

Segundo, en investigaciones como la de Roa-Fuentes y Oktaç (2010) y Uicab y Oktaç (2006) se muestra evidencia de que existen dificultades en los estudiantes para comprender este tópico. Por ejemplo, Uicab y Oktaç (2006) reportan la ausencia de un pensamiento sistémico, es decir la mecanización en los estudiantes universitarios, al resolver el problema de Extensión Lineal geométricamente.

Nos damos cuenta con la revisión de estas investigaciones, de que el tópico de Extensión Lineal causa conflicto a los alumnos principalmente porque para su aprendizaje y compresión involucra dos conceptos que son difíciles para los alumnos por todos los procesos cognitivos que deben de llevar a cabo para comprenderlos, estos conceptos son el de transformación lineal y el de base.

A pesar de encontrar evidencia de que los alumnos de nivel superior tienen dificultades con el tópico de Extensión Lineal, no hay muchas investigaciones que aborden este problema. Hasta el momento solo se encontró la investigación de Uicab y Oktaç (2006) dónde, haciendo uso de las herramientas del software Cabri-Géomètre II, abordan geométricamente el tópico de Extensión Lineal para observar la presencia de conexiones entre conceptos y su naturaleza, basándose en observaciones empíricas. También está Hernández y Oktaç (2017) donde abordan este tópico geométricamente, utilizando también diversos software para abordar este tópico.

Al darnos cuenta de que no hay suficiente información acerca de las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes con este tópico de Extensión Lineal consideramos necesario analizar cómo los estudiantes construyen este concepto, es decir, analizar cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes de nivel superior para comprender este tópico, de manera que esto a su vez nos permita identificar las dificultades que surgen en los alumnos.

1.4 Pregunta de investigación

Como ya habíamos comentado, se pretende identificar las construcciones y mecanismos mentales que los alumnos hacen para construir el tópico de Extensión Lineal, esto se hará a través de la teoría APOE, por lo tanto, nuestra pregunta de investigación es:

¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que muestra un estudiante de nivel superior al construir el tópico de Extensión Lineal?

1.5 Objetivo general

- Describir las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes al construir el tópico de Extensión Lineal.

1.6 Objetivos particulares

- Conocer las estructuras y mecanismos mentales que requiere un estudiante para construir el tópico de Extensión Lineal, a través del diseño de una descomposición genética preliminar.

- Mostrar una manera de cómo los estudiantes construyen el tópico de Extensión Lineal mediante la validación o refinación según sea el caso de la descomposición genética preliminar.

- Proponer sugerencias didácticas que ayuden a una mejor comprensión del tópico de Extensión Lineal.

1.7 Justificación

La mayoría de las investigaciones que encontramos se centran en estudiar las fuentes de las dificultades de los estudiantes de nivel superior con el Álgebra Lineal, pero no en cómo se desarrollan cognitivamente estas dificultades, de donde provienen, etc., con lo analizado anteriormente pudimos confirmar que la varias de las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a un problema de Álgebra Lineal son cognitivas.

Por lo dicho anteriormente la teoría APOE nos podría ayudar a entender cómo los estudiantes desarrollan los conceptos del Álgebra Lineal cognitivamente, ya que esta teoría describe las construcciones y mecanismos mentales para construir un concepto matemático a través de *descomposiciones genéticas*.

Cabe mencionar que, de las pocas investigaciones encontradas sobre las dificultades de los estudiantes de nivel superior con el tópico de Extensión Lineal ninguna lo aborda desde la teoría APOE. La investigación de Arellano y Oktaç (2013) donde se hace una recopilación de investigaciones entre artículos y tesis que usan la teoría APOE, nos da evidencia de esto, pues, entre las investigaciones que se mencionan en esta tesis nos damos cuenta que hasta esa fecha no se había abordado el tópico de Extensión Lineal. Por las pocas investigaciones que se encontraron acerca de las dificultades que presentan los alumnos de nivel superior con el tópico de Extensión Lineal creemos que, esta investigación va a aportar algo nuevo al ámbito de la investigación de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

Construcción cognitiva del tópico Extensión Lineal desde la teoría APOE

Se pretende aportar un estudio cognitivo del tópico de Extensión Lineal para los investigadores, ya que como éste tópico no se ha abordado desde la teoría APOE, va a contribuir para la misma teoría y para la práctica del profesor. Se espera también que, a través de lo que nosotros encontremos o concluyamos con esta investigación, se dé pauta para que otros investigadores que aborden este tópico desde la teoría APOE pueden tomar como referencia nuestro trabajo para avanzar en otras cuestiones por ejemplo la creación de un curso para este tópico, o también investigar otros conceptos del Álgebra Lineal que involucren este tópico, por ejemplo, el de matriz asociada a una transformación lineal.

Capítulo II. Antecedentes

Se realizó una búsqueda de artículos en torno a la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, en particular, investigaciones que abordaran el tópico de Extensión Lineal sin importar la perspectiva teórica. Los artículos que hasta el momento se han revisado se clasificaron en 3 tipos/categorías:

2.1 Investigaciones relacionadas con el concepto de transformación lineal, base y otros conceptos de importancia para la construcción del tópico Extensión Lineal desde la teoría APOE.

La tesis de Arellano y Oktaç (2013) titulada "Panorama de Investigaciones que usan como marco teórico a la teoría APOE" es de importancia en nuestra investigación porque nos permite justificar la relevancia de nuestro trabajo de tesis ya que hasta la fecha reportada en tal tesis no había una investigación con APOE del tópico Extensión Lineal. Además conocimos cuáles eran las investigaciones principales de APOE que hablaban acerca de los conceptos previos fundamentales para la construcción de nuestro tópico en estudio.

En esta tesis se hace una recopilación de la variedad de investigaciones entre artículos y tesis que usan la teoría APOE, realizan una división de estos trabajos, por ejemplo, se dividen en artículos: Actas de congresos, teóricos, etc., que presentan una descomposición genética del concepto matemático, que estudian la comprensión de un concepto matemático mediante la teoría APOE y encontramos las investigaciones con la teoría APOE de transformación lineal y base que se mencionan a continuación.

En el artículo ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? de Oktaç y Trigueros (2010) se presentan los resultados de un proyecto que se realizó en México para ver la manera en que los estudiantes de nivel superior aprenden los conceptos del Álgebra Lineal, para lo cual utilizan a la teoría APOE enfocándose principalmente en los conceptos de: espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones Lineales. Las dos preguntas que guiaron el proyecto son: ¿Qué construcciones mentales son necesarias para que los estudiantes universitarios construyan los conceptos del Álgebra Lineal? ¿Cuáles son los principales obstáculos que enfrentan?

Para el concepto de Espacio vectorial Oktaç y Trigueros (2010) diseñaron una descomposición genética, donde describen que el proceso de espacio vectorial se da a través de la coordinación de cuatro *esquemas*: el de axioma, el de operación binaria, el de función y el de conjunto. Para corroborar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética se diseñó y aplicó una entrevista semiestructurada a seis estudiantes de ingeniería quienes habían llevado el curso de Álgebra Lineal con el ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusiones en clase y ejercicios) de la teoría APOE. Se eligieron estudiantes para la entrevista semiestructurada de acuerdo con su desempeño académico, dos de nivel bajo (con calificaciones de 6), dos de nivel medio (con calificaciones de 7 y 8), dos de nivel alto (con calificaciones de 9 y 10).

El análisis de los datos obtenidos de la entrevista dejó ver que los alumnos construyen una concepción acción del concepto de espacio vectorial, al ser solo capaces de relacionar las propiedades mostradas en los axiomas con el concepto de espacio vectorial, pero no mostraron una concepción acción de algunos de estos axiomas y no lograron coordinar los procesos en un solo proceso de verificación. También mencionan que es necesario diseñar actividades didácticas que ayuden a los estudiantes a tener una construcción más sólida del Álgebra Lineal, en donde los conceptos tengan sentido y estén relacionados unos con otros.

Siguiendo con la búsqueda de antecedentes para nuestra investigación ahora proseguimos a buscar artículos acerca de los principales conceptos abordados desde la teoría APOE que se relacionan con el tópico de Extensión Lineal que son el de transformación lineal y base.

La investigación “Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE” desarrollada por Kú, Trigueros y Oktaç (2008) se centra en describir las construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de base. Para esto, las autoras diseñaron una entrevista que les permitió analizar el proceso de construcción del concepto y determinar las dificultades que surgen a raíz de su aprendizaje. La pregunta general de investigación que se plantearon fue: ¿Qué construcciones han desarrollado los estudiantes universitarios acerca del concepto de base de un espacio vectorial después de haber cursado la materia de Álgebra Lineal?

La metodología que se siguió fue el ciclo de investigación de la teoría APOE que consta de tres fases, en la primera correspondiente al análisis teórico se diseñó una descomposición genética para la construcción del concepto de base. Después se elaboró una entrevista semiestructurada basada en los objetivos de la investigación y que constaba de 11 preguntas, dicha entrevista se aplicó a 6 estudiantes de 24 que participaron en un curso de Álgebra Lineal para ingeniería de una universidad privada de la Ciudad de México, el curso se llevó a cabo siguiendo el ciclo de enseñanza ACE de la teoría APOE. La elección de los estudiantes se hizo de acuerdo con su desempeño académico durante el curso, se eligieron 2 estudiantes con calificaciones altas, dos con calificaciones medias, y dos con calificaciones bajas. Los análisis de los datos muestran los modelos de pensamiento empleados por los estudiantes en relación con este concepto, y las dificultades que surgen referentes al aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial.

Algunas de las conclusiones a las que llegaron Kú, Trigueros y Oktaç (2008) es que ninguno de los alumnos logró interiorizar el concepto de base de un espacio vectorial, cuatro de los seis alumnos mostraron evidencia de estar en camino a la interiorización de dicho concepto, uno mostró una concepción acción y otro una concepción de preacción. Las autoras no encontraron evidencia de que los alumnos tuvieran una concepción proceso del concepto de base, solo algunos alumnos que comenzaban a desarrollar esta concepción.

Por otro lado, mencionan que la descomposición genética propuesta fue útil ya que permite explicar la dificultad al construir el concepto de base en la etapa proceso, pero que los estudiantes no pueden tener una concepción proceso de la base si no han construido los procesos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador lo que dificulta alcanzar una concepción objeto del concepto de base.

Este artículo es de importancia para nuestra investigación porque muestran una descomposición genética del concepto de base, donde se describen las construcciones mentales que requieren los estudiantes para su comprensión, esto nos permitirá determinar la estructura mental previa que se requiere para la construcción del tópico de Extensión Lineal.

Otro artículo que encontramos y que entra en esta categoría es el de: “Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal” de Roa-Fuentes y Oktaç (2010) donde el objetivo principal fue dar a conocer el procedimiento que siguieron para diseñar una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determinó por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la teoría APOE. Se proponen dos descomposiciones genéticas que describen los posibles caminos para construir el concepto: uno determinado por el mecanismo de interiorización, y el otro por el de coordinación.

La metodología que utilizaron fue asistir a un curso la universidad donde se hizo el estudio, dirigido a estudiantes de Estadística y Matemáticas. A este curso asistieron regularmente entre 8 y 10 alumnos dos veces por semana, en sesiones de dos horas; la observación se efectuó durante un semestre académico. El contenido del curso estaba dividido principalmente en cuatro capítulos: matrices (11 sesiones), espacios vectoriales reales (8 sesiones), transformaciones Lineales (7 sesiones) y vectores propios y diagonalización (4 sesiones), antes de cada examen, la docente hizo una sesión de preguntas sobre la temática a evaluar; asimismo, se resolvieron los problemas de una guía de trabajo que fue diseñada para cada contenido. Durante la investigación llevaron a cabo una prueba diagnóstica y una entrevista. Estas pruebas fueron transcritas y analizadas desde el marco teórico elegido.

Algunas conclusiones obtenidas por Roa-Fuentes y Oktaç (2010) fueron: los caminos de construcción descritos para las propiedades de linealidad se dirigieron hacia la construcción del concepto transformación lineal, visto como un único proceso. Al coordinar estas dos propiedades por medio del conector lógico de conjunción ($\wedge$), se busca construir un único proceso que permita, por un lado, encapsularlo en un objeto; y por otro, concebir las transformaciones Lineales como funciones definidas entre espacios vectoriales que preservan combinaciones Lineales. Esto permite la relación directa de este concepto con otros; por ejemplo, el de base. La construcción de esta índole es fundamental para generar la construcción y evolución del esquema de transformación lineal, así como de las relaciones que puede establecer con otros esquemas existentes y con los que se construyen de manera paralela a él.

El artículo de Roa-Fuentes y Oktaç (2010) es de suma importancia para nuestra investigación porque muestra dos descomposiciones genéticas para el concepto de transformación lineal, de manera que la descomposición genética de un concepto matemático no es única.

Por otra parte, este artículo muestra paso a paso cómo se podrían diseñar las descomposiciones genéticas, esto no se considera en la mayoría de los artículos que utilizan a la teoría APOE, de manera que nos sirve como guía para elaborar una descomposición genética. Además, nos interesa saber qué es lo que el alumno requiere cognitivamente para la comprensión del concepto de transformación lineal ya que es un conocimiento previo que el alumno necesita para enfrentarse al problema de Extensión Lineal.

Otro artículo que nos va ayudar con nuestro trabajo es el de Roa-Fuentes y Oktaç (2012), titulado: "Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE", aquí se tomó el análisis teórico propuesto en Roa-Fuentes y Oktaç (2010) para presentar el desarrollo de la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE: análisis y verificación de datos. Mediante el diseño y aplicación de una prueba diagnóstico y una entrevista, se plantea una descomposición genética refinada del concepto transformación lineal.

La metodología de Roa-Fuentes y Oktaç (2012) fue el ciclo de investigación de la teoría APOE que consta de tres fases, cabe mencionar que en esta investigación se implementó sólo la segunda fase la cual consistió en realizar el diseño de dos instrumentos: una prueba diagnóstica y una entrevista. El objetivo principal de la prueba diagnóstica fue, seleccionar los estudiantes que participarían en la entrevista, mediante el análisis del tipo de construcciones que podrían evidenciar al solucionar los problemas propuestos en la prueba.

El examen diagnóstico se aplicó durante el segundo semestre académico del año 2007, en una universidad chilena. En el diagnóstico participaron dos grupos de estudiantes: estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que estaban tomando un curso de Álgebra Lineal II y estudiantes del programa de Estadística que estaban tomando un curso de Álgebra Lineal I.

Algunas conclusiones que obtuvieron Roa-Fuentes y Oktaç (2012) fueron:

Con base en el análisis de los datos se sugiere el desarrollo de modelos de clase que tomen en consideración los resultados de investigación, así como ideas metodológicas sobre cómo construir este concepto.

> "Un modelo de enseñanza que se basó en el camino descrito en este artículo puede considerar el análisis de funciones entre espacios vectoriales que cumple con una u otra propiedad y las implicaciones que tiene el cumplimiento de una propiedad sobre la otra. Esto involucra un análisis más específico sobre la naturaleza del campo sobre el cual estén definidos los espacios vectoriales.

> Cuando se están construyendo por separado la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar es posible examinar la relación entre estas dos propiedades. Considerar si estas condiciones son independientes la una de la otra y analizar cómo bajo ciertas circunstancias la preservación de la suma vectorial implica el producto por un escalar, puede generar la reflexión de este concepto más allá de la mecanización" (p. 227).

Los resultados de Roa-Fuentes y Oktaç (2012) serán de utilidad para nuestra investigación porque muestra cómo validar una de las descomposiciones genéticas, lo cual nos interesa pues diseñaremos una descomposición genética del tópico de Extensión Lineal, la cual validaremos. También contiene algunos ejercicios interesantes que involucran el problema de Extensión Lineal y qué podríamos retomar para nuestra investigación.

Otro conocimiento previo de suma importancia para que el alumno pueda enfrentarse al problema de Extensión Lineal es el de combinación lineal de vectores, por esta razón consideramos el artículo de "Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores" de Parraguez y Uzuriaga (2014). Esta investigación se sitúa en el estudio del concepto combinación lineal de vectores, que concierne al Álgebra Lineal, bajo dos enfoques: uno, la Teoría APOE para indagar en su construcción, y otro, la Célula Generadora, para evidenciar su uso. Se diseñó una descomposición genética teórica del concepto combinación lineal y una célula generadora, que involucra conceptos que subyacen a su alrededor.

La metodología que utilizaron fue diseñar y aplicar un cuestionario y una entrevista para testear la viabilidad de los diseños en 12 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), quienes dieron información respecto a las construcciones y usos que realizaron.

Algunas conclusiones de esta investigación fueron que la mayoría de los estudiantes no alcanzan una concepción objeto de combinación lineal, porque no coordinan el proceso combinación lineal, con el proceso solución de sistemas de ecuaciones Lineales, por tanto, no muestran una encapsulación del proceso combinación lineal. Por el contrario, otros estudiantes, que mostraron coordinar los procesos anteriores, lograron el uso de la combinación lineal, generando conceptos como la transformación lineal, articulada con cambio de base, imagen de un vector y vector de coordenadas.

Otro concepto que es de importancia para la construcción del tópico Extensión Lineal es el de vector y se encontró una investigación que tiene por nombre "El concepto de vector: un estudio para el diseño de una descomposición genética preliminar desde la mirada de la teoría APOE" de Orozco del Castillo y Oktaç (2016) en donde se describe un análisis del concepto de vector desde distintas perspectivas: histórica, didáctica y matemática, para desarrollar una presentación del concepto que consideran sea consistente y que pueda facilitar su entendimiento desde el punto de vista más abstracto, particularmente para estudiantes de ingeniería de nivel superior, se presenta finalmente una descomposición genética preliminar del concepto vector.

Se utilizaron los marcos teóricos de APOE y el constructivismo, de la metodología que se utilizó cabe mencionar que se aplicó un breve cuestionario de 3 preguntas a 43 estudiantes que estaban cursando el sexto semestre de ingeniería a nivel superior de la UNAM, con el objetivo de indagar acerca de las concepciones que tenían los estudiantes del concepto de vector, con base en este cuestionario y en otras investigaciones diseñaron una descomposición genética del concepto de vector.

Algunas de las conclusiones que obtuvieron en esta investigación fueron que con base en las respuestas dadas por los estudiantes no sólo muestra la concepción de un vector geométrico muy por encima de aquella de un vector como un elemento de un espacio vectorial, sino que también tienen una fuerte asociación con conceptos físicos tales como velocidades y fuerzas, también reportan que la mayoría de los estudiantes no distinguen claramente entre vectores y cantidades vectoriales.

Orozco del Castillo y Oktaç (2016) reportan también que una teoría constructivista como APOE puede resultar eficiente para la construcción del concepto de vector y no nada más presentarlo como una definición que debe de aprenderse.

Esta investigación será importante para nosotros porque muestran una descomposición genética del concepto de vector, donde se describen las construcciones mentales que requieren los estudiantes para su comprensión, esto nos permitirá determinar la estructura mental previa que se requiere en torno a este concepto para la construcción del tópico de Extensión Lineal.

2.2 Investigaciones relacionadas con las dificultades de los estudiantes universitarios con los conceptos de transformación lineal y base.

Proseguimos a buscar artículos o investigaciones que tengan que ver con algunos de los conceptos centrales que se necesitan para abordar el problema de Extensión Lineal, con estos artículos podremos darnos cuenta de qué dificultades presentan los alumnos con estos conceptos independientemente de la teoría que se utilizó.

Como primer artículo está: Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations de Sierpinska y Hillel (s. a.). El cual presenta una revisión de algunos aspectos de una experiencia de ingeniería didáctica dentro del Álgebra Lineal recreando las condiciones de aprendizaje que permiten a los estudiantes evitar el desarrollo del "obstáculo del formalismo" (p. 35).

Este trabajo se enfoca en la noción de la transformación lineal y su introducción en el ambiente informático de Cabri-géomètre II. La metodología de la ingeniería didáctica utilizada en esta investigación se basa en un marco teórico que se apoya en la semiótica clásica de Pierce .

La utilidad que tiene este trabajo de Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) para nuestra investigación es que algunos de los ejercicios que se plantean pueden ser de gran utilidad para el trabajo, ya sea plantearlos tal y como están o hacerles algunas modificaciones.

Otro artículo que se encontró dentro de esta categoría es “Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones Lineal es en el plano” escrito por Ramírez-Sandoval, Romero-Félix y Oktaç (2014), se presentan los resultados de una investigación, realizada con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, basados en situaciones de Transformaciones Lineales.

Utilizando la teoría de registros de representación semiótica se analizó la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. Se incluyen descripciones de algunos casos exitosos de coordinación y de una situación donde no se logró ésta.

Con base en las representaciones usadas por los estudiantes, así como sus explicaciones verbales durante la entrevista, se concluyó que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas. Los datos para la investigación los obtuvieron de una entrevista a estudiantes que cursaban Álgebra Lineal en una universidad pública de la Ciudad de México. Apoyándose en las propuestas metodológicas para investigaciones con un enfoque semiótico de Duval (2008).

Aborda el concepto desde representaciones semióticas y creo que esto es importante porque podemos tomar en consideración las conclusiones que aquí aparecen. También algunos de los ejercicios que se plantean en este artículo nos pueden ser de utilidad en la investigación, porque en algunos se utiliza el problema de Extensión Lineal.

Otro artículo que encontramos es el de “Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico” escrito por Molina y Oktaç (2007). Los autores se basaron en la teoría de Fischbein (1987) sobre la intuición y los modelos intuitivos, enfocándose en identificar aquellos modelos intuitivos que pudieran tener algunos estudiantes con respecto a la transformación lineal en contexto geométrico. Para lograr tal propósito, se diseñó una entrevista; luego de aplicarla y analizarla, hallaron que todos los alumnos encuestados pensaban la transformación lineal en términos de ejemplos prototipo o modelos. Así mismo, hicieron patente que contaban con un universo de transformaciones Lineales, como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y combinaciones de éstas. Los matices de los modelos cambiaban de acuerdo con los estudiantes y por las propiedades que asignaban a sus representaciones.

El objetivo de Molina y Oktaç (2007) era identificar aquellos modelos intuitivos en el sentido de Fischbein (1987) que los estudiantes pudieran tener acerca de la transformación lineal en contexto geométrico. Lo que les interesó fue observar de qué manera la existencia de algunos modelos geométricos influye en el aprendizaje del concepto de transformación lineal.Los autores mencionan que la aplicación de las entrevistas dio evidencia de que, con el paso del tiempo, el concepto de la transformación lineal se va degradando y sólo persiste la idea de la transformación. Por ello, consideran que es pertinente investigar sobre diseños didácticos que pongan énfasis en la otra parte, la linealidad, con el propósito de reducir la degradación del concepto.

Gracias a Molina y Oktaç (2007) pudimos conocer algunas concepciones o creencias que tienen los alumnos acerca de la transformación lineal y tomarlas en cuenta en nuestra investigación cuando se planteen los problemas con los cuales se validará nuestra descomposición genética.

Se encontró también una investigación que tiene por nombre "Dificultades Asociadas al concepto de Base de un espacio vectorial" escrito por Espínola, Oktaç y Cordero (2006) cuyo objetivo era identificar las dificultades que pudieran tener los estudiantes para entender el concepto de base de un espacio vectorial donde se empleó los modos de pensamiento sintético y analítico de Sierpinska (2000).

Para llevar a cabo la investigación se aplicaron tres problemas y dos secuencias de actividades relacionada con el concepto de base y realizaron un análisis *a priori* y uno *a posteriori* para todas la preguntas, estas preguntas y actividades las aplicaron a estudiantes de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav, candidatos a la misma Maestría y un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Ingeniería de la UNAM.

Algunas de las conclusiones de esta investigación son: que algunos estudiantes tienen problemas de lenguaje tanto matemático como cotidiano, otra dificultad es que los alumnos no manejan un vector como un elemento de un espacio vectorial, además muestran dificultad para establecer la relación entre los modos de pensamiento sintético y analítico, ya que los conceptos de conjunto generador, conjunto independencia lineal y base se encuentran aislados en algunos de los estudiantes.

De esta investigación podemos estar conscientes de cuáles son las dificultades que se presentan con el concepto de base y tomarlas en cuenta al momento de crear nuestra descomposición genética ya que como son dificultades que se presentan en un concepto fundamental en la construcción del tópico de Extensión Lineal es probable que estas puedan acarrearse si no se atienden a tiempo.

2.3 Investigaciones en torno a las dificultades que tienen los estudiantes de nivel superior con el tópico de Extensión Lineal.

Ahora presentaremos artículos relacionados con el problema de Extensión Lineal, estos pueden estar fundamentados con la teoría APOE o con otra teoría, dado que la intensión es conocer lo que se ha investigado sobre el problema de Extensión Lineal dentro de la Matemática Educativa.

Para esta categoría de los antecedentes tenemos el artículo de Uicab y Oktaç (2006) titulado: "Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica" donde se reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico en los estudiantes, al resolver el problema de Extensión Lineal, que consiste en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base. Este problema se plantea geométricamente, haciendo uso de las herramientas del software Cabri-Géomètre II.

El objetivo de Uicab y Oktaç (2006) fue observar la presencia de conexiones entre distintos conceptos y su naturaleza, basándose en observaciones empíricas. El marco teórico que se utilizó fue la aproximación teórica el pensamiento teórico versus el pensamiento práctico que propone Sierpinska (2000). Para cumplir el objetivo de la investigación se realizaron tres etapas: La primera consistió en dar un curso a ocho estudiantes de primer semestre, inscritos en el programa de maestría del Departamento de Matemática Educativa, procedentes de la licenciatura en Enseñanza de las matemáticas, ingeniería metalúrgica y economía. El objetivo principal del curso fue dar a los estudiantes la oportunidad de ver y analizar ejemplos del uso de la tecnología en la clase de matemáticas en el nivel superior. La rama elegida como enfoque matemático fue Álgebra Lineal y como ambiente tecnológico el Cabri-Géomètre II.

Como segunda etapa se aplicó un cuestionario diagnóstico durante el curso, el cual duró 2 horas, cada alumno tenía acceso a una computadora. Por último, la tercera etapa fue ver el problema de Extensión Lineal en los alumnos a través de una entrevista.

Uicab y Oktaç (2006) concluyeron que los resultados les llevan a plantear la siguiente pregunta: ¿cómo ayudar a los estudiantes a pensar teóricamente y a hacer conexiones entre diferentes conceptos? Los autores de este artículo consideran que la abstracción y la práctica constante de problemas nuevos son dos ingredientes que pueden permitir al alumno llevar a cabo las conexiones entre los conceptos. También comentan que la postura de los profesores y estudiantes sobre el conocimiento no es la misma: el estudiante por lo general se encuentra en una etapa anterior al conocimiento.

Este artículo nos va a ser de utilidad en este trabajo porque aborda el problema de Extensión Lineal con ayuda de software y aunque no sea la manera en la que nosotros vamos a abordar ese problema, sí nos pueden servir algunos problemas que ellas pusieron y adaptarlos a lápiz y papel para nuestra investigación, también ayuda porque se pueden considerar las dificultades que se encontraron en los alumnos al abordar este problema y tomarlas en cuenta para el diseño de nuestra descomposición genética.

Se encontró la investigación de Hernández y Oktaç (2017) que tiene por nombre “El problema de Extensión Lineal con apoyo de construcciones geométricas” la cual se centra en estudiar el problema de Extensión Lineal usando construcciones geométricas. Para llevar a cabo la investigación tomaron como referencia el marco teórico metodológico llamado Abstracción en Contexto esto los llevo a diseñar una secuencia didáctica que permite estudiar distintos procesos de abstracción.

Para abordar el problema de Extensión Lineal Hernández y Oktaç (2017) enfrentaron a un grupo de estudiantes a representar conceptos del Álgebra Lineal haciendo uso de construcciones geométricas en GeoGebra.

La metodología que se utilizó fue diseñar una secuencia de tres actividades que se elaboró con base en el marco teórico de Abstracción en contexto, esta secuencia la realizaron con la finalidad de que los estudiantes de la maestría en Matemática Educativa crearan conexiones adecuadas entre distintos conceptos relacionados con el tópico de Extensión Lineal y que estas conexiones se reflejaran a través de distintos procesos que involucraran el reorganizar sus conocimientos matemáticos previos para construir nuevos conocimientos y, así, los estudiantes hicieran una abstracción de diferentes conceptos matemáticos. Después de que los estudiantes se enfrentaron a esta secuencia utilizaron el marco teórico que ya se mencionó para identificar y analizar las acciones epistémicas o procesos de abstracción que reflejan los estudiantes con esta secuencia de actividades.

La secuencia de actividades que se mencionó anteriormente se aplicó a doce alumnos de maestría que cursaban la materia de Álgebra y Geometría en el segundo semestre en la maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de una institución de la ciudad de México.

Algunas conclusiones que se reportan es que gracias a dos actividades que pusieron antes de abordar el tópico de Extensión Lineal los estudiantes pudieron abordar este tópico de manera adecuada, aunque los investigadores no pueden asegurar que los estudiantes obtuvieron los conocimientos necesarios para poder construir una solución geométrica a este problema. También concluyen en torno a la secuencia didáctica que propusieron que esta tuvo carencias, ya que por ejemplo en las actividades finales de la secuencia se esperaba que los estudiantes resolvieran los problemas de Extensión Lineal pensándolos mayormente en forma geométrica, sin embago aunque los estudiantes resolvieron correctamente los problemas ninguno de ellos se deslindó de sus pensamientos aritmético-algebraicos.

Esta investigación nos va a ser de ayuda para nuestro trabajo porque podremos saber que dificultades se les presentan a los alumnos con este tópico Extensión Lineal y también saber de qué manera el alumno aborda este tópico de manera geométrica para tomarlo en cuenta en el momento en que hagamos nuestra investigación, también porque incluye ejercicios de Extensión Lineal que pueden ayudarnos en la entrevista que se realizará para validar nuestra descomposición genética.

Otra investigación que va a ser de gran ayuda para nuestra investigación porque aborda el tópico Extensión Lineal es la de Sierpinska (2000), aunque este tópico se aborda desde el de identificar los tipos de pensamiento que tiene un estudiante como práctico y teórico, podemos obtener cuestiones muy interesantes para nuestra investigación por ejemplo:

- Que los estudiantes no vinculan el concepto de transformación lineal y base, ya que por ejemplo se les pide que seleccionen geométricamente en cabri vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^2$ v_1 , $T(v_1)$, v_2 y $T(v_2)$ y se les pide encontrar

a) $T(v_1) + T(v_2)$
b) $2\,T(v_1)$
c) $1.5\,T(v_1) + 0.8\,T\,(v_2)$

Estos incisos los pueden resolver los estudiantes sin problema alguno con las propiedades de la transformación lineal, a excepción de un estudiante que en el inciso b) lo resolvió pero los argumentos que utilizó no fueron los correctos, ya que él, para poder resolverlo consideró los casos particulares $k_1 = k_2 = 1$ y $v_1 = v_2$ entonces tenía $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1) + T(v_1) = 2\,T(v_1)$, pero aquí el alumno no puede hacer esto porque los vectores v_1 y v_2 ya están fijos, parece que el alumno tenía la necesidad de comprobar la preservación de la combinación lineal de la transformación lineal con la suma de dos vectores.

La mayoría de los alumnos pudieron resolver estos tres incisos, el problema está cuando en el inciso d) se les pregunta por *T(v)* la imagen de cualquier vector arbitrario *v* ya que los alumnos no podían resolverlo y se presentaron varias cuestiones durante el experimento, las cuales mencionamos a continuación:

Los alumnos no podían resolver el inciso d) porque no encontraban la relación del vector v con v_1 y v_2, no se daban cuenta de que los vectores $v_1\ y\ v_2$ formaban una base para $\mathbb{R}^2$ y entonces podrían escribir a cualquier vector del espacio vectorial como combinación de estos dos vectores, no mostraban la relación que había entre el concepto de base y el de Transformación lineal. Desde el punto de vista de nuestro Marco teórico no pueden realizar esta coordinación entre estos dos procesos, puede ser que los alumnos no hayan hecho esta conexión porque tiene que ver incluso con el esquema de transformación lineal o base que es cuando ya se empiezan a establecer relaciones del concepto con otros conceptos.

Otra estudiante encontró que los ángulos entre v_1 y $T(v_1)$ y de v_2 y $T(v_2)$ era aproximadamente 100º y que la relación de longitudes de $v_1 + v_2$ y $T(v_1 + v_2)$ era de 0.87 consideró a T como una composición de una dilatación por un escalar (variable) seguida de una rotación de 100º.

Después se les dio a los estudiantes v_1 , $T(v_1)$, $v_2\ y\ T\,(v_2)$ vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que no pudieran asociar una transformación prototipo a estos vectores y a las imágenes de estos vectores, lo que paso cuando se les preguntó si podrían encontrar $T(v)$ para cualquier vector arbitrario v fue que los estudiantes al principio lo que intentaban para poder encontrar $T(v)$ era tratar de encontrar a través de $v_1\ y\ T(v_1)$ y de $v_2\ y\ T(v_2)$ características que se preservaran en la imagen de ambos como un ángulo, o si el vector se aumentó o disminuyó su magnitud para así poder relacionar esto con una transformación lineal ya conocida como por ejemplo una rotación, dilatación, reflexión, entre otras, y al ver que no lo lograban se sentían defraudados. Podría pensarse desde el punto de vista del nuestro marco teórico que aquí el alumno no tiene una concepción proceso de Transformación lineal ya que el sólo quiere estar realizando acciones sobre estos vectores específicos y no es consciente de que una transformación lineal es una función que cumple con las propiedades de distribuir suma y sacar escalares para todos los vectores del dominio de la transformación lineal, se quedan con que una transformación lineal es lo que le hace a un vector, por ejemplo rotarlo, expandirlo, etc.

Los estudiantes se quedan con la idea de que las funciones prototipo es la definición de transformación lineal, y como mencionaba esto nos lleva a pensar que para poder abordar este tópico de Extensión Lineal el alumno necesita una concepción proceso de transformación lineal.

Capítulo III. Marco Teórico

3.1 Antecedentes Teoría APOE

La teoría APOE fue iniciada por Dubinsky que era un investigador dedicado a la matemática pura, más en específico al análisis funcional, él pasó de la investigación en matemáticas a la investigación en actividades mentales involucradas en el aprendizaje de matemáticas por parte de los estudiantes. Y basándose en la idea de la *abstracción reflexiva* de Piaget empezó a desarrollar esta teoría a principios de los años 80.

Posteriormente la teoría se siguió desarrollando por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) un grupo conformado por matemáticos que se estaban iniciando en la investigación dentro de la matemática educativa, en la actualidad estre grupo se encuentra desconsolidado. Sin embargo, la teoría se sigue trabajando y desarrollando por diversos grupos que trabajan de manera independiente la instrucción de esta, mostrando avances significativos que han consolidado aun más a la teoría.

La teoría APOE considera que la abstracción reflexiva es una poderosa herramienta para describir el desarrollo mental de conceptos matemáticos de nivel superior como Cálculo, Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Lógica y Teoría de Conjunto, entre otras., pero ¿Qué es la abstracción reflexiva?

3.2 La Abstracción Reflexiva

Piaget (citado por Dubinsky, 1991) en su descripción de cómo aprende un niño mencionaba tres tipos de abstracción que son:

Abstracción empírica: Deriva de las propiedades de los objetos, esto tiene que ver con las experiencias que los individuos tienen externamente con el objeto y estas propiedades a pesar de que las haya obtenido por las experiencias externas el conocimiento de estas propiedades es interno, ya que son resultado de las construcciones realizadas internamente por el sujeto. Según Piaget, este tipo de abstracción conduce a la extracción de las propiedades comunes de los objetos y generalizaciones extensionales, es decir, el paso de "algunos" a "todos", de lo específico a lo general.

Se puede considerar que estas propiedades residen enteramente en el objeto, pero, de hecho, sólo se puede tener conocimiento de estas propiedades realizando acciones sobre el objeto y que estas acciones las realicen diferentes individuos bajo condiciones diferentes y así llegar a conclusiones diferentes sobre estas propiedades.

Abstracción pseudo-empírica: Señala Piaget que "cuando el objeto ha sido modificado por las acciones del sujeto y enriquecido con las propiedades extraídas de sus coordinaciones, la abstracción que se refiere a esas propiedades es llamada “pseudoempírica”, porque, actuando sobre el objeto y sobre sus elementos observables actuales, como en la abstracción empírica, las comprobaciones alcanzan en realidad a los productos de la coordinación de las acciones del sujeto: se trata pues, de un caso particular de la abstracción reflexiva y no de un derivado de la abstracción empírica". Por ejemplo, una cosa es abstraer de un objeto su cualidad "forma triangular" que es abstracción empírica, y otra cosa es abstraer su cualidad de "ser el segundo de una serie" que es abstracción pseudoempírica.

Abstracción reflexiva: Piaget (citado en Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014) se refiere a la abstracción reflexiva como el mecanismo principal para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento y en cuanto a las matemáticas es el mecanismo mental por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas son creadas. Estas ideas fueron las que llamaron la atención a Dubinsky ya que estas permiten describir cómo los alumnos desarrollan ciertas estructuras matemáticas en su mente, lo que dio origen a las primeras nociones de la teoría APOE.

La abstracción reflexiva consta de 2 partes, según Arnon et al. (2014):

- La primera parte implica reflexión, en el sentido conciencia y pensamiento contemplativo, en el sentido de reflejar contenidos y operaciones desde un nivel o estadio cognitivo inferior a uno más alto (es decir, desde procesos hasta objetos).
- La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y operaciones en esta etapa superior que da lugar a las operaciones mismas convirtiéndose en un contenido al que pueden aplicarse nuevas operaciones (Piaget, 1973).

También Beth y Piaget (según Arnon et al., 2014) consideran que en el desarrollo del conocimiento sobre un objeto ya sea mental o físico, se requiere tanto el objeto como un sujeto que actúa sobre el objeto. El sujeto y el objeto no pueden disociarse; es imposible hablar de cualquiera de ellos sin el otro. Piaget aplicó estas ideas a toda la gama de temas matemáticos, desde los conceptos más elementales construidos por los estudiantes hasta los trabajo de investigación avanzados del matemático. Lo que Piaget parece estar diciendo aquí es que las propiedades de los objetos no residen en los objetos mismos, sino más bien en las acciones que se realizan sobre estos objetos. Así, las propiedades de los objetos dependen tanto de los objetos como de los sujetos que manipulan los objetos.

3.3 La teoría APOE

La teoría APOE es un modelo que describe cómo los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos y es un marco que se usa para explicar cómo los individuos construyen mentalmente su comprensión de los conceptos matemáticos. De acuerdo a la teoría APOE para que un sujeto pueda construir un objeto cognitivo debe de pasar por tres etapas que son: acción, proceso y objeto, y la relación de estas tres etapas con otros conceptos es lo que hace que se genere la construcción del esquema del concepto a aprender.

Trigueros y Oktaç (citado en Kú, 2007) expresan que:

> "El paso por estas tres etapas no es necesariamente lineal. Un individuo puede permanecer mucho tiempo en etapas intermedias, o incluso estar en una etapa para algunos aspectos de un concepto y en otra para otros aspectos del concepto. Lo que es realmente lineal es la forma de trabajo que un individuo pone de manifiesto frente a distintas situaciones problemáticas cuando responde de una manera que puede caracterizarse en la teoría como un proceso, un objeto o bien una acción". (p. 22).

Desde una perspectiva cognitiva, un concepto matemático está enmarcado en términos de su descomposición genética, una descripción de cómo el concepto puede ser construido en la mente de un individuo. Los individuos dan sentido a los conceptos matemáticos cuando construyen y utilizan las estructuras o construcciones mentales que están establecidas en la teoría APOE, las cuales surgieron a través de la abstracción reflexiva y a las cuales se llega por los mecanismos mentales de interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, de-encapsulación y tematización (Arnon et al., 2014).

En la teoría APOE se considera que un individuo comprendió un concepto matemático cuando da muestra de las estructuras mentales necesarias para la construcción de este concepto (Arnon et al., 2014). Stenger et al. (2008) mencionan que una estructura mental en la teoría APOE, es cualquier estructura relativamente estable que puede seguir desarrollándose, es algo que está construido en la mente y que un individuo utiliza para dar sentido a la matemática en diversas situaciones problemáticas matemáticas, es decir, son las diferentes etapas de conocimiento que va a construir un individuo para poder comprender el concepto matemático.

Los mecanismos mentales para la teoría APOE según Stenger et al. (2008) son "Un medio por el cual esa estructura puede desarrollarse en la mente (s) de un individuo o un grupo de individuos". (p. 98). Es decir, son las herramientas o los procesos que se basan en la abstracción reflexiva y que permiten a un individuo pasar de una etapa de conocimiento a otra, por ejemplo, la interiorización que nos permite pasar de la etapa de conocimiento acción a la de proceso.

Antes de seguir avanzando hay que aclarar que en la teoría APOE los términos concepción y concepto aparecen muy frecuentemente, pero no son lo mismo existe única distinción de estos ya que la concepción se refiere a algo intrapersonal, es una idea del individuo que se desarrolla por la actividad reflexiva y que será descrita por la descomposición genética, en cambio, el concepto es acordado por los matemáticos y es la comprensión colectiva de este contenido matemático por la comunidad de matemáticos (Arnon et al., 2014, p. 125).

Dubinsky (1991) discute o hace alusión a cinco tipos de abstracción reflexiva, o mecanismos mentales: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y generalización. Que conducen a la construcción de las estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y esquemas, como se muestra en la figura 3.1

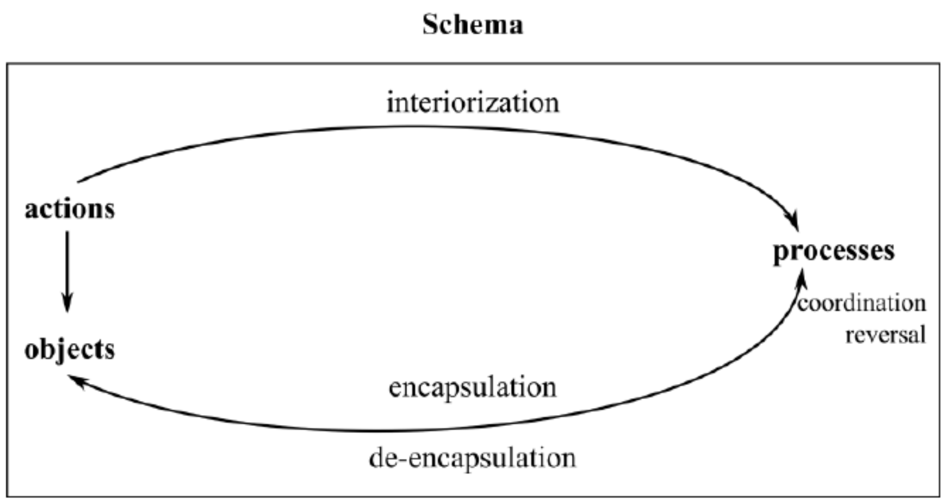


Figura 3.1. Estructuras y mecanismos mentales del conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

Lo que este diagrama quiere decir es que la comprensión de un concepto matemático está dada por la adquisición de las estructuras y mecanismos mentales que esta requiere, comenzando por un *objeto* matemático preexistente al que se le aplicarán *acciones* y estas posteriormente serán *interiorizadas* para obtener *procesos* los cuales pueden *encapsularse* en un objeto, *coordinarse* o *revertirse* con otros procesos para generar nuevos procesos. Los objetos pueden *desencapsularse* para regresar al proceso del cual proviene, si es necesario utilizar el objeto y el proceso en una misma situación. Estas estructuras mentales de acciones, procesos y objetos se organizan en esquemas.

En la teoría APOE la profundidad y complejidad de la comprensión de un concepto depende de su capacidad para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen. Estas conexiones forman la base de un esquema cuya coherencia es crucial para la capacidad de un individuo de darle sentido a las situaciones matemáticas relacionadas con el concepto (Arnon et al., 2014).

Otros mecanismos que usó Piaget son la asimilación y la acomodación (alojamiento), donde la Asimilación de conocimiento se refiere a un mecanismo mediante el cual un sujeto puede aplicar una estructura cognitiva, esencialmente sin cambio, para incluir un objeto cognitivo el sujeto no tiene que haberlas tratado anteriormente, y la acomodación se refiere a un mecanismo mediante el cual la estructura mental se reconstruye y modifica para hacer frente a una nueva situación. Ambos mecanismos están relacionados con el mecanismo de coordinación dentro de la teoría APOE.

3.4 ESTRUCTURAS MENTALES

3.4.1 Acción

Según se establece en la teoría APOE, heredado de la teoría de Piaget, un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de objetos ya concebidos, cabe mencionar que una acción es externa ya que cada paso de la transformación necesita ser realizada explícitamente y guiada por instrucciones; además, cada paso pide el siguiente, es decir, los pasos de la acción todavía no se pueden imaginar y no se pueden omitir (Arnon et al., 2014).

Cabe mencionar que un individuo está limitado a una concepción acción si se basa en señales externas, para poder resolver el problema matemático al que se le enfrente. Podemos encontrar en Arnon et al. (2014) que la importancia de la concepción acción reside en que es necesaria para el desarrollo de otras estructuras, como los procesos ya que estos son la interiorización de las acciones, también son importantes las acciones porque estas conducen al desarrollo de estructuras de orden superior como los objetos mentales al la aplicación estas sobre los procesos.

También se expresa en Arnon et al. (2014) que las acciones pueden ser básicas o complejas dependiendo del contexto. Por ejemplo, en el Álgebra Lineal un alumno con una concepción acción de la propiedad distributiva de suma de una transformación lineal, solo podrá comprobar esta propiedad aplicando la transformación lineal a vectores en específico donde la transformación lineal dada está dada como una expresión algebraica, que sirve de estímulo externo.

3.4.2 Proceso

Los procesos se dan a través de los mecanismos mentales de interiorización, coordinación y reversión, cada uno de estos da lugar a nuevos Procesos.

El mecanismo de interiorización se desarrolla a medida que las acciones se repiten y se reflexionan, el individuo pasa de confiar en señales externas a tener control interno sobre ellas, se caracteriza por una capacidad de imaginar los pasos sin necesariamente tener que realizarlos cada uno explícitamente y ser capaz de saltárselos, así como de invertirlos (Arnon et al., 2014).

Como expresa Badillo (2003) el individuo realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Por tanto, un sujeto que exhiba una concepción proceso de un concepto matemático puede reflexionar sobre ella, describirla, o incluso invertir los pasos de la transformación sin tener la necesidad de volver a realizar los pasos.

> "Una acción debe ser interiorizada. Como hemos dicho, esto significa que algunas construcciones internas se hacen relativas a la acción. Una acción interiorizada es un proceso. La interiorización permite a uno ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones". (Dubinsky 1991, página 107).

Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede ser interiorizada en un proceso. En la teoría APOE un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que la acción interiorizada, pero enteramente en la mente del individuo, permitiéndole así que imagine realizar la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente (Arnon et al., 2014).

Cabe mencionar que, aunque una acción y un proceso pueden ser la misma transformación, sí cambian, porque para una acción uno debe realizar la transformación ya sea física o mentalmente paso a paso en cambio para un proceso uno puede llevar a cabo la transformación sin la necesidad de pasar por cada uno de los pasos.

Por ejemplo, un alumno que tiene una concepción proceso de Transformación lineal puede darse cuenta de las propiedades que cumple e incluso saltarse pasos para comprobar si una transformación es lineal o no (Roa-Fuentes, 2008) una transformación lineal que preserva combinaciones Lineal es la coordinación de dos procesos el de distribuir suma y el de sacar escalares.

3.4.3 Objeto

Según Asiala et al. (1996) cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construirlas, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (p. 11).

Se advierte que, a lo largo de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario des-encapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el propósito de usar sus propiedades en la manipulación del objeto. Por ejemplo, un alumno tiene una concepción objeto de transformación lineal cuando es capaz de ver a una transformación lineal como elemento de un espacio vectorial, también cuando puede hacer acciones entre transformaciones Lineales, por ejemplo, componer dos transformaciones Lineales. Para la evaluación de la imagen de un vector bajo una composición de transformaciones, el alumno requeriría al mismo tiempo ver a las transformaciones como objetos, para aplicarles la acción de composición, y utilizar sus procesos para evaluar la composición en el vector dado.

3.4.4 Esquema

Según Arnon et al (2014) un esquema se caracteriza por su dinamismo y porque se sigue reconstruyendo día con día a través de la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas, cabe mencionar que la coherencia de un esquema es determinada por la capacidad del individuo para determinar si puede usarse para tratar con una situación matemática particular. Una vez que un esquema se ha construido como una colección coherente de estructuras como acciones, procesos, objetos y otros esquemas y las respectivas conexiones establecidas entre esas estructuras, puede transformarse en una estructura estática un objeto y/o utilizarse como estructura dinámica que asimile otros objetos o esquemas relacionados.

Asiala et al. (1996) (citado en Badillo, 2003) expresa que cuando ya tenemos los objetos y procesos construidos estos pueden conectarse o relacionarse de varias formas, por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados de diversas formas. También nos menciona que los procesos y objetos se pueden relacionar en virtud de que el primero actúa sobre el segundo y que una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar esquemas.

Debemos mencionar que los estudios que se centran en el desarrollo de esquemas no son muy numerosos y se necesitan más investigaciones para comprender mejor cómo se desarrollan y se aplican estos en situaciones matemáticas.

Así como los procesos y objetos se organizan en estructuras más complejas a las que se les llama esquemas, estos también se pueden coordinar y organizar en estructuras de un nivel más alto: cuando esto ocurre se da el mecanismo que ya definimos como tematización.

3.5 MECANISMOS MENTALES

3.5.1 Interiorización

Es el mecanismo mental que nos permite pasar de una concepción acción a una concepción proceso. Permite a un individuo ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones". (Dubinsky 1991, página 107). Según Arnon et al. (2014) cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede ser interiorizada en un proceso.

3.5.2 Coordinación

Este mecanismo es indispensable para construir objetos mentales ya que dos objetos pueden ser des-encapsulados, sus procesos coordinados para generar un nuevo proceso que puede ser encapsulado para formar un nuevo Objeto.

En Arnon et al. (2014) se expresa que el mecanismo de coordinación está actualmente bajo investigación y se plantea la hipótesis de que la coordinación de dos procesos, digamos PA y PB, se puede considerar como la aplicación de PA a PB, y para que esto sea posible, el alumno primero necesita encapsular PB en un objeto, OB, para ser capaz de aplicar PA a ello. Una vez que esto ocurra, la coordinación puede continuar: o bien OB se asimila y se le puede aplicar PA, o PA es acomodado para que el alumno pueda aplicarlo a OB. Una alternativa es que PB sea aplicado a PA de manera similar, el ver si esto ocurre así es el tema de estudio en el futuro. Lo anterior se resume en la figura 3.2.

Por tanto, el mecanismo de coordinación de procesos conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más sólido (Badillo, 2003).

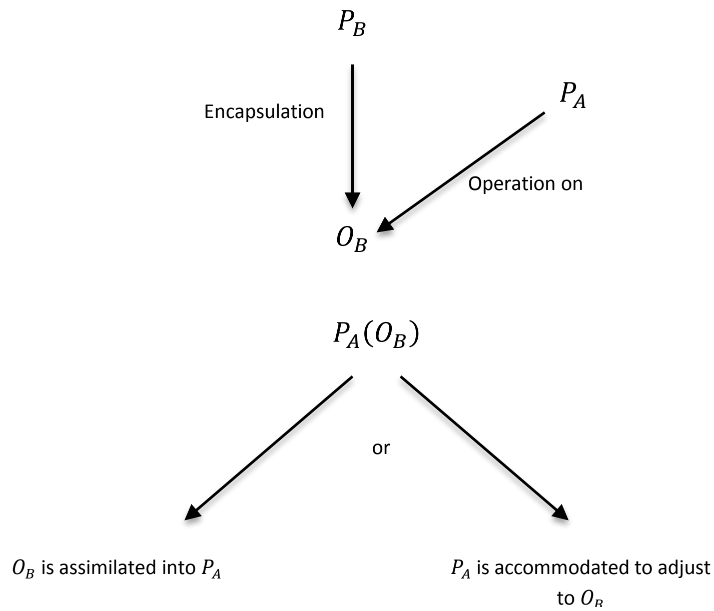


Figura 3.2. Coordinación de dos Procesos P_A y P_B (Arnon, et al., 2014, p. 24)

3.5.3 Encapsulación

Dentro de la teoría APOE, la encapsulación es la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo. Este objeto puede considerarse como una entidad total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos. Bajo estas circunstancias se afirma que un proceso se ha encapsulado en un objeto según menciona Badillo (2003) lo expresa así Ramírez (2000).

La encapsulación ocurre cuando un individuo aplica acciones a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica como algo estático a la cual se pueden aplicar acciones. En Arnon et al. (2014) se menciona que si podemos darnos cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad y estas pueden construirse decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo.

También se expresa en Arnon et al (2014) que en varios estudios basados en APOE, el mecanismo de encapsulación es lo más difícil para un individuo.

La capacidad de un sujeto de ver algo familiar en una forma totalmente nueva nunca es fácil de lograr y pueden ocasionarse muchas dificultades en el transcurso de adquirir esta capacidad.

3.5.4 Desencapsulación

Una vez que un proceso ha sido encapsulado en un objeto mental, este puede ser desencapsulado, cuando se requiera y así volver a su proceso subyacente. Es decir, el mecanismo de desencapsulación nos ayuda a que un individuo pueda volver al proceso que dio origen al objeto (Arnon et al., 2014). Este mecanismo es importante pues permite la generación de nuevos objetos, ya que dos objetos pueden ser desencapsulados, sus procesos coordinados y el proceso resultante ser encapsulado en un nuevo objeto.

3.5.5 Generalización

Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema ha sido generalizado. Esto se debe a que el sujeto ya se dio cuenta de la aplicabilidad que tiene el esquema, esto también ocurre cuando un proceso es encapsulado en un objeto (Dubinsky, 1991).

En Badillo (2003) se hace mención a que Piaget hizo referencia a este proceso como una reproductividad o asimilación generalizada, y lo denominó como generalización extensional.

3.5.6 Tematización

La construcción de un esquema como objeto mental se logra a través del mecanismo de la tematización, debemos mencionar que este mecanismo permite a un individuo aplicar transformaciones a la estructura de Esquema, y por esta razón los esquemas son estructuras que contienen las descripciones, la organización y las ejemplificaciones de las estructuras mentales que un individuo ha construido con respecto a un concepto matemático.

En Dubinsky (1991) se expresa según Ramírez (2000) cuando un sujeto reflexiona sobre cuál es su comprensión del esquema de un concepto, visto como “un todo”, es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto. Y es que cuando decimos que el sujeto llega a una nueva estructura mental a la que se llama esquemas, es justo donde los esquemas se pueden tratar como objetos y ser asimilados por otros esquemas de más alto nivel cognitivo.

3.6 CICLO DE INVESTIGACIÓN

La teoría APOE cuenta con una metodología ya establecida que es su ciclo de investigación constituido por tres fases: Análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza, y análisis y verificación de datos. Las investigaciones con APOE se pueden clasificar en dos tipos, aquellas que siguen tal cual el ciclo de investigación y las que utilizan el ciclo de investigación modificado (Figura 3.3), donde en lugar de diseñar e implementar la enseñanza se diseñan y aplican instrumentos que permiten validar o refinar la descomposición genética preliminar, obtenida como resultado final del análisis teórico. Nuestra investigación es de estas últimas. A continuación describimos con detalle cada fase del ciclo

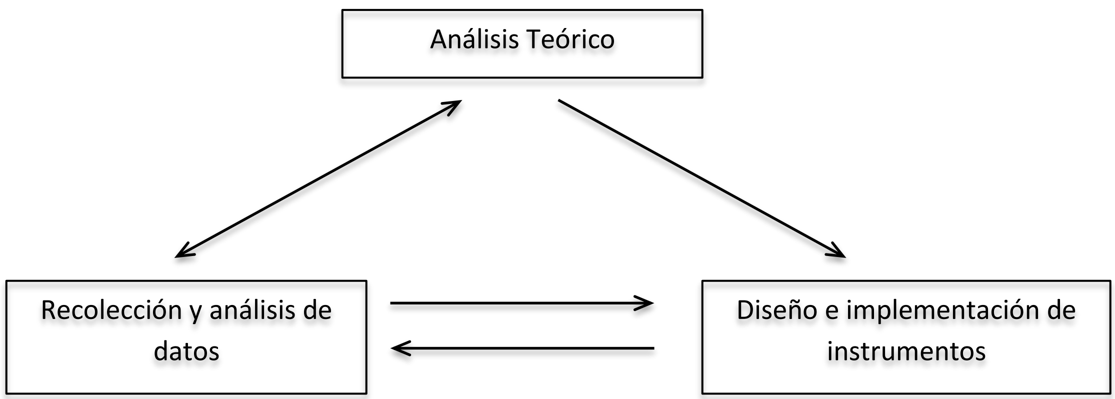


Figura 3.3. Ciclo de investigación (modificado de Arnon et al., 2014, p. 94)

3.6.1 Fase 1. Análisis teórico

Según Roa-Fuentes y Oktaç (2010) el análisis teórico es la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Para llevarlo a cabo se pueden tomar en cuenta: el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino factible para la construcción de un concepto matemático.

El objetivo principal del análisis teórico es el diseñar una descomposición genética del concepto matemático que nos dé uno varios posibles caminos en términos de construcciones y mecanismos mentales, que un estudiante pueda seguir para construir determinado concepto matemático.

3.6.1.1 ¿Qué es la Descomposición Genética?

