UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Diseño de una Secuencia Didáctica para Preparatoria Abierta. Suma y Resta de Expresiones Algebraicas con Coeficientes Fraccionarios.

Informe Académico de Desarrollo Profesional para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

Nancy Nava Troncoso

Directoras del Informe Académico de Desarrollo Profesional:

MTI. Mónica del Roció Torres Ibarra

M en M. Elvira Borjón Robles

M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Zacatecas, Zac., agosto, 2019

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado de septiembre de 2017 a julio de 2019.

Número de becario: 862960

Agradecimientos

A mi esposo Miguel y a mi hija Kendra Valeria por su amor, su paciencia y su apoyo para seguir adelante.

A mis padres Hermila y Jesús por haber creído en mí y por su motivación.

A mis hermanos por su comprensión y el apoyo brindado cuando lo necesité.

A mi suegra Ma del Carmen

A la MTI. Mónica del Rocío Torres Ibarra por haberme guiado durante este proyecto.

A la M en M. Elvira Borjón Robles, M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, Dra. Leticia Sosa Guerrero, Dra. Ofelia Montelongo Aguilar, Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y Dr. Iván López Flores, por sus aportes, sugerencias y por su paciencia.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 24 del mes de mayo del año 2019, la que suscribe Nancy Nava Troncoso alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 25601251; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado titulado "Diseño de una Secuencia Didáctica para Preparatoria Abierta. Suma y Resta de Expresiones Algebraicas con Coeficientes Fraccionarios" bajo la dirección de MTI Mónica del Rocío Torres Ibarra, M en M Elvira Borjón Robles y M en C Nancy Janeth Calvillo Guevara.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Nancy Nava Troncoso

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Diseño de una Secuencia Didáctica para Preparatoria Abierta. Suma y Resta de Expresiones Algebraicas con Coeficientes Fraccionarios" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Nancy Nava Troncoso estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión.** Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestria.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 10 de junio de 2019

MTI. Mónica del Rocío Torres Ibarra

M en M. Elvira Borjón Robles

M en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

Resumen

El presente, es el informe de una práctica de desarrollo profesional, que utiliza como enfoque teórico las ideas acerca de visualización matemática para proponer una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de preparatoria abierta, que sirva para guiar en la comprensión de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.

En este trabajo se hace un estudio de antecedentes que demuestran que los adultos no aprenden matemáticas igual que los jóvenes en edad escolar, rescatando con ello la importancia de la educación matemática en el subsistema de bachillerato abierto.

Considerando que uno de los principales retos en los subsistemas abiertos es el autoaprendizaje, se piensa en el diseño de materiales que apoyen a los estudiantes de tal manera que éstos puedan prescindir de un profesor o que recurran a él únicamente en caso de dudas concretas.

Aunado a lo anterior se han encontrado que existen dificultades alrededor del tópico matemático propuesto.

De esta manera, este trabajo tiene por objetivo diseñar y validar una secuencia didáctica utilizando un enfoque cualitativo mediante la metodología de la Ingeniería Didáctica en la que se parte de elementos epistemológicos, didácticos, cognitivos, adaptados al contexto de preparatoria abierta. La secuencia didáctica se encuentra centrada en la visualización matemática mediante el uso de esquemas, pues se consideran como herramienta importante para comunicar información a través de ellos, esto con la finalidad de fomentar la formación de redes de representación mental, las cuales serán extraídas por medio de representaciones semióticas.

Los resultados son analizados a través de la clasificación en niveles de comprensión y redes de representación mental, con la finalidad de evaluar la eficacia de la secuencia propuesta. Estos indican que los participantes fueron capaces de formar redes de representación mental a través de conexiones entre diferentes registros, lo que da idea de que se ha contribuido en la comprensión del tema propuesto.

Palabras Clave: visualización matemática, educación matemática en adultos, comprensión, Ingeniería Didáctica, representaciones semióticas.

Abstract

The present is the report of a practice of professional development, which uses as a theoretical approach the ideas about mathematical visualization to propose a didactic sequence directed to open high school students, that serves to guide in the comprehension of the addition and subtraction of expressions algebraic with fractional coefficients.

In this work, a background study is carried out that demonstrates that adults do not learn mathematics just like young people of school age, thereby rescuing the importance of mathematics education in the open high school subsystem.

Considering that one of the main challenges in open subsystems is self-learning, the design of materials that support students is considered so that they can do without a teacher or resort to it only in case of specific doubts.

In addition to the above, it has been found that there are difficulties around the proposed mathematical topic.

In this way, this work aims to design and validate a didactic sequence using a qualitative approach through the methodology of Didactic Engineering in which it is based on epistemological, didactic, cognitive elements, adapted to the context of open high school. The didactic sequence is centered on the mathematical visualization through the use of schemes, as they are considered as an important tool to communicate information through them, this in order to encourage the formation of networks of mental representation, which will be extracted through of semiotic representations.

The results are analyzed through the classification in levels of understanding and networks of mental representation, in order to evaluate the effectiveness of the proposed sequence. These indicate that the participants were able to form networks of mental representation through connections between different registries, which gives an idea that they have contributed to the understanding of the proposed theme.

Keywords: mathematical visualization, mathematical education in adults, comprehension, Didactic Engineering, semiotic representations.

Índice de contenido

INTRODUCCIÓN 2

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 4

1.1 Antecedentes 4

1.2 Problemática y problema 18

1.3 Objetivo general 19

1.4 Objetivos específicos 20

1.5 Justificación 20

1.6 Alcance o aplicación 21

CAPÍTULO 2. ENFOQUE TEÓRICO 22

2.1 Fundamentos Matemáticos 22

2.2 Visualización Matemática 25

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA 32

3.1 Fases de la Ingeniería Didáctica 33

3.2 Análisis preliminar 34

3.2.1 Análisis Epistemológico 35

3.2.2 Análisis Cognitivo 39

3.2.3 Análisis Didáctico 49

3.2.4 Análisis de Campo 63

3.3 Concepción y análisis *a priori* 64

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN Y RESULTADOS 72

4.1 Implementación 72

4.2 Resultados 76

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN 93

CONCLUSIONES 105

REFLEXIÓN FINAL COMO PROFESOR DE MATEMÁTICAS 107

REFERENCIAS 110

ANEXOS 115

Anexo 1. Diseño final de la secuencia didáctica 115

Anexo 2. Rubrica de las actividades 124

Índice de figuras

Figura 1. Benn's conception of the research domain (FitzSimons, Coben y O´Donoghue, 2003, p. 113)........8
Figura 2. Traducción del Modelo de Berth et al. 1983 (citado en Doyle et al. 2016, p. 24).....13
Figura 3. Tipos de representación de las fracciones según Rodríguez, et al. (2016) 23
Figura 4. Representación gráfica de la suma de fracciones (Rodríguez, et al, 2016, p. 41)......24
Figura 5. Procedimientos planteados por E1, E6 y E14, respectivamente 41
Figura 6. Procedimientos planteados por E2 y E16..41
Figura 7. Procedimiento planteado por E17 42
Figura 8. Procedimiento planteado por E9 43
Figura 9. Procedimientos planteados por E3 y E10..43
Figura 10. Errores evidenciados por E18 44
Figura 11. Errores evidenciados por E8 45
Figura 12. Respuesta de E1 para las operaciones con expresiones algebraicas 46
Figura 13. Respuesta de los estudiantes E15 y E16, respectivamente 46
Figura 14. Solución de E5 para la suma y resta de expresiones algebraicas............................47
Figura 15. Respuesta de E18 47
Figura 16. Opinión de E2 acerca de las fracciones..48
Figura 17. Respuestas de la persona encargada del área académica de preparatoria abierta 49
Figura 18. Libros de texto analizados..50
Figura 19. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 8...50
Figura 20. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 11 y 12...51
Figura 21. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 55...52
Figura 22. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p.58...52
Figura 23. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 106..53
Figura 24. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 109..54
Figura 25. Representaciones Simbólica y Algoritmos, p. 109 54
Figura 26. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 111..55
Figura 27. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 112..56
Figura 28. Matemáticas I, p. 114...57
Figura 29. Matemáticas I, p. 115...57
Figura 30. Matemáticas I, p. 117...58
Figura 31. Matemáticas I, p. 166...58
Figura 32. Matemáticas I, p. 167...59
Figura 33. Matemáticas I, p. 167...59
Figura 34. Matemáticas I, p. 168...60
Figura 35. Matemáticas I, p. 168...60
Figura 36. Matemáticas I, p. 170...61
Figura 37. Matemáticas I, página 193 61
Figura 38. Material de apoyo...62
Figura 39. Documento base para el servicio de Preparatoria Abierta, SEP, 2014, p. 5 64
Figura 40. Cambios realizados en la actividad 1 73

Figura 41. Sexo y edad de los estudiantes encontrados. Fuente: elaboración propia. 74
Figura 42. Estudiantes resolviendo la secuencia propuesta 75
Figura 43. Respuestas a la actividad 1 76
Figura 44. Conversión realizada por P2 77
Figura 45. Respuestas de P1 78
Figura 46. Respuestas para la actividad 2 78
Figura 47. Respuesta de P1 para proceso faltante 79
Figura 48. Tratamiento de P3 80
Figura 49. Respuestas para actividad 3 80
Figura 50. Respuestas de P3 en actividad 3 81
Figura 51. Tratamientos y conversión realizada por P4 82
Figura 52. Respuestas para la actividad 4 82
Figura 53. Respuestas de P1 para actividad 4 84
Figura 54. Respuestas de P6 para actividad 4 85
Figura 55. Respuestas de P2 a actividad 4 86
Figura 56. Respuestas para actividad 5 87
Figura 57. Respuestas de P1 para actividad 5 88
Figura 58. Solución propuesta por P1 88
Figura 59. Respuestas de P2 89
Figura 60. Solución de P3 para primera parte de actividad 5 89
Figura 61. Operaciones de P3 90
Figura 62. Operaciones de P4 90
Figura 63. Operaciones de P5 91
Figura 64. Solución de P5 para actividad 5 91
Figura 65. Operaciones de P6 para actividad 5 92
Figura 66. Opinión de P6 acerca de las actividades propuestas en la secuencia 92
Figura 67. Opinión de P3 acerca de las actividades propuestas 92
Figura 68. Niveles de comprensión obtenidos. Fuente: elaboración propia 97
Figura 69. Red de representación ideal con el total de conexiones 97
Figura 70. Red formada por P1 98
Figura 71. Red de representación asociada a P2 98
Figura 72. Red de representación asociada a P3 99
Figura 73. Red de representaciones formada por P4 99
Figura 74. Red de representación asociada a P5 100
Figura 75. Red de representación para P6 100

Índice de tablas

Tabla 1. Concentrado de análisis a priori 68
Tabla 2. Conversiones y tratamientos por actividad..70
Tabla 3. Codificación para actividad 1 77
Tabla 4. Tratamiento y conversión para actividad 2...79
Tabla 5. Tratamientos y conversión para actividad 3 81
Tabla 6. Tratamientos y conversiones para actividad 4...83
Tabla 7. Tratamientos y conversiones de la actividad 5..87
Tabla 8. Cantidad de tratamientos y conversiones en la secuencia didáctica...........................94
Tabla 9. Tratamientos y conversiones realizadas por cada uno de los participantes................95
Tabla 10. Articulaciones realizadas por los participantes 95
Tabla 11. Confrontación entre análisis a priori y a posteriori 101

Motivación

La razón por la que realice este trabajo está basada únicamente en mi experiencia personal al trabajar en el sistema de preparatoria abierta, considerando que la matemática educativa me puede dar elementos para proponer una solución a problemas detectados.

El motivo principal por el que quise realizar esta práctica de desarrollo profesional es porque al desempeñarme como profesora y/o asesora de matemáticas en una preparatoria abierta, ubicada en la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, pude observar algunos problemas de aprendizaje a los que se enfrentaban los estudiantes. Teniendo en cuenta que a la preparatoria abierta llegan jóvenes y adultos, con distintos tipos de conocimientos previos. Lo que me llevó a plantearme la siguiente cuestión: ¿Cómo es que estos factores afectan el aprendizaje en matemáticas en esos estudiantes y qué puedo hacer yo como asesor para aminorar algunos problemas de aprendizaje de los estudiantes de preparatoria abierta?

De esta manera pude identificar algunos aspectos importantes en el aprendizaje de los estudiantes, como, por ejemplo: algunos de ellos no sabían o no recordaban como se realizaban las operaciones básicas (suma, resta multiplicación, división); posiblemente se debía a que eran estudiantes de edad adulta y la mayoría había dejado pasar tiempo antes de volver a incorporarse a la educación preparatoria, pues esta cuestión no sucedía tan a menudo con estudiantes jóvenes. Sin embargo y en general, la mayoría de los estudiantes de preparatoria abierta (independientemente de su edad) no sabían operar con números racionales, pero esta cuestión también sucede sin importar el subsistema, pues al parecer y según lo que había leído hasta el momento, el problema con las fracciones es universal (por ejemplo, Fazio y Siegler, 2011). Además de esto pude notar que al encontrarse frente a un problema que contenga fracciones, en muchas ocasiones optan por no resolverlo, por considerarlo difícil de antemano.

Se puede observar que en uno de los dos programas de preparatoria abierta no se consideran factores como los conocimientos previos y la edad, pues se maneja el mismo contenido para todos los estudiantes. Por tal motivo, mi idea fue realizar una propuesta en la que los estudiantes pudieran llegar a mejorar el aprendizaje de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, lo que ayudaría a su vez a mejorar el manejo de las operaciones entre fracciones, pues estas tienen usos en temas avanzados, y sobre todo que yo pueda mejorar mi práctica docente en este nivel educativo. Cabe mencionar que en este sistema educativo el papel del asesor no es principal como sucede en la educación escolarizada. Por lo que nos interesa diseñar un instrumento en el que el estudiante pueda lograr un autoaprendizaje.

INTRODUCCIÓN

La educación para adultos, relacionada directamente con la educación abierta, es un tema que ha sido menos estudiado que la educación formal. En México existe preocupación por la educación de jóvenes y adultos pues se ha notado que existe gran cantidad de personas que no han concluido la primaria y secundaria, es por esto por lo que se crea el Instituto Nacional para la Educación de Adultos (INEA) en el cual se les ofrece concluir primaria y secundaria a personas de 15 años o más. Así mismo se realizan campañas alfabetizadoras con la finalidad de que personas adultas aprendan a leer y escribir, así como algunos conocimientos matemáticos.

Por su parte, en la educación matemática para adultos, se reconoce que estos no aprenderán de manera similar a como lo hacen los niños. Por ejemplo, Ávila (1993, 2003) expresa que existe preocupación por la enseñanza de las matemáticas en personas adultas reconociendo la existencia de un saber previo que se ha ido adquiriendo a través de su experiencia, razón por la cual se propone que los materiales para su enseñanza sea mediante situaciones que se presenten en contextos reales.

De esta manera un elemento que se debe tener en cuenta es el contexto educativo, institucional y escolar; en este caso está determinado por la educación preparatoria en el sistema abierto. Aquí el profesor no juega el papel principal, su papel lo toman el diseño de materiales que fomenten el autoaprendizaje de los estudiantes de preparatoria abierta. Así pues, las determinaciones que debieron ser tomadas en cuenta en el presente trabajo se obtuvieron a través del estudio de los antecedentes, de mi experiencia como profesora en educación abierta y finalmente mediante mi trayectoria en la maestría.

Por otra parte, las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza del álgebra determinan la importancia de su presencia en los diferentes niveles educativos. Esto no es la excepción en la educación abierta, pues se puede notar la presencia de los temas algebraicos, siendo uno de ellos la suma y resta de expresiones algebraicas. Sin embargo, una rama de las matemáticas que ha demostrado ser de las de mayor dificultad en la enseñanza es el álgebra. Un caso específico de problema de enseñanza se presenta cuando se heredan, en los estudiantes, dificultades para comprender temas algebraicos (Socas, 1997), como lo son las operaciones con fracciones.

Debido a todo lo anterior en el presente trabajo se realiza una propuesta de secuencia didáctica basada en la visualización matemática como herramienta para fomentar el autoaprendizaje mediante el uso de esquemas. Entendiendo como visualización matemática un proceso mediante el cual se presentan esos esquemas para comunicar información acerca de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios a fin de abonar en la comprensión de este. Considerando la comprensión en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992, citados en Hitt, 2000) como la capacidad de formar redes de representación.

Para llegar a establecer el diseño de la secuencia didáctica, se proponen cinco problemas contextualizados, concebidos a partir de la Ingeniería Didáctica propuesta por Michelle Artigue (1995); la cual consta de cuatro fases, mismas que se han aplicado en el presente trabajo, se inicia con un análisis preliminar del que se rescatan elementos base que se deben incluir en la secuencia, se concibe el diseño al mismo tiempo que se realiza un análisis a priori sobre el mismo, para enseguida llevarlo a la experimentación, finalmente se realiza un análisis a posteriori con los resultados obtenidos, dentro de esta metodología destaca que la validación es interna y consiste en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

Posteriormente se presentan los resultados encontrados a partir de la implementación de la secuencia didáctica con estudiantes de preparatoria abierta. El análisis de resultados está centrado en la realización de tratamientos y conversiones dentro de registros de representaciones semióticas que fueron consideradas para cada una de las cinco actividades propuestas. A partir de esos tratamientos y conversiones se establecen conexiones que desembocan en la red de una representación mental. Se presentan las diferentes redes para los estudiantes que participaron en la aplicación de la secuencia.

El informe está estructurado de la siguiente manera: se encontrará en primer lugar los resultados de la búsqueda de antecedentes que ayudan en el sustento del problema, el cual se encuentran en el Capítulo 1. En ese mismo capítulo se presenta también el Planteamiento del Problema, dentro del cual está el objetivo, la justificación y el alcance. En el capítulo 2 se describe de manera general el enfoque teórico en el que se basa nuestra investigación, presentando en este mismo apartado los fundamentos matemáticos que son de importancia en nuestro trabajo. En el capítulo 3 se describe la metodología que utilizamos para cumplir los objetivos que se proponen, una metodología cualitativa, utilizando la Ingeniería Didáctica para el diseño y aplicación de la propuesta de secuencia didáctica. Para luego, en el capítulo 4 poder mostrar la manera en que se lleva a cabo la implementación de esta, continuando con el análisis de resultados. Para finalmente presentar un apartado en el que se expresan las conclusiones generales obtenidas a partir del análisis de los resultados.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

En esta sección se hace un recuento de investigaciones que reportan aspectos importantes en cuanto a la educación en personas jóvenes y adultas, dado el contexto en el que deseamos realizar nuestra práctica, además de la importancia del manejo de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, así como los problemas que existen en la enseñanza-aprendizaje en torno a ellos. Evidenciando en primer lugar aspectos relacionados con la educación matemática en los adultos, enseguida la importancia de las fracciones, vistas desde la aritmética y su paso al álgebra. Además de evidenciar los problemas alrededor de los números racionales o fracciones; otra sección considerada es para revisar artículos en los que se hayan realizado algún tipo de propuesta que se relacionen con el tema de nuestro interés.

La Educación para Adultos

El contexto en el que realizaremos nuestra práctica de desarrollo profesional incluye estudiantes jóvenes y adultos, por lo que consideramos pertinente buscar información sobre estudios que se hayan realizado con este último tipo de estudiantes. Dada la importancia de la enseñanza de adultos dentro de la preparatoria abierta es necesario que rescatemos ideas acerca de lo que se ha estudiado en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de estos; pero qué es lo que vamos a entender por educación de adulto. Según lo que hemos leído nos parece conveniente la siguiente propuesta realizada por UNESCO (1997):

> Por educación de adultos se entiende el conjunto de procesos de aprendizaje, formal o no, gracias al cual las personas cuyo entorno social considera adultos desarrollan sus capacidades, enriquecen sus conocimientos y mejoran sus competencias técnicas o profesionales o las reorientan a fin de atender sus propias necesidades y las de la sociedad. La educación de adultos comprende la educación formal y la permanente, la educación no formal y toda la gama de oportunidades de educación informal y ocasional existentes en una sociedad educativa multicultural, en la que se reconocen los enfoques teóricos y los basados en la práctica. (p. 10-11)

Existe una teoría centrada en la educación del adulto denominada Andragogía, que según Fernández (2001) se encarga de la educación y el aprendizaje en los adultos, contrario a la pedagogía que se encarga de la educación en niños. Por su parte Rojano (2008, p. 44) expresa que esta disciplina se relaciona con el aprendizaje permanente del adulto, en el que distingue dos adultos, uno que guía el proceso y otro interesado en modificar, aumentar u obtener cierto aprendizaje voluntariamente, en el que será el adulto quien auto dirige su aprendizaje; aprovecha sus experiencias, mostrándose analítico y crítico de las acciones tratadas en las acciones realizadas en clase. Así mismo Pérez (2009) destaca que la educación de adultos está presente en varias áreas del campo educativo, independiente si su modalidad es formal o informal.

En nuestro país el interés por la educación en los adultos, especialmente sobre la alfabetización, proviene de hace varios años, pero se trataba de manera diferente a como se podría ver ahora. Como bien lo expresa Ávila (1993), se utilizaba en principio la misma manera en que se enseñaba a los niños y con muy poco conocimiento de lo que implicaba una educación matemática para adulto. Según esta misma autora se puede observar, que en los primeros libros para cursar la primaria de adultos se utilizaban aspectos iguales a los que se utilizaban para infantes; libros que con el paso del tiempo se fueron modificando hasta llegar a incluir el reconocimiento de un saber existente en el adulto a partir de su experiencia.

En Ávila (2003) se retoma la importancia de reconocer los saberes previos del adulto, aunque esta frase guarda una complejidad inimaginada de aspectos importantes sobre la enseñanza, por lo que debe constituir motivo de preocupación y ocupación en la enseñanza del adulto. Además, reconoce que el educador muchas veces no es consciente de esta problemática, pero que las investigaciones que se hayan realizado en torno a la educación matemática de jóvenes y adultos constituyen una manera de reflexión y pistas para los educadores.

Dado que se ha encontrado importante considerar los saberes previos y la experiencia de los adultos, nuestro trabajo toma en cuenta conocimientos previos de los estudiantes para poder desembocar en una propuesta de enseñanza relevante para educación de adultos, dado que en el nivel educativo en el que nos encontramos, ellos ya tuvieron un acercamiento con la matemática escolar. Además, Delprato (2005) destaca la importancia de recuperar los saberes previos de los adultos, como una manera de familiarizarlo con el contenido matemático, resaltando "la importancia de que estas opciones sean entonces objeto de reflexión en propuestas educativas que procuren hacer uso de estos saberes previos para generar propuestas relevantes" (p. 56). No solo los conocimientos previos de los estudiantes deben ser considerados en la propuesta, sino que nos encontramos con un problema principal, que es el tiempo que ha transcurrido desde la última vez que estudiaron.

Si bien es cierto que las investigaciones en educación para adultos en nuestro país han crecido, no se le ha dado suficiente importancia pues "la educación de adultos había sido mucho menos estudiada que, por ejemplo, problemáticas de la educación básica o de la educación superior" (Torres, 2017, p. 168). Además de que pocas investigaciones se han centrado en construir propuestas de enseñanza para las matemáticas para este tipo de estudiantes en específico. En México el surgimiento en 1984 del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA) marcó un gran avance en cuanto a educación para adultos y a pesar de que, según Ávila (1993), en un principio sus instrumentos estuvieron centrados en la idea de un conocimiento análogo al de los niños, esto ha ido mejorando con el tiempo, pues actualmente los problemas propuestos rescatan ideas de la vida diaria del adulto. El INEA ha pretendido erradicar el analfabetismo en México, con la idea de crear programas que les permitan a las personas de 15 o más años concluir la educación primaria y secundaria. Actualmente el INEA está trabajando sobre un Modelo de Educación para la Vida y el Trabajo (MEVyT) en el que según Ramírez y Víctor (2010):

> El MEVyT contribuye a que las personas jóvenes y adultas puedan desarrollar competencias y habilidades básicas; fortalecer sus valores como mexicanos y abordar conocimientos que le son de interés para resolver sus problemas cotidianos. Se caracteriza por su pertinencia y utilidad, y además permite reconocer, evaluar y valorar los conocimientos previos adquiridos por las personas jóvenes y adultas; es una propuesta de tipo modular, generada por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, y pensada en un universo de conocimientos mínimos que debe cubrir cualquier persona joven o adulta en rezago educativo. (p. 74)

Incluso esta educación para adultos en México de primaria y secundaria se trata a su vez como primaria y secundaria abierta, aunque dentro de la primaria se requiera un poco más el apoyo de un educador, puesto que varios de los adultos no saben leer o apenas se encuentran aprendiendo en esos momentos, por lo que requieren más apoyo para sus estudios. En ocasiones se han realizado campañas alfabetizadoras en nuestro país. Entonces podríamos tomar ideas de estudios que se han realizado respecto a la educación primaria y secundaria del INEA para poder hablar acerca de la preparatoria abierta dado que hasta el momento no hemos encontrado investigaciones centradas en este nivel educativo.

Cada uno de estos autores considera de gran importancia el autoaprendizaje, se trata de que el estudiante pueda lograr adquirir cierto conocimiento por su cuenta; pero además según Sánchez (2003) se debe contar (al menos en la educación básica) “con la colaboración de un asesor que orienta y apoya al grupo en sus actividades de aprendizaje” (p.13). Destacando a su vez que una asesoría no es una clase, es un espacio en el que desarrollan las habilidades para que la persona aprenda por su cuenta y el punto de partida es lo que sabe, para de esta manera profundizar en sus dudas o inquietudes, procurando que los nuevos conocimientos se apliquen en la vida cotidiana del estudiante. En preparatoria abierta también se cuenta con un asesor que deberá atender las dudas que surjan en los estudiantes de este nivel. De Agüero (2003) recomienda que el educador de jóvenes y adultos debe ser:

> …un docente plenamente formado y profesional, que tome decisiones reflexivas, que encuentre placer en indagar y aprender, en generar y gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que considere al aprendizaje como una construcción, como una elaboración social, y a la enseñanza como un proceso que facilita, desafía, estimula, dignifica y enriquece el desarrollo humano. (p.45)

De esta manera podemos darnos cuenta de que el interés de nosotros como asesores para mejorar la calidad de los procesos de enseñanza de las matemáticas es de suma importancia para lograr mejorar el aprendizaje de las personas en este nivel educativo. Lo que podrá dar más peso a nuestra practica de desarrollo profesional, por lo que al vernos como profesores comprometidos con nuestra labor debemos buscar alternativas ante algún problema detectado. El INEA cuenta con talleres de formación y actualización de asesores y técnicos docentes con el propósito de fortalecer la práctica educativa, en García (2003) podemos observar que dentro de los propósitos de estos talleres se encuentran: sistematizar las expectativas de los asesores respecto a los talleres, las matemáticas y como son aprendidas por jóvenes y adultos; sistematizar la practica educativa; desarrollar estrategias que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas; socializar las estrategias desarrolladas; y resolver y analizar algunas actividades correspondientes a los módulos de matemáticas bajo los ejes propuestos.

Podemos notar en cada uno de los párrafos anteriores que existe una problemática en torno a la educación matemática de jóvenes y adultos y que el INEA ha ido modificando sus modelos de acuerdo con lo que se ha investigado respecto a la educación en este tipo de estudiantes, así como también se ha dado a la tarea de formar y actualizar a sus asesores, cosa que no sucede en preparatoria abierta, al menos hasta el momento. Pero sabemos que la problemática sigue estando presente no solamente en la educación básica de adultos si no también en la educación medio superior.

Realizando un paseo por las investigaciones que se han llevado a cabo, en el ámbito de la educación de adultos encontramos a nivel internacional que el interés por realizar estudios en educación matemática de adultos nace en la década de 1990, dando pie a la creación, en 1994, de un foro internacional denominado Adult Learning Mathematics (ALM) siendo un artículo que marca el inicio de este foro el escrito por Diana Coben en Reino Unido “What do we need to know”. Así mismo podemos observar que un concepto importante para este foro fue los adultos que aprenden aritmética y la educación continua o permanente, que será aquella que el adulto recibe a lo largo de su vida y que se encuentra muy relacionada con sus experiencias y su vida diaria (Wedege, 2010).

Así mismo Bishop (2002) expresa que la educación matemática en los adultos es un tanto compleja, y que, además, en coincidencia con la definición propuesta antes, se hace referencia a la educación matemática formal, como aquellos que lo hacen por una titulación universitaria; la no formal, como aquellos cursos que se toman por interés y sin calificación; y la educación matemática informal que puede suceder en cualquier lugar y momento sin necesidad de un curso. Este autor resalta que la educación matemática de adultos puede darse en distintas ubicaciones y estructuras y con distintos documentos que van desde textos y documentos hasta producciones basadas en televisión e internet.

De esta manera podemos decir que la preparatoria abierta puede ser una educación que puede llevarse de manera formal, puesto que los lleva a la obtención de una certificación de preparatoria, sin embargo, los estudiantes deciden si pueden o no acudir a asesorías, todo esto depende del contexto de los estudiantes, puesto que algunos tienen varias responsabilidades y no cuentan con el tiempo suficiente para poder acudir a asesoría, en estos casos su educación es más tipo autónoma, realizada por ellos a través de materiales, que son principalmente libros, que los guía para poder responder con éxito el examen de la materia.

Autores como Coben FitzSimons y O´Donoghue (2002) encontraron también aspectos importantes de la educación matemática en adultos (principalmente en los países desarrollados, Reino Unido, Australia e Irlanda, respectivamente). Ejemplos de estos aspectos es que la educación matemática no debe definirse exclusivamente solo en términos escolares, las discusiones de la matemática general se han centrado en las matemáticas escolares, excluyendo todo lo demás; sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas sea en niños o adultos, sucede en una gran variedad de entornos que no necesariamente son escolares, incluyendo el hogar, prácticas profesionales y actividades tanto culturales como laborales.

No pretendemos profundizar en las investigaciones realizadas a nivel internacional, pero si rescatar elementos importantes que nos puedan ayudar a mejorar la comprensión de la educación para adultos pues pareciera que es un mundo que no ha sido muy explorado, como lo expresa Bishop (2002) parece que no existe un paradigma suficiente para la investigación en este ámbito. Sin embargo en la investigación que se aborda alrededor de la educación matemática de adultos infieran otras ramas como por ejemplo, educación, educación adulta, educación matemática, historia, sociología, psicología, literatura y filosofía (FitzSimons, Coben y O´Donoghue, 2003), mismos que se pueden observar en la figura 2; propuesta como un diagrama en el que se pueden observar círculos concéntricos teniendo en el centro al Adult Learning Maths y entre más cerca este del círculo que se encuentra en el centro quiere decir que son disciplinas más fuertemente implicadas con la investigación en Adult Learning Maths, diagrama propuesto por Benn (citado en FitzSimons, Coben y O´Donoghue, 2003).

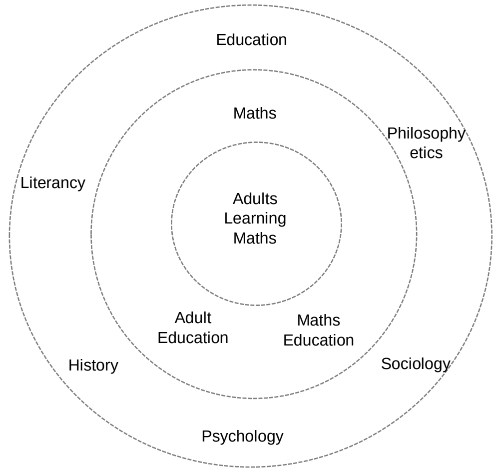


Figura 1. Benn's conception of the research domain (FitzSimons, Coben y O´Donoghue, 2003, p. 113)

Finalmente, para cerrar esta parte nos gustaría rescatar la idea de FitzSimons (2002) en la que se puede observar la importancia de que cada uno de los estudiantes, sin importar si son jóvenes o adultos, estudien el álgebra. Este autor señala que el pensamiento algebraico (álgebra) es una herramienta que puede ayudar en variadas situaciones, por ejemplo cuando se enfrentan a algo desconocido, un valor, así mismo con el sentido de variable, en las fórmulas estadísticas, así como los conocimientos que necesita poseer una persona para trabajar en un banco, se encuentra presente de cierta manera el pensamiento algebraico; por lo que se considera importante que los estudiantes desarrollen la competencia para evaluar críticamente y abordar las situaciones que requieren la construcción o reconstrucción de habilidades y conocimientos matemáticos.

Por otra parte, y centrándonos ahora en investigaciones más específicas, en cuanto a nuestro tema, tenemos el artículo realizado por Valdemoros y Ruíz (2008), un estudio de caso en el que se describe cómo Lucina, una estudiante de sexto grado de primaria de una escuela para adultos de la Ciudad de México resuelve problemas aritméticos. Esto con la finalidad de poder tener diversos significados, nociones y conceptos de fracción. Se resalta la importancia de la educación primaria en adultos, así como de las fracciones; se llega a la conclusión de que los problemas aritméticos deben recrear las experiencias laborales, comunitarias y familiares del adulto con las cuales se enriquecen y construyen eficazmente nuevos significados, nociones y conceptos ligados a las fracciones. Así pues, podemos utilizar la idea de Valdemoros y Ruíz (2008) al momento de proponer ejercicios en preparatoria abierta, ya que algunos de los estudiantes de este nivel son adultos, entonces la idea será buscar esas secuencias didácticas en los que se pueda combinar la manera de construir el conocimiento de las operaciones con fracciones por un joven y por un adulto considerando sus experiencias previas. Aunque el artículo de Valdemoros y Ruiz se trata de un estudio de caso, nos podría servir si se realizara en condiciones similares, podríamos obtener resultados parecidos.

En el artículo de Diez (2009) se escribe acerca de la enseñanza para los adultos, se estudia a un grupo de mujeres que explican el cómo ellas entienden las matemáticas, cómo se autodefinen con relación a ellas, y qué consecuencias educativas tiene eso sobre su propio aprendizaje. Utilizando el aprendizaje dialógico, se concluye que la creación de espacios de diálogo igualitarios contribuye a abrir posibilidades de aprendizaje para estas mujeres.

Encontramos en este mismo artículo que Diez (2009) describe cuatro aspectos importantes para el aprendizaje de las matemáticas en personas adultas: primero, todas las personas adultas saben matemáticas y son capaces de usarlas para resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana; segundo, las personas adultas aprenden de manera diferente a como lo hacen los niños; tercero, la experiencia y cuarto, el contexto.

En Palmas y Block (2014) se realiza un estudio de caso en el que se incluye una experiencia de ingeniería didáctica con un adulto que no está alfabetizado y del mundo rural. El estudio tiene como objetivo llevar al adulto a construir los números naturales a partir del lenguaje oral. Entre sus aportes se destaca la contribución a sustentar la viabilidad de un mayor aprovechamiento de la numeración oral en un proceso de adquisición de la numeración escrita. Cuando se aborda en este artículo la importancia de la educación para adultos Palmas y Block citan a Knijnik (1997), Mariño (1997), Ávila (2007) y Delprato (2006) quienes señalan que en la enseñanza de adultos tiende a prevalecer los procedimientos de cálculo convencionales con los que se enseña a los niños, siendo esto no por falta de alternativas si no que en los adultos se tiene el plus de la valoración social; además se destaca con estos mismos autores la diferencia entre los algoritmos convencionales y los algoritmos de cálculo que los adultos suelen utilizar. En nuestro caso consideramos importante el aspecto referente a la valoración social dado que los problemas propuestos van encaminados a situaciones en contextos reales en los que puede estar inmersa la sociedad, para observar si funciona con nuestros adultos de preparatoria abierta.

Un aspecto que podríamos considerar de suma importancia en la educación de los adultos y en la cual coinciden varios autores (Ávila, 1993; Delprato, 2005; Ramírez y Víctor, 2010, Díez, 2009; Wedege, 2010) es que se debe tomar en cuenta que los adultos tienen conocimientos previos que han sido construidos a través de su experiencia, en nuestro caso de antemano sabemos que nuestros estudiantes tienen conocimientos matemáticos previos tanto ligados a la experiencia como ligados a un estudio formal, como lo es la secundaria. Lo que podríamos considerar un poco en nuestra contra es el tiempo que ha trascurrido desde que abandonaron los estudios, y que eso podrá generar olvido de muchos aspectos importantes de la matemática.

De la aritmética al álgebra. El caso de las fracciones

La transición de la aritmética al álgebra conlleva dificultades principalmente debidas a que los estudiantes no asimilan el que una letra pueda representar una cantidad y que además tiene la posibilidad de tomar distintos valores. Es entonces que nuestro interés se centra en proponer actividades que ayuden en la comprensión del tópico del álgebra suma y resta de expresiones algebraicas, en una y dos variables, con coeficientes fraccionarios. Para esto realizamos la búsqueda de estudios que sustenten la importancia de la comprensión de las fracciones, en aritmética, para poder lograr el aprendizaje de tópicos en el álgebra.

Encontramos así el folleto denominado “Enseñanza de las fracciones” escrito por Fazio y Siegler (2011). Esta publicación desarrollada por la Academia Internacional de la Educación (IAE), proporciona una síntesis oportuna de investigación realizada en temas educativos de importancia internacional entre ellos el de las fracciones. Los textos son publicados y distribuidos por la Oficina Internacional de Educación de la UNESCO (IBE) y la Academia. Contiene recomendaciones de enseñanza para el tema de fracciones, las cuales se comenta han demostrado mejoras en el aprendizaje.

En este folleto se resalta de igual manera la importancia de que se realicen estudios sobre la comprensión de fracciones pues: “Comprender fracciones es una de las más importantes habilidades que deben desarrollarse en el plan de estudios de matemática y es esencial para comprender el álgebra, la geometría y otras áreas de la matemática” (Fazio y Siegler, 2011, p. 3).

Según Vamvakoussi y Vosniadou (2010, citados en Saavedra, Gallardo y Espinoza, 2016) y en coincidencia con Fazio y Siegler “comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática escolar.” (p. 1041)

Por su parte, Flores (2011) realiza un estudio con estudiantes de entre 13 y 15 años en el Estado de México. La intención de la autora es reconocer los diferentes significados asociados al concepto de fracción y se toma en cuenta la clasificación realizada por Kieren, siendo la de Kieren una de las principales aportaciones para el análisis de significados de las fracciones. Para obtener sus fines utiliza un problema relacionado con el reparto de pizza propuesto por la SEP (2001).

Así mismo y apoyando la idea de la importancia del estudio de las fracciones para el aprendizaje del álgebra, Flores (2011) encuentra que:

> En la literatura se reconoce que el estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra. (Flores, 2011, p. 26)

En el artículo desarrollado por Socas (1997), se muestran los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que se producen en la construcción del conocimiento matemático, más específicamente en el álgebra. Describe que ninguno de estos tres se produce solamente en alumnos que no son “buenos” para las matemáticas, nadie está exento de cometer algún error en matemáticas. Además, manifiesta que una vez que un estudiante desarrolla una dificultad lo más probable es que llegue a un obstáculo y termine manifestándolo en un error. También se reconoce que algunas de las dificultades que se encuentran en el álgebra no son precisamente del álgebra sino más bien son problemas que se quedan sin corregir desde la aritmética. En nuestro caso consideramos que no contar con una comprensión adecuada de las operaciones con fracciones redundará en la no comprensión o manejo de operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios. Al no comprenderlas en aritmética se va cargando con el problema hasta el álgebra.

En el artículo de Baltazar y Valdemoros (2017) se aplica un programa de instrucción tipo enseñanza experimental con el propósito de inducir nociones básicas vinculadas a las fracciones en alumnos que no han tenido experiencia escolar con esos números. Se seleccionó un grupo de tercer grado de primaria. En este programa se propusieron actividades cercanas a la cotidianeidad de los alumnos participantes. Se propusieron tareas para que los alumnos dieran significado a algunas nociones básicas en torno a las fracciones, como la partición, la equivalencia y las unidades. Y también para que ellos realizaran sus propias escrituras para dichos números. Las actividades giran en torno a la reflexión de los alumnos sobre las acciones realizadas. El estudio se llevó a cabo utilizando como instrumentos: la observación, la entrevista y el programa de enseñanza experimental. Los resultados obtenidos señalan que la reflexión aporta elementos importantes para que los alumnos que se inician en el estudio de las fracciones logren identificarlas como números que cuantifican los resultados de una gran diversidad de repartos.

Resaltando la importancia de estudiar las fracciones, Baltazar y Valdemoros (2017) refieren que el estudio de las fracciones es una problemática que se aborda en la investigación reportada, pues al no comprenderlas contribuye a la distorsión de conocimientos de la aritmética que se tratan en la escuela primaria, siguiendo con la no comprensión de conceptos que se construyen en la secundaria y preparatoria (p. 404). Para nosotros específicamente sucedería cuando se realizan sumas o restas con expresiones algebraicas que contienen números racionales en sus coeficientes.

De esta manera podemos concluir que la comprensión de las fracciones es muy importante para comprender temas posteriores del álgebra e incluso el cálculo; pero son uno de los temas que mayor dificultad provoca en los estudiantes de cualquier nivel educativo. Por lo que se considera pertinente realizar estudios enfocados hacia este tema.

A continuación, se presentan las investigaciones que exhiben ideas sobre las dificultades que se tienen cuando se hace uso de las fracciones.

Dificultades con el uso de fracciones

Los que hemos tenido la oportunidad de desempeñarnos como profesores de matemáticas, hemos sido testigos de que las fracciones son un tema que suele traer dificultades en el aprendizaje de nuestros alumnos, mismas que se encuentran desde el nivel primaria, secundaria, bachillerato e incluso persisten hasta niveles universitarios. Apoyando esta idea encontramos que “las fracciones han demostrado ser muy difíciles de entender para la mayoría de estudiantes del mundo” (Fazio y Siegler, 2011, p. 3).

El artículo de Escobar, Fuentes, Arcia y Amaya (2016) es un estudio de caso, cuyo objetivo es determinar las dificultades que presentan los estudiantes de cuarto grado de educación básica en Colombia cuando se enfrentan a situaciones problema que involucran fracciones, proponiendo alternativas de solución para minimizarlas.

De acuerdo con nuestra experiencia se pudo observar que el estudiante de preparatoria abierta tiene dificultades al querer realizar operaciones con fracciones, pues cree que se realizan de manera similar que con los números enteros. Lo cual coincide con Escobar, et al. (2016) quienes aseguran que:

> Al introducir por primera vez las fracciones, el estudiante tiene concepciones en cuanto a los números naturales y operaciones básicas con números naturales. Por ello, las fracciones van a generar un desequilibrio cognitivo en los estudiantes, tal desequilibrio permitirá un cambio en sus estructuras mentales tras un proceso de acomodación, en la medida que el docente los vaya involucrando en el estudio de las fracciones. Pero este proceso no se da de la noche a la mañana, requiere esfuerzo y tiempo. (p. 218)

En el artículo de Saavedra, Gallardo y Espinoza (2016) se abordan los conceptos de números racionales en su representación tanto fraccionaria como decimal y su asociación con la negatividad, realizado en un marco teórico que contempla estudios sobre fracciones como los realizados por Kieren, 1983, 1984, 1988; Freundenthal, 1983; Ávila, 2008; Saavedra, 2011 y

Gallardo, 2002; quienes abordan fracciones y razones, decimales y fracciones negativas. Se hace mención sobre la problemática que gira en torno a los números racionales y más aún, la problemática que genera cuando estos son negativos. El objetivo, en palabras del autor, “es conocer los significados que los docentes en formación poseen para cada uno de los conceptos mencionados” (p. 1039). sin dejar de lado el entramado trayecto que la negatividad ha tenido dentro de las matemáticas. Se realiza un estudio de corte cualitativo utilizando dos instrumentos metodológicos: cuestionario exploratorio y entrevista individual video grabada.

De los resultados que obtuvieron los autores nos llama la atención el hecho de que “el significado más frecuente que asignan a la fracción es el de cociente, dado que precisan realizar la conversión para validar la cantidad numérica y asignarle algún sentido” (Saavedra, et al. 2016, p. 1043).

En el artículo de Londoño, Kakes y LLanes (2015) se aborda una investigación realizada con niños de quinto y sexto grado de primaria. A los estudiantes de quinto grado se les dio seguimiento hasta el sexto grado. En el estudio se utilizó como marco teórico la teoría de representaciones semióticas. Luego de las observaciones realizadas y las dificultades observadas, se concluye con algunas propuestas que se realizaron, en su mayoría lúdicas, para tratar de reparar dichas dificultades encontradas.

Según Londoño, et al. (2015) en nuestro país el estudio de los números racionales inicia en edades muy tempranas. Se inicia con el concepto parte-todo, para continuar con la utilización de gráficas para representar los números, su representación en la recta numérica, se abordan los conceptos de fracciones propias, impropias y mixtas. A pesar de que su estudio se inicia en edades tempranas hay evidencia de que en el nivel medio superior existen dificultades cuando se hace uso de fracciones en el álgebra al tratar por ejemplo con ecuaciones y expresiones algebraicas que incluyan fracciones en sus términos.

En su artículo, Socas (1997) hace referencia a los ejemplos de errores más comunes en matemática entre los que aparece el error al realizar operaciones con fracciones “Nos encontramos a veces con alumnos que realizan la suma de fracciones como sigue: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$…” (p. 139).

En el mismo sentido de las dificultades tenemos que el folleto de Fazio y Siegler (2011) aborda la problemática que existe en torno a las fracciones pues:

> Aún en países donde la mayoría de los estudiantes obtienen una comprensión conceptual razonablemente buena, como Japón o China, las fracciones son consideradas un tema difícil. Una razón de su dificultad es que, en su primera lección, las fracciones enfrentan a los estudiantes ante una premisa que señala que muchas propiedades son ciertas para números enteros, pero no son verdaderas para todos los números. (p. 6)

También se considera que “…con fracciones, las multiplicaciones no siempre conducen a una respuesta mayor que los multiplicandos; la división no siempre lleva a una respuesta menor al dividendo; y los números no tienen sucesores únicos” (p. 6), a lo que nosotros aumentaríamos que al tener la suma de enteros como lineal los conduce a creer que con las fracciones sucedería lo mismo, lo que provoca confusión en los estudiantes.

En este mismo sentido lo que encontraron Martínez y López (2001, citados en Cabañas, Guillén y Galeana, 2004) a cerca de dificultades que presentan estudiantes de nivel medio superior cuando realizan procedimientos con fracciones, podríamos destacar es que: al aplicar el algoritmo de la suma de fracciones “utilizan el modelo lineal aditivo, el cual ha quedado muy arraigado en el trabajo con los números naturales” (p. 181).

En Doyle, Días, Kennis, Czarnocha y Baker (2016) se realiza una investigación con estudiantes adultos que se encuentran en un colegio comunitario en Estados Unidos al que ingresan estudiantes que no tienen los conocimientos necesarios para transitar de la secundaria a la universidad. En este tipo de colegio se revisan las habilidades de álgebra o pre-álgebra que hacen falta para las matemáticas de nivel universitario, en donde se destacan las fracciones como uno de los tópicos más difíciles. Este estudio se basa en un experimento de investigación docente. Se realiza en dos partes, en la primera, utilizando como variables independientes las sub-construcciones de números racionales propuestos por Kieren, se utiliza un modelo de regresión lineal para predecir o explicar la competencia de los estudiantes en la resolución formal de problemas. La segunda parte es de corte cualitativo y se utilizan las transcripciones de las clases durante el experimento para observar cómo utilizaron los alumnos los sub-constructos (razón, proporción, cociente y porcentaje) en la resolución de problemas. Los resultados obtenidos indicaron que las sub-construcciones de números racionales proporcionan una base para el razonamiento racional y que los estudiantes se involucraron en el proceso de razonamiento cuando relacionaron la información del problema con las imágenes.

Estamos de acuerdo con Doyle, et al. (2016) en que las fracciones son un concepto difícil para muchos estudiantes, y que casi todos los que nos hemos desempeñado o nos estamos desempeñando como profesores hemos escuchado a alumnos decir “odio las fracciones”.

Al realizar la revisión de este artículo nos encontramos con un modelo que sugiere la composición de las fracciones, en el que se incluyen las operaciones de multiplicación y suma de fracciones. Este modelo, mencionan los autores, es una extensión de las cinco sub-construcciones propuestas por Kieren (la sub-construcción primaria que es la parte entera, y las cuatro sub-construcciones secundarias: razón, operador, cociente y medida). El modelo está presentado en la figura 1.

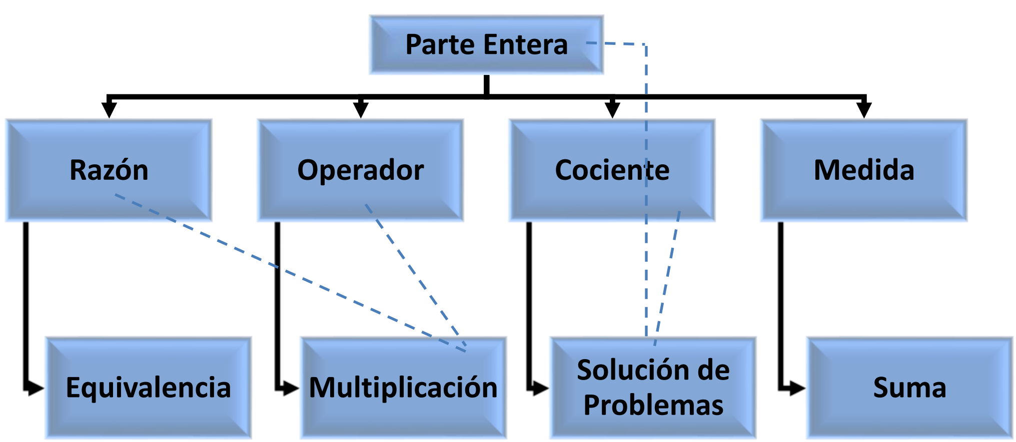


Figura 2. Traducción del Modelo de Berth et al. 1983 (citado en Doyle et al. 2016, p. 24)

En Ríos (2007) se presenta el avance de una ingeniería didáctica considerando las diferentes interpretaciones que tiene el concepto de fracción. Se presentan algunos resultados de su análisis preliminar en los cuales concluyen que los errores que se evidencian en todas las interpretaciones, excepto en la decimal, son debido a la complejidad del símbolo. Ella explica que:

> Muchos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas interpretaciones (acepciones, representaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto. Entre estas acepciones tenemos: la de parte todo (sub-área), razón (subconjunto), reparto (división indicada), operador, número racional y número decimal (cociente), entre otros. (p. 270)

Además, pudimos observar que lo que ella recomienda es que se conozcan la mayoría de las representaciones que se tienen para la fracción, pues esta autora resalta que:

> …todas las situaciones problemas que involucra el concepto de fracción no son resolubles con una sola representación. Habrá situaciones que podrán ser resueltas por algunas interpretaciones y por otras no; además el conocer y aplicar varias concepciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales (p. 270)

En Salas, Cucunubá, Pastor y Fernando (2011) se reporta una ingeniería didáctica propuesta para la enseñanza de la suma de fracciones desde la representación gráfica; se lleva a cabo con estudiantes de entre 11 y 13 años, en Colombia. Se resalta que las dificultades con el aprendizaje de esta operación es la mecanización del algoritmo utilizado para la suma. Coincidimos con ellos en que cuando se utiliza el manejo algorítmico ligado a la comprensión de suma de fracciones, se presentan dificultades cuando se tienen fracciones con diferente denominador, ellos refieren que "porque se adentra en otra perspectiva diferente al algoritmo común utilizado para sumar dos naturales, además de ello involucra procesos multiplicativos" (p. 617).

También encontramos que Fandiño (2005, citado en Flores, 2011) enumera los errores típicos cuando se utilizan fracciones, entre los cuales encontramos el de nuestro interés "Las operaciones entre fracciones y entre números racionales" (p. 24); así pues, tenemos que como tipos de errores que se cometen con fracciones se encuentran las operaciones, recordando que una dificultad puede determinar un error.

Finalmente rescatamos la idea de Franco (2012), presentada en el avance de su investigación, sobre la notoria dificultad que tienen los estudiantes, tanto de grados inferiores como superiores, cuando se enfrentan a resolver problemas que impliquen la interpretación o manejo de operaciones entre racionales.

Como pudimos observar en las lecturas anteriores, cuando los estudiantes intentan resolver cualquier tipo de situación o problema que incluya fracciones, es casi imposible que no presenten dificultades al momento de querer operar con las fracciones. Esta es una de las razones por las que se eligió el tema en esta investigación. Dadas las dificultades del tema, en la siguiente sección se presentan investigaciones que se han realizado con el fin de comprender fracciones, específicamente estudios que han utilizado propuestas en Ingeniería Didáctica, lo anterior en virtud de que esta es nuestra metodología.

Propuestas para la enseñanza de fracciones

En el presente apartado describimos propuestas que se han realizado en torno a la enseñanza de fracciones, principalmente porque se trata de un tema de suma importancia en nuestro trabajo.

Durante el desarrollo del artículo escrito por Cabañas, et al (2004) se habla acerca de cómo al proponer y aplicar algunas situaciones didácticas, utilizando la ingeniería didáctica, en estudiantes de nivel medio superior, se logró que los alumnos mejoraran su comprensión acerca del concepto de número racional. Expresando que:

> …el permitir que los alumnos conocieran diferentes formas de representar a los números racionales, el significado de cada una de ellas, así como convertir o traducir unas representaciones en otras a través de las situaciones didácticas, propició la construcción de este concepto y mejoraran su comprensión. (p. 181)

Se trata pues de un ejemplo del uso de situaciones didácticas y números racionales, encontramos además que se incluyen las operaciones de suma y resta de fracciones. Nos pareció interesante leer sobre cómo se desarrolló esta investigación y los resultados obtenidos. Lo que podemos retomar es la importancia de que se conozcan diferentes formas de representar los racionales, para lograr una mejora en su comprensión.

Franco (2012) presenta el avance de su investigación llevada a cabo en el marco teórico de Situaciones Didácticas, en el que propone una investigación en el nivel micro-ingeniería para analizar los procesos desarrollados en la construcción del concepto de número racional por los docentes y los estudiantes del grado séptimo de Colombia. La secuencia didáctica se aplica utilizando entornos informáticos. Muestra algunas de sus conclusiones parciales de lo que ha encontrado, entre ellas: es notoria la escasa formación del concepto de racional mostrado por la población estudiada; los estudiantes muestran una construcción mental de racional limitada a la concepción parte-todo; se presentó mejor disposición por parte de los estudiantes debido a la inclusión de TIC a las clases.

En el avance de ingeniería didáctica de Ríos (2007) se consideran las diferentes interpretaciones que tiene el concepto de fracción; se desea aplicar con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Educación, Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de La Universidad del Zulia. Al final del artículo se incluye el cuestionario aplicado para realizar el análisis preliminar, en el cual encontramos que los ejercicios aplicados van encaminados a conocer cómo los estudiantes entienden las diferentes interpretaciones de fracción. Parece que son ejercicios no muy complejos pero que podrían dar evidencia de lo que están pensando los estudiantes, lo que podría proporcionarnos una idea para saber qué podríamos considerar en la dimensión cognitiva de nuestro análisis preliminar.

En el reporte de ingeniaría didáctica de Salas, et al. (2011) se destaca la importancia de que se utilice la representación gráfica, concreta o en situaciones cotidianas, lo que promueve que se le dé significado y sentido a la operación. El trabajo se realiza con la intención de dar a conocer una mirada a la suma de fracciones a partir de la interpretación de la medida en un contexto continuo y discreto. Una conclusión que consideramos importante de este artículo es que "los estudiantes durante el proceso de desarrollo de la secuencia de actividades fueron modificando y adquiriendo la noción de suma de fracciones a partir de la interpretación de medida." (p. 621, Salas et al. 2011). Así pues, al momento en que estemos pensando en nuestro diseño sería importante que tuviéramos en cuenta estas recomendaciones en cuanto a contextualizar las fracciones, en su interpretación como medida.

De esta sección podemos observar que se han realizado estudios con una metodología semejante a lo que utilizaremos, y que además van encaminados a mejorar la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes. También podemos rescatar ideas que nos ayudaron en el momento en que estuvimos realizando nuestro diseño; esto de acuerdo con lo que han observado los autores mencionados anteriormente.

Enseguida se presentan algunas investigaciones que se han realizado en torno a las expresiones algebraicas, tratando de focalizar en aspectos que podrían ser de interés para la elaboración de nuestro trabajo.

Estudios con expresiones algebraicas

Puesto que el tema que elegimos en el que se incluirían fracciones, son las expresiones algebraicas nos parece relevante incluir en este trabajo algunas investigaciones que se hayan realizado en torno a las expresiones algebraicas y mejor aún si se han realizado con la suma y resta de ellas. Cabe mencionar que también se realizó una búsqueda de estudios que hayan incluido suma o resta de polinomios puesto que los polinomios también podrán ser expresiones algebraicas del tipo que nos interesa.

En este sentido en la búsqueda que realizamos encontramos un estudio sobre expresiones algebraicas, la tesis de maestría de Guerrero (2011), realizada en Colombia. En esta se propone una investigación con estudiantes de octavo grado. Este trabajo reconoce la incidencia que tienen siete estrategias metodológicas sobre la motivación en el aprendizaje de expresiones algebraicas, tratando de que este concepto y lo que conlleva sea más entendible, agradable y motivante. Dentro de los temas que se proponen para el desarrollo de las estrategias metodológicas se encuentran la suma y resta de expresiones algebraicas, y es aquí donde se centra nuestro interés. Se proponen ejercicios con situaciones cotidianas para luego escribirlos en lenguaje algebraico y se proceda a realizar la suma o resta según sea el caso que se requiera. Los resultados obtenidos indicaron que las estrategias propuestas sirvieron para aumentar el gusto por las matemáticas y además se mejoró significativamente el aprendizaje de las expresiones algebraicas. Guerrero recomienda que “Las actividades cortas y bien estructuradas, que en ellas se refleje lo que van aprendiendo, son más productivas que muchos ejercicios para ellos sin sentido” (p. 69). Además, se reconoce “el álgebra una de las áreas específicas más críticas de enseñar” (Guerrero, 2011, p. 3).

Así mismo se encuentra un artículo de García, Segovia y Lupiáñez (2012) realizado con la finalidad de investigar acerca de las fuentes que provocan errores en el álgebra, esto basado en estudiantes universitarios. Dentro de las fuentes de los errores encontramos que estos autores citan a Booth (1984) quien encontró como fuente de errores justamente los provocados por la falta de comprensión en la aritmética, fuente que creemos es relevante para nuestro estudio puesto que las operaciones con fracciones se abordan en la aritmética. Siguiendo con la cita, este autor, se expresa respecto a las expresiones algebraicas con lo siguiente:

> … la fuente de este tipo de error se puede encontrar en las dificultades que presentan los estudiantes para separar el álgebra de la aritmética, al considerar el álgebra como una generalización de la aritmética y por consecuencia tratan de aplicar las reglas que conocen de la aritmética en las expresiones algebraicas. (p.144)

Además, dentro del artículo de García et al. (2012) se encontró que los estudiantes, al querer factorizar una expresión algebraica, se limitaron a sumar todos los términos sin importar si eran semejantes o no, esto es, sumaron coeficientes de cada termino, así como los exponentes de cada variable para obtener un resultado con la suma de los coeficientes y las variables teniendo como exponente la suma de los exponentes correspondientes. Este tipo de errores debe ser considerado en nuestro estudio al momento de realizar nuestro diseño previendo este tipo de situaciones.

En coincidencia con la idea del párrafo anterior encontramos una tesis de Rozo (2012) que se realiza con la finalidad de observar las limitaciones que tienen estudiantes de tercero de bachillerato respecto a la modelación de polinomios dentro de un contexto. Cabe mencionar que se realizó con estudiantes de bajo rendimiento. Rozo encontró que cuando se les pedía a los estudiantes modelar una expresión algebraica, estos al momento de hacer la suma de expresiones algebraicas, operaban los exponentes como si fuera multiplicación, es decir, sumaban los exponentes, idea que concuerda con la mostrada por García et al (2012) y que podemos rescatar para nuestro trabajo. Al respecto también se expresa que los estudiantes en cuestión: "realizan la suma de los términos sin tener en cuenta si son o no términos semejantes" (p. 101).

A su vez nos encontramos con el artículo de Castro (2012), donde se encuentran aspectos importantes acerca de las expresiones algebraicas, dentro de los que podemos rescatar el hecho de que las expresiones algebraicas conllevan el uso de símbolos y signos relacionados con números y letras y, que cumplen con ciertas reglas que, a su vez es lo que genera dificultades en el aprendizaje de los estudiantes de este tema. Otro aspecto importante en cuanto este tópico matemático, que provoca dificultades en los estudiantes, es una deficiencia en la comprensión de la estructura de las expresiones algebraicas y que además esto podría estar ligado inclusive a una falta de comprensión de la estructura aritmética.

> En álgebra, cuando se trata de simplificar expresiones algebraicas al reordenar los términos aplicando algunas propiedades de las operaciones para reducir la expresión a una forma de apariencia más simple que no tiene que ser necesariamente solo un término, es necesario evaluar la expresión antes de realizar cálculos y ahí interviene el sentido estructural. (Castro, 2012, p. 87-88)

El artículo escrito por Fernández, Moreno, Ortega, Tous y Amaya (2016), se trata de una investigación aplicada a un grupo de estudiantes de entre 12 y 14 años, en Colombia, para, a través de la observación, determinar evidencias sobre las dificultades y fortalezas que tenían los estudiantes al momento en que utilizaban las estrategias didácticas propuestas por el profesor respecto a los trabajos con fracciones algebraicas. Los resultados indicaron que en la realización de operaciones aditivas y multiplicativas con expresiones algebraicas como las que se les presentaron, este grupo de estudiantes presenta más dificultades que fortalezas. Resaltan que esto ocurrió a pesar de que las estrategias propuestas por el profesor, que, aunque adecuadas, no tuvieron influencia directa sobre la realización de las operaciones.

Nos parece conveniente resaltar la idea de Fernández, et al. (2016), puesto que se trata de un claro ejemplo de las consecuencias que puede tener la no comprensión de las fracciones para los temas algebraicos. Una de las dificultades que pueden presentar los estudiantes es al operar con fracciones algebraicas pues no reconocen el procedimiento que se debe llevar a cabo. Sabemos que este proceso en general coincide con el de las operaciones de fracciones numéricas. Mayor detalle de los errores que cometieron los estudiantes se expresa a continuación.

> …no determinaban a simple vista la forma más básica de operarlas como fracciones homogéneas, realizando operaciones más dispendiosas, que los llevó a cometer errores. Al operar lo hacían sin tener en cuenta la variable x, es decir, solo suprimían de la expresión y operaban sin tenerla en cuenta. (p. 494)

De esta manera se evidencia que existen dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las expresiones algebraicas y encontramos que Ballén (2012) realiza una propuesta para la mejora de la comprensión de la factorización de polinomios de segundo grado con ayuda del álgebra geométrica, dentro de la cual se proponen actividades para "Identificar términos semejantes a través de comparación de áreas de figuras planas" y para "Dar interpretación gráfica a la suma y diferencia de expresiones algebraicas" (p. 41). Aunque no sabemos qué tanto tiempo requieran estas actividades podemos intentar adaptarlas para preparatoria abierta, y lograr obtener resultados positivos, como fue el caso de este estudio.

Con la revisión de antecedentes se identifica que existe preocupación por mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones y sus operaciones, debido a que varios autores como Socas (1997), Flores (2011) y Fernández, et al. (2016) coinciden en que este tema es básico para luego poder trabajar con el álgebra, incluso investigadores en educación matemática de adultos (FitzSimons, 2002) rescatan la importancia del aprendizaje del álgebra en adultos. De igual manera se observa que las investigaciones relativas al tema han sido experimentadas en diferentes rangos de edad y diferentes contextos institucionales. Además de la parte matemática nos encontramos con la parte relacionada a la educación en los adultos, que a su vez también es una problemática identificada por investigadores en este ramo. En esta investigación se propone el caso de jóvenes y adultos que estén cursando la preparatoria abierta. Los marcos teóricos con que se han trabajado las propuestas para la introducción o desarrollo del tema de fracciones y sus operaciones varían. Por ejemplo, se han usado representaciones semióticas (Londoño, et al. 2015) o situaciones didácticas (Cabañas et al, 2004 y Franco, 2012) por mencionar solo algunas. Todo lo planteado anteriormente nos lleva a la siguiente problemática y problema que fungirán como una guía para nuestra investigación.

1.2 Problemática y problema

Con base en lo descrito en los antecedentes revisados podemos observar que existe una problemática en torno a la educación matemática de jóvenes y adultos, dado que no aprenden de la misma manera en que aprenden los estudiantes en su edad correspondiente escolar (Ávila, 1993, 2003, Diez, 2009). Además, se reconoce la influencia de otros aspectos, lo que también lo hace un campo amplio de estudiar (FitzSimons, Coben y O´Donogue, 2003). En nuestro país es el INEA quien se encarga de la formación básica de jóvenes y adultos; en la que se reconoce el importante papel del autoaprendizaje (Sánchez, 2003), y el papel que debe cumplir el asesor de estos niveles educativos (De Agüero, 2003).

De esta manera el elemento central en la educación abierta es el material que se presenta a la persona para fomentar su autoaprendizaje, opcionalmente cuenta con el apoyo de un asesor, quien no juega el papel principal en este tipo de educación, los materiales deberán estar diseñados a fin de que se pueda prescindir de un profesor en la mayoría de los casos. El apoyo del asesor será a manera de guía, y en caso de que la persona tenga alguna duda acerca del tema que está aprendiendo.

En virtud de que me desempeñé como asesora de matemáticas en preparatoria abierta es de mi interés centrarme en la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo y si bien existen propuestas de aspectos que se deben considerar en el diseño de materiales para la educación de adultos, estas se han realizado en la educación básica, por lo que consideramos que hay pocos en preparatoria abierta, al menos en nuestro país.

Aunado a ello, encontramos que el álgebra es una rama de las matemáticas cuyos tópicos deben estar presentes en todos los niveles educativos, uno de ellos la educación matemática de adultos (FitzSimons, 2002) dado que es una herramienta que puede dar solución a una variedad de problemas. Sin embargo, se ha observado que el álgebra es una de las ramas más críticas a enseñar (Guerrero, 2011).

Por ejemplo, existen problemas en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra que tienen su origen en la aritmética, causando dificultades que podrían llegar a persistir hasta el cálculo (Socas, 1997, Baltazar y Valdemoros, 2017 y Fazio y Siegler, 2011). Uno de estos problemas son las dificultades que se presentan al realizar operaciones básicas con números fraccionarios (Fazio y Siegler, 2011, Escobar, et al. 2016, Saavedra, et al. 2016, Londoño, et al. 2015, Socas, 1997, Cabañas, et al. 2004, Doyle, et al. 2016, Ríos, 2007 y Salas, et al. 2011).

Las fracciones son un problema para la mayoría de los estudiantes de todos los niveles, incluyendo jóvenes y adultos, citando a Escobar, et al. (2016), Saavedra, et al. (2016), Londoño, et al. (2015), Socas (1997), Fazio y Siegler (2011), Doyle et al. (2016), Ríos (2007), Salas, Cucunubá, Pastor y Fernando (2011) y Flores (2011) quienes nos introducen en las dificultades con el uso de fracciones en sus artículos ya descritos anteriormente. Específicamente en los estudiantes de preparatoria abierta encontramos que presentan dificultades cuando se enfrentan a cualquier tipo de operaciones en las que se incluyan fracciones, en nuestro caso nos centraremos en la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios. Considerando que algunos estudios (Guerrero, 2011; García et al, 2012) reportan que las dificultades con expresiones algebraicas son por una parte la comprensión de la noción de variable, y por otra la agrupación de términos semejantes, tenemos la hipótesis de que, además de la necesaria comprensión de variable y de término semejante, cuando el alumno de Preparatoria Abierta domina las operaciones con fracciones numéricas (aritmética) este es capaz de realizar sumas y restas de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios (algebraico), por lo que nos proponemos el siguiente objetivo.

1.3 Objetivo general

Diseñar una propuesta de secuencia didáctica que utilice la visualización matemática para contribuir a la comprensión de la suma y resta de expresiones algebraicas en una y dos variables con coeficientes fraccionarios en estudiantes de preparatoria abierta.

1.4 Objetivos específicos

- Utilizar la visualización matemática y las fases de la Ingeniería Didáctica para diseñar una secuencia de actividades encaminadas a formar redes de representaciones de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.
- Validar el instrumento diseñado por medio de una prueba piloto.
- Implementar el instrumento diseñado con estudiantes de preparatoria abierta para observar sus impresiones acerca de los procesos propuestos.
- Analizar las redes de representaciones mentales formadas y los niveles de comprensión alcanzados por cada participante para verificar si se promovió la comprensión deseada; en su caso proponer mejoras.

En nuestro caso consideramos una secuencia didáctica en el sentido de Díaz-Barriga (2013): "Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos" (p. 1), además expresa que las secuencias didácticas resultan del establecimiento de actividades de aprendizaje de tal manera que se puedan recuperar las nociones previas de los estudiantes para poder relacionarlas con situaciones problema y de contextos reales con la finalidad de que la información proporcionada al estudiante tenga sentido y se pueda iniciar el proceso de aprendizaje. "la secuencia demanda que el estudiante realice… acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento" (p. 5).

La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información a la que accede el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento.

1.5 Justificación

Así pues, una vez que se expuso la problemática que existe alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, que se presenta en todos los niveles educativos, incluyendo el sistema abierto, con el presente proyecto se pretende fortalecer el aprendizaje de las operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios en estudiantes de preparatoria abierta, con la idea de proponer una secuencia de actividades que ayude en la comprensión del mismo. Consideramos que uno de los factores que produce dificultades en el aprendizaje del tema propuesto es el no saber, o no recordar cómo realizar las operaciones de suma y resta de fracciones numéricas.

De esta manera encontramos que se repite la idea de Vamvakoussi y Vosniadou (2010, citados en Saavedra, et al. 2016) cuando “afirman que comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática escolar.” Lo mismo sucede con Baltazar y Valdemoros (2017) pues coinciden en que la no comprensión de los números racionales contribuye a que no haya una total comprensión de conceptos que se abordan en secundaria y preparatoria. Es por esto que nuestra postura es: en preparatoria abierta, es muy importante que el estudio y comprensión de expresiones algebraicas incluya fracciones en sus términos ya que con ello se refuerzan los conocimientos de este tema abordado en la matemática escolar temprana. Además de que se observan muy pocos estudios centrados en la enseñanza-aprendizaje en preparatoria abierta, así como estudios con adultos que cursan la preparatoria.

1.6 Alcance o aplicación

Con la realización de esta práctica se pudo contar con una Propuesta de enseñanza que promueva y fortalezca, en estudiantes del sistema de Preparatoria Abierta ubicado en Zacatecas, el conocimiento y manejo de las operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, en la que se presentan diferentes caminos para la obtención del resultado y en la que además se involucran diferentes representaciones. En este sistema se encuentran inmersos jóvenes y adultos, y la propuesta podría ayudarlos en el caso en que se hayan identificado problemas para realizar este tipo de operaciones, incluso se puede utilizar la secuencia como material de apoyo para el estudiante y asesor de matemáticas.

CAPÍTULO 2. ENFOQUE TEÓRICO

En este apartado se definen los fundamentos matemáticos y teóricos que han de ayudarnos a cumplir nuestros objetivos. Comenzando por definir aquellos conceptos matemáticos que influyen de manera directa en nuestro trabajo, para enseguida mostrar nuestro enfoque en cuanto a las ideas que lo sustentarán.

2.1 Fundamentos Matemáticos

A continuación, presentamos los aspectos más relevantes que se incluyen en los libros de aritmética y álgebra, y que consideramos concretas completas, para cada uno de los términos importantes en nuestro trabajo: fracción, número racional, suma de fracciones, resta de fracciones, expresiones algebraicas, suma de expresiones algebraicas, resta de expresiones algebraicas.

Las fracciones comunes son de la forma $\frac{a}{b}$ (o a/b), en las cuales tanto el numerador (a) como el denominador (b) son enteros y el denominador es distinto de cero. Si es posible representar un número en forma de fracción o razón entonces se denomina **número racional**. De hecho, todos los números enteros son números racionales. Cuando a es más pequeño que b, la fracción $\frac{a}{b}$ es una fracción propia; de otro modo la fracción es impropia. Las fracciones impropias se escriben con frecuencia como números combinados. Cualquier entero puede escribirse como una fracción representándola con denominador 1. Los números racionales son parte de un conjunto más grande de números, los números reales (Bello, 1999, p. 2).

Así mismo se dice que en las fracciones el denominador representa la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador es la cantidad que se toma de éstas (García, 2012).

Siendo los números racionales un subconjunto de los números reales, entonces cumplirán sus **propiedades para la suma**, mismas que se enlistan a continuación. Sean a, b, c números reales, es decir, pueden ser racionales, entonces se cumple lo siguiente:

- Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$
- Propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Propiedad de identidad: $a + 0 = 0 + a = a$
- Propiedad de inverso: $a + (-a) = 0$
- Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a(b + c) = ab + ac$

(Bello, 1999, p. 70)

Consideramos importante mencionar además de estas, la propiedad de **cerradura** para la suma de números reales, y afirma que al sumar dos números racionales el resultado obtenido será nuevamente un número racional.