Como se expresa en Arnon et al. (2014) una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos que un estudiante podría necesitar construir o aprender un concepto matemático específico. Comienza típicamente como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores sobre el aprendizaje y enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigación previamente publicada sobre el concepto, y el desarrollo histórico del concepto.

También la descomposición genética prevé los resultados que se esperan de los alumnos, indicando cuáles son las diferencias que hay en el desarrollo de las construcciones de los estudiantes y describe cómo un concepto podría ser construido mentalmente.

Puede incluir una descripción de las estructuras previas que un individuo necesita haber construido o comprendido el nuevo objeto matemático y explicar las diferencias en el desarrollo de los estudiantes en el sentido de las variaciones en el rendimiento matemático y es así, como una descomposición genética es un modelo de la epistemología y la cognición de un concepto matemático (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

También se menciona en Arnon et al. (2014) que hasta que no se pruebe experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se llamará descomposición genética preliminar.

Una descomposición genética preliminar puede guiar el desarrollo de un tratamiento instruccional y la implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para recolectar datos, casi siempre son en forma de instrumentos escritos y/o entrevistas.

Según Arnon et al. (2014) en el análisis de los datos se plantean dos preguntas:

- ¿Hicieron los estudiantes las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética?
- ¿Qué tan bien aprendieron los sujetos el contenido matemático?

Las respuestas a estas preguntas pueden conducir a la revisión de la descomposición genética y/o la instrucción, en este caso la descomposición genética ya no se considera preliminar.

En Arnon et al. (2014) se menciona que aunque en la descomposición genética las estructuras mentales relacionadas con un concepto se describen linealmente, se puede pensar que el concepto se desarrolla de la misma manera, pero no es así, porque esto no refleja la posibilidad de diferentes trayectorias que incluyen arranques, paradas y discontinuidades las cuales se producen en el aprendizaje. Por lo que la teoría APOE no descarta la posibilidad de que las estructuras mentales, una vez desarrolladas, no siempre se puedan aplicar cuando se requiera.

Por esta razón Arnon et al. (2014) menciona que una descomposición genética no explica lo que sucede en la mente de un individuo, ya que esto es casi imposible. La teoría APOE reconoce que un estudiante puede perseguir diferentes caminos de aprendizaje o seguir diferentes trayectorias, a medida que un estudiante pasa de proceso a acción y de vuelta a proceso o de objeto a proceso y de vuelta a objeto.

Los elementos que se tomarán para el diseño de la descomposición genética preliminar del tópico extensión lineal serán: el análisis de textos de Álgebra Lineal, en especial los que utilizó el profesor que impartió el curso a los alumnos, que proporcionrán los datos para validar nuestra descomposición genética; también se utilizaran los apuntes de los estudiantes a los que les aplicaremos los instrumentos para la validación de nuestra descomposición genética preliminar, mi experiencia como estudiante y el conocimiento con el que cuento sobre la teoría APOE.

Como se mencionaba, una descomposición genética puede ser un modelo que nos describa las construcciones mentales que los investigadores creen que son necesarias para comprender un concepto, pero también hay que decir que puede ser un modelo donde se describen muchas de las complejidades o dificultades que se involucran en la construcción del concepto. Arnon et al. (2014) nos expresan que una descomposición genética actúa como una lente, análoga a una rejilla de difracción que los investigadores usan para explicar cómo los estudiantes desarrollan o no su comprensión de los conceptos matemáticos.

Algo importante en torno a la descomposición genética que debemos mencionar, es que, esta no es única, ya que si bien nos describe un posible camino o trayectoria para construir un concepto matemático, los estudiantes pueden seguir diferentes caminos para la construcción de este, ya que influyen diferentes factores, como por ejemplo los conceptos previos que cada estudiante tenga.

A través del análisis de los datos podemos obtener que las construcciones predichas por el análisis preliminar pueden parecer haber sido hechas por los estudiantes, otras pueden faltar o ser diferentes de las propuestas, y otras pueden no estar contabilizadas por el análisis preliminar, es decir pueden surgir como resultado del análisis. Después de esto la descomposición genética necesita ser refinada para reflejar lo que se ha encontrado después del análisis de datos. Además, las revisiones de la descomposición genética pueden conducir a cambios en la instrucción, así como proporcionar una oportunidad para un análisis empírico adicional.

3.6.2 Fase 2. Diseño e implementación de los instrumentos

Los instrumentos que se utilizan dentro de las investigaciones con APOE para la recogida de datos son: cuestionarios escritos, entrevistas semi-estructuradas (audio y/o video grabadas) y/o exámenes. Además de observaciones en el salón de clases, análisis de libros de texto y estudios histórico/epistemológicos (Arnon et al., 2014). Presentamos a continuación una descripción de solo aquellos instrumentos que utilizaremos para la recogida de datos de nuestra investigación, que son, un cuestionario diagnóstico y una entrevista semi-estructurada.

Entrevistas semi-estructuradas: Son los instrumentos de recogida de datos más importantes para la teoría APOE, ya que permiten al investigador determinar si los estudiantes han hecho las construcciones mentales descritas en la descomposición genética preliminar diseñada. Los entrevistados pueden ser seleccionados en base a las respuestas de un cuestionario escrito, un examen aplicado previamente, la retroalimentación del profesor del curso o una combinación de estos. El objetivo es obtener datos que muestren el rendimiento académico de los estudiantes en diferentes situaciones matemáticas que se les presenten, con la intención de comparar el pensamiento de aquellos estudiantes que tuvieron éxito contra los que tuvieron dificultades. Para determinar si las construcciones propuestas en la DGP permiten describir la razón de estas diferencias, o si fueron consideradas todas las estructuras necesarias para la construcción del nuevo concepto en estudio.

El diseño de la entrevista se puede fundamentar en las respuestas de los estudiantes que presentaron un examen o cuestionario escrito, la intención sería en todo caso profundizar o aclarar las dudas que tenga el investigador respecto a las respuestas dadas por los alumnos. También podrían ser entrevistas piloto que permitan validar o modificar los instrumentos escritos para después ser aplicados a un grupo mayor de individuos.

La forma de llevar a cabo las entrevistas semi-estructuradas dentro de la teoría APOE es de la siguiente manera: el entrevistador se guía con un protocolo de preguntas previamente diseñadas para aclarar o sondear el pensamiento de un estudiante a profundidad. Si las preguntas no son suficientes para que el entrevistador pueda determinar la construcción mental del estudiante, puede dar alguna pista, de manera que mediante estas y las preguntas de seguimiento el entrevistador pueda observar el proceso de construcción del individuo (Arnon et al., 2014). Estas entrevistas son individuales y su duración y aplicación dependen del entrevistador.

Cuestionarios escritos: Se diseñan con la intención de reunir evidencia de la presencia de las construcciones mentales descritas en la descomposición genética preliminar y, sugerir modificaciones a esta última si las construcciones no están presentes. Por esta razón los cuestionarios escritos son útiles porque proporcionan información básica sobre el rendimiento matemático de los estudiantes, en particular de aquellos que muestran dificultad en la solución de las situaciones matemáticas planteadas. Además, pueden ayudar en el diseño de la entrevista al guiar el tipo de pregunta que se puede hacer a los estudiantes para conocer con más profundidad si muestran o no las construcciones mentales (Arnon et al., 2014).

Son dos los tipos de investigación que se desarrollan en la teoría APOE, aquellas que consideran el ciclo de investigación como tal: Análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y análisis y verificación de datos; para estas investigaciones los cuestionarios escritos son en su mayoría exámenes que se aplican al final de la implementación de la enseñanza. Para aquellas que siguen el ciclo de investigación modificado, es decir, diseñan e implementan instrumentos, los cuestionarios escritos (cuestionario diagnóstico) se utilizan para seleccionar a los estudiantes que serán entrevistados, principalmente aquellos que dan evidencia de contar con las estructuras previas necesarias para la construcción del nuevo concepto, ya que estos darán mayor información de si se hacen o no las construcciones propuestas en la descomposición genética preliminar.

3.6.3 Fase 3. Análisis y verificación de datos

Nos expresa Arnon et al. (2014) que la implementación de los instrumentos permite recolectar datos, los cuales se analizan bajo la lente de la descomposición genética preliminar, el análisis de los datos puede ser guiado además por las preguntas:

- ¿Los estudiantes muestran las construcciones mentales descritas en la DGP?
- ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto matemático?

Si la primera pregunta se responde con un NO, entonces se hace una revisión de la enseñanza. En cambio, si la primera pregunta es respondida con un SI y la segunda pregunta es negativa se lleva a cabo una revisión de la DGP. En cualquier caso, el ciclo se repite hasta que estas preguntas quedan contestadas de forma afirmativa, es decir, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico coinciden en las mismas construcciones mentales.

La importancia del análisis de datos radica en que estos permiten validar o refinar la descomposición genética preliminar. Si alguna situación matemática es resuelta exitosamente por algunos estudiantes y por otros no, el investigador utiliza estos datos para ver si las diferencias pueden ser explicadas en términos de la presencia o ausencia de las estructuras mentales de la DGP o las relaciones entre estas. De ser posible tal explicación la DGP se valida en caso contrario se hace un refinamiento de ella.

Capítulo IV. Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo ya que se pretende describir las posibles construcciones mentales que un alumno desarrollará al construir el tópico de Extensión Lineal. El diseño de la investigación se hará a través de una observación donde no se tendrá una participación o donde no habrá una intervención por parte del investigador al momento de la construcción cognitiva de este tópico por parte de los estudiantes. Los alumnos a quienes se les aplicarán los instrumentos de investigación para la recogida de datos ya habrán visto este tópico en el curso de Álgebra Lineal II el cuál se ofrece cada semestre.

La teoría APOE cuenta con su ciclo de investigación que funge como metodología, esta fue descrito en la sesión 3.6 de manera general, a continuación presentamos en particular lo que se desarolló en cada fase para nuestra investigación:

4.1 Análisis Teórico

En este apartado del capítulo lo que se realizará será un análisis de los principales libros de Álgebra Lineal donde aparece el tópico de Extensión Lineal y en conjunto con el Análisis de las investigaciones sobre las dificultades detectadas con el Tópico de Extensión Lineal en torno a Transformación Lineal, Base y Combinación Lineal se diseñará una descomposición genética preliminar de este tópico.

Esta investigación se validará más adelante a través de un cuestionario diagnóstico que se aplicará para determinar los estudiantes que cuenten con las estructuras previas que deducimos deberían tener para la construcción del tópico Extensión Lineal, después se aplicará una entrevista semiestructurada para validar o refutar nuestra descomposición genética preliminar.

4.1.1 Resultado del análisis de libros

Como se pretende observar cuales son las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los individuos al construir el tópico de Extensión Lineal, este tópico se imparte en la materia de Álgebra Lineal II en la Licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, debido a que los estudiantes que cursan esta licenciatura nos ayudarán a contestar los instrumentos de la recolección de datos, se le pidió al profesor que impartió la materia durante el semestre agosto-diciembre de 2017 nos recomendara los libros que el utilizó para impartir esta materia, los cuales son:

- Fraleigh, J., & Beauregard, R. (1989). *Álgebra Lineal*. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Bogotá: Prentice Hall.
- Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2003). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.

De las fuentes mencionadas anteriormente se analizará cómo se introduce este tópico en cada uno de los libros, con la finalidad de determinar los conocimientos previos que se requiere para su construcción.

Ahora se mostrará el análisis de los libros mencionados:

En Fraleigh (1989) el problema de Extensión Lineal se presenta después de abordar los temas de base y transformación Lineal junto con sus propiedades, en la unidad de transformaciones lineales específicamente en el subtema de "Representaciones matriciales de transformaciones lineales" y es presentado como un teorema al que llaman "Papel de una base en la determinación de T" junto con su demostración.

Teorema 6.4 Papel de una base en la determinación de T

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ una base para V. Toda transformación lineal $T: V \to W$ está completamente determinada por su efecto en esa base. Esto es, si se conocen los n vectores

$$T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)$$

Entonces se puede calcular $T(x)$ en términos de ello para cualquier vector x de V.

Demostración. Sea x cualquier vector de V. Sabemos que x se puede expresar de manera única en la forma

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n \qquad (1)$$

Donde las x_i son escalares de $\mathbb{R}$. Debido a la preservación de la suma y de la multiplicación por un escalar para T, por la ecuación (1) obtenemos

$$T(x) = x_1 T(b_1) + x_2 T(b_2) + \cdots + x_n T(b_n) \qquad (2)$$

La ecuación (2) muestra que $T(x)$ está completamente determinado si se conocen los valores vectoriales de T en los vectores de la base (p. 307).

El autor de este libro menciona que este teorema se da con el fin de mostrar que: si podemos encontrar una matriz A_T tal que $A_T b_i = T(b_i)$ para cada vector b_i de alguna base para $\mathbb{R}^n$ entonces $A_T x = T(x)$ para todo vector x de $\mathbb{R}^n$. Mostrando la relación que existe entre dos tópicos importantes en el Álgebra Lineal, el de Extensión Lineal y el de matriz asociada a una transformación lineal.

En la demostración de este teorema se hace uso de las propiedades de linealidad: distribuir suma y sacar escalares, las cuales caracterizan a una transformación lineal, también para la demostración se usa la combinación lineal de un vector en términos de los vectores de un base del espacio vectorial dominio que, aunque está implícita en la definición de base, pues se deduce de esta, el autor presenta la definición como:

Sea *S* un subespacio de un espacio vectorial *V*. Un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores en *S* en una base para *S* si:

1. El conjunto de vectores genera *S*, esto es, $S = gn(v_1, v_2, \dots, v_n)$ y
2. El conjunto de vectores es linealmente independiente. (p. 152)

El concepto de combinación lineal está implicito en la definición de base ya que esta debe generar al subespacio *S*.

En Hoffman y Kunze (1973) el tópico de Extensión Lineal no se define como tal, sin embargo se usa después de definir transformaciones lineales y enunciar las propiedades de estas. Se aborda como si fuera algo trivial y es utilizado en la demostración de algunos teoremas por ejemplo en el teorema 1 del tema de transformaciones lineales, que dice así:

Teorema 1. Sea *V* un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo *F*, sea $\{\alpha_{1,\dots,}\alpha_n\}$ una base ordenada de *V*. Sean *W* un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo *F* y $\beta_{1,\dots,}\beta_n$ vectores cualesquiera de *W*. Entonces existe una única transformación lineal *T* de *V* en *W* tal que

$$T \propto_j = \beta_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Demostración: **Dado α de *V*, existe una única *n*-tuple $(x_1, \dots, x_n)$ tal que**

$$\boldsymbol{\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.}$$

Para ese vector α se define

$$\boldsymbol{T\alpha = x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n.}$$

Entonces *T* es una correspondencia bien definida que asocia a cada vector α de *V* un vector $T\alpha$ de *W*. De la definición queda claro que $T\alpha_j = \beta_j$ para cada *j*. Para ver que *T* es lineal, sea

$$\boldsymbol{\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n}$$

De *V* y sea c cualquier escalar. Ahora

$$c\alpha + \beta = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\alpha_n$$

Con lo que, por definición,

$$T(c\alpha + \beta) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n.$$

Por otra parte,

$$c(T_\alpha) + T\beta = c\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (cx_i + y_i)\beta_i$$

Y así

$$T(c\alpha + \beta) = c(T_\alpha) + T\beta.$$

Si *U* es una transformación lineal de *V* en *W* con $U_{\alpha j} = \beta_j$, $j = 1, \dots, n,$ entonces para el vector $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ se tiene que

$$U_\alpha = U(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(U\alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_I$$

Con lo que *U* es exactamente la misma correspondencia *T* que se definió antes, lo que demuestra que la transformación lineal con $T \propto_j = \beta_{j,}$ es única.

Podemos observar en la parte que esta con negritas en la demostración de este teorema 1 que el tópico de Extensión Lineal lo empiezan a establecer cuando dice

Dado α de V, existe una única *n*-tuple $(x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$\boldsymbol{\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.}$$

Haciendo uso del concepto de combinación lineal que proviene de la definición de base. Después se termina de establecer el tópico de Extensión Lineal ya que en la demostración del teorema 1 se dice que:

Para ese vector α se define

$$T\alpha = x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n.$$

Entonces T es una correspondencia bien definida que asocia a cada vector α de V un vector $T\alpha$ de W. De la definición queda claro que $T\alpha_j = \beta_j$ para cada j. Para ver que T es lineal, sea

$$\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$$

De V y sea c cualquier escalar.

En esta parte se termina de establecer el tópico de Extensión Lineal haciendo uso de las propiedades de una transformación lineal de distribuir suma y saca escalares.

En Friedberg, Insel y Spence (2003) el uso del problema de Extensión Lineal esta dado después de definir transformaciones lineales y mencionar sus propiedades, se aborda como algo trivial y solo se usa en la demostración del teorema 2.3 de la unidad que tiene por nombre "Transformaciones lineales", dentro del subtema "Transformaciones lineales, espacio nulo y rango". El teorema dice así:

Teorema 2.3 Sean V y W espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ lineal. Si V es dimensionalmente finito, entonces $nulidad(T) + rango(T) = \dim(V)$.

Demostración. Supóngase que $\dim(V) = n$, y sea $(x_1, \dots, x_k)$ una base para N(T). Por el corolario del Teorema 1.12 podemos extender $(x_1, \dots, x_k)$ a una base $\beta = (x_1, \dots, x_n)$ para V. Demostraremos que el conjunto $S = \{T(x_{k+1}), \dots, T(x_n)\}$ es una base para R(T).

Primero demostraremos que S genera a R(t). Sea $y \epsilon R(T)$. Entonces existe $x \epsilon V$ tal que $y = T(x)$. Como β es una base para V, tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad \textbf{Para algunas} \qquad a_1, \dots, a_n \in F.$$

Como T es lineal se tiene que

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i T(x_i) \in L(S)$$

La última igualdad se obtiene de que $x_1, \dots, x_k \in N(T)$.

Ahora demostraremos que S es linealmente independiente. Supóngase que

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(x_i) = 0 \qquad \text{Para} \qquad b_{k+1}, \dots, b_n \in F.$$

De nuevo, utilizando el hecho de que T es lineal, tenemos que

$$T\Big(\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i\Big) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i \in N(T).$$

Por lo tanto, existen $c_1, \dots, c_k \in F$ tales que

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i \quad \text{o bien} \quad \sum_{i=1}^{k} (-c_i) x_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = 0.$$

Primero se puede observar que en la parte que esta con negritas en la demostración de este teorema 2.3, el tópico de Extensión Lineal lo empiezan a establecer en la parte que dice

Entonces existe $x \epsilon V$ tal que $y = T(x)$. Como β es una base para V, tenemos que

$$\boldsymbol{x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad \text{para algunas} \qquad a_1, \dots, a_n \in F.}$$

Haciendo uso de la combinación lineal que proviene de la definición de base. Después se termina de establecer el tópico de Extensión Lineal ya que en la demostración del teorema 2.3 se dice que:

Como T es lineal se tiene que

$$\boldsymbol{y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i T(x_i) \in L(S)}$$

La última igualdad se obtiene de que $x_1, \dots, x_k \in N(T)$.

En esta parte se termina de establecer el tópico de Extensión Lineal haciendo uso de las propiedades de una transformación lineal de distribuir suma y sacar escalares.

Apuntes del Profesor que está impartiendo algebra lineal II en el semestre Agosto – Diciembre 2017 en la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ.

En los apuntes del profesor, el tópico de Extensión Lineal aparece después de abordad la definición de transformación lineal, influenciado por los libros que utiliza para su curso, este tópico es tratado como algo trivial y utilizado en la demostración de algunos teoremas. El tópico de Extensión Lineal aparece en el tema "Representación Matricial de una transformación lineal" como ayuda para demostrar el primer teorema de este tema:

Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Para $w_1, \dots, w_n \in W$, existe una única transformación lineal $T: V \to W$ con $T(v_i) = w_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Sea $v \in V$. Entonces $v = \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Así definamos

$$T: V \to W$$

$$v \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

La cual es una T.L. y $T(v_i) = w_i$

veamos que T es única. Sea $U: V \to W$ T.L tal que $U(v_i) = w_i$.

Entonces $T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(v_i) = U(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = U(v)$.

Podemos observar en la demostración de este teorema que se hace uso del tópico Extensión Lineal al considerar a los vectores $T(v_i) = w_i$ para efinir la transformación lineal T, esta propiedad es la de Extensión Lineal y también se hace uso de las propiedades de una transformación lineal que son que distribuye suma y saca escalares.

En dos de los tres libros incluyendo las notas del profesor, el tópico de Extensión Lineal es considerado como algo trivial, que el alumno debe dar por hecho, y se espera que sea capaz de utilizarlo o comprenderlo cuando se presentan las demostraciones de algunos teoremas relacionados con este. A excepción de Fraleigh (1989), en donde es presentado como un teorema. Por esta razón es que consideramos el problema de Extensión Lineal como un tópico y no como propiamente un concepto, es más bien una relación que se establece establecer entre el concepto de base y el de transformación lineal, también se puede considerar como una propiedad que tiene el objeto transformación lineal.

Los conceptos previos que están relacionado con el tópico de extensión lineal de acuerdo al análisis de los libros son: transformación lineal y base, además del concepto de vector de un espacio vectorial. Más específicamente para el concepto de transformación lineal se requieren que el estudiante sea consciente que una transformación lineal cumple dos propiedades: distribuir suma y sacar escalares. Del concepto de base lo que podemos decir es que el alumno requiere ver a esta como un conjunto de vectores con la propiedad de que todo vector del espacio vectorial se puede expresar de manera única como combinación lineal de ellos. Pudimos observar que en todos los libros lo que se hace primero es expresar el vector $v \in V$ como combinación lineal de los vectores de una base de V, para después aplicar la transformación lineal T y usar sus propiedades de manera que el vector imagen $T(v)$ quede expresado como combinación lineal de las imágenes de los vectores de la base de V dada.

Después de identificar los conceptos previos se se requieren para abordar el tópico de Extensión Lineal, se analizaron las investigaciones de Uicab y Oktaç (2006), Velasco, Hernández y Oktaç (2017), Kú (2007), Roa-Fuentes (2008) y Sierpinska (2000) con la finalidad de detectar las dificultades que los alumnos presentan con el tópico Extensión Lineal así como de los conceptos previos.

4.1.2 Análisis de las investigaciones sobre las dificultades detectadas con el Tópico de Extensión Lineal y los conceptos relacionados con él, como el de Transformación lineal, base y combinación lineal.

De los textos analizados (Uicab y Oktaç, 2006; Velasco Hernández y Oktaç, 2017; Sierpinska, 2000; Kú, 2007; Roa- Fuentes, 2008; entre otros) pudimos obtener o detectar ciertas dificultades que los alumnos tienen al enfrentarse con el tópico de Extensión Lineal, las cuales dividimos en: a) dificultades que tienen que ver con transformación lineal; b) dificultades que tienen que ver son el concepto de base y combinación lineal y c) dificultades que tiene que ver exclusivamente con el problema de Extensión Lineal. Cabe mencionar que no todas las dificultades aparecían en las investigaciones, muchas de estas fueron detectadas por nosotros al resolver o analizar los ejercicios que se planteaban en dichas investigaciones.

4.1.2.1 Dificultades asociadas con Transformación lineal.

<u>Dificultades con las propiedades de transformación lineal.</u>

- Que el estudiante confunda lo que es la transformación lineal con una transformación prototipo.

Por ejemplo, cuando se le da un problema al estudiante en donde no está explícitamente escrita la expresión algebraica de la transformación lineal sino a través de la matriz asociada a la transformación lineal, el alumno lo que hace es ver a qué matriz asociada de una trasformación lineal conocida se parece para poder trabajar o realizar procedimientos, lo que muestra que el alumno no ha comprendido el concepto de trasformación lineal pues lo asocia a transformaciones lineales prototipo.

- Dar ejemplos de transformaciones lineales o no lineales definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W.

Dificultades con las propiedades de transformación lineal.

- Los estudiantes no comprenden lo que implica la propiedad de distribución de suma y por lo tanto se les dificulta demostrar esta propiedad para cualesquiera dos vectores del espacio vectorial V sobre el cual actúa la transformación lineal.

Por ejemplo si a los estudiantes se les da la Transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (a,b,a+b)$ y se le pide comprobar que esta transformación distribuye suma, entonces el estudiante no comprende que lo que debe demostrar es que $T\big((a,b) + (c,d)\big) = T(a,b) + T(c,d)$

- Los estudiantes no comprenden lo que implica la propiedad de producto por escalar y por lo tanto se les dificulta demostrar esta propiedad para cualquier vector del espacio vectorial V sobre el cual actúa la transformación lineal.

Por ejemplo si a los estudiantes se les da la Transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(a,b,c) = (a,b+c)$ y se le pide comprobar que esta transformación saca escalares entonces el estudiante no comprende que lo que debe demostrar es $T\big(k(a,b,c)\big) = k\,T(a,b,c)$

- Que los estudiantes tengan problemas para verificar al mismo tiempo o en una misma operación las propiedades de distribución de suma y producto por escalar en una transformación lineal, y tengan que verificar por separado estas propiedades de transformación lineal.

Por ejemplo que se les pida verificar si la transformación $T(a,b) = (a+b,a,b)$ es lineal o no y el alumno plantea primero que lo que se tiene que demostrar es que $T(k(a,b) + (c,d)) = k(T(a,b) + T(c,d))$, pero lo que hace es separar esta expresión en dos $T\big((a,b) + (c,d)\big) = T(a+c,b+d)$ y $T(k(a,b)) = k\,T\,(a,b)$ porque de otra manera no puede comprobar estas propiedades.

- Los estudiantes no son conscientes de que una transformación lineal cumple las propiedades de colinealidad, paralelismo y suma de vectores o combinación lineal de vectores, como lo expresan Uicab y Oktaç (2004), es decir, que si dos vectores son colineales al aplicarles T, las imágenes de estos vectores también deberán ser colineales, o si dos vectores son paralelos las imágenes de estos vectores también tienen que ser paralelas.

Por ejemplo que si se les dan a los estudiantes los vectores A y B geométricamente, y se les da el plano con estos vectores transformados y se les pide que expliquen si puede existir una transformación lineal que mande estos vectores a sus imágenes.

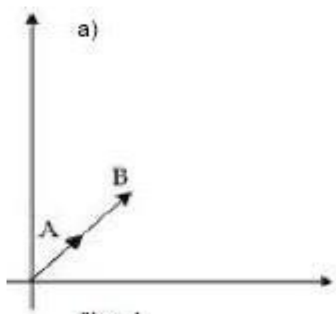


Figura 1

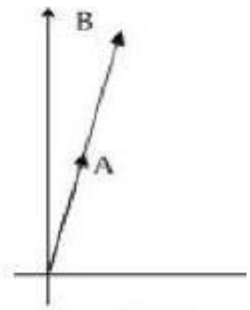


Figura 2

Los alumnos aseguran que no puede existir una transformación lineal, no se dan cuenta que en la figura 1 los vectores A y B son colineales y que en la figura 2 después de aplicar una transformación siguen siendo colineales y que esto significa que la transformación cumple con una de las propiedades de linealidad que es la colinealidad (sacar escalares), para esos dos vectores.

Dificultades con los conceptos de función, dominio y contradominio.

- Los alumnos no identifican correctamente el dominio y la imagen de una transformación lineal.

Por ejemplo, Uicab y Oktaç (2004) incluyeron en sus entrevistas la pregunta "¿Cómo defines una transformación?", a lo que un estudiante respondió: "Es una función que va de un espacio vectorial a él mismo o un subespacio de $T: V \to W$". (p. 62). Se puede ver que el estudiante no tiene claro que la función podría ir de un espacio vectorial o a un subespacio de un espacio vectorial distintos del dominio.

Tenemos de ejemplo que si se da a un estudiante una Transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(x, y) = (x, x + y, y)$ y se le pregunta cuál es el contradominio puede que responda $\mathbb{R}^3$, cuando en realidad no lo es.

- Que los estudiantes solo estén acostumbrados a trabajar con transformaciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo que al enfrentar al estudiante a la siguiente transformación lineal $T(a, b) = (a + b, a, b)$ no sepa cómo enfrentarse a esta transformación lineal porque el espacio vectorial de llegada es $\mathbb{R}^3$.

- Que los estudiantes solo estén acostumbrados a trabajar con transformaciones lineal es de un espacio vectorial V a ese mismo espacio vectorial V.

- Que los estudiantes solo estén acostumbrados a trabajar con transformaciones que van de $\mathbb{R}^n$ o un subespacio de él a $\mathbb{R}^n$ o un subespacio de este.

- Que los estudiantes definan a las transformaciones Lineales como funciones que van de un espacio vectorial a el mismo, y las demás funciones que van de un espacio vectorial a otro para ellos no son transformaciones lineales (Roa-Fuentes, 2008, p. 76).

<u>Dificultades con la coordinación del concepto de Transformación lineal y su representación geométrica.</u>

- Que los alumnos no sean capaces de decir si es posible que exista o no una transformación lineal cuando se les dan geométricamente los vectores y las imágenes de estos vectores.

- Que el alumno no pueda trabajar con una Transformación lineal que se dio de manera geométrica a través de un par de vectores del dominio de la transformación lineal y sus imágenes

Por ejemplo que se les pida encontrar cual es la transformación lineal y los alumnos no puedan proceder porque no comprenden geométricamente que es lo que hace esta transformación lineal.

<u>Dificultades con la coordinación del concepto de Transformación lineal y su representación simbólica.</u>

- Que el estudiante solo sea capaz de trabajar con la transformación lineal teniendo escrita la expresión algebraica de esta transformación lineal (Uicab y Oktaç, 2004).

- Que en la expresión algebraica de una transformación el estudiante necesite tener denotada la transformación lineal como $T(x)$ porque otra notación le causa conflicto.

Por ejemplo en la sección dos de los ejercicios de Uicab y Oktaç (2004) se les puso un problema a los estudiantes en el cual ellos tenían que decir si ciertas transformaciones eran lineales o no, la última transformación estaba escrita como $f(x) = x^2$ uno de los estudiante tuvo que expresar esta transformación en la forma $T(v) = (x_1, x_1{}^2)$ y partiendo de ahí pudo demostrar que la transformación no era lineal.

Dificultades con el paso de una concepción acción a una concepción proceso de transformación lineal.

- Los estudiantes consideran que la preservación de las operaciones (adición y multiplicación escalar) para un par de vectores del dominio y un escalar del campo implica que las funciones son transformaciones lineales (Roa-Fuentes, 2008, p. 73).

Por ejemplo que los estudiantes tengan la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (y, x + y, x - y)$ si se les pide demostrar o determinar si es lineal o no, lo que hace el estudiante es tomarse dos vectores en $\mathbb{R}^2$ (1,2) y (5,4) y el escalar 3 en $\mathbb{R}$ para verificar que se cumplen las propiedades de distribución de suma y sacar escalares para estos casos particulares

$$T\big(3(1,2) + (5,4)\big) = T\big((3,6) + (5,4)\big) = T(8,10) = (10,18,-2)$$

$$3\,T(1,2) + T(5,4) = 3(2,3,-1) + (4,9,1) = (6,9,-3) + (4,9,1) = (10,18,-2)$$

y al verificar que se cumplen aseguran que T es una transformación lineal.

- Los estudiantes al tener una combinación lineal en un espacio vectorial V y aplicarle una transformación lineal T no son conscientes de que esta combinación lineal se va a preservar por las propiedades de transformación lineal y tienen que corroborar que la combinación lineal se preserve realizando las operaciones correspondientes (Roa-Fuentes, 2008, p. 87).

Los estudiantes no se dan cuenta de que si tenemos una combinación lineal de vectores de un espacio vectorial V por ejemplo $5v_1 + 4v_6 + v_5$ y le aplicamos una transformación lineal T no es consciente de que $T(5v_1 + 4v_6 + v_5) = 5\,T(v_1) + 4\,(v_2) + v_5$, sino que tiene que realizar todas las operaciones correspondientes a T para llegar a este resultado.

Dificultades con el paso de una concepción proceso a una concepción objeto de transformación lineal.

- Los estudiantes no se dan cuenta que el realizarle acciones a una Transformación lineal T como multiplicarla por un escalar o sumarla o componerla con otra transformación lineal lo que va a obtener es una nueva transformación que también es lineal (Roa- Fuentes, 2008, p. 94)

Por ejemplo si el estudiante sabe que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (y, x + y, x - y)$ es una transformación lineal y se les pregunta si $5T$ es una transformación lineal. No se da cuenta que 5T si es una transformación lineal por que viene de una acción que se le realizó a una transformación lineal, lo que hace es tomarse la transformación $5T$ y ver si se cumplen las propiedades de distribución de suma y de sacar escalares para decir si es o no lineal.

4.1.2.2 Dificultades asociadas con Base y Combinación lineal

Dificultades asociadas con la comprensión de la definición de base

- El estudiante asocia la definición de base a las bases ortogonales y solo pueden trabajar o realizar acciones a estas bases, solo es capaz de trabajar con bases ortonormales (Uicab, 2004).

Por ejemplo, los alumnos si pueden hacer una combinación lineal de un vector en $\mathbb{R}^2$ con la base $\beta = \{(1,0),(0,-1)\}$ que es una base ortonormal, pero, con la base $\beta = \{(3,0),(0,-2)\}$ que es una base ortogonal no pueda hacer la combinación lineal.

- El estudiante asocia la definición de base a las bases canónicas, y solo pueden trabajar o realizar acciones con estas bases.

Por ejemplo, si los estudiantes tienen la base canónica $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ pueden hacer combinaciones lineales tomando vectores en $\mathbb{R}^3$, pero si tienen la base $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ no pueden hacer combinaciones lineales.

- De la pregunta 4 de la entrevista de Kú (2007) nos dimos cuenta que otra dificultad que podría surgir con los estudiantes con el concepto de base es que cuando van a demostrar o verificar si un conjunto de vectores es base se van directamente a demostrar si este conjunto es linealmente independiente y si genera al espacio vectorial y se olvidan de verificar primeramente que todos los vectores del conjunto pertenezcan al espacio vectorial que es una condición fundamental para que este conjunto sea base.

Por ejemplo como aparece en Kú (2007) se tienen los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y se tiene $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} s \text{ } en \text{ } R \right\}$ y se les dice a los estudiantes que cada vector de H es una combinación lineal de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ya que $\begin{bmatrix}s\\s\\0\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ y se les pregunta ¿Es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ una base para H?

Lo primero que hacen los estudiantes es ver si $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes y si generan H en vez de darse cuenta o de fijarse que no son elementos de H y que por lo tanto no pueden formar una base para este subespacio.

- Con base en el análisis a priori de las preguntas de la entrevista de Kú (2007) nos dimos cuenta que otra dificultad que puede presentar el estudiante con el concepto de base es que si se les da un espacio o subespacio vectorial no son capaces de determinar una base de este, lo cual nos muestra que el alumno no comprendió el concepto de base.

- Los estudiantes no están conscientes de que el conjunto que sea base debe ser el mínimo conjunto generador y como expresa Kú (2007) los estudiantes confunden un conjunto generador y un conjunto mínimo generador como una base (p. 164).

Por ejemplo que si se les dan dos conjuntos $\beta_1 = \left\{\binom{5}{0}, \binom{0}{3}\right\}$ y $\beta_2 = \left\{\binom{2}{0}, \binom{2}{3}, \binom{0}{1}\right\}$ y se les pregunta cuál de estos conjuntos podría ser base de $\mathbb{R}^2$ el estudiante diga que los dos porque ambos generan al espacio vectorial. El estudiante no es consciente de que el conjunto base debe ser el mínimo conjunto generador y el máximo linealmente independiente, se puede ver que confunde conjunto generador con conjunto mínimo generador.

<u>Dificultades asociadas con las propiedades de base y su coordinación.</u>

- Que para el estudiante sea suficiente que un conjunto sea linealmente independiente o que genere al espacio vectorial del cual pertenece para que sea base, no es consciente de que esto se cumple siempre y cuando el número de vectores en el conjunto sea igual a la dimensión del espacio vectorial.

- El estudiante no comprende el concepto de conjunto generador.

Por ejemplo, si se le da un conjunto $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y se les pregunta si este conjunto genera al espacio vectorial no tengan idea de cómo demostrar si genera o no a $\mathbb{R}^3$.

- Cuando al estudiante se le da un conjunto de vectores de un espacio vectorial no puede o no entiende cómo demostrar que este conjunto es linealmente independiente.

Por ejemplo, si se le da un conjunto $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y se les pregunta si este conjunto es linealmente independientes no comprenda que lo que hay que demostrar para decir para asegurar la independencia lineal es que si $a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ entonces los únicos escalares que cumplen esto son $a = b = c = 0$.

- El estudiante no sea capaz de decir si un par de vectores expresados geométricamente son o no linealmente independientes.

- El estudiante no es capaz de decir si dos vectores expresados geométricamente son o no generadores de un plano.

- A los alumnos les causa conflicto comprobar o trabajar la independencia lineal con vectores que solo contienen una sola variable pues menciona Kú (2007) que no saben cómo manejarlos, y esto nos lleva a pensar que el alumno no ha comprendido completamente lo que significa la independencia lineal.

Por ejemplo si el alumno trabaja con el espacio vectorial $\mathbb{R}$ y se le pregunta si los vectores 5 y 3 son linealmente independientes el alumno no sabe cómo proceder para justificar su respuesta.

<u>Dificultades relacionadas con el concepto de base y su relación con otros conceptos</u>

- Los estudiantes tienen problemas con identificar cuantos vectores debe tener la base de un espacio vectorial o subespacio de un espacio vectorial ya que no establecen la relación del concepto de dimensión con el de base.

- Aunque el alumno sabe la definición de base se le dificulta trabajar con bases que no sean del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo puede trabajar con la base canónica de $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ pero ya no puede trabajar o entender que significa una base del espacio vectorial de los polinomios.

- No pueden trabajar con bases que no sean pertenecientes a algún espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

- Los alumnos no pueden trabajar o realizar procedimientos con bases que pertenezcan a espacios vectoriales de dimensión infinita.

- En Kú (2007) se expresa que una dificultad que el estudiante podría presentar con el concepto de base es que “no relacione el concepto de espacio vectorial con el concepto de conjunto generador” (p. 45).

Por ejemplo, si se les dan dos vectores $v_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}-2\\7\\-9\end{bmatrix}$ y se les pregunta si estos vectores forman una base para R^3, respondan que no pueden ser una base para R^3 pero si pueden ser una base para R^2.

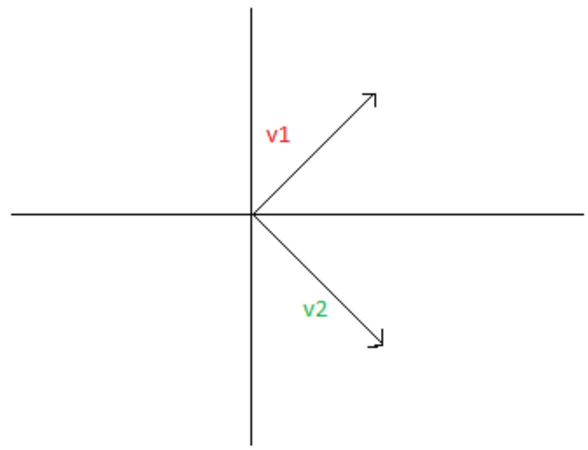
- Nos expresa Kú (2007) que otra dificultad que podrían presentar los estudiantes con las propiedades que debe de cumplir un conjunto para ser base es que “el estudiante no puede articular los conceptos de independencia lineal y conjunto generador en otros espacios que no sean $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$” (p. 54).

Por ejemplo que el alumno no sea capaz de encontrar un conjunto que pertenezca a un espacio vectorial V distinto a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que sea el mínimo conjunto generador y el máximo linealmente independiente ya que no encuentra como relacionar los conceptos de independencia lineal y conjunto generador.

<u>Dificultades relacionadas con la coordinación de base y su representación geométrica</u>

- Una dificultad que se puede presentar en torno a las propiedades de base según Kú (2007) es que “los estudiantes no pueden identificar adecuadamente una base de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ geométricamente” (p. 77).

Por ejemplo, si se les pone el siguiente plano con los vectores v_1 y v_2 geométricamente y se le pregunta al alumno ¿Estos vectores forman una base para $\mathbb{R}^2$?



Entonces el alumno no es capaz de decir si estos vectores son o no una base para $\mathbb{R}^2$.

<u>Dificultades asociadas con la combinación lineal</u>

- Los estudiantes no son capaces de expresar un vector específico como combinación lineal de los elementos de una base.

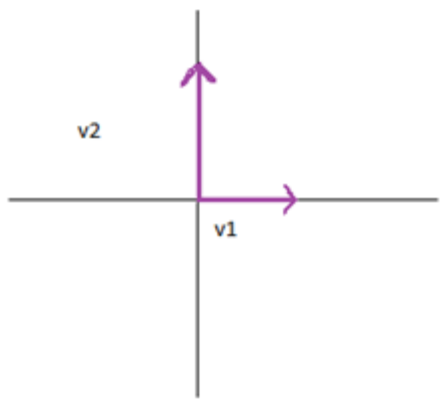
Por ejemplo, si los estudiantes tienen la base $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y se les pide encontrar la combinación lineal del vector $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no puedan hacerlo porque no comprenden que es lo que significa una combinación lineal.

- Los estudiantes pueden hacer una combinación lineal de vectores específicos pero no de un vector arbitrario.

Por ejemplo, si los estudiantes tienen la base $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y se les pide encontrar la combinación lineal del vector $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ si lo puedan hacer, pero no lo pueden hacer para el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- No pueden expresar un vector geométricamente como combinación lineal de 2 vectores dados geométricamente.

Por ejemplo, si a los estudiantes se les da un plano con dos vectores v_1 y v_2 y se les pide que expresen geométricamente como combinación lineal de estos dos vectores al vector $v = (5,7)$



Entonces los alumnos no pueden realizar esto, no saben cómo expresar geométricamente la combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 .

- Que si se les da a los estudiantes tres vectores en el plano y se les pregunta si uno de ellos es combinación lineal de los otros dos, no son capaces de justificar si es o no combinación lineal de los vectores.

- Que los estudiantes solo puedan hacer combinaciones lineales en el espacio vectorial R^n o casos particulares como R^2 o R^3.

- En Roa- Fuentes (2008) aparece una sección llamada “Relación con el concepto de base y dimensión” y se expresa que los estudiantes no pueden resolver el sistema de ecuaciones que se les presenta para poder encontrar los valores de los escalares que conforman la combinación lineal.

Por ejemplo, si se les pone una base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y se les pide expresar al vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de la base B el alumno lo que hace es:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

y obtiene que:

$$5 = a + b$$

$$4 = b + 2c$$

$$3 = -3c$$

Entonces de este sistema de ecuaciones para encontrar los escalares que conforman la combinación lineal, ya no puede resolverlo, no sabe cómo proceder con este sistema de ecuaciones y hasta aquí se quedan en el proceso.

4.1.2.3 Dificultades que se pueden presentar con el problema de Extensión Lineal.

- Que el estudiante no establezca la relación entre las propiedades de transformación lineal y combinación lineal.

Ya que por ejemplo un estudiante cuando se le pregunto en (Uicab y Oktaç, 2004) ¿Qué significa para ti una transformación lineal? contestó "Es una transformación que cumple con la combinación lineal y con el producto escalar" (p. 64), no se da cuenta que en la combinación lineal ya está incluido lo del producto por escalar.

- Los alumnos para trabajar con el problema de Extensión Lineal quieren asociar la transformación lineal T con una transformación prototipo por ejemplo una rotación, reflexión, dilatación, etc., para encontrar una regla o una expresión para T y así poder trabajar con ella. Es decir asocian la definición de transformación lineal a una transformación prototipo.

Por ejemplo, si se les dan los vectores $v_1 = (3,0)$ y $v_2 = (0,-2)$ y las imágenes de estos vectores bajo la transformación lineal T, es decir que tengan $T(3,0) = (3,3)$ y $T(0,-2) = (-2,2)$, se les pide encontrar $T(6,-10)$. Lo que los alumnos hacen es buscar una transformación conocida por ejemplo toman la transformación de rotación que está representada por esta matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y lo que hace es probar con los vectores de los cuales ya tiene la imagen para ver si es la transformación o no $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, como ve que no funciona busca otra transformación prototipo y así sucesivamente.

- Los estudiantes no perciben la relación que hay con un vector arbitrario del espacio vectorial y los elementos de una base de este espacio vectorial, más en específico no es consciente de que este vector se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base.

- Que los estudiantes en el problema de Extensión Lineal para hacer la combinación lineal del vector arbitrario V hagan la combinación lineal con los vectores imagen de la base y encuentren escalares distintos a los correctos o no puedan encontrarlos.

Por ejemplo que tengan los vectores $v_1 = (3,0)$ y $v_2 = (0,-2)$ y tengan las imágenes de estos vectores bajo la transformación lineal T, es decir $T(3,0) = (3,3)$ y $T(0,-2) = (-2,2)$, se les pide encontrar $T(6,-10)$. lo que los estudiantes hacen es expresar a $(6,-10)$ de la siguiente manera:

$$(6,-10) = \beta(3,3) + \alpha(-2,2)$$

Así encuentran los escalares incorrectos o simplemente no los encuentran porque hicieron la combinación lineal con los vectores que no se debía.

4.1.2.4 Reflexión

Con base en lo que se analizó sobre las dificultades que se pueden presentar al momento de abordar el tópico Extensión Lineal me doy cuenta en términos de nuestro marco teórico que el alumno necesita tener una concepción proceso de transformación lineal, porque de lo contrario el alumno puede que asocie la definición con una transformación prototipo y entonces cuando requiera abordar el problema de Extensión Lineal lo que haga sea tratar de acoplar una de estas transformaciones prototipo para así encontrar la forma de la transformación y aplicarla al vector arbitrario. Si el alumno no tiene una concepción proceso de transformación lineal entonces no será consiente de cuál es su dominio y contradominio y no sabrá cuál es la imagen del vector arbitrario y/o donde pertenece o la combinación lineal de los vectores de la base no sabrá a que espacio pertenece, etc.

Si el alumno cuenta con una concepción proceso de transformación lineal será capaz de trabajar con la transformación lineal sin requerir la regla que la define explícitamente, para poder realizar acciones con él, será consciente de lo que es la transformación lineal y la transformación de un vector, es decir, la imagen de un vector sin la posibilidad de confundirlos.

Con una concepción proceso de transformación lineal el alumno es consciente de que la transformación lineal preserva combinación lineal para todos los vectores del espacio vectorial y no sólo para vectores en específico, puede además trabajar con transformaciones que vallan a distintos espacios vectoriales o subespacios de algún espacio vectorial por ejemplo de $\mathbb{R}^2$a $\mathbb{R}^3$ porque de lo contrario lo que podría pasar sería que el alumno no pueda trabajar y se confunda al momento de realizar las combinaciones lineales de los vectores ya que no habrá caído en cuenta en cuál es el dominio y el contradominio.

También dentro de esta concepción proceso de transformación lineal es importante que el alumno tenga bien claro geométricamente que es lo que hace una transformación lineal a los vectores del espacio vectorial, cómo se ve la imagen, etc., porque sin estos conocimientos como se vio en diversas investigaciones por ejemplo Sierpinska (2000) es muy complicado que el alumno aborde geométricamente este concepto.

En torno al concepto de base podemos decir que el alumno también requiere una concepción proceso porque si no, solo podría hacer combinaciones lineales con vectores en específico, en cambio con una concepción proceso de base el alumno ya puede comprender lo que el proceso combinación lineal hace para todos los vectores del espacio vectorial.

Otra cuestión que es muy interesante y que salió a relucir en el análisis de las investigaciones de Uicab y Oktaç (2004), Velasco Hernández y Oktaç (2017) y Sierpinska (2000) es que los alumnos en ocasiones están acostumbrados a trabajar con bases canónicas y aquí es un problema de que confunden la definición de base con la base canónica, asocian o se quedan con la idea de que base es la base canónica.

Creemos que con una concepción proceso de base, el alumno es consciente de lo que puede hacer el proceso de combinación lineal y saben cómo encontrar los escalares que conforman esta combinación lineal, sabiendo también qué significan y pueden darle sentido. Aparte, con una concepción proceso de base, el alumno es consciente de las propiedades de base y comprende que si un conjunto es base entonces puede generar el espacio vectorial y sus vectores son linealmente independientes y por lo tanto son conscientes de que cualquier vector del espacio vectorial se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base.

Para terminar, se mencionó entonces que para que el alumno pueda construir o comprender el tópico de Extensión Lineal se requiere una estructura de proceso de los conceptos de transformación lineal y base, ya que la construcción de este tópico se dará a través de una coordinación de estos dos procesos que se explicará más adelante, lo importante por ahora es dejar en claro que si los alumnos no tienen una concepción proceso de alguno de estos dos conceptos no se podrá llevar a cabo la coordinación y entonces no se podrá construir este tópico de Extensión Lineal.

Aunque si bien esta coordinación se da entre dos procesos, es muy importante que el alumno pueda establecer la conexión que existe entre los conceptos de base y el de transformación lineal para que pueda abordar el tópico de Extensión Lineal ya que como se dio evidencia en diversas investigaciones los alumnos no pueden comprender este tópico porque no se dan cuenta que los vectores de los cuales tienen las imágenes son una base para el espacio vectorial sobre el cual actúa la transformación lineal y creo que esto está relacionado con el esquema de base, ya que así el alumno pude establecer relaciones de este concepto con otros en este caso con el de transformación lineal.

4.1.3 Investigaciones previas

Del análisis de textos y del análisis de la investigaciones sobre las dificultades detectadas con el Tópico de Extensión Lineal en torno a transformación lineal, base y combinación lineal planteamos que el estudiante requiere las estructuras previas de proceso de transformación lineal, proceso de Base, Objeto de Combinación lineal y Objeto de vector

Estas estructuras se describirán con más detalle a continuación:

4.1.3.1. Proceso de transformación lineal.

Requerimos que el alumno tenga una concepción proceso de transformación lineal ya que según Roa-Fuentes y Oktaç (2010) el proceso de transformación lineal es aquel que permite pensar en la transformación lineal T como una función definida entre espacios vectoriales V y W que preserva combinaciones lineales para todo par de vectores en V y para todo par de escalares en un campo K. Más aún, requerimos que el estudiante haya generalizado este proceso, para que pueda considerar a la transformación lineal como una función definida entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales para cualesquiera n vectores del espacio vectorial V y n escalares del campo K. Pues el tópico de extensión lineal aplica la transformación lineal sobre un vector, el cual está expresado como combinación lineal de un una base dada del espacio vectorial dominio, que considera en general está dada por $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$.

4.1.3.2. Proceso de Base

Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008) para poseer una concepción proceso del concepto de base: “Hay dos procesos que se coordinan para dar lugar a la concepción proceso del concepto de base. El primero se relaciona con el conjunto generador y consiste en un proceso que le permite al estudiante establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no escribirse como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original. El segundo tiene que ver con la independencia lineal, donde inicialmente el individuo puede identificar, a partir de las acciones que le permiten establecer combinaciones lineales de los elementos de conjuntos dados, cuáles de entre ellas producen el vector cero y, de ahí, determinar cuáles serían los conjuntos en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero." (p. 81).

Y un alumno con una concepción proceso de base es capaz de determinar si un conjunto de vectores de un espacio vectorial conforman una base para este espacio. A nosotros en particular, nos interesa que el estudiante haya construido la equivalencia que permite ver a una base, como un conjunto de vectores con la propiedad de que todo vector del espacio vectorial se puede expresar de manera única como combinación lineal de ellos, pues el tópico de extensión lineal para determinar la imagen de cualquier vector expresa este último como combinación lineal de los vectores de una base dada del espacio vectorial dominio.

4.1.3.3. Objeto Combinación lineal

Nos expresan Kú, Trigueros y Oktaç (2010) que un estudiante con una estructura de objeto de combinación lineal es capaz de pensar en distintas combinaciones lineales de los mismos vectores y puede realizar sobre ellas. En el tópico de extensión lineal, una vez expresado el vector dado como combinación lineal de los vectores de la base del espacio vectorial dominio debe ser encapsulado para aplicarle el proceso de transformación lineal.

4.1.3.4. Objeto Vector

Según Orozco del Castillo (2016), la construcción del concepto de vector como un objeto cognitivo se da como la tematización de un esquema, en lugar de mediante la encapsulación de un proceso. Además, nos menciona que el objeto de vector es un "conjunto con dos operaciones binarias, una de ellas sobre un campo, que satisface la cerradura", y que el estudiante que tiene esta estructura de objeto de vector puede determinar si la cerradura se cumple para distintos conjuntos y distintas operaciones binarias.

4.3 Descomposición Genética Preliminar

4.3.1 Concepción Acción de Extensión Lineal

Para comenzar con una construcción del tópico Extensión Lineal el alumno necesita tener un buen manejo del concepto de vector como objeto, ya que el estudiante debe aplicar acciones (sumar y multiplicar por un escalar) a elementos de un conjunto y evaluar la pertenencia de los elementos resultantes al mismo conjunto del cual se obtuvieron los operandos, esto permitirá que los alumnos puedan percatarse que la combinación lineal de vectores en específico pertenecen al espacio vectorial, y esto tiene que ver con el objeto de combinación lineal.

Para el problema de Extensión Lineal en donde se le dan al estudiante vectores que son una base de un espacio vectorial y sus respectivas imágenes correspondientes bajo una transformación lineal, el alumno con su concepción proceso de base comenzará expresando vectores en específico (vectores no arbitrarios) que pertenecen al espacio vectorial, sobre el cual actúa la transformación lineal, como combinación lineal de los vectores de los cuales tiene las imágenes. Después aplicará la transformación T a esta combinación lineal.

Para esto último requerimos que tenga una concepción objeto de combinación lineal ya que se le aplicará un proceso que es el de transformación lineal, y con la estructura de proceso de transformación lineal el estudiante puede verificar las dos propiedades simultáneamente que cumple una transformación lineal que son distribuir suma y sacar escalares, y entonces darse cuenta que la imagen de este vector en específico que tiene es una combinación lineal de las imágenes de los vectores dados en un principio.

Y en este momento diremos que el alumno tiene una concepción acción del tópico Extensión Lineal ya que es capaz de calcular las imágenes de vectores específicos, y de encontrar la imagen de combinaciones lineales finitas.

4.3.2 Concepción proceso de Extensión Lineal

Para la construcción proceso del tópico Extensión Lineal primeramente lo más difícil es que el alumno vea la relación de los vectores de los cuales tiene las imágenes con el vector arbitrario v del cual quiere encontrar la imagen, ya que como mencionan Uicab y Oktaç (2004), Velasco Hernández y Oktaç (2017) y Sierpinska (2000) los alumnos no ven esta relación, es decir, no se dan cuenta que estos vectores forman una base del espacio vectorial y que por lo tanto el vector arbitrario v puede escribirse como combinación lineal de estos vectores, esto se debe posiblemente a que el alumno se pregunta primero por la relación que tiene la imagen del vector arbitrario con las imágenes de los vectores que ya tiene, en vez de preguntarse sobre la relación del vector arbitrario con los vectores de los que provienen las imágenes.

Esto puede estar relacionado con el esquema de base o con el esquema de transformación lineal en un nivel inter porque si el alumno tiene construida una de estas estructuras o ambas podrá establecer relaciones de este concepto con otros, en nuestro caso particular podrá relacionar el concepto de base y el de transformación lineal y se dará cuenta de que los vectores de los cuales tiene las imágenes forman una base para el espacio vectorial sobre el cual actúa la transformación lineal y que cualquier vector de este espacio se puede escribir como combinación lineal de dichos vectores.

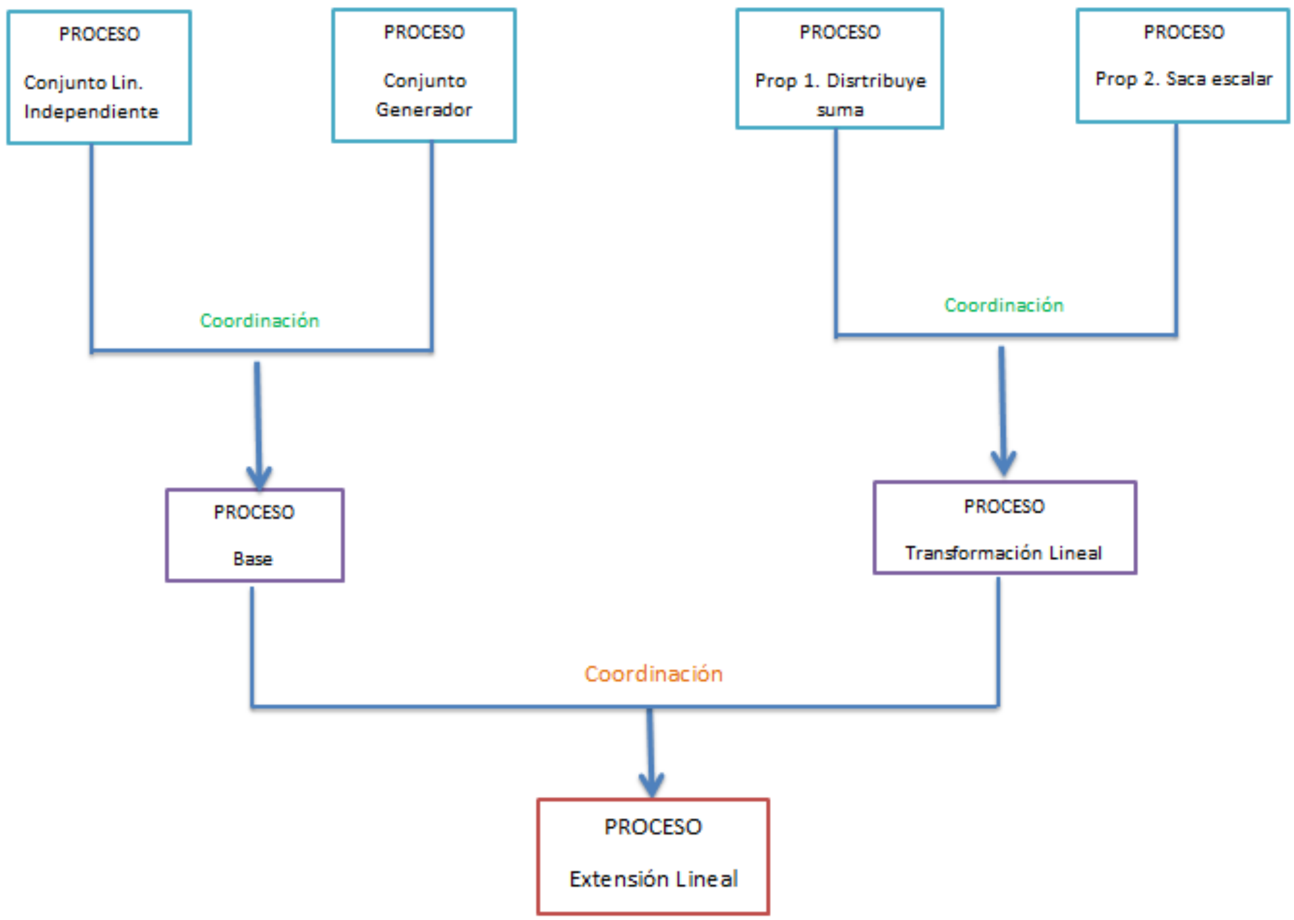
Suponemos que esta construcción proceso de Extensión Lineal se lleva a cabo a través de una coordinación en la cual se involucran dos procesos, el proceso de transformacion lineal que será nuestro primer proceso al que llamaremos proceso A

Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008) para poseer una concepción proceso del concepto de base se requiere la coordinacion de dos procesos que son el de Independencia Lineal y el de conjunto generador. Este proceso permite al alumno expresar cualquier vector de un espacio vectorial como combinación lineal de otros vectores, este proceso será llamado proceso B. Entonces el proceso de transformación lineal o Proceso A se coordinará con el proceso de base o Proceso B.

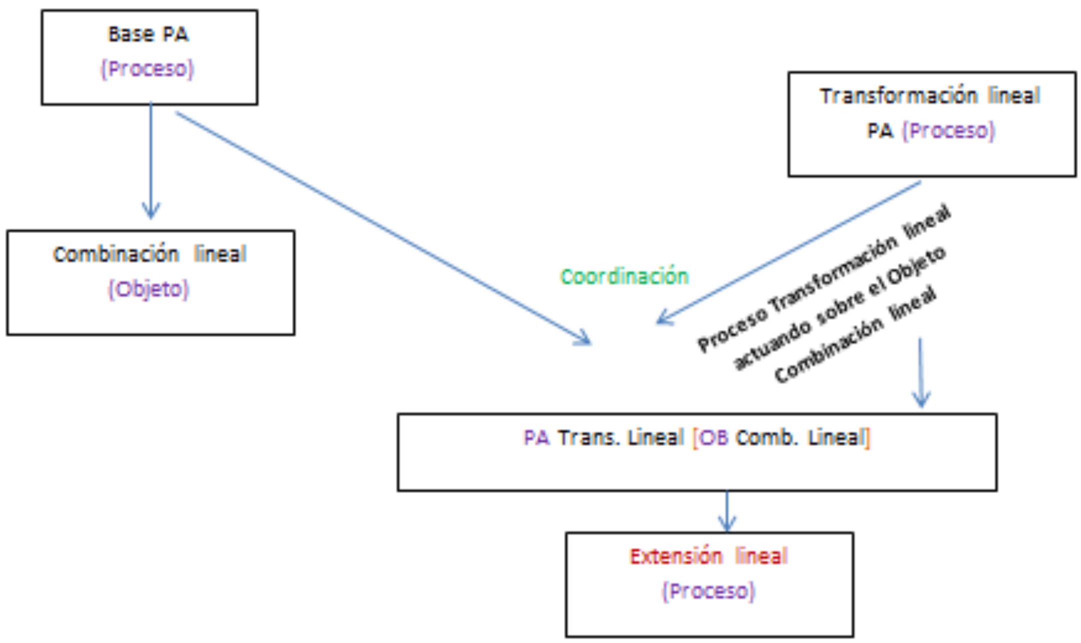
La coordinación se llevará a cabo de la siguiente manera:

El proceso base o Proceso B se aplica a un objeto vector $v \in V$ que da como resultado expresar dicho vector como combinación lineal, esta última es encapsulada en un Objeto al que llamaremos OB objeto combinación lineal, lo cual le permite ver esta combinación lineal de vectores de la Base como un vector perteneciente a este espacio vectorial, además comprenderá que a cualquier combinación lineal de estos vectores de la base se le pueden realizar acciones o procesos.

Lo que sigue es aplicar el PA que es el proceso de transformación lineal a este nuevo OB objeto combinación lineal, este proceso le permitirá al alumno usando la preservación de combinaciones lineales darse cuenta que para obtener la imagen del objeto combinación lineal solamente requiere las imágenes de los vectores de la base del espacio vectorial V. Así mismo podrá sustituir dichos vectores y realizar las operaciones correspondientes mediante el uso de su concepción objeto de vector.


PROCESO
Conjunto Lin. Independiente
PROCESO
Conjunto Generador
PROCESO
Prop 1. Disrtribuye suma
PROCESO
Prop 2. Saca escalar
Coordinación
Coordinación
PROCESO
Base
PROCESO
Transformación Lineal
Coordinación
PROCESO
Extensión Lineal

Coordinación



4.4 Fase 2: Diseño y aplicación de instrumentos

En esta segunda fase del ciclo de investigación de la teoría APOE se diseñarán dos instrumentos, un cuestionario diagnóstico que ayudará a la selección de los estudiantes que muestren las estructuras previas requeridas para la construcción del nuevo tópico matemático, el de Extensión Lineal, y una entrevista semiestructurada diseñada para determinar si los estudiantes hacen o no las estructuras y mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética preliminar. Los datos obtenidos se analizarán a través de la DGP.

Los estudiantes a los que se les aplicarán los instrumentos para la recolección de datos serán de la licenciatura en matemática de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) que hayan cursado las materias de Álgebra Lineal I y II.

4.4.1 Análisis A *priori* Cuestionario Diagnóstico

Para este cuestionario diagnóstico se eligieron situaciones matemáticas correspondientes a estructuras previas de proceso base y transformación lineal y combinación lineal, ya que de acuerdo a nuestra descomposición genética preliminar estas son las estructuras previas que requieren los estudiantes para poder construir el tópico de Extensión Lineal.

Situaciones en torno al concepto de Combinación lineal

Las situaciones matemáticas que a continuación se plantean se basan en el libro "Linear Algebra" de Friedberg, Insel y Spence (2003).

Se eligieron 3 situaciones buscando dar evidencia de si el alumno muestra la estructura objeto de combinación lineal, dado que esta estructura implica ser vista como algo estático en lugar de dinámico, se puede pensar en el objeto como un elemento de un conjunto que cumple ciertas características, las impuestas por el conjunto, es por ello que se eligieron las situaciones que involucraran al $span$ de un conjunto de vectores S no vacío.

Situación 1

Determina si el vector dado está en el Span de S

(a) (2, -1, 1), $S = \{(1,0,2), (-1,1,1)\}$
(b) $2x^3 - x^2 + x + 3$, $S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

La intención de esta situación es ver si el alumno es capaz de expresar el vector dado como combinación de los vectores que pertenecen al conjunto S, si encuentra o no los escalares α y β que hagan o no posible esto. El estudiante podrá decir que el vector dado pertenece al Span (S) o no pertenece, según sea el caso. Se eligieron estos dos incisos porque en el primer si es posible expresar al vector dado como una combinación lineal de los vectores de S, en cambio en el inciso b no es posible y queremos ver cómo procede el alumno o qué justificación da.

Con esto se pretende evidenciar la concepción objeto de combinación lineal ya que el alumno para darse cuenta de si el vector dado pertenece al Span de S requiere saber que el *Span(S)* es el conjunto que continúe a todas las combinaciones lineales de los vectores del conjunto, lo que implica que el estudiante considere a la combinación lineal como algo estático, al ser visto como elemento de un conjunto.

Situación 2

Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y sólo si $span(W) = W$.

Con esta situación también se pretende ver si el alumno cuenta con una concepción objeto de combinación lineal ya que para poder demostrar que $span(W) \subseteq W$ debe tomarse un $v \in span(W)$ y demostrar que $v \in W$. Para lo cual debe usar su concepción objeto de combinación lineal que le permitirá expresar este vector v como una combinación lineal de los vectores del conjunto S, lo que implica saber que el Span(W) es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en W y usar su concepción proceso de subespacio para ver que esta combinación lineal pertenece a W.

Ahora bien, para demostrar que $W \subseteq span(W)$ y finalmente concluir que $span(W) = W$ el alumno tiene que hacer algo similar a lo hecho anteriormente, podremos evidenciar su concepción objeto de combinación lineal si es capaz de expresar al vector arbitrario $v \in W$ como una combinación lineal de los vectores que conforman al subespacio W.

Para demostrar que si $span(W) = W$ entonces W es un subespacio del espacio vectorial V. Requiere tomarse dos pares de vectores $x, y \in W$ y un escalar a en el campo K. Y ver al vector $ax + y$ como un elemento de $span(W)$ lo que require una concepción objeto de combinación lineal.

Situación 3

Demostrar que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tal que $S_1 \subseteq S_2$, entonces $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. En particular, si $S_1 \subseteq S_2$ y $span(S_1) = V$, deduce que $span(S_2) = V$.

Con este ejercicio se pretende evidenciar si el alumno cuenta con una concepción objeto de combinación lineal ya que deberá demostrar que $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. Lo que implica toma un vector $v \in span(S_1)$ y expresarlo como una combinación lineal de los vectores de S_1 y es en esta parte donde podremos observar la concepción objeto de combinación lineal del alumno ya que está viendo esta combinación lineal como un vector o elemento del conjunto $span(S_1)$.

Situaciones matemáticas para identificar la estructura previa de proceso Base

Las situaciones matemáticas que a continuación se plantean se tomaron de la tesis de maestría de Kú (2008), ella hizo una descomposición genética preliminar del concepto de base y diseñó instrumentos para validarla o refinarla, uno de estos instrumentos fue una entrevista semiestructurada, es de esta de donde tomamos las situaciones, aquellas que nos permitirán evidenciar la estructura previa de proceso de base.

La primera pregunta que se eligió fue la siguiente:

Situación 4.

Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces cada vector de $\boldsymbol{H}$ es una combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$ porque $\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para $\boldsymbol{H}$?

Esta situación se plantea con el objetivo de causar al estudiante un conflicto cognitivo ya que de primera instancia podría verificar si los vectores $v_1 \, y \, v_2$ son linealmente independientes y generan H, pero puede ser que el estudiante no se dé cuenta que los vectores v_1 y v_2 no pertenecen a H, y entonces ya no serían una base y puede que el estudiante diga que si son una base por que cumplen las otras dos propiedades, es por esto que esta situación nos ayudará a ver qué tan consiente es el estudiante de la importancia de que los vectores de una base β pertenezcan al espacio vectorial del cual son base.

Esta situación puede ser contestada de diferentes maneras, de entre las cuales Kú, Trigueros y Oktaç (2008) hacen referencia de algunas, que mencionamos a continuación:

a) El estudiante responde que sí es base para H, porque verifica las propiedades de que los vectores v_1 y v_2 son linealmente independiente y que generan H, pero en este caso el estudiante no observa que los vectores no pertenecen al subespacio H. Esto nos indicará que el estudiante muestra solo una concepción acción de base, puesto que no presta atención a una condición que se tiene que cumplir para formar una base.

b) El estudiante puede explicar que v_1 y v_2 no son una base para H porque no pertenecen al mismo espacio vectorial, entonces esto podría indicar que el estudiante cuenta con la estructura de proceso de base.

La situación 3 y 4 fueron diseñadas con la intención de llevar al estudiante a un conflicto cognitivo, ya que es más difícil para ellos determinar una base del espacio o subespacio vectorial cuando es dado de forma implicita (como en estos dos casos que está dado por el espacio generado de ciertos vectores) que verificar si un conjunto de vectores es base de un espacio o subespacio como se pidió en la primeras situación.

Situación 5.

Determina la base para el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$.

La línea $x = 2t$

$y = -t$ $\qquad - \infty < t < \infty$

$z = 4t$

En esta pregunta se le pide al estudiante determinar una base para un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Con la intención de observar la estrategia que utiliza para determinar la base del subespacio vectorial dado. Una posible estrategia que puede utilizar el estudiante para determinar la base, es que interprete la línea mediante una parametrización usando un vector. En este caso puede que responda que sí es base porque el vector es linealmente independiente y genera al subespacio. Esto nos indicaría que el estudiante se encuentra por lo menos con una estructura de proceso, pues coordina varios elementos del concepto de base.

Por otra parte podemos observar dificultades relacionadas con la parametrización, y la naturaleza de estas dificultades puede proporcionarnos elementos acerca del nivel de construcciones mentales de los estudiantes.

Situación 6.

Sea V el espacio generado por

$$v_1 = cos^2x,\ \ v_2 = sen^2x \text{ y } \ \text{ y } \ \ v_3 = sen^2x$$

Encuentra una base para V.

Con esta situación se pretende observar cómo el estudiante coordina sus construcciones mentales para hallar una base, utilizando los conocimientos previos que tiene acerca de otros espacios vectoriales. En esta pregunta se le proporciona un conjunto de funciones conocidas por él, pero como candidato a ser base de un espacio vectorial, contexto que no le es familiar. Kú, Trigueros y Oktaç (2008) expresan que con esta situación se distinguirán las estructuras de acción, proceso y objeto:

- Si el estudiante manifiesta que no puede hallar una base sin poder visualizar el espacio generado por estas funciones, esto indicará la estructura de acción.
- Si el estudiante, a pesar de no haber trabajado con estas funciones como elementos de un espacio vectorial, empieza a averiguar la independencia lineal empleando su definición, y se da cuenta que no lo es, y luego argumenta que se le puede quitar un vector para reducirlo a una base, se identificará la estructura de proceso.
- Si el estudiante menciona que puede haber otras bases para el mismo espacio vectorial, tal vez dar ejemplos de ellas, se identificará la estructura de objeto.

Situaciones en torno al concepto de Transformación lineal

Las situaciones matemáticas que a continuación se plantean se tomaron de la tesis de Roa-Fuentes (2008), ella hizo una descomposición genética preliminar del concepto de transformación lineal, después la refinó con una serie de instrumentos, uno de estos fue una entrevista semiestructurada, es de este de donde tomamos las situaciones, aquellas que nos permitieran evidenciar la estructura previa de proceso de transformación lineal

Se eligieron 3 situaciones buscando que en cada una de ellas se viera un poco de variedad tanto en los espacios vectoriales que se utilizan como en la manera en cómo están dadas las transformaciones lineales, ya que se dan o se definen a través de características no muy comunes y que creemos que esto llevará a los estudiantes a un conflicto cognitivo. Evidenciando así si muestran o no una concepción proceso de transformación lineal.

Situación 7.

Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ $V = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 : x = y;\ z = w\}$.

Sea $T: U \longrightarrow V$ una función tal que.

$$T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$$

$$T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$$

¿Es *T* siempre una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Se expresa en Roa-Fuentes (2008) que esta situación presenta características particulares sobre una función *T* y se plantea el interrogante de si bajo estas características la función siempre será una transformación lineal, y que el fijarse en el dominio y codominio de la función como dos conjuntos que están determinados y la imagen de los vectores $(-1,1,0), (-1,0,1)$ bajo la función *T* promueve a que el estudiante quiera determinar la naturaleza de U y V, es decir que se pregunte ¿son espacios vectoriales? Los concepto de dimensión y base juega un papel fundamental.

Roa-Fuentes (2008) expresa que para esta situación no es suficiente pensar en las transformaciones como objetos que cumplen con una determinada definición sino que el estudiante relacione de manera consciente los conceptos de base y dimensión para establecer específicamente los datos que proporciona el enunciado y explican que las condiciones dadas hacen posible definir una transformación lineal, sin embargo todo depende de cómo se determinen las imágenes del resto de los vectores del dominio.

En Roa-Fuentes (2008) se expresa que un estudiante con una concepción proceso de transformación lineal (que no haya leído detenidamente el enunciado) puede empezar verificando si U y V son espacios vectoriales y si {(−1,1,0);(−1,0,1)} es una base para el espacio vectorial U teniendo en cuenta su dimensión, y con esto puede mostrar que todo vector en U puede expresarse como combinación lineal de los vectores del conjunto base , en este momento puede pensar en T como transformación lineal que debe preservar combinaciones Lineal es, sin embargo esta información no la presenta el problema, esto se relaciona con el tópico de Extensión Lineal, es por esta razón que se eligió esta situación para que el estudiante se valla familiarizando con este tópico.

Situación 8.

a. Encuentra transformaciones Lineal es f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$fg = 0 \qquad pero \qquad gf \neq 0$$

b. Encuentra transformaciones Lineal es $l: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que:

$$lh = l \qquad pero \qquad hl \neq l$$

Esta situación pretende que los estudiantes determinen transformaciones lineales que al componerse cumplan con cierta condición, para lograrlo se necesita que los estudiantes determinen en cada caso un par de transformaciones de tal manera que se cumplan las condiciones dadas. En Roa-Fuentes (2008) se expresa que aunque pensar en las transformaciones requiere una concepción proceso una vez definidas es necesario que el estudiante posea una concepción objeto del concepto, que le permita componerlas y determinar la nueva transformación resultado de dicha operación.

También se menciona que un estudiante podría pensar en transformaciones lineales conocidas y empezar a componerlas, así mediante ensayo y error posiblemente podría encontrar transformaciones que cumplan con las condiciones dadas.

Por otra parte, este problema permite observar las conexiones que los estudiantes pueden estar estableciendo con otros conceptos como el de función inversa, dimensión de un espacio vectorial e imagen de una transformación lineal. En este caso diremos que puede encontrarse en un nivel más alto de evolución de su esquema ya que además de poseer una concepción objeto de transformación lineal están estableciendo conexiones con otros conceptos, lo que enriquece su construcción del esquema de transformación lineal.

Situación 9.

Sean U,V y W espacios vectoriales dadas $T_1: U \rightarrow V$ y $T_2: U \rightarrow W$ transformaciones Lineal es. Se define $T: U \rightarrow V$ x W como

$$T(u) = (T_1(u), T_2(u))$$

Para todo $u \in U$.

a. Encuentra un caso particular del enunciado, es decir, determina ejemplos de transformaciones Lineal es T_1, T_2 y determina T. ¿Es T una transformación lineal?
b. ¿Es posible considerar en general, la transformación T como una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Roa-Fuentes (2008) expresan que esta situación muestra una forma general de generar nuevas transformaciones Lineal es a partir de transformaciones dadas, también mencionan que el estudiante debe encontrar un caso particular de esta generalización y determinar si la función T es una transformación lineal.

Una cuestión por la cual fue elegida esta situación es porque presenta de una forma general los espacios vectoriales U, V y W y esto es algo que les puede causar cierto conflicto a los estudiantes, ya que como veíamos la generalidad del Álgebra Lineal es algo que les causa dificultades cognitivas. También que en el inciso a) el estudiante debe fijar dichos espacios y determinar las transformaciones Lineal es sobre ellos y que este análisis particular puede ser generalizado en el inciso b).

Pasando a la resolución de la situación, en el momento en que el estudiante está determinando T_1 y T_2 está pensando en las o la condición que hace que una función sea transformación lineal y en ese momento estará dando muestras de poseer una concepción proceso del concepto, y una vez dadas las transformaciones lineal es al determinar la transformación T da evidencias de poseer una concepción objeto del concepto, ya que puede determinar un nuevo objeto de la misma naturaleza como resultado de aplicar ciertas acciones sobre los elementos presentados.

4.4.2 Análisis A *priori* Entrevista semiestructurada

Para la entrevista semiestucturada se diseñaron 4 situaciones problemáticas matemáticas, basadas en la descomposición genética, con la intención de evidenciar las estructuras y mecanismos propuestos en esta. Estas situaciones están acompañadas de un análisis a priori donde se describe la estructura mental a evidenciar.

1. **Sean** $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ **actúa sobre ellos una Transformación lineal** $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **tal que se obtiene** $\boldsymbol{T(v_1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T(v_2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{16} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{T(v_3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}$**.**

Para este ejercicio se le cambio a otro espacio vectorial distinto al del problema anterior ya que como pudimos encontrar en diversas investigaciones como Sierpinska (2000) los alumnos están acostumbrados a trabajar con $\mathbb{R}^2$ y por esta razón se eligió el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ para este problema ya que si bien los alumnos si están acostumbrados a trabajar con este espacio vectorial si se les complica un poco más trabajar con este espacio que con $\mathbb{R}^2$.

También en este ejercicio la transformación lineal del problema no va del mismo espacio al mismo espacio vectorial o un subconjunto de este ya que en investigaciones como Sierpinska (2000) y Uicab y Oktaç (2006) los alumnos están más acostumbrados a trabajar con transformaciones Lineal es que vallan del mismo espacio vectorial a este mismo espacio vectorial y se quiere ver si los alumnos son capaces de trabajar la Extensión Lineal con este tipo de transformaciones Lineal es.

a) **¿Es posible encontrar la imagen de $2v_2 - 3\ v_1 + v_3$? Si tu respuesta es sí encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.**

Con este inciso se pretende observar si el alumno tiene una concepción acción del tópico Extensión Lineal ya que se le pide obtener una imagen de una combinación lineal de los vectores de los cuales ya tiene la imagen.

Nos interesa ver también la forma de proceder de alumno ya que es posible que se vaya directamente a utilizar $T(v_1)$ y $T(v_2)$ no vea la relación que tiene $2T(v_2)$ con $2v_2$, $-3\ T(v_1)$ con $-3\ v_1$ y $T(v_3)$ con v_3.

Con este inciso también se puede ver si el alumno tiene dificultades con la combinación lineal y si no tiene dificultades con el proceso de transformación lineal.

b) ¿Es posible encontrar la imagen de $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$? Si tu respuesta es sí, encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

Con este ejercicio se pretende observar si el alumno está en camino a una concepción proceso de Extensión Lineal o si ya cuenta con una concepción proceso de este tópico, ya que en este inciso se pretende ver si el alumno es capaz de darse cuenta que para encontrar *T(v)* tiene que expresar al vector dado como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 después aplicar el proceso de transformación lineal.

Con este inciso también nos interesa ver la forma de proceder del alumno ya que puede ser que solo exprese el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 ya que son los vectores de los que tiene las imágenes, pero el alumno no es consciente de que esto vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Otra forma de proceder es que el alumno se dé cuenta que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y entonces expresen el vector v dado como combinación lineal de la base y después apliquen el proceso de transformación lineal y obtengan la imagen de este vector a través de las propiedades de producto por escalar y distribución de suma.

Con este inciso también se puede ver si el alumno tiene dificultades con la combinación lineal y si no tiene dificultades con el proceso de transformación lineal.

c) **¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.**

Con este inciso se pretende observar si el alumno puede llegar a tener una concepción proceso de Extensión Lineal ya que en este inciso se le pide al alumno encontrar una imagen de un vector arbitrario v y para esto es necesario que el alumno establezca la relación que hay entre el vector arbitrario v y los vectores v_1, v_2 y v_3, para lo cual el alumno debe evocar su concepción proceso de base para que se dé cuenta de que los vectores v_1, v_2 y v_3 forman una base de $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto el vector arbitrario v se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, entonces aplicar el proceso de transformación y obtenga la imagen de este vector a través de las propiedades de producto por escalar y distribución de suma.

Con este inciso también podremos darnos cuenta de si el alumno tiene una concepción esquema de base si es capaz de darse cuenta que este concepto es el que le ayudará para resolver este inciso.

2. **Sea $\boldsymbol{s} = \left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\} \in \boldsymbol{M_{2x2}}$ y se conoce una transformación $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{M_{2x2}} \to \mathbb{R}$ que es no lineal de la que se obtiene $\mathbf{f}(\boldsymbol{s}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\}$.**

a) **¿Es Posible encontrar $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.**

Con este inciso se pretende ver la forma de proceder del alumno ya que es posible que encuentre un valor para $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ usando la misma estrategía que utilizó en la pregunta 1, sin percatarse de que las imágenes dadas son de una transformación no lineal, lo cual dará evidencia de que utiliza la estrategia de manera mecánica sin ningún tipo de reflexión, en cambio si logra identificar que no se puede obtener la imagen del vector dado porque la transformación es no lineal, lo que implica no necesariamente preservar combinaciones Lineal es entonces muestra reflexión sobre la acción de Extensión Lineal.

b) **¿Es Posible encontrar $\boldsymbol{f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.**

Con este inciso se pretende ratificar la estructura de proceso de Extensión Lineal, dependiendo de la forma de proceder del alumno, si lo hace como en el problema anterior requerirá que la transformación sea lineal, y en este caso la situación menciona que *f* es no lineal, queremos evidenciar si el alumno identifica donde debe utilizar el proceso de transformación lineal y si no es lineal qué paso es el que no puede realizar, de manera que esto nos dará muestra del control de la acción en la mente del estudiante. Si encuentra una transformación que arroje las imágenes dadas y el estudiante dice que ya resolvió el problema se le preguntará si esta transformación que encontró es no lineal, y al ver que no lo es entonces entrará en un conflicto y es lo que nos interesa observar, de qué manera proceden o reaccionan.

3. **Sea $\boldsymbol{l = \{2 + x,\ 1 + x^2,\ 5 + 3x - x^2\} \in P_2(x)}$ y sea $\boldsymbol{T: P_2(x) \to \mathbb{R}^2}$ una transformación lineal tal que $\boldsymbol{T(l) = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}$.**

¿Es Posible encontrar $\boldsymbol{T(3 + 2x)}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

Lo que se pretende observar en este problema es ver si el estudiante tiene presente la importancia del papel de la base en el tópico de Extensión Lineal, ya que si en este problema el alumno intenta proceder de la manera como lo hacho en los problemas anteriores, es decir, expresando el vector dado como combinación lineal de los vectores de los cuales tiene las imágenes, no lo podrá hacer, porque estos vectores no son base del espacio vectorial $P_2(x)$ y entonces se quiere ver que argumenta o como procede el estudiante con esta situación.

4. **Supóngase que la Transformación lineal $\boldsymbol{T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2}$ tiene como matriz asociada $\boldsymbol{[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$ donde $\boldsymbol{\beta = \{1,\ x,\ x^2\}}$ y $\boldsymbol{\gamma = \{(1,0),\ (1,1)\}}$.**

¿Puede determinar explícitamente dicha transformación lineal?

Con este ejercicio lo que se pretende ver es si el estudiante es capaz de relacionar el tópico de Extensión Lineal con otros conceptos para resolver situaciones matemáticas, mas es especifico en este caso ver si es capaz de hacer la relación del tópico Extensión Lineal con el concepto de matriz asociada a una transformación lineal.

4.5 Fase 3. Análisis y verificación de datos

Como en nuestro objetivo 1 ya obtuvimos nuestra descomposición genética preliminar, lo que sigue es validarla, es decir ver si realmente los estudiantes en este caso de la Licenciatura en Matemáticas que ya mencionamos que son los que nos interesan, muestran evidencia de las construcciones y mecanismos mentales que nosotros propusimos en nuestra descomposición genética preliminar.

Para ver si se desarrollan o no estas estructuras y mecanismos mentales en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UAZ se les aplicara un cuestionario con diversos problemas matemáticos en torno al tópico e Extensión Lineal que nos darán evidencia de estas construcciones y mecanismos mentales, este cuestionario se les aplicará solo a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UAZ que ya hayan visto este tópico de Extensión Lineal y que lo hayan visto recientemente.

Después de aplicar este cuestionario, se les aplicará solo a algunos estudiantes de los que se les aplicó el cuestionario una entrevista semiestructurada para aclarar aspectos que no quedaron claros de las respuestas que dieron estos estudiantes en el cuestionario.

Y así ver si se presentan estas estructuras y mecanismos mentales que propusimos en la descomposición genética del tópico Extensión Lineal, y si no es así hacer una refinación de la descomposición genética.

4.5.1 Análisis cuestionario diagnóstico

Se aplicó el 24 de Abril del 2018 al medio día a 8 estudiantes de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ, de estos estudiantes 3 están llevando en este semestre Enero-Junio 2018 Álgebra Lineal y los otros 5 estudiantes llevaron esta materia el semestre anterior.

Se aplicó este cuestionario con la intención de ver quiénes de estos estudiantes cumplen con las estructuras previas que se requieren para aprender el tópico de Extensión Lineal.

Situación matemática 1.

Determina si el vector dado esta en el Span de S

(a) (2, -1, 1), $S = \{(1,0,2), (-1,1,1)\}$
(b) $2x^3 - x^2 + x + 3$, $S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Estudiante 1.

Con esta situación se puede ver que el Estudiante 1 tiene una concepción objeto de combinación lineal al considerarla como elemento de un conjunto, el Span(S), esto se evidencia cuando identifica al span como el conjunto de todas las combinaciones Lineal es, y es capaz de determinar si un vector pertenece no al Span. En el inciso a) puede expresar al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de S, al determinar los coeficientes de dicha combinación lineal como se muestra en la imagen 1.

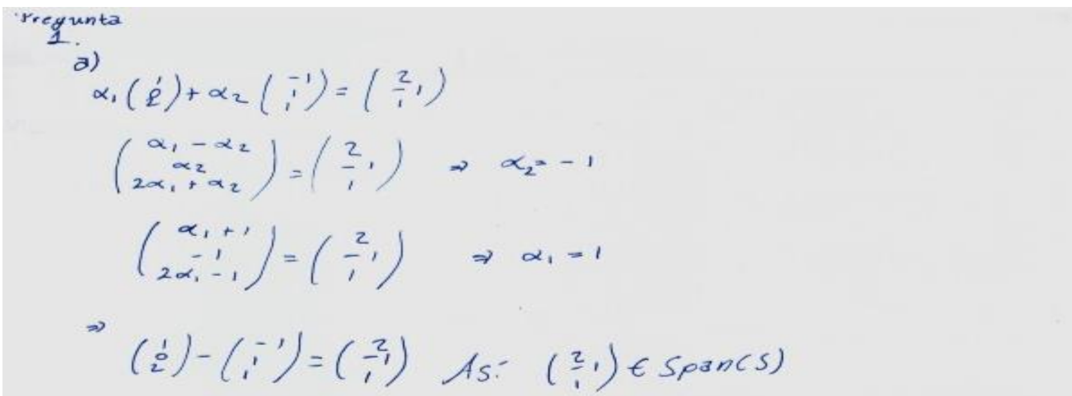


Imagen 1. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 1 inciso a).

Además argumenta en el inciso b) por qué el vector dado no pertenece al Span(S), al encontrar una inconsistencia en el sistema que se tenía que resolver para determinar los coeficientes, de manera que esto lo lleva a no poder expresar el vector dado como combinación lineal de los elementos de S, esto se muestra en la imagen 2.

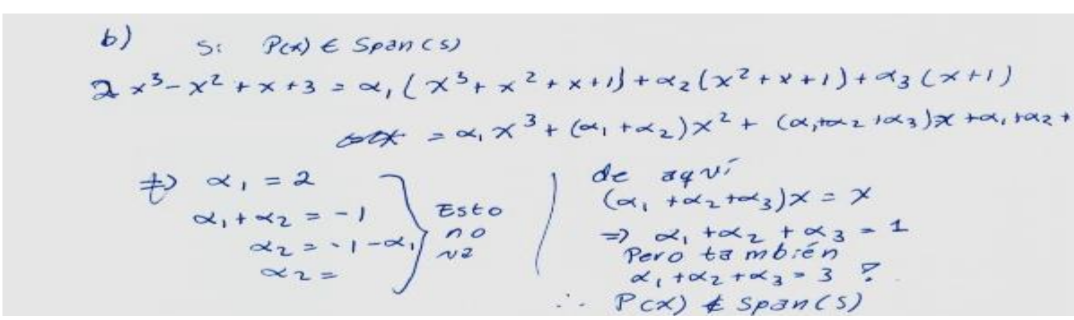


Imagen 2. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 1 inciso a).

Estudiante 2.

En la resolución de esta situación problemática se puede ver que el Estudiante 2 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claro que para que un vector dado pertenezca al span de un conjunto de vectores este vector debe expresarse como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y es capaz de encontrar los escalares que le ayuden a expresar en el inciso a) al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de S y obtener que (1,0,2) – (-1, 1, 1) = (2, -1, 1), como se puede ver en la imagen 3.

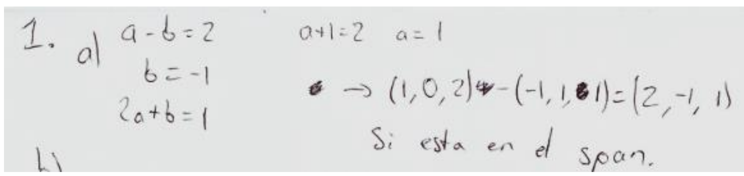


Imagen 3. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 1 inciso a).

También es capaz de identificar en el inciso b) que el vector dado no pertenece al Span de S ya que no puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S, como se puede ver en la imagen 4.

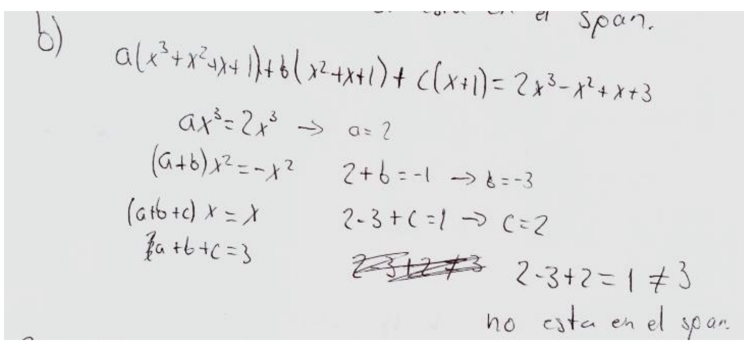
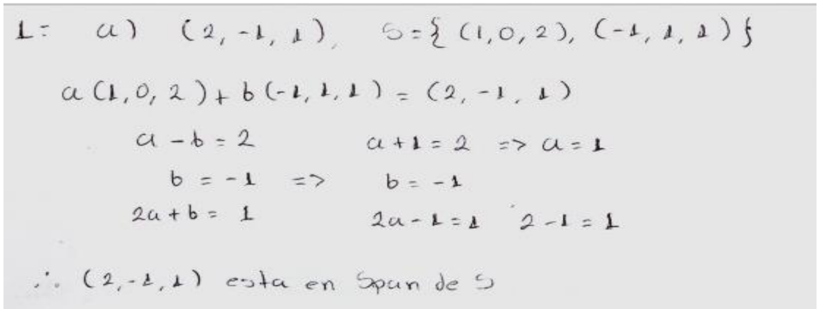


Imagen 4. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 1 inciso b).

Estudiante 3.

Con la respuesta a esta pregunta se puede identificar que el Estudiante 3 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claro que un vector dado pertenece al span de un conjunto de vectores si se puede expresar como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y es capaz de encontrar los escalares en el inciso a) que le permiten expresar al vector dado como combinación lineal de los vectores de S, como se muestra en la imagen 5.


1: a) $(2,-1,1)$, $S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}$

$a(1,0,2)+b(-1,1,1)=(2,-1,1)$

$a-b=2$ $\quad$ $a+1=2 \Rightarrow a=1$

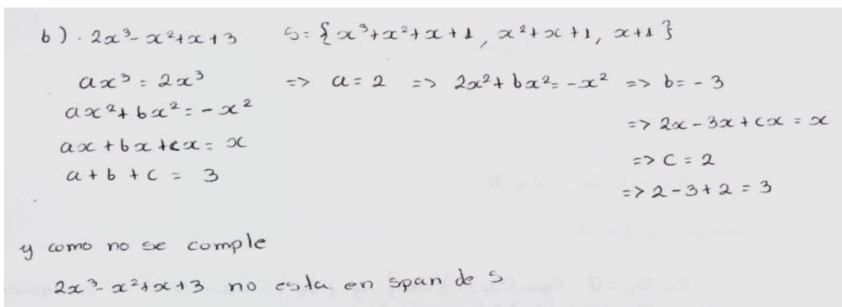
$b=-1 \Rightarrow b=-1$

$2a+b=1$ $\quad$ $2a-1=1$ $\quad$ $2-1=1$

$\therefore$ $(2,-1,1)$ esta en Span de S

Imagen 5. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 1 inciso a).

También puede identificar en el inciso b) que el vector dado no pertenece al Span de S ya que no puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S, como se muestra en la imagen 6.


b) $2x^3-x^2+x+3$ $\quad$ $S=\{x^3+x^2+x+1,\ x^2+x+1,\ x+1\}$

$ax^3=2x^3 \Rightarrow a=2 \Rightarrow 2x^2+bx^2=-x^2 \Rightarrow b=-3$

$ax^2+bx^2=-x^2$

$ax+bx+cx=x$ $\quad$ $\Rightarrow 2x-3x+cx=x$

$a+b+c=3$ $\quad$ $\Rightarrow c=2$

$\Rightarrow 2-3+2=3$

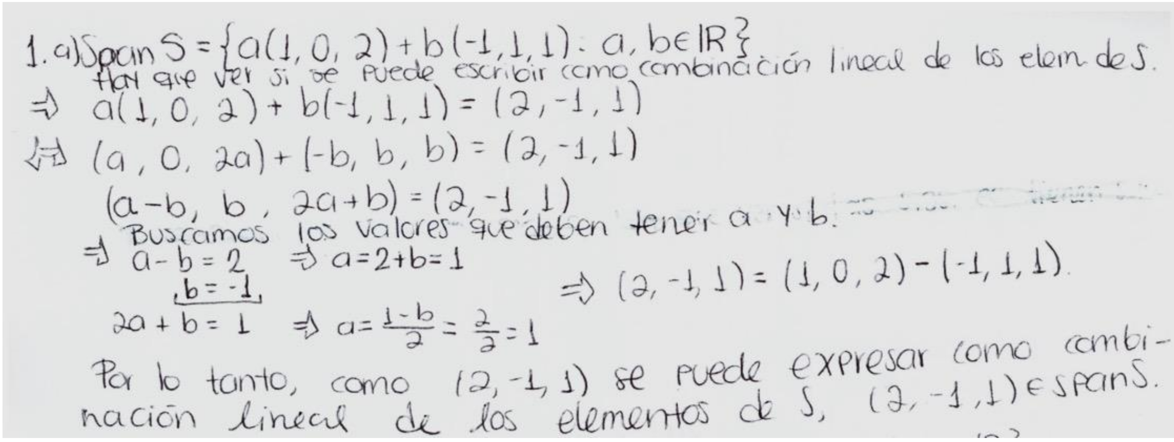
y como no se cumple

$2x^3-x^2+x+3$ no esta en span de S

Imagen 6. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 1 inciso b).

Estudiante 4.

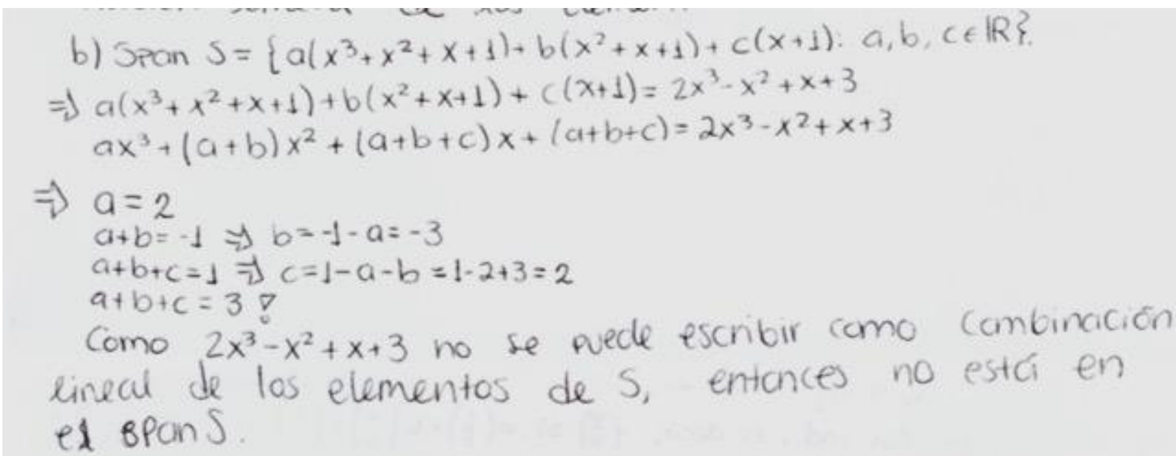
Con la respuesta a esta pregunta se puede identificar que el Estudiante 4 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claro en que para que un vector dado pertenezca al span de un conjunto de vectores este vector debe expresarse como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y es capaz de encontrar los escalares en el inciso a) que le permiten expresar al vector dado como combinación lineal de los vectores de S como combinación lineal de los elementos de S, como se muestra en la imagen 7.



1. a) $\text{Span } S = \{a(1,0,2)+b(-1,1,1): a,b \in \mathbb{R}\}$
Hay que ver si se puede escribir como combinación lineal de los elem. de S.
$\Rightarrow a(1,0,2)+b(-1,1,1)=(2,-1,1)$
$\Leftrightarrow (a,0,2a)+(-b,b,b)=(2,-1,1)$
$(a-b,\ b,\ 2a+b)=(2,-1,1)$
$\Rightarrow$ Buscamos los valores que deben tener a y b.
$\Rightarrow a-b=2 \Rightarrow a=2+b=1$
$b=-1$
$2a+b=1 \Rightarrow a=\frac{1-b}{2}=\frac{2}{2}=1$
$\Rightarrow (2,-1,1)=(1,0,2)-(-1,1,1)$.
Por lo tanto, como $(2,-1,1)$ se puede expresar como combinación lineal de los elementos de S, $(2,-1,1) \in \text{span } S$.

Imagen 7. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 1 inciso a).

También es capaz de identificar en el inciso b) que el vector dado no pertenece al Span de S ya que no puede expresarse como combinación lineal al obtener una inconsistencia, como se muestra en la imagen 8.

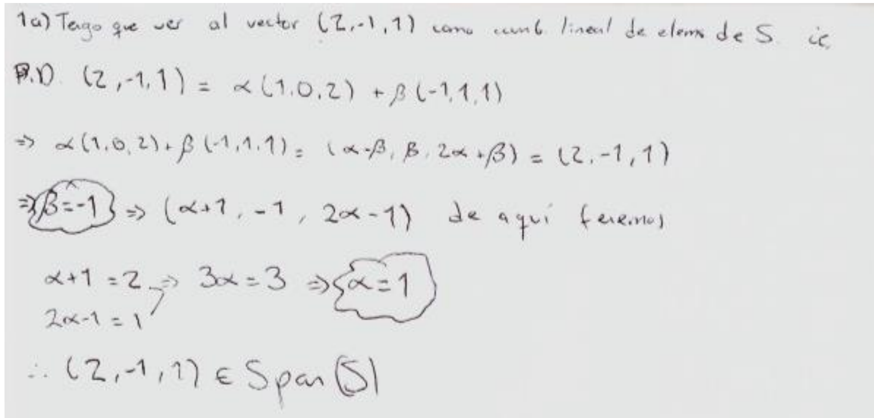


b) $\text{Span } S = \{a(x^3+x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+c(x+1): a,b,c \in \mathbb{R}\}$.
$\Rightarrow a(x^3+x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+c(x+1)=2x^3-x^2+x+3$
$ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)=2x^3-x^2+x+3$
$\Rightarrow a=2$
$a+b=-1 \Rightarrow b=-1-a=-3$
$a+b+c=1 \Rightarrow c=1-a-b=1-2+3=2$
$a+b+c=3$?
Como $2x^3-x^2+x+3$ no se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S, entonces no está en el span S.

Imagen 8. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 1 inciso b).

Estudiante 5.

En esta pregunta se puede ver que el Estudiante 5 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claridad en que para que un vector dado pertenezca al span de un conjunto de vectores este vector debe expresarse como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y es capaz de encontrar los valores de los escalares α y β que le permitan expresar al vector dado como combinación lineal de los vectores de S, como se puede ver en la imagen 9.



1a) Tengo que ver al vector $(2,-1,1)$ como comb. lineal de elem. de S ic

P.D. $(2,-1,1) = \alpha(1,0,2) + \beta(-1,1,1)$

$\Rightarrow \alpha(1,0,2)+\beta(-1,1,1) = (\alpha-\beta, \beta, 2\alpha+\beta) = (2,-1,1)$

$\Rightarrow \beta=-1 \Rightarrow (\alpha+1, -1, 2\alpha-1)$ de aquí tenemos

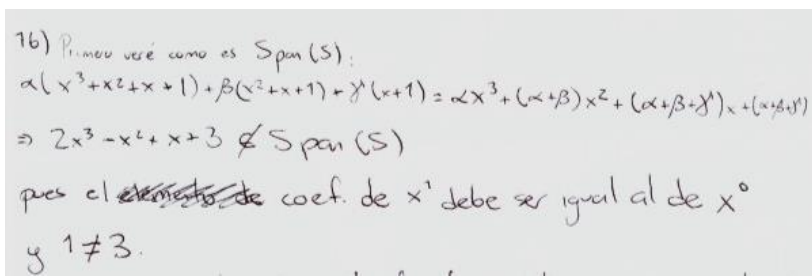
$\alpha+1=2$, $2\alpha-1=1 \Rightarrow 3\alpha=3 \Rightarrow \alpha=1$

$\therefore (2,-1,1) \in Span(S)$

.

Imagen 9. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 1 inciso a).

También pudo identificar en el inciso b) que el vector dado no pertenece al Span de S ya que no puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S, como se puede ver en la imagen 10.



1b) Primero veré como es $Span(S)$:

$\alpha(x^3+x^2+x+1)+\beta(x^2+x+1)+\gamma(x+1) = \alpha x^3+(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha+\beta+\gamma)$

$\Rightarrow 2x^3-x^2+x+3 \notin Span(S)$

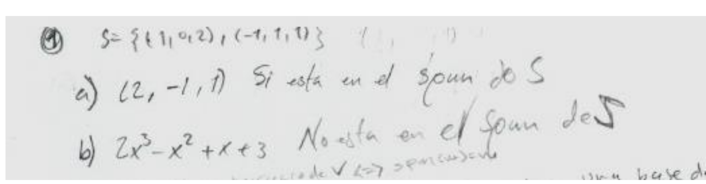
pues el ~~elemento de~~ coef. de x^1 debe ser igual al de x^0

y $1 \neq 3$.

Imagen 10. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 1 inciso b).

Estudiante 6.

El Estudiante 6 respondió correctamente esta pregunta, como se puede ver en la imagen 11, y aunque no realizó ninguna operación para poder determinar la respuestas, por ejemplo no se ve que calculé los escalares que le permitan expresar en el inciso a) al vector dado como combinación lineal de los vectores de S, no podemos asegurar que las operaciones no las haya hecho, posiblemente las hizo en otra hoja y no las entregó, por esta razón es que no podemos determinar si tiene o no una concepción proceso de combinación lineal.



(1) $S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}$

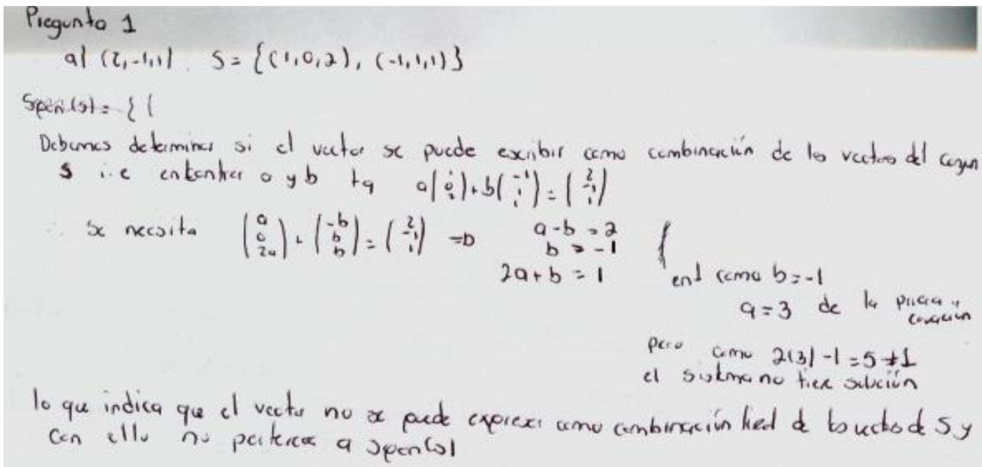
a) $(2,-1,1)$ Si esta en el span de S

b) $2x^3-x^2+x+3$ No esta en el span de S

Imagen 11. Respuesta del Estudiante 6 a la Situación 1.

Estudiante 7.

En la resolución de esta situación problemática se puede ver que el Estudiante 7 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claro que para que un vector dado pertenezca al span de un conjunto de vectores este vector debe expresarse como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y aunque se equivocó en las cuentas para encontrar los escalares que le ayuden a expresar en el inciso a) al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de S si tenía claro que para que perteneciera al Span debes expresarse como combinación lineal de los vectores de S, como se puede ver en la imagen 12.


Pregunta 1

a) $(2,-1,1)$ $S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}$

$Span(S) = \{ ($

Debemos determinar si el vector se puede escribir como combinación de los vectores del conjun S i.e encontrar a y b tq $a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

∴ se necesita $\begin{pmatrix}a\\0\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b\\b\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases}$

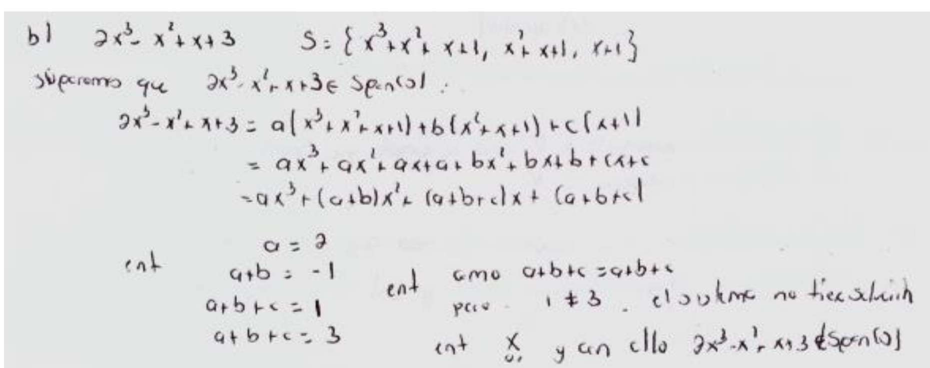
ent como $b=-1$
$a=3$ de la primera ecuación

pero como $2(3)-1=5\neq 1$
el sistema no tiene solución

lo que indica que el vector no se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S y con ello no pertenece a Span(S)

Imagen 12. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 1 inciso a)

También es capaz de identificar en el inciso b) que el vector dado no pertenece al Span de S ya que no puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S, como se puede ver en la imagen 13.


b) $2x^3-x^2+x+3$ $S=\{x^3+x^2+x+1,\ x^2+x+1,\ x+1\}$

supongamos que $2x^3-x^2+x+3 \in Span(S)$:

$2x^3-x^2+x+3 = a(x^3+x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+c(x+1)$
$= ax^3+ax^2+ax+a+bx^2+bx+b+cx+c$
$= ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)$

ent $a=2$, $a+b=-1$, $a+b+c=1$, $a+b+c=3$

ent como $a+b+c=a+b+c$ pero $1\neq 3$. el sistema no tiene solución

ent X y con ello $2x^3-x^2+x+3 \notin Span(S)$

Imagen 13. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 1 inciso b).

Estudiante 8.

En la resolución de esta situación problemática se puede ver que el Estudiante 8 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que tiene claro que para que un vector dado pertenezca al span de un conjunto de vectores este vector debe expresarse como combinación lineal de los vectores de este conjunto, y aunque se equivocó en las cuentas para encontrar los escalares que le ayuden a expresar en el inciso a) al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de S si tenía claro que para que perteneciera al Span debes expresarse como combinación lineal de los vectores de S, como se puede ver en la imagen 14.

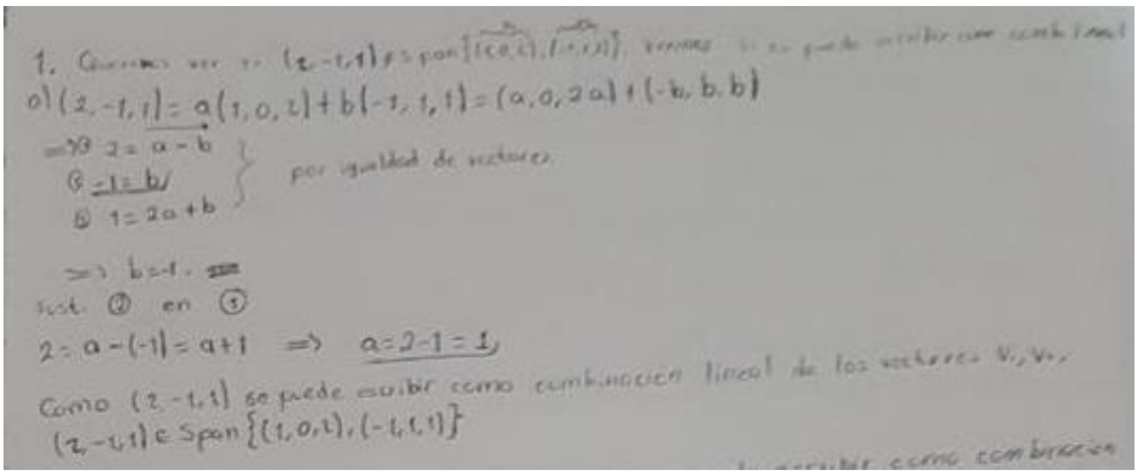


Imagen 14. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 1 inciso a).

En el inciso b) al resolver el sistema de ecuaciones, usa las tres primeras ecuaciones para determinar los valores de $a = 2$, $b = -3$ y $c = 2$, sin embargo no se da cuenta que estos valores encontrados no satisfacen la cuarta ecuación, esto lo lleva a dar una conclusión incorrecta, pues el vector dado no pertenece al Span del conjunto S y el Estudiante afirma que sí, como se ve en la imagen 15.

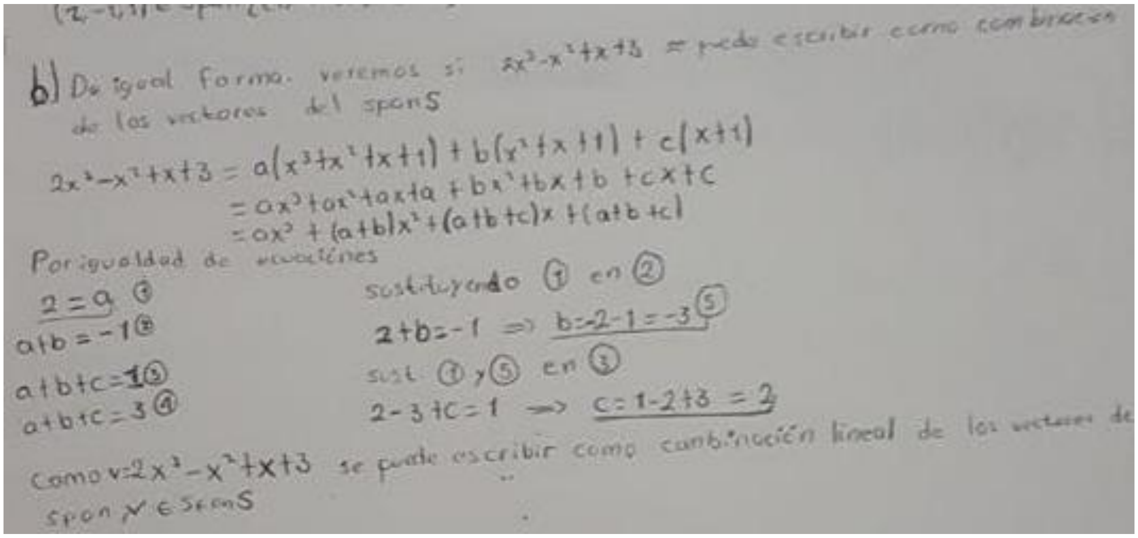


Imagen 15. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 1 inciso b).

Situación matemática 2.

Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y sólo si $span(W) = W$.

Estudiante 1.

Para esta demostración se pude ver que para resolver este problema el Estudiante 1 divide la demostración en 2, primero donde supone que W es subespacio vectorial de V y demuestra que $Span\ (W) = W$. En esta parte el alumno sabe que si W siempre va estar contenido en su propio Span y con esto demuestra que $Span\ (W) \supseteq W$.

Para demostrar ahora que $Span\ (W) \subseteq W$ y obtener entonces que $Span\ (W) = W$ el Estudiante lo que hace es expresar a un elemento arbitrario $x \in Span\ W$ como una combinación lineal de los elementos de W y con esto podemos observar que tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que está viendo un vector como una combinación lineal.

Después de esto el Estudiante hace uso de que W es subespacio vectorial para justificar que esta combinación lineal que ve como un vector pertenece a W.