En Rodríguez, Navarro, Maldonado, Romero, Vicario, Campistrous y Rizo (2016) se identifican cinco tipos de representación para las fracciones, siendo estas: numérica (y su correspondiente equivalente fraccionario y decimal), la gráfica y en la recta numérica. Ejemplos de estas representaciones se muestran en la Figura 3.

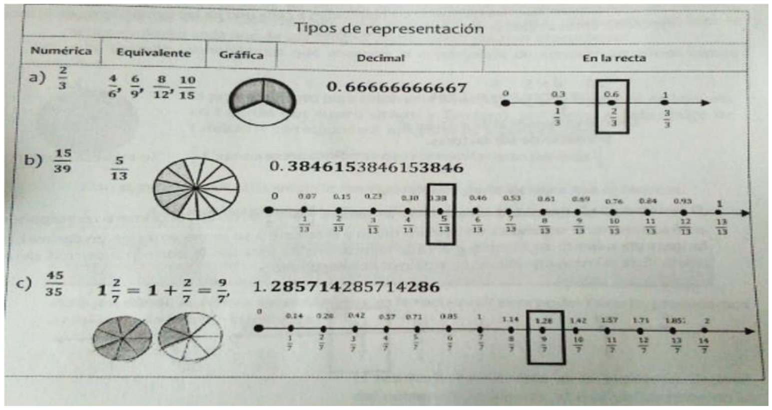


Figura 3. Tipos de representación de las fracciones según Rodríguez, et al. (2016)

Así mismo se puede notar que algunos libros muestran distintas **maneras de realizar la suma o resta de fracciones**, por ejemplo, Bello (1999) presenta una de ellas. En el caso de la suma de fracciones con el mismo denominador se tiene que:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Y se destaca la importancia de reducir las fracciones a su mínima expresión para obtener el resultado final de la operación, para lo que antes de mostrar la manera de realizar las operaciones se muestra la manera de reducirlas a su mínima expresión: para reducir una fracción a su mínima expresión divida el numerador y el denominador entre el mayor número natural que los divida con exactitud, es decir que los cocientes sean números naturales.

Continuando con la suma de fracciones, en el caso de denominadores distintos, se recurre al uso de mínimo común denominador (MCD), el cual es el mínimo (más pequeño) común múltiplo (MCM) de los denominadores, el método para obtener este número consiste en escribir los denominadores en forma factorizada. La manera más corta de hallar el MCD es mediante la búsqueda del menor divisor común para los denominadores, luego el siguiente y así sucesivamente hasta que el cociente no tenga divisor común (excepto 1), para finalmente multiplicar esos divisores por el cociente final, obteniendo el MCD. Una vez obtenido el MCD se procede a escribir las fracciones que se desean sumar con fracciones equivalentes que tendrán como denominador ese número, para de esta manera tener la suma de fracciones con mismo denominador.

Para la resta se procede de manera similar solo que en lugar de sumar los numeradores estos se restan, en el caso de que se trate de una resta con denominadores iguales; en el caso que sean denominadores distintos entonces se procede a encontrar el MCD para luego realizar la resta. En el caso que sean números mixtos se procede en primer lugar a escribirlos como fracciones impropias.

Otra de las **maneras** en que se realiza la **suma o resta de fracciones,** específicamente de distinto denominador, denominadas heterogéneas, ya que con el mismo denominador el procedimiento es siempre el mismo, es utilizando la siguiente regla (Rodríguez, et al, 2016):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a)(d)+(b)(c)}{bd} \qquad \text{con } a,b,c,d \text{ enteros}$$

Y se procede de manera análoga para realizar la resta, es decir en lugar de realizar una suma en el numerador del resultado se realiza una resta:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a)(d) - (b)(c)}{bd}$$

Considerando que si se trata de una resta de fracciones para la solución de algún problema la primera de ellas debe ser mayor que la segunda.

Estos mismos autores presentan la representación gráfica para el caso de las sumas y las restas, iniciando la explicación con problemas de la vida diaria. Por ejemplo para el siguiente problema: Andrea ha consumido $\frac{1}{3}$ de queso y su papá ha consumido $\frac{1}{4}$ ¿qué cantidad de queso han consumido entre los dos?, entonces se debe sumar $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, para mostrar la solución gráfica, expresan que el $\frac{1}{3}$ se divide en 4 partes iguales, siendo el 4 el segundo denominador y posteriormente se toma el $\frac{1}{4}$ y se divide en 3 partes iguales, siendo el 3 el primer denominador; el resultado es una suma de fracciones con mismo denominador. El proceso y la gráfica se presentan en la figura 4.

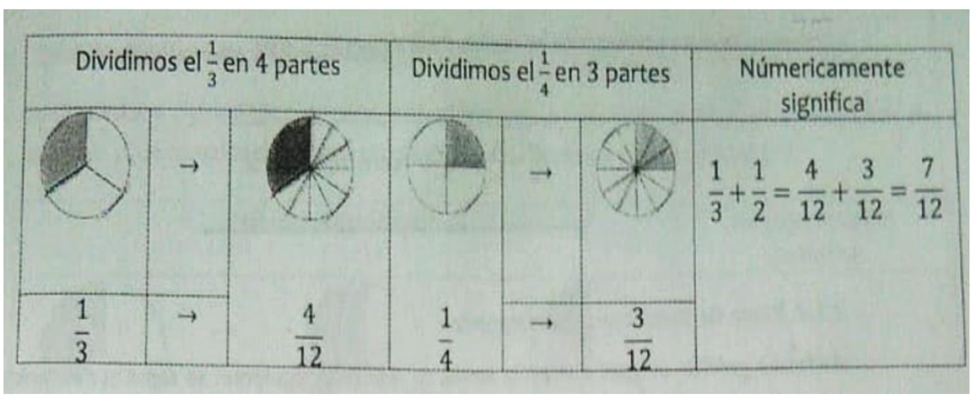


Figura 4. Representación gráfica de la suma de fracciones (Rodríguez, et al, 2016, p. 41)

De manera análoga se muestra la representación de la resta de fracciones especificando que se requiere que la primera fracción sea mayor que la segunda de ellas.

Ahora que quedan definidos los aspectos aritméticos que servirán de base para fundamentar nuestro trabajo, describiremos los aspectos algebraicos y se exponen a continuación.

Las expresiones algebraicas son símbolos que se utilizan en matemáticas y otras disciplinas como la química, la física, la medicina, en las que se establecen relaciones entre ellas y se busca una resolución. Se puede establecer una relación entre las expresiones matemáticas con los modelos para fenómenos naturales, con situaciones de la vida real y con modelos que explican el funcionamiento de dispositivos tecnológicos (Rodríguez, et al, 2016). Más aún, las expresiones algebraicas son objetos matemáticos que apoyan el desarrollo del cálculo de una y varias variables, de la geometría analítica, de las ecuaciones diferenciales, de la variable compleja etc. Es por esto por lo que el estudiante debe tener claro el manejo de estas.

Rodríguez, et al (2016) expresan que: En álgebra, el lenguaje algebraico viene muy ligado a las **expresiones algebraicas**, las cuales indican con números y símbolos (como las letras) lo que decimos en lenguaje común (p. 72). En ese mismo sentido se define una expresión algebraica como una expresión que resulta de combinar números y literales (letras) con las operaciones ordinarias de la aritmética (suma, resta, multiplicación, división y potenciación, p. 73).

Un **término algebraico** consta de un signo, un coeficiente, una o más literales y exponentes que acompañan a las literales, un ejemplo de un término algebraico es la expresión $\frac{3}{5}a^3b$. Y se llama **términos semejantes** a los términos algebraicos que comparten la misma(s) literal(es) elevada a la misma potencia. Para reducir términos semejantes solo se deben sumar o restar los coeficientes de esos términos y se conservan las literales.

Para realizar la **suma y resta de expresiones algebraicas** se identifican los términos semejantes y se reducen según corresponda, haciendo uso principalmente de la propiedad distributiva (Rodríguez et al, 2016). Por ejemplo:

$$\text{Sumar } 5a^2x + \tfrac{1}{2}b \ \text{ con } \ 2ax - b$$

Lo que procede es identificar si existen términos semejantes y se reducen, los que no sean términos semejantes se conservan en el resultado tal cual. En este caso se realiza la suma como sigue:

$$5a^2x + \frac{1}{2}b \quad + \quad 2ax - b \quad = \quad 5a^2x + 2ax + \left(\frac{1}{2} - 1\right)b$$

$$= \ 5a^2x + 2ax - \frac{1}{2}b$$

Es importante recordar la suma y resta de números reales al momento de reducir los términos semejantes, esto para realizar de manera correcta la suma o resta de los coeficientes.

2.2 Visualización Matemática

Dado el contexto en el que realizaremos nuestra práctica en el cual debemos priorizar el autoaprendizaje, consideramos que la visualización matemática nos puede servir como herramienta para comunicar información centrada en la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios y de esta manera poder elaborar una secuencia didáctica en la que en primer lugar se muestre el contenido a través de la resolución de un problema, para después ir fomentando el aprendizaje de las personas que estudian la preparatoria abierta. En este apartado realizaremos una breve descripción de lo que algunos autores describen como visualizar o visualización matemática para finalmente llegar a establecer una postura que será la que servirá de guía para nuestro trabajo.

La visualización tiene sus orígenes desde la primera mitad del siglo XX, algunos estudios que marcaron el inicio de este campo de investigación en Matemática Educativa (entre 1970 y 1980) fueron los realizados por Alan Bishop, quien en un principio centró sus estudios en visualización y habilidad espacial, principalmente en la Geometría; en esta misma época se centraron en realizar estudios con enfoques tanto cuantitativos y cualitativos, aunque estos últimos en mayor medida. El desarrollo del campo continúa, sobre todo con el apoyo de la psicología, y hacia los 90´s se convierte en un campo específico de investigación en Educación Matemática, en el que se realizan estudios sobre desarrollo curricular y sobre áreas particulares de las matemáticas. A partir del 2000 las investigaciones se ampliaron hacia lo semiótico, todo esto hasta tomar la importancia que tiene ahora, sobre todo como recurso para mejorar la comprensión de las matemáticas (Presmeg, 2006, 2008). De esta manera hay quienes aceptan que existe gran material de apoyo para el uso de la visualización en educación matemática, por ejemplo, en los libros de texto, calculadoras y programas de ordenador (Macnab, Phillips y Norris, 2012).

Enseguida mostraremos algunas de las concepciones e ideas acerca de la visualización, así como algunas características importantes, según los mismos autores, con la finalidad de establecer una que será de referencia en nuestro trabajo.

Zimmermann y Cunningham (1991, pp. 3-4) definen la visualización matemática de la siguiente manera:

> Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama, pero visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual.
>
> La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología) y usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática.
>
> Visualización puede ser “conocimiento obtenido por la contemplación de ideas ya en la mente…”
>
> Visualización matemática no es “apreciación matemática por medio de dibujos.” La intuición que la visualización matemática busca no es un tipo de intuición vaga, un sustituto superficial para comprensión, sino el tipo de intuición que penetra el corazón de una idea. Esto da profundidad y significado a la comprensión, sirve como una guía confiable para resolver problemas, e inspirar descubrimientos creativos.

Por su parte Arcavi (2003) expresa que:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (p. 217)
>
> "La visualización ofrece un método de ver lo invisible” (p. 216).
>
> La visualización puede acompañar un desarrollo simbólico, ya que una imagen visual, en virtud de su concreción, puede ser "un factor esencial para crear el sentimiento de evidencia propia e inmediatez" (Fischbein, 1987, citado en Arcavi, 2003).
>
> Matemáticos sofisticados pueden decir "ver" a través de formas simbólicas, independientemente de su complejidad. Para otros, y ciertamente para los estudiantes de matemáticas, la visualización puede tener un poderoso papel complementario en los tres aspectos resaltados: visualización como (a) apoyo e

ilustración de resultados esencialmente simbólicos (y posiblemente proporcionar una prueba en su derecho), (b) una posible forma de resolver conflictos entre soluciones simbólicas (correctas) e intuiciones (incorrectas), y (c) como una forma de ayudarnos a participar y recuperar fundamentos conceptuales que pueden ser fácilmente evitados por soluciones formales.

> La resolución de problemas requiere de la habilidad de visualizar, es decir, interpretar, usar y reflexionar sobre figuras, imágenes o diagramas, para comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión.

Según Cantoral y Montiel (2003, p. 694-695):

> La visualización no es el simple acto de ver… La visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere el ámbito gestual. Los gestos anteceden a la palabra y a la representación. La visualización entonces trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas.
>
> Cada vez más la visualización se ha convertido en un tópico importante de las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. No existe una aproximación teórica dominante en el terreno de la visualización y las diferentes posturas coinciden en que visualizar no se reduce al acto de ver las diferentes representaciones de un objeto matemático.

Díaz (2007, p. 212) hace referencia a la visualización como:

> … la asociación *imágenes- ideas*; las imágenes pueden ser internas (mentales) o externas (representaciones concretas: figuras, diagramas, gráficas, símbolos, etc.). Una imagen puede evocar o sugerir una idea; una idea puede exteriorizarse por medio del lenguaje y, a veces, por medio de una representación concreta.
>
> La visualización no es una “visión” inmediata de las relaciones contenidas en la representación, sino que es un proceso que culmina con la asociación imágenes-ideas, que puede ocurrir luego de una interpretación de los que se nos presenta en la contemplación; y que sólo podremos realizar eficazmente, si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2011) encontraron que:

> Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren “ver” o “imaginar” … (p.1)
>
> Los "objetos visuales", y los procesos de visualización de donde provienen, forman configuraciones o sistemas semióticos constituidos "por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas

que relaciona los objetos constituyentes de la configuración)" (Godino et al, 2011, p. 5)

> La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.
>
> La expresión puede ser una imagen, un dibujo, un diagrama..., que representa (metafórica o icónicamente) un objeto físico, una figura geométrica, una estructura conceptual. Se trata de comprender una realidad compleja en términos de otra que la representa y con la que se opera. (p. 13)
>
> Una tarea visual se puede abordar con medios analíticos y viceversa, una analítica se puede abordar con medios visuales. Es más, en la realización de una práctica visual intervienen de hecho objetos no visuales, y en la realización de una práctica analítica pueden intervenir objetos visuales, particularmente diagramas (p.19).
>
> Parece claro que la visualización penetra en todas las ramas de las matemáticas, no solo en la geometría, en coordinación con otras formas de expresión, en particular los lenguajes analíticos/secuenciales. También está presente en los diversos niveles de estudio matemático, sea en la educación elemental, como superior o incluso profesional… El interés por el uso de representaciones icónicas y diagramáticas se ha generado por la suposición de que de algún modo se consideran más efectivas que las representaciones lógicas tradicionales para cierto tipo de tareas (p.19).
>
> El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización… en la construcción y comunicación matemática (p. 20)

Según Pérez, Rincón y Domínguez (2012) “La visualización, como estrategia, consiste en presentar materiales que permitan apreciar el desarrollo y/o evolución de un fenómeno u objeto de estudio con el propósito de formar una imagen mental de lo que se pretende enseñar y aprender” (p. 718).

Así mismo, Aznar, Distéfano, Moler y Pesa (2014) expresan acerca de la visualización:

> … los profesionales que resuelven problemas a través de las matemáticas coinciden en que es la visualización del problema lo que lleva a hallar su solución. Así, F. Hitt (2003, citado en Aznar, et al, 2014) señala que la visualización matemática de un problema tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del mismo. (p. 4)

De Guzmán (1997, citado en Aznar, et al, 2014) afirma que la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra consideración que solamente podremos realizar eficientemente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. Este autor advierte sobre la necesidad de que el docente, en tareas de enseñanza vinculadas a la visualización sea consciente de la necesidad de realizar un proceso de decodificación que puede no ser transparente para el estudiante (p. 6).

Así mismo Presmeg (2006) nos muestra una definición general de visualización basada en ideas de Piaget e Inheld: “La visualización incluye procesos tanto de construcción como de transformación de imágenes visuales que nos hacemos en la mente y todas las inscripciones de naturaleza espacial que podrían estar implicadas en el quehacer matemático*"*.

De acuerdo con las definiciones anteriores en nuestro caso entenderemos por visualizar, no solo el acto de ver, es la **capacidad o proceso** mediante el cual se pueden formar imágenes, **diagramas**, figuras, gráficas, símbolos, ya sea en la mente, en papel o con herramientas tecnológicas, a fin de **representar o comunicar** información, misma que ayudará en la **comprensión matemática**, haciendo uso de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, lo gráfico, lo algebraico o lo verbal. Esta capacidad permite hacer una **interpretación** de lo que se haya presentado a contemplar, la cual solo se llevará a cabo de manera correcta si se ha leído adecuadamente lo que se está comunicando.

De esta manera encontramos que Tall y Vinner (1981) expresan ideas acerca de lo que es formarse una imagen de algún concepto, una imagen conceptual sería, según estos autores, toda la estructura cognitiva que se forma en la mente del individuo y que está asociada con cierto concepto, esta imagen se irá formando a través de la experiencia del individuo, misma que irá cambiando conforme recibe nuevos estímulos y madura.

Nos interesa de manera particular la habilidad para formar e interpretar diagramas que serán tomados en el sentido que se presenta en Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras (2015), pues encuentran que "Los diagramas…desempeñan un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p. 1). Así mismo mencionan que (p. 3-4):

> Una concepción amplia en la que casi cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en dos o tres dimensiones (derecha, izquierda; delante, detrás; arriba, abajo; inclusión, intersección, separación; acumulación, …) es un diagrama (figuras geométricas; gráficos cartesianos; matrices; grafos; mapas conceptuales; organigramas; croquis y mapas, …)… requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, combinaciones y construcciones según ciertas reglas sintácticas y semánticas específicas. Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas.
>
> Peirce incluye en la noción de diagrama a las fórmulas algebraicas ya que las entiende como iconos de relaciones entre sus elementos constituyentes. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción.

De esta manera y tomando en cuenta todo lo anterior respecto a la visualización matemática la consideramos pertinente en nuestro trabajo. La utilizaremos como instrumento para presentar diagramas que muestren a los estudiantes de preparatoria abierta algunos procesos para realizar sumas y restas de expresiones algebraicas en una y dos variables con coeficientes fraccionarios, fomentando de esta manera la capacidad de los estudiantes para formarse imágenes y diagramas acerca del tema; lo que a su vez les ayudará en la comprensión, para de esta manera poder aplicarlo en la resolución de problemas de su contexto que estén relacionados con sumas y restas de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios. Varios autores coinciden en que la inclusión de la visualización en los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas ayuda en la comprensión de las matemáticas y mejora el proceso de resolución de problemas.

Así mismo cuando hablamos de **comprensión** nos referimos a la comprensión que manejan Hiebert y Carpenter (1992, citados en Hitt, 2000), quienes expresan que una idea matemática, **un procedimiento** o un hecho será comprendido si su **representación mental** forma parte de una red de representaciones; además de que el grado de entendimiento será determinado por la cantidad y la fuerza de las conexiones. De tal suerte que esa idea, procedimiento o hecho se considera profundamente entendido si existen conexiones fuertes y numerosas.

Así pues, utilizaremos los **niveles de comprensión** propuestos por Hitt (1998), dado que nos permitirán clasificar a los estudiantes de preparatoria abierta, a partir de las conexiones formadas con las representaciones utilizadas en nuestro diseño, lo que a su vez podrá determinar el grado de comprensión de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.

Nivel 1: Reconocimiento de los elementos de un sistema semiótico. En este nivel los estudiantes tienen ideas imprecisas del tópico matemático, pueden mezclar de manera incoherente diferentes representaciones.

Nivel 2: Transformaciones internas a un sistema semiótico. Son los tratamientos, es decir lo que se realiza dentro de una misma representación semiótica.

Nivel 3: Conversiones (transformaciones externas) de una representación de un sistema semiótico a otro.

Nivel 4: Coordinación de representaciones entre diferentes sistemas semióticos.

Nivel 5: Producción de representaciones semióticas en la resolución de un problema.

Cuando hablamos de representaciones mentales y semióticas hacemos referencia a lo propuesto por Duval (1993, p. 38): las **representaciones mentales** cubren todas las imágenes mentales y, de manera más general, las concepciones que un individuo puede tener de un objeto, una situación y lo que está asociado con ellos. Y las **representaciones semióticas** son un medio para exteriorizar las representaciones mentales con fines de comunicación, es decir, hacerlas visibles o accesibles a otros, además de que son necesarias para la actividad cognitiva del pensamiento. De la misma manera las representaciones mentales son una interiorización de las representaciones semióticas; estas últimas son producciones constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias limitaciones de significación y funcionamiento (figura geométrica, expresión en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una gráfica).

Así mismo Duval (1993, p. 41) define tres actividades cognitivas para las representaciones:

- La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado: composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, una formula.

- El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el mismo registro donde se formó, se trata de una transformación en un registro.
- La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro, que retiene todo o solo parte del contenido de la representación inicial. Esta actividad es una transformación externa al registro de inicio. La descripción es la conversión de una representación no verbal (diagrama, figura, gráfica) en una representación lingüística.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se explica la metodología utilizada para lograr los objetivos propuestos. Este trabajo se considera de tipo aplicado definido por Kothari (2004) como una investigación en la cual se tiene el propósito de encontrar una solución para un problema inmediato al que se enfrenta una sociedad. Siguiendo a Kothari expresa que la investigación dirigida a ciertas conclusiones (por ejemplo, una solución) frente a un problema social o empresarial concreto es un ejemplo de investigación aplicada. En este caso nuestra investigación se enfoca en proponer una alternativa a la problemática que se ha identificado alrededor de la enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático en el que se encuentran inmersas las operaciones con fracciones, específicamente en el sistema de Preparatoria Abierta.

De esta manera consideramos que el enfoque de esta investigación es cualitativo, Hernández, Fernández y Baptista (2014) expresan que este enfoque tiene como objetivo "Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (p. 11). Dado que la aplicación de nuestro diseño nos permitirá describir, explicar e interpretar el impacto que se puede lograr en los estudiantes de preparatoria abierta. Estos mismos autores explican que este enfoque permite incluir una muestra de unos cuantos casos representativos y que se analizan por sus cualidades, en nuestro caso específico buscaremos estudiantes jóvenes y estudiantes adultos. De la misma manera Khotari (2003) nos ayudara a seleccionar nuestras técnicas con lo siguiente:

> …Tal enfoque de la investigación genera resultados ya sea en forma no cuantitativa o en la forma que no están sujetos a un análisis cuantitativo riguroso. En general, se utilizan las técnicas de entrevistas grupales, técnicas proyectivas y entrevistas en profundidad. (P. 5)

En cuanto a nuestros objetivos específicos los métodos, las técnicas y los instrumentos que proponemos son basándonos en las listas propuestas por Khotari (2004) y tomando como base la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1995), pues esta metodología proporciona un esquema experimental que ayuda en la producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje, además de que nuestro objetivo es justamente realizar un diseño y consideramos que las fases de la ingeniería didáctica proporcionan una estrategia para lograrlo. Esta metodología se caracteriza por realizar una validación interna que consiste en la confrontación entre el análisis *a priori* y el *a posteriori*. Todo sin dejar de lado el contexto específico de preparatoria abierta en Zacatecas, Zac. México.

De esta manera en el diseño propuesto se utiliza a la visualización matemática como una herramienta para representar y comunicar información a través de esquemas de nuestro tema de interés. Además, como las definiciones presentadas lo han demostrado, la visualización matemática puede apoyar en la comprensión de tópicos, por lo que se toma de referencia la propuesta antes mencionada de Hiebert y Carpenter. Se utiliza la Ingeniería Didáctica dado que el centro de este trabajo es **la secuencia y su diseño**. Para poder realizar los análisis correspondientes y poder medir de alguna manera qué tanto se comprende el tema y con ello la eficacia de la secuencia didáctica diseñada se propone la utilización de los niveles de comprensión de Hitt (1998), los cuales se verán reflejados en formas de redes de representación mental extraídas de las conexiones entre representaciones semióticas; con ello saber el nivel de comprensión que alcanzara cada uno de los estudiantes. Todo con la finalidad de evaluar la efectividad de la secuencia didáctica.

A continuación, describimos las fases de la Ingeniería Didáctica y la manera en la que serán retomadas en nuestro trabajo.

3.1 Fases de la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica consiste en cuatro fases, las cuales describimos a continuación, además de una breve explicación de lo que haremos en cada fase de acuerdo con nuestro tema y con nuestro contexto.

Análisis preliminar

Según Artigue (1995, p. 28) en este tipo de análisis se consideran los siguientes tipos:

a. El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
b. El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
c. El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
d. El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Estos análisis los realizamos para rescatar elementos que sirvan de ayuda en el diseño de una secuencia didáctica centrada en el tema de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios. En este caso utilizamos el análisis de documentos como libros, artículos, planes de estudio, que nos puedan proporcionar información que ayuden a realizar cada uno de los análisis mencionados. Además de auxiliarnos de un cuestionario para el caso de las concepciones de los estudiantes, sus errores y dificultades.

Concepción y análisis *a priori*

A partir de la fase anterior que es el análisis preliminar, una segunda fase será la concepción de una secuencia didáctica, que incluye su diseño, y un análisis a priori. Artigue (1995) expresa que, en esta segunda fase, se toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables no fijadas por las restricciones. Llamadas variables de comando que se perciben como pertinentes con relación al problema estudiado. Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando:

- Variables macro-didácticas, concernientes a la organización global de la ingeniería
- Variables micro-didácticas, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir la organización de una secuencia o fase.

Según De Faria (2006, p.4) el objetivo principal del análisis *a priori* es

> … determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar poscomportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis

> se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro, entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Es en esta fase en la que hemos de retomar los elementos de la fase anterior que servirán de base para diseñar actividades estructuradas, por medio de la visualización matemática; para buscar la mejora de la comprensión de las operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.

Experimentación

Esta fase inicia cuando se tiene el contacto con la población a la que se está investigando. De Faria (2006) explica que esta fase supone la explicitación de los objetivos y las condiciones para la puesta en escena; la aplicación del instrumento diseñado y el registro de observaciones realizadas durante ello.

Siendo así una vez diseñada la secuencia didáctica se procede a implementarla con estudiantes de preparatoria abierta para observar sus impresiones acerca de los procesos propuestos. En nuestro caso utilizaremos observación y toma de notas durante la aplicación, recordemos que, en el contexto de preparatoria abierta, el profesor o asesor no juega el papel principal por lo que se espera que se tenga la mínima intervención de este en la aplicación de la secuencia didáctica.

Así mismo, por la dinámica de trabajo de la preparatoria abierta, el diseño del material propuesto debe considerar que el asesor pudiera no estar presente, aunque en nuestro caso, por ser una investigación, reportaremos lo que acontece en esta fase, basados en la interacción estudiante-material, más que en una dinámica de clase.

Análisis a posteriori y validación

Según Artigue (1995) el análisis *a posteriori* se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias, así como las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Y es justamente en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori* en donde radica la validación de las hipótesis de la investigación.

De esta manera en nuestro caso analizaremos las respuestas de los estudiantes de preparatoria abierta, con base en niveles de comprensión descritos arriba, en un principio para poder establecer si se cumplieron los objetivos que nos proponemos en cada una de las actividades.

3.2 Análisis preliminar

Como se mencionó en el apartado anterior, realizaremos en primera instancia un análisis preliminar, y consideraremos cuatro dimensiones: un análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; un análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el cual denominamos análisis didáctico; un análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, al que llamamos análisis cognitivo; y finalmente un análisis del campo.

3.2.1 Análisis Epistemológico

En este apartado realizamos una búsqueda de lo que corresponde al tratamiento del álgebra a través del tiempo, para poder observar la evolución de las expresiones algebraicas. Apoyados en las investigaciones realizadas por varios autores (Puig, 2003; Guerrero, 2011; Rodríguez, et al, 2016). Así mismo incluimos, en primera instancia, algo del desarrollo histórico de las fracciones, tratando de rescatar elementos que puedan ser de ayuda en el diseño de las actividades que se desean proponer.

Las fracciones

Para esta sección nos centramos en el desarrollo que tenían las fracciones en distintas civilizaciones, como la babilónica, la egipcia, la griega, árabe. Siguiendo a Rodríguez et al (2016):

Los babilonios utilizaban un sistema de sub-unidades: la unidad menor era el dedo, 30 dedos componían un codo y 120 codos una vara. Una medida entera podía ser expresada en una cierta unidad de medida, por ejemplo, cinco codos, pero cuando dicha medida no era una cantidad entera, hubo la necesidad de fraccionar la cantidad como, por ejemplo, siete codos y un tercio de codo, permitiendo de esta manera cuantificarla. Por tanto, la fracción resultaba ser una noción más eficaz para realizar los cálculos, al expresar la medida en una sola unidad, esto con la finalidad de uniformar las medidas y así facilitar sus intercambios comerciales.

Para los egipcios, el concepto de fracción también fue utilizado para medir porciones no enteras de un reparto; por ejemplo, la división de pan, para la construcción de las pirámides e incluso las mediciones que realizaban acerca del planeta Tierra. En el Papiro de Rhind, o papiro de Ahmes, documento escrito hace casi 4000 años, es posible apreciar la mayor cantidad de matemáticas que utilizaban los egipcios, entre ellas la costumbre egipcia de expresar toda fracción como una suma de fracciones unitarias. Por ejemplo, la descomposición de $\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$.

Los griegos marcaban el numerador con un acento y el denominador con dos, o bien, colocaban al denominador sobre el numerador (como actualmente anotamos los exponentes).

Los hindúes resolvieron el problema de la notación escribiendo el numerador sobre el denominador. De hecho, los antecedentes más antiguos acerca de las operaciones con fracciones datan de Arybhata en el siglo VI d. C., Brahmagupta en el siglo VII d. C., Mahavira en el siglo IX y Bháskara en el siglo XII, y en este proceso de evolución se sistematiza la operatividad llegando al algoritmo actual.

Los árabes utilizaban una escritura similar a la egipcia para representar fracciones, pero a mediados del siglo IX d. C., cuando Al-Khwarizmi adopta la notación india la redacta un manual sobre aritmética que recoge precisamente toda la tradición matemática india. En el siglo XII la obra de Al-Khwarizmi es traducida al latín por uno de sus grandes difusores: Leonardo de Pisa, y comienza a hacer uso de la línea horizontal para representar divisiones originando la notación actual.

Con lo descrito arriba se puede observar que el nacimiento de las fracciones es debido principalmente a la necesidad de contar, medir, repartir o fraccionar una cantidad (babilonios y egipcios).

El álgebra

Dentro del álgebra se distinguen principalmente tres etapas: el álgebra retórica, el álgebra sincopada y finalmente el álgebra simbólica. La primera etapa comprende desde los babilónicos (1700 a. C) hasta Diofanto (250 d. C) y se caracterizada porque se trataba de un álgebra que únicamente utilizaba un lenguaje común u ordinario para resolver problemas, con ausencia total de símbolos. La segunda etapa, donde el principal precursor fue Diofanto y que culmina hasta inicios del siglo XVI, en ella se empiezan a utilizar algunas abreviaturas, en combinación a su vez con el lenguaje natural. En la etapa simbólica ya se comienza a utilizar el lenguaje simbólico cada vez con menor uso de lenguaje natural, para finalmente llegar a lo que conocemos hoy como álgebra. La notación actual fue propuesta por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650).

Enseguida hacemos referencia al trabajo de Guerrero (2011, p. 10-14), quien presenta un resumen completo extraído de documentos históricos y publicaciones:

> Desde el siglo XVII a.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primero y segundo grado. Además, resolvían también, algunos sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas. En el siglo XVI a.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales. Ya para entonces tenían un método para resolver ecuaciones de primer grado que se llamaba el "método de la falsa posición". No tenían notación simbólica, pero utilizaron el jeroglífico hau (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.
>
> Alrededor del siglo I d.C. los matemáticos chinos escribieron el libro Jiu zhang suan shu (que significa El Arte del cálculo), en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones de primero y segundo grado, así como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Con su ábaco (suan zí) tenían la posibilidad de representar números positivos y negativos.
>
> En el siglo II, el matemático griego Nicómaco de Gerasa publicó su Introducción a la Aritmética y en ella expuso varias reglas para el buen uso de los números. En el siglo III el matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su Aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo.

Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.

En el siglo VII los hindúes habían desarrollado ya las reglas algebraicas fundamentales para manejar números positivos y negativos.

Siglo IX. Época en la que trabajó el matemático y astrónomo musulmán Al-Jwarizmi, cuyas obras fueron fundamentales para el conocimiento y el desarrollo del álgebra. Al - Jwarizmi investigó y escribió acerca de los números, de los métodos de cálculo y de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Su nombre latinizado dio origen a la palabra algoritmo que, usada primero para referirse a los métodos de cálculos numéricos en oposición a los métodos de cálculo con ábaco, adquirió finalmente su sentido actual de "procedimiento sistemático de cálculo". En cuanto a la palabra álgebra, deriva del título de su obra más importante, que presenta las reglas fundamentales del álgebra, Al-jabr wal muqabala.

En el siglo X vivió el gran algebrista musulmán Abu Kamil, quien continuó los trabajos de Al-Jwarizmi y cuyos avances en el álgebra serían aprovechados en el siglo XIII por el matemático italiano Fibonacci. Durante este mismo siglo, el matemático musulmán Abul Wafa al Bujzani, hizo comentarios sobre los trabajos de Diofanto y Al-Jwarizmi y gracias a ellos, los europeos conocieron la Arithmetica de Diofanto.

En 1202. Después de viajar al norte de África y a Oriente, donde aprendió el manejo del sistema de numeración indoarábigo, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, publicó el Liber Abaci (Tratado del Ábaco) obra que en los siguientes tres siglos fue la fuente principal para todos aquellos estudiosos de la aritmética y el álgebra.

En el siglo XV, el matemático francés Nicolás Chuquet introdujo en Europa occidental el uso de los números negativos, introdujo además una notación exponencial muy parecida a la que usamos hoy en día, en la cual se utilizan indistintamente exponentes positivos o negativos.

En 1489 el matemático alemán Johann Widmann d´Eger inventó los símbolos "+" y "-" para sustituir las letras "p" y "m" que a su vez eran las iniciales de las palabras piu (más) y minus (menos) que se utilizaban para expresar la suma y la resta.

En 1525, el matemático alemán Christoph Rudolff introdujo el símbolo de la raíz cuadrada que usamos hoy en día: Este símbolo era una forma estilizada de la letra "r" de radical o raíz.

Entre 1545 y 1560, los matemáticos italianos Girolamo Cardano y Rafael Bombelli se dieron cuenta de que el uso de los números imaginarios era indispensable para poder resolver todas las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado.

En 1557 el matemático inglés Robert Recorde inventó el símbolo de la igualdad, “=”.

En 1591 el matemático francés François Viète desarrolló una notación algebraica muy cómoda, representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.

En 1637 el matemático francés René Descartes fusionó la geometría y el álgebra inventando la "geometría analítica". Inventó la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, … y las variables o incógnitas por las últimas, x, y, z. Introdujo también la notación exponencial que usamos hoy en día.

Una de las causas por las que las Matemáticas no avanzaron suficientemente hasta el siglo XVI fue sin duda la carencia de unos símbolos que ayudaran a los matemáticos a expresar sus trabajos de una manera más simple y que permitieran su lectura con mayor facilidad.

Actualmente, el lenguaje de las Matemáticas es internacional. Se puede desconocer el idioma en que está escrito un problema, pero la expresión algebraica será la misma que en cualquier libro español.

La palabra Álgebra viene del título del libro "*Al-jabr w'al_muqabalah*", escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo **Mohamed ibn-Musa al-Khwarizmi** (hijo de Musa y nativo de Khwarizmi). *«Al-jabr»* significa **transposición** y con ello se hacía referencia al paso de términos de un miembro a otro de la ecuación y *«w'al-muqabalah»* significa **eliminación** y se hacía referencia a la eliminación de términos iguales en los dos miembros.

Nos parece también importante mencionar que Puig (2003) expresa que el método cartesiano es importante para la historia del álgebra puesto que se interpreta “como el examen de la naturaleza del trabajo de traducción de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra y su solución en ese SMS.” (p.98)

A partir de esto podemos observar que la necesidad de resolver problemas de la vida cotidiana hace la necesidad de contar con una simbología para poderlo hacer, principalmente para poder resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Es por ello que se proponían métodos para poder resolver esas ecuaciones, mismos que fueron diferentes en cada etapa de desarrollo del álgebra, Malisani (1999) realiza en análisis histórico epistemológico del desarrollo del lenguaje algebraico, en el que hace mención a algunos de los métodos que eran utilizados para resolver ecuaciones.