En la segunda parte de la demostración el Estudiante supone que $Span\ (W) = W$, y quiere demostrar que W es subespacio vectorial de V. Lo que hace es tomarse dos vectores de W y un escalar, para forma una combinación lineal con estos vectores y este escalar, y sabe que esta combinación lineal es un elemento que pertenece al Span W lo que vuelve a evidenciar su concepción objeto de combinación lineal.

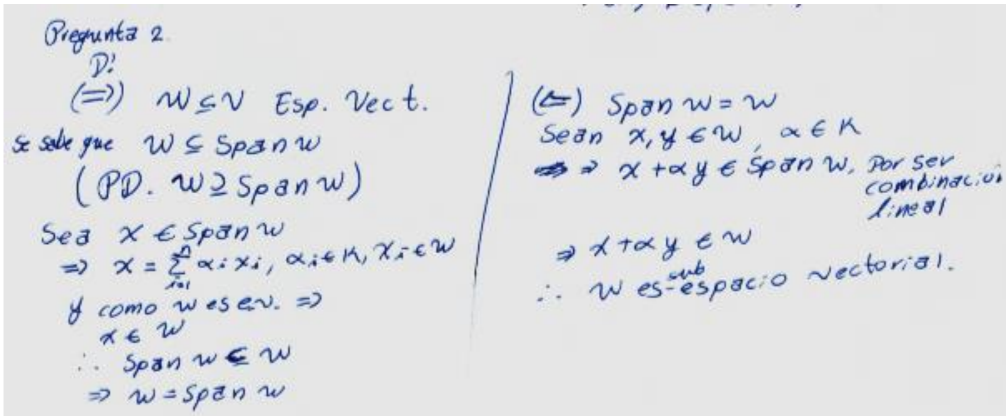


Imagen 16. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 2.

Estudiante 2.

Aquí se puede ver que el Estudiante 2 dividió la demostración en dos partes en la primera parte supone como verdadero que W es subespacio de V y lo que quiere demostrar es que $Span\ (W) = W$, y lo único que argumenta para demostrar es "Úsese definición", supongo que se refiere a usar la definición de lo que es ser subespacio, pero no hace nada más, como se puede ver en la imagen 17.

Imagen 17. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 2 parte 1.

En la segunda parte de la demostración el Estudiante 2 toma como verdadero que $Span\ (W) = W$ y lo que quiere demostrar es que W es subespacio de V, y el Estudiante 2 lo que contesta es que no sabe cómo hacerlo, con esto me queda la duda de si no habrá podido resolver el problema porque no sabe que significa lo que es el Span de un conjunto o si no recuerda que significa o que se requiere para que un conjunto sea subespacio de un espacio vectorial, como se puede ver en la imagen 18.

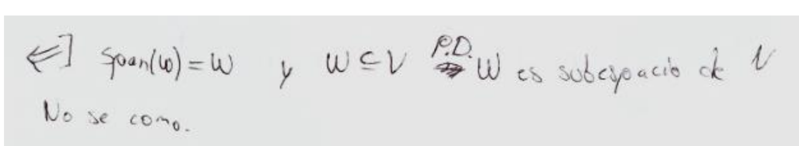


Imagen 18. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 2 parte 2.

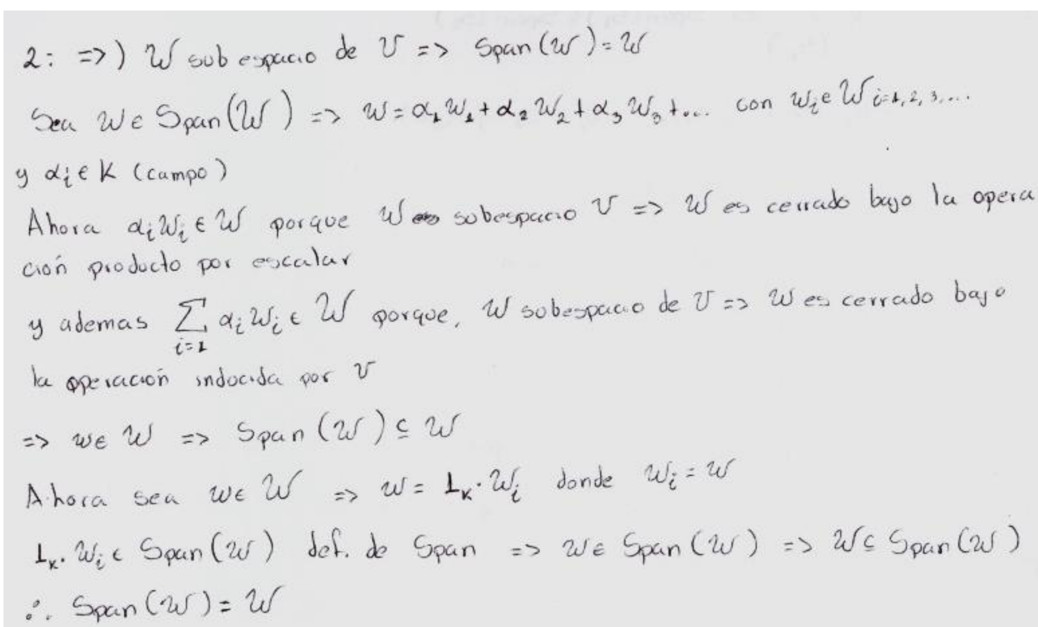
Como conclusión puedo decir que el Estudiante no presenta indicios de la concepción objeto de combinación lineal, porque no uso este concepto en la resolución de este problema, pero eso no quiere decir que no tenga una concepción objeto de combinación lineal, sino que a lo mejor no recordó la definición de Span o de subespacio y ya no pudo continuar con la resolución del problema.

Estudiante 3.

Con la respuesta que da el Estudiante a esta demostración se puede ver que el Estudiante 3 divide el problema en 2, donde primero supone que W es subespacio vectorial de V y demuestra que $Span\ (W) = W$. Aquí el alumno sabe que W siempre va estar contenido en su propio Span y con esto argumenta que $Span\ (W) \supseteq W$.

Después para evidenciar que $Span\ (W) \subseteq W$ y obtener entonces que $Span\ (W) = W$ el Estudiante 3 expresa a un elemento arbitrario $x \in Span\ W$ como una combinación lineal de los elementos de W y podemos visualizar que el Estudiante 3 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que está viendo a una combinación lineal como un elemento de un conjunto, en este caso el $Span\ W$.

Por último el Estudiante 3 usa que W es subespacio vectorial para justificar que esta combinación lineal que ve como un vector pertenece a W, como se puede ver en la imagen 19.



2: =>) W subespacio de V => $Span(W) = W$

Sea $w \in Span(W)$ => $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \dots$ con $w_i \in W_{i=1,2,3,\dots}$

y $\alpha_i \in K$ (campo)

Ahora $\alpha_i w_i \in W$ porque W subespacio V => W es cerrado bajo la operación producto por escalar

y ademas $\sum_{i=1} \alpha_i w_i \in W$ porque, W subespacio de V => W es cerrado bajo la operación inducida por V

=> $w \in W$ => $Span(W) \subseteq W$

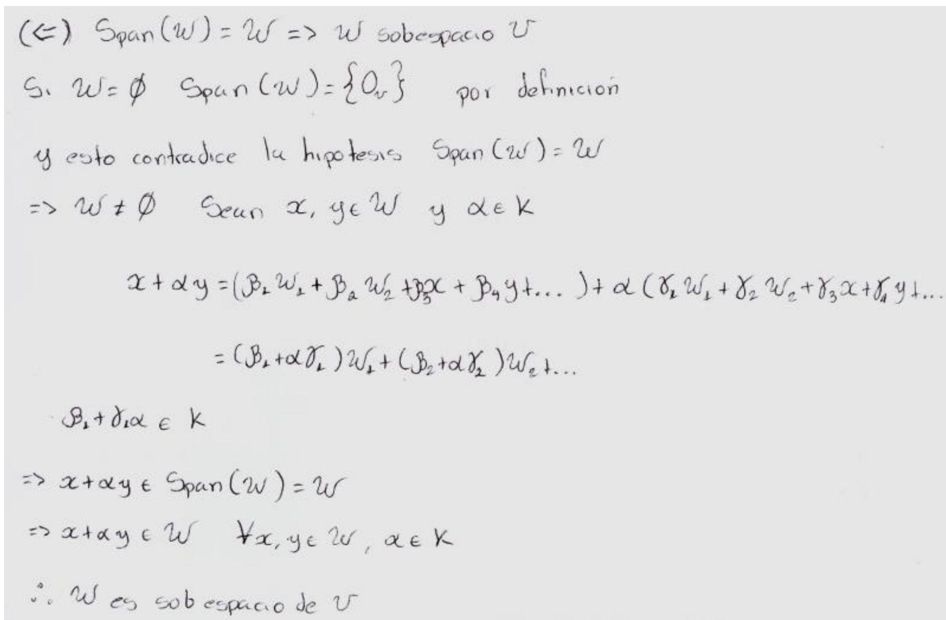
Ahora sea $w \in W$ => $w = 1_K \cdot w_i$ donde $w_i = w$

$1_K \cdot w_i \in Span(W)$ def. de Span => $w \in Span(W)$ => $W \subseteq Span(W)$

$\therefore Span(W) = W$

Imagen 19. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 2 parte 1.

En la segunda parte de la demostración el Estudiante 3 supone que $Span\ (W) = W$, y ahora quiere demostrar que W es subespacio vectorial de V. Lo que llama la atención de este Estudiante y que otros Estudiante no habían hecho es que el sí argumenta en su demostración que si $W = \phi$ entonces $Span(W) = \{O_v\}$ y esto contradice la hipótesis, el Estudiante no se percató de que entonces podía asegurar que $W \neq \emptyset$ condición q debe cumplirse para ser subespacio, después el Estudiante lo que hace es tomarse dos vectores de W y escalares, y forma una combinación lineal con estos vectores y estos escalares, y sabe que esta combinación lineal es un elemento que pertenece al Span W lo que vuelve a evidenciar su concepción objeto de combinación lineal.


($\Leftarrow$) $Span(W) = W \Rightarrow W$ sobespacio V

Si $W = \emptyset$ $Span(W) = \{0_v\}$ por definición

y esto contradice la hipotesis $Span(W) = W$

$\Rightarrow W \neq \emptyset$ Sean $x, y \in W$ y $\alpha \in K$

$x + \alpha y = (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 x + \beta_4 y + \ldots) + \alpha(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 x + \gamma_4 y + \ldots$

$= (\beta_1 + \alpha\gamma_1) w_1 + (\beta_2 + \alpha\gamma_2) w_2 + \ldots$

$\beta_1 + \gamma_1 \alpha \in K$

$\Rightarrow x + \alpha y \in Span(W) = W$

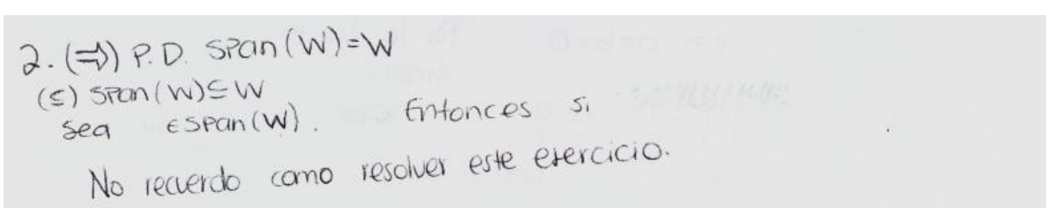
$\Rightarrow x + \alpha y \in W$ $\forall x, y \in W$, $\alpha \in K$

$\therefore W$ es sob espacio de V

Imagen 20. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 2 parte 2.

Estudiante 4.

El Estudiante 4 no muestra que concepción tiene acerca de la combinación lineal, ya que no resolvió el ejercicio, pero si escribe que no recuerda cómo resolverel ejercicio, e incluso se ve que quiere comenzar diciendo que se toma un vector en el Span (W), pero ya después no continua. De manera que no contamos con suficiente evidencia para determinar la concepción que tiene, como se puede ver en la imagen 21.


2. ($\Rightarrow$) P.D. $Span(W) = W$

($\subseteq$) $Span(W) \subseteq W$

Sea $\in Span(W)$. Entonces si

No recuerdo como resolver este ejercicio.

Imagen 21. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 2.

Estudiante 5.

Como el Estudiante 5 no contestó esta pregunta porque no se acordó de la definición de subespacio vectorial no podemos argumentar nada acerca de la concepción de combinación lineal que posea el Estudiante, ya que no sabemos cómo hubiera procedido a resolver el problema si hubiera recordado dicha definición, como se puede ver en la imagen 22.

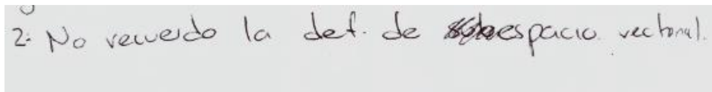

2. No recuerdo la def. de ~~sbs~~ subespacio vectorial.

Imagen 22. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 2.

Estudiante 6.

Para esta demostración se pude ver que para resolver este problema el Estudiante 6 divide la demostración en dos partes, primero donde supone que W es subespacio vectorial de V y quiere demostrar que $Span\ (W) = W$, pero el Estudiante no resuelve esta parte de la demostración diciendo que no recuerda la definición de subespacio.

En la segunda parte de la demostración el Estudiante supone que $Span\ (W) = W$, y ahora quiere demostrar que W es subespacio vectorial de V. Lo que hace es tomarse dos vectores de W y escalares, y forma una combinación lineal con estos vectores y estos escalares, y sabe que esta combinación lineal es un elemento que pertenece al Span W lo que evidencia su concepción objeto de combinación lineal, como se puede ver en la imagen 23.

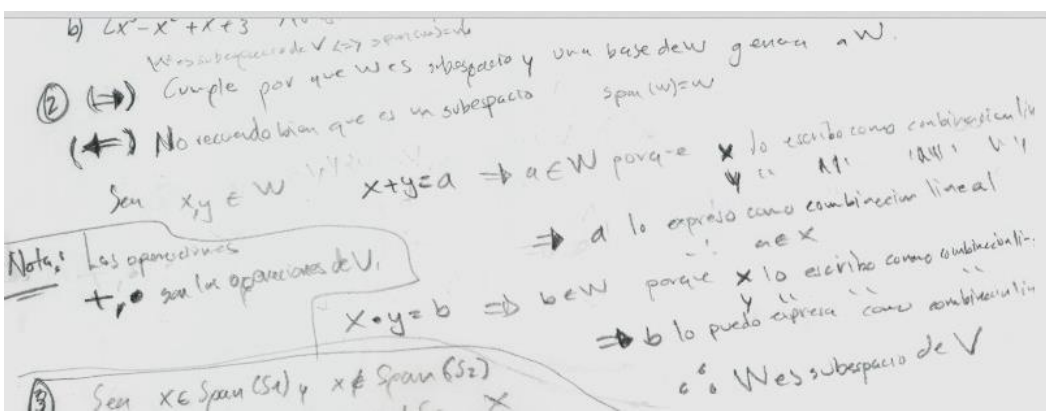

(2) (⟹) Cumple por que W es subespacio y una base de W genera a W.
Span (W)=W
(⟸) No recuerdo bien que es un subespacio
Sea x, y ∈ W   x+y=a ⟹ a ∈ W porque x lo escribo como combinación lineal
⟹ a lo expreso como combinación lineal
Nota: Las operaciones +, • son las operaciones de V.
x•y=b ⟹ b ∈ W porque x lo escribo como combinación lineal
⟹ b lo puedo expresar como combinación lineal
∴ W es subespacio de V
(3) Sea x ∈ Span (S1) y x ∉ Span (S2)

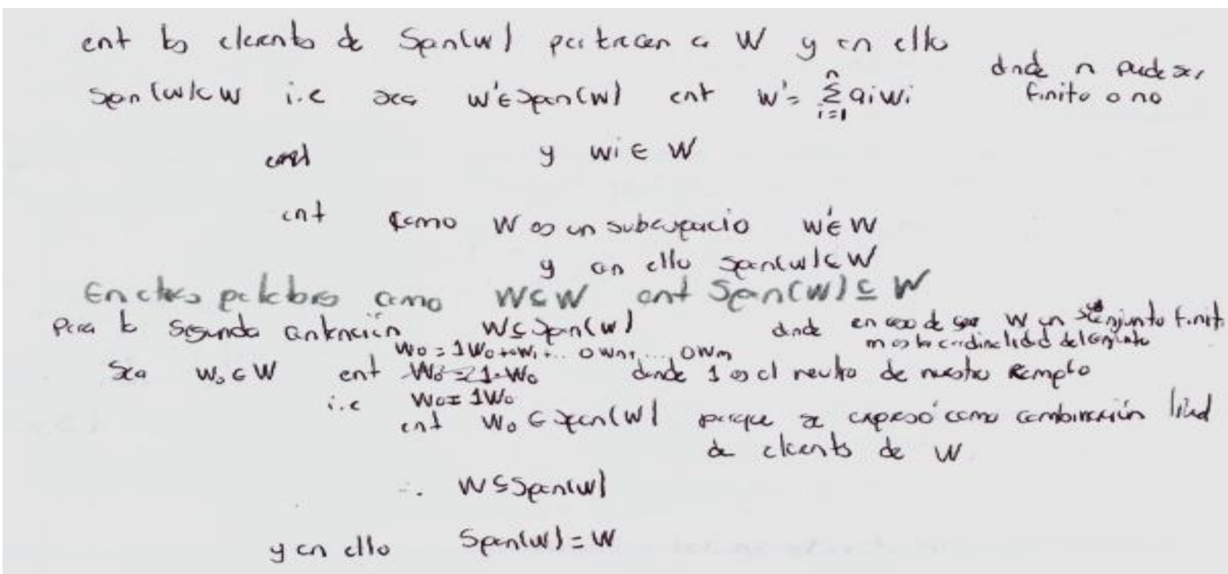
Imagen 23. Respuesta del Estudiante 6 a la Situación 2.

Estudiante 7.

Para esta demostración se pude ver que para resolver este problema el Estudiante 7 divide la demostración en dos partes, primero donde supone que W es subespacio vectorial de V y demuestra que $Span\,(W) = W$. En esta parte el alumno sabe que W siempre va a estar contenido en su propio Span y con esto demuestra que $Span\,(W) \supseteq W$.

Para demostrar ahora que $Span\,(W) \subseteq W$ y obtener entonces que $Span\,(W) = W$ el Estudiante expresa a un elemento arbitrario $x \in Span\,W$ como una combinación lineal de los elementos de W y con esto podemos observar que el Estudiante 7 tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que está viendola como un elemento de un conjunto.

Después de esto el Estudiante 7 hace uso de que W es subespacio vectorial para justificar que esta combinación lineal que ve como un vector pertenece a W, como se puede ver en la imagen 24.



ent los elementos de Span(W) pertenecen a W y con ello
Span(W) ⊆ W i.e sea $w' \in Span(W)$ ent $w' = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ donde n puede ser finito o no
con y $w_i \in W$
ent como W es un subespacio $w' \in W$
y con ello Span(W) ⊆ W
En otras palabras como W ⊆ W ent Span(W) ⊆ W
Para la segunda contención W ⊆ Span(W) donde en caso de ser W un conjunto finito m es la cardinalidad del conjunto
Sea $w_0 \in W$ ent $w_0 = 1w_0 + 0w_1 + \dots 0w_{n} \dots 0w_m$ ~~$w_0 = 1 \cdot w_0$~~ donde 1 es el neutro de nuestro campo
i.e $w_0 = 1w_0$
ent $w_0 \in Span(W)$ porque se expresó como combinación lineal de elementos de W
∴ W ⊆ Span(W)
y con ello Span(W) = W

Imagen 24. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 2.

En la segunda parte de la demostración supone que $Span\,(W) = W$ y ahora quiere demostrar que W es subespacio vectorial de V. Se toma dos vectores de W y un escalar, y forma una combinación lineal con estos vectores y estos escalares, y sabe que esta combinación lineal es un elemento que pertenece al Span W lo que vuelve a evidenciar su concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 8.

Para esta demostración se pude ver que para resolver este problema el Estudiante 8 divide la demostración en dos partes, primero donde supone que W es subespacio vectorial de V y demuestra que $Span\ (W) = W$. En esta parte el alumno sabe que W siempre va estar contenido en su propio Span y con esto demuestra que $Span\ (W) \supseteq W$.

Para demostrar ahora que $Span\ (W) \subseteq W$ y obtener entonces que $Span\ (W) = W$ el Estudiante lo que hace es expresar a un elemento arbitrario $x \in Span\ W$ como una combinación lineal de los elementos de W y con esto se observa que tiene una concepción objeto de combinación lineal ya que está viendo a una combinación lineal como un elementos de un conjunto, o como vector.

Después de esto el Estudiante hace uso de que W es subespacio vectorial para justificar que esta combinación lineal que ve como un vector pertenece a W, como se puede ver en la imagen 25.

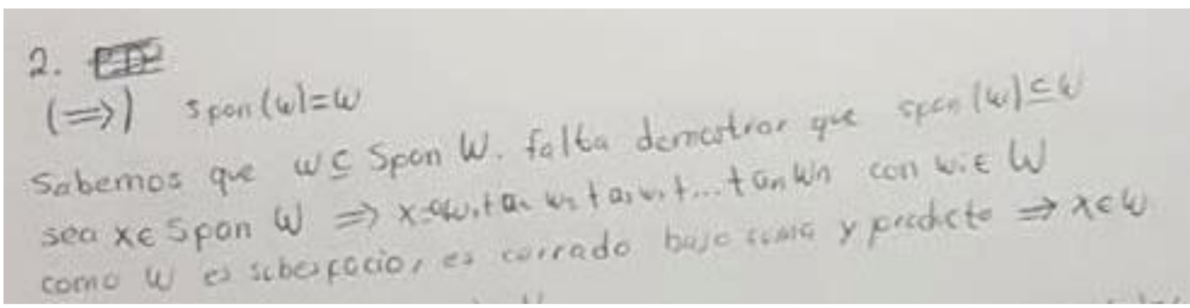


Imagen 25. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 2 parte 1.

En la segunda parte de la demostración el Estudiante supone que $Span\ (W) = W$, y ahora quiere demostrar que W es subespacio vectorial de V, lo hace de una manera muy interesante, pues solo utiliza el hecho de que el Span de un conjunto es un subesapcio y al ser por hipótesis igual a W, concluye que W es subespacio, como se puede ver en la imagen 26.

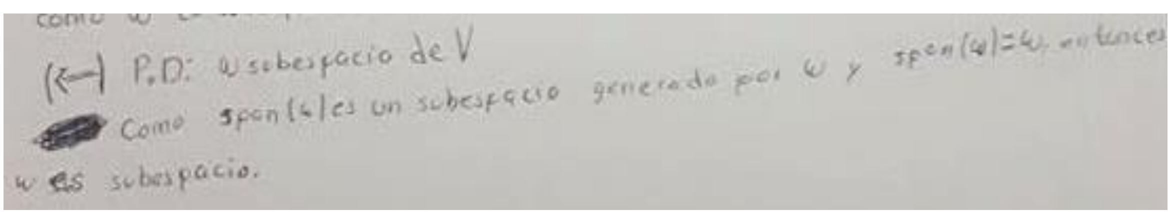


Imagen 26. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 2 parte 2.

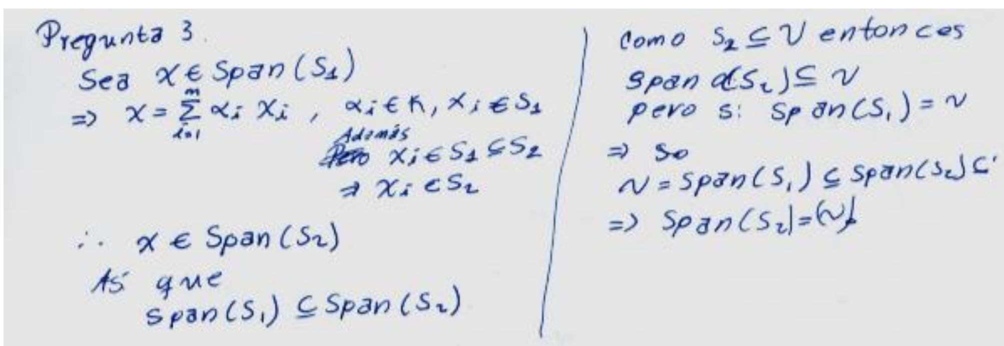
Situación matemática 3.

Demostrar que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tal que $S_1 \subseteq S_2$, entonces $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. En particular, si $S_1 \subseteq S_2$ y $span(S_1) = V$, deduce que $span(S_2) = V$.

Estudiante 1.

El Estudiante 1 en este problema para demostrar que $Span\,(S_1) \subseteq Span(S_2)$ usa su concepción objeto de combinación lineal ya que se toma un vector arbitrario en el $Span\,(S_1)$ y sabe que tiene la forma de combinación lineal de los elementos de S_1. Después como sabe que $S_1 \subseteq S_2$ deduce que los vectores que conforman la combinación lineal también pertenecen a S_2 y entonces esta combinación lineal pertenece a $Span(S_2)$.

Y por último vuele a hacer uso de su concepción objeto de combinación lineal viendo a esta combinación la vuelve como un vector que pertenece a S_2 y concluye que por lo tanto $Span\,(S_1) \subseteq Span(S_2)$, como se ve en la imagen 27.



Pregunta 3
Sea $x \in Span(S_1)$
$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in K, x_i \in S_1$
Además ~~Pero~~ $x_i \in S_1 \subseteq S_2$
$\Rightarrow x_i \in S_2$
$\therefore x \in Span(S_2)$
Así que
$span(S_1) \subseteq Span(S_2)$

Como $S_2 \subseteq V$ entonces
$span(S_2) \subseteq V$
pero si $Span(S_1) = V$
$\Rightarrow$ So
$V = span(S_1) \subseteq span(S_2) \subseteq V$
$\Rightarrow Span(S_2) = V$

Imagen 27. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 3.

Estudiante 2.

Se puede observar que el Estudiante 2 si sabe el significado de lo que es el Span, ya que escribe que $Span(S_1) = \{combinacion\ lineal\ de\ elemntos\ de\ S_1\}$ entonces aquí podemos observar que el Estudiante 2 tiene una concepción objeto de combinación lineal, porque ve a los elementos del $Span(S_1)$ como combinaciones Lineal es de elementos de S_1, después como sabe que $Span(S_1) = \{combinacion\ lineal\ de\ elemntos\ de\ S_1\}$ y sabe que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$.

Ya después supone que si el $Span(S_1) = V$ y como y ya demostró que $Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$ y sabe que $S_2 \subseteq V$ entonces $Span(S_2) = V$, como se puede ver en la imagen 28.

3. $S_1, S_2 \subseteq V$ y $S_1 \subseteq S_2$ P.D. $span(S_1) \subseteq span(S_2)$

$Span(S_1) = \{$combinación lineal de elementos de $S_1\} \subseteq Span(S_2)$

Si $Span(S_1) = V$, y $span(S_1) \subseteq Span(S_2)$, como $S_2 \subseteq V$

$\rightarrow Span(S_2) = V$

Imagen 28. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 3.

Estudiante 3.

El Estudiante 3 en este problema empieza por demostrar que el $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$ y es aquí donde hace evidente su concepción objeto de combinación lineal ya que se toma un vector arbitrario en el $Span\ (S_1)$ y lo expresa como combinación lineal de los elementos de S_1. Después como sabe que $S_1 \subseteq S_2$ deduce que los elementos que conforman la combinación lineal también pertenecen a S_2 y entonces esta combinación lineal pertenece a S_2, como se ve en la imagen 29.

3: $S_1 \subseteq S_2$ Si $S_1 = \emptyset$ $Span(S_1) = \{0_V\}$ y $\{0_V\} \subseteq Span(W)$ W cualquie subconjunto de V $\Rightarrow Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$

Sea $v \in Span(S_1)$

$v = \alpha_1 S_1^1 + \alpha_2 S_2^1 + \alpha_3 S_3^1 + \dots$ $S_i^1 \in S_1$ y $\alpha_i \in K$

Ahora $S_i^1 \in S_2$ porque $S_1 \subseteq S_2$

$\Rightarrow v \in Span(S_2)$ por definición de Span

$\therefore Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$

Imagen 29. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 3.

Estudiante 4.

Al igual que el ejercicio anterior el Estudiante 4 no contesta este ejercicio solo dice que no recuerda cómo resolverlo, podríamos considerar que se debe a que no comprende que significa el concepto de Span de un conjunto o no tiene una concepción objeto de vector, por esta razón no podemos argumentar nada acerca de la concepción de combinación lineal que posee el Estudiante 4, como se puede ver en la imagen 30.

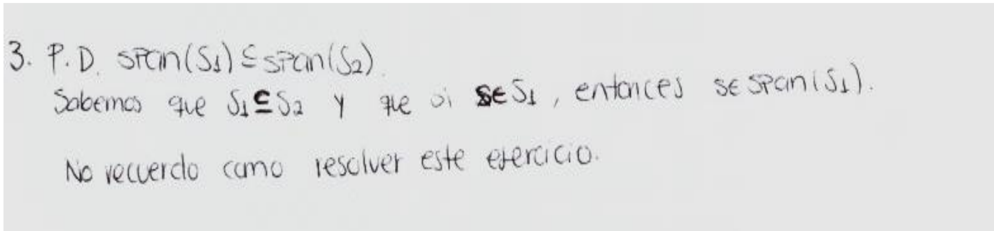

3. P.D. $span(S_1) \subseteq span(S_2)$
Sabemos que $S_1 \subseteq S_2$ y que si $s \in S_1$, entonces $s \in span(S_1)$.
No recuerdo como resolver este ejercicio.

Imagen 30. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 3.

Estudiante 5.

El Estudiante 5 en esta situación matemática para demostrar que $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$ hace evidente su concepción objeto de combinación lineal ya que se toma un vector arbitrario en el $Span\ (S_1)$ y lo expresa como combinación lineal de los elementos de S_1. Después como sabe que $S_1 \subseteq S_2$ deduce que los elementos que conforman la combinación lineal también pertenecen a S_2 y entonces esta combinación lineal pertenece a S_2, como se puede ver en la imagen 31.

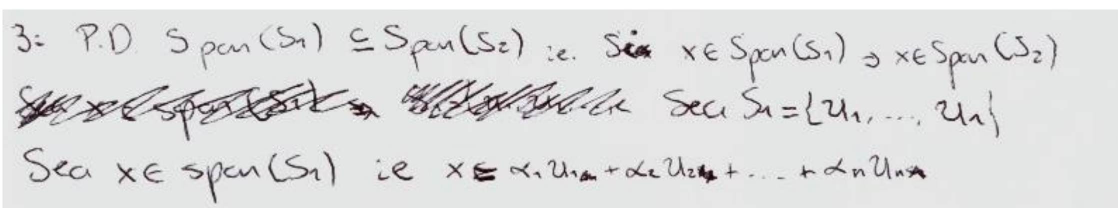

3: P.D $Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$ i.e. Sea $x \in Span(S_1) \Rightarrow x \in Span(S_2)$
Sea $S_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$
Sea $x \in span(S_1)$ i.e $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$

Imagen 31. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 3 parte 1.

Y por último vuele a hacer uso de su concepción objeto de combinación lineal al ver a esta combinación como un elemento de un conjunto, a saber S_2 , lo que le permite concluir que $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$, como se puede ver en la imagen 32.

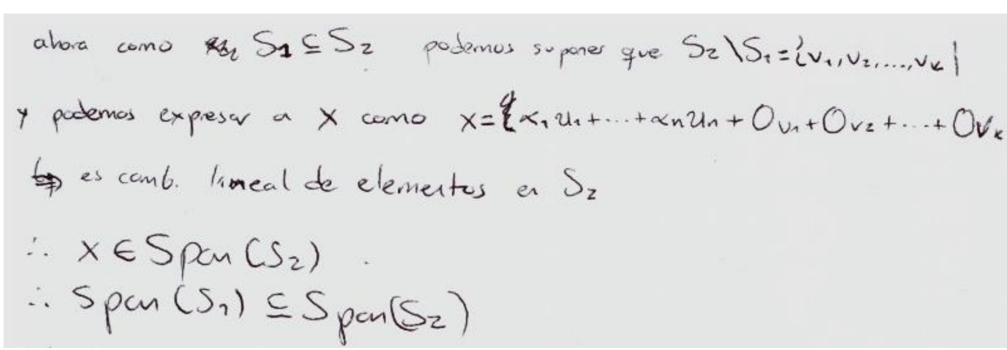

ahora como $S_1 \subseteq S_2$ podemos suponer que $S_2 \setminus S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
y podemos expresar a x como $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k$
$\Rightarrow$ es comb. lineal de elementos en S_2
$\therefore x \in Span(S_2)$.
$\therefore Span(S_1) \subseteq Span(S_2)$

Imagen 32. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 3 parte 2.

Estudiante 6.

Para resolver este ejercicio el Estudiante 6 no utiliza el concepto de combinación lineal para demostrar lo que se le pide, como se ve en la imagen 33, por esta razón no podemos argumentar acerca de que concepción posee del concepto de combinación lineal.

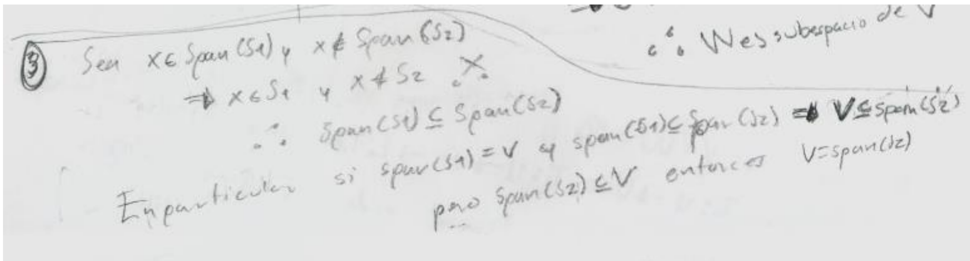


Imagen 33. Respuesta del Estudiante 6 a la Situación 3.

Estudiante 7.

El Estudiante 7 en este problema para demostrar que $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$ hace evidente su concepción objeto de combinación lineal ya que se toma un vector arbitrario en el $Span\ (S_1)$ y lo expresa como combinación lineal de los elementos de S_1. Después como sabe que $S_1 \subseteq S_2$ deduce que los elementos que conforman la combinación lineal también pertenecen a S_2 y entonces esta combinación lineal pertenece a S_2, como se puede ver en la imagen 34.

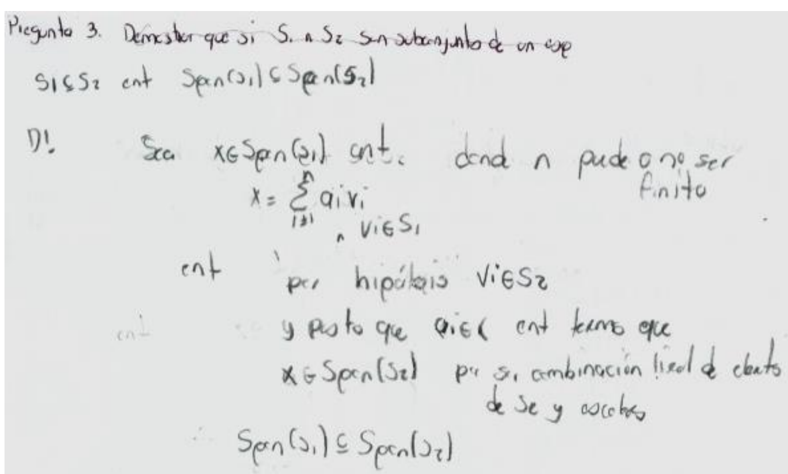


Imagen 34. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 3.

Y por último vuelve a evidenciar su concepción objeto de combinación lineal viendo a esta combinación la vuelve como un vector que pertenece a S_2 y concluye que por lo tanto $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$.

Estudiante 8.

El Estudiante 8 en este problema para demostrar que $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$ hace evidente su concepción objeto de combinación lineal ya que se toma un vector arbitrario en el $Span\ (S_1)$ y lo expresa como combinación lineal de los elementos de S_1. Después como sabe que $S_1 \subseteq S_2$ deduce que los elementos que conforman la combinación lineal también pertenecen a S_2 y entonces esta combinación pertenece a S_2.

Y por último vuelve a evidenciar su concepción objeto de combinación lineal viendo a esta combinación la vuelve como un vector que pertenece a S_2 y concluye que por lo tanto $Span\ (S_1) \subseteq Span(S_2)$, como se puede ver en la imagen 35.

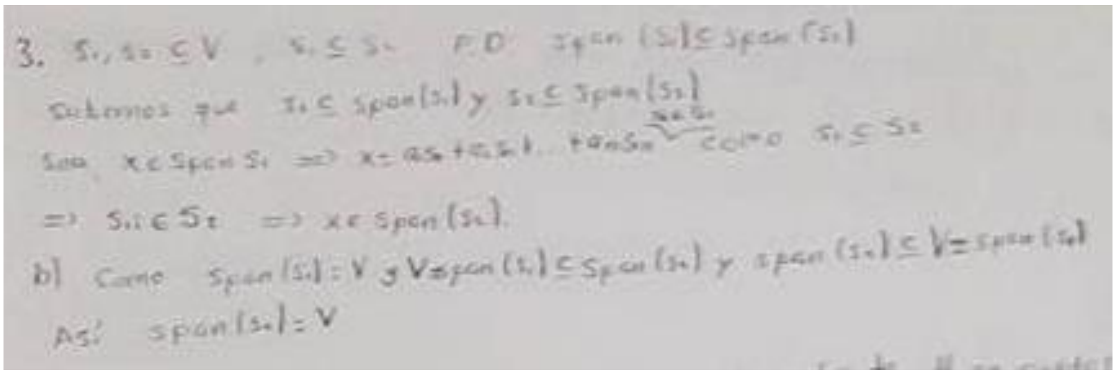


Imagen 35. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 3.

Situación matemática 4.

Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces cada vector de $\boldsymbol{H}$ es una combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$ porque $\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para $\boldsymbol{H}$?

Estudiante 1.

Este Estudiante responde correctamente al decir que $\{v_1, v_2\}$ no son una base para H, ya que él se da cuenta por ejemplo que $v_1 \notin H$ que es una condición necesaria para que un conjunto se a base de un espacio vectorial, que los elementos de este conjunto pertenezcan al espacio del cual son base, como se ve en la imagen 36.

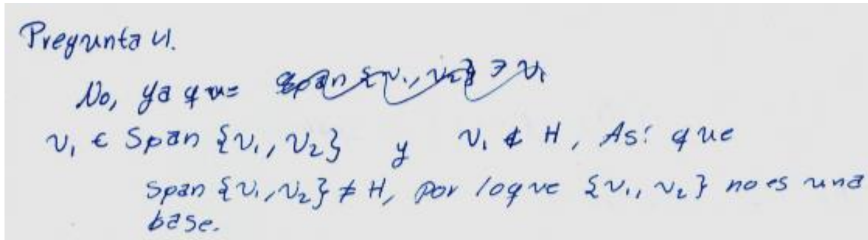


Imagen 36. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 4.

Y por esta razón el Estudiante 1 se da cuenta que el conjunto de $\{v_1, v_2\}$ no genera a H, que es otra condición que debe cumplir un conjunto para ser base, que genere al espacio vectorial del cual es base.

Con esto nos damos cuenta de que el Estudiante 1 esta consiente de las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base, y es capaz de determinar si un conjunto es base o no de un espacio o subespacio vectorial.

Estudiante 2.

El Estudiante 2 da evidencia de una concepción proceso de base ya que se da cuenta que $\{v_1, v_2\}$ no son una base para H, porque no cumple con la condición de que generen H y que pertenezcan a H, con esto podemos ver que el Estudiante es consciente de las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base y es capaz de decir si un conjunto es una base para un espacio o un subespacio, como se ve en la imagen 37.

Además cabe mencionar que el Estudiante 2 no solo fue capaz de determinar que $\{v_1, v_2\}$ no es una base de H, sino que propuso una base para H, y esto habla de la concepción proceso de base de este Estudiante, como se ve en la imagen 37.

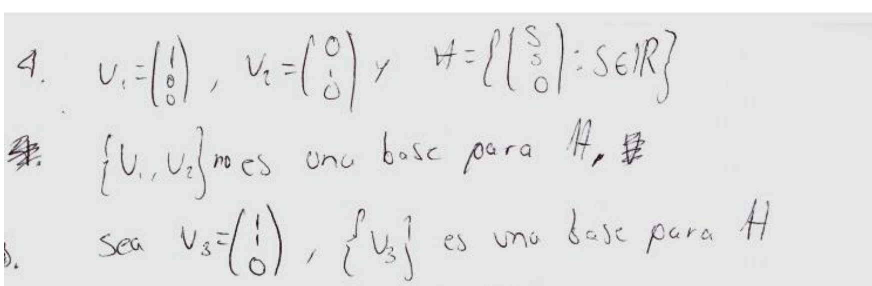
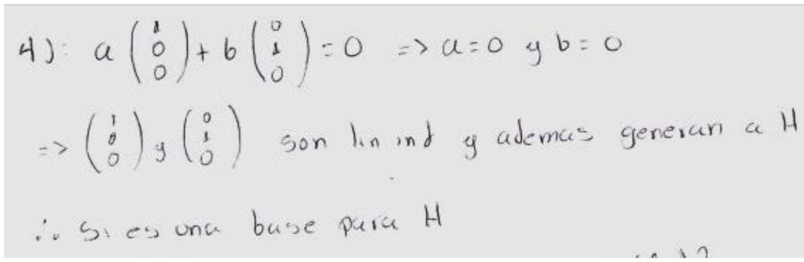


Imagen 37. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 4.

Estudiante 3.

Se puede observar con la resolución que el Estudiante 3 da a esta situación matemática que tiene claras algunas de las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea base de un espacio vectorial, por ejemplo, está consciente de que los vectores del conjunto deben ser linealmente independientes, y también tiene la idea de que deben generar al espacio vectorial o subespacio del cual el conjunto es base, pero aquí el Estudiante 3 no tiene la idea de que el Span de la base debe ser el espacio o subespacio vectorial del cual es base, ya que aquí H está contenido en el Span de $\{v_1, v_2\}$, entonces no genera a H y de esto el alumno no se da cuenta, como se ve en la imagen 38.


4): $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a=0$ y $b=0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ son lin ind y ademas generan a H

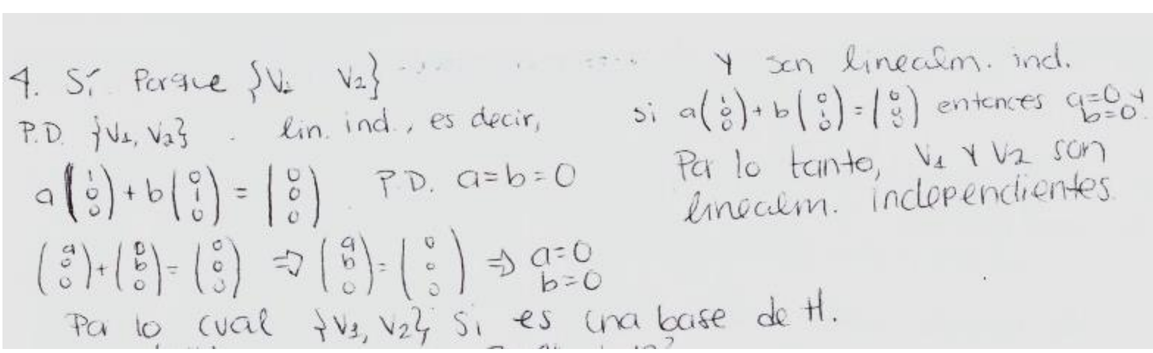
$\therefore$ Si es una base para H

Imagen 38. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 4.

El Estudiante 3 no se da cuenta que los vectores v_1 y v_2 no pertenecen a H, y esto es otra condición necesaria para que un conjunto sea base, que los vectores del conjunto pertenezcan al espacio o subespacio vectorial del cual serán base. Por esta razón es que el alumno muestra una concepción acción de base ya que aún no tiene claras todas las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base.

Estudiante 4.

Se puede observar con la resolución que el Estudiante 4 da a esta situación matemática que tiene claras algunas de las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea base de un espacio vectorial, por ejemplo está consciente de que los vectores del conjunto deben ser linealmente independientes, pero aquí el Estudiante no tiene la idea de que el Span de la base debe ser el espacio o subespacio vectorial del cual es base, ya que aquí H está contenido en el Span de $\{v_1, v_2\}$, entonces no genera a H y de esto el alumno no se da cuenta, como se puede ver en la imagen 39.


4. Sí. Porque $\{V_1 \; V_2\}$ Y son linealm. ind.

P.D. $\{V_1, V_2\}$ lin. ind., es decir,

$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ P.D. $a=b=0$

$\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a=0, \; b=0$

Por lo cual $\{V_1, V_2\}$ Si es una base de H.

si $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ entonces $a=0$ y $b=0$.

Por lo tanto, V_1 Y V_2 son linealm. independientes.

Imagen 39. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 4.

Además el Estudiante no se da cuenta que los vectores v_1 y v_2 no pertenecen a H, y esto es otra condición necesaria para que un conjunto sea base, que los vectores del conjunto pertenezcan al espacio o subespacio vectorial del cual serán base. Por esta razón es que el Estudiante muestra una concepción acción de base ya que aún no tiene claras todas las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base.

Estudiante 5.

El Estudiante 5 da evidencia de una concepción proceso de base ya que se da cuenta que $\{v_1, v_2\}$ no son una base para H, porque no cumple con la condición de que generen H y que pertenezcan a H, con esto podemos ver que el Estudiante es consciente de las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base y es capaz de decir si un conjunto es una base para un espacio o un subespacio, como se puede ver en la imagen 40.

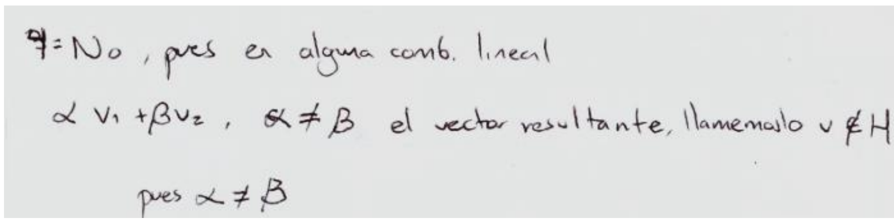


Imagen 40. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 4.

Mencionemos también que el Estudiante no solo fue capaz de determinar que $\{v_1, v_2\}$ no es una base de H, sino que propuso una base para H, y esto habla de la concepción proceso de base de este Estudiante, como se puede ver en la imagen 41.

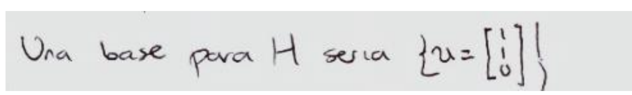


Imagen 41. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 4.

Estudiante 6.

El Estudiante 6 da evidencia de una concepción proceso de base ya que se da cuenta que $\{v_1, v_2\}$ no son una base para H, porque no cumple con la condición de que generen H y relaciona esto con el concepto de dimensión. Con esto podemos ver que el Estudiante es consciente de las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base y es capaz de decir si un conjunto es una base para un espacio o un subespacio, como se ve en la imagen 42.

Además cabe mencionar que el Estudiante 6 no solo fue capaz de determinar que $\{v_1, v_2\}$ no es una base de H, sino que propuso una base para H, y esto habla de la concepción proceso de base de este Estudiante, como se ve en la imagen 42.

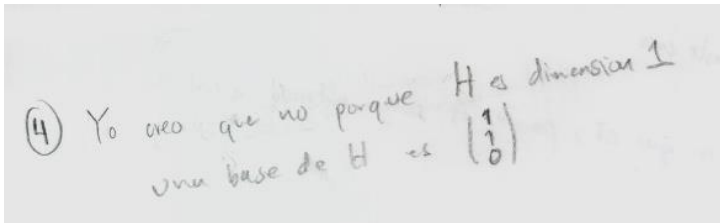


Imagen 42. Respuesta del Estudiante 6 a la Situación 4.

Estudiante 7.

Se puede observar con la resolución que el Estudiante 7 da a esta situación matemática que tiene claras algunas de las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea base de un espacio vectorial, por ejemplo está consciente de que los vectores del conjunto deben ser linealmente independientes, también sabe que debe generar al subespacio vectorial, pues menciona que $Span(\{v_1, v_2\}) = H$. Sin embargo, no se da cuenta que los vectores v_1 y v_2 no pertenecen a H, y esto es otra condición necesaria para que un conjunto sea base, que los vectores del conjunto pertenezcan al espacio o subespacio vectorial del cual serán base, pues de no ser así no generan, como se ve en la imagen 43.

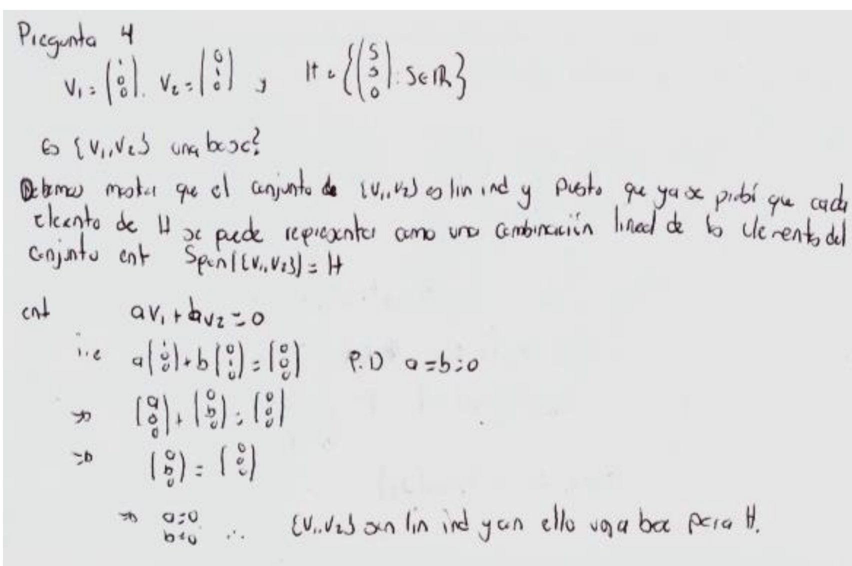


Imagen 43. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 4.

Por esta razón es que el Estudiante 7 muestra una concepción acción pues no tiene claras todas las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base, por ejemplo que el conjunto candidato a base debe pertenecer al subespacio o espacio vectorial.

Estudiante 8.

Se puede observar con la resolución que el Estudiante 8 esta consiente de algunas propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base, por ejemplo que los vectores del espacio o subespacio vectorial se puedan escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto que sea base, aquí el Estudiante 8 no tiene la idea de que el Span de la base debe ser el espacio o subespacio vectorial del cual es base, ya que aquí H está contenido en el Span de $\{v_1, v_2\}$, entonces no genera a H y de esto el alumno no percata. Además, no menciona nada sobre la independencia lineal, pareciera que para el Estudiante es suficiente que genere para ser base, como se ve en la imagen 44.

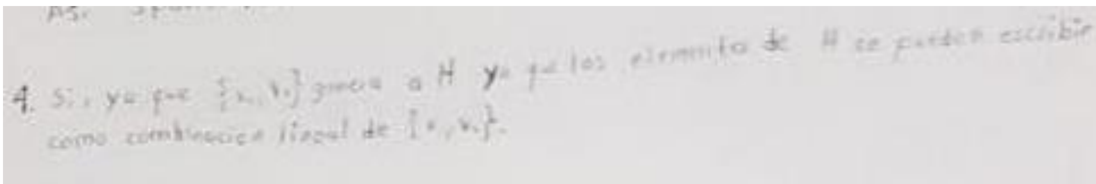


Imagen 44. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 4.

El Estudiante 8 no se da cuenta que los vectores v_1 y v_2 no pertenecen a H, y esto es otra condición necesaria para que un conjunto sea base. Por esta razón es que el Estudiante muestra una concepción acción de base ya que aún no tiene claras todas las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base.

Situación matemática 5.

Determina una base para el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$.

La línea

$$x = 2t$$

$$y = -t \qquad -\infty < t < \infty$$

$$z = 4t$$

Estudiante 1.

El Estudiante 1 en este problema da evidencia de su concepción proceso de base ya que primeramente ve a la línea como una parametrización usando un vector, y después obtiene que este es base ya que es linealmente independiente y genera al subespacio, como se puede ver en la imagen 45.

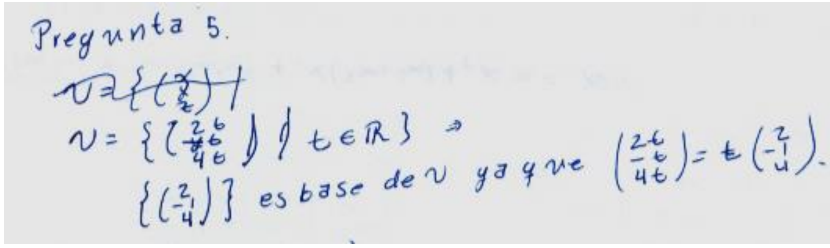


Imagen 45. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 5.

Con esto podemos decir que el Estudiante 1 esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial. También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 2.

El Estudiante 2 en este problema da evidencia de su concepción proceso de base ya que primeramente ve a la línea como una parametrización aunque no lo hace evidente, después obtiene un vector que este es base ya que es linealmente independiente y genera al subespacio, como se puede ver en la imagen 46

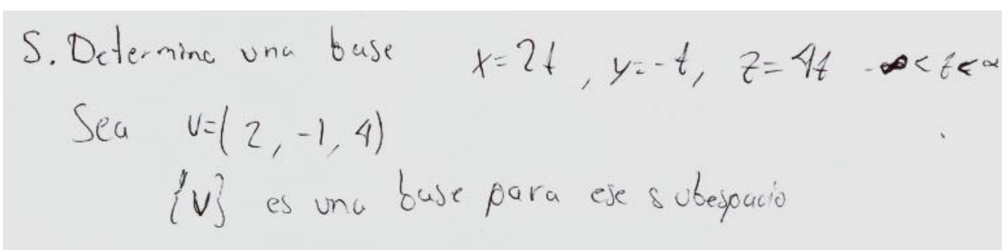


Imagen 46. Respuesta del Estudiante 2 a la Situación 5.

Se puede decir que el Estudiante 2 esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial. También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 3.

El Estudiante 3 en este problema da evidencia de su concepción proceso de base ya que primeramente ve a la línea como una parametrización usando un vector, y después obtiene que este es base ya que es linealmente independiente y genera al subespacio, como se puede ver en la imagen 47.

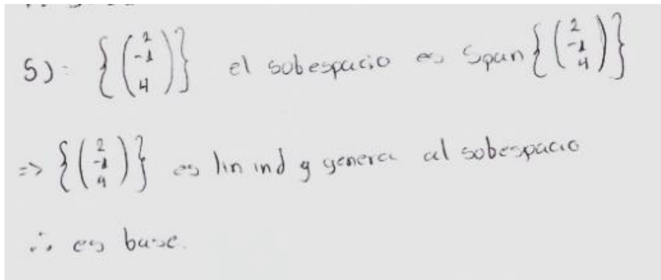


Imagen 47. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 5.

Con esto podemos decir que el Estudiante 3 esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial. También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 4.

El Estudiante 4 en esta pregunta no da respuesta alguna como se ve en la imagen 48.

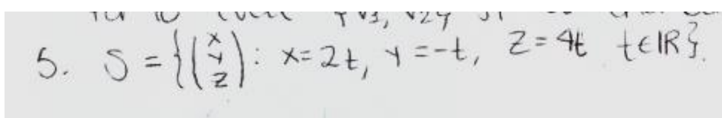


Imagen 48. Respuesta del Estudiante 4 a la Situación 5.

no sabemos si por que no recordaba algún concepto o algo que pudiera ayudarlo a resolver este problema, o si fue por falta de tiempo. Por esta razón es que no podemos argumentar nada acerca de la concepción que el Estudiante 4 tiene acerca del concepto de base.

Estudiante 5.

El Estudiante 5 en la resolución de esta situación matemática evidencia su concepción proceso de base ya que primeramente ve a la línea como una parametrización, después obtiene un vector que este es base ya que es linealmente independiente y genera al subespacio aunque no lo menciona, como se ve en la imagen 49.

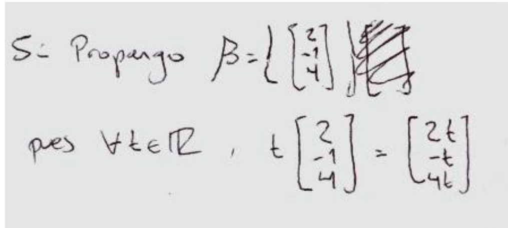


Imagen 49. Respuesta del Estudiante 5 a la Situación 5.

Se puede decir que el Estudiante esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial. También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 6.

Con esto podemos decir que el Estudiante 6 esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial, como se ve en la imagen 50.

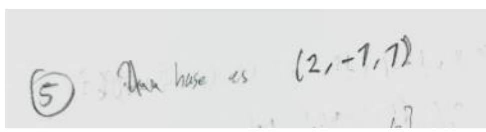


Imagen 50. Respuesta del Estudiante 6 a la Situación 5.

También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 7.

El Estudiante 7 en este problema da evidencia de su concepción proceso de base ya que primeramente ve a la línea como una parametrización usando un vector, y después obtiene que este es base ya que es linealmente independiente y genera al subespacio, como se ve en la imagen 51.