Así, por ejemplo Malisani (1999) describe el método llevado a cabo por Euclides, utilizando la geometría a través de sus libros; también describe el procedimiento llevado a cabo por Al-Khwarismi, para ecuaciones de segundo grado completando el cuadrado, quien explica su proceso en lenguaje natural; el procedimiento llevado a cabo por Al-Khayyam, el cual utilizó intersecciones de curvas cónicas para resolver ecuaciones de tercer grado con raíces positivas; los procedimientos de Al Tusi, que consistían en la determinación de los máximos de ciertas funciones, acercándose a la determinación del máximo de funciones polinómicas; y se describe el método de la falsa posición utilizado para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y algunos casos de sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, se conocían de dos tipos: simple y doble falsa posición, los cuales consisten en asignar valores particulares (uno y dos valores, respectivamente) a la incógnita y realizar los cálculos necesarios para llegar a la solución correcta de la ecuación.

Es así como podemos darnos cuenta de que el desarrollo del álgebra fue un proceso largo, se cree que la falta de un lenguaje simbólico también pudo haber sido un obstáculo para el avance en la resolución de ecuaciones, y con ello de problemas. Se observa además su evolución a partir de la necesidad de resolver problemas cotidianos, y de la búsqueda de soluciones a ecuaciones de distintos grados, así como el uso de diferentes representaciones (ábaco, simbolismo básico, vocales y consonantes diferenciadas, enunciados verbales, métodos gráficos, entre otros), que dieron paso al avance que hoy conocemos.

3.2.2 Análisis Cognitivo

Este apartado corresponde a la realización de un análisis de las posibles concepciones, dificultades, errores que pudieran tener los estudiantes al aprender suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios por lo que una de nuestras fuentes principales será un cuestionario de diagnóstico que ayude a evidenciar principalmente las dificultades que presentan los estudiantes de preparatoria abierta al enfocarse en el tema propuesto, así como los métodos utilizados para realizar las operaciones de suma y resta de fracciones.

Se aplicó un cuestionario que consistió de seis ejercicios que fueron diseñados con la finalidad de poder conocer, en primer lugar, los métodos que utilizaban cada uno de los estudiantes para resolver una suma o resta de fracciones, en segundo lugar, detectar los errores que se pudieran encontrar a partir de las respuestas de los estudiantes, y las dificultades que pudieran presentar a la hora de realizar la suma y resta de expresiones algebraicas, tomando en cuenta coeficientes enteros y fraccionarios.

Cabe mencionar que el cuestionario fue aplicado, en una primera instancia, a 13 estudiantes de nivel medio superior en modalidad semiescolarizada, los cuales se encontraban cursando el primer semestre, en este nivel también se encuentran cursando estudiantes adultos la preparatoria, pero con la diferencia de que ellos deben acudir a una clase formal en un aula, cosa que no sucede en preparatoria abierta. A pesar de que teníamos ya 13 cuestionarios resueltos continuamos acudiendo a preparatoria abierta a buscar estudiantes, para después de varios días poder aplicar el cuestionario en esta instancia educativa, encontrado de esta manera, y no en la misma fecha, a 5 estudiantes que ya habían cursado el contenido matemático que aborda las operaciones de nuestro interés, y a los que se les agregó además en su cuestionario una pregunta acerca de su opinión sobre las fracciones, esto debido a que a partir de observar los primeros cuestionarios, lo creímos también una fuente de información para ayudar en nuestro diseño.

Los resultados encontrados los enlistaremos de la manera descrita en el párrafo anterior, en primer lugar, analizaremos los tipos de procedimientos que mostraron los estudiantes al realizar la suma y resta de fracciones, en segundo lugar, los errores que se pueden observar a partir de las respuestas de los estudiantes y finalmente también los encontrados en la suma y resta de expresiones algebraicas. Llamaremos a los estudiantes E1, E2, E3, …, para referirnos a sus respuestas, cabe mencionar que el orden en que nos referiremos a los estudiantes no será precisamente en el que fue aplicado el cuestionario.

Procedimientos para resolver la suma y resta de fracciones.

Encontramos en este caso que la mitad de los estudiantes, 9 del total de 18, utilizaron para sumar y restar las fracciones la búsqueda de un mínimo común múltiplo (mcm), la mayoría de ellos realizando la descomposición en factores primos, para después realizar el acomodo que ya muchos conocemos, es decir, se anota el mcm como denominador y como numerador las operaciones, ya sea suma o resta o ambas, operaciones que deberán realizarse entre las cantidades resultantes de dividir el mcm entre cada denominador y multiplicarlo por el numerador correspondiente. Podemos observar esto en la figura 5, que presenta las respuestas del E1, E6 y E14 respectivamente.

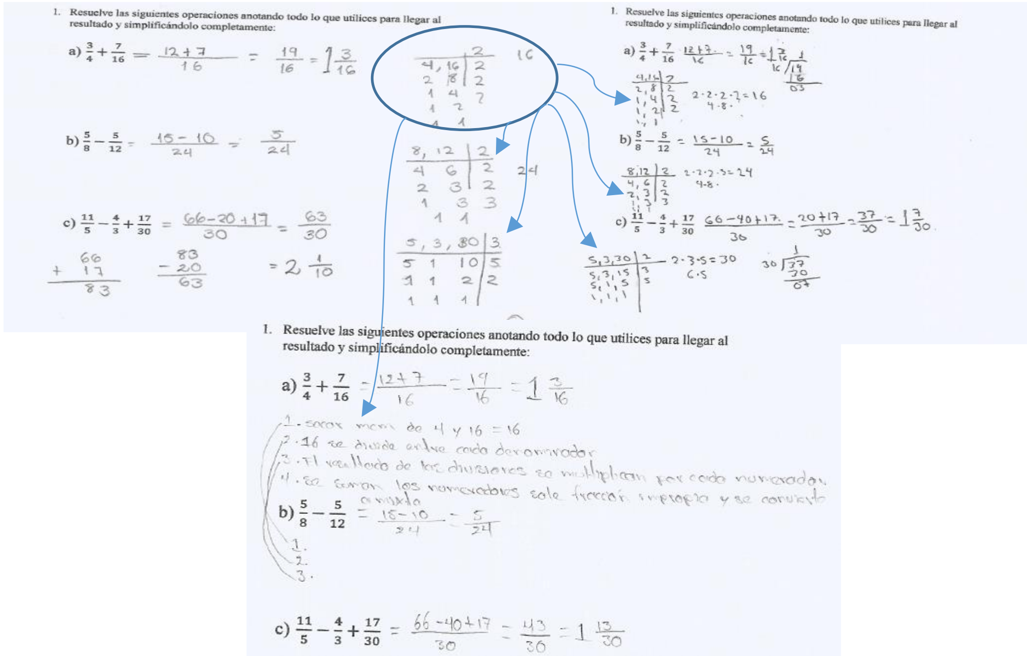


Figura 5. Procedimientos planteados por E1, E6 y E14, respectivamente

En el caso de los procedimientos de los otros nueve estudiantes tenemos por ejemplo el procedimiento utilizado por E2 que muestra como el estudiante busca si hay un común denominador, es decir si alguno de los denominadores divide al otro u otros y lo que hace es convertir todas las fracciones a ese denominador, para luego realizar la operación correspondiente conservando el denominador y operando los numeradores; en el caso en que no hubiera este común denominador, el estudiante procede a multiplicar los denominadores para encontrar ese denominador al que habrá de convertir las fracciones para operarlas. De manera similar, el E16 utilizo un procedimiento, únicamente varía en que no anoto dos fracciones con el mismo denominador, si no que sobre el mismo denominador realizo las operaciones (véase figura 6).

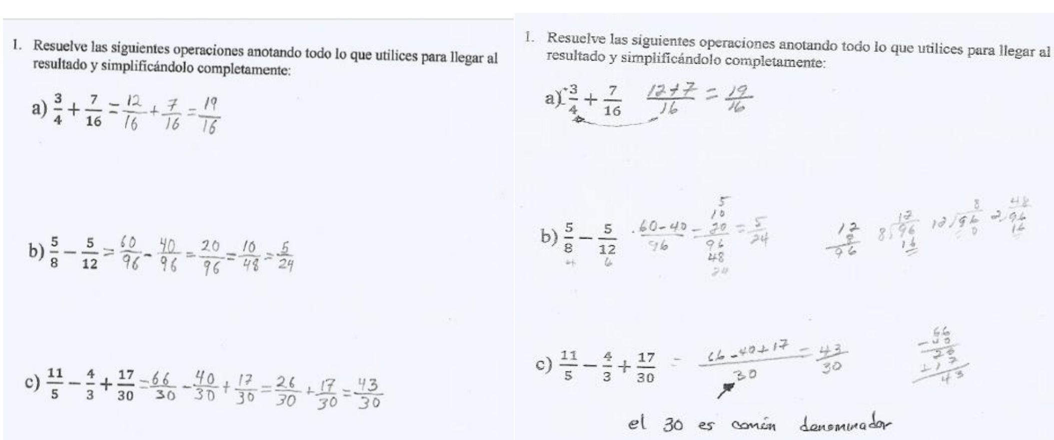


Figura 6. Procedimientos planteados por E2 y E16

El procedimiento llevado a cabo por E17 (figura 7) fue un poco distinto a todos los demás pues su procedimiento consistió en realizar el producto de los denominadores para obtener un nuevo denominador, también realizó los productos cruzados de las fracciones y los anotó como numeradores para luego poder realizar las operaciones correspondientes, obteniendo así una respuesta que luego habría de simplificar para llegar a una fracción irreducible, que coincide con la encontrada por los otros estudiantes que utilizaron otros métodos, a excepción de la última operación en la que no realizo la reducción además de que cometió un error al realizar una multiplicación. Este procedimiento se muestra como una fórmula para la suma y resta de fracciones en el libro de preparatoria abierta *Representaciones Simbólicas y Algoritmos* (García, 2012).

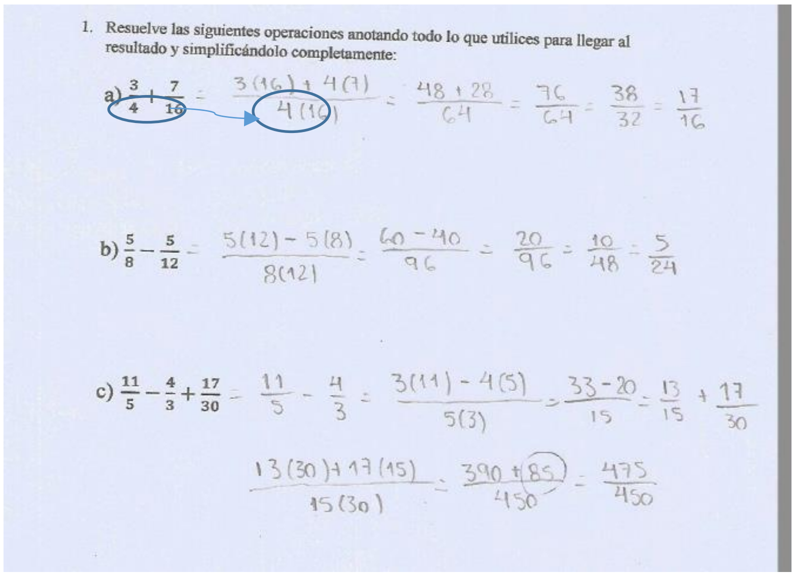


Figura 7. Procedimiento planteado por E17

También encontramos casos en los que el estudiante al observar que en dos de las operaciones propuestas existía un común denominador quiso realizar lo mismo con la operación correspondiente a la resta, este fue el caso de E9. También encontramos una manera de realizarlas utilizando sumas o restas cruzadas, este es un caso que pudiera deberse a que vagamente el estudiante recuerda algo de que se puede realizar con productos cruzados, pero no supo cómo se debería realizar, siendo este el caso de E18; se muestra esto en la figura 8.

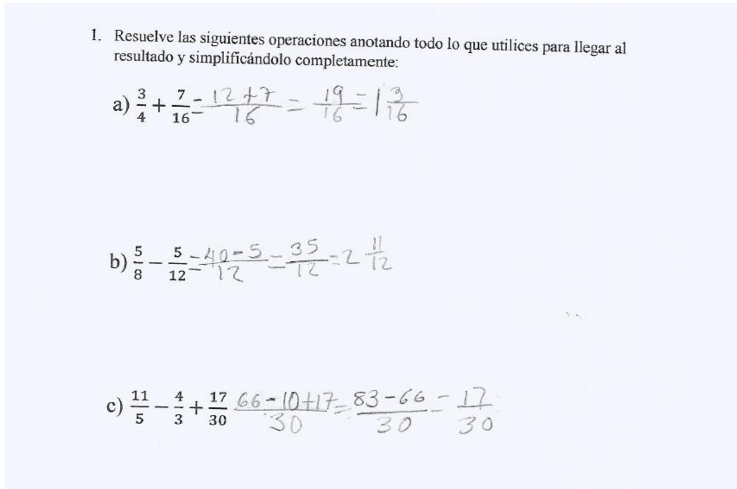


Figura 8. Procedimiento planteado por E9

Finalmente encontramos casos en los que no se muestra nada en sí de los procedimientos que pudieron haber utilizado los estudiantes y otros que no realizaron ninguna operación que nos pudiera dar indicios de qué estuvieran pensando al intentar resolver los ejercicios propuestos, lo cual se puede observar por ejemplo en E3 (puede ser que su recuerdo le muestre que debe buscar el mcm, aunque no lo realizó de manera correcta en dos de los incisos) y E10, mostrados en la figura 9.

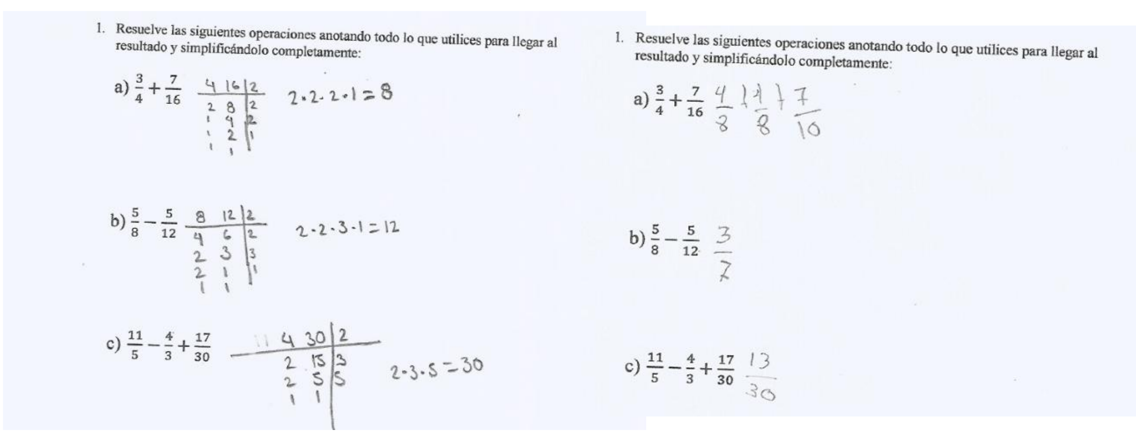
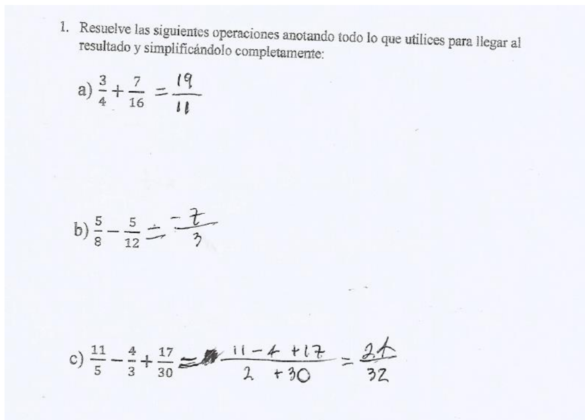


Figura 9. Procedimientos planteados por E3 y E10

Errores observados en las operaciones con fracciones

Encontramos algunos errores de despiste, sobre todo al momento de realizar alguna suma con enteros, los cuales no consideraremos dados nuestros objetivos. Pero también hay errores que se pueden considerar de impacto para provocar una dificultad al realizar las operaciones de suma y resta de fracciones, mismos que mencionaremos en esta sección de acuerdo con lo que se encontró en la aplicación del cuestionario. En primer lugar, consideramos que un error se puede presentar, al momento en que ellos no pudieron realizar prácticamente ninguna de las operaciones que se les presentan en la parte uno de este cuestionario, este fue el caso de E11 y E12, pues al parecer no tenían idea de la manera en que habría de resolverse las operaciones, cabe mencionar que estos estudiantes tenían poco tiempo de haber visto la manera en que se realizan las operaciones con fracciones.

El estudiante E18 realizó las operaciones de manera errónea y según lo que se puede observar en sus respuestas mediante sumas o restas cruzadas, para el caso de la tercera operación propuesta, realiza la operación directa con los numeradores, y al denominador le suma un 2, como se puede observar en la figura 10.



1. Resuelve las siguientes operaciones anotando todo lo que utilices para llegar al resultado y simplificándolo completamente:

a) $\frac{3}{4}+\frac{7}{16}=\frac{19}{11}$

b) $\frac{5}{8}-\frac{5}{12}=\frac{-7}{3}$

c) $\frac{11}{5}-\frac{4}{3}+\frac{17}{30}=\frac{11-4+17}{2+30}=\frac{24}{32}$

Figura 10. Errores evidenciados por E18

En el caso de E9 se puede observar que la primera de las operaciones se realizó de manera correcta pero al momento de realizar las otras dos se presentan algunos errores, como se menciona arriba este estudiante observó que en dos de los ejercicios había un común denominador y quiso realizar lo mismo con la otra operación, por lo que llego a un resultado completamente erróneo; en el último de los ejercicios de esta parte se puede observar que olvidó multiplicar el resultado de dividir el común denominador entre el denominador por el numerador correspondiente (ver figura 11). Cosas similares sucedieron con E8 pues realiza operaciones erróneas en los incisos b y c, y a pesar de haber obtenido el mcm de manera correcta al realizar las operaciones hubo varios errores, principalmente al momento en que debía de dividir por el denominador y multiplicar por el numerador, la figura 11 muestra sus respuestas.

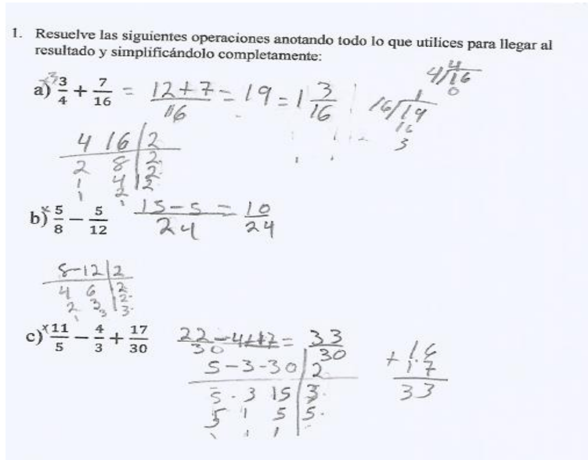


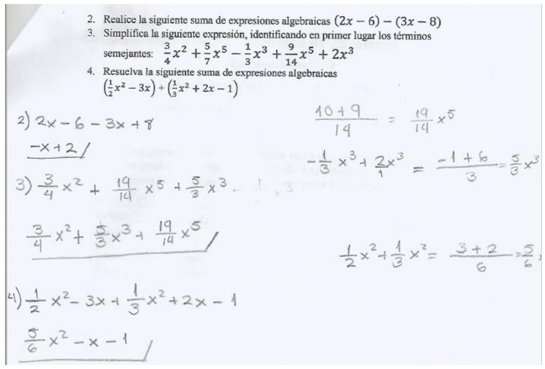
Figura 11. Errores evidenciados por E8

Por último, presentaremos los errores cometidos por dos estudiantes con el que se cierra esta parte de la enumeración de los errores más marcados, al momento de realizar la suma y resta de fracciones. El caso de E3 parece indicar que sabía que en la suma y resta de fracciones se utiliza, en ocasiones, el mcm por lo que procedió a calcularlo, pero solamente hizo eso, aunque al final cometió un error en cada una las descomposiciones en factores primos, obteniendo de esta manera dos mcm erróneos. Pero no intentó realizar ninguna de las operaciones con fracciones, El caso de E10 no se logra comprender la forma en la que intento resolverlo, en el segundo inciso parece indicar que realizó una resta cruzada para llegar al resultado al que llego y en el último inciso parece que solo resto 4 a 17 para utilizar ese resultado en el numerador y en el denominador utilizo el 30 pues es divisible por 5 y 3, (ver figura 10).

Errores observados en las operaciones con expresiones algebraicas.

En esta parte vamos a analizar las respuestas de los estudiantes a la segunda parte de ejercicios propuestos en el cuestionario, los cuales se propusieron con la finalidad de observar qué hacían los estudiantes ante una suma y resta de expresiones algebraicas, presentadas en un principio con coeficientes enteros para después utilizar coeficientes racionales. Cabe mencionar que los estudiantes del nivel semiescolarizado, es decir 13 estudiantes, no habían visto aún el tema de expresiones algebraicas y sus operaciones, lo que influyó de manera directa en las respuestas a estos ejercicios, pues solamente tres de ellos intentaron dar solución a estos ejercicios.

Tomando en cuenta a los estudiantes que si realizaron esta parte (son 8 de 18 estudiantes), vamos a analizar la manera en la que las realizaron y los principales errores que cometieron en este apartado. Encontramos así que tres estudiantes E1, E2 y E17 (ver figura 12) realizaron las operaciones sin mayor conflicto llegando de esta manera al resultado correcto, no se mostraron dificultades o errores en los signos, ni en los términos semejantes y tampoco en las operaciones que debieron realizar con las fracciones. Estos son errores que se reportan en los antecedentes de este trabajo.



2. Realice la siguiente suma de expresiones algebraicas $(2x-6)-(3x-8)$
3. Simplifica la siguiente expresión, identificando en primer lugar los términos semejantes: $\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{7}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{14}x^5+2x^3$
4. Resuelva la siguiente suma de expresiones algebraicas $\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2+2x-1\right)$

2) $2x-6-3x+8$
$-x+2$

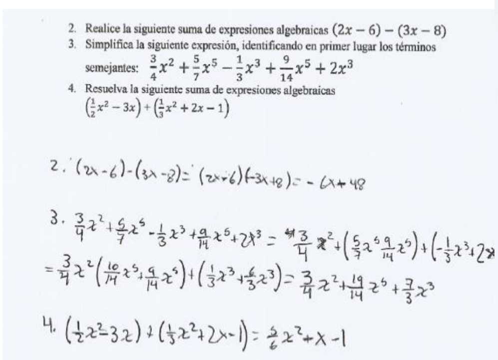
3) $\frac{3}{4}x^2+\frac{19}{14}x^5+\frac{5}{3}x^3$
$\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{19}{14}x^5$

4) $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{3}x^2+2x-1$
$\frac{5}{6}x^2-x-1$

$\frac{10+9}{14}=\frac{19}{14}x^5$
$-\frac{1}{3}x^3+\frac{2x^3}{1}=\frac{-1+6}{3}=\frac{5}{3}x^3$
$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

Figura 12. Respuesta de E1 para las operaciones con expresiones algebraicas

Los estudiantes E15 y E16 presentaron confusión con el primer ejercicio pues al encontrarse con paréntesis creyeron que la operación requerida era una multiplicación y la realizaron de esa manera (ver figura 13). En el caso de E15 tuvo un error más al realizar el segundo de los ejercicios pues olvidó considerar un signo menos. En el caso de E16 se tuvo la oportunidad de platicar con esta estudiante y al confundirse con el primer ejercicio de esta parte ya no quiso continuar con el cuestionario; pero según lo que expresa si sabe realizar las operaciones, pues hablo de términos semejantes y las fracciones las sabe operar de manera correcta.

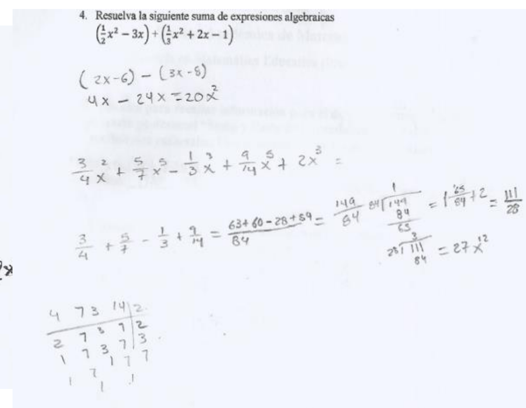


2. Realice la siguiente suma de expresiones algebraicas $(2x-6)-(3x-8)$
3. Simplifica la siguiente expresión, identificando en primer lugar los términos semejantes: $\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{7}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{14}x^5+2x^3$
4. Resuelva la siguiente suma de expresiones algebraicas $\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2+2x-1\right)$

2. $(2x-6)-(3x-8)=(2x-6)(-3x+8)=-6x+48$

3. $\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{7}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{14}x^5+2x^3=\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{5}{7}x^5\frac{9}{14}x^5\right)+\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^3\right)$
$=\frac{3}{4}x^2\left(\frac{10}{14}x^5+\frac{9}{14}x^5\right)+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{6}{3}x^3\right)=\frac{3}{4}x^2+\frac{19}{14}x^5+\frac{7}{3}x^3$

4. $\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2+2x-1\right)=\frac{5}{6}x^2+x-1$



4. Resuelva la siguiente suma de expresiones algebraicas $\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2+2x-1\right)$

$(2x-6)-(3x-8)$
$4x-24x=20x^2$

$\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{7}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{14}x^5+2x^3=$

$\frac{3}{4}+\frac{5}{7}-\frac{1}{3}+\frac{9}{14}=\frac{63+60-28+54}{84}=\frac{149}{84}=1\frac{65}{84}=\frac{111}{28}=27x^{12}$

Figura 13. Respuesta de los estudiantes E15 y E16, respectivamente

El estudiante E5 intentó resolver las primeras dos operaciones con expresiones algebraicas sumando los coeficientes de todos los términos, así como los exponentes de las x, es decir, no consideró si eran o no términos semejantes, en la realización de las sumas y restas de fracciones se hizo de manera correcta buscando el mcm, aunque al final al querer simplificar obtuvo un resultado erróneo. (Véase figura 14).

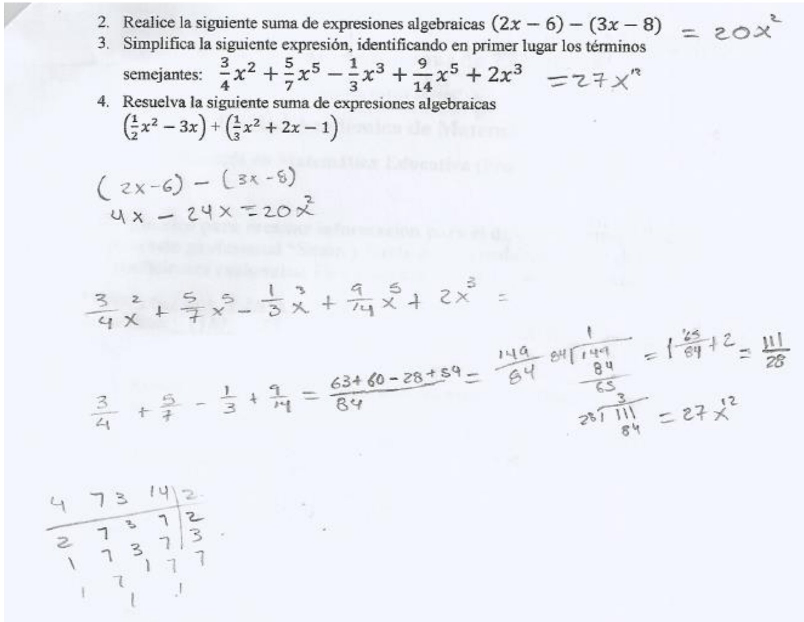


Figura 14. Solución de E5 para la suma y resta de expresiones algebraicas

En el caso de E13 en el primer ejercicio, multiplicó y sin tomar en cuenta el signo menos que se encontraba entre ambas expresiones y en el segundo ejercicio se puede observar que intenta sumar los coeficientes y también los exponentes, cosas que coinciden con errores que cometieron otros estudiantes. Y finalmente un caso en el que el estudiante decía no recordar mucho del tema, el E18, y quien incluso realizó las sumas y restas de fracciones de manera incorrecta, aunque en el primer ejercicio mostró una respuesta correcta, pero en los otros en realidad no supo que debía hacer para resolverlos. Al intentar sumar una fracción con un entero dijo no recordar cómo se realizaba, y, al sumar 1/2 con 1/3, mantuvo el numerador y sumo los denominadores; se pueden observar sus respuestas en la figura 15.

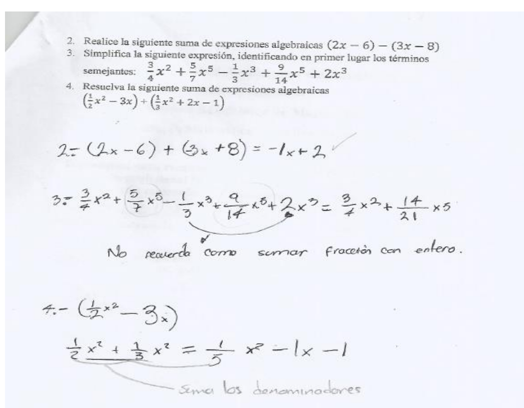


Figura 15. Respuesta de E18

Al principio mencionábamos que a algunos estudiantes se les aplicó una pregunta a cerca de su opinión sobre las fracciones, dos de ellos respondieron que son útiles para la resolución de problemas de la vida diaria, dos más respondieron que les gustaban o eran fáciles, siempre y cuando fueran aritméticas, y uno más respondió no recordar mucho de las fracciones. Se puede notar pues que los estudiantes reconocen la importancia de las fracciones para resolver problemas reales y además pueden llegar a ser no tan complicadas para todos, cabe mencionar que de estos cinco estudiantes solo uno, el último mencionado, no le fue posible resolver correctamente los ejercicios. Se muestra la opinión en la figura 16.

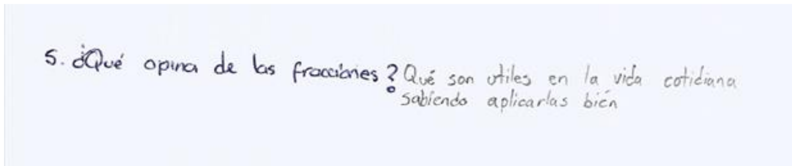


Figura 16. Opinión de E2 acerca de las fracciones

Finalmente nos gustaría resaltar la idea a la que hace referencia González (2004), quien al igual que Puig hace algo de mención a las épocas del álgebra, pero centrando un poco en las dificultades de los estudiantes:

> Echando una ojeada a la Historia del Álgebra podremos comprender fácilmente las dificultades que tienen nuestros alumnos con el nivel de abstracción que exige el manejo de las letras que representan las incógnitas (Malet, 1984); son las mismas dificultades que han padecido los matemáticos durante más de veinte siglos, en el tránsito desde el Álgebra Retórica de los griegos de la época clásica al Álgebra Simbólica de Vieta (perfeccionada en cuanto a la notación por Descartes y Newton), pasando por las etapas intermedias del Álgebra Sincopada de Diofanto de Alejandría, por los desarrollos de los árabes y por el famoso Arte de la Cosa de los algebristas renacentistas italianos, del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari y Bombelli (Martín Casalderrey, 2000, p. 23)

Así pues a partir de este análisis podemos concluir, en cuanto al cuestionario, que si hay algunas dificultades al querer operar fracciones; incluso cada estudiante puede utilizar diferente método para dar con el resultado de la suma o la resta de fracciones con distinto denominador; dificultades que se pueden transmitir hasta las operaciones algebraicas; García, et al. (2012) nos muestran como una falta de comprensión de lo aritmético repercute sobre lo algebraico; en las que no solo son esas las dificultades si no también existen otras, como la confusión con el uso de paréntesis y la correcta identificación de términos semejantes, mismos que ya han sido identificados en investigaciones reportadas; por ejemplo en García et al y Rozo (2012), quienes encontraron que una dificultad con las operaciones de expresiones algebraicas es que las realizan sin tomar en cuenta si los términos son semejantes o no; además de que encontramos, en las respuestas a nuestro cuestionario, que existe algún tipo de error al brincarse alguna de las operaciones que se deben realizar, pueden ser por despiste que olvidaron realizarla.

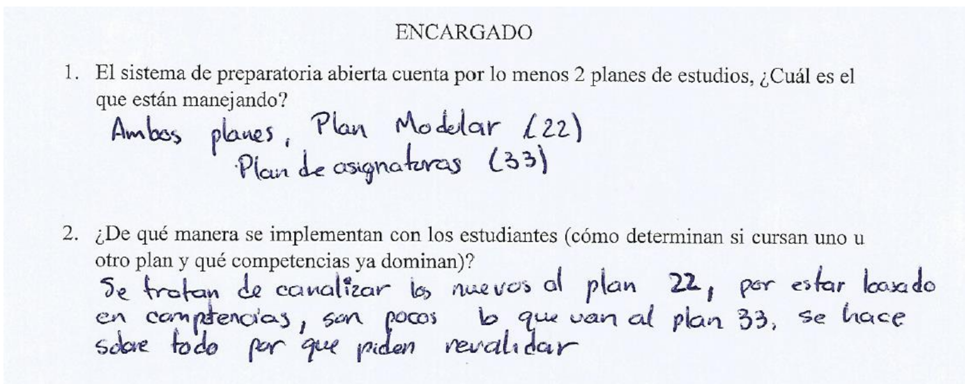
De esta manera en nuestro diseño mostraremos mediante dos caminos analíticos como llegar al resultado de una suma y una resta de fracciones en primer lugar para enseguida poder aplicarlo en las expresiones algebraicas de una y dos variables. Retomaremos también la idea de la agrupación de términos semejantes.

A continuación, presentamos un análisis de los libros que se manejan en preparatoria abierta, para observar la manera en la que presentan los temas de nuestro interés.

3.2.3 Análisis Didáctico

En este apartado realizamos un análisis de la manera en la que se enseña a los estudiantes de preparatoria abierta el tema que es de nuestro interés. En el Departamento de Preparatoria Abierta de Zacatecas, se realiza la enseñanza a través de libros que están diseñados para que el estudiante pueda aprender de manera independiente los temas, pero se cuenta con el apoyo de un asesor que asiste tres veces por semana para ofrecer ayuda a aquellos estudiantes que así lo requieran. Cabe mencionar que en muchas ocasiones los estudiantes no pueden estar acudiendo regularmente a asesorías, debido a sus actividades diarias.

En primer lugar, se procedió a realizar una entrevista semiestructurada que pudiera proporcionar información acerca de los libros que se manejan, y en la cual se desprendió que existen dos planes de estudios, por asignaturas y por módulos (véase figura 17). Por esta razón incluimos en este apartado el análisis de la manera en la que se presenta nuestro tema en los dos planes de estudio puesto que para cada plan de estudios se estarían considerando diferentes libros.


ENCARGADO

1. El sistema de preparatoria abierta cuenta por lo menos 2 planes de estudios, ¿Cuál es el que están manejando?

Ambos planes, Plan Modular (22)
· Plan de asignaturas (33)

2. ¿De qué manera se implementan con los estudiantes (cómo determinan si cursan uno u otro plan y qué competencias ya dominan)?

Se tratan de canalizar los nuevos al plan 22, por estar basado en competencias, son pocos lo que van al plan 33, se hace sobre todo por que piden revalidar

Figura 17. Respuestas de la persona encargada del área académica de preparatoria abierta

Con esta información, comenzamos con un análisis de los libros y planes de estudio que pueden utilizar los estudiantes para su aprendizaje, centrándonos en el tema de suma y resta de expresiones algebraicas de grado uno y con coeficientes racionales, comenzando con los libros siendo que estos son la herramienta principal para el aprendizaje de los estudiantes de preparatoria abierta.

Los libros considerados en nuestro análisis son: para el caso del plan de estudios por módulos, Representaciones Simbólicas y Algoritmos (García, 2012), y para el caso del plan por asignatura, Matemáticas 1 (Villegas y Zubieta, s.f.).

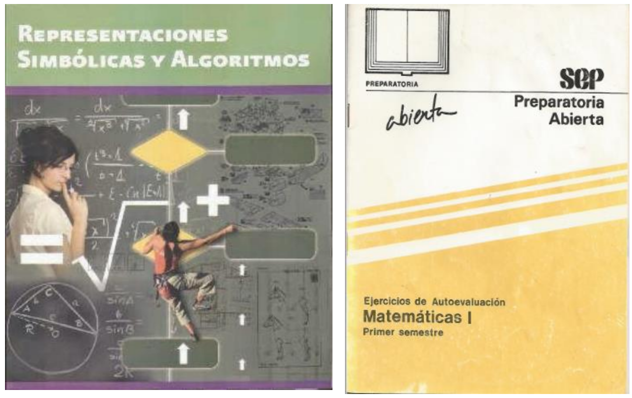


Figura 18. Libros de texto analizados

Representaciones Simbólicas y Algoritmos es una de las 22 materias que se cursan en el plan modular y se encuentra ubicada en la componente básica de este plan de estudios y cuyo nivel pertenece al de los Instrumentos, este libro según el mapa curricular pertenece al módulo 3. El libro utilizado para este módulo tiene la siguiente estructura: inicia con una presentación general del módulo, en la que además se presentan recomendaciones para que el estudiante pueda aprender (ver figura 19), una explicación de la manera en la que se debe utilizar el libro, así como un examen tipo diagnostico en el que se desea saber que conocimientos base tiene el estudiante acerca de los temas que se trataran en el libro. Se cuenta con dos unidades, siendo la primera los números reales y la segunda denominada lenguaje algebraico, permitiendo el desarrollo de competencias en estos temas matemáticos.

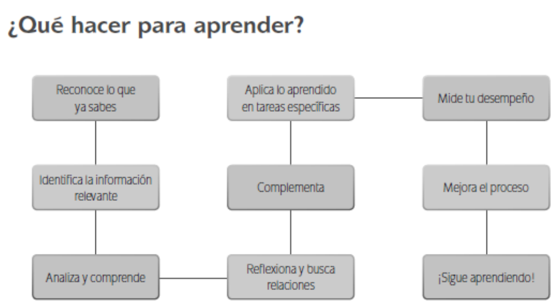


Figura 19. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 8

De manera general lo que se aborda en cada una de las unidades es: en el caso de la unidad números reales, las operaciones con números reales, los criterios de divisibilidad, las propiedades y finalmente razones y proporciones. Por su parte la unidad de lenguaje algebraico aborda los tópicos de lenguaje algebraico, operaciones con polinomios, ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.

Cada una de las unidades comienza con el planteamiento de una situación problemática, relacionada con el entorno de los estudiantes, con la finalidad de que el estudiante vaya formando una alternativa de solución de acuerdo con el tópico que interesa que aprendan en ese momento. Así pues, en la unidad correspondiente a números reales se le da seguimiento a un problema en el que se desea montar un negocio de cibercafé, evolucionando el problema de acuerdo con el contenido matemático que se vaya a abordar. En la unidad de lenguaje algebraico se habla de un problema acerca de la creación de una escuela de futbol en una colonia, y de la misma manera se va modificando para hacer necesario el conocimiento de los temas que se abordan en esta unidad.

En este libro además se muestran en los contornos ideas importantes sobre el contenido que se esté abordando, se presenta también páginas web en las que el estudiante puede consultar información adicional que pueda servir en la comprensión del estudiante, e incluso se recomiendan libros para el apoyo de los estudiantes, así como un glosario con palabras que pudieran ser nuevas para los estudiantes. (Ver figura 20)

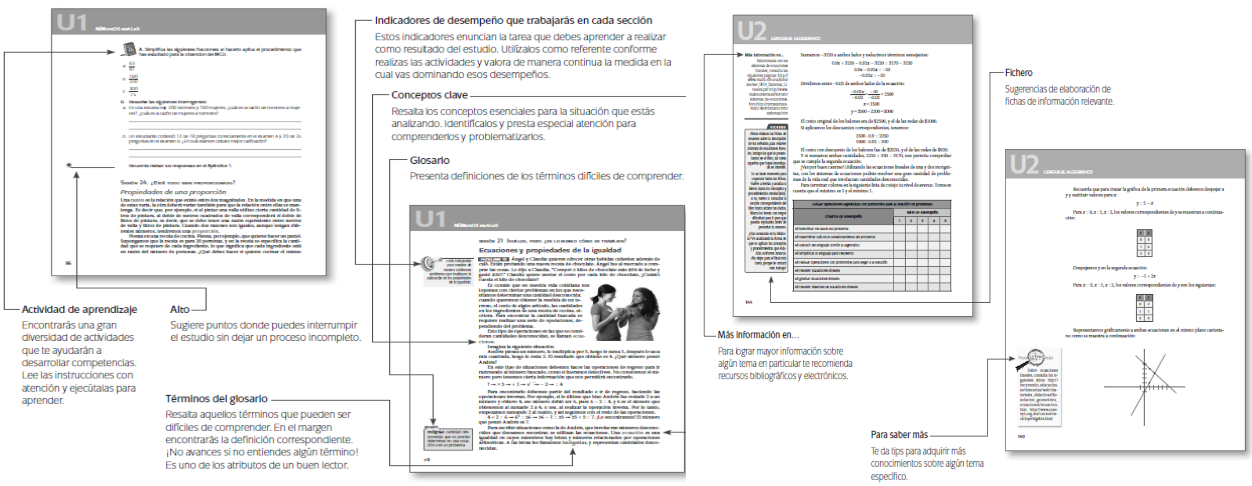
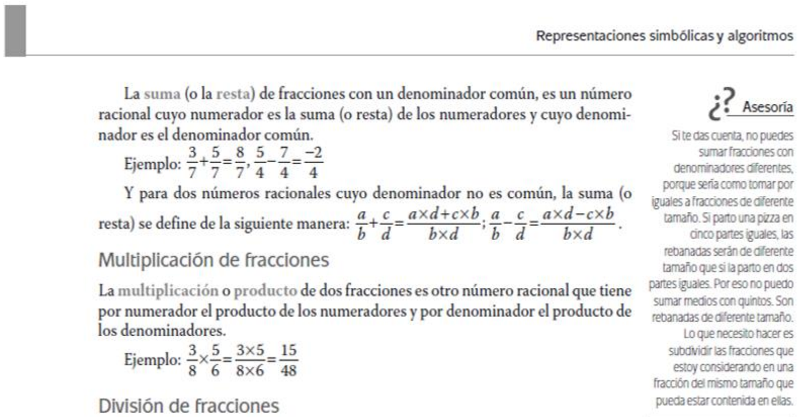


Figura 20. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 11 y 12

Una vez descrita la estructura general del libro ahora nos centraremos especificamente en los temas de nuestro interés. Comenzando desde lo básico para luego llegar a lo algebraico, tenemos que en la unidad uno se encuentra una sesión para el aprendizaje de las fracciones y sus operaciones de suma, resta, multiplicacion y división. En esta sesion marcada con el número 14, se inicia con el recordatorio del problema que se viene trabajando desde los temas anteriores, pero que ahora requiere de que se realice una operación entre fracciones, enseguida se presentan los componentes de una fracción para seguir con la explicacion de fracciones equivalentes y en seguida lo que nos interesa, la suma y la resta de fracciones en la que comienza con la presentación de una suma a partir de una figura que muestra cuadrados del mismo tamaño y que cada fracción representa un área sombreada que luego tendrá que ser sumada, la suma de fracciones que se presenta es con denominador común y esto dara pie a la explicación de la manera en que se debe sumar o restar dos fracciones con denominador común. Enseguida se muestra como una tipo fórmula que permite sumar fracciones con denominadores no comunes (véase figura 21); del lado derecho de la hoja del libro se presenta un tip que puede ayudar a comprender por que no se pueden sumar de la misma manera las fracciones con denominador común; en lo que podemos observar, utilizan el producto de los denominadores y los productos cruzados de los numeradores que les dará como resultado la fracción correspondiente a la suma o resta según sea el caso. Creemos que la idea de ver en primer lugar fracciones equivalentes les prermite a los estudiantes que una vez realizada la suma o resta, estos puedan llevarla a una expresion mínima. Lo que sigue en el libro es la explicacion de la multiplicacion y la división de fracciones para continuar con la definición de número, luego aborda la potencia y la raíz de fracciones, para concluir con la comparación entre fracciones.



Representaciones simbólicas y algoritmos

La suma (o la resta) de fracciones con un denominador común, es un número racional cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplo: $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}, \frac{5}{4}-\frac{7}{4}=\frac{-2}{4}$

Y para dos números racionales cuyo denominador no es común, la suma (o resta) se define de la siguiente manera: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}; \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$.

Multiplicación de fracciones

La multiplicación o producto de dos fracciones es otro número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times 5}{8\times 6}=\frac{15}{48}$

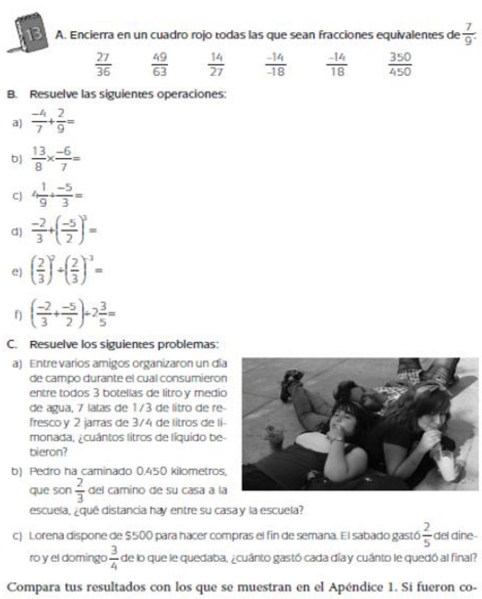
División de fracciones

¿? Asesoría

Si te das cuenta, no puedes sumar fracciones con denominadores diferentes, porque sería como tomar por iguales a fracciones de diferente tamaño. Si parto una pizza en cinco partes iguales, las rebanadas serán de diferente tamaño que si la parto en dos partes iguales. Por eso no puedo sumar medios con quintos. Son rebanadas de diferente tamaño. Lo que necesito hacer es subdividir las fracciones que estoy considerando en una fracción del mismo tamaño que pueda estar contenida en ellas.

Figura 21. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 55

No se muestran ejemplos de la suma y resta de fracciones pero después de que se presentan cada una de las operaciones se sugiere una sesión de ejercicios que van desde tener una operación hasta combinar diferentes operaciones. Tambien se incluyen en los ejercicios números negativos. Así mismo se presentan tres ejercicios que representan situaciones problema y que deben ser resueltos con las operaciones entre fracciones (veáse figura 22).



13

A. Encierra en un cuadro rojo todas las que sean fracciones equivalentes de $\frac{7}{9}$:

$\frac{27}{36}$ $\frac{49}{63}$ $\frac{14}{27}$ $\frac{-14}{-18}$ $\frac{-14}{18}$ $\frac{350}{450}$

B. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{-4}{7}+\frac{2}{9}=$

b) $\frac{13}{8}\times\frac{-6}{7}=$

c) $4\frac{1}{9}\div\frac{-5}{3}=$

d) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-5}{2}\right)^3=$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

f) $\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{2}\right)\div 2\frac{3}{5}=$

C. Resuelve los siguientes problemas:

a) Entre varios amigos organizaron un día de campo durante el cual consumieron entre todos 3 botellas de litro y medio de agua, 7 latas de 1/3 de litro de refresco y 2 jarras de 3/4 de litros de limonada, ¿cuántos litros de líquido bebieron?

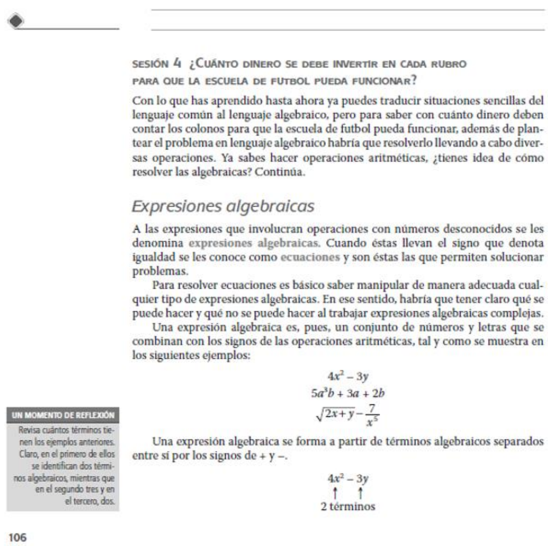
b) Pedro ha caminado 0.450 kilometros, que son $\frac{2}{3}$ del camino de su casa a la escuela, ¿qué distancia hay entre su casa y la escuela?

c) Lorena dispone de $500 para hacer compras el fin de semana. El sabado gastó $\frac{2}{5}$ del dinero y el domingo $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba, ¿cuánto gastó cada día y cuánto le quedó al final?

Compara tus resultados con los que se muestran en el Apéndice 1. Si fueron co-

Figura 22. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p.58

Siendo esto lo que se aborda respecto a la suma y resta de fracciones, ahora continuaremos con lo que respecta a las operaciones con expresiones algebraicas y la manera en la que se abordan en este libro. Las expresiones algebraicas estan contenidas en la unidad dos, denominada lenguaje algebraico, y se encuentran después del tema de traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. Antes de entrar al tema de expresiones algebraicas de manera formal, en el libro se presenta un planteamiento de la situación que se ha venido trabajando, introduciendo al alumno la necesidad de resolver operaciones algebraicas para solucionar el problema propuesto. Enseguida se introduce la definición de expresión algebraica (véase figura 23), como “un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas” (p. 106). Así mismo se explica la manera en que se forma una expresión algebraica a partir de cierta cantidad de términos. Se define también lo que es un coeficiente numérico, la parte literal, el grado de un término, para luego presentar cinco expresiones algebraicas en las que el estudiante debe identificar cada uno de estos elementos.



SESIÓN 4 ¿CUÁNTO DINERO SE DEBE INVERTIR EN CADA RUBRO PARA QUE LA ESCUELA DE FUTBOL PUEDA FUNCIONAR?

Con lo que has aprendido hasta ahora ya puedes traducir situaciones sencillas del lenguaje común al lenguaje algebraico, pero para saber con cuánto dinero deben contar los colonos para que la escuela de futbol pueda funcionar, además de plantear el problema en lenguaje algebraico habría que resolverlo llevando a cabo diversas operaciones. Ya sabes hacer operaciones aritméticas, ¿tienes idea de cómo resolver las algebraicas? Continúa.

Expresiones algebraicas

A las expresiones que involucran operaciones con números desconocidos se les denomina expresiones algebraicas. Cuando éstas llevan el signo que denota igualdad se les conoce como ecuaciones y son éstas las que permiten solucionar problemas.

Para resolver ecuaciones es básico saber manipular de manera adecuada cualquier tipo de expresiones algebraicas. En ese sentido, habría que tener claro qué se puede hacer y qué no se puede hacer al trabajar expresiones algebraicas complejas.

Una expresión algebraica es, pues, un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$4x^2 - 3y$$
$$5a^3b + 3a + 2b$$
$$\sqrt{2x+y} - \frac{7}{x^5}$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Revisa cuántos términos tienen los ejemplos anteriores. Claro, en el primero de ellos se identifican dos términos algebraicos, mientras que en el segundo tres y en el tercero, dos.

Una expresión algebraica se forma a partir de términos algebraicos separados entre sí por los signos de + y –.

$$\underbrace{4x^2 - 3y}_{\text{2 términos}}$$

106

Figura 23. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 106

En los ejercicios propuestos para identificar los elementos de las expresiones algebraicas se encuentra una expresión algebraica con coeficiente fraccionario. Después se regresa al problema de la escuela de futbol para dar enseguida la definición de términos semejantes; mostrando varios ejemplos, se describe lo que quiere decir simplificar los términos semejantes y se presenta una serie de ejemplos; entre los ejemplos es de nuestro interés uno que corresponde al uso de coeficientes racionales, siendo el cuarto de los ejemplos, y en el que se tendria que poner en juego cierta habilidad para el manejo de la suma y resta de fracciones, utilizando la suma de enteros con fracciones (véase figura 24). A la derecha de la pagina se observa un sitio web en el que se puede encontrar más información acerca de los términos semejantes.

En el lenguaje algebraico hacemos lo mismo para reducir términos.
Ejemplos:

$-4x - 7x = -11x$

$12a^3b + 25a^3b = 37a^3b$

$-5xy^2z + 13xy^2z = 8xy^2z$

$\frac{1}{5}n + n - 3n = -\frac{9}{5}n$

$5a + 4b - a + 3b = 4a + 7b$

$2x^2y + 3xy^2 - 6x^2y - 2xy^2 = -4x^2y + xy^2$

Más información en...

Sobre términos semejantes, consulta las siguientes ligas: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebra1ReducirTermSemej.htm http://www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_algebra%20.doc

Figura 24. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 109

Lo que sigue en cuanto a contenido del libro es una serie de ejercicios en los que el estudiante deberá identificar y reducir términos semejantes de cinco expresiones algebraicas y dentro de los cuales algunos de los coeficientes son fracciones, en un ejercicio el grado de la expresión algebraica es dos con una variable y en el otro el grado es uno con tres variables; a su vez se incluye un problema en el que se utilizan expresiones algebraicas para su solución, tratando de que el estudiante vea las ventajas de reducir términos semejantes, aunque en este ejercicio no se le pide que lo resulva (véase figura 25). Por lo que podemos darnos cuenta de la importancia que tiene en el estudiante de preparatoria abierta que sepa realizar sumas y restas de fracciones, puesto que esto le permitirá a su vez realizar las reducciones de los términos semejantes de una mejor manera.

5 **Sigue tu trabajo con el lenguaje algebraico.**

A. Identifica los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas y redúcelos.

a. $3m - 5m + m =$

b. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{6}x^2 =$

c. $-3ab + 5a^2b - 7ab - 12a^2b =$

d. $5a^3 - 3a^2 + 4 - 8a^3 + 10 =$

e. $3x - 4y + 2z + x - \frac{2}{3}y - 5z =$

B. Lee el siguiente problema, identifica y escribe los datos y el cuestionamiento. Intenta traducirlo a lenguaje algebraico, simplifica su expresión reduciendo términos y explica las ventajas que tiene reducir.

En una obra de teatro los números de los asientos de tres personas son tres números consecutivos que suman 72. ¿Qué número de asiento tienen esas personas?

glosario

Consecutivo: que sigue o sucede a otro.

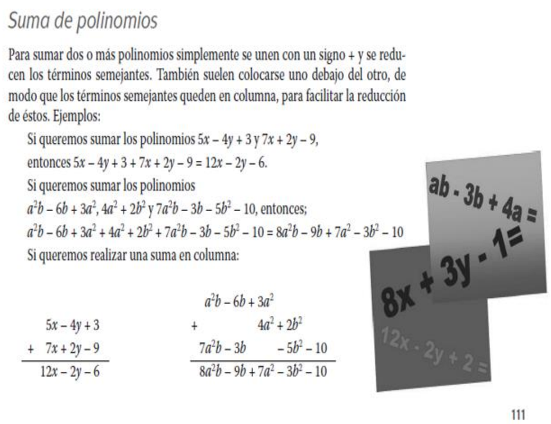
Los **números consecutivos** son números enteros que se siguen el uno al otro en orden, del menor al mayor. Por ejemplo, 11, 12, 13, 14 y 15 son cinco números consecutivos; 7, 8 y 9 son tres números consecutivos.

109

Figura 25. Representaciones Simbólica y Algoritmos, p. 109

Lo que sigue en el libro es una autoevaluación que debe realizar el estudiante en la que se proponen ciertos criterios de desempeño y el nivel de desempeño que cree el estudiante haber alcanzado; se considera que el estudiante debería saber identificar los datos del problema, determinar cuál es el cuestionamiento, traducir del común al lenguaje algebraico y simplificar el lenguaje algebraico, este último correspondería a la parte de la reducción de términos semejantes.

El siguiente tema que se presenta es el de las operaciones con polinomios, y también veremos la manera en que se trata, puesto que los polinomios son a su vez expresiones algebraicas en las que hay que reducir términos semejantes. Nos centraremos principalmente en las operaciones de suma y resta. Comienza definiendo un polinomio como "una expresión algebraica constituida por un número finito de términos algebraicos" (p. 111). Se procede con la manera en la que se debe realizar la suma y explica dos maneras de hacerlo con dos ejemplos, lineal, que consiste en buscar los términos semejantes y sumarlos, y por columnas, que consiste en realizar un acomodo en columna de acuerdo a los términos semejantes para luego sumarlos (véase figura 26).


Suma de polinomios

Para sumar dos o más polinomios simplemente se unen con un signo + y se reducen los términos semejantes. También suelen colocarse uno debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden en columna, para facilitar la reducción de éstos. Ejemplos:

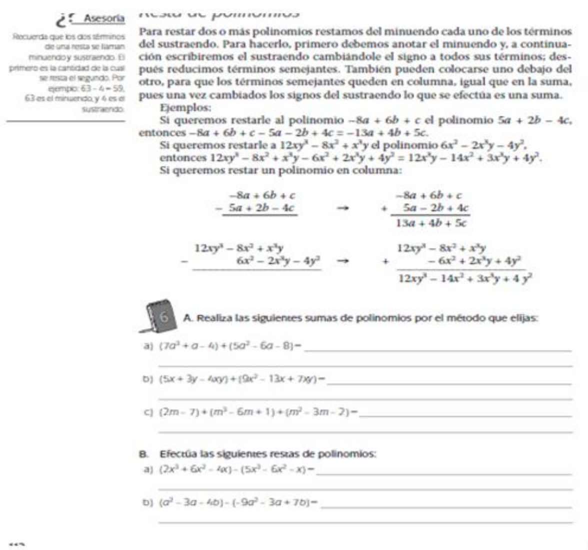
Si queremos sumar los polinomios $5x - 4y + 3$ y $7x + 2y - 9$,
entonces $5x - 4y + 3 + 7x + 2y - 9 = 12x - 2y - 6$.
Si queremos sumar los polinomios
$a^2b - 6b + 3a^2$, $4a^2 + 2b^2$ y $7a^2b - 3b - 5b^2 - 10$, entonces;
$a^2b - 6b + 3a^2 + 4a^2 + 2b^2 + 7a^2b - 3b - 5b^2 - 10 = 8a^2b - 9b + 7a^2 - 3b^2 - 10$
Si queremos realizar una suma en columna:

$$\begin{array}{r} 5x - 4y + 3 \\ +\quad 7x + 2y - 9 \\ \hline 12x - 2y - 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & a^2b - 6b + 3a^2 \\ + & \qquad\qquad 4a^2 + 2b^2 \\ & 7a^2b - 3b \qquad - 5b^2 - 10 \\ \hline & 8a^2b - 9b + 7a^2 - 3b^2 - 10 \end{array}$$

111

Figura 26. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 111

Continuando de esta manera con la resta, se explica que para restar la expresión se le debe cambiar el signo a cada uno de los términos, esto por la ley de los signos, pues cada término se estaría multiplicando por un signo menos; en la manera de hacerlo lineal se describe con dos ejemplos como una reducción de términos semejantes, en la manera de hacerlo por columna se expresa que una vez que se ha cambiado el signo del sustraendo se procede a realizar la operación como una suma, acomodando por término semejante en columnas, se muestran los mismos dos ejemplos que para la forma lineal. Finalmente se presenta una serie de ejercicios para realizar en primera instancia sumas de polinomios y en segundo lugar restas de polinomios, mediante el método que escoga el estudiante. En este caso de los polinomios no se presentan en ningún ejermplo ni ejercicio coeficientes fraccionarios (véase figura 27).



Asesoría

Recuerda que los dos términos de una resta se llaman minuendo y sustraendo. El primero es la cantidad de la cual se resta el segundo. Por ejemplo: 63 - 4 = 59, 63 es el minuendo y 4 es el sustraendo.

Para restar dos o más polinomios restamos del minuendo cada uno de los términos del sustraendo. Para hacerlo, primero debemos anotar el minuendo y, a continuación escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos; después reducimos términos semejantes. También pueden colocarse uno debajo del otro, para que los términos semejantes queden en columna, igual que en la suma, pues una vez cambiados los signos del sustraendo lo que se efectúa es una suma.

Ejemplos:

Si queremos restarle al polinomio $-8a + 6b + c$ el polinomio $5a + 2b - 4c$, entonces $-8a + 6b + c - 5a - 2b + 4c = -13a + 4b + 5c$.

Si queremos restarle a $12xy^3 - 8x^2 + x^3y$ el polinomio $6x^2 - 2x^3y - 4y^2$, entonces $12xy^3 - 8x^2 + x^3y - 6x^2 + 2x^3y + 4y^2 = 12x^3y - 14x^2 + 3x^3y + 4y^2$.

Si queremos restar un polinomio en columna:

$$\begin{array}{r} -8a + 6b + c \\ -\underline{\;5a + 2b - 4c} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -8a + 6b + c \\ +\underline{\;5a - 2b + 4c} \\ 13a + 4b + 5c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12xy^3 - 8x^2 + x^3y \\ -\underline{\;6x^2 - 2x^3y - 4y^2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 12xy^3 - 8x^2 + x^3y \\ +\underline{\;- 6x^2 + 2x^3y + 4y^2} \\ 12xy^3 - 14x^2 + 3x^3y + 4y^2 \end{array}$$

6

A. Realiza las siguientes sumas de polinomios por el método que elijas:

a) $(7a^3 + a - 4) + (5a^2 - 6a - 8) =$ ____________

b) $(5x + 3y - 4xy) + (9x^2 - 13x + 7xy) =$ ____________

c) $(2m - 7) + (m^3 - 6m + 1) + (m^2 - 3m - 2) =$ ____________

B. Efectúa las siguientes restas de polinomios:

a) $(2x^3 + 6x^2 - 4x) - (5x^3 - 6x^2 - x) =$ ____________

b) $(a^2 - 3a - 4b) - (-9a^2 - 3a + 7b) =$ ____________

Figura 27. Representaciones Simbólicas y Algoritmos, p. 112

Hasta aquí detendremos nuestro análisis de este libro solo agregaremos que al finalizarlo se presenta una evaluación en la que el estudiante debe mostrar lo que ha aprendido y si se han desarrollado las competencias relacionadas con los temas que se abordaron. La evaluación consta de 15 problemas, cada uno con interrogantes que deberan responderse con la elección del inciso correcto. El uso y manejo de las fracciones se puede observar en los problemas 1, vista la fracción como una proporción el problema 3, en los problemas 4, 6 y 11 con la fracción como razón, el problema 10 trata de una fracción algebraica, el problema 11 utiliza la fracción como razón nuevamente, en el problema 12 se utiliza fracción para representar una expresión algebraica para la solución de un problema.

El libro de *Matemáticas 1* pertenece al plan de 33 asignaturas, siendo el que se había utilizado desde los inicios de la preparatoria abierta, que actualmente se encuentra en liquidación y que solo se permite cursar a estudiantes para hacer equivalencia de materias. Este libro consta de 16 módulos, estructurados en cuatro unidades, la unidad 1: conjuntos, la unidad 2: elementos de lógica matemática, unidad 3: los números reales y unidad 4: aplicaciones, cada unidad contiene una introducción, objetivos generales, un diagrama temático estructural y un glosario.

Este libro fue elaborado por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Se presenta con un prólogo, en el que se destaca como objetivo general:

> (…) 1º que el estudiante logre hacer sus propias demostraciones, dándole el lenguaje simbólico y las reglas del razonamiento deductivo en las dos primeras unidades; 2º familiarizar al estudiante con la teoría de campo elemental que le permita manipular los números reales y familiarizarlo, también, con la terminología de la matemática en su enfoque moderno; y 3º darle la técnica para que logre la destreza y habilidad necesarias en la operación con los elementos algebraicos. (p. 11)

Lo que sigue en el libro son instrucciones para el alumno en las que se le describe la estructura general del libro, de la que ya hablamos un poco arriba lo que nos faltaría es la estructura de cada uno de los módulos, cuentan con objetivos específicos, un esquema-resumen, actividades complementarias y problemas de autoevaluación. Además, en caso necesario se incluyen apéndices, así como bibliografía que pudiera ayudar a complementar el contenido de los temas. Un elemento que es muy importante en matemáticas es la notación por lo que se incluye una sección con los símbolos más utilizados, así como su significado. Y comienza el desarrollo de las unidades.

En nuestro caso nos centraremos en las unidades tres y cuatro pues en estas unidades están incluidos los temas que nos interesan, las fracciones y las expresiones algebraicas. En el módulo nueve se define a la suma como una operación binaria y se define operación binaria como "Una operación binaria en un conjunto es una regla que asocia a cada par de elementos del conjunto con otro elemento único del mismo conjunto" (p. 113) Nos parece relevante retomar esto puesto que lo que intentamos trabajar es una suma. Dentro de este mismo módulo se encuentra un subtema denominado "El conjunto de los números reales" y es ahí donde se encuentran los números racionales, vistos como un subconjunto de los reales, y los representan con la letra D; definidos como (véase figura 28) "Un número x es racional si se puede representar como el cociente de dos enteros, siendo el divisor diferente de 0" (p. 114). Así mismo se presenta la definición por medio de notación matemática.

con una D, definiéndose sus elementos como sigue.

"Un número **x** es **racional** si se puede representar como el cociente de dos enteros, siendo el divisor diferente de 0".

"$x \in D \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$ y $a, b \in E, b \neq 0$"

Existen números que no cumplen con la definición anterior, por lo

Figura 28. Matemáticas I, p. 114

Es claro que en este libro se utiliza, de acuerdo con los significados que pudimos observar se le asignan a la fracción, un significado como cociente. Más adelante se muestra otra definición para número racional como aquel en el que el resultado de la división muestra una parte decimal que termina o que se repiten dígitos infinitamente o simplemente ser periódico (véase figura 29).

"Un número **x** es **racional** si su parte decimal termina (como en $\frac{1}{2}$), cuando es infinita un dígito o grupo de dígitos se repite o es periódico (como el 3 en el número $\frac{7}{3}$)".

Figura 29. Matemáticas I, p. 115

Seguido de la definición anterior se muestran dos ejemplos de número racional mostrando el resultado de efectuar el cociente. En la parte correspondiente a los ejercicios que se le proponen al estudiante llamados problemas para autoevaluación se dedica un apartado para responder si ciertos números son o no racionales, expresándolos primero en forma decimal, incluso se pide al estudiante que explica las razones de sus respuestas. En esta parte podemos observar que se incluye a su vez el significado de fracción como porcentaje (véase figura 30). Cabe mencionar que al final de la unidad se incluyen las respuestas a los ejercicios propuestos.

En los problemas del 16 al 20 encuentre el número en forma decimal y conteste si es o no racional. Dé sus razones.

16. $1\frac{3}{4}$ 17. $\frac{7}{11}$ 18. 9 19. 10% de 1 20. $\frac{7}{8}$

Nota: El símbolo % se lee por ciento. "10% se lee 10 por ciento".

Figura 30. Matemáticas I, p. 117

Podemos observar que, al menos en esta unidad del libro, no se muestra o no se retoma la manera en la que deben realizarse las operaciones con fracciones, como en el caso del libro perteneciente al otro plan, en el que se muestra cómo deben realizarse cada una de las operaciones con racionales o fracciones. Ahora lo que sigue es ver la manera en la que se abordan las expresiones algebraicas y si en ellas se presentan coeficientes fraccionarios. Lo correspondiente a este contenido matemático se incluye en la unidad cuatro.

De esta manera encontramos que la unidad cuatro denominada "Aplicaciones" expresa en sus primeras hojas la definición de expresión algebraica y a lo que se refiere con término de la expresión. "A las combinaciones de números variables y signos de operaciones las llamamos expresiones algebraicas, y a las partes que las forman y están separadas por los signos de sumar (+) o restar (-) las llamamos términos" (p. 166). Mostrando luego algunos ejemplos de expresiones algebraicas y definiendo cuál es la cantidad de términos de estas (véase figura 31). En estos ejemplos se utiliza la fracción en unos cuantos coeficientes de términos, pero aún no se ha introducido la definición de coeficiente. Se puede observar además que la presentación de los coeficientes no se parece a los presentados en el libro de Representaciones simbólicas y algoritmos, en el caso del segundo inciso se encuentra un coeficiente fraccionario pero el denominador lo presentan como denominador de todo el término.

A las combinaciones de números variables y signos de operaciones las llamamos **expresiones algebraicas**, y a las partes que las forman y están separadas por los signos de sumar (+) o restar (−) las llamamos **términos.**

Ejemplos:

a) $2x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 6ax - 15a^2$ forman una expresión compuesta de 4 términos; $2x^3$, $\frac{5}{3}x^2$, $6ax$, $-15a^2$

b) $4x^3 - \frac{6ax^2}{5} + \frac{2x}{a^2}$, es una expresión algebraica con 3 términos a saber: $4x^3$, $-\frac{6ax^2}{5}$, $\frac{2x}{a^2}$

c) $4 + 2(x - 3)$, es una expresión con sólo 2 términos que son el 4 y el producto $2(x - 3)$. En este caso, el segundo término está formado por dos factores, en donde uno de ellos a su vez constituye otra expresión algebraica de dos términos, x, -3.

166

Figura 31. Matemáticas I, p. 166

Antes de comenzar con el contenido que respecta a suma y resta de expresiones algebraicas, en el libro se puede encontrar la manera en la que se debe entender la palabra término, mostrando que será formado por factores ya sea números o literales y que esos factores a su vez pueden formar el coeficiente de los demás factores por los que está conformado el número, que según lo que entendemos incluso las literales pueden ser coeficientes de otras literales, se aclara que el signo también formara parte de los coeficientes y que además se tomará siempre el coeficiente de acuerdo al factor que interese, mostrando con algunos ejemplos a lo que se refiere con coeficiente, mismos que son mostrados en la figura 32; se puede observar que en efecto según la definición que propone este libro para coeficiente se tomara la parte numérico e incluso se pueden tomar una o varias literales como coeficientes de otras.

Generalmente se utiliza la palabra **coeficiente** a secas para señalar al **coeficiente numérico** (incluyendo el signo) y se acostumbra indicar el coeficiente **para la literal** que nos interese. **Ejemplo:**

En el término $-5axy$
El coeficiente es: -5
El coeficiente para x es: $-5ay$
El coeficiente para y es: $-5ax$
El coeficiente para xy es: $-5a$

Figura 32. Matemáticas I, p. 167

Para continuar en el libro se define lo que es un término semejante y muestra algunos ejemplos, que pudieran no ser tan sencillos de comprender para el estudiante: “Se dice que dos o más términos son semejantes cuando difieren únicamente en el coeficiente, el resto de los factores deben ser idénticos.” (p. 167). Pareciera que esta definición si se parece a la presentada en el libro del plan modular, pero al tomar la palabra coeficiente como algo distinto, es ahí donde radicara la diferencia en la definición, pero que al final de cuentas se habla de lo mismo al referirse a términos semejantes, como bien se puede observar en los ejemplos (figura 33).

Se dice que dos o más términos son **semejantes** cuando difieren **únicamente** en el coeficiente, el resto de los factores deben ser idénticos.

Ejemplo 1): Los términos $3ax^2$ y $6ax^2$
Los coeficientes son 3 y 6 respectivamente, entonces son términos semejantes para ax^2
Ejemplo 2): Tomemos los términos $2xy^2$, $4ax^2y^2$, $5bxy$
Coeficientes para x^2: $4ay^2$ del 2o. término por lo que no tiene términos semejantes.
Coeficientes para x: $2y^2$ del 1o. y $5by$ del 3o. por lo que 1o. y 3o. son **términos semejantes** en x.
Coeficientes para y^2: $2x$ del 1o. y $4ax^2$ del 2o. por lo que 1o. y 2o. son **términos semejantes** en y^2.
Coeficientes para y: $5bx$ en el 3er. término.

167

Figura 33. Matemáticas I, p. 167

Lo que sigue es la clasificación de las expresiones algebraicas como monomio, binomio y trinomio como una forma de identificarlas, definiendo que un monomio tiene un término, el binomio consta de dos términos y el trinomio de tres términos. Para luego presentar el contenido correspondiente a la suma y resta de expresiones algebraicas; en donde comienza resaltando que las expresiones algebraicas deben cumplir con los postulados y teoremas que se habían abordado hasta ese momento para números reales, dado que en una expresión algebraica las literales representan números reales y por ende la expresión algebraica representara un número real. Se destaca también que la suma y resta de expresiones algebraicas será una operación llamada reducción de términos semejantes, que cumplirán con los postulados asociativo, conmutativo y distributivo. Para enseguida presentar dos ejemplos una suma y una resta respectivamente, en los que se va resolviendo hacia abajo y aplicando cada uno de los postulados que se mencionaron abajo, se realizan las operaciones del lado izquierdo de la hoja y del lado derecho se van justificando los pasos mediante los postulados (véase figura 34). Cabe mencionar que en ninguno de estos ejemplos se consideran coeficientes racionales.

Para determinar la suma o la resta de las expresiones algebraicas, operación llamada también **reducción de términos semejantes,** aplicamos los postulados asociativo, conmutativo y distributivo.