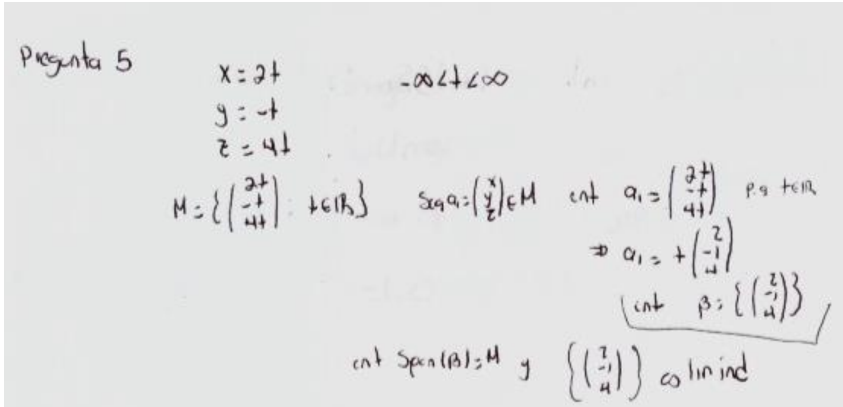


Imagen 51. Respuesta del Estudiante 7 a la Situación 5.

Con esto podemos decir que el Estudiante 7 esta consiente de las propiedades que debe cumplir una base y que es capaz de determinar una base cuando se le da un espacio o un subespacio vectorial. También cabe mencionar que aunque el subespacio vectorial del cual se le pide la base no es un subespacio con el cual este muy acostumbrado a trabajar no tuvo problema alguno para poder determinar la base de este subespacio.

Estudiante 8.

El Estudiante 8 en este problema da evidencia de tener problemas con la concepción objeto de combinación lineal, al no ser capaz de expresar un vector como combinación lineal de otros vectores, aunque es capaz de ver a la línea como una parametrización usando un vector, no puede determinar correctamente la base para este espacio vectorial, como se ve en la imagen 52

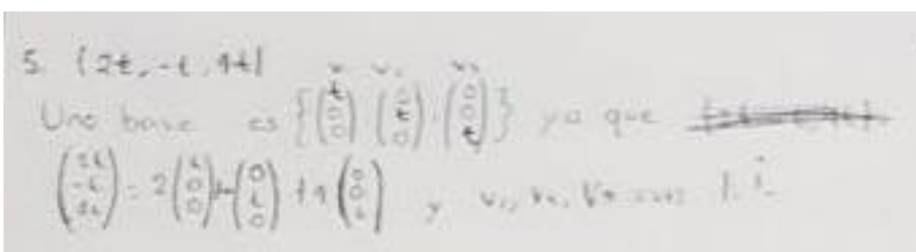


Imagen 52. Respuesta del Estudiante 8 a la Situación 5.

El Estudiante 8 si es consciente del conjunto para ser base debe generar y ser linealmente independiente, sin embargo, no es capaz de verificarlas para un subespacio, esto muestra que no tiene una concepción acción de base.

Situación matemática 6.

Sea V el espacio generado por

$$v_1 = cos^2x, \;\; v_2 = sen^2x \text{ y } \;\; \text{y} \;\; v_3 = sen^2x$$

Encuentra una base para V.

Estudiante 1.

Se puede ver en la respuesta del Estudiante 1 con su respuesta a esta pregunta muestra una concepción proceso de base ya que intenta averiguar la independencia lineal de los vectores $v_1, v_2 \; y \; v_3$, y a pesar de que no lo logra porque no recuerda una identidad trigonométrica para ver si el $v_3 = \cos 2x$ es dependiente de $v_1 \; y \; v_2$, argumenta que se puede quitar el vector $v_3 = \cos 2x$ para que el conjunto $\{Sen^2x, Cos^2x\}$ es una base para V, como se puede ver en la imagen 53.

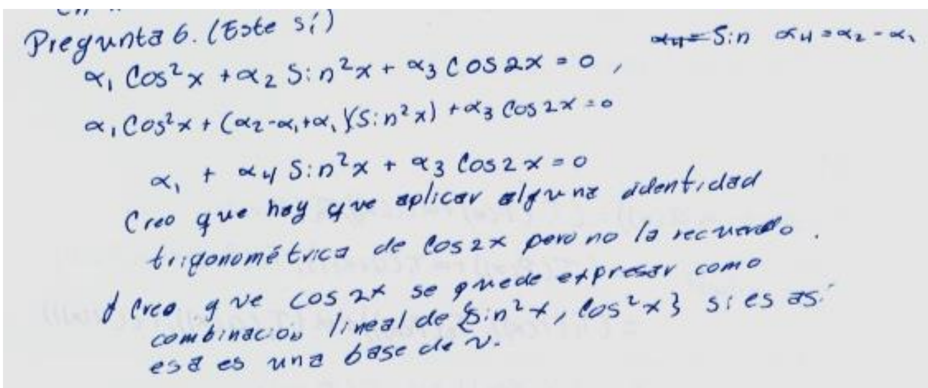
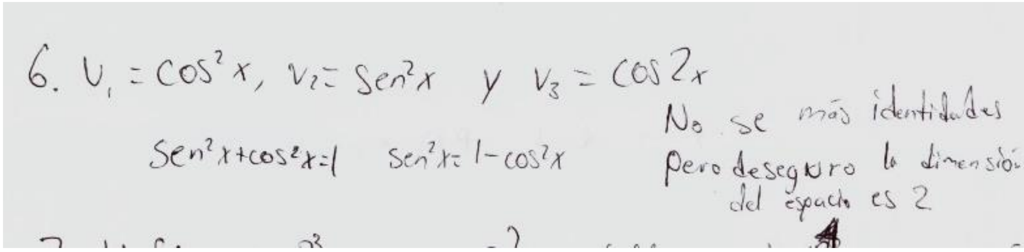

Pregunta 6. (Este si) $\alpha_4 =$ Sin $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_1$
$\alpha_1 Cos^2x + \alpha_2 Sin^2x + \alpha_3 COS 2x = 0$,
$\alpha_1 Cos^2x + (\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_1)(Sin^2x) + \alpha_3 Cos 2x = 0$
$\alpha_1 + \alpha_4 Sin^2x + \alpha_3 Cos 2x = 0$
Creo que hay que aplicar alguna identidad trigonométrica de cos 2x pero no la recuerdo.
Y creo que cos 2x se puede expresar como combinación lineal de $\{Sin^2x, cos^2x\}$ si es así esa es una base de V.

Imagen 53. Respuesta del Estudiante 1 a la Situación 6.

Estudiante 2.

Se puede observar que el Estudiante 2 comienza queriendo utilizar identidades trigonométricas para ver si alguno de los vectores de v_1, v_2 y v_3 era dependiente de los otros dos para identificar si estos vectores son linealmente independientes ya que esta es una de las condiciones que debe cumplir un conjunto para ser base, se puede observar que el Estudiante 2 no logra identificar si los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes, porque no recuerda más identidades como el mismo lo menciona, como se ve en la imagen 54.



6. $v_1 = \cos^2 x$, $v_2 = Sen^2 x$ y $v_3 = \cos 2x$

$Sen^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad Sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

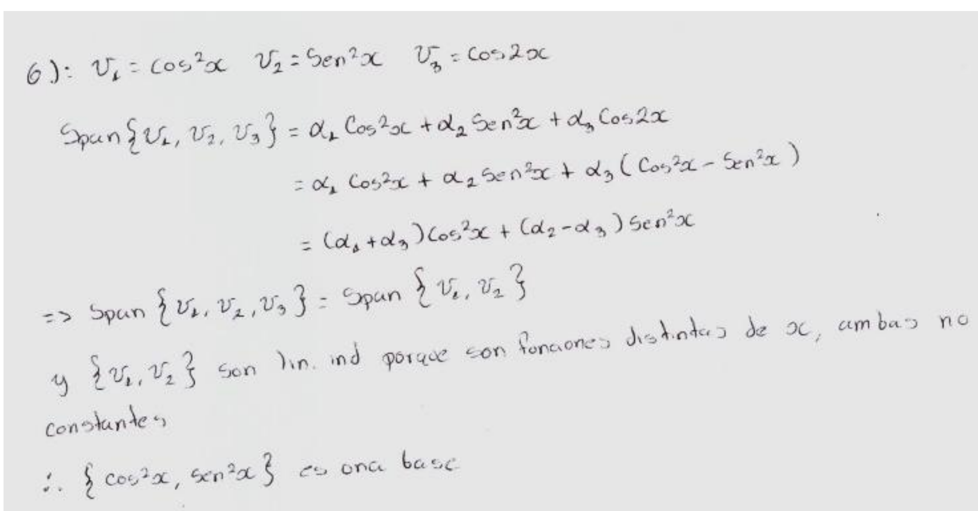
No se más identidades pero deseguro la dimensión del espacio es 2

Imagen 53. Respuesta del estudiante 2 a la Situación 6.

Después de esto el Estudiante 2 ya no continua y no concluye si el conjunto es base o no, pero pudimos darnos cuenta de que está consciente de algunas características que debe cumplir un conjunto para ser base, además de que intuye que la dimensión del espacio generado es 2, por esta razón es que podemos considerar que el Estudiante 2 tiene una concepción proceso de base.

Estudiante 3.

El Estudiante 3 con su respuesta a esta pregunta parece contar con una concepción proceso de base ya que de acuerdo al análisis a priori de la pregunta, empieza demostrando que el $Span(\{v_1, v_2, v_3\}) = Span(\{v_1, v_2\})$ haciendo uso de la identidad $Cos\ 2x = Cos^2x - Sen^2x$ para lograrlo. Además argumenta que los vectores $v_1, v_2\ y\ v_3$ son linealmente independientes por ser funciones distintas de x y no constantes, concluyendo que el conjunto $\{Sen^2x, Cos^2x\}$ es una base para V. Esto a pesar de no estar acostumbrados a trabajar con funciones como elementos de un espacio vectorial, sin embargo muestra elementos que debe cumplir un conjunto para ser base, como se ve en la imagen 54.



6): $v_1 = \cos^2 x \quad v_2 = Sen^2 x \quad v_3 = \cos 2x$

$$\begin{aligned} Span\{v_1, v_2, v_3\} &= \alpha_1 Cos^2 x + \alpha_2 Sen^2 x + \alpha_3 Cos 2x \\ &= \alpha_1 Cos^2 x + \alpha_2 Sen^2 x + \alpha_3 (Cos^2 x - Sen^2 x) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) Cos^2 x + (\alpha_2 - \alpha_3) Sen^2 x \end{aligned}$$

$\Rightarrow Span\{v_1, v_2, v_3\} = Span\{v_1, v_2\}$

y $\{v_1, v_2\}$ son lin. ind porque son funciones distintas de x, ambas no constantes

$\therefore \{\cos^2 x, sen^2 x\}$ es una base

Imagen 54. Respuesta del Estudiante 3 a la Situación 6.

Estudiante 4.

El Estudiante 4 en esta pregunta no da respuesta alguna como se ve en la imagen 55

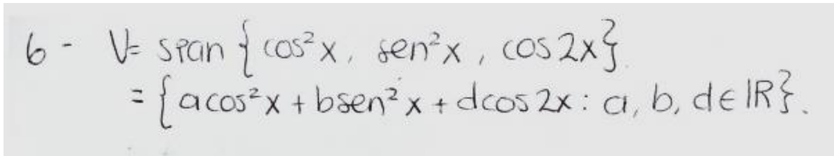

$$6-\ V=\text{span}\{\cos^2 x,\ \text{sen}^2 x,\ \cos 2x\}$$
$$=\{a\cos^2 x+b\,\text{sen}^2 x+d\cos 2x : a, b, d\in\mathbb{R}\}.$$

Imagen 55. Respuesta del estudiante 4 a la Situación 6.

No sabemos si por que no recordaba algún concepto o algo que pudiera ayudarlo a resolver este problema, o si fue por falta de tiempo, lo único que hay que resaltar es que se da cuenta que el Span de $v_1, v_2\ y\ v_3$ se veía como todas las combinaciones Lineal es de estos vectores, pero no podemos argumentar nada acerca de la concepción que el Estudiante 4 tiene acerca del concepto de base.

Estudiante 5.

En esta pregunta el Estudiante 5 no respondió nada como se pude ver en la imagen 56

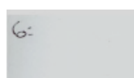

6:

Imagen 56. Respuesta del estudiante 5 a la Situación 6.

Con esto no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de base, ya que pudo no haber contestado por diversos factores y no solamente porque no sabía. Puede ser que el Estudiante no lo respondió por que no está acostumbrado a trabajar con funciones como elementos de un espacio vectorial, o por falta de tiempo.

Estudiante 6.

El Estudiante no respondió correctamente esta pregunta, ya que dice que los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ son base para el Span de estos vectores, y aunque no se puede ver realmente el procedimiento que hizo podemos indagar en que no está consiente de todas las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser base, en este caso no se dio cuenta de la propiedad de independencia lineal, ya que en este caso el vector v_3 es dependiente de v_1 y v_2, por esta razón podemos decir que el alumno posee una concepción acción de base, como se puede ver en la imagen 57.


6 Una base de V es $\{V_1, V_2, V_3\}$

Imagen 57. Respuesta del estudiante 6 a la Situación 6.

Estudiante 7.

En esta pregunta 6 el Estudiante 7 no respondió nada como se puede ver en la imagen 58

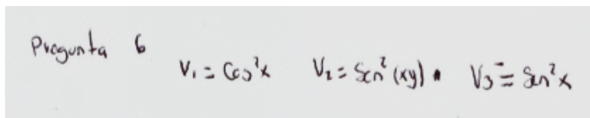

Pregunta 6 $V_1 = \cos^2 x$ $V_2 = \operatorname{sen}^2(xy)$ $V_3 = \operatorname{sen}^2 x$

Imagen 58. Respuesta del estudiante 7 a la Situación 6.

Con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de base, ya que pudo no haber contestado por diversos factores y no solamente porque no sabía.

Estudiante 8.

En esta pregunta 6 el Estudiante 8 no respondió nada como se ve en la imagen 59, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de base, ya que pudo no haber contestado por diversos factores y no solamente porque no sabía.

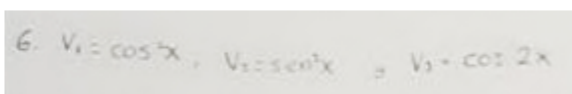

6. $V_1 = \cos^2 x$, $V_2 = \operatorname{sen}^2 x$, $V_3 = \cos 2x$

Imagen 59. Respuesta del estudiante 8 a la Situación 6.

Situación matemática 7.

Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 : x = y;\ z = w\}$. Sea $T: U \longrightarrow V$ una función tal que

$$T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$$

$$T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$$

¿Es T siempre una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Estudiante 1.

Con la respuesta del Estudiante 1 a pesar de que no menciona o no verifica que $\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}$ es una base para el espacio vectorial U si se da cuenta que si T no fuera lineal entonces no se preservarían combinaciones Lineal es al aplicar T a cualquier combinación lineal de los vectores $(-1,1,0)$ y $(-1,0,1)$ como se muestra en la imagen 60

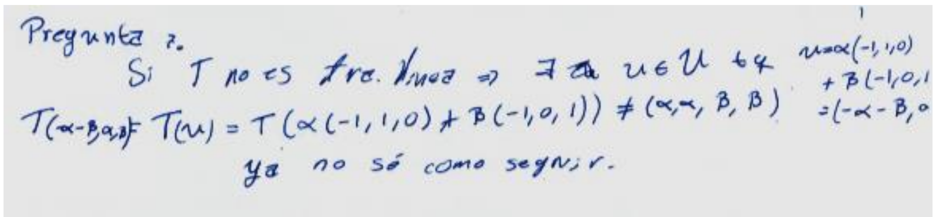

Pregunta 7.
Si T no es fn. lineal $\Rightarrow \exists\, u \in U$ tq $u=\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1)=(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$
$T(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)\; T(u) = T(\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1)) \neq (\alpha,\alpha,\beta,\beta)$
ya no sé como seguir.

Imagen 60. Respuesta del estudiante 1 a la Situación 7.

Con esto puede darse evidencia de que tiene una concepción proceso de transformación lineal, ya que es capaz de pensar en T como transformación lineal que debe preservar combinaciones Lineal es, aunque no haya terminado de dar solución a esta situación matemática.

Estudiante 2.

En esta situación no es claro lo que el Estudiante pretende hacer, encuentra la imagen de vectores que son combinación lineal de los vectores (-1,1,0) y (-1,0,1), sin embargo no demuestra que estos sean una base del espacio vectorial U. Pareciera que si sabe que una transformación lineal preserva combinaciones Lineal es pues obtiene la imagen de los vectores (-2,1,1) y (0,-1,1) usando la información que se le proporcionó, sin embargo no queda claro para qué calculó dichas imágenes, parece verificar la propiedad de preservación de combinación lineal solo para vectores particulares como se ve en la imagen 61, lo que muestra una concepción acción de transformación lineal.

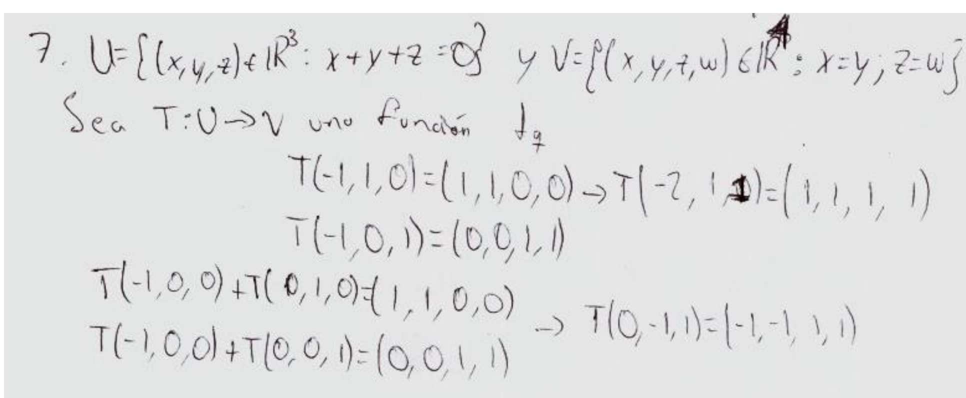

7. $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0\}$ y $V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: x=y;\ z=w\}$
Sea $T:U\to V$ una función tq
$T(-1,1,0)=(1,1,0,0) \to T(-2,1,1)=(1,1,1,1)$
$T(-1,0,1)=(0,0,1,1)$
$T(-1,0,0)+T(0,1,0)=(1,1,0,0) \to T(0,-1,1)=(-1,-1,1,1)$
$T(-1,0,0)+T(0,0,1)=(0,0,1,1)$

Imagen 61. Respuesta del estudiante 2 a la Situación 7.

Estudiante 3.

El Estudiante 3 no da evidencia de poseer la concepción proceso de transformación lineal, aunque tampoco podríamos decir que no la tiene, ya que no responde a esta situación matemática como se puede ver en la imagen 62, y no sabemos si fue por factores externos que no la contestó.

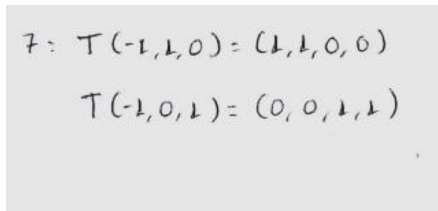

7: $T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$
$T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$

Imagen 62. Respuesta del estudiante 3 a la Situación 7.

Estudiante 4.

Hay que mencionar que aquí el Estudiante 4 lo que intenta hacer primero es proponer una base para U y V y lo hace. Después intenta escribir como combinación lineal vectores de U de los cuales tiene las imágenes, sin darse cuenta que estos vectores son base para U, pero lo interesante es que si hace la relación de base y dominio con este enunciado. Ya después no sabe qué hacer porque no procedió de una manera totalmente correcta al principio como se ve en la imagen 63.

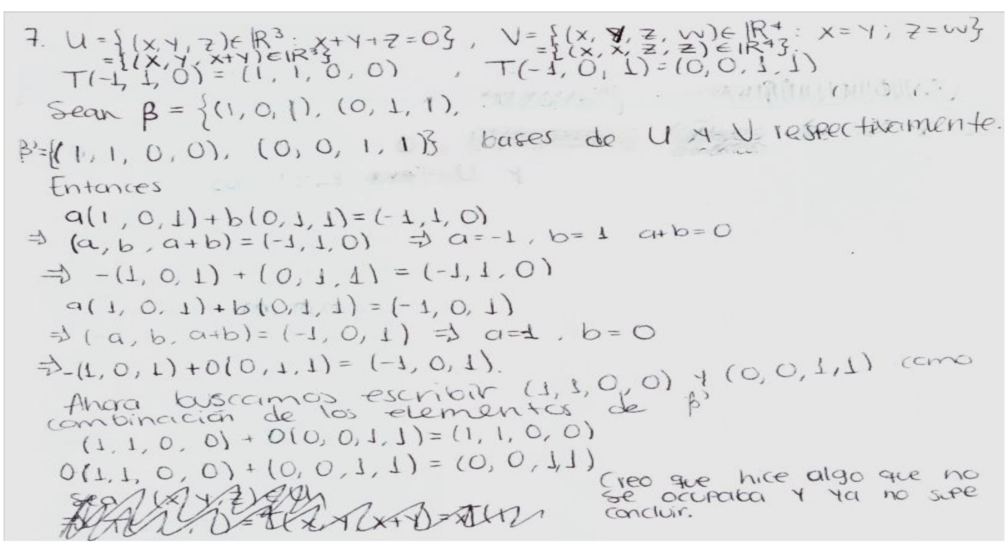

7. $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x=y;\ z=w\}$
$= \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3\}$ $= \{(x,x,z,z) \in \mathbb{R}^4\}$
$T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$, $T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$
Sean $\beta = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$,
$\beta' = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ bases de U y V respectivamente.
Entonces
$a(1,0,1) + b(0,1,1) = (-1,1,0)$
$\Rightarrow (a, b, a+b) = (-1,1,0) \Rightarrow a=-1,\ b=1 \quad a+b=0$
$\Rightarrow -(1,0,1) + (0,1,1) = (-1,1,0)$
$a(1,0,1) + b(0,1,1) = (-1,0,1)$
$\Rightarrow (a, b, a+b) = (-1,0,1) \Rightarrow a=-1,\ b=0$
$\Rightarrow -(1,0,1) + 0(0,1,1) = (-1,0,1)$.
Ahora buscamos escribir $(1,1,0,0)$ y $(0,0,1,1)$ como combinación de los elementos de β'
$(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1) = (1,1,0,0)$
$0(1,1,0,0) + (0,0,1,1) = (0,0,1,1)$
Creo que hice algo que no se ocupaba y ya no supe concluir.

Imagen 63. Respuesta del estudiante 4 a la Situación 7.

Como no hizo nada con el concepto de transformación lineal por el error que cometió al principio no podemos argumentar o decir nada acerca de la concepción que tiene del concepto de transformación lineal.

Estudiante 5.

En esta pregunta 7 el Estudiante 5 solo expresa que tiene que demostrar que la transformación es lineal a través de si preserva combinación lineal como se ve en la imagen 64, sin embargo no sabemos si lo sabe hacer o no. De manera que no podemos determinar su estructura mental respecto al concepto de transformación lineal.

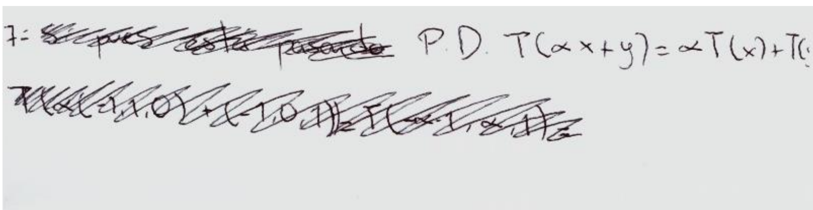


Imagen 64. Respuesta del estudiante 5 a la Situación 7.

Estudiante 6.

El Estudiante no da evidencia de la propiedad de preservar combinación lineal, de manera que no se puede determinar si cuenta o no con una concepción proceso de transformación lineal, aunque se dio cuenta que la transformación que se le da manda la base del espacio vectorial sobre el cual actúa a la base del espacio vectorial donde pertenecen las imágenes de la transformación lineal y argumenta que por esta razón es lineal, no da explicaciones de sus argumentos, como se ve en la imagen 65.

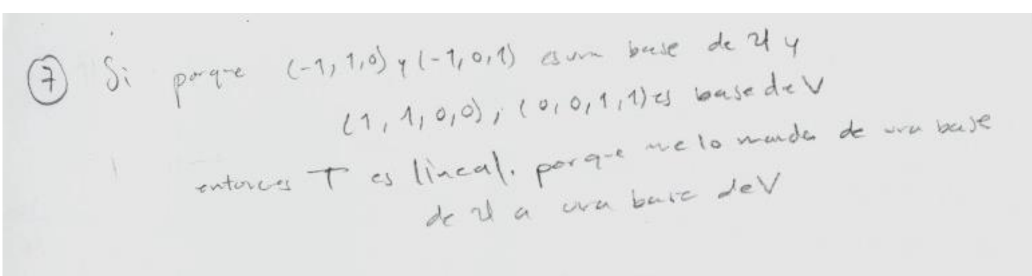


Imagen 65. Respuesta del estudiante 6 a la Situación 7.

Estudiante 7.

El Estudiante 7 en esta pregunta no respondió nada, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal, ya que pudo no haber contestado por diversos factores y no solamente porque no sabía cómo proceder.

Estudiante 8.

El Estudiante 8 en esta pregunta 7 no sabe realmente qué hacer, parece querer aplicar una de las propiedades de linealidad, la de preservar suma, por eso expresa a un vector del espacio vectorial U como combinación lineal de ciertos vectores y después le aplica la transformación lineal, como se ve en la imagen 66.

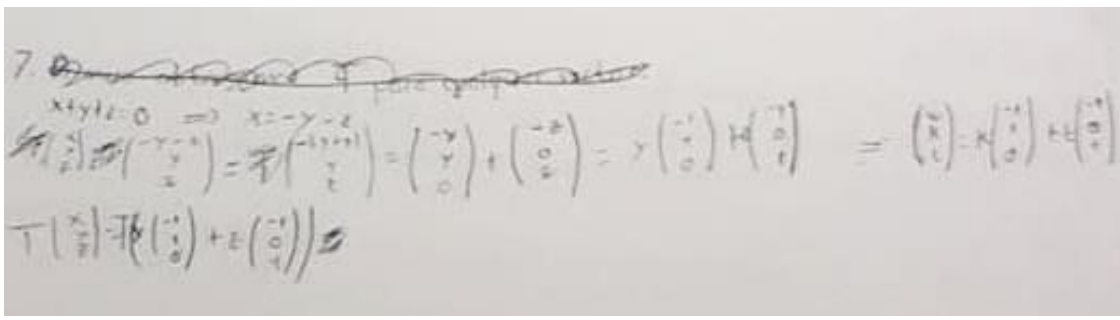


Imagen 66. Respuesta del estudiante 8 a la Situación 7.

Como ya no continua no da evidencia de conocer las propiedades de transformación lineal, de manera que no podemos determinar la estructura mental con la que cuenta el Estudiante respecto al concepto de transformación lineal.

Situación matemática 8.

a. Encuentra transformaciones Lineal es f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$fg = 0 \qquad pero \qquad gf \neq 0$$

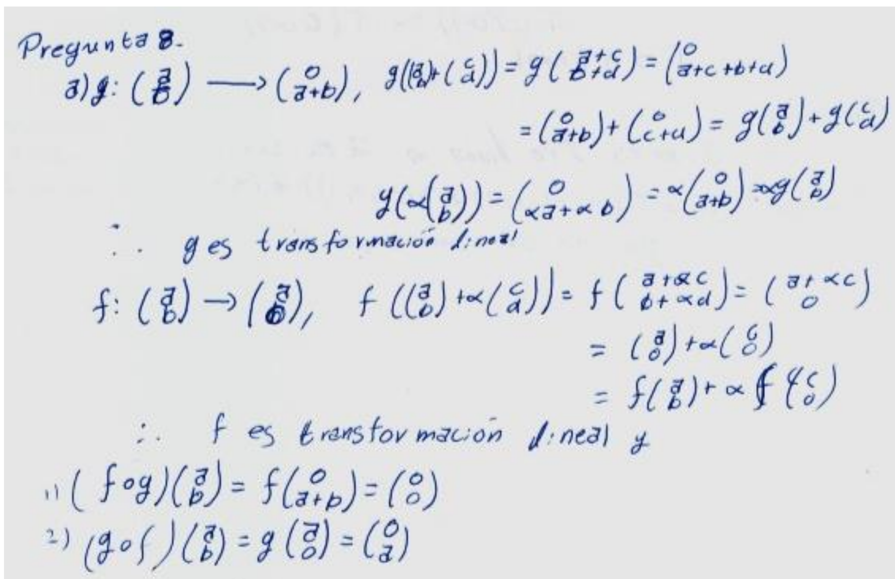
b. Encuentra transformaciones Lineal es $l: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que:

$$lh = l \qquad pero \qquad hl \neq l$$

Estudiante 1.

Se puede ver en el inciso a) del problema 8 que el Estudiante 1 es capaz de proponer dos transformaciones f y g tales que cumplan con las condiciones que se le dijeron, lo interesante del procedimiento del Estudiante 1 es que no se ve cómo es que se le ocurren están transformaciones f y g, sino que solo las propone y demuestra que son transformaciones Lineal es a través de ver si se preservan combinaciones Lineal es, con esto se hace evidente la concepción proceso de transformación lineal del Estudiante.

Después realiza las combinaciones de transformaciones Lineal es para ver si cumplían con las condiciones que le pidió, con esto podría verse un poco la concepción objeto de transformación lineal del Estudiante 1, ya que es capaz de realizar operaciones entre transformaciones Lineal es, como se ve en la imagen 67.


Pregunta 8.

a) $g: \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\a+b\end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a+c+b+d\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0\\a+b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c+d\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$g\left(\alpha\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\\alpha a+\alpha b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\a+b\end{pmatrix} = \alpha g\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

∴ g es transformación lineal

$f: \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}a+\alpha c\\b+\alpha d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+\alpha c\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$

$= f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\alpha f\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

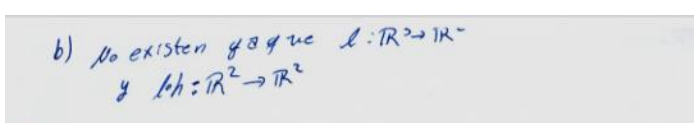
∴ f es transformación lineal y

1) $(f \circ g)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

2) $(g \circ f)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$

Imagen 67. Respuesta del estudiante 1 a la Situación 8 inciso a)

En el inciso b) de esta pregunta 8 el Estudiante 1 dice que no existen las transformaciones Lineal es $l: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $lh = l$ pero $hl \neq l$, y la justificación del alumno es que la transformación l que le piden va de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y la composición lh resultaría que va de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ entonces esto no podría resultar siendo igual a l por el dominio y contradominio de las funciones como se ve en la imagen 68.


b) No existen ya que $l: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

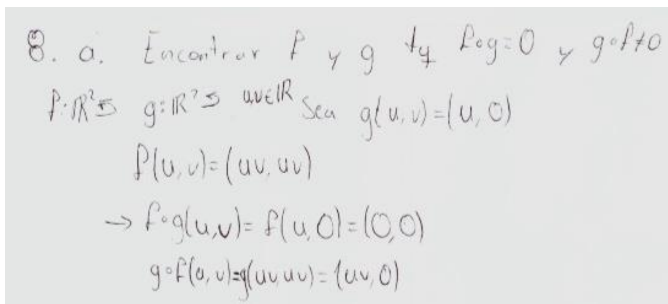
y $lh: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Imagen 68. Respuesta del estudiante 1 a la Situación 8 inciso b)

Con esto se puede intuir que el Estudiante 1 tiene incluso una concepción objeto de transformación lineal ya que es capaz de realizar operaciones entre transformaciones Lineal es y dar conclusiones de estas operaciones sin incluso tener específicamente las expresiones de las transformaciones Lineal es, además de que podemos darnos cuenta de que el Estudiante 1 tiene un buen manejo de lo que significa el dominio y el contradominio de una transformación lineal.

Estudiante 2.

En el inciso a) del problema 8 el Estudiante 2 es capaz de proponer dos transformaciones f y g tales que cumplan con las condiciones que se le dijeron, aunque no se ve o no se hace evidente como se le ocurrieron estas transformaciones al Estudiante, solo las propone y no demuestra que son transformaciones Lineal es, de hecho no se da cuenta que la transformación f propuesta no es lineal como se puede ver en la imagen 69.


8. a. Encontrar f y g t.q. $f\circ g=0$ y $g\circ f\neq 0$

$f:\mathbb{R}^2\to$ $g:\mathbb{R}^2\to$ $u,v\in\mathbb{R}$ Sea $g(u,v)=(u,0)$

$f(u,v)=(uv,uv)$

$\to f\circ g(u,v)=f(u,0)=(0,0)$

$g\circ f(u,v)=g(uv,uv)=(uv,0)$

Imagen 69. Respuesta del estudiante 2 a la Situación 8 inciso a)

En el inciso b) se puede ver que el Estudiante 2 no fue capaz de justificar que no podían existir las transformaciones Lineal es h y l que cumplan con las condiciones que se le piden ya que no sería posible el dominio y contradominio de las funciones, el alumno solo escribió que no se le ocurre, y se puede ver que intento con algunas transformaciones a prueba y error a ver si salía lo que le estaba pidiendo la situación matemática, además no verifica que las transformaciones dadas con Lineal es como se puede ver en la imagen 70, por esta razón no podemos determinar la concepción que tiene el Estudiante de transformación lineal.

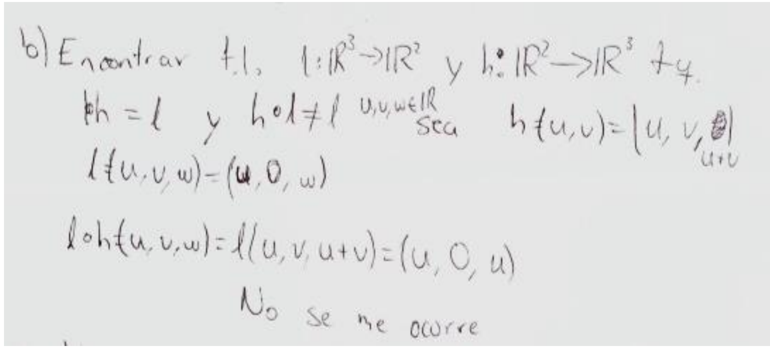

b) Encontrar t.l, $l:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ t.q.
$lh = l$ y $h\circ l \neq l$ $u,v,w\in\mathbb{R}$ Sea $h(u,v)=(u, v, u+v)$
$l(u,v,w)=(u,0,w)$
$l\circ h(u,v,w)=l(u,v,u+v)=(u,0,u)$
No se me ocurre

Imagen 70. Respuesta del estudiante 2 a la Situación 8 inciso b)

Estudiante 3.

Se puede observar que el Estudiante 3 no da suficiente evidencia para saber que concepción de transformación lineal tiene ya que no da ejemplos de la funciones f y g que cumplan con las condiciones que se le pidieron, lo único que dice es que tiene que ser distintas a la transformación o función 0. No sabemos si el alumno no supo cómo determinar estas funciones ya que no contesta nada respecto de esto, parece que lo respondido en lo único que recuerda de transformación lineal como se puede ver en la imagen 71.

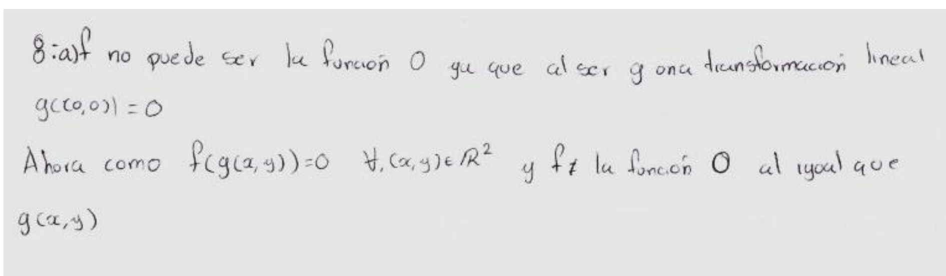

8: a) f no puede ser la función 0 ya que al ser g una transformación lineal
$g((0,0))=0$
Ahora como $f(g(x,y))=0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $f\neq$ la función 0 al igual que
$g(x,y)$

Imagen 71. Respuesta del estudiante 3 a la Situación 8.

Estudiante 4.

En la pregunta 8 el Estudiante 4 no respondió nada, ni siquiera aparece el número 8 en sus hojas de respuestas, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal.

Estudiante 5.

En esta pregunta 8 no es claro lo que el Estudiante 5 quiso hacer para responder la situación, pues parece solo aplicar la definición de composición de funciones, sin logran hacer nada más como se ve en la imagen 72. No propone transformaciones no habla hacerla de la linealidad de manera que no se cuenta con evidencia para poder determinar su estructura mental.

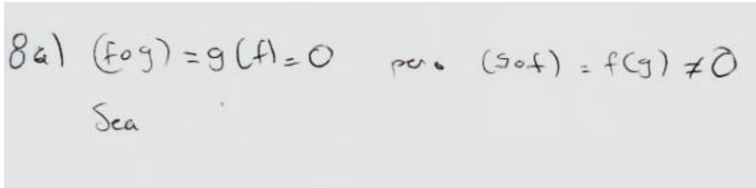


Imagen 72. Respuesta del estudiante 5 a la Situación 8.

Estudiante 6.

En esta pregunta 8 el Estudiante 6 no respondió nada como se ve en la imagen 73, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal, ya que pudo no haber contestado por diversos factores y no solamente porque no sabía cómo proceder.

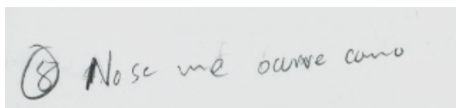
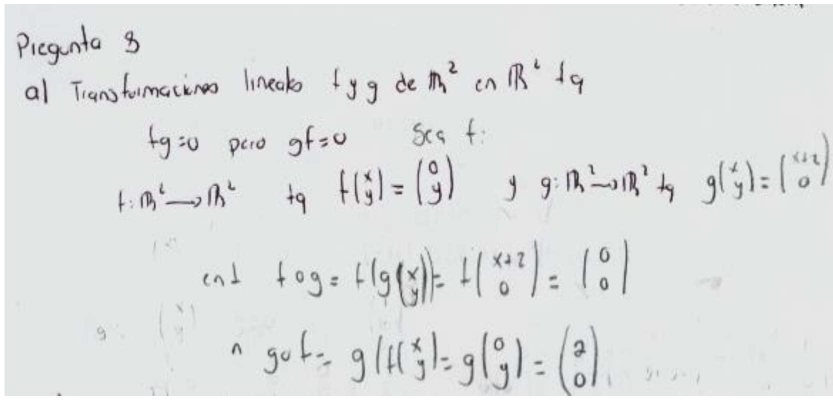


Imagen 73. Respuesta del estudiante 6 a la Situación 8.

Estudiante 7.

Se puede indagar con el inciso a) del problema 8 que el Estudiante 7 es capaz de proponer dos transformaciones *f* y *g* tales que cumplan con las condiciones que se le dijeron, aunque no se ve o no se hace evidente como se le ocurrieron estas transformaciones al Estudiante, solo las propone y no demuestra que son transformaciones Lineal es, de hecho no se percata que la transformación g no es lineal, como se ve en la imagen 74.

Después realiza la composición de las transformaciones para ver si cumplían con las condiciones que le pidió, con esto podría verse un poco la concepción objeto de transformación del Estudiante 7, ya que es capaz de realizar operaciones entre transformaciones. Sin embargo, no menciona nada de las propiedades que debe cumplir una transformación lineal, como se ve en la imagen 74.


Pregunta 8

a) Transformaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tq

$fg=0$ pero $gf\neq 0$ Sea f:

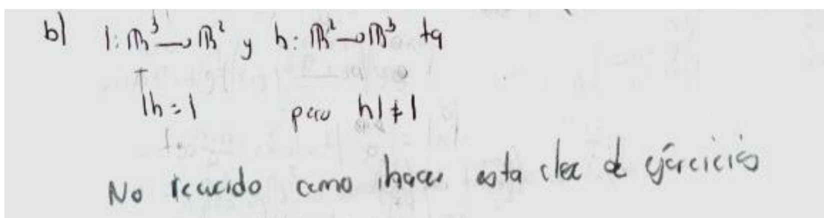
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tq $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tq $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\0\end{pmatrix}$

ent $f\circ g=f\left(g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}x+z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\wedge$ $g\circ f=g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=g\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$

Imagen 74. Respuesta del estudiante 7 a la Situación 8 inciso a).

En el inciso b) se puede ver que el Estudiante 7 no fue capaz de justificar que no podían existir las transformaciones Lineal es h y l que cumplan con las condiciones que se le piden ya que no sería posible el dominio y contradominio de las funciones, el alumno solo escribió que no se le ocurre, como se ve en la imagen 75. Por esta razón no podemos argumentar que concepción mostro el alumno con este inciso ya que pudo no resolverlo por diversas situaciones o porque no recordó algo fundamental para resolverlo.


b) $l:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tq

$lh=I$ pero $hl\neq I$

No recuerdo como hacer esta clase de ejercicios

Imagen 75. Respuesta del estudiante 7 a la Situación 8 inciso b).

Estudiante 8.

En esta pregunta 8 el Estudiante 8 no respondió nada, ni siquiera aparece esta pregunta en su hoja de respuestas, con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal.

Situación matemática 9.

Sean U,V y W espacios vectoriales dados $T_1: U \to V$ y $T_2: U \to W$ transformaciones Lineal es. Se define $T: U \to V$ x W como

$$T(u) = (T_1(u), T_2(u))$$

Para todo $u \in U$.

a. Encuentra un caso particular del enunciado, es decir, determina ejemplos de transformaciones Lineal es T_1, T_2 y calcula T. ¿Es T una transformación lineal?
b. ¿Es posible considerar en general, la transformación T como una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Estudiante 1.

En esta pregunta el Estudiante 1 propone las transformaciones Lineal es T_1 que va de los polinomios de grado dos a su derivada y propone T_2 que va de los polinomios de grado dos a la suma de sus coeficiente que caería en el espacio vectorial de $\mathbb{R}$, y lo interesante es que comprueba que $T(u) = (T_1(u), T_2(u))$ es lineal en general, no realiza primero casos particulares sino que se va directamente a comprobar si esta transformación es lineal para cualquier caso general, como se ve en la imagen 76, esto nos habla de que el Estudiante tiene una concepción mínimo de proceso de transformación lineal.

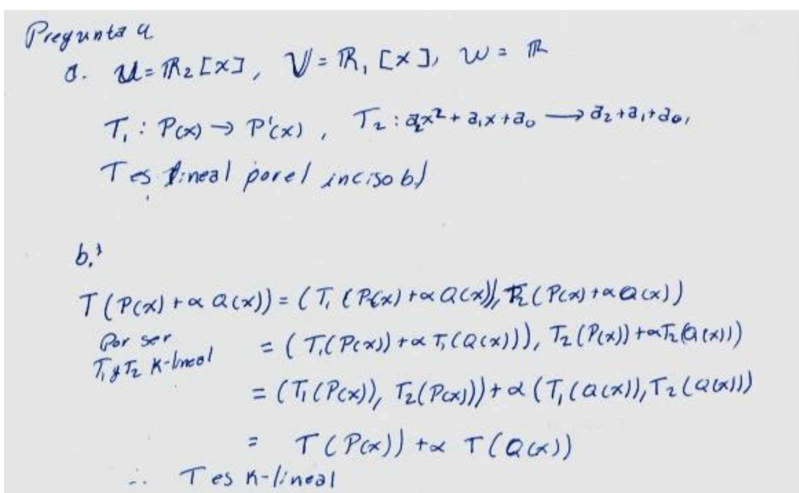

Pregunta 4
a. $U=\mathbb{R}_2[x]$, $V=\mathbb{R}_1[x]$, $W=\mathbb{R}$
$T_1: P(x) \to P'(x)$, $T_2: a_2x^2+a_1x+a_0 \longrightarrow a_2+a_1+a_0$,
T es lineal por el inciso b)
b.)
$T(P(x)+\alpha Q(x)) = (T_1(P(x)+\alpha Q(x)), T_2(P(x)+\alpha Q(x)))$
Por ser T_1 y T_2 K-lineal $= (T_1(P(x))+\alpha T_1(Q(x))), T_2(P(x))+\alpha T_2(Q(x)))$
$= (T_1(P(x)), T_2(P(x)))+\alpha(T_1(Q(x)), T_2(Q(x)))$
$= T(P(x))+\alpha T(Q(x))$
$\therefore$ T es K-lineal

Imagen 76. Respuesta del estudiante 1 a la Situación 9.

Estudiante 2.

Acerca de esta situación se pretendía ver si es Estudiante 2 poseía una concepción de transformación lineal, pero como no contesto más que no puedo como se puede ver en la imagen 77, no podemos argumentar si no contesto porque ya estaba cansado, porque tenía prisa, o porque en verdad no supo cómo proceder para resolver esta situación matemática.

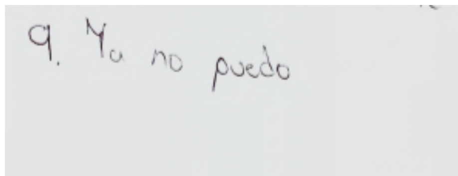


Imagen 77. Respuesta del estudiante 2 a la Situación 9.

Estudiante 3.

En esta pregunta 9 el Estudiante 3 no respondió nada, ni siquiera aparece el número 9 en sus hojas de respuestas, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal.

Estudiante 4.

En esta pregunta 9 el Estudiante 4 no respondió nada, ni siquiera aparece el número 9 en sus hojas de respuestas, y con esto pues no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación lineal.

Estudiante 5.

En esta pregunta 9 el Estudiante 5 no respondió nada, ni siquiera aparece en sus hojas de respuestas el número de esta pregunta, así que no se puede dar evidencia de si tiene o no una concepción proceso de transformación.

Estudiante 6.

En este caso el Estudiante 6 no da mucho argumento o evidencia del proceso que siguió para proponer las transformaciones que se le piden, pero las transformaciones que propone si son Lineal es y lo dice pero no lo demuestra cómo se puede ver en la imagen 78.

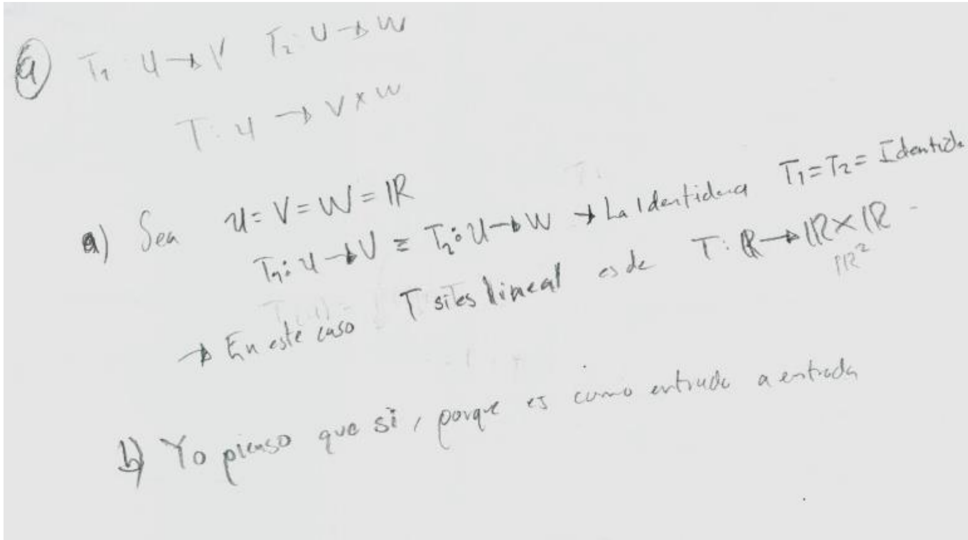
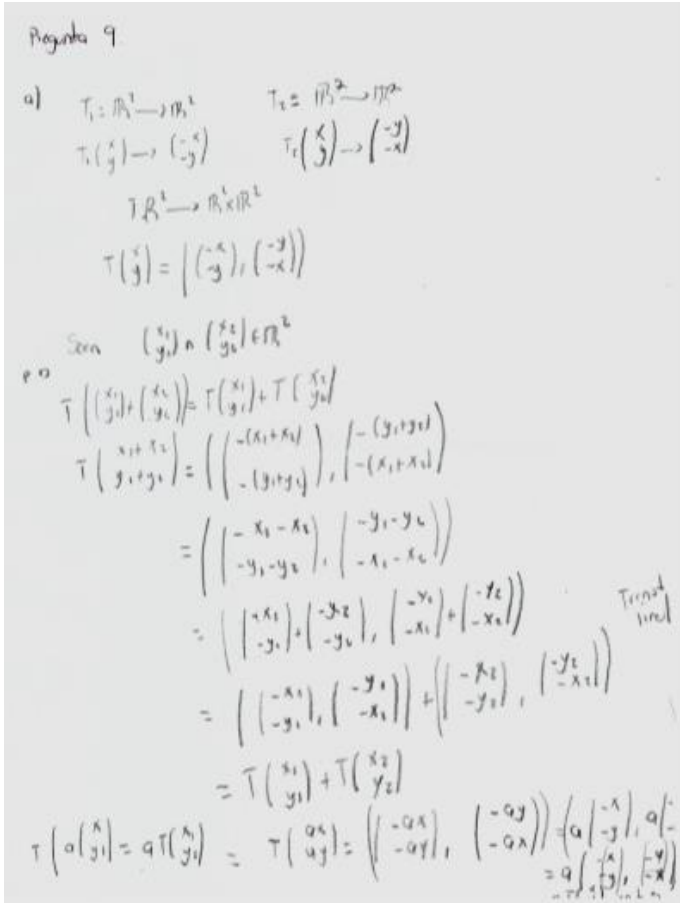


Imagen 78. Respuesta del estudiante 6 a la Situación 9.

Podría ser que sea porque mentalmente hizo los cálculos para determinar si son Lineal es o no, o solo las propuso y dijo que eran Lineal es sin demostrarlo, por esta razón no podemos indagar verdaderamente sobre la concepción de transformación lineal que posee en torno a este ejercicio.

Estudiante 7.

En esta pregunta el Estudiante 7 propone las transformaciones Lineal es T_1 y T_2, y comprueba que $T(u) = (T_1(u), T_2(u))$ es lineal para esos casos particulares, mostrando que tiene una concepción proceso de transformación lineal, como se ve en la imagen 79



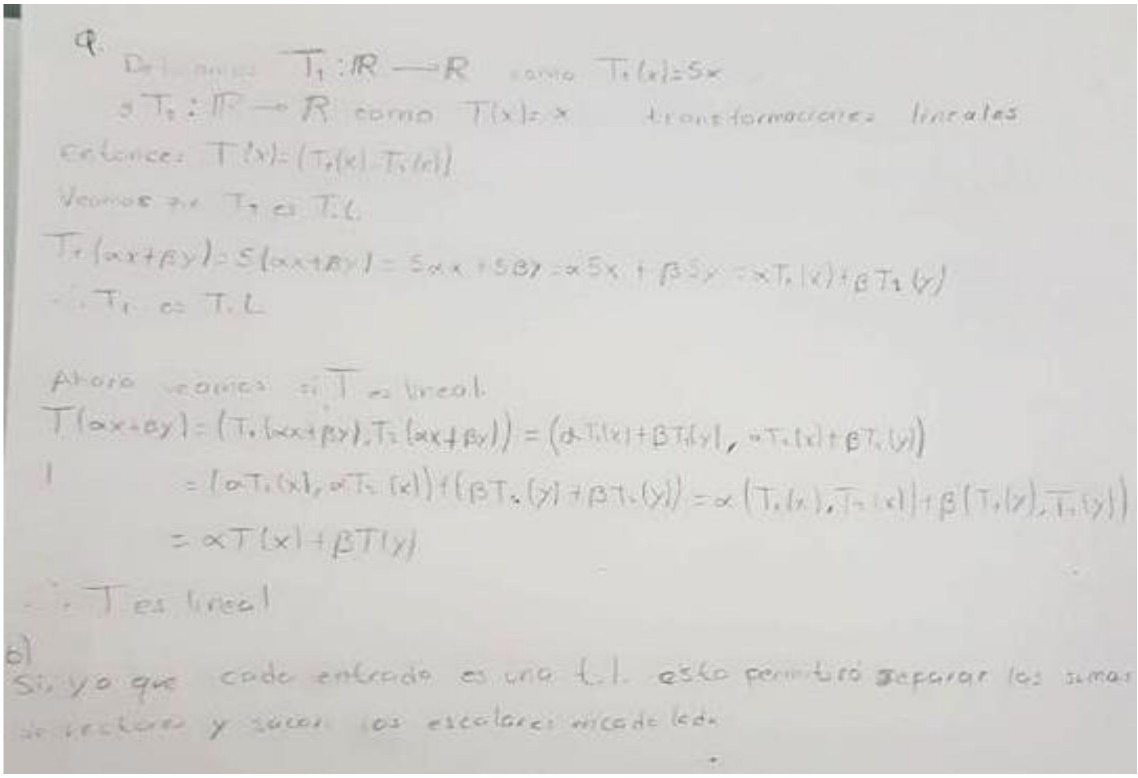
.

Imagen 79. Respuesta del estudiante 7 a la Situación 9.

A pesar de no demostrar que T_1 y T_2 son Lineal es si prueba que T es lineal, mediante la preservación de suma y producto por escalar. No resuelve el inciso b) del problema de manera que no podemos determinar si cuenta con la estructura de objeto.

Estudiante 8.

En esta pregunta el Estudiante 8 propone las transformaciones Lineal es $T_1(x) = 5x$ que va de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y propone $T_2(x) = x$ que va de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y es capaz de comprobar que estas transformaciones son Lineal es, y que $T(x) = (T_1(x), T_2(x))$ es lineal también, esto nos habla de que el Estudiante tiene una concepción mínimo de proceso de transformación lineal, ya que puede demostrar que T es lineal para cualquier caso arbitrario, como se ve en la imagen 80.



a. Definimos $T_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $T_1(x) = 5x$

y $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $T(x) = x$ transformaciones lineales

Entonces $T(x) = (T_1(x), T_2(x))$

Veamos si T_1 es T.L

$T_1(\alpha x + \beta y) = 5(\alpha x + \beta y) = 5\alpha x + 5\beta y = \alpha 5x + \beta 5y = \alpha T_1(x) + \beta T_1(y)$

$\therefore T_1$ es T.L

Ahora veamos si T es lineal.

$T(\alpha x + \beta y) = (T_1(\alpha x + \beta y), T_2(\alpha x + \beta y)) = (\alpha T_1(x) + \beta T_1(y), \alpha T_2(x) + \beta T_2(y))$

$= (\alpha T_1(x), \alpha T_2(x)) + (\beta T_1(y) + \beta T_2(y)) = \alpha(T_1(x), T_2(x)) + \beta(T_1(y), T_2(y))$

$= \alpha T(x) + \beta T(y)$

$\therefore T$ es lineal

b) Si, ya que cada entrada es una t.l. esto permitirá separar las sumas de vectores y sacar los escalares afuera de ledo

Imagen 80. Respuesta del estudiante 8 a la Situación 9.

4.5.1.1 Conclusiones respecto al análisis del cuestionario diagnóstico en torno a las estructuras previas que se requieren para la construcción del tópico Extensión Lineal.

Estructura previa: Objeto Combinación lineal

Estudiante 1.

En conclusión, en la solución correcta de las tres situaciones matemáticas el estudiante ve a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 2.

En conclusión, en la solución correcta de dos situaciones matemáticas a excepción de la solución 2 debida más a que no recordó la definición de subespacio el estudiante considera a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 3.

En conclusión, en la solución correcta de las tres situaciones matemáticas el estudiante 3 ve a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 4.

En conclusión ente estudiante solo resolvió correctamente la primera situación de manera que puede determinar si un vector específico pertenece o no al Span de un conjunto, sin embargo no es capaz de trabajar con vectores dados de manera general, es decir con un vector como objeto, o en cómo se demuestra una igualdad de conjuntos. Esto no nos permitió tener suficiente información para poder determinar la estructura de combinación lineal con la que cuenta. Podría tener una concepción acción o proceso por lo que realizó en la primera actividad, pero para asegurar requerimos analizar con mayor profundidad a través de una entrevista su estructura menta.

Estudiante 5.

Esta estudiante resolvió correctamente dos de las tres situaciones que involucran la estructura de objeto combinación lineal, en la que no lo hizo la razón que dio fue no recordar el concepto de subespacio vectorial, pero las respuestas a las otras dos situaciones evidencian su concepción objeto de combinación lineal al ver esta como elemento de un conjunto, a saber el Span de un conjunto de vectores.

En conclusión, en la solución correcta de las tres situaciones matemáticas el estudiante ve a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 6.

Como conclusión podemos decir que no contamos con suficiente información o evidencia para determinar que concepción del concepto de combinación lineal tiene este estudiante.

Estudiante 7.

En conclusión, en la solución correcta de las tres situaciones matemáticas el estudiante ve a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estudiante 8.

En conclusión, este estudiante solo tuvo un descuido en la solución del sistema en el inciso b) lo que llevo a dar una respuesta incorrecta, sin embargo no influye este descuido de manera que la solución correcta de las tres situaciones matemáticas el estudiante ve a la combinación lineal como elemento del Span(S), lo que evidencia una concepción objeto de combinación lineal.

Estructura previa: Proceso Base

Estudiante 1.

En conclusión, en la solución correcta de las situaciones matemáticas 4, 5 y 6 el estudiante 1 es capaz de determinar si un conjunto es base de un espacio o de un subespacio vectorial, así como de encontrar o proponer una base de un espacio o de un subespacio vectorial ya sea dado de manera implícita o explícita, lo que evidencia una concepción proceso de base.