Ejemplo a) Sumar $2x + 3y - 4$ con $x - y + 2$

$(2x + 3y - 4) + (x - y + 2) =$	Dado
$= (2x + x) + (3y - y) + (-4 + 2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$= (2 + 1)x + (3 - 1)y + (-4 + 2)$	Postulado distributivo: **Nota:** Observe que el coeficiente numérico de un término es la unidad cuando no aparece número escrito. El signo es parte del coeficiente
$= 3x + 2y + (-2)$	Propiedad de sustitución
$(2x + 3y - 4) + (x - y + 2) = 3x + 2y - 2$	Teorema de la resta

Ejemplo b) Restarle a $2x^3 + 3x - 2y^2 + 3$, la expresión $2x - y^2 - 2$

$(2x^3 + 3x - 2y^2 + 3) - (2x - y^2 - 2) =$	Dado
$= 2x^3 + 3x - 2y^2 + 3 - 2x + y^2 + 2$	Teorema 3-14 $[-(a+b) = -a - b]$
$= 2x^3 + (3x - 2x) + (-2y^2 + y^2) + (3 + 2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$= 2x^3 + (3 - 2)x + (-2 + 1)y^2 + (3 + 2)$	Postulado distributivo
$= 2x^3 + x + (-1)y^2 + 5$	Propiedad de sustitución
$= 2x^3 + x - y^2 + 5$	Teorema sobre signos 3-12

Figura 34. Matemáticas I, p. 168

Seguido de los ejemplos se muestra una serie de tres pasos a seguir cuando se desean realizar sumas o restas de expresiones algebraicas, pasos que se muestran la figura 35, para enseguida mostrar un ejemplo siguiendo los pasos propuestos.

De los ejemplos anteriores podemos considerar las operaciones de sumar y restar condensadas en los siguientes pasos:

1o. Eliminar todos los paréntesis o símbolos de asociación aplicando los teoremas sobre inversos que correspondan.
2o. Identificar los términos semejantes y asociarlos aplicando el postulado conmutativo cuando sea necesario.
3o. Operar sólo con los coeficientes de los términos semejantes (esto corresponde en los ejemplos a la aplicación del postulado distributivo).

168

Figura 35. Matemáticas I, p. 168

Y finalmente se proponen los problemas de autoevaluación correspondientes a este tema y en los cuales podemos observar que las reducciones de términos semejantes que se proponen no incluyen en ninguno de sus coeficientes alguna fracción, pero se observa el gran uso de paréntesis en casi todos los ejercicios correspondientes a este apartado (véase figura 36) cerrando con esto lo que corresponde a las operaciones de suma y resta de expresiones algebraicas, que sería la parte de nuestro interés.

En cada uno de los problemas siguientes, elimínense los paréntesis y redúzcanse los términos semejantes.

8. $x - (2y + 3x) - 2y$
9. $3x - (2y - 4x) + 6y$
10. $(2x - 3y) + (y - 4w) - (w - 3x)$
11. $3x - [2x + 3y - (2y - 3x)] + 4y$
12. $9x - (2y - 3x) - [y - (2y - x)] - [2y + (4x - 3y)]$
13. $(-2x^3 + 7x^2 - x) + (4x^3 - 8x^2 + x - 6)$
14. $[(2a - b) + (2a - c)] + (-4a + b + c)$
15. $4a - [a - (2a + b)]$

En los siguientes problemas, asocie los últimos tres términos de cada expresión precediendo el paréntesis con un signo de:

a) Sumar
b) Restar

16. $2x^2 - 3y^2 + 4x - 3y - 1$
17. $x^2 - 2y^2 - x - 3y - 5$
18. $x + y - x^2 - 4 + 3y^2$
19. $r^3 + r^2s + 2rs^2 + s^3$
20. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

Figura 36. Matemáticas I, p. 170

A pesar de que este libro no presenta un apartado o una sección que corresponda a las fracciones, en el módulo que corresponde al tema de fracciones algebraicas, muestra en cada uno de sus primeros ejemplos de las operaciones de suma y resta de fracciones algebraicas, suma y resta de fracciones numéricas, rescatando la idea de encontrar el mínimo común múltiplo para poder realizar dichas operaciones. (Véase figura 37)

Suma de fracciones

La suma algebraica de dos o más fracciones con el mismo denominador es una fracción con este denominador común y la suma de todos los numeradores como numerador. El teorema 4-5 nos señala y justifica la operación ($\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$), si de acuerdo a la propiedad de simetría de la

192

igualdad ($a = b \Longrightarrow = a$) lo escribimos como $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Para determinar la suma de dos o más fracciones con diferentes denominadores debemos cambiar las fracciones por otras equivalentes y con un denominador común, preferentemente el mínimo para que el resultado sea lo más simple posible, al que llamaremos el **Mínimo Común Múltiplo (MCM);** para efectuar esto utilizamos el 2o. caso visto al principiar este tema para modificar los términos de las fracciones.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de un conjunto de números o expresiones algebraicas lo encontramos con el siguiente procedimiento:

1. Factorice totalmente todos los números y expresiones.
2. Forme un producto con cada uno de los factores positivos diferentes, escogiendo el que tenga el exponente más grande.

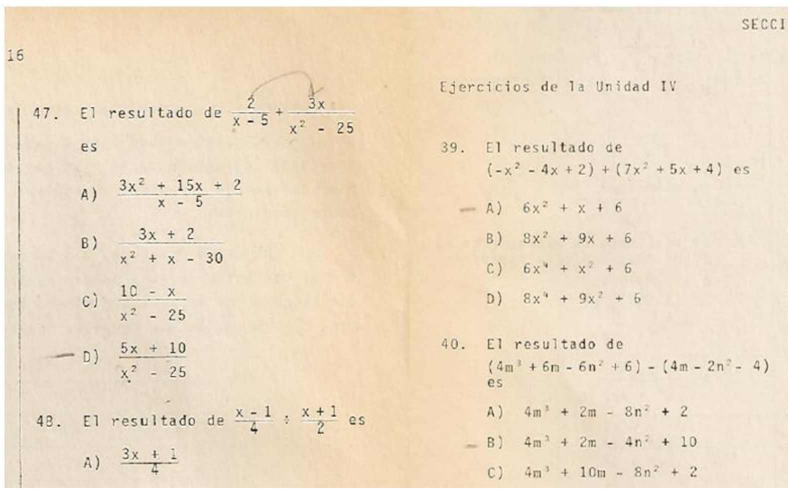
193

Figura 37. Matemáticas I, página 193

Enseguida incluimos un análisis de lo que se aborda en las que los estudiantes toman como guías, respecto a nuestro tema de interés, a las que puede tener acceso el estudiante para complementar su preparación, en cuanto al plan por asignaturas, y que además le sirven para darse una idea de cómo serán los ejercicios de sus exámenes.

Matemáticas I.

La Preparatoria Abierta en Zacatecas, proporciona como un material de apoyo para los estudiantes que cursan el plan por asignaturas, un pequeño libro que contiene ejercicios de autoevaluación para los estudiantes, en este se muestran cuatro secciones de ejercicios correspondientes a cada una de las unidades abordadas en el libro Matemáticas I, cada sección consta de una serie de ejercicios y muestra al final las respuestas correctas para cada uno de ellos. Nos dimos a la tarea de revisar cómo se abordan los contenidos que nos interesan, es decir ejercicios que contengan sumas y restas de fracciones y de expresiones algebraicas. Lo que encontramos fue, en cuanto a fracciones numéricas, no se abordan ejercicios en los que se incluyan estos números y sus operaciones aritméticas, únicamente se presentan operaciones con fracciones algebraicas. Se incluyen en la página 15 un ejercicio para suma de expresiones algebraicas y otro para resta, en los que los coeficientes no son en ningún caso números racionales (véase figura 38).



16

47. El resultado de $\frac{2}{x-5} + \frac{3x}{x^2 - 25}$ es

A) $\frac{3x^2 + 15x + 2}{x - 5}$

B) $\frac{3x + 2}{x^2 + x - 30}$

C) $\frac{10 - x}{x^2 - 25}$

D) $\frac{5x + 10}{x^2 - 25}$

48. El resultado de $\frac{x-1}{4} \div \frac{x+1}{2}$ es

A) $\frac{3x + 1}{4}$

SECCIÓ

Ejercicios de la Unidad IV

39. El resultado de $(-x^2 - 4x + 2) + (7x^2 + 5x + 4)$ es

A) $6x^2 + x + 6$

B) $8x^2 + 9x + 6$

C) $6x^4 + x^2 + 6$

D) $8x^4 + 9x^2 + 6$

40. El resultado de $(4m^3 + 6m - 6n^2 + 6) - (4m - 2n^2 - 4)$ es

A) $4m^3 + 2m - 8n^2 + 2$

B) $4m^3 + 2m - 4n^2 + 10$

C) $4m^3 + 10m - 8n^2 + 2$

Figura 38. Material de apoyo

De esta manera podemos observar que el libro que se ha utilizado desde hace varios años en preparatoria abierta nos muestra una manera de tratar las matemáticas un poco más abstracta, y que nuestro tema solo tiene unos cuantos ejercicios asignados, pero que se utiliza en mayor medida para abordar las operaciones con fracciones algebraicas, explicando en primer lugar esas operaciones con fracciones numéricas. La mayoría de los ejercicios presentados por este libro son muy parecidos a los ejemplos que muestra, lo que es de gran ayuda para los estudiantes. Por su parte, el plan modular utiliza un libro que trata de acercarse un poco más al modelo educativo que era utilizado hasta hace poco, el enfoque por competencias. Este libro está más enfocado en la resolución de problemas de la vida cotidiana, además de que aborda temas que pudieron haber sido vistos desde secundaria, lo cual podría ser una ventaja para los estudiantes de este nivel, pues algunos ya tienen tiempo que dejaron de estudiar. En contraparte una desventaja de este libro es que no muestra gran cantidad de ejemplos para los estudiantes que les pudieran ser suficientes para realizar su examen de manera exitosa.

Ambos libros están diseñados específicamente para preparatoria abierta por lo que por sí mismo deberán fomentar el aprendizaje. Se puede observar como un libro utiliza una fórmula de productos cruzados para realizar la suma y resta de fracciones y el otro lo hace mediante la obtención de un mínimo común denominador, además de que uno de ellos (el de uso más reciente) centra su metodología en la resolución de problemas en un contexto real. Lo que haremos en nuestro diseño, dado que es un aspecto que se pudo detectar de importancia en la educación matemática de jóvenes y adultos.

Pensando en la manera en la que se enseñan los contenidos matemáticos en la secundaria a distancia que promueve el autoaprendizaje al igual que en la educación abierta, encontramos que Schulmaister (2003, p.48) que expresa que la estructura de las sesiones incluye lo siguiente:

- Desarrollo del contenido: primero se plantea una situación problemática contextualizada que implique el uso del contenido que se va a aprender. Después se presentan diferentes estrategias que permitan llegar a la solución de la misma. Por último, se generaliza el concepto o algoritmo introducido.
- Actividades de aprendizaje: En estas actividades se presentan situaciones problemáticas en otros contextos diferentes, en los que aparecen los contenidos a aprender. Las actividades son guiadas mediante preguntas.
- Actividades de aplicación: Se presentan situaciones problemáticas diversas, sin guía para que el adulto las resuelva a su manera.
- Actividades de autoevaluación: Se presentan entre dos y tres actividades representativas de la sesión, que sean significativas para que el adulto evalúe lo aprendido.

Hacemos referencia también a esta estructura, dado que están planeadas de tal manera que no haya intervención directa del profesor, o en este caso asesor, lo cual es base para nuestro diseño.

3.2.4 Análisis de Campo

El contexto de la Preparatoria Abierta

La prestación de servicios de Preparatoria Abierta inicia en el Distrito Federal en mayo de 1979, con un plan de estudios diseñado por el Centro para el Estudio de Medios y Procedimientos Avanzados de la Educación. Se tenía como objetivo general “Brindar medios y métodos de enseñanza-aprendizaje a todas aquellas personas mayores de 15 años que desearan iniciar o concluir sus estudios de nivel medio superior y lograr acreditar sus conocimientos, sin desatender sus actividades productivas”. (Documento base para el servicio de Preparatoria Abierta, SEP, 2014, p. 3). Este servicio educativo con el tiempo ha tenido gran demanda y se ha extendido a nivel nacional. El plan propuesto desde 1979 ha cambiado con la nueva Reforma Educativa y en el año 2010 se cambió por un nuevo mapa curricular que integra un enfoque por competencias. A los estudiantes que optan por esta opción de estudio se les garantiza que al concluir sus estudios contarán con los saberes y las habilidades básicas y comunes a todos los bachilleres. (Documento base para el servicio de Preparatoria Abierta, SEP, 2014, p. 4)

El programa que presenta la SEP (2014) incluye las características de esta modalidad de formación no escolarizada que son las presentadas en la figura 39.

Opción	Certificación por evaluaciones parciales
Modalidad	No escolarizada.
Estudiante	Estudio independiente.
Trayectoria curricular.	Libre.
Mediación docente	En función de las necesidades del estudiante.
Mediación digital	Prescindible
Espacio	Plantel: opcional
	Docente: En caso de requerirse
	Alumno: Libre
Tiempo	Calendario libre y horario flexible.
Instancia que evalúa	Autoridad Educativa
Requisitos para la certificación	Cumplimiento del Plan de estudios
Instancia que certifica	Autoridad educativa

Figura 39. Documento base para el servicio de Preparatoria Abierta, SEP, 2014, p. 5

En este mismo programa propuesto por la SEP podemos encontrar que en este tipo de modalidad se atiende a personas en centros urbanos, rurales, comunidades indígenas, con discapacidad y en condiciones de reclusión en centros de readaptación social. El rango de edad comprende desde jóvenes recién egresados de la secundaria hasta adultos mayores. (p.12)

Así mismo nos dimos a la tarea de investigar por medio de una entrevista dirigida a la persona que nos pudiera proporcionar información acerca del funcionamiento de la Preparatoria Abierta ubicada en Zacatecas, Zacatecas, para corroborar alguna información importante, con la cual obtuvimos información acerca de los planes de estudio, los cuales son dos, por asignatura y modular; se trata de que los nuevos estudiantes cursen el plan llamado modular debido a que está más centrado en el desarrollo de competencias, el plan por asignatura lo cursan estudiantes a los que se les pueden revalidar materias.

Se confirmó que la edad de los estudiantes llega a ser muy variada, y que acuden a asesoría individual puesto que cada uno requiere apoyo en distintos temas, además de que se mencionó, en esta misma entrevista, que las matemáticas resultan ser difíciles para muchos de los estudiantes lo que los lleva, si les es posible, a acudir a asesoría por ayuda.

Por lo que debimos fomentar en nuestro diseño el estudio independiente y libre, que permitiera que el estudiante pudiera realizar las actividades en casa en el horario que le sea posible hacerlo.

Enseguida mostramos los aspectos más relevantes tomados de cada uno de los análisis anteriores ya plasmados en un diseño propuesto para la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, así como un análisis a priori acerca de lo que esperamos obtener.

3.3 Concepción y análisis *a priori*

De acuerdo con los datos y evidencias encontradas en los elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos revisados, llegamos a la realización de un diseño de actividades; mismas que a través de la visualización contribuyan en la comprensión de las sumas y restas de expresiones algebraicas lineales con coeficientes que son fracciones.

El diseño consta de cinco actividades, las cuales se pueden localizar en el anexo 1, en las que en cada una mostramos problemas contextualizados. Se pretendía que estas actividades se pudieran llevar a cabo en no más de 2 horas, puesto que en preparatoria abierta a algunos de los estudiantes no les es posible asistir de manera regular a asesorías y esa es la duración máxima de las asesorías.

También se puede reconocer en el desarrollo de cada una de ellas la estructura que tienen las sesiones propuestas para secundaria abierta (Schulmaister, 2003, p.48), encontradas en el análisis didáctico. Planteando primero una actividad en la que se muestra el contenido (el sembrador), actividades en las que a través de preguntas y espacios en blanco (pastel para todos, el tropiezo de Rosalba, los trajes de don Fermín) se va fomentando la comprensión del tema y actividades de aplicación y evaluación (el patrimonio de Carmen y Rogelio) sobre lo que se vio en la secuencia. Además, se refuerza lo visto mediante estrellas que contienen información relevante sobre el tema de la secuencia.

Enseguida presentamos el objetivo que se persigue con cada una de las cinco actividades propuestas y lo que se esperaba que realizara cada uno de los estudiantes de preparatoria abierta.

La actividad 1: El sembrador

Tenía por objetivo que el estudiante identificara la expresión algebraica con una variable que se desprende de un problema verbal, así como los pasos de dos de los posibles caminos que puede utilizar al realizar la suma de fracciones (a través del mcm y producto cruzado).

En esta actividad, se trabaja con expresiones algebraicas de una literal. Se le hacen preguntas acerca de cada uno de los pasos que se están realizando, de modo que mantenga la atención en el proceso y al mismo tiempo poder identificar lo que comprende. En este caso hacemos uso de nociones relacionadas a lo verbal (problema escrito), a lo numérico (suma de fracciones en aritmética) y a lo algebraico (uso de una literal).

Al final de esta actividad se muestra una estrella que contiene información relevante para el estudiante, respecto a esta primera actividad. Al estudiante de preparatoria abierta, de acuerdo con nuestra experiencia en este campo, le interesa que se le digan cómo debe hacer para resolver los ejercicios de su examen por lo que no le da mucha prioridad a lo teórico, y se inclina hacia lo práctico, por lo que tratamos de que la información presentada en estas estrellas sea lo más sustanciosa y corta posible.

En cada actividad rescatamos del análisis epistemológico la parte en que se expresa que las matemáticas nacen a partir de la necesidad de solucionar un problema, además en este caso rescatamos los dos caminos para encontrar la suma y resta de fracciones observada en el análisis didáctico, así como también la estructura de las actividades propuestas para lograr un autoaprendizaje. La actividad es una adecuación de un problema del libro Representaciones Simbólicas y Algoritmos (García, 2012, p. 57).

La actividad 2: Pastel para todos

Esta actividad tenía por objetivo que el estudiante comparara entre uno de los métodos vistos en la actividad anterior (productos cruzados) y una alternativa gráfica para solucionar un problema de reparto, utilizando la resta de fracciones al realizar la resta de expresiones algebraicas de una variable. Basado en el apartado de fundamentos matemáticos, con la finalidad de encontrar un común divisor para las fracciones, se plantea partir un pastel primeramente en lo que indica un denominador y posteriormente esas partes partirlas en las que indique el segundo denominador; cabe mencionar que consideramos que lo gráfico se vuelve más complejo de ver a medida que los denominadores son más grandes. Están presentes aspectos relacionados con representaciones verbal, aritmética, gráfica. Cabe mencionar que la parte de soluciones gráficas no se considera en la evaluación, debido principalmente a cuestiones de tiempo.

En este problema se retoma una alternativa que es el uso de gráfica para realizar una resta de fracciones, remarcando que conforme los denominadores crecen el método gráfico puede llegar a ser tedioso incluso se podría perder la visualización de la gráfica. Retomamos elementos epistemológicos al tratarse de un problema de reparto tal como lo indica el surgimiento de las fracciones en la historia de las matemáticas. Dado que no pretendemos por el momento la utilización del método gráfico, no lo retomamos en las demás actividades, pero nos pareció relevante mostrar que existe también esta manera de realizar la suma y resta de fracciones y además de que se puede encontrar una relación con la solución de los problemas por medio de productos cruzados. Se trata de una actividad diseñada por la autora de la presente práctica de desarrollo profesional.

La actividad 3: El tropiezo de Rosalba

El objetivo de esta actividad era que el estudiante observara cómo se puede realizar una suma o resta cuando se tienen más de dos fracciones. Lo que se muestra es una alternativa para sumar por pares, es decir, en primer lugar, hacer la suma de las primeras dos expresiones, para obtener un primer resultado que habrá de operarse con la tercera expresión. Cabe mencionar que se utiliza la suma por pares, puesto que para uno de los procedimientos llevados a cabo para la suma o resta de fracciones, el de productos cruzados, no se muestra en los libros la manera de hacerlo para más de dos fracciones. En este caso se encuentran presentes nociones verbales y aritméticas.

En esta actividad se proponen espacios en blanco dentro del esquema para fomentar que el estudiante los llene con los datos que hacen falta. Son espacios que se han colocado estratégicamente para corroborar la comprensión de los pasos mostrados en las actividades anteriores. Al final de esta actividad se muestra también dentro de una estrella información acerca de lo mostrado en esta actividad, misma que expresa la importancia de realizar las operaciones por pares. Nuevamente hacemos uso de la necesidad de resolución de problemas y de los caminos encontrados en el análisis didáctico para la suma y resta de fracciones.

Esta actividad es una adecuación de un problema encontrado en el libro de Representaciones Simbólicas y Algoritmos (García, 2012, p. 182).

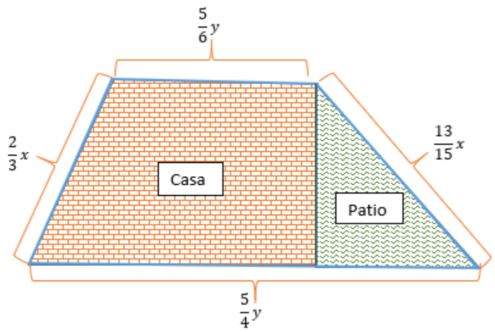
La actividad 4: Los trajes de Don Fermín

Esta actividad pretendía mostrar al estudiante la manera en la que se pueden agrupar los términos semejantes, por medio de la solución de un problema contextualizado. Únicamente utilizaremos expresiones algebraicas de una y dos variables. En esta misma actividad retomamos la utilización del paréntesis, pues el diagnóstico aplicado nos dio indicios que existe confusión con su uso. Además de que por última vez forzamos al estudiante a utilizar los dos caminos analíticos para desarrollar la suma y resta de fracciones antes de proceder a que el estudiante escoja el camino que deberá utilizar para darle solución al siguiente problema.

Siendo esta la primera de las actividades que requiere de la reducción de términos semejantes, y al igual que en las actividades anteriores mostramos por medio de un esquema que antes de proceder a realizar las operaciones correspondientes debemos, en primer lugar plantear nuestro problema en términos matemáticos; se muestra la eliminación de un paréntesis y la agrupación de los términos que hayan resultado semejantes, por medio de la separación dentro del esquema en dos columnas; para de esta manera poder realizar las sumas o restas de los coeficientes fraccionarios. Así mismo por medio de preguntas abiertas se obtiene información acerca de lo que está viendo el estudiante en el desarrollo de estos procedimientos. En este caso se hace uso de nociones verbales, aritméticas y algebraicas.

Se trata de una actividad que es adecuación de un problema propuesto en el libro de cuarto de primaria utilizado por el INEA (Amador, Guzmán, Solís y González, 2009, p. 188).

La actividad 5: El patrimonio de Carmen y Rogelio



Se propuso esta actividad con la finalidad de corroborar si el estudiante de preparatoria abierta había adoptado uno de los procesos para realizar la suma o resta de fracciones, y si le es posible realizar la reducción de términos semejantes de manera correcta, pues en esto radica la suma y resta de expresiones algebraicas. En este problema se recurrió al uso del álgebra geométrica, propuesta hecha por Ballén (2012), como auxiliar en la comprensión de sumas y resta de expresiones algebraicas, en este caso con dos literales. Hicimos uso de nociones asociadas a lo verbal, lo aritmético, lo algebraico e incluimos figuras geométricas representando un terreno. El diseño de esta actividad es responsabilidad de la autora de este trabajo.

La tabla 1 se concentra lo que se esperaba con cada una de las actividades propuestas en el diseño de la secuencia didáctica, es decir el análisis *a priori*.

Tabla 1

Análisis a priori de cada actividad

Actividad	Objetivos	Se esperaba que el participante:
El sembrador	• Relacionar la expresión algebraica de una variable con un problema verbal • Identificar los pasos de dos de los posibles caminos que puede utilizar para realizar la suma de dos fracciones	• Describiera la relación que existe entre los pasos expresados de manera **verbal** y **aritmética** • Describiera por lo menos una forma de las que se le presentan para obtener el denominador de la expresión matemática • Que, una vez obtenido el resultado de las operaciones aritméticas,

		completara la respuesta de manera **verbal** (escrita) al problema
Pastel para todos	• Mostrar el planteamiento de un problema verbal contextualizado, relacionado con la resta de fracciones • Comparar entre uno de los métodos vistos y una alternativa gráfica para solucionar un problema de reparto utilizando la resta de fracciones	• Observara el procedimiento **gráfico** para un problema de reparto de pastel • Identificara el paso en el que se realizan los productos cruzados y sea capaz de plasmarlo • Completara la respuesta **verbal** en el contexto del problema
El tropiezo de Rosalba	• Mostrar el planteamiento de un problema de suma y resta de fracciones • Observar cómo se puede realizar una suma o resta cuando se tienen más de dos fracciones • Poner en juego los procedimientos presentados en la actividad “el sembrador”	• Identificara los datos faltantes para la obtención del mínimo común denominador (los factores y número primo) • Identificara correctamente los datos faltantes en los espacios en blanco • Con la respuesta encontrada completara la solución en el contexto del problema
Los trajes de Don Fermín	• Mostar el planteamiento de un problema contextualizado en el que se incluyen dos variables • Mostrar al estudiante la manera en la que se puede eliminar un paréntesis y agrupar los términos semejantes • Retomar los procedimientos anteriores para corroborar su asimilación	• Identificara y expresara la manera de eliminar paréntesis y agrupar términos semejantes **algebraicamente** • Fuera capaz de llenar los procedimientos correspondientes de acuerdo con el visualizado anteriormente • Completara la respuesta en términos del problema • Describiera de manera **verbal** cada uno de los pasos realizados para faldas y sacos

El patrimonio de Carmen de Rogelio	• Corroborar la adopción de un método de solución para sumar y restar fracciones, y la correcta agrupación de términos semejantes • Evaluar si se realizan los pasos de manera correcta en relación con lo mostrado en las cuatro actividades anteriores	• Identificara los datos del problema • Fuera capaz de transitar de una representación **verbal** a una **algebraica** para dar la solución del problema, apoyándose también de la representación figural • Operara de manera correcta los datos que se obtienen, es decir, agrupara y redujera los términos que resulten semejantes, utilizando la suma y resta **aritmética** de fracciones • Obtuviera una expresión **algebraica** resultado de las operaciones realizadas • Transitara de la representación algebraica a la verbal para contextualizar la solución del problema.

En la tabla 2 se muestra el tipo de conversiones y tratamientos que se esperaban en cada una de las actividades, y de acuerdo con los niveles de comprensión. Nos servirá de base para la elaboración de las redes mentales.

Tabla 2

Conversiones y tratamientos por actividad

	Nivel 1 Ideas confusas	**Nivel 2** Tratamientos	**Nivel 3** Conversiones	**Nivel 4** Ir y venir entre registros	**Nivel 5**
El sembrador	0, 1	0	RAr→RV	0	0
Pastel para todos	0, 1	RAr T2	RG→RV	0	0
El tropiezo de Rosalba	0, 1	RAr T1,T2,T3,T4	RAr→RV	0	0

Los trajes de Don Fermín	0, 1	RAr T1,T2,T3,T4	RAl→RAr RAl→RV	RAl→RAr RAr→RAl	0
El patrimonio de Carmen y Rogelio	0, 1	RAr T1,T2,T3,T4	RF→RAl RAl→RAr	RAl→RAr RAr→RAl RV→RAl RAl→RV	0

Donde:
RAr= registro aritmético
RAl= registro algebraico
RV= registro verbal
RF= registro figural
T1,…,T4= tratamientos dentro de un mismo registro, se refieren principalmente a cada paso realizado para la suma y resta de fracciones, obtención del común denominador, encontrar los numeradores, realizar las operaciones correctamente y simplificación de la fracción, respectivamente

En el siguiente capítulo se presenta la experimentación y los resultados, para posteriormente mostrar el análisis a posteriori y la validación.

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN Y RESULTADOS

4.1 Implementación

Prueba piloto. Antes de comenzar con la implementación de la secuencia didáctica realizamos una prueba piloto con la finalidad de verificar variables como tiempo, número de problemas, características de cada actividad. Es decir que lo que se pretende es validar la secuencia didáctica antes de llevarla a la experimentación.

La prueba piloto consistió en la aplicación de la secuencia de actividades a dos personas, un señor que tiene diez años que estuvo en preparatoria, y una señora que comenzó a estudiar la preparatoria abierta en otro estado, pero que no la ha podido concluir teniendo cerca de doce años que dejo de estudiar. Elegimos estas personas para nuestra prueba piloto dado que su situación es muy parecida a la que viven estudiantes de preparatoria abierta, pues la mayoría de ellos tienen meses o años sin estudiar.

Las personas participantes se les entrego la secuencia dándoles una explicación general de la estructura y las intenciones que se tenían, y aclarando que podrían preguntar cualquier duda que tuvieran. Cabe mencionar que al principio hubo un poco de resistencia, debida al tiempo que ellos tenían sin trabajar estas dinámicas, pero después de explicarles el objetivo, participaron activamente.

Durante esta aplicación, pudimos notar que para la actividad 1 se produjeron varias dudas, se optó por cambiar preguntas que se tenían a los costados de los pasos, por explicaciones, especialmente en la parte de obtención del mínimo común múltiplo (mcm) o mínimo común denominador (mcd), tratando en la medida de lo posible de fomentar el autoaprendizaje, la figura 40 muestra el antes y después de esta actividad, además se puede observar que en un principio solo se expresaban las operaciones a realizar y se cambió por realizar la explicación con ayuda de flechas que indican cada operación. En las siguientes actividades se eligieron espacios en blanco estratégicamente para que se pudiera poner en juego lo observado en la primera actividad. Además, se modificó el planteamiento de la última actividad dado que el tiempo de una de las pruebas rebasó las 2 horas, que son de las que se dispone para la asesoría de matemáticas en preparatoria abierta al día, quedando esta última actividad planteada en dos partes.

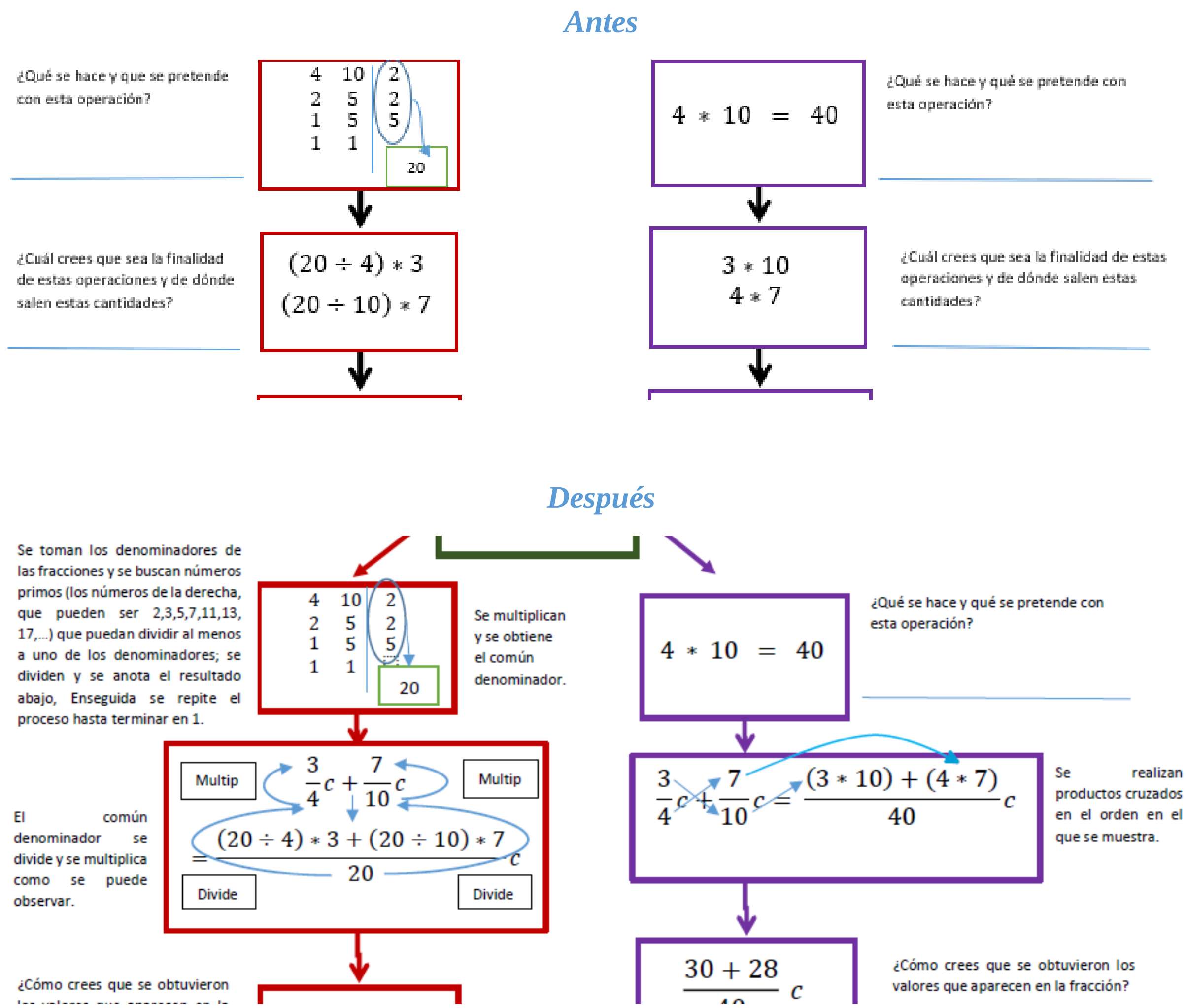


Figura 40. Cambios realizados en la actividad 1

Finalmente, y a raíz de esta prueba se procedió a rediseñar la propuesta implementando los aspectos que arrojó la validación, quedando como resultado una secuencia de 2 actividades visuales donde se presentan 2 posibles formas de solución para la operación con fracciones que se pone en juego (mcm y productos cruzados; productos cruzados y gráfico), 2 actividades procedimentales (mcm con procesos incompletos para 1 y 2 variables) y 1 acumulativa (con proceso libre), para un total de 5 actividades programadas a realizarse en un máximo de 2 horas.

Implementación de secuencia. A partir de estos cambios se procedió con la aplicación de la secuencia con estudiantes de preparatoria abierta. Se tomaron notas de campo en cada una de las aplicaciones llevadas a cabo. Se visitó el área de asesorías durante 10 días, donde se pudo aplicar la secuencia a 6 estudiantes (dos mujeres y cuatro hombres) que se encontraban cursando distintos niveles de matemáticas, desde lo aritmético hasta el cálculo. Dado el contexto de preparatoria abierta hubo días en los que no se logró contactar estudiantes para aplicarles la secuencia; no se propuso cambiar esto pues se buscó respetar el contexto educativo e institucional de la preparatoria abierta y apegarnos lo más posible a él.

El tiempo promedio que se llevó la aplicación fue de una hora y 25 minutos, dependiendo a su vez del estudiante, ninguno de ellos supero las 2 horas. Las edades de los participantes varían desde 16 años hasta 70 años como se muestra en la figura 41, esto es muestra de la heterogeneidad que se presenta en preparatoria abierta por lo que consideramos que la información proporcionada por los 6 estudiantes sería suficiente para poder realizar un análisis de los resultados obtenidos. Cabe mencionar que varios de los estudiantes ya habían estudiado el tema propuesto, sin embargo, cuando se les explicó de que se trataba el tema la mayoría de ellos alegaba que no recordaba nada del tema y que muy probablemente no podrían llevar a cabo la secuencia de actividades, por lo que nos pareció aún más importante aplicar la secuencia de actividades para investigar qué tipo de resultados se podrían obtener.

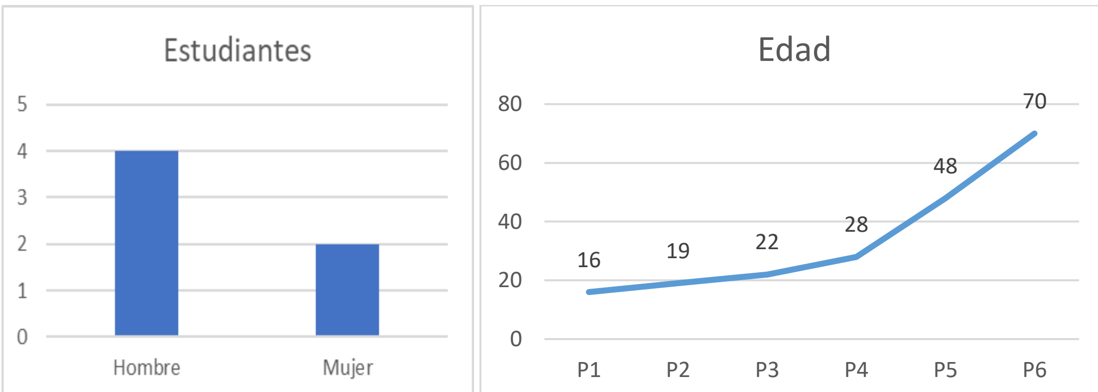


Figura 41. Sexo y edad de los estudiantes encontrados. Fuente: elaboración propia.

La ocupación de los estudiantes varía, pues hay quienes solo se dedican a estudiar, hay quien trabaja en su rancho, otro es profesor de Inglés, una persona jubilada en el área de contaduría, un joven que sus estudios anteriores fueron en Estados Unidos; incluso hay un caso especial de un estudiante que lleva varios años asistiendo a asesorías de matemáticas, los martes de cada semana, sin lograr aprobar los primeros niveles, hubo que guiarlo en las primeras cuatro actividades para dejarlo solo únicamente en la actividad 5.

La estrategia para la aplicación consistió en una presentación por parte del asesor y una explicación por parte de la investigadora, del objetivo de la aplicación de la secuencia didáctica, así como una explicación general de la estructura de esta. Se buscó fomentar el contexto diario de preparatoria abierta en la que el estudiante puede estudiar por su cuenta los contenidos y solo preguntar en caso de que lo considere necesario, por lo que el investigador jugaría el papel de asesor en la aplicación de la secuencia, en algunos casos a manera de guía, en algunos otros para solucionar dudas concretas e incentivando la participación en la solución de esta.

El primer día que se acudió al departamento de preparatoria abierta no se encontró ningún estudiante, creemos que porque era el primer día que se ofrecían asesorías por la tarde, en el segundo día que se acudió se encontraron dos estudiantes cursando diferentes planes de estudio, una joven y un adulto mayor. La estudiante joven no mostro mucho interés por responder la secuencia y se notó muy distraída. Para la siguiente ocasión que se acudió se encontró un estudiante procedente de otro municipio quien refirió que el tema de la secuencia no lo veía desde secundaria, por lo que no recordaba muy bien cómo se realizan las operaciones. El siguiente día de asesorías encontramos los mismos que se encontraron primero pero ahora asistió el caso particular a quien como ya se mencionó se le apoyó guiándolo durante todas las actividades hasta la cuarta; y otro estudiante más quien se encontraba cursando los módulos correspondientes a matemáticas del plan modular.

En las siguientes tres ocasiones que se asistió al aula de asesorías no se encontraron nuevos estudiantes, pues quienes asistían de manera más seguida fueron los dos que encontramos al principio. Después de varios días se logró encontrar otro estudiante quien se encontraba cursando las últimas asignaturas de matemáticas, sus estudios anteriores los había realizado en Estados Unidos. En general la mayoría de los estudiantes preguntó por el proceso de obtención del mínimo común denominador así que en esta parte tuvo que haber intervención de la investigadora, dirigiéndolos hacia la explicación presentada en el instrumento. Cabe mencionar que la mayoría terminaba justo a la hora de la salida, y solo había oportunidad de agradecer la participación y despedirse. No todos tenían dos horas para resolver pues varios llegan media hora después de que se inicia la asesoría. En la figura 42 se muestran algunas imágenes de estudiantes de preparatoria abierta a quienes les fue aplicada la secuencia.

Figura 42. Estudiantes resolviendo la secuencia propuesta

4.2 Resultados

En esta sección realizaremos un análisis de las respuestas obtenidas en la aplicación de la secuencia didáctica, para poder determinar los aspectos que son de interés en este estudio. Tomando como referencia el análisis realizado por Adame (2016), en primer lugar, consideramos las conversiones y los tratamientos realizados en cada una de las actividades, para luego determinar el nivel de comprensión en el que se ubica cada uno de los estudiantes de preparatoria abierta; con estos elementos estaremos en condiciones de poder formar las redes de representación mental de cada uno de los participantes a partir de las conexiones que se hayan presentado.

A continuación, se presenta el análisis de los resultados obtenidos distribuido por cada una de las actividades que integran la secuencia diseñada, para el cual nombraremos P1…P6 a cada uno de los participantes.

Actividad 1. El sembrador

Con esta actividad se pretendía que el estudiante identificara o en su defecto conociera dos caminos para realizar la suma y resta de fracciones, a partir de la expresión matemática obtenida de un problema contextualizado. Las respuestas proporcionadas por cada participante para esta actividad se transcribieron en una tabla en el anexo 2, la figura 43 muestra un extracto de esta. Destacando en cada columna lo que se espera que realice el participante y en cada fila muestra si el estudiante lo realiza o no y se transcribe su respuesta. Se consideran cuatro aspectos: identificación del común denominador, de las operaciones que se deben realizar en cada paso, la interpretación de la respuesta en el contexto del problema y se corrobora si el estudiante sabe identificar la magnitud de estas.

Anexo 2. Rubrica de las actividades

Actividad 1				
	Identifica la obtención del común denominador	Identifica de donde se obtienen las cantidades de la operación	Interpreta la respuesta en el contexto del problema	Presenta nociones de magnitud de fracciones
P1	No, ¨se pretende reducir"	Si, "con el procedimiento anterior"	Si, "la cantidad sembrada"	No, "igual"
P2	Si, "se multiplican los denominadores para obtener el denominador"	Si, por un lado: "se divide el común denominador por el denominador y el resultado se multiplica por el numerador"; por otro lado: "multiplicando	No, "el resultado de la división"	Si, "mayor"

Figura 43. Respuestas a la actividad 1

Una vez que se identifican los procedimientos realizados se procedió a codificar en las transformaciones (tratamientos y conversiones) correspondientes a esta misma actividad. De esta manera se crea una nueva tabla (tabla 3), en la que las columnas presentan, para el caso de esta actividad, la conversión a realizar, y las filas son cada uno de los participantes.

Tabla 3

Codificación para actividad 1

Actividad 1	
	CAr→CV
P1	0
P2	1
P3	1
P4	1
P5	1
P6	0

En esta actividad analizamos el grado de visualización representado por el tránsito de un registro aritmético a un registro verbal, simbolizado por CAr→CV, dado que el participante debe interpretar algunos de los pasos que se muestran en el esquema. Los posibles valores son 0 y 1 donde 1 quiere decir que el estudiante interpretó cada uno de los pasos solicitados, es decir describió: la obtención del denominador, los pasos requeridos, así como completar la respuesta verbal del problema; el 0 quiere decir que el participante no identifica ninguno de los casos anteriores. Por ejemplo, las respuestas de P2, quien tiene asignado un 1, se muestran en la figura 44. En la que se puede notar que se describe correctamente lo que se está realizando al obtener los sumandos del numerador.

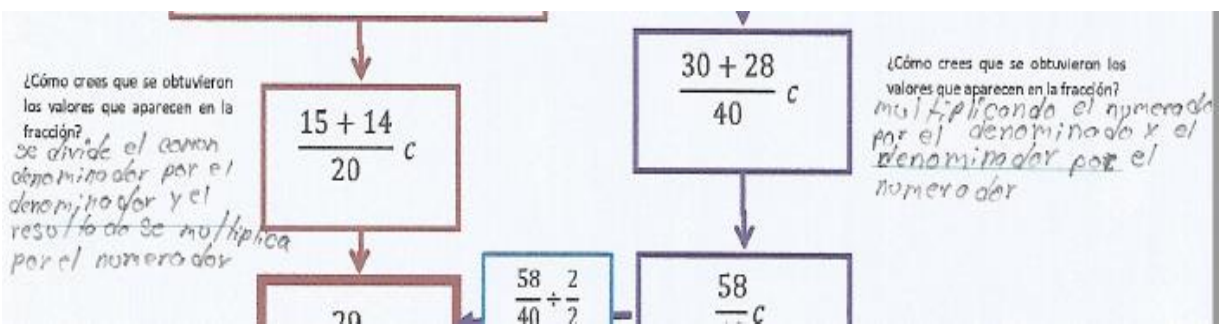


Figura 44. Conversión realizada por P2

También encontramos que P1 tendría asignado un cero para esta conversión dado que sus ideas acerca de lo que se realiza en cada paso no son explícitas respecto al proceso, sus respuestas se pueden observar en la figura 45.

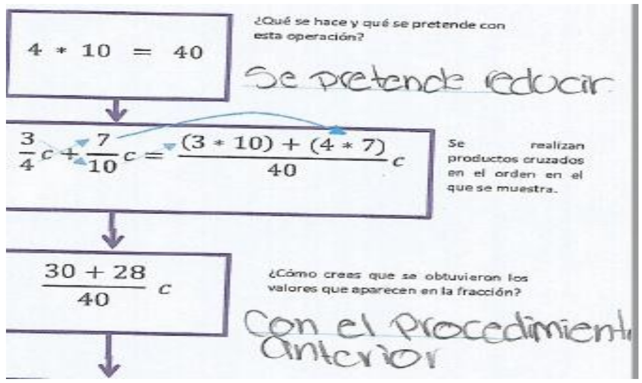


Figura 45. Respuestas de P1

Dado que la actividad 1 está planeada como base para mostrar el contenido matemático, consideramos que el papel del estudiante debe centrarse en la visualización del proceso que se le presenta; y lo único que el participante debería hacer lo clasificamos como un tránsito de lo que observó de manera aritmética a lo que describe de manera verbal.

Actividad 2. Pastel para todos

De la misma manera en la actividad 2 se realiza un concentrado de las respuestas de acuerdo con lo que se espera que realice el participante, considerando tres aspectos clave para el grado de comprensión: la identificación y realización del proceso faltante (registro aritmético), y la interpretación del resultado en el contexto del problema (esto puede ser desde el registro gráfico o desde el aritmético). Como se muestra en la figura 46.

Actividad 2			
	Identifica el proceso faltante	Realiza el proceso faltante	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	Si	No, $\frac{8}{12}c + \frac{3}{12}c = \frac{96+28}{142}$	No, $\frac{8-3}{12}$; $\frac{5}{12}$
P2	Si	Si, $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{(2*3)-(3*1)}{12}$	Si, 12; 5

Figura 46. Respuestas para la actividad 2

El desglose completo de los tratamientos y conversiones para esta actividad se presentan en la tabla 4, las siglas T2Ar se refieren a una transformación interna del registro aritmético en el que el participante debería identificar el segundo paso de la resta de fracciones, que se refiere a la obtención de los numeradores. El símbolo CAr→CV, se refiere a que el participante debe interpretar a partir de las gráficas mostradas o a partir del resultado numérico obtenido, las partes que completan la oración en forma verbal en la solución del problema, se asigna 1 a quien lo haya realizado correctamente y 0 en caso contrario.

Tabla 4

Tratamiento y conversión para actividad 2

Actividad 2		
	T2Ar	**CAr→CV**
P1	0	0
P2	1	1
P3	1	0
P4	1	1
P5	1	1
P6	1	1

De esta manera, por ejemplo, el P1 se clasifica como un 0 en T2Ar dado que sus respuestas no corresponden con el proceso faltante, como se muestra en la figura 47. En su respuesta se puede observar que su proceso mental es correcto, sin embargo, presenta numerosos errores, por ejemplo: las fracciones que intenta sumar no corresponden con las del problema en cuestión, debería haber planteado una resta y sus productos son incorrectos.

El proceso que presenta da muestra de que está repitiendo el caso de la actividad 1 (suma) y no da una interpretación correcta al problema verbal.

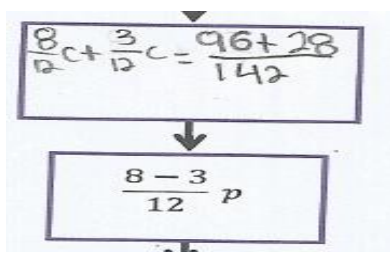


Figura 47. Respuesta de P1 para proceso faltante

Caso contrario el de P3 a quien se le asigna un 1 dado que expresa de manera correcta el paso que falta para la realización de la resta utilizando productos cruzados (ver figura 48). Incluso se puede observar como a su vez hace uso de flechas para indicar la multiplicación de numerador por denominador.

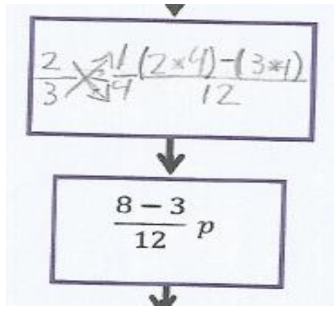


Figura 48. Tratamiento de P3

Actividad 3. El tropiezo de Rosalba

En cuanto a la actividad 3, el anexo 2 concentra la totalidad de las respuestas obtenidas, en ella, los participantes debieran dar muestras de comprensión en cuatro aspectos a considerar: la obtención del mínimo común denominador, de los numeradores de la fracción y el completar la solución verbal del problema. En la tabla correspondiente a esta actividad se puede encontrar cuatro aspectos y si los participantes los realizaron o no además de que se complementa con la respuesta que proporcionaron (observe la figura 49).

Actividad 3				
	Obtiene el mínimo común denominador	Identifica el proceso de obtención de los numeradores	Obtiene el numerador faltante	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	No, en la celda faltante escribe "6"	No, $(3 \div 4) * 36$; $(2 \div 9) * 5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$
P2	Si	Si, $(36 \div 4) * 3$; $((36 \div 18) * 5$	No, 2	Si, $\frac{25}{36}$
P3	No, obtiene la mitad de 9	No, $(36 \div 4) * 2$; $(36 \div 3) * 5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$

Figura 49. Respuestas para actividad 3

Como complemento de la anterior, en la tabla 5 encontramos los tratamientos y conversiones considerados para "el tropiezo de Rosalba". Se pueden observar tres tratamientos internos en el registro aritmético que corresponden a: la obtención del común denominador, la obtención de los numeradores, y la realización de las cuentas correspondientes (T1Ar, T2Ar y T3Ar, respectivamente); también se encuentra una conversión que corresponde con la interpretación de la respuesta aritmética de las operaciones realizadas completando una respuesta verbal para el problema, CAr→CV. Análogamente como en las tablas de las actividades anteriores, en esta actividad se asigna 1 a la realización correcta de las transformaciones y 0 en caso contrario.

Tabla 5

Tratamientos y conversión para actividad 3

Actividad 3				
	T1Ar	**T2Ar**	**T3Ar**	**CAr→CV**
P1	0	0	1	1
P2	1	1	0	1
P3	0	0	1	1
P4	1	1	1	1
P5	1	1	1	1
P6	1	1	1	1

Por ejemplo, P3 tendrá asignados 0 en dos tratamientos que corresponden a la obtención del común denominador y de los numeradores para la resta indicada, dado que no identifica los datos correctos faltantes para su obtención; sin embargo, se asigna un 1 a la realización de las operaciones en la suma de las fracciones indicadas. Como se puede observar en la figura 50.

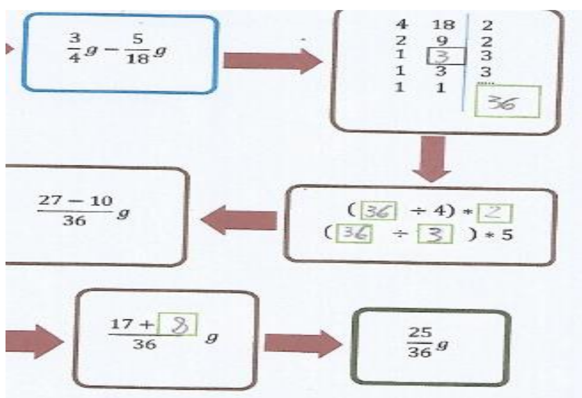


Figura 50. Respuestas de P3 en actividad 3

En caso contrario a P4 se le asignó 1 en cada uno de los campos dado que realizo el llenado de espacios y las operaciones (transformaciones internas) correctamente además de que completo de manera correcta la respuesta verbal al problema (conversión), esto se puede observar en la figura 51.

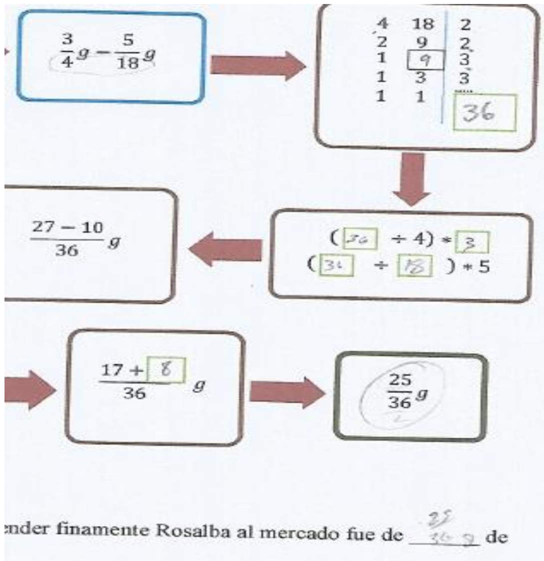


Figura 51. Tratamientos y conversión realizada por P4

Actividad 4. Los trajes de Don Fermín

Para el caso de esta actividad se considera que el estudiante de preparatoria abierta debe visualizar once aspectos, los cuales determinan el grado de comprensión del proceso: la eliminación de paréntesis, la agrupación de términos semejantes, la obtención del común denominador (para ambos procesos mostrados), de los numeradores (para los dos procesos), el seguimiento de la parte literal, la simplificación de las fracciones, la explicación de los procedimientos realizados y la interpretación de la respuesta al completar la solución de manera verbal. En el anexo 2 y como se puede observar en la figura 52, cada columna representa cada uno de los aspectos considerados y cada fila es la respuesta de cada uno de los participantes y si llevaron o no a cabo de manera correcta la acción.

Actividad 4											
	Identifica el proceso de eliminación de paréntesis	Identifica la agrupación de términos semejantes	Obtiene el mínimo común denominador	Identifica la posición del denominador obtenido	Realiza la resta de numeradores	Completa el producto de denominadores	Encuentra las cantidades faltantes	Encuentra la literal	Simplifica la fracción	Explica cada procedimiento realizado	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	No, “estaban sumando pasaron restando”	Si, “para que se reduciera”	No, las primeras filas deben representar los denominadores, y escribe 6	Si, colocado bajo la fracción, 40	Si, 11	Si, 8	No, debe expresar los productos cruzados. Escribe la misma cantidad	No, 4	No, 96	No, en blanco	Si, aunque la expresión matemática encontrada es incorrecta, $\frac{11}{40}f + \frac{1}{96}s$
P2	No, “se	Si	No	Si	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	No,	Si,	Si, para el	Si,

Figura 52. Respuestas para la actividad 4

Utilizando codificaciones para indicar los tratamientos y conversiones considerados para esta actividad, mismos que se encuentran en el anexo 3, se establecen cuatro tratamientos internos y dos conversiones (véase tabla 6), los tratamientos indican, como en los casos anteriores, cada uno de los pasos para realizar una suma o resta de fracciones numéricas, CAl→CAr representa un tránsito entre el registro algebraico y el aritmético, dado que de una expresión algebraica se extraen sumas y restas de fracciones numéricas (aritmética), CAl→CV se refiere al tránsito de una expresión algebraica, que representa la ganancia, a poder interpretar la respuesta de forma verbal al problema planteado, en términos de sacos y faldas; así mismo esta conversión se refiere a la explicación verbal de cada uno de los pasos llevados a cabo para realizar la suma y resta de las expresiones algebraicas con los coeficientes fraccionarios.

Tabla 6

Tratamientos y conversiones para actividad 4

Actividad 4						
	T1Ar	**T2Ar**	**T3Ar**	**T4Ar**	**CAl→CAr**	**CAl→CV**
P1	0	0	0	0	1	0
P2	0	1	1	1	1	1
P3	1	1	1	1	0	1
P4	1	1	1	1	1	1
P5	1	1	1	1	1	1
P6	1	1	1	1	1	0

Se puede observar, por ejemplo, para P1 que los pasos que realiza en los espacios faltantes para realizar la resta de las fracciones tienen asignado un 0; puesto que no realiza de manera correcta la obtención del común denominador, no obtiene los numeradores que han de restarse y tampoco realiza la simplificación de la fracción (T1Ar…T4Ar, tienen 0); se muestra una transformación de lo algebraico a lo aritmético (CAl→CAr, tienen 1) por haber interpretado de manera correcta que debía separar los términos que fueran semejantes para luego poderlos operar de manera aritmética. Sin embargo, este participante no fue capaz de describir verbalmente los pasos realizados, por lo que se asigna un 0 en CAl→CV. Véase figura 53.

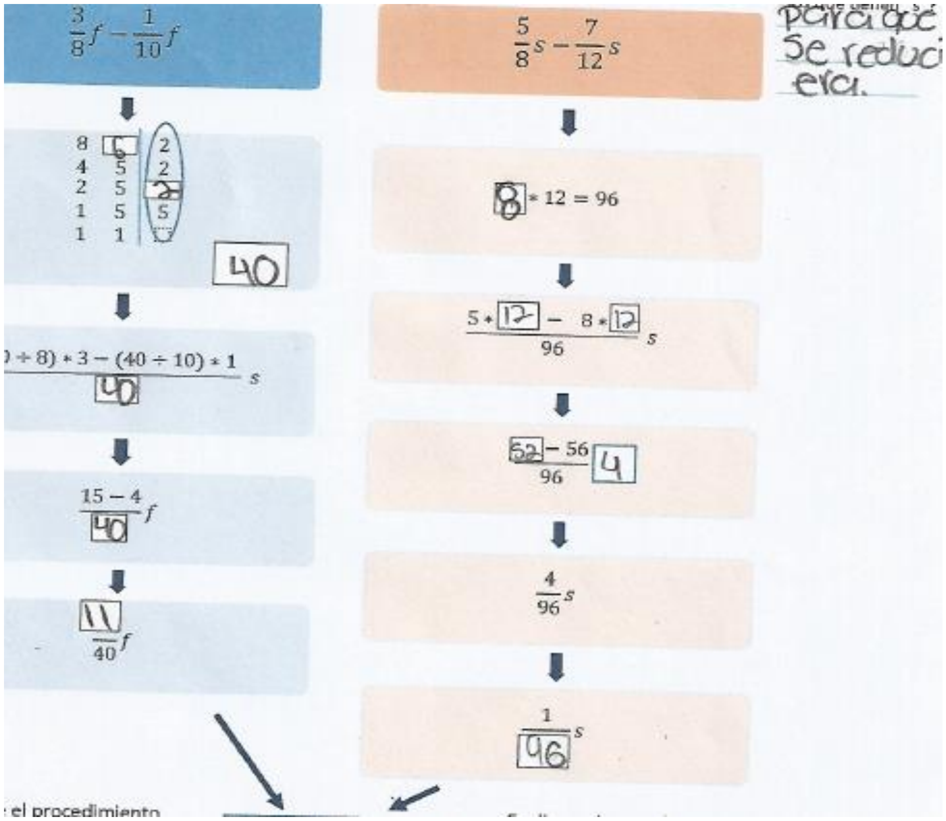


Figura 53. Respuestas de P1 para actividad 4

En este mismo concentrado de tratamientos y conversiones se puede observar que P6 tiene asignados 1 en cada tratamiento dado que realiza las operaciones de manera correcta, la conversión de CAl→CAr se catalogó como un 1 dado que responde de manera correcta la pregunta acerca de la separación de términos para poder operarlos por separado; en la conversión de CAl→CV se asigna un 0, porque no realiza la descripción verbal de cada uno de los pasos realizados. Sus respuestas se pueden ver en la figura 54.

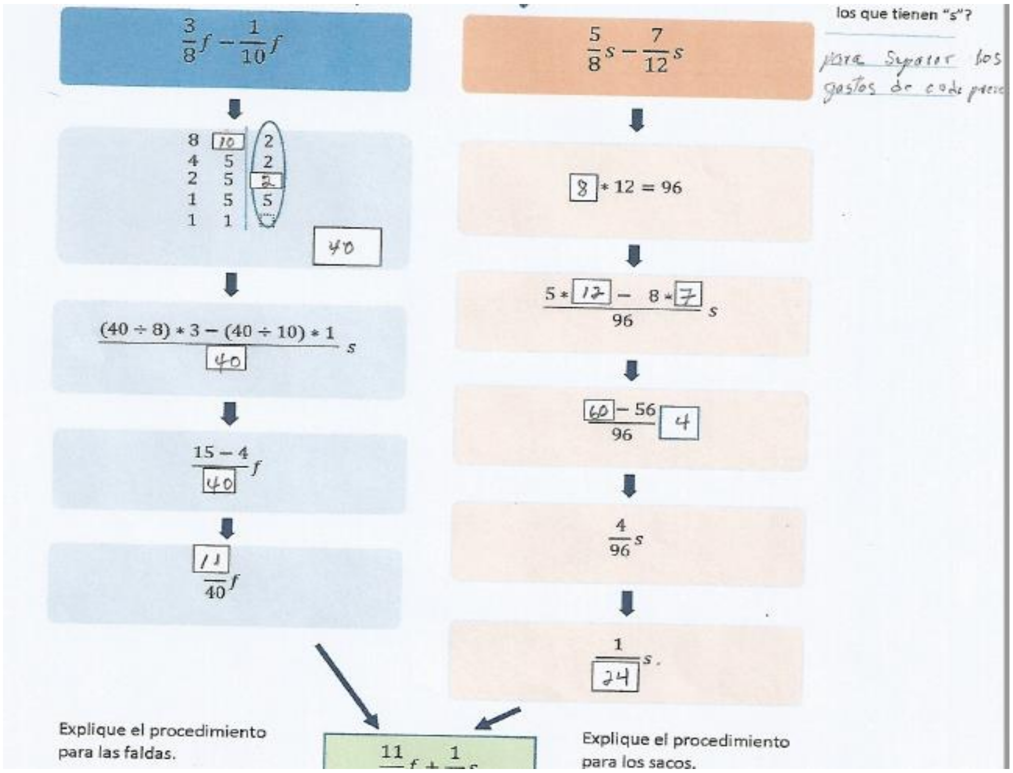


Figura 54. Respuestas de P6 para actividad 4

De la misma manera P2 tiene asignados unos en cada uno de los campos, excepto que cometió un error en la obtención del mínimo común denominador pero sus demás respuestas son correctas. En la figura 55 se puede observar el error cometido en la obtención de mínimo común denominador al considerar un factor 3, le hace obtener un 60 en lugar del 40. También a diferencia de los participantes mostrados en los ejemplos anteriores, P2 describe cada uno de los pasos realizados de manera correcta (CAl→CV), lo que podría dar evidencia de que ha comprendido ambos caminos para la suma y resta de fracciones. Además, observe que no le fue posible identificar la eliminación de los paréntesis que aparecen en la expresión algebraica.

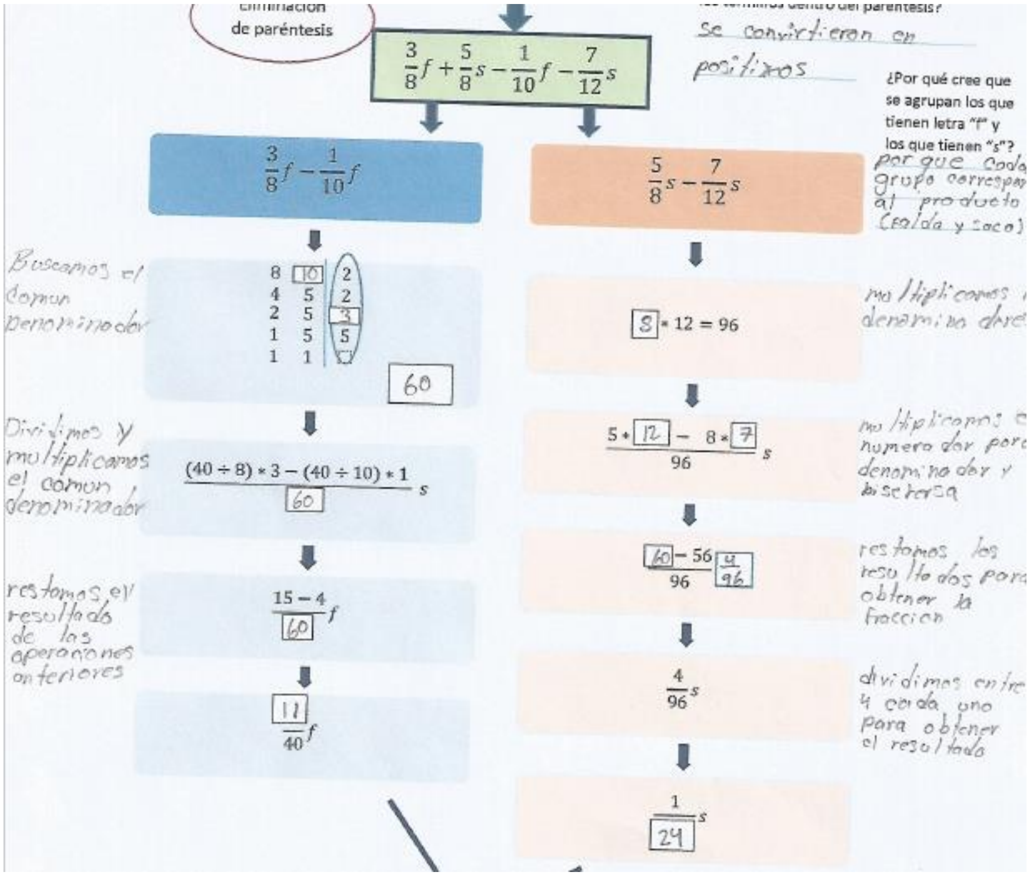


Figura 55. Respuestas de P2 a actividad 4

Actividad 5. El patrimonio de Carmen y Rogelio

Esta actividad juega un papel de suma importancia dentro de la secuencia didáctica dado que se pone en juego cada aspecto comprendido en las cuatro actividades anteriores, sin ayuda, es donde el participante demostrará que es capaz de generar representaciones mentales exteriorizadas en la solución de un problema contextualizado mediante la obtención en primer lugar de un perímetro y en segundo de un área, para la construcción en un terreno. En el anexo 2 encontramos los diez aspectos considerados para esta actividad en cada una de las columnas de la tabla (véase figura 56), dentro de los que se incluye: identificar los datos del problema a partir de la explicación y de las figuras presentadas, obtener las expresiones algebraicas necesarias para encontrar un resultado, realizar la agrupación correcta de términos semejantes para después realizar la reducción mediante la suma y resta de fracciones utilizando uno de los dos caminos mostrados en las actividades anteriores, luego encontrar la expresión algebraica que dará respuesta al problema y poder interpretar la solución de manera verbal en el contexto del problema.

Actividad 5										
	Identifica los datos del problema de acuerdo con la explicación y con la figura	Obtiene la expresión matemática para la solución del problema	Realiza la agrupación de términos semejantes para la primera respuesta	Realiza la suma de expresiones algebraicas utilizando uno de los procedimientos mostrados	Simplifica la expresión encontrada	Interpreta la respuesta en el contexto del problema	Obtiene la expresión a partir de la explicación y datos en la figura presentada	Realiza la agrupación de términos semejantes para la segunda respuesta	Realiza la resta de expresiones algebraicas utilizando uno de los procedimientos mostrados	Interpreta la respuesta en el contexto del problema
P1	Si	Si, $\frac{2}{3}x+\frac{13}{15}x$; $\frac{5}{6}y+\frac{5}{4}y$	Si, $\frac{2}{3}x+\frac{13}{15}x$; $\frac{5}{6}y$ $+\frac{5}{}$	Si, $\frac{2}{3}x+\frac{13}{15}x=\frac{30+39}{45}=\frac{69}{45}x$; $\frac{5}{6}y+\frac{5}{4}y$ $20+30$	No	No, $\frac{69}{45}x+\frac{50}{24}y$	No	No, $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}y$; $\frac{7}{5}x+\frac{3}{4}y$	No, dado que realizó la agrupación errónea	No, $\frac{12}{12}xy+\frac{13}{1}xy$

Figura 56. Respuestas para actividad 5

De la misma manera que en las actividades anteriores se hace una clasificación de los tratamientos y conversiones llevados a cabo por los participantes, misma que se puede observar en la tabla 7 para cada uno de los participantes. En esta tabla se puede observar que la actividad 5 considera las cuatro transformaciones internas dentro del registro aritmético, además de otro tratamiento en el que se considera si lograron restar el número negativo (TAr); se tienen 4 conversiones: entre el registro verbal y el figural (CV→CF), que indica que el participante expresó una resta en la segunda parte del problema; entre el registro figural al algebraico (CF→CAl), que se presenta cuando el estudiante obtiene la expresión algebraica a partir de las figuras presentadas en esta actividad; del algebraico al aritmético (CAl→CAr) que es cuando el participante separa para poder operar los términos semejantes en los que debe sumar y restar fracciones; la conversión del aritmético al algebraico (CAr→CAl), se presenta cuando el estudiante vuelve a articular los resultados de las operaciones para formar nuevamente una expresión algebraica; una conversión del registro verbal, representado por la descripción del problema a resolver, al registro algebraico, que será la obtención de las expresiones algebraicas a partir de la lectura del problema (CV→CAl); y finalmente se considera una conversión del registro algebraico al verbal que se presenta cuando el participante ha interpretado la respuesta en el contexto del problema (CAl→CV).

Tabla 7

Tratamientos y conversiones de la actividad 5

Actividad 5											
	T1Ar	**T2Ar**	**T3Ar**	**T4Ar**	**TAr**	**CV→CF**	**CF→CAl**	**CAl→CAr**	**CAr→CAl**	**CV→CAl**	**CAl→CV**
P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
P3	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

P4	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
P5	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
P6	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0

Puesto que se trata de la actividad que se propone como evaluación, en esta se espera que lleguen al grado de comprensión más alto; parece conveniente realizar un análisis de tratamientos y conversiones para cada participante, mostrando algunos ejemplos de ellos, tomando como base el valor (0 o 1) que se le asignó a cada uno.

Iniciamos con P1, en el que se puede observar que tiene asignados únicamente ceros, para iniciar el problema se debe realizar la obtención de los datos a partir de las figuras para poder formar una expresión algebraica a partir de lo que se explica y se pide en el texto del problema (CV→CF, CF→CAl y CV→CAl), el problema consta de dos apartados en una se debe realizar una suma de expresiones algebraicas y en el otro una resta, P1 identifica los datos para la primera parte correctamente pero no lo hace con la segunda parte, en esta última no identificó lo que debía hacer (como se observa en la figura 57).

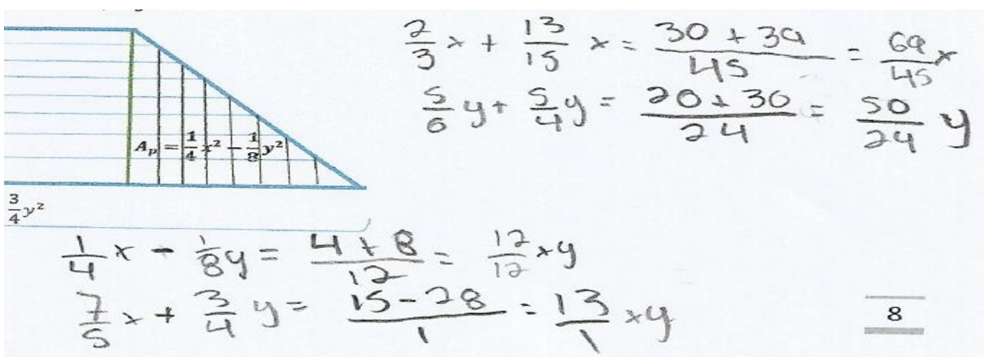


Figura 57. Respuestas de P1 para actividad 5

También se puede observar, en la figura 57, que la primera suma está correctamente realizada, pero en la segunda, si consideramos únicamente la manera en la que realiza las operaciones aritméticas, pareciera que no sabe cómo realizarlas pues ninguno de sus pasos es correcto; por lo que se la ha asignado ceros en los tratamientos dentro del registro aritmético. Así mismo sus soluciones no están dadas en términos del problema por lo que el tránsito del registro algebraico al verbal (CAl→CV) tiene asignado nuevamente 0. Las soluciones de P1 para este problema se muestran en la figura 62.

Figura 58. Solución propuesta por P1

Por su parte P2 realizó las operaciones necesarias para llegar a la solución por lo que en cada tratamiento tiene asignado un 1, lo realiza mediante la obtención del mínimo común denominador, sin embargo, al momento de obtener las expresiones algebraicas y querer reducir los términos semejantes (CAl→CAr) comete un error pues no considera que la resta de un numero negativo se convertiría en suma, por lo que se le asigna un 0 en TAr, pero al momento de identificar que debe realizar una resta con los datos de la figura se le asigna 1 en CV→CF (vea figura 59).