Estudiante 2.

En conclusión podemos decir que el estudiante 2 resuelve correctamente las situaciones matemáticas 4 y 5, y da evidencia de que sabía cómo resolver la situación matemática 6 aunque no la completó, se puede concluir que el estudiante 2 tiene una concepción proceso de base porque es capaz de determinar si un conjunto es base de un espacio o de un subespacio vectorial, así como de encontrar o proponer una base de un espacio o de un subespacio vectorial.

Estudiante 3.

Aunque el estudiante no se percata en la situación 4 de que los vectores no pertenecen al subespacio vectorial dado y responde de manera afirmativa a la situación mostrando una concepción acción, las situaciones 5 y 6 son respondidas correctamente, evidenciando elementos que van más allá de una concepción acción de base, aunque se requiere estudiar más afondo con la entrevista las estructuras de acción y proceso base del estudiante sobre todo en la respuesta dada en la situación 4, lo consideraremos como un estudiante que está camino a la interiorización.

Estudiante 4.

Como conclusión podemos decir que el estudiante tiene una concepción acción de base ya que la única situación matemática que contestó fue la 4, aunque lo hizo de manera incorrecta es consciente de algunas características que debe cumplir un conjunto de vectores para ser base de un espacio o un subespacio vectorial, por ejemplo que debe ser linealmente independiente.

Estudiante 5.

En conclusión como el estudiante respondió correctamente las situaciones matemáticas 4 y 5 correspondientes al concepto de base. Cabe mencionar que no respondió la situación 6, al no saber la razón, consideramos que la solución correcta de las situaciones 4 y 5 permiten considerarlo si no en una concepción proceso de base al menos está camino a la interiorización pues es evidente que va más alla de realizar simples acciones.

Estudiante 6.

El estudiante da elementos que parecieran van más allá de una concepción acción, al resolver correctamente las situaciones 4 y 5 encontrando una base para el subespacio vectorial dado, ya sea que este esté dado de manera implícita o explicita, sin embargo, en la respuesta a la situación 6 nos damos cuenta que solo cuenta con una concepción acción de base, pues no consideró o verificó que el conjunto fuera linealmente independiente. Pensamos que en los problemas 4 y 5 aplicó el algoritmo para determinar una base, pero en ninguno de las situaciones menciona las condiciones que se deben cumplir para que un conjunto sea base.

Estudiante 7.

En conclusión el estudiante sabe que una base es un conjunto linealmente independiente que genera el espacio vectorial, aunque se puede decir que cuenta con una concepción acción de base al responder en la situación 4 que el conjunto dado si era base, muestra algunos elementos que muestran que va más allá de las acciones, pues es capaz de encontrar una base para determinados subespacios. No podemos asegurar la concepción proceso pues no resolvió la situación 6.

Estudiante 8.

En conclusión el estudiante 8 posee una concepción que llamaremos de acción de base, ya que aunque es consciente de las propiedades que un conjunto debe cumplir para ser base, aunque no de todas, por ejemplo no se da cuenta que los vectores del conjunto a ser base deben pertenecer al subespacio, no es capaz de verificarlas para un subespacio dado.

Estructura previa: Proceso Transformación Lineal

Estudiante 1.

Como conclusión de las respuestas dadas a las situaciones matemáticas 7, 8 y 9 este estudiante es capaz de identificar si una transformación es lineal, conoce las características que se deben cumplir para que una función sea lineal, usa la de preservar combinaciones Lineal es, además la utilizar para resolver problemas que la requieren, puede sin problema proponer transformaciones Lineal es que cumplan con ciertas características dadas, lo que evidencia una concepción proceso de transformación lineal. Cabe mencionar que el problema 7 no lo resuelve correctamente, pero da evidencia de dicha concepción al intentar verificar que la transformación no es lineal si no preserva combinaciones Lineal es.

Estudiante 2.

Dadas las respuestas del estudiante a las situaciones 7,8 y 9, se puede decir que cuenta con una estructura de acción, ya que solo es capaz de verificar la propiedad de preservar combinaciones Lineal es para vectores específicos, como lo hizo en la respuesta dada a la situación 7, sin embargo, en la situación 8 donde se le pide dar dos transformaciones Lineal es da una que es no lineal sin percatarse ni preocuparse de probar la linealidad, la situación 9 no la resolvió, de manera que no se puede tener evidencia de una concepción proceso de transformación lineal.

Estudiante 3.

Las respuestas dadas a las situaciones 7,8 y 9 no permiten determinar la estructura mental que tiene el estudiante respecto al concepto de transformación lineal. Pues prácticamente no respondió nada en estas. Solo en la situación 8 muestra lo que pareciera ser lo único que recuerda de transformaciones Lineal es.

Estudiante 4.

Como conclusión en torno al concepto de transformación lineal no podemos argumentar en que concepción se encuentra el estudiante 4 en torno a este concepto, ya que en ninguna de las situaciones matemáticas referentes a este concepto dio evidencia de su concepción, porque no contesto completamente ninguna de las tres situaciones.

Estudiante 5.

Como conclusión no podemos decir nada acerca de la concepción que posee el estudiante 5 en torno al concepto de transformación lineal, ya que no contestó ninguna de las tres situaciones matemáticas correspondientes a este concepto matemático.

Estudiante 6.

Este estudiante solo intentó resolver la situación 7 y no lo hizo de manera correcta, en sus argumentos no da evidencia de conocer la propiedad de preservar combinaciones Lineal es que tiene una transformación lineal, de manera que no podemos determinar la estructura mental que tiene el estudiante respecto al concepto de transformación lineal.

Estudiante 7.

Como conclusión a las respuestas de las situaciones matemáticas 8 y 9 el estudiante 7 es capaz de identificar si una transformación es lineal, y esta consiente que características cumple una transformación lineal como preservar combinaciones Lineal es y utilizar esta propiedad para resolver problemas, aunque en la situación 8 propone transformaciones no verifica si estas son Lineal es o no, pareciera que tiene una concepción proceso de transformación lineal, pero habría que indagar con mayor profundidad pues en la situación 8 da como lineal a una transformación que no lo es.

Estudiante 8.

Aunque no resuelve las situaciones 7 y 8, podemos evidenciar a través de la situación 8 que el estudiante conoce las propiedades que debe cumplir una transformación para ser lineal, además es capaz de verificarla para casos generales, de manera que parece cuenta con una concepción proceso de transformación lineal, hace falta mediante una entrevista indagar más acerca de sus procesos de razonamiento para saber por qué no dio transformaciones Lineal es en la situación 8 y qué pretendía hacer en la situación 7 de manera que esto nos permitiera afirmar con solidez si cuenta con una concepción proceso o está camino a ella.

Con estas conclusiones podeos obtener la tabla 1 de estructuras previas de los estudiante

Estudiante	Estructura Combinación lineal	Estructura Base	Estructura Transformación lineal
Estudiante 1	Objeto	Proceso	Proceso
Estudiante 2	Camino a la Encapsulación	Camino a la interiorización	Acción
Estudiante 3	Objeto	Camino a la interiorización	NE
Estudiante 4	NE	Acción	NE
Estudiante 5	Objeto	Camino a la interiorización	NE
Estudiante 6	NE	Acción	NE
Estudiante 7	Objeto	Camino a la interiorización	Proceso ∗
Estudiante 8	Objeto	Acción	Proceso *

NE – no existe evidencia para determinar que estructura es la que el alumno posee del concepto.

∗ - hace falta más información para asegurar que el alumno tiene esta estructura mental.

Cabe mencionar que el Estudiante 1, Estudiante 2, Estudiante 7 y Estudiante 8 son a los que se les realizará la entrevista semiestructurada.

4.5.2 Análisis Entrevistas Semiestructuradas

Con base en los resultados del análisis del cuestionario diagnostico presentados a modo de resumen en la tabla de las estructuras previas con la que se concluyó, se seleccionaron 4 estudiantes para ser entrevistados, los cuales etiquetamos como: ED1, ED2, ED7 Y ED8. Cada entrevista se llevó a cabo de manera individual en la sala de juntas de la Unidad Académica de matemáticas, se video y audio grabaron, con una duración de aproximadamente 1 hora 15 minutos. Su utilizaron dos cámaras, la primera enfocada a las hojas de trabajo donde los estudiantes resolvían las situaciones, y la segunda enfocada en el estudiante por si fallaba la primera. Se hizo la transcripción completa de cada una de las entrevistas, para cada estudiante se realizó una tabla de los episodios que permitieron determinar la concepción que mostraba el estudiante en cuanto a las construcciones previas y las relacionadas con el propio tópico de Extensión lineal. Se presentan primero las construcciones previas evidenciadas por los estudiantes y enseguida las construcciones propuestas en la descomposición genética.

4.5.2.1 Construcciones previas

4.5.2.1.1 Proceso Transformación lineal

Cuando se posee una estructura de proceso de transformación lineal, de acuerdo a Roa-Fuentes y Oktaç (2010) el estudiante puede entender a una transformación lineal como una función T definida entre dos espacios vectoriales V y W, la cual preserva combinación lineal para todo par de vectores en V y para todo escalar en el campo F. Lo que significa que el estudiante llevó a cabo la coordinación entre los procesos dados por las propiedades de preservar suma vectorial $T(x+y)=T(x)+T(y)$ $(\forall x, y \in V)$ y producto por escalar $T(cx)=cT(x)(\forall x \in V \; y \; \forall c \in F)$ en su dominio y codominio.

Esta estructura se hace evidente en diversas situaciones que planteamos en la entrevista semiestructurada, por ejemplo en la pregunta 1 que se presenta a continuación, si el estudiante no tiene esta estructura construida en su mente, no podrá resolver la parte c) pues requiere emplear que la transformación que no está dada en forma explícita en la situación preserve combinaciones lineales.

Pregunta 1. *Sean* $v_1=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$ *y* $v_3=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *actúa sobre ellos una transformación lineal* $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que se obtiene* $T(v_1)=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$, $T(v_2)=\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$ *y* $T(v_3)=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$.

a) *¿Es posible encontrar la imagen de* $2v_2 - 3\,v_1 + v_3$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

b) *¿Es posible encontrar la imagen de* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

c) *¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario* $v \in \mathbb{R}^3$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Estudiantes como ED1 evidencian esta estructura, este estudiante no solo resolvió correctamente los tres incisos del problema haciendo uso de esta estructura, sino que además, utiliza sin problema que la transformación por ser lineal preserva combinaciones lineales para cualquier transformación lineal y base dada, esto se muestra en el siguiente extracto de la entrevista así como en la imagen 1

> [42E]: Y nos podrías generalizar ¿cómo para cualquier espacio vectorial y para cualquier transformación?
> [43ED1]: Mmm. ¿Dada una base? ¿Los vectores de base?
> [44E]: Mmjj
> [45ED1]: Sí, si tenemos un vector *w*, una base que sea $v_1, \ldots, v_n$...
> [47ED1]: Entonces sabemos que todo vector de *V*, *w* se puede escribir de una única forma, la suma de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con escalares únicos en esta base.
> [48ED1]: Entonces por la transformación lineal $T(w)$ sería igual a la suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, esto es cuando conocemos una base…

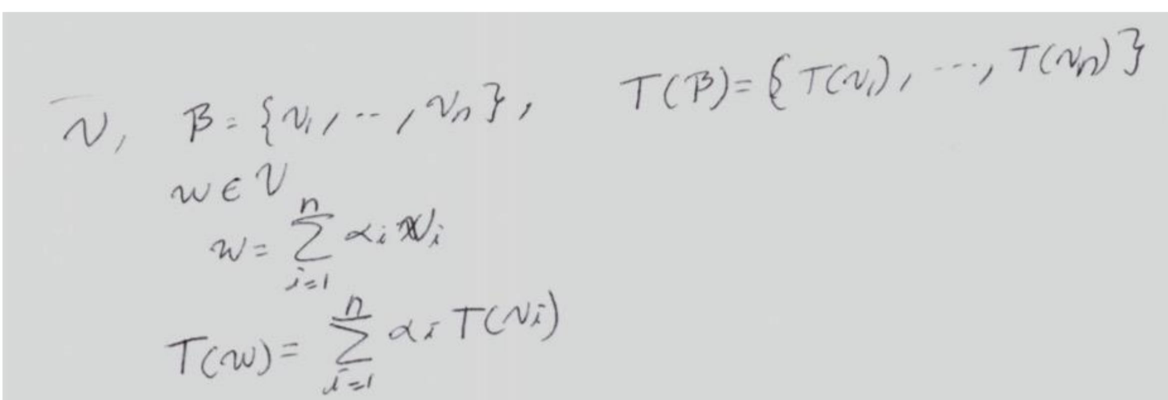


Imagen 1: Correspondiente al problema 1inciso c)

Podemos ratificar la estructura mental de proceso transformación lineal del estudiante ED1 con la pregunta 2 de la entrevista, donde se les hablaba de una transformación no lineal de la cual solo se conocía las imágenes de un conjunto S, es decir, no se daba explicitamente la trasformación, solo cierta información y se preguntaba si era posible determinar la imagen de cualquier vector $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$.

> ***Pregunta 2.*** *Sea* $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}$ *y se conoce una transformación* $F\colon M_{2x2} \to \mathbb{R}$ *que es no lineal de la que se obtiene* $f(s) = \{1,1,1,1\}$.
>
> *a) ¿Es Posible encontrar* $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*
>
> *b) ¿Es posible encontrar* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

El estudiante ED1 nos deja ver en el extracto de la entrevista que si la transformación no es lineal entonces una de las dos propiedades la de sacar escalares o la de ser homomeofismo (distribuir suma) no se cumplen evidenciando que ha logrado la coordinación entre los procesos dados por las propiedades de linealidad. Además, es importante mencionar que es consiente del cuantificador ∀ que acompaña a dichas propiedades y el no cumplimiento de ellas implica proporcionar un caso particular para el cuál no se satisfaga alguna de las propiedades negando dicho cuantificador, de manera que nos permite asegurar que cuenta con los procesos dados por las propiedades de linealidad. A continuación se muestra el extracto de la entrevista que respalda lo mencionado

> [52E]: ¿Qué piensas?
> [53ED1]: Bueno pues las propiedades que no es lineal, obviamente le quita propiedades a la función.
> [54ED1]: En lugar de saber que propiedades se cumplen, sabemos que hay algunas propiedades que no se cumplen
> [55E]: Mmjj
> [56ED1]: Que son las de la definición de transformación lineal, y sabemos que al menos una no se cumple
> [57E]: Mmjj
> [58ED1]: mmm… pues esto es lo que sabemos de la función.
> [59E]: Y también tienes las imágenes de la función en este conjunto, en el conjunto S.
> [60ED1]: Sii…mmm (se queda pensando un momento ED1)
> [61E]: ¿Qué piensas?
> [62ED1]: No se me ocurre ahorita nada.
> [63E]: Si quisieras hacer lo mismo que hiciste aquí en el problema 1, ¿Cuál sería la dificultad?

> [64ED1]: La dificultad es que no, o sea, creo que este conjunto es linealmente independiente (señala al conjunto S).
> [65E]: Mmjj
> [66ED1]: Así que este (señala vector *v*) se puede escribir como una combinación lineal de estos (señala a los elementos de S).
> [67ED1]: Mmm… pero el problema es que, no, no, las propiedades de eso de que saca escalares y de que es homeomorfismo, de la a) no se cumple, pero no significa que no se cumple para todo, significa que exista uno para el cual no se cumple, y pues que solo sea un vector con solo una de las propiedades.

Para lograr un análisis más profundo de las estructuras mentales de los estudiantes, se les preguntó si podrían proporcionar una transformación no lineal cuyas imágenes de los vectores del conjunto *S* coincidieran con los dados. Tres de los cuatro estudiantes no pudieron dar una transformación no lineal que cumpliera con las condiciones dadas por el problema. Solo el estuante ED1 fue capaz de encontrar no solo una sino dos transformaciones y probar que no eran lineales, pero que si cumplían las condiciones dadas, como se muestra en el siguiente extracto de entrevista y en las imágenes 2 y 3

> [69ED1]: Porque incluso la función podría estar definida como una transformación lineal en todo el espacio excepto en un vector, que en un vector se haga otra cosa.
> [70E]: Mmmjj
> [71ED1]: Y pues ahí sí tengo una dificultad, pero no sé cómo explicarlo realmente.
> [72E]: Mmmjj, y este, ¿Podrías cómo encontrar una función que cumpliera esas condiciones?
> [73ED1]: mmm… creo que podría ser el máximo de las entradas, donde el valor máximo de las entradas como el valor de ℝ.
> [74E]: Si quieres escribirlo a que le llamas máximo de las entradas.
> (ED1 Escribe la función *f*)

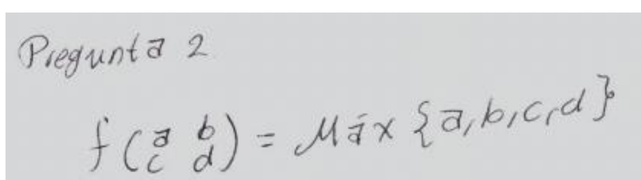


Imagen 2: Correspondiente al problema 2.

> [75ED1]: No es lineal porque

(Aplica la propiedad de homomorfismo para vectores en particular $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, pero $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq f\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$).

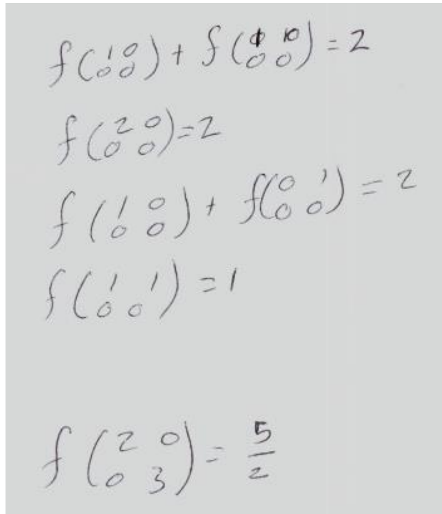


Imagen 3: Correspondiente al problema 2.

[76E]: ¿Y esa sería la única que podría satisfacer esas condiciones?, porque para esa función *f* aplicada a $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ te quedaría 3 verdad.
[77E]: ¿Esa sería la única que podría funcionar o habría más? ¿Podría ocurrir con otra?
[78ED1]: Otra, mmm… Por ejemplo otra podría ser el promedio de los…
[79ED1]: El promedio de las entradas no cero, a no, al menos que sea con valor absoluto
[80E]: Mmjj, sí.
[81ED1]: Bueno si tenemos el promedio de las entradas no cero, con valor absoluto, y pasa lo mismo, de hecho estas dos mismas funciones como contraejemplo.
[82ED1]: Aquí el promedio (señala $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$) es 1, y el promedio (señala $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$) es 1, y la suma seria 2.
[83ED1]: Y el promedio de (señala $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$) es 1
[84ED1]: Y en este caso $f\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ seria 5/2. Y entonces ya hay dos transformaciones lineales.
[86ED1]: No, transformaciones no lineales, que cumplen esto, y que con este me da distintos valores.

ED1 no solo fue capaz de identificar o de dar una transformación no lineal que cumpliera con ciertas condiciones, sino que además identificó que no exista una única transformación no lineal que satisficiera las condiciones dadas. Como se mencionó anteriormente, los demás estudiantes no fueron capaces de proponer una transformación no lineal que cumpliera con estas condiciones, por ejemplo el ED7 aunque se da cuenta de porque no puede utilizar la misma estrategia de solución que usó en el problema 1, no es capaz de encontrar una transformación no lineal que cumpla las condiciones dadas, el siguiente extracto de la entrevista evidencia lo mencionado.

> [ED7]: Yo pensaría en una estrategia similar a la anterior, pero como me dices que no es lineal no necesariamente va a sacar la suma.
> [E]: Entonces creo que no es posible.
> [ED7]: Yo intentaría hacer lo mismo que acá, así verla como una combinación lineal de los elementos de S, y entonces ya nada más aplicar la función a ese elemento y como aquí me dan las respectivas imágenes pues entonces decir que la imagen de ese elemento sería la imagen de la combinación.
> [ED7]: Pero como no necesariamente sé que saca sumas o saca escalares no puedo garantizar el encontrar esa imagen.
> [E]: Y no podrías como pensar en otra estrategia que no fuera la que usaste en el ejercicio 1, ¿no se te ocurre otra forma? ED7 piensa un momento
> [ED7]: No.
> [E]: Se te podría ocurrir así como por ensayo y error, encontrar una transformación no lineal que cumpla con esas condiciones.
> ED7 se queda pensando.
> [ED7]: Pues trataría de ver como asigna cada elemento, por ejemplo aquí dice que F de ese elemento da 1 entonces trataría de hacer algo así.

Se puede ver que ED7 tiene claro que es una transformación no lineal, pero cuando tiene que determinar una transformación no lineal que cumpla con ciertas propiedades, a pesar de que tiene una idea de cómo hacerlo no logra proponerla. La diferencia entre los dos estudiantes se puede interpretar como que ambos cuentan con la estructura proceso de transformación lineal pero el primero tiene ya una estructura de un nivel cognitivo más complejo que es la de objeto mientras que el segundo aún no ha encapsulado el proceso.

4.5.2.1.2 Objeto Combinación lineal

Cuando se posee una concepción objeto de Combinación lineal el estudiante no solo es capaz de darse cuenta de que un vector dado de un espacio vectorial puede expresarse como combinación lineal de otros vectores de dicho espacio, sino que además pueden actuar sobre él otras acciones y/o procesos, por ejemplo, aplicar el proceso de transformación lineal a un vector que está expresado como una combinación lineal de otros vectores.

Los estudiantes dieron evidencia de contar con el proceso inverso de combinación lineal, el cual consiste en comprobar si existen escalares que puedan expresar a un vector dado como suma de vectores multiplicados por dichos escalares. Para dar respuesta a la Pregunta 1 de la entrevista que se muestra a continuación, el estudiante requiere hacer uso de esta construcción mental, en general todos los estudiantes aplicaron dicho proceso inverso.

> ***Pregunta 1***. *Sean* $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *actúa sobre ellos una transformación lineal* $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que se obtiene* $T(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ *y* $T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.
>
> ***a)*** *¿Es posible encontrar la imagen de* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si, encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*
>
> ***b)*** *¿Es posible encontrar la imagen de* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*
>
> ***c)*** *¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario* $v \in \mathbb{R}^3$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Por ejemplo, el estudiante ED2 da evidencia de contar con la estructura del proceso inverso de combinación lineal al ser consiente que expresar un vector cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de otros vectores v_1, v_2 y v_3 dados en dicho espacio, implica encontrar los escalares, usa el proceso de solución de un sistema de ecuaciones y reconoce a los escalares como las variables de dicho sistema, a continuación mostramos el extracto de la entre vista y la imagen 4 de las hojas de respuestas del estudiante ED2 donde se muestra lo descrito anteriormente.

> [5ED1]: y luego el b), el inciso b).
> [6ED1]: mmm…Bueno voy a buscar una combinación lineal de los tres vectores, de estos tres (señala $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) que me dé v, o sea, cuando busco la combinación lineal busco solo los escalares.

(Hace cuentas para encontrar el valor de los escalares)

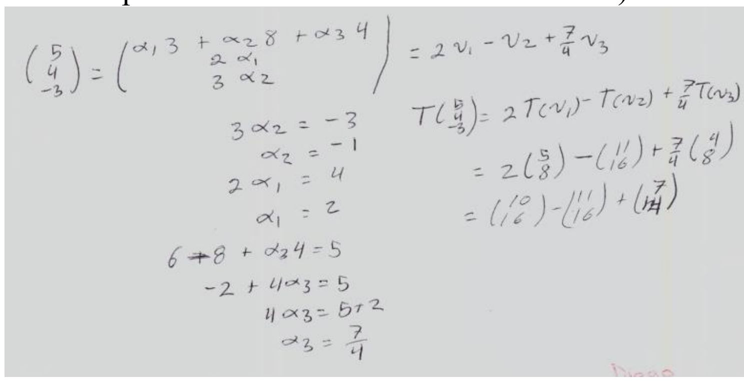


Imagen 4: Correspondiente al problema 1b)

[7E]: ¿Cómo me podría asegurar la existencia de esos escalares?
[8ED1]: Ah. Bueno así rápido, puedo ver que eso es linealmente independiente, por ejemplo si
(Escribe $\alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=0$)
[9ED1]: Esteee, en el último elemento, sería $\alpha_2\ (3)=0$, $\alpha_2=0$
[10ED1]: Y para el segundo tengo $\alpha_1\ (2)=0$ y aquí $\alpha_1=\ 0$
[11ED1]: Y luego en la parte de arriba es $\alpha_1\,(3)+\alpha_2\,(8)+\alpha_3(4)=0$, pero como $\alpha_1\ y\ \alpha_2$ es cero entonces solo tengo $\alpha_3(4)=0$ y como 4 no es cero entonces solo tengo $\alpha_3=0$.
[12ED1]: Entonces así estos tres vectores (señala $v_1=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$ y $v_3=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$) son linealmente independientes y como el espacio en el que estamos trabajando $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3 y encontramos tres vectores linealmente independientes.

La concepción Objeto de Combinación lineal resultado de la encapsulación del proceso de combinación lineal, se puede hacer evidente cuando el estudiante es capaz de aplicar una acción o proceso al objeto, ya que esto implica ver a dicha combinación lineal como un solo vector al cual el proceso se le puede aplicar, por ejemplo en la respuesta al inciso b) de la situación anterior. el estudiante ED1 aplica el proceso de transformación lineal sobre el objeto combinación lineal, una vez que expresa a un vector como combinación lineal de otros vectores, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista y la imagen 5 y 6.

[21ED1]: Entonces, bueno haciendo esto tengo que…
(Realiza cuenta para despejar y encontrar los valores de α_1, α_2 y α_3)

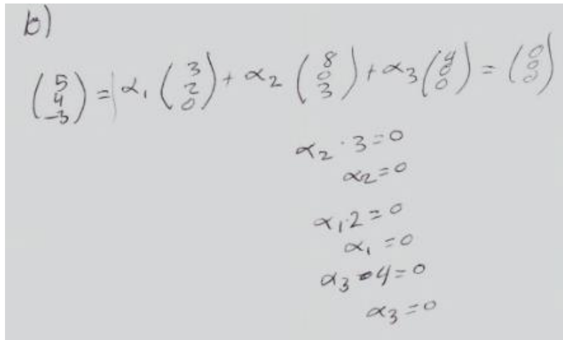


Imagen 5. Correspondiente al problema 1 inciso b)

[25ED1]: Entonces ya tengo que el vector $\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ es $2\,por\;v_1 - v_2$ más 7/4 por v_3, entonces eso es lo único que hice.

[26E]: Mmmjj

[27ED1]: Tengo que $T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ es igual a 2 por $T(v_1) - T(v_2) + \frac{7}{4}$ de $T(v_3)$.

(Realiza la sustitución de los valores de $T(v_1), T(v_2)\;y\;T(v_3)$ en la expresión anterior y obtiene la imagen de $T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$.)

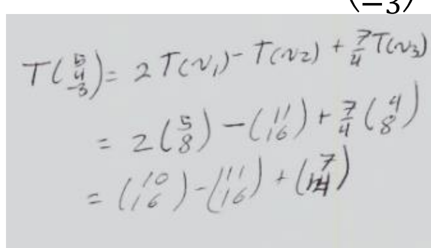


Imagen 6. Correspondiente al problema 1 inciso b)

[30E]: Si quieres hasta ahí lo dejamos.
[31E]: Entonces estas usando que la transformación es lineal?
[32ED1]:Mmmjj.

Resaltemos que los otros tres estudiantes ED2, ED7 y ED8 también fueron capaces de concebir una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$ como un vector y aplicar un proceso que fue el de transformación lineal.

La ratificación de que los alumnos cuentan con esta concepción objeto de combinación lineal se da cuando son capaces de ver un vector arbitrario de un espacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base de este mismo espacio y realizar acciones o procesos sobre esta combinación lineal, por ejemplo el estudiante ED1 es capaz de explicar y escribir matemáticamente, cómo se aplica el proceso de transformación lineal sobre un vector en general que puede ser expresado como combinación lineal de otros vectores que conforman una base del espacio vectorial dominio de la transformación lineal, todo esto de manera general, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista del estudiante ED1.

> [42E]: Y nos podrías generalizar, ¿cómo para cual espacio vectorial y para cualquier transformación?
> [43ED1]: Mmm. ¿Dada una base? ¿los vectores de base?
> [44E]: Mmjj
> [45ED1]: Sii, si tenemos en un vector v, una base que sea $v_1, \ldots, v_n$ y si sabemos que $T(\beta)$ o sea sabemos los valores de nuestra transformación en cada $T(v_1), \ldots, T(v_n)$.
> [46E]: Y que tu transformación T sea lineal y valla de un espacio vectorial V en uno W
> [47ED1]: Entonces sabemos que todo vector de V, w se puede escribir de una única forma, la suma de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con escalares únicos en esta base.
> [48ED1]: Entonces por la transformación lineal T(w) sería igual a la suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, esto es cuando conocemos una base y los valores de la transformación en esa base.

4.5.2.1.3 Proceso Base

Que el estudiante posea una concepción proceso de Base le permite verificar si los vectores de un conjunto dado son linealmente independientes y si dichos vectores son los indispensables para generar a todos los elementos del espacio vectorial dado. Además, es capaz de determinar si un conjunto de vectores dados es o no una base de un espacio o subespacio vectorial. Estudiantes como ED2 al contestar el inciso c) de la pregunta 1

Pregunta 1. *Sean* $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *actúa sobre ellos una transformación lineal* $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que se obtiene* $T(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ *y* $T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) *¿Es posible encontrar la imagen de* $2v_2 - 3\,v_1 + v_3$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

b) *¿Es posible encontrar la imagen de* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

c) *¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario* $v \in \mathbb{R}^3$*? Si tu respuesta es si, encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Muestran esta concepción al considerar que un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores v_1 , v_2 y v_3, si estos forman una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Mencionando además que para que un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ sea base se requiere unicamente que estos sean linealmente independientes y viceversa, que si son una base generan al espacio vectorial, por lo que cualquier vector del espacio vectorial se puede expresar como combinación lineal de los vectores dados. El siguiente extracto de la entrevista junto con la imagen 7 nos da evidencia de lo que se acaba de mencionar.

> [40E]: ¿Y qué condiciones deberían de cumplir los tres vectores para que aseguraras que ese vector si se puede escribir como combinación?
> [41ED8]: Pues que sean linealmente independientes.
> [42E]: ¿Qué sean linealmente independientes? ¿Para qué?
> [43ED8]: Para que estos tres sean una base y como es una base pues ya genera $\mathbb{R}^3$ y pues ya cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de estos tres.
> [44ED8]: Voy a hacer las cuentitas. (escribe a *v* como combinación lineal de v_1 , v_2 y v_3)

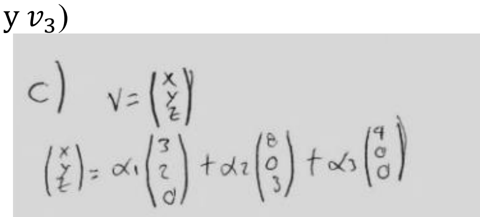


Imagen 7. Correspondiente al problema 1 inciso c)

Que el estudiante pueda determinar si los vectores son base sin necesidad de recurrir a la definición y en su lugar utilice teoremas también nos da evidencia de que tiene control sobre la acción de base, ya que no requiere realizar paso a paso la acción y muestra control sobre ellos, lo que le permite saltárselos o no requerir realizarlos, esto se muestra en el siguiente extracto de la entrevista, donde no necesita realizar los pasos para determinar si el conjunto dado es linealmente independiente mostrando así que cuenta con una concepción proceso de este concepto y además utiliza un teorema que le permite asegurar que el conjunto dado es base.

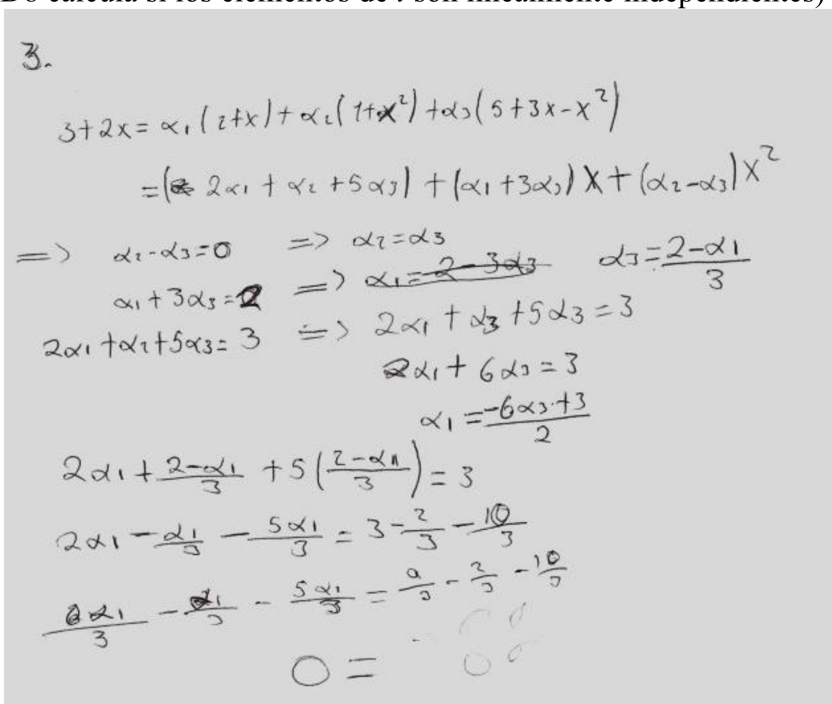
[45E]: También hay algunos criterios rápidos para decidir si es base o no sin hacer cuentas, podrías aplicar un criterio rápido sin hacer las cuentas de encontrar los $\alpha's$ viendo como son v_1, v_2 y v_3.
[46ED8]: Pues que si no son linealmente independientes descartamos que es base.
[47E]: ¿Si recuerdas criterios rápidos para ver si son independientes?
[48ED8]: Pues si uno no se puede escribir como combinación lineal de los otros dos y así, por ejemplo aquí me podría dar cuenta de que este es linealmente independiente a estos dos porque aquí tenemos un cero y aquí en este , y aquí en eso no y pues igual.
[49E]: ¿Y que provocan esos ceros?
[50E]: ¿Porque están relacionados con que sea linealmente independiente?
[51ED8]: Pues que por ejemplo si aquí tienes un cero entonces tienen que multiplicar a este y a este por cero entonces ya todo esto se haría cero, y pues te quedaría que *3=4* y pues no.
[52E]: Entonces, eso lo hiciste con el cero de aquí abajo verdad.
[53ED8]: Si en este caso aplicaría para este y en este pues igual para este.
[54E]: Viendo esas relaciones, ¿necesitas hacer esas cuentas que ibas a hacer?
[55ED8]: No, es lo que iba a decir que se hace como por mecánica.
[56ED8]: Eehh pues iba a hacer lo mismo que aquí.
[57E]: ¿Tú puedes asegurar esa igualdad que escribiste aquí sin hacer nada de cuentas?
[58ED8]: Si porque como son linealmente independientes, y estos tres son tres que es igual a la dimensión de $\mathbb{R}^3$, entonces ya por un teorema si este conjunto que tiene a v_1, v_2 y v_3 tienen la misma dimensión y los vectores son linealmente independiente entonces ya es base y como ya es base genera a todo $\mathbb{R}^3$ y podemos escribir a cualquier vector como combinación lineal de los tres vectores.

La estructura de proceso base se puede ratificar en el estudiante ED8 a través de la pregunta 3 inciso a) la cual se muestra a continuación:

Pregunta 3. *Sea* $l = \{2 + x,\ 1 + x^2,\ 5 + 3x - x^2\} \in P_2(x)$ *y sea* $T: P_2(x) \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(l) = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *.¿Es Posible encontrar* $T(3 + 2x)$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Donde este estudiante al no poder expresar el vector $3 + 2x$ como combinación lineal del conjunto l, como se observa en la imagen 8, quiere indagar si l es base o no de $P_2(x)$, ya que considera que la razón por la que no es posible determinar los coeficientes de la combinación lineal es porque los vectores dados no son base, y muy en particular quiere ver si el conjunto de vectores es linealmente independiente o no. El siguiente extracto de la entrevista muestra lo que se acaba de mencionar.

[91E]: Muy bien si quieres pasamos a la pregunta 3.
[92ED8]: Pues sí.
[93E]: ¿Si es posible?
[94ED8]: Es que estoy viendo si son linealmente independientes.
[95E]: Si si fuera, ¿Qué pasaría, o sea para qué quieres que sean linealmente independientes?
[96ED8]: Para ver si es base. Para ver si generan los polinomios de grado menor o igual a 2.
(ED8 calcula si los elementos de *l* son linealmente independientes)



3.

$$3+2x=\alpha_1(2+x)+\alpha_2(1+x^2)+\alpha_3(5+3x-x^2)$$
$$=(2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3)+(\alpha_1+3\alpha_3)x+(\alpha_2-\alpha_3)x^2$$
$$\Rightarrow \alpha_2-\alpha_3=0 \quad \Rightarrow \alpha_2=\alpha_3 \qquad \alpha_3=\frac{2-\alpha_1}{3}$$
$$\alpha_1+3\alpha_3=2 \quad \Rightarrow \cancel{\alpha_1=2-3\alpha_3}$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=3 \quad \Rightarrow 2\alpha_1+\alpha_3+5\alpha_3=3$$
$$2\alpha_1+6\alpha_3=3$$
$$\alpha_1=\frac{-6\alpha_3+3}{2}$$
$$2\alpha_1+\frac{2-\alpha_1}{3}+5\left(\frac{2-\alpha_1}{3}\right)=3$$
$$2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{3}-\frac{5\alpha_1}{3}=3-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}$$
$$\frac{6\alpha_1}{3}-\frac{\alpha_1}{3}-\frac{5\alpha_1}{3}=\frac{9}{3}-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}$$
$$0=$$

Imagen 8. Correspondiente al problema 3 inciso a)

[97ED8]: Creo que los polinomios no son linealmente independientes.
[98ED8]: Es que creo que uno de estos es combinación lineal de los otros dos.
[99E]: Es imposible que si tienes un conjunto de tres polinomios y esos son dependientes que uno es combinación de los otros, no podría existir otro conjunto que no sean esos tres pero que tengan esa misma propiedad, pero que el $3+2x$ si sea combinación lineal de aquellos.
[100ED8]: Pues si ese conjunto es base de $P_2(x)$ si…
[101E]: Pero si fueran dependientes.
[102ED8]: A dependientes.
[103ED8]: mmm… mmm.
[104E]: El problema aquí es de que no sea base o si es culpa de que no tenga otra propiedad relacionada con base.

[105ED8]: mmm… o sea, ¿Qué si me falta otra propiedad o cómo?
[106E]: ¿Qué si el problema radica en que no sea base? O alguna otra propiedad relacionada con base pero no precisamente base.

4.5.2.2 Construcciones de la Descomposición Genética

4.5.2.2.1 Acción de Extensión Lineal

Cuando se posee una concepción Acción de Extensión Lineal el estudiante es capaz de calcular la imagen de vectores específicos de una transformación lineal $T: V \to W$ dadas sus imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial V. De acuerdo a nuestra descomposición genéticas los pasos de dicha acción son los siguientes:

Paso 1. Con su concepción proceso de base será consiente y podrá expresar un vector en específico (vectores no arbitrarios) que pertenece al espacio vectorial V, como combinación lineal de los vectores que conforman la base.

Paso 2. Después aplicará el proceso de transformación lineal T a esta combinación lineal la cual el estudiante la ve cómo un objeto al que se le puede aplicar dicho proceso. Al aplicar el proceso de transformación lineal se dará cuenta que la imagen de este vector en específico que tiene es una combinación lineal de las imágenes de los vectores dados en un principio ya que una transformación lineal preserva combinaciones lineales.

Paso 3. Una vez consiente de lo mencionado al final del paso 2, sustituirá las imágenes dadas de los vectores de la base y realizará las operaciones usando su concepción objeto de vector para finalmente obtener la imagen del vector específico.

La pregunta 1 en los incisos a) y b) tiene la intención de mostrar esta concepción al darse combinaciones lineales y vectores específicos a los cuales se les debe calcular su imagen.

Pregunta 1. *Sean* $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *actúa sobre ellos una Transformación lineal* T *tal que se obtiene* $T(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ *y* $T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) *¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario* $v \in \mathbb{R}^3$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

b) *¿Es posible encontrar la imagen de* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Estudiantes como ED8 evidenciaron esta estructura como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista y las imágenes 9 y 10, donde aplica el proceso de transformación lineal T a la combinación lineal que se le dio y fue capaz de calcular la imagen de está usando las imágenes de los vectores de la base bajo la transformación lineal dada.

> [1E]: Vamos con la pregunta 1.
> [2ED8]: Primero queremos encontrar T de esto (señalando $2v_2 - 3v_1 + v_3$), lo voy a ir escribiendo ¿está bien?
> [3E]: Sí. (ED8 encuentra la imagen de $2v_2 - 3v_1 + v_3$)

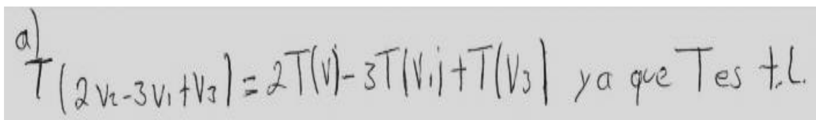


Imagen 9. Correspondiente al ejercicio 1a)

> [4E]: ¿Por qué es posible hacer este paso? (señalando $2\,T(v_2) - 3\,T(v_1) + T(v_3)$)
> [5ED8]: Ya que T es lineal, y pues esto es igual a… (ED8 sustituye los valores de las imágenes v_1, v_2 y v_3)

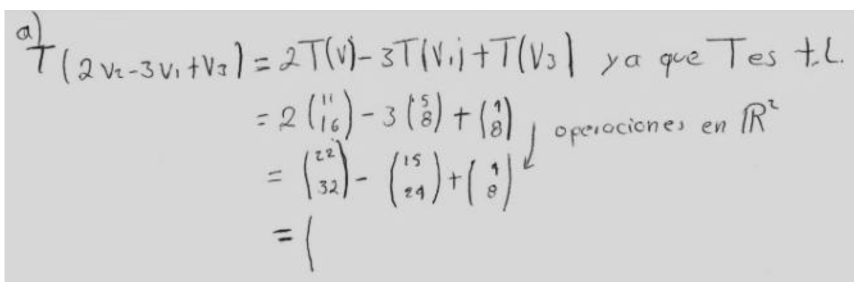


Imagen 10. Correspondiente al ejercicio 1a)

A diferencia del inciso a) donde se pide calcular la imagen de una combinación lineal, el inciso b) pide calcular la imagen de un vector específico, lo cual el estudiante ED1 obtiene sin dificultad, este estudiante muestra el paso 1 de la acción de extensión lineal al ser capaz de expresar al vector $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3. Después da evidencia de usar el paso 2 de la acción al aplicar el proceso de transformación lineal a la combinación lineal obtenida, seguido del paso 3 donde hace la sustitución de las imágenes de los vectores de la base bajo la transformación lineal, evidenciando así que cuenta con una concepción acción de extensión lineal. El siguiente extracto de entrevista y la imagen 11 respaldan lo mencionado.

> [5ED1]: y luego el b), el inciso b).
> [6ED1]: mmm…Bueno voy a buscar una combinación lineal de los tres vectores, de estos tres (señala $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) que me dé v, o sea, cuando busco la combinación lineal busco solo los escalares.
> (Hace cuentas para encontrar el valor de los escalares)

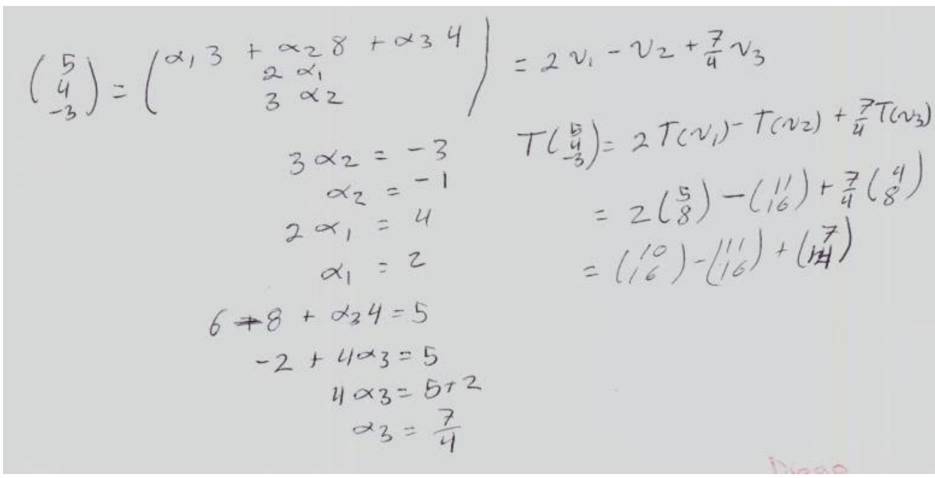


Imagen 11. Correspondiente al ejercicio 1b)

Cabe resaltar que el ED1 no solo fue capaz de encontrar el valor de la imagen de $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ si no que también de darse cuenta que los vectores v_1, v_2 y v_3 son base de $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto cualquier vector de este espacio vectorial puede escribirse como combinación lineal de estos 3 vectores, esto se puede ver el siguiente extracto de entrevista.

> [7E]: ¿Cómo me podría asegurar la existencia de esos escalares?
> [8ED1]: aaa.. Bueno así rápido, puedo ver que eso es linealmente independiente, por ejemplo si
> (Escribe $\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$)
> [9ED1]: Esteee, en el último elemento, seria $\alpha_2\ (3) = 0$, $\alpha_2 = 0$
> [10ED1]: Y para el segundo tengo $\alpha_1\ (2) = 0$ y aquí $\alpha_1 = 0$

[11ED1]: Y luego en l ´parte de arriba es $\alpha_1\,(3) + \alpha_2\,(8) + \alpha_3(4) = 0$, pero como $\alpha_1\ y\ \alpha_2$ es cero entonces solo tengo $\alpha_3(4) = 0$ y como 4 no es cero entonces solo tengo $\alpha_3 = 0$.

[12ED1]: Entonces así estos tres vectores (señala $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) son linealmente independientes y como el espacio en el que estamos trabajando R3 es de dimensión 3 y encontramos tres vectores linealmente independientes.

[13ED1]: entonces ese vector nos funciona como base.
[14E]: A ok
[15ED1]: Y así esos tres vectores pueden generar a cualquier vector.
[16E]: por ser base
[17ED1]: mmjj
[18E]: Entonces el que sea base ¿te asegura la existencia de esos escalares?
[19ED1]: si

Los 8 estudiantes que participaron en la entrevista semiestructurada contestaron correctamente la pregunta 1, con lo cual podemos decir que mostraron una concepción Acción de Extensión Lineal.

4.5.2.2.2 Proceso Extensión Lineal

Para que un estudiante de evidencia de una concepción proceso de Extensión Lineal debe mostrar que ha logrado la coordinación entre los proceso de base y transformación lineal, de acuerdo a nuestra descomposición genética preliminar, esto se logra cuando el proceso base se aplica a un objeto vector $v \in V$ que permite expresar dicho vector como combinación lineal de los vectores de la base dada, esta combinación lineal es encapsulada en un objeto, con lo cual el alumno no solo es consciente de que la combinación lineal es un vector perteneciente al espacio vectorial *V*, sino además que a cualquier combinación lineal se le pueden realizar acciones o procesos. Entonces puede aplicar el proceso de transformación lineal al objeto Combinación lineal, este proceso le permitirá al alumno usando la preservación de combinaciones lineales darse cuenta que para obtener la imagen del objeto combinación lineal requiere solamente las imágenes de los vectores de la base del espacio vectorial *V*. Así mismo podrá sustituir dichos vectores y realizar las operaciones correspondientes mediante el uso de su concepción objeto de vector. Siendo consciente de que puede obtener la imagen de cualquier vector solo conociendo las imágenes de los vectores de la base bajo dicha transformación lineal, es decir, que la transformación queda definida por las imágenes de los vectores de una base bajo la transformación lineal dada.

Para evidenciar esta estructura en los estudiantes se propusieron las 3 primeras preguntas de la entrevista, en la primer pregunta inciso c) se preguntó si se podía obtener la imagen de cualquier vector dada una base y sus imágenes bajo una transformación lineal específica. Estudiantes como ED1 resolvieron correctamente la situación al escribir un vector arbitrario w de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3, una vez que verificó que estos formaban una base para $\mathbb{R}^3$, después aplicó el proceso de transformación lineal a la combinación lineal encontrada, y calculó la imagen de la combinación a través de las propiedades que cumple una transformación lineal. Además, fue capaz de generalizar para cualquier transformación lineal y base dada, lo que muestra que lleva a cabo la coordinación como se propuso en la descomposición genética. El siguiente extracto de entrevista muestra lo que se acaba de mencionar

> [36ED1]: Inciso c), para cualquier vector.
> [37ED1]: Mmm. bueno como le hice haya, de que este v_1, v_2 y v_3 es un base.
> [38E]: Mmmjj
> [39ED1]: Entonces cualquier vector *w* se puede escribir como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ y esto es de manera única.
> [40E]: Mmmjj
> [41ED1]: Entonces por las propiedades de transformación lineal, tengo que *T(w)* es igual a $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3)$ eso sería el valor de cada, de cualquier vector en R^3.
> [42E]: Y nos podrías generalizar, ¿cómo para cual espacio vectorial y para cualquier transformación?
> [43ED1]: Mmm. ¿Dada una base?, ¿los vectores de base?
> [44E]: Mmjj
> [45ED1]: Sii, si tenemos en un vector *v*, una base que sea $v_1, \dots, v_n$ y si sabemos que $T(\beta)$ o sea sabemos los valores de nuestra transformación en cada $T(v_1), \dots, T(v_n)$.
> [46E]: Y que tu transformación *T* sea lineal y valla de un espacio vectorial V en uno W
> [47ED1]: Entonces sabemos que todo vector de V, w se puede escribir de una única forma, la suma de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con escalares únicos en esta base.
> [48ED1]: Entonces por la transformación lineal *T(w)* sería igual a la suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, esto es cuando conocemos una base y los valores de la transformación en esa base.

Las preguntas 2 y 3 de la entrevista nos permiten ratificar la estructura proceso de extensión lineal en un estudiante que las contesta correctamente, pues es capaz de reflexionar sobre una situación donde no se cumple uno de los procesos a coordinar. Por ejemplo, en la pregunta 2 donde se le menciona al estudiante que las imágenes de los vectores del conjunto *S* son de una transformación no lineal y se les pregunta si pueden calcular la imagen de un vector es específico en el inciso a) y de un vector en general en el inciso b)

Pregunta 2. *Sea* $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}$ *y se conoce una transformación* $f\colon M_{2x2} \to \mathbb{R}$ *que es no lineal de la que se obtiene* $f(s) = \{1,1,1,1\}$.

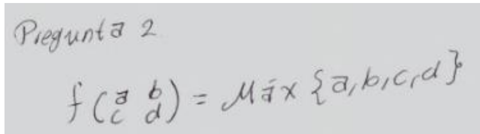
a) *¿Es Posible encontrar* $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*
b) *}¿Es Posible encontrar* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

El estudiante ED7, identifica sin problema que no se puede distribuir suma ni sacar escalares porque la transformación dada no es lineal de manera que no garantiza el poder obtener la imagen de un vector específico o general, es decir, sí considera el poder expresar el vector dado como combinación lineal pero al momento de aplicar el proceso de transformación lineal al objeto combinación lineal menciona que como la transformación no es lineal no necesariamente saca suma o saca escalares por lo que no puede garantizar el encontrar la imagen pedida. Lo mencionado anteriormente se muestra en el siguiente extracto de entrevista.

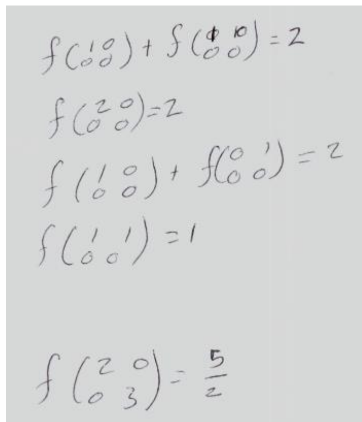
> [6ED7]: Yo pensaría en una estrategia similar a la anterior (se refiere al probema 1), pero como me dicen que no es lineal no necesariamente va a sacar la suma.
> [7E]: Entonces creo que no es posible.
> [8ED7]: Yo intentaría hacer lo mismo que acá, así verla como una combinación lineal de los elementos de *S*, y entonces ya nada más aplicar la función a ese elemento y como aquí me dan las respectivas imágenes pues entonces decir que la imagen de ese elemento sería la imagen de la combinación.
> [9ED7]: Pero como no necesariamente sé que saca sumas o saca escalares no puedo garantizar el encontrar esa imagen.
> [10E]: Y no podrías como pensar en otra estrategia que no fuera la que usaste en el ejercicio 1 ¿no se te ocurre otra forma? (El estudiante se queda pensando por un momento)
> [11ED7]: No.

Es importante mencionar que los estudiantes para enfrentarse a la pregunta 2 hacían mención de querer seguir la misma estrategia utilizada en la pregunta 1, cuando se daban cuenta de no podían utilizarla por la no linealidad de la transformación, se les cuestionó si conocían otra manera de resolver el problema, ninguno de los estudiantes pudo responder, solo uno de ellos ED1 pensó hacerlo buscando una transformación que cumpliera las condiciones dadas, después de pensar un poco, pudo dar no solo una sino dos transformaciones no lineales, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista

[72E]: Mmmjj, y este, ¿Podrías cómo encontrar una función que cumpliera esas condiciones?
[73ED1]: mmm… creo que podría ser el máximo de las entradas, donde el valor máximo de las entradas como el valor de R.
[74E]: Si quieres escribirlo a que le llamas máximo de las entradas.



[75ED1]: No es lineal porque
(Aplica la propiedad de homomorfismo para vectores en particular $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).



[76E]: ¿Y esa sería la única que podría satisfacer esas condiciones?, porque para esa función f aplicada a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ te quedaría 3 verdad.
[77E]: ¿Esa sería la única que podría funcionar o habría más? ¿Podría ocurrir con otra?
[78ED1]: Otra, mmm… Por ejemplo otra podría ser el promedio de los…
[79ED1]: El promedio de las entradas no cero, a no, al menos que sea con valor absoluto
[80E]: Mmjj, sí.
[81ED1]: Bueno si tenemos el promedio de las entradas no cero, con valor absoluto, y pasa lo mismo, de hecho estas dos mismas funciones como contraejemplo.
[82ED1]: Aquí el promedio (señala $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) es 1, y el promedio (señala $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) es 1, y la suma seria 2.
[83ED1]: Y el promedio de (señala $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) es 1
[84ED1]: Y en este caso $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ seria 5/2. Y entonces ya hay dos transformaciones lineales.
[85E]: ¿lineales?

> [86ED1]: No, transformaciones no lineales, que cumplen esto, y que con este me da distintos valores.
> [87ED1]: Bueno la respuesta al inciso b) sería, como en un caso específico no se puede, pues en general tampoco.

De igual manera, la pregunta 3 que se muestra a continuación tiene la intención de ratificar la coordinación entre los procesos de base y transformación lineal. Pero a diferencia de la pregunta 2 donde se da una transformación no lineal en lugar de una lineal, el subconjunto l del espacio vectorial $P_2(x)$ que se da no es base, esto se hace con la intención de ver si el estudiante es conciente de la importancia y cómo actúa el proceso de base en la coordinación con el proceso de transformación lineal para obtener el nuevo proceso de extensión lineal, si cuenta con esta podrá identificar si se puede o no determinar la imagen de un vector específico y argumentar su respuesta.

> ***Pregunta 3.*** *Sea* $l = \{2 + x,\ 1 + x^2,\ 5 + 3x - x^2\} \in P_2(x)$ *y sea una transformación lineal* $T: P_2(x) \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(l) = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *¿Es posible encontrar* $T(3 + 2x)$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Estudiantes como ED1 intenta seguir el procedimiento utilizado en la pregunta 1 y usa su concepción proceso de base para tratar de expresar el vector $3 + 2x$ como combinación lineal del conjunto l, pero al no poder hacerlo afirma que no puede obtener la imagen del vector porque este no se puede expresar como combinación lineal de los vectores en l, al cuestionarle cuando si podría dice: "Puedo calcular el T de cualquier vector cuando me dan el valor de T y tres vectores. Pero que sean, pero que esos tres formen una base del espacio vectorial en el que estemos trabajando". Esto se muestra en el siguiente extracto de entrevista y la imagen 12

> [89ED1]: Bueno, como esta es una transformación lineal, si encontramos una combinación lineal de estos (señala los vectores de l) cuyas imágenes ya conocemos, entonces podemos conocer el valor de este polinomio (señala el polinomio $3 + 2x$). Bueno la imagen de ese polinomio.
> [90E]: ¿Entonces qué ocuparías?
> [91ED1]: Una combinación lineal del que sea en lugar de $3x,\ 3 + 2x$.
> (Empieza a escribir al vector como combinación lineal de los vectores de l y encontrar los escalares)
> Intenta resolver el sistema de ecuaciones que obtuvo de la combinación lineal, para poder encontrar los escalares y se da cuenta de que el sistema no tiene solución

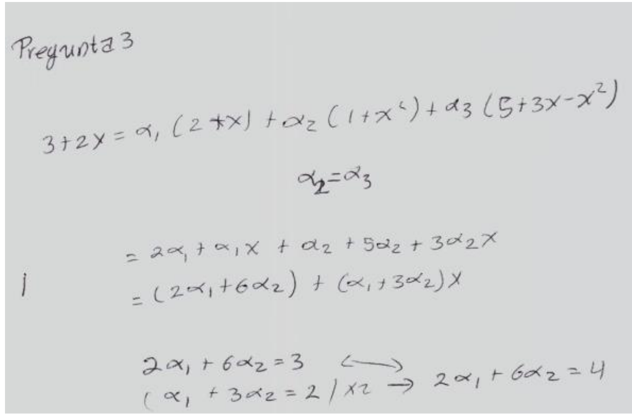


Imagen 12. Correspondiente al problema 3

> [92ED1]: El sistema no tiene solución, entonces no podemos encontrar los $\alpha's$ tal que sea (señala vector $3+2x$) combinación lineal de estos (señala vectores de l).
> [93E]: Entonces ¿Qué necesitarías para sí poder encontrar el T de algún, de este no se puede del $3+2x$ dijiste?
> [94ED1]: mmm… no es que no se pueda, pero de esa manera no puedo, escribiéndolo como combinación lineal no puedo.
> [95E]: Entonces que necesitarías para que si se pudiera expresar cualquier vector, ahora hablamos de cualquier vector en general, para que pudieras calcular la imagen, pues de cualquier vector en general.
> [96ED1]: Pues, conocer T.
> [97E]: mmjj, una podría ser conocer T, pero si solo te dieran T de ciertos vectores, ¿Cuándo podrías decir que si, que si puedes calcular T de cualquier vector?
> [98ED1]: Puedo calcular el T de cualquier vector cuando me dan el valor de T y tres vectores. Pero que sean, pero que esos tres formen una base del espacio vectorial en el que estemos trabajando.

Cabe mencionar que al estudiante se le preguntó si era necesario que el conjunto l fuera base, o si sería suficiente con que generara, esta pregunta surgió porque el alumno mencionó que el vector $3+2x$ debía expresarse como combinación lineal del conjunto l sin hacer referencia en ningún momento a la unicidad de los coeficientes de dicha combinación lineal, de manera que esto nos permitió un análisis más profundo de sus estructuras mentales y así tener una mejor comprensión por parte de las investigadoras de la importancia de la estructura previa del proceso de base en la construcción de la estructura mental de extensión lineal. Presentamos con detalle este análisis

El estudiante respondió de manera afirmativa a la pregunta hecha sobre si era suficiente que el conjunto generara para poder determinar la imagen bajo una transformación lineal de cualquier vector en general si se conocían las imágenes del conjunto generador, esto por un lado evidencia su concepción proceso de conjunto generador y de extensión lineal, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista

> [99E]: Si te lo dieran solo que generaran, por ejemplo si te dieran vectores que nada más generaran ¿sería suficiente? o ¿si ocupas a fuerza que sea base?
> [100ED1]: Si es suficiente, porque la transformación lineal. Oh! pues si es una transformación lineal como aquí en el problema, pues entonces solo falta que generen y entonces tenemos que encontrar una combinación lineal de cualquier vector.
> [101ED1]: Es decir que si genera pues existe, entonces encontramos la combinación lineal de cada vector, y ya solamente usamos lo que puse haya la fórmula para encontrar la T como un escalar por transformación de un vector y esa ya la conocemos.

Al volverlo a cuestionar sobre la condición de que el conjunto no necesitara ser base, sino solo generar lo cual implicada no asegurar la unicidad de los coeficientes de la combinación lineal, el estudiante hizo uso de su concepción proceso de transformación lineal y argumentó que por ser una transformación lineal era una función bien definida, por lo que el vector solo podría tener una imagen única, aunque se expresara de diferentes formas como combinación lineal la imagen del vector era única. Esto se muestra en el siguiente extracto

> [102E]: Pero, ¿tú dices de un escalar verdad?
> [103ED1]: ¿Cómo?
> [104ED1]: O sea si tú puedes expresar a tu vector, el arbitrario que te pusimos aquí como combinación lineal porque el conjunto l genera, entonces, ¿no ocuparías que fuera base?
> [105E]: No.
> [106E]: No, porque entonces si genera querría decir que para este vector o para cualquier existen estos escalares, pero ahí tendrías una dificultad que esos escalares existen pero no necesariamente son únicos.
> [107ED1]: Si, pero desde que es una transformación lineal tiene que ser una función, y una función ya tiene que estar bien definida.
> [108E]: Si.
> [109ED1]: Entonces tiene que tener una imagen única, aunque se pueda expresar de diferentes formas, pero tiene que ser la misma.
> [108E]: Si.
> [109ED1]: Entonces tiene que tener una imagen única, aunque se pueda expresar de diferentes formas, pero tiene que ser la misma.
> [110E]: Porque entonces si tú evalúas tu vector, si calculas la imagen pero los coeficientes no son únicos en la combinación lineal, si tienes una infinidad de formas de expresar ese vector como combinación lineal, entonces ¿qué pasaría ahí?

> [111ED1]: Pues como la transformación lineal es una función y tiene que estar bien definida entonces aunque estén escritos, se pueda descomponer de distintas maneras tienen que ser equivalentes, porque la función bien definida solo da una imagen, entonces eso es otro lema, ósea tienen que ser lo mismo porque la función está bien definida
> [112E]: Ósea te refieres a que, aunque sean distintos escalares en la combinación lineal el resultado te debe de dar lo mismo, a eso te refieres cuando calculas los α_i por los $T(v_i)$, bueno toda la combinación lineal.
> [113E]: Si, ¿A eso te refieres?
> [114ED1]:Si

Fue muy interesante el argumento que nos dio el estudiante, pues esto nos permitió profundizar en el papel que juega el proceso base en la construcción del tópico de extensión lineal, aunque ya no se profundizó más en ese momento, en el transcurso del análisis nos dimos cuenta que este proceso es fundamental, ya que aunque el estudiante respondió aparentemente correctamente, lo hizo solo parcialmente, pues efectivamente si la transformación lineal existe y es única (hecho del cual partió el alumno) aunque existan infinidad de formas de expresar al vector como combinación lineal de un conjunto generador se podrá obtener la imagen de cualquier vector, conociendo solo las imágenes de este conjunto bajo dicha transformación lineal. Sin embargo, para asegurar la existencia y unicidad de dicha transformación lineal es necesario que el conjunto sea una base del espacio vectorial, esto está relacionado con el teorema:

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F, sea $\{\alpha_{1,\dots,}\alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo F y $\beta_{1,\dots,}\beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T \propto_j = \beta_{j,} \qquad\qquad j=1, \ \dots, n.$$

Este teorema es el que justifica el hecho de que el conjunto deba ser forzosamente una base, pues de otra manera no existiría o habría una infinidad de transformaciones lineales. Veamos el caso de la pregunta 3, aquí dado que el tercer vector del conjunto $l = \{2+x,\ 1+x^2,\ 5+3x-x^2\}$ es combinación lineal de los otros dos $5+3x-x^2 = 3(2+x)-(1+x^2)$, el conjunto es linealmente dependiente, esto ocasiona que exista una infinidad de transformaciones lineales, por mencionar solo dos $T(c+bx+ax^2) = \begin{pmatrix} a+3b \\ c-2b \end{pmatrix}$ y $T(c+bx+ax^2) = \begin{pmatrix} b+c \\ a \end{pmatrix}$, lo que no hace posible que se pueda asegurar el poder obtener $T(3+2x)$ que es lo pedido en la pregunta 3 y por lo tanto el conjunto l tenga que ser base para que se pueda asegurar el poder obtener la imagen de cualquier vector conocidas las imágenes de esta base bajo la transformación lineal.

4.5.2.2.3 Relación del tópico de Extensión Lineal con otros conceptos

Finalmente, en la pregunta 4 se les preguntó a los estudiantes sí podrían obtener la transformación lineal dada la matriz que la representa, el objetivo era ver si los estudiantes relacionaban el tópico de extensión lineal con el de matriz asociada a una transformación lineal

> ***Pregunta 4.*** *Supóngase que la transformación lineal* $T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ *tiene como matriz asociada* $[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *donde* $\beta = \{1,\ x,\ x^2\}$ *y* $\gamma = \{(1{,}0),\ (1{,}1)\}$. *¿Puede determinar explícitamente dicha transformación lineal?*

Estudiantes como ED8 no recordaban cómo se obtenía la matriz asociada a una transformación lineal, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista

> [171ED8]: Ay no me acuerdo.
> [172E]: ¿No te acuerdas?
> [173ED8]: No me acuerdo como se sacaba la matriz.

Lo que le llevaba a hacer afirmaciones erróneas como el considerar que las imágenes de los vectores de la base β bajo la transformación lineal eran las columnas de la matriz asociada, sin embargo al preguntarle para qué quiere las imágenes de los vectores de la base β ella responde que para expresar cualquier vector como combianción lineal y a partir de ahí obtener la transforamción lineal pedida, como se meustra en el extracto de la entrevista, lo que nos permite evidenciar que la alumna si relaciona el proceso de extensión lineal con el de matriz asociada, a continuación mostramos el extracto de entrevista donde se da evidencia de lo mencionado

> [174E]: A yaaa. (ED8 empieza a escribir las imágenes de las bases que le dan en el problema)

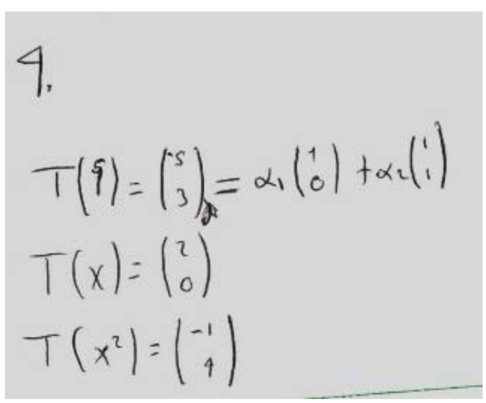


Imagen 13. Correspondiente a la pregunta 4.

> [175E]: ¿Por qué quieres la imagen de esos?

> [176ED8]: Para a partir de ahí encontrar la trasformación, como este es base de P_2 entonces escribimos a cualquier vector como combinación lineal de estos y a partir de ahí sacamos T.
> [177E]: Ok, ahorita no te dieron explícitamente la imagen de cada uno, pero tu ahí estás poniendo la imagen de cada uno de la base, ¿eso de dónde salió?
> [178ED8]: De la matriz, la primera columna que es la imagen del primer vector, la segunda columna es la imagen del segundo vector, y la tercera columna es la imagen del tercer vector si mal no recuerdo jeje.

Creemos que el proceso de extensión lineal forma parte del esquema de transformación lineal ya que este se relaciona con la representación matricial de una transformación lineal donde además se requiere del concepto de base, de manera que se ve la relación de al menos estos tres conceptos. Por supuesto que hace falta una descomposición genética de este esquema que muestre claramente cuáles son los elementos del esquema y cómo se lleva a cabo la relación con otros conceptos.

Capitulo V. CONCLUSIONES

En este capítulo describimos las conclusiones que obtuvimos del análisis de los datos empíricos, comenzando con las dadas por el cuestionario diagnóstico las cuales nos permitió seleccionar a los estudiantes que fueron entrevistados, seguidas de las arrojadas por la entrevista semiestructurada, estas nos permitieron refinar la descomposición genética y dar algunas sugerencias didácticas, finalmente presentamos algunas propuestas para futuras investigaciones.

5.1 Conclusiones cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico tuvo como objetivo identificar las estructuras previas con las que cuentan los estudiantes. A continuación damos las conclusiones respecto a estas estructuras previas.

Con el análisis del cuestionario diagnóstico nos percatamos de que casi todos los estudiantes a excepción de uno, cuenta con la estructura de objeto combinación lineal, al considerar a la combinación lineal como elemento del espacio generado con un conjunto de vectores, mostrando el control sobre los pasos de la acción que permite determinara si un vector está o no en el espacio generado, expresando este vector como combinación lineal de dichos vectores e inclusive cuando toma un elemento en general del espacio generado es consiente que es una combinación lineal. En, particular uno de los estudiantes fue capaz de determinar si un vector específico pertenecía o no al espacio generado por un conjunto de vectores, sin embargo al no poder resolver la situaciones problemáticas matemáticas 2 y 3 del cuestionario diagnóstico donde requiere trabajar con vectores en general del espacio generado nos da evidencia de estar en un estado intermedio entre acción y proceso.

La construcción previa de proceso base es la que más conflicto causó a los estudiantes, solo uno mostró contar con dicha estructura, la mayoría están camino a la interiorización y otros pocos en acción. Esto era de esperarse si se compara con los resultados mostrados en Kú, Trigueros y Oktaç (2008) donde ninguno de los seis estudiantes entrevistados evidenciaron el proceso base, cuatro estuvieron en camino a la interiorización y dos en acción. Esto muestra lo difícil que es para los estudiantes construir el concepto y la necesidad urgente de elaborar diseños de enseñanza que los ayuden a lograr dicha concepción e ir más allá, hasta una construcción objeto de base, ya que este concepto es fundamental dentro del álgebra lineal. Los diseños de enseñanza deben tomar en cuenta las dificultades que ya se han detectado, por ejemplo, en el cuestionario diagnóstico la mayoría de los estudiantes son capaces de demostrar si un conjunto dado es base de un espacio vectorial, pero no pueden determinar una base de un subespacio vectorial.

En torno al concepto de transformación lineal la mayoría de los estudiantes posee una concepción proceso ya que fueron capaces de determinar si una transformación era o no lineal, en el primer caso mostrando que preserva combinaciones lineales (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) y en el segundo dando contraejemplos de que algunas de las propiedades de linealidad no se cumplían. Se encontró un estudiante que solo dio evidencia de contar con una concepción acción pues solo fue capaz de verificar la propiedad de preservación de combinación lineal para vectores particulares, en cambio no puede dar ejemplos de transformaciones que cumplan determinadas condiciones como en la situación 8 del cuestionario diagnóstico donde se pedía encontrar transformaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que: $fg = 0$ pero $gf \neq 0$.

5.2 Conclusiones de la Entrevista Semiestructurada.

La entrevista semiestructurada tuvo la intención de mostrar si los estudiantes hacían las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar, a continuación mostramos las conclusiones que se obtuvieron del análisis de este instrumento.

La primera estructura que se analizó fue la de acción de extensión lineal, los cuatro estudiantes que participaron en la entrevista mostraron esta estructura previa, ya que todos fueron capaces de obtener la imagen de un vector específico usando los pasos de la acción, los cuales mencionamos a continuación:

Paso 1. Con su concepción proceso de base será consiente y podrá expresar un vector en específico (vectores no arbitrarios) que pertenece al espacio vectorial V, como combinación lineal de los vectores que conforman la base.

Paso 2. Aplicar el proceso de transformación lineal T a esta combinación lineal la cual el estudiante la ve cómo un objeto al que se le puede aplicar dicho proceso. Al aplicar el proceso de transformación lineal se dará cuenta que la imagen de este vector en específico que tiene es una combinación lineal de las imágenes de los vectores dados en un principio ya que una transformación lineal preserva combinaciones lineales.

Paso 3. Una vez consiente de lo mencionado al final del paso 2, sustituirá las imágenes dadas de los vectores de la base y realizará las operaciones usando su concepción objeto de vector para finalmente obtener la imagen del vector específico.

En cuanto a la estructura de proceso de extensión lineal dada que la descomposición genética preliminar considera que esta se logra a través de la coordinación entre los procesos de base y transformación lineal. Planteamos situaciones problemáticas matemáticas para identificar si los estudiantes lograban esta coordinación y cómo lo hacían y ver si coincidía con la propuesta por nosotros en la DGP. Los estudiantes no mostraron dificultad para afirmar que si la transformación no es lineal no se asegura poder determinar la imagen de un vector porque una vez expresado el vector como combinación lineal y querer aplicar la transformación, al no ser esta lineal no podían distribuir suma ni sacar escalares, esto lo pudieron justificar gracias a que contaban con la estructura previa de transformación lineal, como se mostró en el análisis del cuestionario diagnóstico. Ninguno de los estudiantes fue capaz de pensar en otra estrategia para encontrar la imagen del vector pedido, después de sugerir la estrategia de ensayo y error por parte del entrevistador solo uno de ellos pudo proporcionar dos transformaciones no lineales que cumplian las condiciones, mostrando así contar con una concepción objeto de transformación lineal.

En cuanto a la coordinación con el proceso de base, a diferencia de lo mencionado por Uicab y Oktaç (2004) los estudiantes entrevistados si establecían la relación entre el vector y el conjunto de vectores dados, argumentando que si el conjunto no era base no podrían expresar el vector como combinación lineal, razón por la cual no aseguraban poder determinar la imagen de un vector conociendo las imágenes de estos vectores del conjunto.

La coordinación entre los procesos de base y transformación lineal si se lleva a cabo como se propuso en la descomposición genética preliminar, sin embargo el proceso base lleva implícito el asegurar la existencia de la transformación lineal, de manera que si no se profundiza en esto el alumno no podrá lograr completamente la construcción del proceso de extensión lineal. Esto nos lleva a refinar la descomposición genética. Más adelante describiremos detalladamente es qué consiste este refinamiento.

Finalmente, en el último ejercicio de la entrevista semiestructurada en donde se pretendía identificar si el alumno era capaz de relacionar el tópico de extensión lineal con otros conceptos del álgebra lineal, en particular con el de matriz asociada a una transformación lineal, la mayoría de los estudiantes si lograron establecer dicha relación, a pesar de que los estudiantes tuvieron problemas en recordar cómo se obtenía la matriz asociada, después de hacer memoria mostraron cómo se usa el tópico de extensión lineal en este problema. Esto nos da evidencia de que el alumno muestra la coherencia de un esquema que está construyendo o tiene construido, consideramos que este esquema es de transformación lineal y el proceso de extensión lineal es parte de este.

5.3 Refinamiento de la Descomposición genética preliminar

En la entrevista se les cuestionó a los estudiantes si se requería que los vectores dados fueran base o si era suficiente con que generaran, la pregunta tenía la intención de profundizar en la coordinación cuando se utilizaba el proceso base, la respuesta de uno de los estudiantes nos llevó a considerar que la descomposición genética debía ser refinada pues quedó al descubierto que se requiere contar con un conocimiento previo dado por el siguiente teorema:

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F, sea $\{\alpha_{1,\dots,}\alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo F y $\beta_{1,\dots,}\beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T \propto_j = \beta_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

En el tópico de extensión lineal se da por hecho la existencia de la transformación lineal, pero para esto se requiere partir de una base según el teorema mencionado arriba. De manera que si el conjunto no es base será suficiente con que genere para que pueda determinarse la imagen de cualquier vector usando las imágenes de dicho conjunto sobre una transformación lineal que exista. Este resultado que llamaremos “existencia y unicidad de una TL” debe estar en la mente del estudiante como proceso. De manera que la descomposición genética preliminar se refina de la siguiente manera:

La nueva construcción previa de proceso “existencia y unicidad de una TL” no cambia la manera en cómo se lleva a cabo la coordinación entre los procesos base y transformación lineal, más bien hace consiente al estudiante del papel que juega el proceso base en dicha coordinación. Antes de que el estudiante comience la construcción del tópico de extensión lineal tomando un vector para expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base dada como se consideró en nuestra descomposición genética preliminar, el estudiante deberá usar su proceso de existencia y unicidad de una transformación lineal para primero asegurar que la transformación lineal de la cual se dan sus imágenes existe y es única. Una vez logrado esto seguirá el camino cognitivo señalado en la descomposición genética.

Se diseñó y refinó una descomposición genética del proceso de extensión lineal, la intención era obtener una DGP del objeto, sin embargo durante el desarrollo del análisis teórico no encontramos qué acciones o procesos pudieran actuar sobre el proceso de extensión lineal de manera que este fuera encapsulado por el estudiante. Es decir, este tópico parece ser usado en el álgebra lineal solo como proceso. Sin ambargo, si consideramos que forma parte del esquema de transformación lineal, pues se relaciona con otros conceptos como el de matriz asociada, base, transformación lineal, entre otros.

5.4 Sugerencias Didácticas

Los libros de algebra lineal de Fraleigh (1989), Friedberg, Insel & Spence (2003) y Hoffman (1973) que se analizaron para el diseño de la descomposición genética, no presentan ejercicios para que los estudiantes resuelva y puedan tener una mejor comprensión del tópico de extensión lineal. Es por ello que damos algunas sugerencias didácticas sobre este tópico y los conocimientos relacionados con él.

Primeramente proponemos que los docentes aborden en sus clases problemas que involucren el obtener la base de subespacios considerando diferentes espacios vectoriales como $\mathbb{R}^n$, las matrices, los polinomios y las funciones, estos últimos cuestan más problema a los estudiantes. De manera que esto les ayude a superar las dificultades como las mencionadas en las conclusiones del cuestionario diagnóstico.

En cuanto al proceso de extensión lineal, sugerimos que los docentes propongan a los estudiantes situaciones basadas en contraejemplos, como los propuestos en esta investigación en el instrumento de la entrevista semiestructurada. Donde se les pregunta si es posible determinar la imagen de un vector conocidas las imágenes de un conjunto, cuando este no es base o cuando la transformación es no lineal. Esto permitirá la reflexión por parte del estudiante al ser situaciones que no se pueden resolver con la simple aplicación de un algoritmo, como ejemplo sugerimos situaciones del tipo:

> ***Pregunta 3.*** *Sea* $l = \{2 + x,\ 1 + x^2,\ 5 + 3x - x^2\} \in P_2(x)$ *y sea una transformación lineal* $T: P_2(x) \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(l) = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *¿Es posible encontrar* $T(3 + 2x)$*? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.*

Donde el conjunto *l* no es base, lo que ocasiona que aplicando el teorema mencionado en el refinamiento de la descomposición genética se tenga una infinidad de transformaciones lineales y por tanto no se pueda obtener la imagen pedida. De manera que esto ayuda al estudiante a profundizar más en las relaciones que existen entre los distintos conceptos, en este caso particular el de base y transformación lineal y pensar teóricamente (Sierpinska, 2001).

5.5 Futuras investigaciones

El concepto de transformación lineal y sus representaciones ha sido investigado desde la teoría APOE por diferentes investigadores (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Roa-Fuentes y Oktaç, 2012; Romero, 2016; Montelongo, 2016), donde se presentan descomposiciones genéticas de la estructura objeto, así como las representaciones semióticas algebraica, geométrica y matricial, además de propuestas de enseñanza (Romero, 2016). Sin embargo, no se cuenta con investigaciones que describan el esquema de transformación lineal y su evolución, los datos que arrojaron nuestra investigación nos dan indicios de que el proceso de extensión lineal forma parte de este esquema. Proponemos una investigación donde se diseñe una descomposición genética de esquema y su evolución de transformación lineal.

Finalmente, proponemos como otra futura investigación diseñar e implementar una instrucción (Fase dos del ciclo de investigación de la teoría APOE) del proceso de extensión lineal, donde se propongan actividades que ayuden al estudiante a desarrollar el mecanismo de coordinación, siguiendo el ciclo de enseñanza ACE o cualquier otra estrategia pedagógica, tomando en cuenta la descomposición genética refinada que se diseñó en esta investigación, de manera que este diseño sea guiado por dicha descomposición.

Reflexión

Durante los dos años de la maestría viví tantas experiencias que no me bastaría este espacio para platicarlas, peros todas tenían algo en común que fue el dejarme un aprendizaje, me percaté con todo lo que veíamos en clases, de dos cosas: primero lo qué se requería para ser un buen docente y segundo que ser profesor no es nada sencillo, desde ahí admire más a mis maestros, ya que me di cuenta que uno no valora todo el trabajo que hay detrás para poder dar una clase y que en ocasiones uno como profesor debe hacer circo, maroma y teatro para que el alumno aprenda.

Una enseñanza que me dejó la maestría es que siempre se debe estar en constante preparación, ya que siempre cambia la manera en que un estudiante aprenden, y uno como docente debe estar preparado para cualquier contratiempo o evento que pueda surgir en el aula, además de que todos los alumnos son diferentes y tienen maneras de aprender muy distintas, por eso debemos estar preparados para enseñar de diferentes maneras.

Estoy muy agradecida con la maestría ya que yo no tengo un perfil propiamente de docente y gracias a la maestría es que pude tener mi primer acercamiento de cómo hacer una planeación, qué debe contener, como se hace, etc., y ahora que ya estoy trabajando no me fue tan complicado hacerlas porque ya estaba familiarizada con ellas.

Algo que me gustó de la maestría es que te dan los conocimientos y habilidades necesarias para realizar una investigación, ya que primero nos enseñan qué debe contener una investigación, cómo se lleva a cabo, para todo esto ponerlo en práctica en nuestro trabajo de tesis. Considero importante que nos enseñen a investigar porque actualmente los docentes no solo dan clases, también deben estar preparados para hacer investigación, y es de mucha ayuda porque en ocasiones no sabemos ni como buscar un trabajo o una investigación que nos ayude a mejorar nuestra práctica docente.

Referencias

Arellano & Oktaç, A. (2013). “Panorama de Investigaciones que usan como marco teórico a la teoría APOE” (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav. México.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). “A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education”. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Badillo, E. (2003). La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matematica de Colombia. Universidad Autónoma de Barcelona.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Álgebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Duvinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 221-243). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Dorier, J., & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En Holton, D. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Vol. *7*, p. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Espínola, Oktaç, A., & Cordero, (2006). Dificultades Asociadas al concepto de Base de un espacio vectorial (Tesis de maestría nopublicada). Cinvestav.México.

Fraleigh, J., & Beauregard, R. (1989). *Álgebra Lineal*. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2003). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.

Hernández, V., & Oktaç, A. (2017). El problema de Extensión Lineal con apoyo de construcciones geométricas (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav.México.

Hillel J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In The Teaching of Linear Algebra in Question. (191-207). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Bogotá: Prentice Hall.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Redalyc*, *20*(2), 65-89.

Molina, J., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 241-273.

Orozco del Castillo & Oktaç, A. (2016). El concepto de vector: un estudio para el diseño de una descomposición genética preliminar desde la mirada de la teoría APOE (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav.México..

Parraguez, M., & Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. *Scientia et Technica Año XIX, 19*(3), 329-334.

Pavlopouluv, K. (1993). Un problema decisivo para el aprendizaje del álgebra lineal: la coordinación de registros de representación. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 67-93.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 199-232.

Ramirez-Sandoval, O., Romero-Félix, C.F., & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiotica en el uso de transformaciones Lineal es en el plano. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*, 19, 225-250.

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transforamción lineal* (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav. México.

Romero, C. (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales Mediante la Coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas (*Tesis de Doctorado no publicada). Cinvestav. México.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transmations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 7-41.

Sierpinska, A. (2000) On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209-246). Dortrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., Vidakovic, D. (2008). "A Search for a Constructivist Approach for Understanding the Uncountable Set". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 93-125.

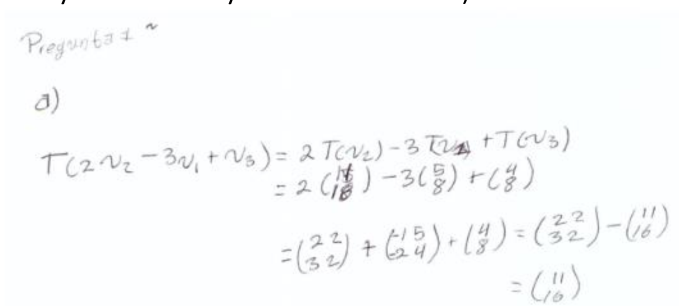
Trigueros, M., & Oktaç., A. (2010) ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 13* (4-II), 373-385.

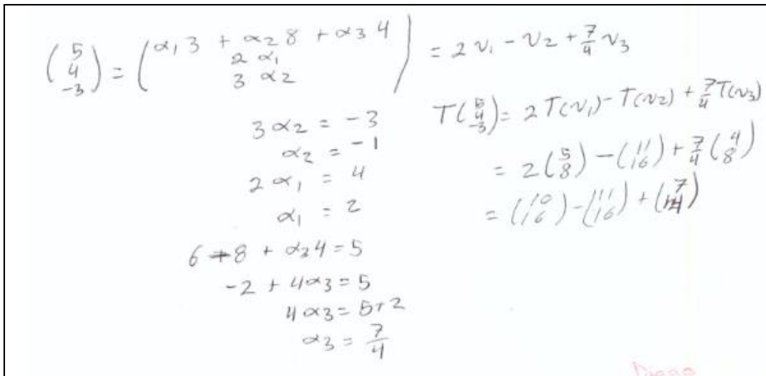
Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(3), 459-490.

Anexos

Transcripciones de las entrevistas

TABLA DEL ESTUDIANTE ED1

Extractos de la entrevista	**Explicación breve del contenido de la primera columna**
[1ED1]: entonces el la pregunta 1, sea… en el inciso a) se tiene que para encontrar esta la T$(2v_2 - 3v_1 + v_3)$ debido a las propiedades de la transformación lineal, estoy entre la definición [2ED1]: Simplemente lo haría T$(2v_2) - T(3v_1) + T(v_3)$, y esos ya los conocemos, el mismo problema nos dice cuáles son los valores (Sustituye los valores y realiza las cuentas)  Pregunta 1 ~ a) $T(2v_2 - 3v_1 + v_3) = 2T(v_2) - 3T(v_1) + T(v_3)$ $= 2\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}22\\32\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-15\\-24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22\\32\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$ [3E]: Entonces ¿Este $\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$ de donde lo obtuvo? ¿Cómo lo hizo? [4ED1]: mm… aaa.. Al asociar estas dos con la operación (Señalando los vectores $\begin{pmatrix}-15\\-24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$) para obtener este (señalando $\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$) y ya, ya lo tengo. ********************* [5ED1]: y luego el b), el inciso b). [6ED1]: mmm…Bueno voy a buscar una combinación lineal de los tres vectores, de estos tres (señala $v_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$) que me dé v, o sea, cuando busco la combinación lineal busco solo los escalares. (Hace cuentas para encontrar el valor de los escalares)	Encuentra la imagen de una combinación lineal específica usando las propiedades de la transformación lineal y las imágenes de los vectores que conforman la combinación lineal. Expresa el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.



[7E]: ¿Cómo me podría asegurar la existencia de esos escalares?
[8ED1]: aaa.. Bueno así rápido, puedo ver que eso es linealmente independiente, por ejemplo si
(Escribe $\alpha_1 \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = 0$)
[9ED1]: Esteee, en el último elemento, seria $\alpha_2\,(3) = 0$, $\alpha_2 = 0$
[10ED1]: Y para el segundo tengo $\alpha_1\,(2) = 0$ y aquí $\alpha_1 = 0$
[11ED1]: Y luego en l ´parte de arriba es $\alpha_1\,(3) + \alpha_2\,(8) + \alpha_3(4) = 0$, pero como $\alpha_1\ y\ \alpha_2$ es cero entonces solo tengo $\alpha_3(4) = 0$ y como 4 no es cero entonces solo tengo $\alpha_3 = 0$.
[12ED1]: Entonces así estos tres vectores (señala $v_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$) son linealmente independientes y como el espacio en el que estamos trabajando R3 es de dimensión 3 y encontramos tres vectores linealmente independientes.

[13ED1]: entonces ese vector nos funciona como base.
[14E]: A ok
[15ED1]: Y así esos tres vectores pueden generar a cualquier vector.
[16E]: por ser base
[17ED1]: mmjj
[18E]: Entonces el que sea base ¿te asegura la existencia de esos escalares?
[19ED1]: si
[20E]: Sii a ok
[21ED1]: Entonces, bueno haciendo esto tengo que …
(Realiza cuenta para despejar y encontrar los valores de α_1, α_2 y α_3)

Se da cuenta que los vectores v_1, v_2 y v_3 son una base de R^3, y generan a cualquier vector de este espacio vectorial.

<table>
<tr>
<td>
b)
$\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
$\alpha_2 \cdot 3 = 0$
$\alpha_2 = 0$
$\alpha_1 2 = 0$
$\alpha_1 = 0$
$\alpha_3 \cdot 4 = 0$
$\alpha_3 = 0$

[25ED1]: Entonces ya tengo que el vector $\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ es $2\, por\ v_1 - v_2$ más 7/4 por v_3, entonces eso es lo único que hice.

[26E]: Mmmjj
[27ED1]: Tengo que $T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ es igual a 2 por $T(v_1) - T(v_2) + \frac{7}{4}$ de $T(v_3)$.

(Realiza la sustitución de los valores de $T(v_1), T(v_2)\ y\ T(v_3)$ en la expresión anterior y obtiene la imagen de $T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$.)

$T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} = 2T(v_1) - T(v_2) + \frac{7}{4}T(v_3)$
$= 2\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} + \frac{7}{4}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}10\\16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\14\end{pmatrix}$

[30E]: Si quieres hasta ahí lo dejamos.
[31E]: Entonces estas usando que la transformación es lineal?
[32ED1]:Mmmjj.
[33E]: Si.
</td>
<td>Encuentra la imagen de un vector en específico de R^3 a través de las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.</td>
</tr>
<tr>
<td>
****
[36ED1]: Inciso c), para cualquier vector.
[37ED1]: Mmm. bueno como le hice haya, de que este v_1, v_2 y v_3 es un base.
[38E]: Mmmjj
[39ED1]: Entonces cualquier vector w se puede escribir como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2\, v_2 + \alpha_3 v_3$ y esto es de manera única.
[40E]: Mmmjj
[41ED1]: Entonces por las propiedades de transformación lineal, tengo que T(w) es igual a $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2\, T(v_2) + \alpha_3 T(v_3)$ eso sería el valor de cada, de cualquier vector en R^3.
[42E]: Y nos podrías generalizar, ¿cómo para cual espacio
</td>
<td>Encuentra la imagen de cualquier vector en R^3 usando las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.</td>
</tr>
</table>

vectorial y para cualquier transformación? [43ED1]: Mmm. ¿Dada una base?, ¿los vectores de base? [44E]: Mmjj [45ED1]: Sii, si tenemos en un vector v, una base que sea $v_1, \ldots, v_n$ y si sabemos que $T(\beta)$ o sea sabeos los valores de nuestra transformación en cada $T(v_1), \ldots, T(v_n)$. [46E]: Y que tu transformación T sea lineal y valla de un espacio vectorial V en uno W [47ED1]: Entonces sabemos que todo vector de V, w se puede escribir de una única forma, la suma de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con escalares únicos en esta base. [48ED1]: Entonces por la transformación lineal T(w) sería igual a la suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, esto es cuando conocemos una base y los valores de la transformación en esa base. ********************************** [50E]: Muy bien, la pregunta 2 [51ED1]: (se queda pensando un momento) mmm… [52E]: ¿Qué piensas? [53ED1]: Bueno pues las propiedades que no es lineal, obviamente le quita propiedades a la función. [54ED1]: En lugar de saber que propiedades se cumplen, sabemos que hay algunas propiedades que no se cumplen [55E]: Mmjj [56ED1]: Que son las de la definición de transformación lineal, y sabemos que al menos una no se cumple [57E]: Mmjj [58ED1]: mmm… pues esto es lo que sabemos de la función. [59E]: Y también tienes las imágenes de la función en este conjunto, en el conjunto S. [60ED1]: Sii…mmm (se queda pensando un momento ED1) [61E]: ¿Qué piensas? [62ED1]: No se me ocurre ahorita nada. [63E]: Si quisieras hacer lo mismo que hiciste aquí en el problema 1, ¿Cuál sería como la dificultad? [64ED1]: La dificultad es que no, o sea, creo que este conjunto es linealmente independiente (señala al conjunto S). [65E]: Mmjj [66ED1]: Así que este (señala vector *v*) se puede escribir como una combinación lineal de estos (señala elementos de S). [67ED1]: Mmm… pero el problema es que, no no, las propiedades de eso de que saca escalares y de que es homeomorfismo, de la a) no se cumple, pero no significa que no se cumple para todo, significa que exista uno para el cual no se cumple, y pues que solo sea un vector con solo una de las propiedades. [68ED1]: Entonces…mmm… no sabemos realmente, no se	Es capaz de encontrar la imagen de cualquier vector de cualquier espacio vectorial a través de las imágenes de los vectores de una base de este espacio vectorial. Identifica o tiene claro cuando una transformación no es lineal. . Identifica que el vector v se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S.

puede determinar cuál es [69ED1]: Porque incluso la función podría estar definida como una transformación lineal en todo el espacio excepto en un vector, que en un vector se haga otra cosa. [70E]: Mmmjj [71ED1]: Y pues ahí sí tengo una dificultad, pero no sé cómo explicarlo realmente. [72E]: Mmmjj, y este, ¿Podrías cómo encontrar una función que cumpliera esas condiciones? [73ED1]: mmm… creo que podría ser el máximo de las entradas, donde el valor máximo de las entradas como el valor de R. [74E]: Si quieres escribirlo a que le llamas máximo de las entradas. (Escribe la función f)	Propone una transformación no lineal que corresponda a las imágenes de los vectores del conjunto S.
Pregunta 2 $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Máx}\{a,b,c,d\}$ [75ED1]: No es lineal porque (Aplica la propiedad de homomorfismo para vectores en particular $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$	Demuestra que la transformación dada no es lineal con un contraejemplo.
[76E]: ¿Y esa sería la única que podría satisfacer esas condiciones?, porque para esa función f aplicada a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ te quedaría 3 verdad. [77E]: ¿Esa sería la única que podría funcionar o habría más? ¿Podría ocurrir con otra? [78ED1]: Otra, mmm… Por ejemplo otra podría ser el promedio de los… [79ED1]: El promedio de las entradas no cero, a no, al menos que sea con valor absoluto [80E]: Mmjj, sí.	

[81ED1]: Bueno si tenemos el promedio de las entradas no cero, con valor absoluto, y pasa lo mismo, de hecho estas dos mismas funciones como contraejemplo. [82ED1]: Aquí el promedio (señala $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$) es 1, y el promedio (señala $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$) es 1, y la suma seria 2. [83ED1]: Y el promedio de (señala$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$) es 1 [84ED1]: Y en este caso $f\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ seria 5/2. Y entonces ya hay dos transformaciones lineales. [85E]: ¿lineales? [86ED1]: No, transformaciones no lineales, que cumplen esto, y que con este me da distintos valores. [87ED1]: Bueno la respuesta al inciso b) sería, como en un caso específico no se puede, pues en general tampoco.	Identifica que no existe una única transformación no lineal a la que puedan corresponder las imágenes de los vectores de S.
******************************** [88E]: Seguimos con la pregunta 3 [89ED1]: Bueno, como esta es una transformación lineal, si encontramos una combinación lineal de estos (señala los vectores de *I*) cuyas imágenes ya conocemos, entonces podemos conocer el valor de este polinomio (señala el polinomio *3+2x*). Bueno la imagen de ese polinomio. [90E]: ¿Entonces qué ocuparías? [91ED1]: Una combinación lineal del que sea en lugar de *3x, 3+2x*. (Empieza a escribir a… como combinación lineal de los vectores de *I* y encontrar los escalares) Intenta resolver el sistema de ecuaciones que obtuvo de la combinación lineal, para poder encontrar los escalares y se da cuenta de que el sistema no tiene solución Pregunta 3 $3+2x=\alpha_1(2+x)+\alpha_2(1+x^2)+\alpha_3(5+3x-x^2)$ $\alpha_2=\alpha_3$ $=2\alpha_1+\alpha_1 x+\alpha_2+5\alpha_2+3\alpha_2 x$ $=(2\alpha_1+6\alpha_2)+(\alpha_1+3\alpha_2)x$ $2\alpha_1+6\alpha_2=3 \longleftrightarrow 2\alpha_1+6\alpha_2=4$ $(\alpha_1+3\alpha_2=2\ /x2 \rightarrow 2\alpha_1+6\alpha_2=4$	Expresa el polinomio 3+2x como combinación lineal de los elementos de *I* e intenta resolver el sistema de ecuaciones para encantar el valor de los escalares.
[92ED1]: El sistema no tiene solución, entonces no podemos encontrar los $\alpha's$ tal que sea (señala vector *3+2x*) combinación lineal de estos (señala vectores de *I*) [93E]: Entonces ¿Qué necesitarías para sí poder encontrar el T de algún, de este no se puede del 3 +2x dijiste?	

[94ED1]: mmm… no es que no se pueda, pero de esa manera no puedo, escribiéndolo como combinación lineal no puedo. [95E]: Entonces que necesitarías para que si se pudiera expresar cualquier vector, ahora hablamos de cualquier vector en general, para que pudieras calcular la imagen, pues de cualquier vector en general. [96ED1]: Pues, conocer T. [97E]: mmjj, una podría ser conocer T, pero si solo te dieran T de ciertos vectores, ¿Cuándo podrías decir que si, que si puedes calcular T de cualquier vector? [98ED1]: Puedo calcular el T de cualquier vector cuando me dan el valor de T y tres vectores. Pero que sean, pero que esos tres formen una base del espacio vectorial en el que estemos trabajando. [99E]: Si te lo dieran solo que generaran, por ejemplo si te dieran vectores que nada más generaran ¿sería suficiente?, o ¿si ocupas a fuerza que sea base? [100ED1]: Si es suficiente, porque la transformación lineal, oh pues si es una transformación lineal como aquí en el problema, pues entonces solo falta que generen y entonces tenemos que encontrar una combinación lineal de cualquier vector [101ED1]: Es decir que si genera pues existe, entonces encontramos la combinación lineal de cada vector, y ya solamente usamos lo que puse haya la fórmula para encontrar la T como un escalar por transformación de un vector y esa ya la conocemos. [102E]: Pero, ¿tú dices de un escalar verdad? [103ED1]: ¿Cómo? [104ED1]: O sea si tú puedes expresar a tu vector, el arbitrario que te pusimos aquí como combinación lineal porque el conjunto *l* genera, entonces, ¿no ocuparías que fuera base? [105E]: No [106E]: No, porque entonces si genera querría decir que para este vector o para cualquier existen estos escalares, pero ahí tendrías una dificultad que esos escalares existen pero no necesariamente son únicos. [107ED1]: Si, pero desde que es una transformación lineal tiene que ser una función, y una función ya tiene que estar bien definida. [108E]: Si. [109ED1]: Entonces tiene que tener una imagen única, aunque se pueda expresar de diferentes formas, pero tiene que ser la misma. [110E]: Porque entonces si tú evalúas tu vector, si calculas la imagen pero los coeficientes no son únicos en la combinación lineal, si tienes una infinidad de formas de expresar ese vector como combinación lineal, entonces ¿qué pasaría ahí? [111ED1]: Pues como la transformación lineal es una función y	Se da cuenta que para calcular la imagen de cualquier vector en R^3 requiere que le den tres vectores que formen una base y sus imágenes. Se da cuenta que no se requiere que el conjunto sea base para poder determinar la imagen de un vector arbitrario, solo necesita que genere al espacio vectorial de llegada, de hecho solo a la imagen de la transformación lineal.

tiene que estar bien definida entonces aunque estén escritos, se pueda descomponer de distintas maneras tienen que ser equivalentes, porque la función bien definida solo da una imagen, entonces eso es otro lema, ósea tienen que ser lo mismo porque la función está bien definida [112E]: Ósea te refieres a que, aunque sean distintos escalares en la combinación lineal el resultado te debe de dar lo mismo, a eso te refieres cuando calculas los α_i por los $T(v_i)$, bueno toda la combinación lineal. [113E]: Si, ¿A eso te refieres? [114ED1]:Si *** [115E]: Bueno ahora solo falta la pregunta 4. [116ED1]: bueno tenemos la base estándar de los polinomios en R^2, entonces. [117ED1]: Ok, por la construcción de la matriz, de la matriz T, sabemos que $T(1)$ va a ser $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ y T del polinomio *x* va a ser cero y $T(x^2)$ va a ser $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. [118E]: ¿Cómo construyes esa matriz? [119ED1]: Es falso jeje [120E]: ¿Por qué? [121ED1]: Si, si si esto es, bueno $T(1)$ en realidad es $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. [122E]: ¿De dónde agarraste ese cero? [123ED1]: Ahora si $T(1)$ va a ser $5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. [124ED1]: Y $T(x)$ seria $2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. [125ED1]: Y $\mathrm{T}(x^2)$ seria $-1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. (Realiza las sumas de estas expresiones) $T(1)=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ $T(x)=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $T(x^2)=-1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ [126ED1]: Entonces ya conocemos las imágenes de la base, entonces ya solo aplicamos las, a todo polinomio se puede escribir como $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$ (Calcula la transformación del polinomio arbitrario) $T(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2)=\alpha_0\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ [127E]: Si quieres hasta ahí le dejamos ya, lo demás son solo cuentas. [128E]: Ahora nada más yo me sigo peleando con este (señala	Hace uso de la definición de matriz asociada a una transformación lineal para calcular las imágenes de los vectores de la base. Establece la conexión de matriz asociada a una transformación lineal y el tópico de extensión lineal para calcular la imagen de un polinomio arbitrario.

problema 3) ayúdame, a ver si podemos buscarnos un ejemplo de lo que dices de un conjunto que si genera entonces podemos tomarnos por ejemplo como es $P_2(x)$ nuestro espacio, entonces nos buscamos un conjunto que genere pero que non sea independiente. [129E]: Ósea para que no alcance a ser base, pues, pero que si te genere, entonces podríamos poner por ejemplo el $1, x^2$ y cualquier otro vector que se te ocurra. [130ED1]: Si [131E]: es que me causa conflicto eso que dijiste de que con que generara era suficiente. [132ED1]: $1, \mathrm{x}, x^2, 1+\mathrm{x}$ es más fácil. [133E]: Exacto para que salgan las cuentitas fáciles. Haber entonces hay que ver cuánto nos da este $3+2x$. (Expresa el vector $3+2x$ como combinación lineal de $1, x, x^2, 1+x$ e intenta encontrar los escalares que cumplan con esta combinación lineal). $3+2x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 + \alpha_4 x,$ $= (\alpha_1+\alpha_4) + (\alpha_2+\alpha_4)x$ $\alpha_1+\alpha_4 = 3$ $\alpha_1 = 2, \alpha_4$ $\alpha_2 = 1$ $\alpha_2+\alpha_4 = 2$ [134ED1]: Bueno podría haber muchas soluciones. [135E]: Si por eso lo tomamos así verdad, para que la manera de expresar al $3+2x$ no fuera única y hubiera una infinidad. [136E]: Entonces podríamos tomarnos unos dos valores de α_4, para ver cuánto nos queda *T* de este (señalando$3+2x$) a ver si nos queda lo mismo pues. [137ED1]: Nada más que no conocemos la transformación. [138E]: Pero sabes lo que le hace la transformación a los vectores aahh jeje. [139E]: Suponiendo que, vamos a suponer que sabes *T* de este, este y este (refiriéndose a $1, x, x^2, 1+x$), si quieres les ponemos valores dijiste tu facilitos, ¿A ver que nos gustaría) [140ED1]: Bueno así rápido, yo diría que sería como, usando esto seria $\{1, x, x^2, 1+x\}$ $\{\binom{1}{0}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{3}{0}\}$ [141ED1]: Creo que es la que usan aquí [142E]: A ok, aahh ¿Cómo que la usan aquí? [143E]: A la misma transformación dices? ok vamos a calcular *T* de este (señalando $3+2x$) para dos combinaciones lineales distintas de él.	Identifica que es más que suficiente que un conjunto genere y que conozcamos sus imágenes para poder calcular la imagen de cualquier vector que pertenezca al Span de este conjunto.

(El estudiante escoge dos valores de $\alpha's$ distintos y calcula las dos imágenes de las combinaciones lineales con estos $\alpha's$) $\alpha_1+\alpha_4=3$ $\quad \alpha_1=2,\ \alpha_4=1$ $\alpha_2+\alpha_4=2$ $\quad \alpha_2=\cancel{1}\ \ \alpha_4=0$ $T(3+2x)=\alpha_1\binom{1}{0}+\alpha_2\binom{1}{0}+\alpha_4\binom{2}{0}$ $=\binom{2}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}=\binom{5}{0}$ $\alpha_4=0 \quad T(3+2x)=\alpha_1\binom{1}{0}+\alpha_2\binom{1}{0}=\binom{3}{0}+\binom{2}{0}=\binom{5}{0}$ [144E]: Bueno muy bien, muchas gracias.	

TABLA DEL ESTUDIANTE ED2

Extractos de la entrevista	**Explicación breve del contenido de la primera columna**
[1ED2]: Creo que multiplicaría este por 2 le restaría 3 veces este y le sumo este. [2E]: A ver ¿Por qué?, si quieres escríbelo y luego ya me dices porque es eso Problema 1 (1) a) Si $T(2v_2 - 3v_1 + v_3) = 2T(v_2) - 3T(v_1) + T(v_3)$ [3ED2]: Pues tengo que esto es una transformación lineal, entonces puedo hacer esto (señala $T(2v_1 - 3)$). [4E]: ¿Eso significa que sea lineal?, ¿si te acuerdas que significaba que la transformación fuera lineal? [5ED2]: Pues si creo que sí, que sabe que hacia la suma que la separa y sacaba los escalares [6E]: Ok, Mmjj. (ED2 Termina de escribir el resultado) $2\begin{pmatrix} \cancel{8}\,11 \\ 16 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ [6E]: Entonces tú dices que la imagen de esto, lo que da de resultado eso es porque la transformación es lineal [7ED2]: Mmjj ** [8E]: Pasamos al inciso b) [9ED2]: Pues ah caray [10E]: ¿Que paso? [11ED2]: Pues aquí también creo que sí, la respuesta es si, pero encuentre la imagen… [12E]: Y, ¿porque dices que si? [13ED2]: Porque veo estos tres (), y digo que con estos tres si los puedo hacer combinación lineal para que me de esto. [14E]: ¿Que necesitarías como para asegurar que si es combinación lineal de esos tres? [15ED2]: Pues hacer unos cálculos, no sé, ¿lo hago?, ah caray [16E]: Si por favor. [17ED2]: pues podría. (Piensa un buen rato y escribe)	Encuentra la imagen de una combinación lineal específica usando las propiedades de la transformación lineal y las imágenes de los vectores que conforman la combinación lineal.

[18E]: Esa última ecuación ¿cómo la obtuviste? [19ED2]: Esta la tercera, (señalando $3a = -3$) [20E]: Mmjj. [21ED2]: Pues veo, Ah caray, pues estoy sumando estos tres vectores, y luego digo los que están aquí en la primer entrada los multiplico por a, a caray, que ando asiendo, a caray, entonces no tendría que ponerle *a* aquí con ese razonamiento, creo que sí. [22E]: ¿Esta la obtuviste de hacer (señalando $3a = -3$)? [23ED2]: Eey creí que a este le puse *a* por eso tengo el 3 y el 2 [24E]: A o sea estas multiplicando por *a* este vector. [25ED2]: Si. [26E]: ¿Y luego? [27ED2]: Y luego este lo multiplico, a caray, por *b*. (Corrige sus ecuaciones, y encuentra los valores de a, b y c) b) $3a+8b+4c=5$ $\quad 6+(-8)+4c=5$ $2a = 4$ $\quad a=2 \quad 4c=8$ $3b = -3$ $\quad b=-1 \quad c=2$	Expresa el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.
[28E]: aquí te pregunta que si es posible encontrar la imagen [29ED2]: A entonces lo que haría es poner que $T(v) = T(2v_1) + T(-v_2) + T(2v_3)$. [30E]: ¿Y luego? [31ED2]: Pues, me queda parecido al del inciso a). (Sustituye los valores de las imágenes en la ecuación anterior) $T(v) = T\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} = T(2v_1) + T(-v_2) + T(2v_3)$ $2\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$	Encuentra la imagen de un vector en específico de R^3 a través de las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.
[32E]: Y entonces de aquí (señala $T(v_1)$) a este paso (señala $T(2v_1) + T(-v_2) + T(2v_3)$) ¿qué hiciste en esta segunda igualdad? [33ED2]: Vi lo que me había dado acá, como había multiplicado el *a* por todo este vector el v_1, pues acá dije el $T(v_1)$ pues lo multiplico por 2 y como acá me dio b=-1 multiplique el $T(v_2)$ por -1, y eso hice con el *c*, bueno para el v_3. [34E]: ¿Y porque pusiste *T* de este (señala $2v_1$) más *T* de este (señala $-v_2$), más T de este otro (señala $2v_3$). [35ED2]: Ósea, ¿ por qué no lo pude junto como acá (Señala inciso a)? [36E]: Mmjj	

[37ED2]: Aaa nomas.
[38E]: ¿Y si puedes ponerlo así nomás?
[39ED2]: Si
[40E]: ¿Por qué?
[41ED2]: Yo diría que por lo mismo que es transformación lineal.
[42E]: mmjj, ok. Muy bien

****

[43E]: El c)
[44ED2]: A caray, pues, creo que también. Bueno no estoy seguro pero pues tendría que hacer el cálculo
[45E]: ¿Pero qué cálculo tendrías que hacer?
[46ED2]: Pues tendría que ver si con estos tres (señala v_1, v_2 y v_3) puedo generar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$.
[47E]: ¿Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$?
[48ED2]: Haciendo combinación lineal de estos tres (señala v_1, v_2 y v_3)
[49E]: A ver
(ED2 empieza a escribir, pero se queda pensando)
[50ED2]: Estoy pensando cómo le diría, porque no me acuerdo bien
[51E]: Mmjj, Pero ya dijiste que combinación lineal, ¿A quién escribirías como combinación lineal de esos tres, según lo que te piden en el inciso c)?
[52ED2]: Pues escribiría a, podría pues (escribe la combinación lineal de los vectores v1, v2 y v3)

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

[53E]: ¿este sería tu vector arbitrario? (Señala a $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$)
[54ED2]: Mmjj
(Hace los cálculos de la combinación lineal que escribió anteriormente para encontrar los valores de los escalares c1, c2 y c3)

$$
\begin{aligned}
3c_1 + 8c_2 + 4c_3 &= r_1 \\
2c_1 &= r_2 \\
3c_2 &= r_3
\end{aligned}
$$

[55E]: ¿Y luego?
[56ED2]: Ah caray, pues creo que con esto tendría que.
[57E]: Dime que estás pensando.
[58ED2]: Estoy pensando que le diría aquí.
[59E]: Acá lo que hiciste fue resolver ¿verdad?
[60ED2]: Aja
[61E]: Encontraste a, b y c en el inciso b, ¿Entonces aquí que valores tendrías que encontrar?
[62ED2]: A caray no me acuerdo que hice acá.
[63E]: Que hiciste aquí, pues encontraste cuánto vale a, cuánto vale b, cuánto vale c, si, entonces, ¿aquí qué harías?

(Se queda pensando un momento, empieza a calcular c1, c2 y c3)

2

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{r_2}{2} \\
c_2 &= \frac{r_3}{3} \\
4c_3 &= r_1 - \frac{3}{2} r_2 - \frac{8}{3} r_3 \\
c_3 &= \frac{r_1 - \frac{3}{2} r_2 - \frac{8}{3} r_3}{4}
\end{aligned}
$$

[64E]: ¿Y para que encontraste los valores de c1, c2 y c3?
[65ED2]: No sé (risas)
[66ED2]: Bueno no sé si me sirvan de algo.
[67E]: ¿Por que como calcularías entonces T de r_1, r_2 y r_3?, si según tú dijiste que r_1, r_2 y r_3 era igual a esto (señalando combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 con los escalares c1, c2 y c3)
[68ED2]: Pues creo que tendría que T de esto (señalando r_1, r_2 y r_3) igual a

Empieza a calcular T de (r_1, r_2 y r_3)

Encuentra la imagen de cualquier vector en R^3 usando las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.

$$T\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = T(c_1V_1) + T(c_2V_2) + T(c_3V_3)$$

$$= \frac{r_2}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{r_3}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

[69ED2]: Eso sería, pero no me convence ya,
[69E]: ¿Porque?, o sea aquí, ¿Qué otra vez estas usando?
[70ED2]: Pues puse, pues creo que primero intente que me dieran estos (refiriéndose a c1, c2 y c3), ¿Cómo se llama eso?
[71E]: ¿Qué? ¿Combinación lineal?
[72ED2]: Eeyy combinación lineal de estos, bueno para que me dieran estos, y luego como hice, como tenía que c1 multiplicaba al v1…
[73E]: Escríbelo
(El alumno escribe la imagen de (r_1, r_2 y r_3))
[74E]: ¿Y luego de aquí?
[75ED2]: Pues de aquí ya nomás, puse lo que valía el c3, el c2 y el c1.
[76E]: ¿Y qué más?
[77E]: Porque aquí el $\frac{5}{8}$ seria $T(v_1)$ y entonces aquí (señala la expresión $T(c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3)$) dices que es $T(c_1r_1)$.
[78ED2]: Aja, pues el c1, c2 y c3 pues son los escalares, pues los saco así nomás.
[79E]: Así nomás, los sacaste así nomás ¿porque?
[80ED2]: Por lo mismo por transformación lineal.

[81E]: Transformación lineal, ok.
[82E]: Y entonces, si no te diéramos estos tres vectores específicos, si nada más te diéramos por ejemplo, que tuvieras T una transformación lineal de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W, y si te diera yo $T(v_1), T(v_2)$ hasta $T(v_n)$, por ejemplo si , y te pidiera que obtuvieras , lo mismo pero en general, T de cualquier vector v, entonces tú tienes al v_1, v_2 hasta v_n, ¿Cómo calcularías esté el $T(v)$?
[83ED2]: Pues si los v_n generan una base del V, pues veo por cuales escalares los multiplico para que me den v
[84E]: ¿Pero tú puedes asegurar que existen esos escalares?
[85ED2]: si estos v_n son una base de V, creo que sí.
[86E]: ¿Si?, y entonces ¿a este v como lo escribirías?, supón tu dices si estos son una base si, entonces vamos a considerar que es base de V, entonces tu que puedes decir, ¿dijiste que existen esos escalares?
[87ED2]: Aja
[88E]: Entonces escribe el vector v como combinación lineal de la base.

(ED2 Escribe al vector v como combinación lineal de v_1, v_2 ...v_n) $T: V \longrightarrow W$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V $T(v_1)=y_1, T(v_2)=y_2 \dots T(v_n)=y_n$ $T(v)=T(c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n)$ [89E]: Y luego que más harías para calcular $T(v)$, si suponiendo que este $T(v_1)$ fuera igual a y_1, $T(v_2)$ fuera igual a y_2 y Sustituye los $T(v_i)$ por los y_i $=c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+\dots+c_nT(v_n)$ $=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$ [90E]: Entonces dices que para que existan esos escalares el c_1, c_2 hasta c_n tendrían que ser base. [91ED2]: De hecho ya no estoy seguro. [92E]: ¿Por qué? [93ED2]: Porque estos *y* están acá en W. [94E]: Si [95E]: ¿Y dónde está $T(v)$? [96ED2]: En W [97E]: ¿Entonces? [98ED2]: Pues es que estos escalares ya no sé de donde los agarre. [99E]: De donde los agarraste, por eso te preguntaba que si existían, verdad, y tú que dijiste, si existen. [100E]: Y yo te dije, ¿Por qué? , y tú que dijiste, porque es base. [101E]: te acuerdas que es una base ¿no? [102ED2]: Si [103E]: ¿Que debe de cumplir un conjunto para ser base? [104ED2]: Pues que sea linealmente independiente y que genere. [105E]: ¿Y qué quiere decir que genere? [106ED2]: Pues que me da cualquiera de los que están ahí, combinación lineal. [107E]: Entonces con eso tu puedes asegurar la existencia de esos escalares ¿verdad? [108ED2]: Aja [109E]: Además ya está en general para cualquier espacio vectorial, transformación lineal y base. [110E]: Ahora si este no fuera base ¿qué pasaría?	Es capaz de encontrar la imagen de cualquier vector de cualquier espacio vectorial a través de las imágenes de los vectores de una base de este espacio vectorial.

[111ED2]: Aahh, pues si ese no es base, igual y si me genera este, y si me genera pues si puedo hacer esto. [112E]: Pero si no te generara que querría decir dos cosas que no existen los escalares o que no son únicos en combinación, en cualquiera de ambos casos tú podrías encontrar $T(v)$. [113ED2]: Pues creo que no. [114E]: Como le harías si no existen esos escalares, estaría como complicado. ****************	
[115E]: Vamos al problema 2. [116ED2]: A caray, a caray, no es lineal. [117E]: ¿Qué paso? [118ED2]: ¿Pues es que no se si si o si no? [119E]: ¿Porque? [120ED2]: Pues no más porque no es lineal, y pues no puedo hacer eso que hice, que no sé si se valía, lo de sacar los escalares. [121ED2]: Creo que no, a no se crea es que ya vi los demás. [121E]: ¿Cuáles demás? [122ED2]: Pues es que pensaba en hacer, este lo intento hacer combinación de estas dos nomas, pero pues no es, y no vi estos dos de aquí, entonces no sé. [123E]: Bueno entonces tu idea es escribir este como combinación lineal de estos 4. [124ED2]: Si, pero pues ya cuando lo tenga no sé qué le voy a hacer, porque pues lo de los escalares como no es lineal, no sé si se les puede sacar, igual y creo que no, pero pues igual y da de todos modos. [125E]: Entonces si quiere escribe eso que me dijiste. Escribe al vector $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los 4 Problema 2 (4) $a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=m_1}+b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=m_2}+c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=m_3}+d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=m_4}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $a+b=2 \quad a=2-b$ $a+d=0 \quad a=-d$ $b+c=0 \quad b=-c$ $-c+d=3 \quad d=3+c$	Identifica o tiene claro cuando una transformación no es lineal. Identifica que el vector v se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S.
[126ED2]: A caray ¿Cómo se resuelven estos? [127E]: Ándele, como se resuelve un sistema con cuatro ecuaciones y cuatro variables, ¿Qué métodos conoces? [128ED2]: Pues creo que este es el más primitivo ¿no?	

[129E]: ¿creo? ¿Cuál es el más primitivo?

[130ED2]: Pues creo que las matrices, una matriz la extiendo, pero pues.

[131E]: A ver, ¿ese sería rápido?

[132ED2]: No está bien terquero también, no hay método rápido, a menos que le salga de verlo.

[133E]: ¿De verlo? Como de buscar al tanteo a, b ,c, d o ¿Cómo?

[134ED2]: Si, pues ese si esta rápido, pero aquí tengo que.

(Se queda pensando un rato ED2)

[135E]: ¿Cuando me dijiste en el problema pasado que podías asegurar los escalares para la combinación lineal?

[136ED2]: Si esto era base.

[137E]: ¿Y cómo probarías que eso es base?

[138ED2]: Si genera o si es linealmente independiente, pero.

[139ED2]: A caray.

[140E]: ¿Cómo probarías que es linealmente independiente?

[141ED2]: Pues tendría que hacer unos cálculos, pues tendría que ver si con estos tres puedo generar a este, y luego que con este, este y este puedo generar este y así con todos.

[142E]: Supón que este (señala ()) si lo puedes escribir como combinación entonces pon a () como combinación lineal y entonces ahora quieres calcular f de este.

[143ED2]: Pues es que así como lo veo, me daría, pues, creo a +b +c+d, bueno pero aquí estoy usando que es lineal.

[150E]: Aja y aquí no es, lineal, entonces no lo puedes hacer.

[151ED2]: No no lo puedo hacer.

[152E]: Y no habría otra manera que pudiera encontrar f de eso, sin ese método que dices, porque la manera en que pretendes resolverlo ocupararías distribuir suma y sacar escalares pero no como no es lineal no te funciona, ¿habría otra manera?

[153ED2]: Yo diría que sí, pero no se me ocurre.

[154E]: ¿No se te ocurre?

[155ED2]: No sé por qué no, es que si es una transformación no lineal, no puedo hacer esas cosas que hacemos.

[156E]: Están feas las no lineales verdad, están más bonitas las lineales

[157ED2]: Si (risas)

[158E]: Me podrías escribir el paso que no podríamos hacer porque no es lineal.

No podría hacer $f(am_1+bm_2+cm_3+dm_4)$
$= af(m_1)+bf(m_2)+cf(m_3)+df(m_4)$

porque f no es lineal

****

[159E]: Ahora si pregunta 3.

[160ED2]: Aijole. [161E]: ¿Ahora qué? [162ED2]: Voy a hacer lo mismo que acá creo, que en el b. [163ED2]: Si bueno pues, no si estos (refiriéndose a los elementos del conjunto *I*) me puedan dar este (señalando al polinomio $3+2x$), pero pues lo más seguro es que sí. [164E]: Para que te den que tendrían que ser estos, ¿que tendrían que cumplir para que si te dieran? [165ED2]: Pues que estos tres, sumados me den este. [166E]: Si así nada más sumados tal cual. [167ED2]: Bueno no, por unos escalares. [168E]: A ver, por unos escalares.	
[169ED2]: Es que hubiera puesto uno más sencillo. [170E]: ¿Porque?, ¿se te dificultan los polis? [171ED2]: No pero pues es que si me hubiesen puesto *T (1)* diría que no. (ED2 Escribe al polinomio 3+2x como combinación lineal de los vectores del conjunto *I)* Problema 3 $a(2+x)+b(1+x^2)+c(5+3x-x^2)=(3+2x)$	Se da cuenta que no se requiere que el conjunto sea base para poder determinar la imagen de un vector arbitrario, solo necesita que genere al espacio vectorial de llegada, de hecho solo a la imagen de la transformación lineal.
[172E]: Que necesitarías pedirle a este conjunto, para que tú digas, asegurar que existen *a, b y c*, esos escalares que pusiste ahí en la combinación lineal. [173ED2]: Pues que me generen a este (señalando $3+2x$) [174E]: Ok, nada más con que te generaran, ¿y ya? [175ED2]: Si [176E]: A ver (ED2 Intenta resolver el sistema de ecuaciones para obtener el valor de los escalares *a, b y c*) blema 3 $a(2+x)+b(1+x^2)+c(5+3x-x^2)=(3+2x)$ No pude $2a+b+c5=3$ $b-c=-1$ porque $a+3c=2$ $a=2-3c$	Expresa el polinomio 3+2x como combinación lineal de los elementos de *I* e intenta resolver el sistema de ecuaciones para encantar el valor de los escalares.
[177ED2]: A caray [178E]: Que obtuviste $b=c$, si entonces ya tienes el valor de *b*, entonces que puedes, qué hacer con el valor de b en las otras ecuaciones. [179ED2]: Pues ponerlo en unas, pero no me sirve. [180E]: ¿En cuál? [181ED2]: Pues aquí lo puedo poner (refiriéndose a la ecuación $a+3c=2$), me quedaría lo mismo pero con *b*. [182E]: ¿Y si lo pones aquí? (señalando la ecuación $2a+b+5c=3$).	

(Se queda pensando un rato ED2)
[183ED2]: Lo puedo poner a ver que queda.
[184E]: A ver qué te queda

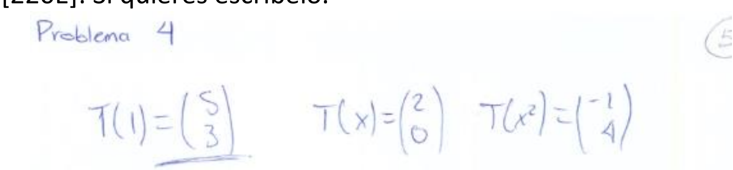
(ED2 Realiza la sustitución de $b = c$ en la ecuación $2a + b + 5c = 3$)

$b - c = 0 \quad b = c$

$2a + 6c = 3$
$a + 3c = 2$ → no existen a y c que cumplan

[185ED2]: Digo que esto no tiene solución.
[186E]: ¿Por qué?
[187ED2]: Pues porque este (señalando $a + 3c$) por 2 es este (señalando $2a + 6c$) y este (señalando $2a + 6c$) por dos no es este (señalando $a + 3c$).
[188ED2]: Pues eso me da otra cosa y no me lo genera, no puedo encontrar eso, no existen esos escalares, o no los conozco nomas, o no se si no existan.
[189E]: ¿No sabes si no existen?
[190ED2]: A no pues yo creo que no existen.
[191E]: Si , ¿aseguras que no existen?
[192ED2]: Pues no sé, no aseguro, bueno pues sí.
[193E]: Si existieran, ¿qué tendrían que cumplir? o ¿qué tendría que pasar ahí?
[194ED2]: Pues si existieran, me habrían salido creo, pues no existen.
[195E]: y entonces si no existen esos escalares.
[196ED2]: entonces pues no puedo encontrar la imagen, porque no tengo forma de con estos tres generar a este al $3 + 2x$.
[197ED2]: Yo digo que no se puede.
[198E]: Y entonces, ¿Qué es lo que no podrías hacer?
[199ED2]: pues no podría encontrar la transformación de cualquier polinomio.
[200E]: pero, ¿Qué paso no podrías hacer?
[201ED2]: Chale.
[202E]: ¿Dónde empezaste?
[203ED2]: pues empecé poniendo estos de *l* aquí.
[204E]: Entonces, ¿pudiste hacer ese paso?
[205ED2]: no.
[206E]: Entonces ponlo aquí , escríbelo
.
****
[207E]: Muy bien ya nada más nos falta la pregunta 4.
[208ED2]: ijole.
[209E]: ¿Qué pasa?
[210ED2]: Pues creo que sí puedo, bueno pues.

[211E]: ¿Qué harías?, dices que sí.
[212ED2]: Bueno no sé, se debería de poder.
[213E]: ¿Por qué? , ¿Por qué deberías de poder?
[214ED2]: Porque β es una base de los polinomios, y pues γ es base de acá de $\mathbb{R}^2$, y pues tengo la transformación de la matriz asociada a eso, y de ahí debería de poder.
[215E]: ¿Y cómo? ¿Cómo dices que deberías de poder?, quiere decir que tienes en mente la manera de hacerlo, si quieres decirnos, cómo se te ocurriría.
[216E]: Esta es la matriz asociada, ¿Qué quiere decir que sea la matriz asociada?
[217ED2]: Jeje (risas). Pues que.
[218E]: O cómo se te ocurriría buscar esa transformación lineal.
[219ED2]: Pues se me ocurriría haciendo que $T(1)$.
[220E]: Si quieres escríbelo.


Problema 4

$T(1)=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $T(x)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $T(x^2)=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

[221E]: ¿Eso lo que tú sabes de la matriz asociada?
[222ED2]: No estoy seguro, pero eso creo, se algo.
[223E]: Aja
[224ED2]: Pues es que se supone que la matriz asociada que le aplican a los elementos de la base β le aplican T y se escriben con estos elementos de la base γ.
[225E]: ¿Cómo puedes escribir?, porque entonces estos no son los elementos de gama.
[226E]: Ósea, le aplicas T a los elementos de γ y luego.
[227ED2]: Pues a lo que le dio, para que estos dos se escriban como combinación de estos
[228E]: Tú dices que este $T(1)$ es entonces igual a quien, según lo que me acabas de decir.
[229ED2]: A caray.
[230E]: Entonces le aplicas T a este al 1, y luego a ese qué le haces.
[231ED2]: Pues a lo que me da, lo escribo como…
[232E]: ¿Cómo qué?
[233ED2]: No sé, como combinación de estos, pero no sé cómo le hubiese hecho.
[234E]: O sea este 5 quién es y este 3 quién es.
[235E]: A ver escribe el $T(1)$ cómo combinación lineal.
[236ED2]: ¿Cómo le pongo?
[237E]: Así $T(1)$ igual como combinación lineal.
[238ED2]: De estos.

$T(1)=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ [239E]: Tú sabes quién es *a* y quién es *b* si conoces la matriz. [240ED2]: Si debería, entonces debe de estar mal si hago esto. [241ED2]: Entonces $T(1)$ seria, ya estoy bien confundido.	
[242E]: a ver ¿Por qué? [243ED2]: Pues es qué ahora si no se si este sea el escalar que multiplicas por este y este sea el escalar que multiplicas por este para que te de lo que da de $T(1)$. [244E]: Pero tu dijiste que para calcular la matriz asociada le aplicabas T a los de β y luego lo escribías como combinación lineal de esos.	Hace uso de la definición de matriz asociada a una transformación lineal para calcular las imágenes de los vectores de la base.
[245ED2]: A entonces eso está mal. [246ED2]: Yo diría que a =5 y b=3. [247E]: Entonces, ¿cuánto te quedaría el $T(1)$? [248ED2]: Pues $T(1)=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ $a=5 \quad b=3$ [249E]: Y lo demás, entonces, ¿quién sería el $T(x)$ y el $T(x^2)$? $T(x)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $T(x^2)=\begin{pmatrix}-1+4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	
[250E]: Mjj ok, y entonces como encontrarías explícitamente la transformación lineal, porque hay no la has encontrado, ¿verdad que no? [251ED2]: No. [252E]: Entonces como le harías para encontrar la transformación para cualquier polinomio de grado 2. [253ED2]: Pues cualquier polinomio seria (ED2 escribe T de un polinomio arbitrario de grado 2) $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_0(T(1))+a_1T(x)+a_2T(x^2)$ [254E]: ¿Eso dijimos que lo puedes hacer? [255ED2]: Porque es lineal. (ED2 Sustituye los valores de las imágenes de $T(1), T(x), T(x^2)$)	Establece la conexión de matriz asociada a una transformación lineal y el tópico de extensión lineal para calcular la imagen de un polinomio arbitrario.

<table>
<tr>
<td>

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0(T(1)) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2)$$
$$= a_0 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[256E]: Si quieres así lo podemos dejar, ya solo dinos que seguiría hacer, platícanoslo.
[257ED2]: No más, pues creo que esta es la transformación, a los a_0 los multiplica por este (señalando el vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$), y que a los a_1 por este (señalando el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$), y a este ($a_2$) por este $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

TABLA DEL ESTUDIANTE ED7

Extractos de la entrevista	**Explicación breve del contenido de la primera columna**
[1ED7]: Y sería lo mismo que T de esta combinación lineal. [2E]: Mmjj, entonces el paso este de la segunda igualdad queda justificado, ¿Por qué? [3ED7]: Porque dice que es una transformación lineal y distribuye suma y saca escalares. [4E]: Ok, muy bien. ****************** [5E]: Entonces la pregunta 2 [6ED7]: Yo pensaría en una estrategia similar a esta (señala la pregunta 1), pero como me dices que no es lineal no necesariamente va a sacar la suma. Entonces creo que no es posible. [7ED7]: Aja [8ED7]: Yo intentaría hacer lo mismo que acá, así verla como una combinación lineal de los elementos de S, y entonces ya nada más aplicar la función a ese elemento y como aquí me dan las respectivas imágenes pues entonces decir que la imagen de ese elemento seria la imagen de la combinación. [9ED7]: Pero como no necesariamente sé que saca sumas o saca escalares no puedo garantizar el encontrar esa imagen. [10E]: Y no podrías como pensar en otra estrategia que no fuera la que usaste en la pregunta 1, ¿no se te ocurre otra forma? (el estudiante se queda pensando piensa un momento) [11ED7]: No. [12E]: Se te podría ocurrir así como por ensayo y error, encontrar una transformación no lineal que cumpla con esas condiciones. (El estudiante se queda pensando). [13ED7]: Pues trataría de ver como asigna cada elemento, por ejemplo aquí dice que F de ese elemento da 1 entonces trataría de hacer algo así. (Se queda pensando po unos minutos más). [14ED7] No se me ocurre [15E]: Si quieres pasamos a la pregunta 3 y ahorita regresamos. *********************** [16ED7]: mmm…. Trataría de hacer lo mismo que en el ejemplo 1, y ver si se puede escribir como combinación lineal de los elementos de *l.* (ED7 intenta escribir al polinomio *3+2x* como combinación lineal de los elementos de *l*)	Identifica que el vector v se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S. Identifica o tiene claro cuando una transformación no es lineal. . Expresa el polinomio 3+2x como combinación lineal de los elementos de *l* e intenta resolver el sistema de ecuaciones

<table>
<tr>
<td>

6 $3x\ 2x = a_1(2+x) + a_2(1+x^2) + a_3(5+3x-x^2)$

$= 2a_1 + xa_1 + a_2 + a_2x^2 + a_3 \cdot 5 + 3a_3x - a_3x^2$

$3+2x \quad 3x^2 \quad = (2a_1+a_2+5a_3) + (a_1+3a_3)x + (a_2-a_3)x^2$

[17E]: Entonces en este caso ¿qué debería de cumplir el conjunto l para que tu pudieras asegurar que existan esos escalares?
[18ED7]: Que fuera linealmente independiente.
[19E]: ¿Quieres que sean linealmente independientes?
[20ED7]: Me gustaría que fueran base.
[21E]: Ah, ok.

(ED7 intenta encontrar los valores de la combinación lineal del polinomio *3+2x*)

$2a_1+a_2+5a_3=3$

$a_1+3a_3=2 \quad a_1=-\frac{3}{2}a_3$

$a_2-a_3=0 \quad \Rightarrow a_2=a_3$

$a_1=\frac{2-3a_3}{2}$

$2\left(\frac{2-3a_3}{2}\right)+a_3+5a_3=3$

$2-3a_3+a_3+5a_3=3$

$3a_3=1$

$a_3=\frac{1}{3}=a_2$

$a_1=\frac{2-3(\frac{1}{3})}{2}=\frac{1}{2}$

$2(2-3a_3)+a_3+5a_3=3$

$4-6a_3+6a_3=3 \quad 4=3$ X

$3+2x=\frac{1}{2}(2+x)+\frac{1}{3}(1+x^2)+\frac{1}{3}(5+3x-x^2)$

[22ED7]: Ya nada más aplico la transformación a la combinación.
[23E]: ¿El *2x* si nos sale?
[24ED7]: A ver (ED7 checa si la combinación lineal es igual al 3+2x pero E y ED7 se dan cuenta que no es correcta la combinación lineal).
[25ED7]: Entonces el sistema no tiene solución, entonces no se puede escribir como combinación lineal de ellos.
[26ED7]: Es que aquí sería bueno saber cuánto vale la T en el 1, bueno me gustaría, y en x y x^2 en la base canónica y así ya nada más sustituyo en esos valores

</td>
<td>

para encantar el valor de los escalares.

Se da cuenta que no se requiere que el conjunto sea base para poder determinar la imagen de un vector

</td>
</tr>
</table>

[27E]: ¿Y ocuparías que este fuera base? [28E]: Por ejemplo si nada más generara. [29E]: Porque para base ocupas que sea independiente y que genere, si por ejemplo tu conjunto este generara para asegurar que existen los escalares para cualquier vector en general, y conocieras las imágenes. [30E]: ¿Crees que se podrían entonces determinar la imagen de cualquier vector si este generara? [31ED7]: Si porque si este generara sería base porque la dimensión de P_2 es 3 entonces si este generara a cualquier vector ya es base, entonces como es lineal aplicaría la transformación a la combinación lineal. [32E]: Ok, y si fuera un conjunto que solo generara y que no fuera base, que tuviera por ejemplo otro vector, y que si te alcanzaran a generar los polinomios pero que no fueran linealmente independientes, entonces ¿si podrías encontrar los coeficientes de la combinación lineal por qué generan? [33ED7]: Si [34E]: Lo único que tendrías es que esos coeficientes no serían únicos, ¿Estás de acuerdo? [35ED7]: Si.	arbitrario, solo necesita que genere al espacio vectorial de llegada, de hecho solo a la imagen de la transformación lineal.
[36E]: Aun así, ¿podrías encontrar la imagen de cualquier vector?, o la transformación que es lo mismo, ¿si se podría? o a fuerzas tendrías que tener una base. [37E]: Porque aquí en la pregunta 1 cuando generalizaste dijiste tengo mi espacio vectorial y mi base. [38ED7]: Si. [39E]: Entonces esa es la pregunta, si tiene que ser una base o puede ser nada más que genere. [40ED7]: Bueno si generara únicamente, como usted dijo no serían únicos los coeficientes, entonces variaría el valor de T para cada vector, y como los coeficientes son diferentes me daría diferente imagen para ese vector entonces no sé si sea correcto, porque, bueno la transformación lineal es una función que distribuye suma y saca escalares, pero no necesariamente tiene que ser biyectiva o algo así verdad. [41E]: Mmjj. [42ED7]: Entonces yo creo que si se puede, pero, me está diciendo que a un mismo vector del dominio le corresponden dos vectores del contradominio y ya no sería una función, entonces si necesito que sea base. [43E]: Ok, pasamos a la pregunta 4.	Se da cuenta que para calcular la imagen de cualquier vector en R^3 requiere que le den tres vectores que formen una base y sus imágenes.
** [44E]: ¿Que vas a hacer? [45ED7]: Intentar ver como es la matriz, me dice que le aplico la función al primer vector y me dice que… (ED7 empieza a escribir lo que hace la transformación a $1, x, x^2$)	Hace uso de la definición de matriz asociada a una transformación lineal para calcular las imágenes de los vectores de la base.

Problema 4 $T(1) = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $T(x) = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $T(x^2) = -1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ [46ED7]: Pues si puedo saber que le hace esta transformación lineal a cada elemento de P^2. [47E]: ¿Si? ¿Por qué? [48ED7]: Porque igual hagarro la combinación lineal de la base. [49E]: Mmjj. [50ED7]: Y le aplico la función a ese vector, y lo hago combinación de estos elementos, y como ya sé que por ejemplo la transformación del vector 1 me da esta distribución, por ejemplo sea P que pertenece a P^2 que va a ser… (ED7 escribe a T (p)) Sea $p \in P_2(\mathbb{R})$ $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $T(p) = a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 (T(x^2))$ [51ED7]: Entonces solo voy a sustituir estos valores y voy a multiplicar por el respectivo coeficiente que lo acompaña y ya con eso voy a poder representar cada elemento de aquí (señalando R^2). [52E]: Ok, ¿Siempre que tienes la matriz asociada puedes determinar la transformación? [53ED7]: Si, pero para eso es necesario que tengamos las bases.	Establece la conexión de matriz asociada a una transformación lineal y el tópico de extensión lineal para calcular la imagen de un polinomio arbitrario.

TABLA DEL ESTUDIANTE ED8

Extractos de la entrevista	**Explicación breve del contenido de la primera columna**
[1E]: Vamos con la pregunta 1. [2ED8]: Primero queremos encontrar T de esto (señalando $2v_2 - 3v_1 + v_3$), lo voy a ir escribiendo, ¿está bien? [3E]: sí, sí, sí. (ED8 encuentra la imagen de $2v_2 - 3v_1 + v_3$) a) $T(2v_2-3v_1+v_3) = 2T(v_2) - 3T(v_1) + T(v_3)$ ya que T es t.l. [4E]: ¿Por qué es posible hacer este paso? (señalando $2\,T(v_2) - 3\,T(v_1) + T(v_3)$) [5ED8]: Ya que T es lineal, y pues esto es igual a… (ED8 sustituye los valores de las imágenes $v_1,\ v_2$ y v_3) a) $T(2v_2-3v_1+v_3) = 2T(v_2) - 3T(v_1) + T(v_3)$ ya que T es t.l. $= 2\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ operaciones en $\mathbb{R}^2$ $= \begin{pmatrix}22\\32\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}15\\24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ $= ($ [6E]: Si quieres este hasta aquí ya nada más es realizar cuentitas. [7ED8]: Si *************** [8E]: Pasamos al b) [9ED8]: Si se puede, si este lo podemos escribir como combinación lineal de estos tres, entonces si podemos sacar la imagen. [10E]: ¿Porque se te ocurrió eso de expresarlo como combinación lineal o porque se te vino a la mente? [11ED8]: Pues porque los únicos datos que tenemos son estos, lo que nos dan son estos vectores y sus imágenes, entonces pues no sé. [12E]: Ok entonces escríbelo. (ED8 escribe a v como combibnacuion lineal de $v_1, v_2\ y\ v_3$) b) Escribamos a v como $v = \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ [13E]: Porque crees que si existen esos $\propto's$. [14ED8]: No, no estoy segura, por eso decía que si a v lo podemos	Encuentra la imagen de una combinación lineal específica usando las propiedades de la transformación lineal y las imágenes de los vectores que conforman la combinación lineal.

<table>
<tr>
<td>
escribir como combinación lineal sí, pero la verdad no estoy segura.
[15E]: ¿Cómo podrías comprobar que existen?
[16ED8]: Pues haciendo las cuentitas, y si $\propto_1, \propto_2\ y\ \propto_3$ existen, pues entonces, ósea si los puedo encontrar lo puedo escribir como combinación lineal ya puedo encontrar la imagen de este (señalando v).
(ED8 hace los cálculos para encontrar el valor de $\propto_1, \propto_2$ y $\propto_3$)
b) Escribamos a v como
$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Por i
$\Rightarrow 5 = 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 4\alpha_3 \longrightarrow 5 = 3(-1) + 8(2) + 4\alpha_3$
$4 = 2\alpha_1 \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 2}$ $5 = -3 + 16 + 4\alpha_3$
$-3 = 3\alpha_2 \Rightarrow \underline{\alpha_2 = -1}$ $5 - 13 = 4\alpha_3$
$-8 = 4\alpha_3$
$\alpha_3 = -2$
</td>
<td>
Expresa el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
[17ED8]: Como si fue posible encontrar $\propto_1, \propto_2$ y $\propto_3$ entonces v si lo podemos escribir como combinación lineal de $v_1, v_2\ y\ v_3$ y pues ya ay sacamos la imagen.
(ED8 calcula la imagen de v)
$T\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = T\left(-\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_3 = \alpha$
$= -\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
[18E]: Aquí en este paso señalando $\left(T\left(-\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ tú dijiste se vale sacar escalares y separa la suma, esos son dos procesos diferentes y tú lo hiciste los dos en un solo paso, entonces, ¿si se vale hacer los dos al mismo tiempo?
[19ED8]: Si en un teorema era equivalente hacer los tres, era lo mismo en una equivalencia me acuerdo que la ponían solamente separaba suma y en otra que sacaba los escalares y en otra que estaba todo junto.
[20E]: ¿Cómo se llama cuando es todo junto sumas y múltiplos?
[21ED8]: ¿Cómo se llama?
[22E]: En álgebra lineal.
[23E]: ¿Cómo se llama cuando se puede hacer eso?
[24ED8]: A una combinación lineal.
[25E]: Entonces ese teorema que decía dice que es lo mismo separar suma y sacar escalares que qué cosa en términos de combinación lineal.
[26ED8]: Pues que, no se creó que no entendí bien la pregunta.
[27E]: Es que tú dices que es lo mismo, o sea que las dos separadas las puedes hacer juntas.
</td>
<td>
Encuentra la imagen de un vector en específico de R^3 a través de las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.
</td>
</tr>
</table>

[28E]: Ahí no hay solo suma ni hay solo múltiplos, puedes ver en ese renglón una combinación lineal.
[29ED8]: Mmjj
[30E]: ¿Cómo dónde estaría?
[31ED8]: Pues este es una combinación lineal (señalando $\left(-\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$)
[32E]: ¿Y del otro lado que hiciste?
[33ED8]: Pues los separa por la imagen de cada vector.
[34E]: Y si la combinación lineal es suma de múltiplos, ¿Qué te quedo de este lado?
[35ED8]: Pues otra combinación lineal pero de las imágenes de los vectores.
****
[36E]: Ok, si quieres el c)
[37ED8]: Pues este es prácticamente análogo al caso anterior, solo que en este caso *v* sería un vector arbitrario como dice aquí entonces sería (x, y, z) y pues igual si este lo podemos escribir como combinación lineal de estos tres vectores pues entonces sí.
[38E]: ¿Y este sería igual que acá? o ¿Cómo identificarías si es posible expresarlo?
[39ED8]: Pues si básicamente que te quedarían, seria básicamente repetir todo solo que aquí en vez de poner 5 igual a esto sería *x*=esto mismo, $y = 2\alpha_1$ y, $z = 3\alpha_2$ y en si solo cambiaría la igualdad por el lado izquierdo.
[40E]: ¿Y qué condiciones deberían de cumplir los tres vectores para que aseguraras que ese vector si se puede escribir como combinación?
[41ED8]: Pues que sean linealmente independientes.
[42E]: ¿Qué sean linealmente independientes? ¿Para qué?
[43ED8]: Para que estos tres sean una base y como es una base pues ya genera $\mathbb{R}^3$ y pues ya cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de estos tres.
[44ED8]: Voy a hacer las cuentitas.

(ED8 escribe a v como combinación lineal de v1, v2 Y v3)

c) $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$$

[45E]: También hay algunos criterios rápidos en los para decidir si es base o no sin hacer cuentas, podrías aplicar un criterio rápido sin hacer las cuentas de encontrar los $\alpha's$ viendo como son v_1, v_2 y v_3.
[46ED8]: Pues que si no son linealmente independientes descartamos

que es base. [47E]: ¿Si recuerdas criterios rápidos para ver si son independientes? [48ED8]: Pues si uno no se puede escribir como combinación lineal de los otros dos y así, por ejemplo aquí me podría dar cuenta de que este es linealmente independiente a estos dos porque aquí tenemos un cero y aquí en este , y aquí en eso no y pues igual. [49E]: ¿Y que provocan esos ceros? [50E]: ¿Porque están relacionados con que sea linealmente independiente? [51ED8]: Pues que por ejemplo si aquí tienes un cero entonces tienen que multiplicar a este y a este por cero entonces ya todo esto se haría cero, y pues te quedaría que *3=4* y pues no. [52E]: Entonces, eso lo hiciste con el cero de aquí abajo verdad. [53ED8]: Si en este caso aplicaría para este y en este pues igual para este. [54E]: Viendo esas relaciones, ¿necesitas hacer esas cuentas que ibas a hacer? [55ED8]: No, es lo que iba a decir que se hace como por mecánica. [56ED8]: Eehh pues iba a hacer lo mismo que aquí. [57E]: ¿Tú puedes asegurar esa igualdad que escribiste aquí sin hacer nada de cuentas? [58ED8]: Si porque como son linealmente independientes, y estos tres son tres que es igual a la dimensión de $\mathbb{R}^3$, entonces ya por un teorema si este conjunto que tiene a v_1, v_2 y v_3 tienen la misma dimensión y los vectores son linealmente independiente entonces ya es base y como ya es base genera a todo $\mathbb{R}^3$ y podemos escribir a cualquier vector como combinación lineal de los tres vectores. [59E]: Muy bien entonces, qué seguiría para resolver el problema. [60ED8]: Pues si se puede encontrar la imagen, pues lo voy a dejar en general.	Encuentra la imagen de cualquier vector en R^3 usando las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.
(ED8 calcula la imagen de *v*) $$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$	
[61E]: Y en general, ¿podrías obtener la imagen para cualquier vector y cualquier transformación lineal para cualquier espacio vectorial que te den? [62ED8]: mmm… si ya te dan la base y te dan la transformación pues si para cualquier vector este es como un caso particular. [63E]: Pero, ¿necesitarías conocer la transformación? [64ED8]: Bueno con que ya te digan que T es lineal ya puede obtener la imagen, pero pues si no es lineal pues… [65E]: Y si yo te digo por ejemplo sea B una base y T lineal, ¿ya con eso puedes calcular la imagen de un vector?	Es capaz de encontrar la imagen de cualquier vector de cualquier espacio vectorial a través de las imágenes de los vectores de una base de este espacio vectorial.

[66ED8]: Si.	
[67E]: ¿Solo diciendo T lineal y la base?	
[68ED8]: Pues sí.	
[69E]: Puedes poner en otra hoja, ahora el espacio es $\mathbb{R}^2$, campo real y la base es la canónica y *T* es lineal, ¿Puedes encontrar la imagen de (1,1)?	
[70ED8]: Ah ya, no, entonces necesitas tener *T* de algunos por ejemplo en este caso necesitarías saber cómo es T (1,0) y T (0,1) si no te dan la transformación.	
[71E]: OK	
******************	
[72E]: Pasamos al 2.	
[73ED8]: No se puede porque f no es lineal, aunque pusiéramos escribir a este como combinación lineal de las matrices en S, pues no podemos escribir como combinación lineal de las imágenes de estas (elementos de S).	
[74E]: ¿Es posible no encontrarlas o dices que no existe?	
[75ED8]: Que no se puede encontrar la imagen de este (señalando al vector ***)	
[76E]: Mmjj.	
[77ED8]: ¿Le pongo que no es posible?	
[78E]: Si y porque	
2. a) No es posible, ya que f no es lineal.	
***********	
[79E]: En el inciso c)	
[80ED8]: Pues el mismo caso, por la misma razón no se puede porque F no es lineal.	
[81E]: No se puede si lo tratas de hacer como el problema o la pregunta 1, entiendo que es lo que tú quisieras hacer.	
[82E]: Si sigues como hiciste en problema 1, ¿Qué es donde no puedes?, ¿Qué es lo que te impide?	
[83ED8]: Cuando tienes…	
ED8 escribe	
b) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(\alpha_1 (A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D)$	
[84ED8]: Y pues aquí ya no puedes escribirlo como $\propto_1 F(a) + \propto_2 F(b)$ y asi porque F no es lineal.	Identifica o tiene claro cuando una transformación no es lineal.
[85E]: ¿Y si no es lineal que no cumple?	
[86ED8]: Que no separa suma, ni saca escalares.	
[87E]: ¿Ni una de las dos cosas? ¿Para qué no sea lineal es obligatoria que no cumpla las dos propiedades?	
[88ED8]: No con que no cumpla una ya no es lineal.	
[89E]: Muy bien. ¿Y no habría como otra manera de encontrar la imagen?	

¿Qué datos necesarias que te dieran para poderla encontrar?
[90ED8]: Ahorita no sé.

****

[91E]: Muy bien si quieres pasamos a la pregunta 3.
[92ED8]: Pues sí.
[93E]: ¿Si es posible?
[94ED8]: Es que estoy viendo si son linealmente independientes.
[95E]: Si si fuera, ¿Qué pasaría, o sea para que quieres que sean linealmente independientes?
[96ED8]: Para ver si es base. Para ver si generan los polinomios de grado menor o igual a 2.
(ED8 calcula si los elementos de *I* son linealmente independientes)

3.

$$3+2x=\alpha_1(2+x)+\alpha_2(1+x^2)+\alpha_3(5+3x-x^2)$$
$$=(2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3)+(\alpha_1+3\alpha_3)x+(\alpha_2-\alpha_3)x^2$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_2-\alpha_3=0 \quad \Rightarrow \alpha_2=\alpha_3$$
$$\alpha_1+3\alpha_3=2 \quad \Rightarrow \cancel{\alpha_1=2-3\alpha_3} \qquad \alpha_3=\frac{2-\alpha_1}{3}$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=3 \quad \Rightarrow 2\alpha_1+\alpha_3+5\alpha_3=3$$
$$2\alpha_1+6\alpha_3=3$$
$$\alpha_1=\frac{-6\alpha_3+3}{2}$$
$$2\alpha_1+\frac{2-\alpha_1}{3}+5\left(\frac{2-\alpha_1}{3}\right)=3$$
$$2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{3}-\frac{5\alpha_1}{3}=3-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}$$
$$\frac{6\alpha_1}{3}-\frac{\alpha_1}{3}-\frac{5\alpha_1}{3}=\frac{9}{3}-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}$$
$$0=$$

Expresa el polinomio 3+2x como combinación lineal de los elementos de *I* e intenta resolver el sistema de ecuaciones para encantar el valor de los escalares.

[97ED8]: Creo que los polinomios no son linealmente independientes.
[98ED8]: Es que creo que uno de estos es combinación lineal de los otros dos.
[99E]: Es imposible que si tienes un conjunto de tres polinomios y esos son dependientes que uno es combinación de los otros, no podría existir otro conjunto que no sean esos tres pero que tengan esa misma propiedad, pero que el $3+2x$ si sea combinación lineal de aquellos.
[100ED8]: Pues si ese conjunto es base de $P_2(x)$ si…
[101E]: Pero si fueran dependientes.
[102ED8]: A dependientes.
[103ED8]: mmm… mmm.
[104E]: El problema aquí es de que no sea base o si es culpa de que no tenga otra propiedad relacionada con base.
[105ED8]: mmm… o sea, ¿Qué si me falta otra propiedad o cómo?
[106E]: ¿Qué si el problema radica en que no sea base?, o alguna otra

Se da cuenta que para calcular la imagen de cualquier vector en R^3 requiere que le den tres vectores que formen una base y sus imágenes.

propiedad relacionada con base pero no precisamente base.

$$l_2=\{(1+x),(2+x),(4+2x)\}$$

[107ED8]: Si te cambio el *l* por ese otro l_2 , ¿se podrá resolver el problema con este otro conjunto?
[108E]: Aplicando el mismo procedimiento que utilizaste anteriormente. Y que en ese orden sean las mismas imágenes que te dan.
[109E]: ¿Qué le revisaste primero al de *l*?
[110ED8]: Que fueran linealmente independientes.
[111E]: Podrías revisarle lo mismo a este.
[112ED8]: Si eso estaba haciendo.
[113E]: Y qué opinas, ¿son dependientes o independientes?
[114ED8]: Creo que si son independientes.
[115E]: ¿Cómo comprobarías que si son independientes?
(ED8 empieza a escribir cálculos para ver si son linealmente independientes)

$$l_2=\{(1+x),(2+x),(4+2x)\}$$

$$4+2x=\alpha_1(1+x)+\alpha_2(2+x)$$

$$\Rightarrow\quad 4=\alpha_1+2\alpha_2$$

$$2=\alpha_1\cancel{+}2\alpha_2$$

[116E]: ¿Lo de dependencia e independencia lineal en términos de combinaciones lineales te acuerdas como se decía? Un conjunto es linealmente independiente.
[117ED8]: Si la única forma de escribir un vector como combinación lineal de los otros es que los escalares sean cero.
[118E]: ¿Eso es dependiente o independiente?
[119ED8]: Independiente.
[120E]: ¿Entonces dependiente que sería?
[121ED8]: Que al menos un escalar sea distinto de cero.
[121E]: Entonces existe una combinación lineal que no es trivial.
[122E]: ¿Ahí puedes poner uno como combinación lineal de los otros?
[123ED8]: mmm…
[124E]: Así al tanteo.
[125E]: Dinos, ¿Cuál es el caso más fácil de combinación lineal?
[126ED8]: Pues los dos en uno, los dos coeficientes en uno.
[127E]: A ok eso sería como una suma directa, verdad.
[128E]: Entonces podríamos buscar eso, ¿se ve que uno sea suma de los otros dos?
[129ED8]: No.
[130E]: Y la otra operación que viene, aparte de suma seria,

¿combinación lineal de suma de?
[131ED8]: Productos
[132E]: Aja, entonces podemos ver si uno es producto de otros, ¿si son múltiplos?
[133E]: Entonces a ver, ¿el primero parece múltiplo del segundo?, y, ¿el segundo parece múltiplo del tercero?
[134ED8]: A si es 2 veces este.
[135E]: ¿Entones puedes decidir si es linealmente independiente o dependiente?
[136ED8]: Es linealmente dependiente.
[137E]: ¿Si hicieras las cuentas con los $\alpha's$ que pasaría con los $\alpha's$?
[138ED8]: mmm… pues en este sería cero y en este se haría 2.
[139E]: Muy bien entonces es dependiente, muy bien entonces es lo mismo que en el original.
[140E]: ¿Y qué hiciste después de ver en el otro caso que era dependiente?
[141ED8]: pues no se puede
[142E]: ¿No podemos encontrar la imagen del *3+2x*?
[143ED8]: mmjj…
[144E]: ¿Por qué?
[145ED8]: Porque esta no es base, entonces no genera a todo el conjunto.
[146E]: Pero, ¿necesitamos a todo el conjunto?, nada más necesitamos la imagen de *3+2x*.
ED8 piensa un momento
[147E]: Hace rato querías que fuera independiente para que fuera base, ¿verdad?
[148ED8]: Si
[149E]: ¿Y de qué te sirve que sea base?
[150ED8]: Pues que te genera a todo el conjunto.
[151E]: Pero, ¿ahorita los ocupamos a todos?
[152ED8]: Mmm…
[153E]: Entonces de que te sirve que te genere a todos para encontrar la imagen de *3+2x.*
[154ED8]: Pues para asegurar que se puede escribir como combinacion lineal.
[155E]: Ok es una manera de asegurar.
[156E]: Entonces esa manera no funcionó, ¿eso te asegura que no se puede escribir como combinación lineal de los otros?
[157ED8]: No necesariamente.
[158E]: Ok, podrías explorar otra forma para ver si se puede.
[159E]: O crees que definitivamente no se va a poder poner como combinación lineal.
[160ED8]: mmm… es que creo…
[161E]: Te acuerdas ¿Cuál es el conjunto de todas las combinaciones lineales?
[162ED8]: El Span
[163E]: Ok, entonces qué relación se ocupa aquí entre el *3+2x* y el span

de l_2. [164ED8]: Pues que *3+2x* este en el Span de l_2. [165E]: Ok, si esta en el Span ¿qué podemos hacer? [166ED8]: Podemos escribir a *3+2x* como combinación lineal de l_2. [167E]: Ok, podrías checar a ver si se puede. (ED8 hace cálculos para ver si *3+2x* está en el Span (l_2)) $3+2x=\alpha_1(1+x)+\alpha_2(2+x)$ $3=\alpha_1+2\alpha_2$ $\quad \alpha_1=3-2\alpha_2$ $2=\alpha_1+\alpha_2$ $\quad \alpha_2=2-\alpha_1$ $\alpha_1=3-2(2-\alpha_1)$ $=3-4+\alpha_1$ [167E]: Ok y suponemos que las imágenes son las mismas que tenías haya. (ED8 termina de calcular la imagen de *3+2*) $\alpha_1=3-2(2-\alpha_1)$ $=3-4+\alpha_1$ $T(3+2x)=T((1+x)+(2+x))=T(1+x)+T(2+x)=\binom{3}{0}+\binom{1}{1}=\binom{4}{1}$ [168E]: Primero decías que el problema tenía que ver con las bases, ¿Qué dices ahora? [169ED8]: Si *3+2x* pertenece al Span de *l* si se puede, si no, no se puede.	Se da cuenta que no se requiere que el conjunto sea base para poder determinar la imagen de un vector arbitrario, solo necesita que genere al espacio vectorial de llegada, de hecho solo a la imagen de la transformación lineal.
** [170E]: Falta la 4. [171ED8]: Ay no me acuerdo. [172E]: ¿No te acuerdas? [173ED8]: No me acuerdo como se sacaba la matriz. [174E]: A yaaa. (ED8 empieza a escribir las imágenes de las bases que le dan en el problema) 4. $T(1)=\binom{5}{3}=\alpha_1\binom{1}{0}+\alpha_2\binom{1}{1}$ $T(x)=\binom{2}{0}$ $T(x^2)=\binom{-1}{4}$ [175E]: ¿Por qué quieres la imagen de esos? [176ED8]: Para a partir de ahí encontrar la trasformación, como este es	Hace uso de la definición de matriz asociada a una transformación lineal para calcular las imágenes de los vectores de la base.

base de P_2 entonces escribimos a cualquier vector como combinación lineal de estos y a partir de ahí sacamos T.

[177E]: Ok, ahorita no te dieron explícitamente la imagen de cada uno, pero tu hay estas poniendo la imagen de cada uno de la base, ¿eso de dónde salió?

[178ED8]: De la matriz, la primera columna que es la imagen del primer vector, la segunda columna es la imagen del segundo vector, y la tercera columna es la imagen del tercer vector si mal no recuerdo jeje.

[179E]: ¿Y para qué quieres la otra base γ? o ¿no se utiliza?

[180ED8]: Si se utilizaba.

[181E]: Te acuerdas que significa en la notación que este γ como superíndice.

[182ED8]: Que va de β a γ.

[183E]: ¿Qué significa eso?

[184ED8]: Pues que llega a esa base.

[185E]: ¿Te acuerdas que significa que llegue a esa base?

[186ED8]: Pues que se escribe como combinación lineal de esta base de gama

[187E]: ¿Quién?

[188ED8]: La imagen de cualquier vector se va a escribir como combinación lineal de estos los vectores de γ.

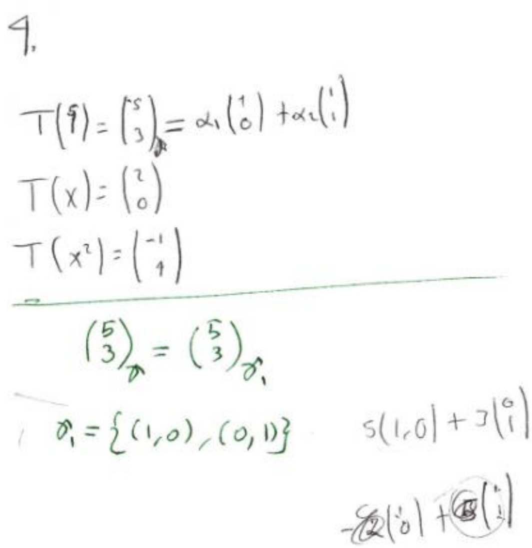
[189E]: Y en lo que llevas, ¿Ya estas incluyendo esa combinación lineal? o ¿Dónde aparecería?

[190ED8]: Pues al aplicarle T a cualquier otro vector de P_2.

[191E]: ¿A cualquiera?, en particular al 1

[192ED8]: A ok

(ED8 escribe las imágenes de $1, x, x^2$)



[193E]: ¿Si sabes quienes son esos α_1 y α_2?

[194ED8]: Pues α_2 es 3 y α_1 es 2.

[195E]: ¿Por qué crees que son esos valores?

[196ED8]: Para que te den el $\binom{5}{3}$.

[197E]: Podría haber aquí un detalle de notación.

[198E]: Por ejemplo este mismo el $\binom{5}{3}$ en la base canónica tengo una base γ_1 que fuera el $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$ [199E]: ¿Es lo mismo el $\binom{5}{3}$ en la base γ, al $\binom{5}{3}$ en la base γ_1? [200ED8]: No. [201E]: ¿Te acuerdas que significa que salga la e de subíndice? [202ED8]: Si que se escribe como combinación de la base γ y este de la base γ_1. [203E]: Aja, y estos que pudiste acá no tienen subíndice [204E]: ¿Qué subíndice deberían llevar? [205ED8]: γ [206E]: γ el original γ. [207E]: Entonces si ahí va a γ , ¿se cumple esto? o ¿qué significa $\binom{5}{3}$? [208ED8]: Que α_1 seria 5 y α_2 seria 3. [209E]: ¿Y el mismo $\binom{5}{3}$ significa lo mismo en las dos bases? [210ED8]: No, los $\alpha's$ serían diferentes. [211E]: ¿Los $\alpha's$ serian diferentes? [212ED8]: En γ y en $\gamma_1$si. [213E]: O sea ese $\binom{5}{3}$ que tienes ahí en la base γ_1, ¿de dónde lo sacaste? [214ED8]: De multiplicar 5 veces por $\binom{1}{0}$ y sumar 3 $\binom{0}{1}$. [215E]: Y ahora en la otra base si fuera la de gama que significa ese $\binom{5}{3}$. [216ED8]: Que es 2 veces $\binom{1}{0}$ + 3 $\binom{1}{1}$. [217E]: Ok, ¿Aquí porque va 5 y 3? [218ED8]: mmm… pues porque ya no tienes otra entrada que te genere la primer entrada [219E]: Ok, ¿Cómo sacas el valor del $\binom{5}{3}$ en la base canónica? [220ED8]: Pues multiplicando el primer vector por 5 y el segundo vector por 3. [221E]: Aja y acá estabas haciendo algo diferente. [222ED8]: Porque es otra base. [223E]: Pero esa es la base γ. ED8 Se queda pensando. [225ED8]: Mmm… entonces podría ser como 5 y -2, no, creo que necesito ese tres. [226ED8]: Es que no entiendo. [227E]: Entonces, ¿no recuerdas como se calculaba la matriz qué representa la transformación? [228ED8]: mmm… [229E]: ¿Por qué ponían notación $\beta - \gamma$? [230ED8]: Porque iba como combinación lineal de los vectores de β a la combinación lineal de los vectores de γ.	Establece la conexión de matriz asociada a una transformación lineal y el tópico de extensión lineal para calcular la imagen de un polinomio arbitrario.

[231E]: ¿Y si van de combinación lineal en combinación lineal pueden cambiar los coeficientes? [232E]: La imagen de una combinación lineal es bajo una transformación lineal, y que tiene de coeficientes. [233E]: O sea, ¿esta difícil encontrar los coeficientes de la imagen? [234ED8]: No, creo que no entiendo. [235E]: Ósea si tienes la combinación lineal y si le aplicas la transformación y dijiste que eso te daba otra combinación lineal, ¿los coeficientes de la otra combinación lineal son difíciles de encontrar? [236E]: Por ejemplo no sabes cuál es T ni cual es el espacio vectorial, pero si te digo que es lineal que puedes decir la imagen de *2u + 3v.* [237ED8]: Que es *2 T (u) +3 T (v)*. [238E]: Y podría ser *4 T (u) +5 T (v).* [239ED8]: No. [240E]: ¿Por qué? [241ED8]: Porque la combinación es única. [242E]: Si, sí .	

TABLA DE EVIDENCIA/CONCEPCIÓN

No.	Evidencia	Concepción
1	Encuentra la imagen de una combinación lineal específica usando las propiedades de la transformación lineal y las imágenes de los vectores que conforman la combinación lineal.	Acción de Extensión lineal
2	Expresa el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.	Proceso Combinación lineal.
3	Se da cuenta que los vectores v_1, v_2 y v_3 son una base de R^3, y generan a cualquier vector de este espacio vectorial.	Objeto de Base
4	Encuentra la imagen de un vector en específico de R^3 a través de las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.	Acción de Extensión lineal.
5	Encuentra la imagen de cualquier vector en R^3 usando las imágenes de los vectores v_1, v_2 y v_3.	Camino a la interiorización de Extensión lineal.
6	Es capaz de encontrar la imagen de cualquier vector de cualquier espacio vectorial a través de las imágenes de los vectores de una base de este espacio vectorial.	Proceso de Extensión lineal.
7	Identifica o tiene claro cuando una transformación no es lineal.	Proceso Transformación lineal.
8	Identifica que el vector v se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S.	Objeto de Base.
9	Propone una transformación no lineal que corresponda a las imágenes de los vectores del conjunto S.	Proceso Transformación lineal.
10	Demuestra que la transformación dada no es lineal con un contraejemplo.	Proceso Transformación lineal.
11	Identifica que no existe una única transformación no lineal a la que puedan corresponder las imágenes de los vectores de S.	Proceso Transformación lineal.
12	Expresa el polinomio 3+2x como combinación lineal de los elementos de *I* e intenta resolver el sistema de ecuaciones para encontrar el valor de los escalares.	Proceso de Combinación lineal.
13	Se da cuenta que para calcular la imagen de cualquier vector en R^3 requiere que le den tres vectores que formen una base y sus imágenes.	Proceso de Extensión lineal.
14	Se da cuenta que no se requiere que el conjunto sea base para poder determinar la imagen de un vector arbitrario, solo necesita que genere al espacio vectorial de llegada, de hecho solo a la imagen de la transformación lineal.	Proceso de Extensión lineal.
15	Hace uso de la definición de matriz asociada a una	Acción de matriz asociada a una

	transformación lineal para calcular las imágenes de los vectores de la base.	transformación lineal.
16	Establece la conexión de matriz asociada a una transformación lineal y el tópico de extensión lineal para calcular la imagen de un polinomio arbitrario.	Esquema de Extensión lineal.
17	Identifica que es más que suficiente que un conjunto genere y que conozcamos sus imágenes para poder calcular la imagen de cualquier vector que pertenezca al Span de este conjunto.	Proceso Extensión lineal.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Nombre: ____ 26/04/2018

Instrucciones: Contesta lo más claro posible y trata de justificar cada paso o afirmación que hagas para resolver cada una de las siguientes preguntas. Si tienes dudas en la redacción de las preguntas puedes pedir apoyo a la persona encargada de aplicar el cuestionario. GRACIAS POR TU AYUDA

Pregunta 1. Determina si el vector dado esta en el Span de S

(a) (2, -1, 1), $S = \{(1,0,2), (-1,1,1)\}$
(b) $2x^3 - x^2 + x + 3$, $S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Pregunta 2. Demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y sólo si $span(W) = W$.

Pregunta 3. Demostrar que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tal que $S_1 \subseteq S_2$, entonces $span(S_1) \subseteq span(S_2)$. En particular, si $S_1 \subseteq S_2$ y $span(S_1) = V$, deduce que $span(S_2) = V$.

Pregunta 4. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces cada vector de ***H*** es una combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$ porque $\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para ***H***?

Pregunta 5. Determina una base para el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$.

La línea

$$x = 2t$$

$$y = -t \qquad\qquad -\infty < t < \infty$$

$$z = 4t$$

Pregunta 6. Sea V el espacio generado por

$$v_1 = cos^2x, \;\; v_2 = sen^2x \text{ y } \;\text{ y }\;\; v_3 = sen^2x$$

Encuentra una base para V.

Pregunta 7. Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 : x = y;\; z = w\}$. Sea $T: U \longrightarrow V$ una función tal que.

$$T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$$

$$T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$$

¿Es T siempre una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Pregunta 8

a. Encuentra transformaciones Lineal es f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$fg = 0 \qquad\qquad pero \qquad\qquad gf \neq 0$$

b. Encuentra transformaciones Lineal es $l: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que:

$$lh = l \qquad\qquad pero \qquad\qquad hl \neq l$$

Pregunta 9. Sean U,V y W espacios vectoriales dados $T_1: U \rightarrow V$ y $T_2: U \rightarrow W$ transformaciones Lineal es. Se define $T: U \rightarrow V \text{ x } W$ como

$$T(u) = (T_1(u), T_2(u))$$

Para todo $u \in U$.

a. Encuentra un caso particular del enunciado, es decir, determina ejemplos de transformaciones Lineal es T_1, T_2 y calcula T. ¿Es T una transformación lineal?
b. ¿Es posible considerar en general, la transformación T como una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

ENTREVISTA

Nombre: ____ 26/04/2018

Pregunta 1. Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ actúa sobre ellos una Transformación lineal T tal que se obtiene $T(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ y $T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

d) ¿Es posible encontrar la imagen de $2v_2 - 3\,v_1 + v_3$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

e) ¿Es posible encontrar la imagen de $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

f) ¿Es posible encontrar la imagen de un vector arbitrario $v \in \mathbb{R}^3$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

Pregunta 2. Sea $s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}$ y se conoce una transformación $F\colon M_{2x2} \to \mathbb{R}$ que es no lineal de la que se obtiene $\mathrm{f}(s) = \{1,1,1,1\}$.

c) ¿Es Posible encontrar $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

d) }¿Es Posible encontrar $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

Pregunta 3. Sea $l = \{2 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ 5 + 3x - x^2\} \in P_2(x)$ y sea una Transformación lineal T: $P_2(x) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{T}(l) = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

a) ¿Es Posible encontrar $T(3 + 2x)$? Si tu respuesta es si encuentra la imagen. Justifica tu respuesta.

Pregunta 4. Supóngase que la Transformación lineal $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene como matriz asociada $[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ donde $\beta = \{1,\ x,\ x^2\}$ y $\gamma = \{(1,0),\ (1,1)\}$.

a) ¿Puede determinar explícitamente dicha transformación lineal?