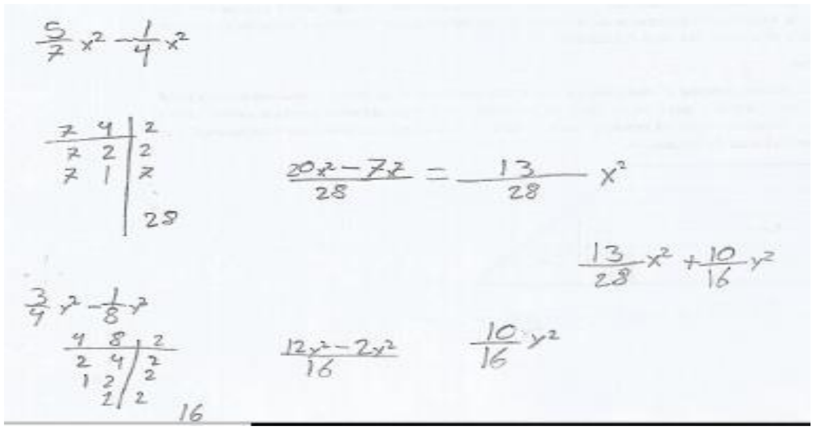


Figura 59. Respuestas de P2

En concordancia con P1, P2 no logra interpretar el resultado en el contexto del problema por lo que tiene asignado un 0 en CAl→CV.

En P3 encontramos que en primer lugar obtiene una de las expresiones algebraicas que servirá para dar las soluciones al problema por lo que en CV→CAl tendrá asignado 1, así mismo agrupa y separa los términos semejantes correspondientes, lo que le hace obtener 1 en las demás conversiones. Las soluciones no las presenta en forma verbal, una solución es la expresión algebraica obtenida del problema y la otra está en blanco (observe figura 60). Sin embargo, al acercarse para entregar su secuencia resuelta hace un comentario acerca de la última parte de esta actividad sobre como utilizaría el ingeniero la expresión matemática encontrada que representa el área, lo que nos da una idea de que el estudiante está interpretando su respuesta en el contexto del problema, lo hace de manera oral, por esta razón se le ha asignado 1 en CAl→CV.

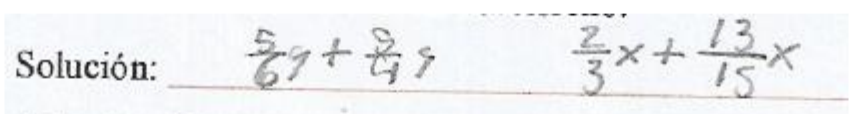


Figura 60. Solución de P3 para primera parte de actividad 5

Las operaciones aritméticas de sumar y restar fracciones las realiza utilizando productos cruzados, se puede observar un error en las operaciones pues no obtiene el producto de denominadores correcto y no acomoda de manera correcta los productos lo que lo lleva a un resultado erróneo, por lo que se le ha asignado 0 en algunos tratamientos (observe figura 61). Cometiendo el mismo error de P2 al momento que debe restar un negativo, en TAr obtiene 0.

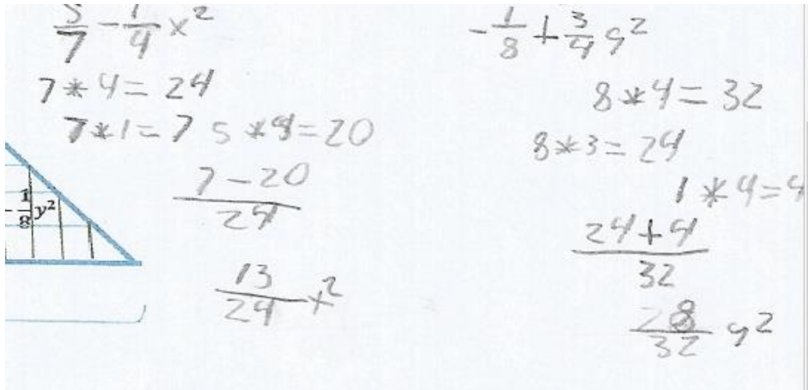


Figura 61. Operaciones de P3

En el caso de P4, todos sus procedimientos son correctos, realiza la suma y resta de fracciones haciendo uso de productos cruzados; y en este aspecto realiza todo correctamente como se esperaba por lo que tiene asignados unos en cada uno de los tratamientos considerados en el registro aritmético, es el único que logro cambiar la resta de un negativo por una suma. Sus errores se presentan en la segunda parte de esta actividad dado que se olvida que las variables son cuadráticas y al escribirlas aparecen lineales en sus respuestas; por lo que se le ha asignado 0 en CAr→CAl, que es la conversión de lo que se realiza aritméticamente, la suma y resta de fracciones, a lo algebraico ya con las variables y la expresión algebraica en conjunto. Estos detalles se pueden observar en la figura 62.

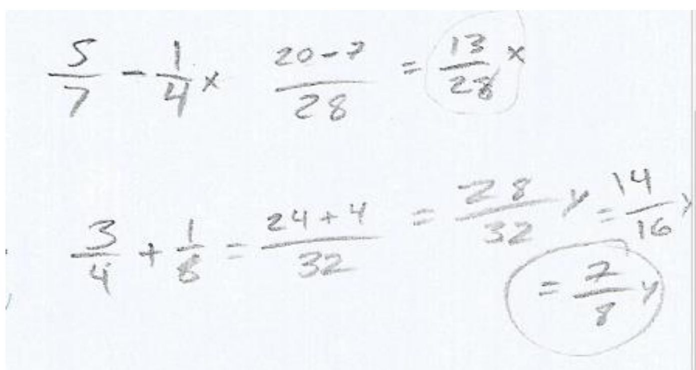


Figura 62. Operaciones de P4

Al igual que P1 y P2 en P4 no se tuvo éxito en la obtención de la solución verbal al problema, la primera parte anota la expresión algebraica obtenida y en la segunda la línea destinada a la solución está en blanco.

Siguiendo con P5, primero mencionaremos que se trata de un caso especial pues el señor tiene cursando preparatoria abierta desde hace ya varios años, su avance es muy lento y únicamente asiste a asesorías una vez por semana. Anteriormente se encontraba cursando el plan de estudios por asignatura, pero de manera reciente se cambió al plan modular. Sus actividades de la 1 a la 5 tuvieron que ser apoyadas por el investigador, pero al llegar a la actividad 5, se le comento que la tendría que resolver el solo obteniendo los tratamientos y conversiones que se pueden observar en el anexo 3, en la parte que corresponde a esta actividad. Para la primera parte del problema obtiene los datos de la figura (CF→CAl) y resuelve dos sumas (CAl→CAr), pudiendo identificar los términos semejantes, pero no logra concretar la expresión algebraica final (observe figura 63), por lo que su CAr→CAl tiene valor de 0.

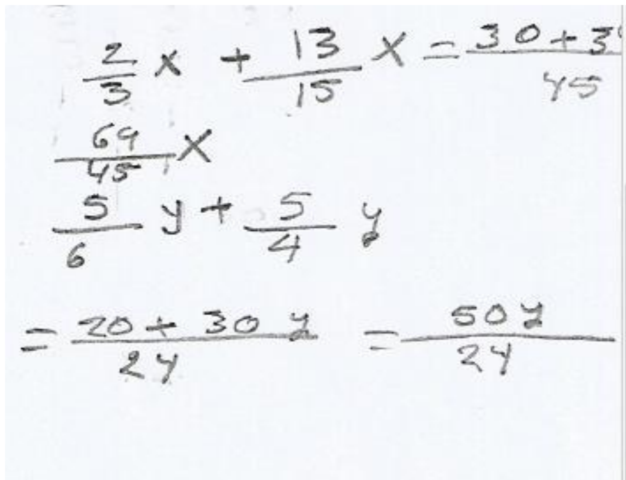


Figura 63. Operaciones de P5

En la segunda parte del problema no supo qué hacer con los datos proporcionados para obtener la expresión matemática, para luego reducir los términos semejantes (aunque los relaciona correctamente) por lo que CV→CAl tienen asignado 0. Y al igual que los participantes anteriores no logro dar una solución de manera verbal en el contexto del problema (véase figura 64), es decir se asignó 0 a la conversión CAl→CV.

Figura 64. Solución de P5 para actividad 5

Finalmente, P6 tendría asignados 1 en cada uno de los espacios de los tratamientos correspondientes al registro aritmético (T1Ar, T2Ar, T3Ar y T4Ar), pues realiza correctamente las operaciones de suma y resta de fracciones que se requieren en esta actividad, obteniendo el común denominador con el producto de denominadores y en caso de que uno de los denominadores sea múltiplo del otro, lo utiliza como común denominador. Al obtener las expresiones algebraicas que deberían darle la solución al problema propuesto, P6 reconoce que en la primera parte hay que realizar una suma y en la segunda una resta por lo que se le ha asignado 1 en CV→CF, CF→CAl y en CV→CAl. Sin embargo, al relacionar la resta de un negativo no lo hace correctamente pues debió haberlo convertido en una suma por lo que se la ha asignado 0 en TAr, observe figura 65.

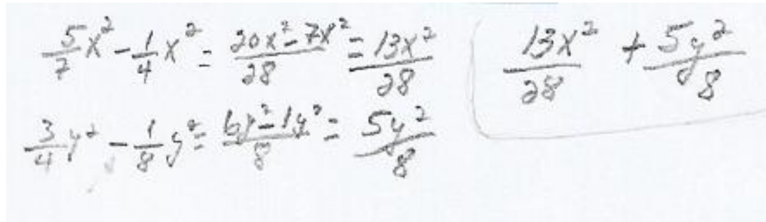


Figura 65. Operaciones de P6 para actividad 5

De la misma manera que los participantes P1, P2, P4 y P5 el P6 tampoco logró representar la respuesta verbal al problema, no se logró esta transformación a través de la secuencia implementada a pesar de que las actividades 1, 2, 3 y 4 presentan al final una solución en el contexto del problema.

Para concluir este apartado consideramos pertinente presentar algunas opiniones respecto a la impresión de los estudiantes de preparatoria abierta acerca de la secuencia didáctica propuesta, que coinciden en que les ayuda a plantear problemas, que les ayudo a recordar, varios de ellos ya habían cursado el tema propuesto, pero alegaban no recordar nada de eso. En general las opiniones son alentadoras.

En la figura 66 se muestra una opinión de P6 quien menciona: “Es interesante para recordar como plantear un problema paso a paso, en dos diferentes formas. Son problemas fáciles y útiles y en cierta forma divertidos. Para mí lo más difícil de estos problemas es su planteamiento.”

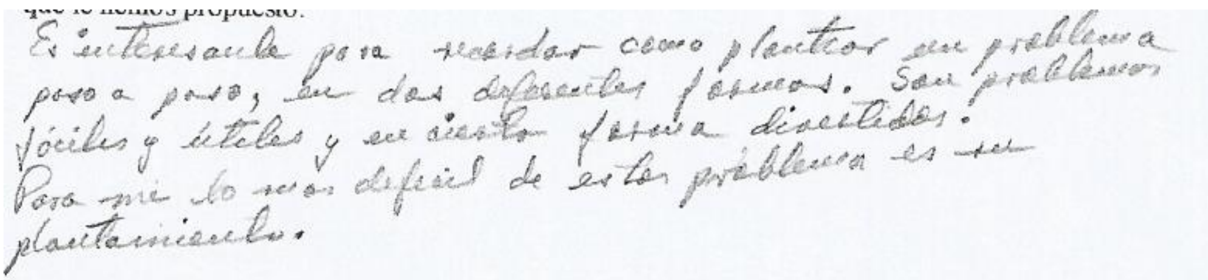


Figura 66. Opinión de P6 acerca de las actividades propuestas en la secuencia

Así mismo P3 coincide en que le ayudó a plantear problemas, lo que se puede observar en la figura 67.

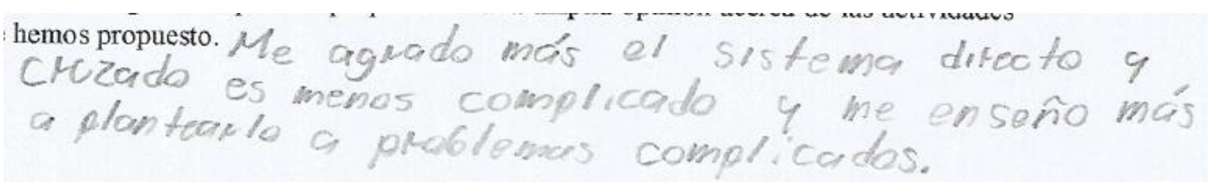


Figura 67. Opinión de P3 acerca de las actividades propuestas

A partir del análisis de resultados presentado en este capítulo se procede a realizar en análisis a posteriori y la validación.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

En este apartado se hace referencia al análisis de los resultados obtenidos, considerando los niveles de comprensión que alcanzó cada uno de los participantes, y las redes de representación mental formadas. Para finalmente hacer un contraste entre lo que se esperaba en las actividades y lo que se logró con ellas.

Antes que nada, vale la pena recordar algunos aspectos importantes sobre el enfoque teórico utilizado en este trabajo, como lo es la definición de visualización y su relación con las representaciones semióticas, dado que el análisis de resultados está centrado en los registros de representación. Retomando la definición que hemos adoptado de visualización como la **capacidad o proceso** mediante el cual se pueden formar imágenes, **diagramas**, figuras, gráficas, símbolos, ya sea en la mente, en papel o con herramientas tecnológicas, a fin de **representar o comunicar** información, misma que **ayudará** en la **comprensión matemática**; haciendo uso de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, lo gráfico, lo algebraico o lo verbal.

Se toma el concepto de **comprensión** en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992, citados en Hitt, 2000), quienes expresan que una idea matemática, **un procedimiento** o un hecho será comprendido si su **representación mental** forma parte de una **red de representaciones**; además de que el grado de entendimiento será determinado por la cantidad y la fuerza de las conexiones.

La secuencia didáctica propuesta utilizó **esquemas** para presentar un procedimiento matemático que funciona para resolver problemas en los que se incluyan sumas y restas de expresiones algebraicas con fracciones. Dentro de los esquemas (los cuales ya se consideran un tipo de registro de representación) se consideran las representaciones semióticas en el sentido de que funcionan como un medio para exteriorizar las representaciones mentales, que finalmente son las que servirán para formar las redes de conexión y así saber que tanto se comprendió el procedimiento. Los registros de representación utilizados son verbal, aritmético, algebraico y figural.

En primer lugar, se toma como base los **niveles de comprensión** propuestos por Hitt (1998) para clasificar a los estudiantes de preparatoria abierta, lo que permitirá determinar un primer acercamiento al grado de comprensión de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, así como a las conexiones que han formado. Así pues, describimos que tipo de participantes serán clasificados en cada uno de los niveles:

Nivel 1: En este nivel estarán los participantes que tienen ideas imprecisas acerca de la suma y resta de expresiones algebraicas y de suma y resta de fracciones, aquellos quienes se pueda notar la falta de comprensión del tema lo que los haya llevado a cometer errores en los procedimientos realizados y no se note coherencia en las respuestas proporcionadas. Estos participantes han realizado pocas o ninguna de las transformaciones esperadas en la secuencia.

Nivel 2: En este nivel estarán los participantes que hayan realizado de manera correcta las sumas y restas de fracciones, es decir los tratamientos considerados para el registro aritmético; son aquellos que hayan logrado realizar cada uno de los pasos ya sea mediante los dos caminos mostrados o cualesquiera de los dos, lo que implica en primer lugar haber realizado la obtención del común denominador, acomodarlos de manera correcta y realizar las operaciones para llegar al resultado y en caso de ser necesario simplificar la fracción obtenida.

Nivel 3: Se considera en este nivel a los participantes que realicen de manera correcta las conversiones de una representación de un sistema semiótico a otro, en este caso serán las conversiones consideradas entre los registros verbal, aritmético, algebraico y figural, mismas que se han especificado en el capítulo anterior. Cabe mencionar que para llegar a este nivel no bastará con haber realizado una de las conversiones, si no la mayor parte de ellas; además de que la fuerza de conexión estará dada con base en las veces que han realizado la conversión, pues eso dará evidencia de que se ha logrado o no la transformación requerida.

Nivel 4: En este nivel se encontrarán los participantes que hayan logrado realizar articulaciones entre los registros considerados, es decir se refiere al ir y venir entre esos registros de representación, en el caso de esta secuencia esta dado principalmente por los participantes que hayan logrado interpretar el enunciado de la actividad en una expresión matemática y una vez obtenido el resultado haberlo interpretado en el contexto del problema. Dentro del proceso de solución del problema se considera una articulación más, entre el registro algebraico y el aritmético.

Nivel 5: Para esta secuencia no se considera este nivel.

De acuerdo con las cinco actividades de la secuencia didáctica propuesta y con el análisis de resultados realizado en el capítulo anterior se procede a elaborar una tabla (tabla 8) para mostrar la cantidad de tratamientos y conversiones totales que se deben realizar en toda la secuencia didáctica.

Tabla 8

Cantidad de tratamientos y conversiones en la secuencia didáctica

	Veces que se presenta la conversión o el tratamiento
RV→RAl	1
RAl→RAr	2
T1Ar	3
T2Ar	4
T3Ar	3
T4Ar	2
TAr	1

RAr→RAl	1
RAr→RV	2
RAl→RV	2
RF→RAl	1
RV→RF	1

Con la finalidad de clasificar a cada uno de los participantes en los niveles de comprensión propuestos por Hitt (1998) se presenta la tabla 9, en la que se puede observar los tratamientos y conversiones mencionados en la tabla 8 y la cantidad de veces que los participantes han pasado por ellos. Así mismo se muestra en la tabla 10 las articulaciones (el ir y venir entre registros de representación) que realizaron cada uno de los participantes, esto en relación con su clasificación en el nivel 4; considerando que la articulación RV↔RAl, debe presentarse en dos ocasiones en la actividad 5.

Tabla 9.

Tratamientos y conversiones realizadas por cada uno de los participantes

	RV→RAl	**RAl→RAr**	**T1Ar**	**T2Ar**	**T3Ar**	**T4Ar**	**TAr**	**RAr→RAl**	**RAr→RV**	**RAl→RV**	**RF→RAl**	**RV→RF**
P1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
P2	1	1	2	4	2	2	0	1	2	1	1	1
P3	1	0	2	4	2	1	0	1	2	1	1	1
P4	1	2	3	4	3	2	1	0	2	1	1	1
P5	0	2	3	4	3	1	0	0	2	1	1	0
P6	1	1	3	4	3	2	0	1	1	0	1	1

Tabla 10

Articulaciones realizadas por los participantes

	RAl↔RAr	**RV↔RAl**
P1	0	0
P2	1	0
P3	0	1
P4	0	0
P5	0	0
P6	1	0

De esta manera la clasificación de los participantes por niveles de comprensión se hará de acuerdo con los tratamientos y conversiones realizadas por cada uno de ellos, quedando de la siguiente manera.

P1 quedaría ubicado en el nivel 1, dado que las respuestas que mostro dan señal de que podría tener ideas confusas acerca de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, pues solamente fue capaz de realizar de manera satisfactoria uno de los tratamientos, así como únicamente dos de todas las conversiones que se esperaban en la secuencia didáctica.

P2 se ubica en el nivel 4 de comprensión, dado que realiza al menos una de las articulaciones propuestas RAl↔RAr, pues en la actividad 5, a partir de las expresiones algebraicas formadas fue capaz de realizar el proceso aritmético y volver a articular una expresión algebraica. Realiza casi todos los tratamientos de manera correcta, así como también la mayoría de las conversiones pensadas, por lo que ha superado los niveles 2 (que se centra en los tratamientos realizados) y 3 (con base en las conversiones realizadas), para lograr llegar al nivel 4 con una fuerza débil de conexión.

P3 alcanza el nivel 4, sin embargo, la fuerza de conexión es débil, dado que realiza una de las articulaciones propuestas RV↔RAl, esto al lograr en primer lugar interpretar al menos una parte del problema de la actividad 5, para obtener la expresión algebraica formada, y al regresar al contexto del problema con un comentario oral (mismo que se expuso en el análisis de respuestas a actividad 5), al finalizar la secuencia. De la misma manera que P2, P3 realiza la mayor parte de tratamientos y conversiones por lo que se considera que ha superado los niveles 2 y 3.

Por su parte a P4 se le ha clasificado en el nivel 3, con una fuerza de conexión fuerte dado que ha realizado todos los tratamientos propuestos de manera correcta y la mayoría de las conversiones de manera correcta, pero al no haber realizado ninguna de las articulaciones no alcanza el nivel 4.

En el caso de P5, a pesar de ser un caso especial en la preparatoria abierta, requirió una participación muy activa por parte de la asesora (investigadora), y que se le guio en las primeras cuatro actividades; se ha ubicado en el nivel 3, dado que realiza casi todos los tratamientos en el registro aritmético, y la mayoría de las conversiones esperadas para la secuencia didáctica. Se puede notar que en la actividad 5 (única que resuelve por su cuenta) realiza casi todos los tratamientos que eran necesarios para llegar a la respuesta sin embargo le faltan la mayoría de las conversiones, por lo que su fuerza de conexión en este nivel 3 se considera débil.

Finalmente, P6 queda ubicado en el nivel 4 de comprensión con fuerza de conexión débil, pues realiza una de las articulaciones propuestas al operar, en la actividad 5, de manera correcta la expresión matemática obtenida y articular los resultados aritméticos para formar nuevamente la expresión algebraica final, RAl↔RAr, esta articulación corresponde a la ida y vuelta entre los registros algebraico y aritmético.

El nivel en el que se ha clasificado a cada uno de los estudiantes de preparatoria abierta se puede observar en la figura 68, en la que se nota que un participante ha obtenido el nivel 1, dos han logrado el nivel 3 y 3 han logrado caer en el nivel 4, las conexiones que se forman pueden ser débiles o fuertes como se ha descrito en los párrafos anteriores.

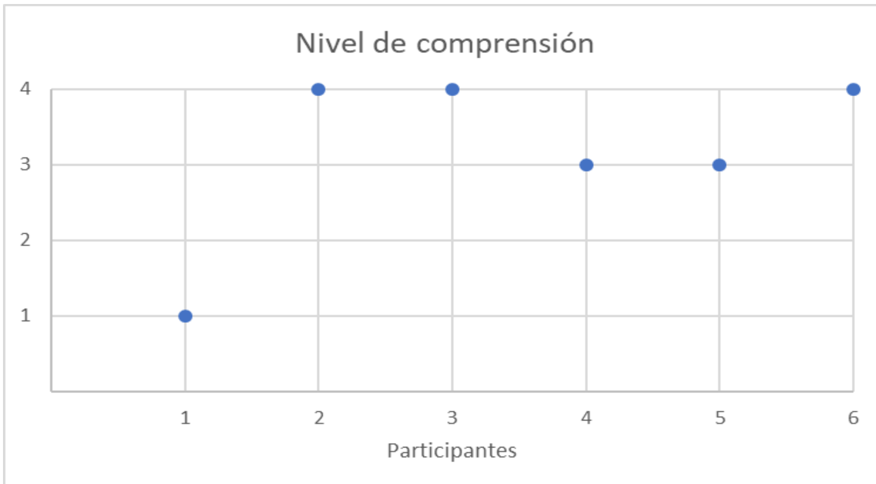


Figura 68. Niveles de comprensión obtenidos. Fuente: elaboración propia

Entre más conexiones tenga una red de representación mayor será la comprensión, y por ende mayor será el grado de visualización alcanzado por el estudiante de preparatoria abierta; al realizar la red ideal con las conexiones propuestas en la concepción obtenemos la que se muestra en la figura 69.

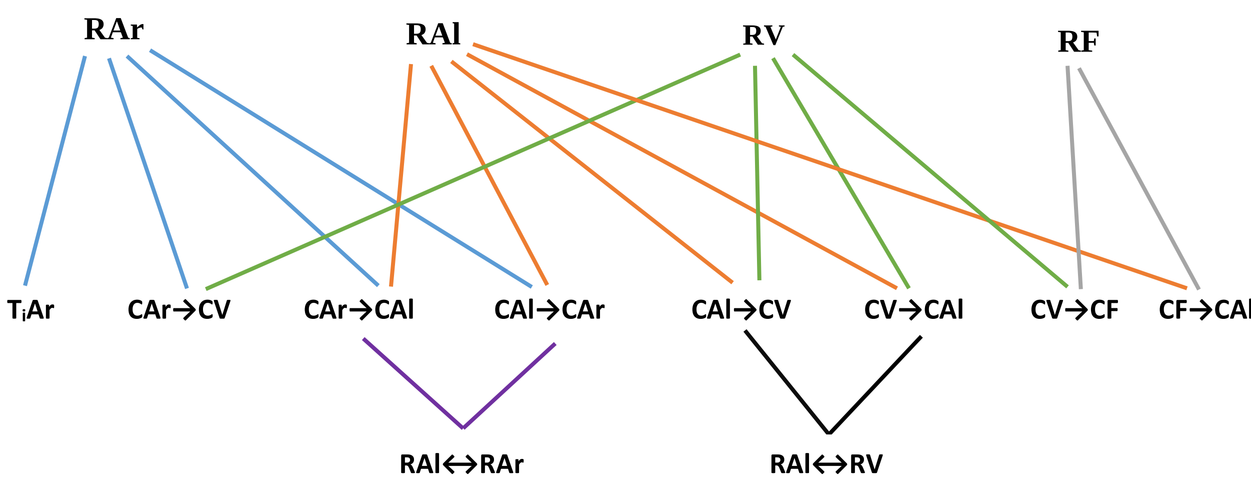


Figura 69. Red de representación ideal con el total de conexiones

Enseguida se muestran las conexiones que forman las redes de cada uno de los participantes en la secuencia didáctica aplicada en preparatoria abierta.

Para P1 se tiene la red que se muestra en la figura 70, en la que se puede observar que a pesar de haber quedado en el nivel 1, ha realizado dos conversiones, con una red débil.

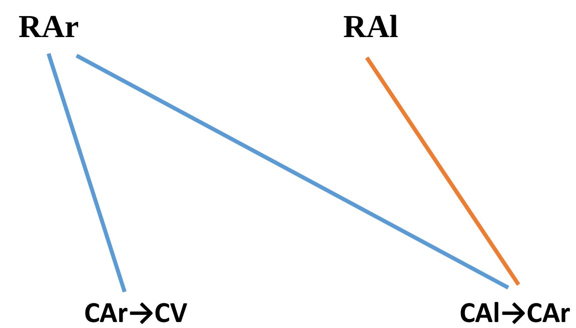


Figura 70. Red formada por P1

Para el caso de P2 quien quedo ubicado en el nivel 4 su red mostrada en la figura 71 se puede observar que al menos en una ocasión logro realizar todas las conversiones propuestas; además de que realiza una de las dos articulaciones propuestas por lo que queda ubicado en dicho nivel (nivel 4).

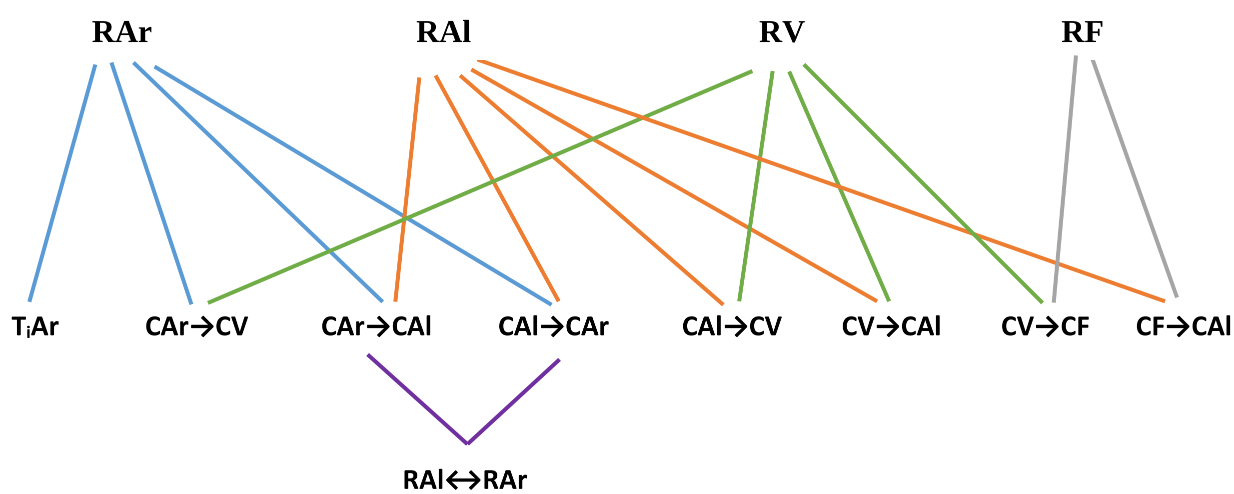


Figura 71. Red de representación asociada a P2

En P3 se observa una red (figura 72) en la que realiza la mayoría de las conversiones y que al realizar una de las articulaciones ha quedado ubicado en el nivel 4.

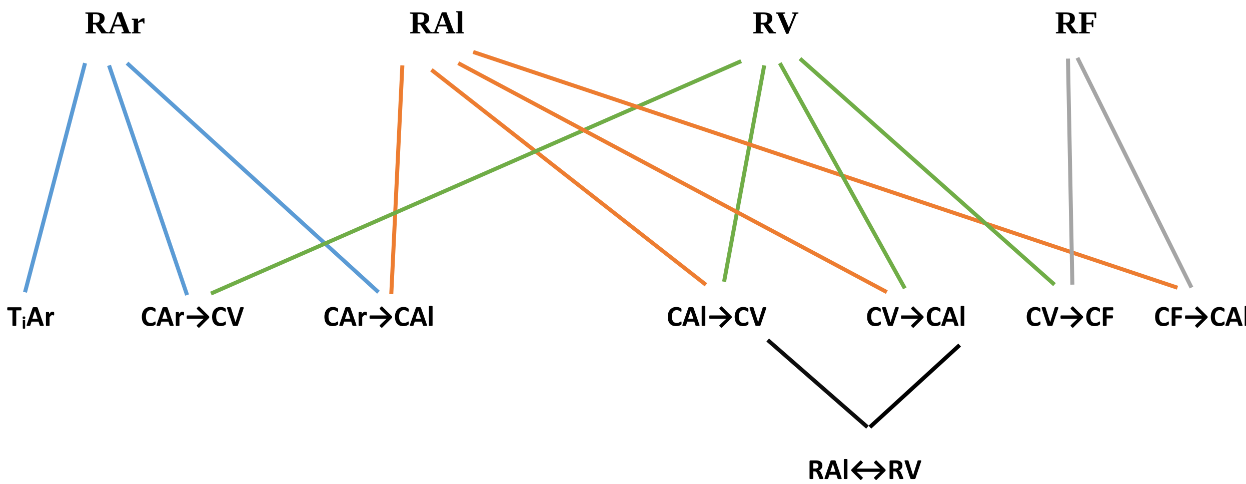


Figura 72. Red de representación asociada a P3

A continuación, se presenta la red que se ha formado en P4, figura 73, quien quedo ubicado en el nivel tres, este no logra alcanzar el nivel 4 dado que no fue y vino entre dos registros de representación.

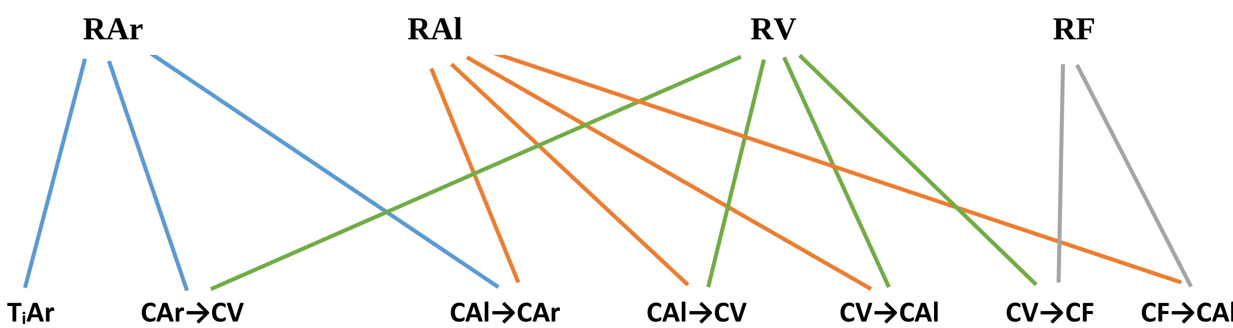


Figura 73. Red de representaciones formada por P4

De la misma manera en la figura 74 se observa la red de representaciones para P5, sin olvidar que se trata del caso particular. Este participante ha quedado ubicado en el nivel 3, pues no logra realizar ninguna de las articulaciones esperadas.

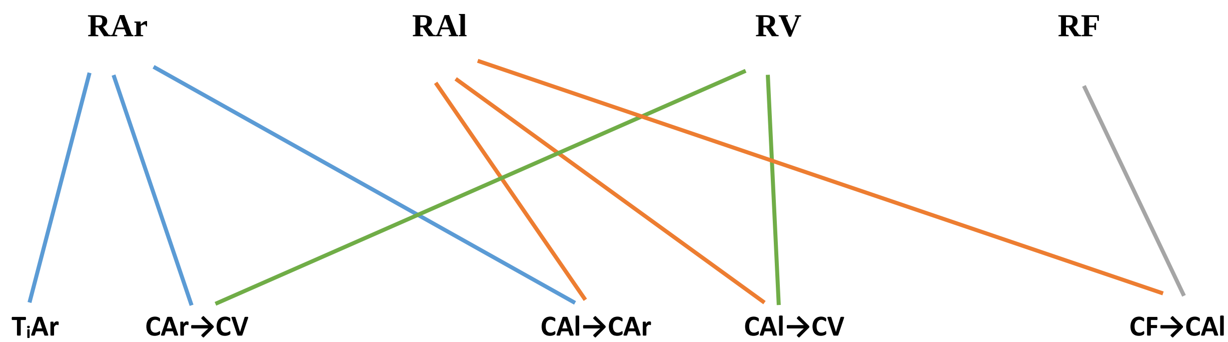


Figura 74. Red de representación asociada a P5

Finalmente, P6 es uno de los participantes ubicado en el nivel 4, y su red de representaciones quedaría como se muestra en la figura 75.

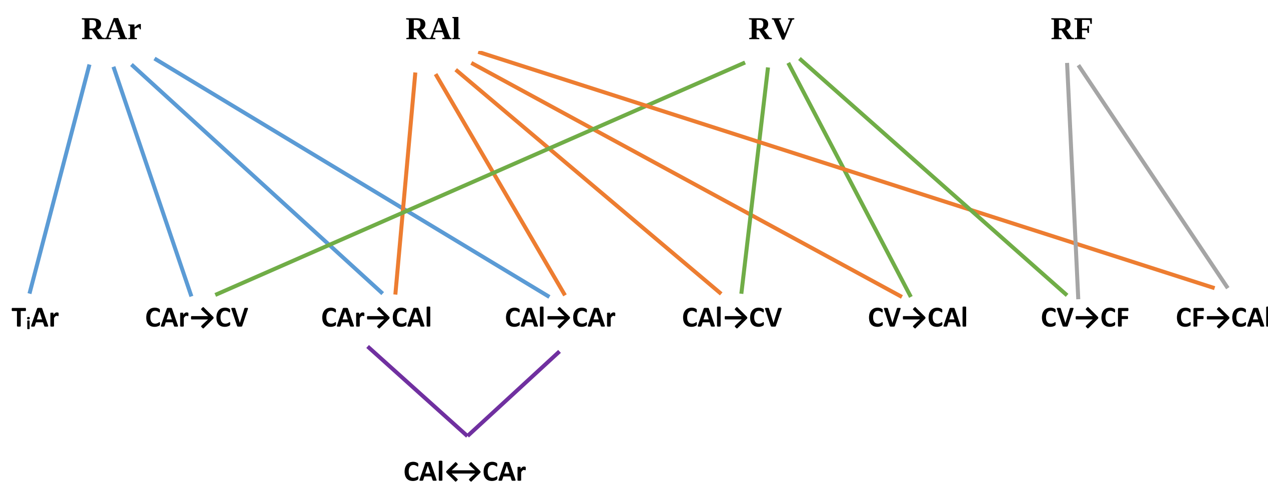


Figura 75. Red de representación para P6

Sin olvidar que cada uno de los participantes que han quedado en el nivel 4, lo han hecho con conexiones débiles pues sus articulaciones son pocas, considerando las que se tenían planeadas. Se puede observar que las redes de P2 y P6 son las redes con la mayor cantidad de conexiones en comparación con la red planteada como ideal, y de acuerdo con lo que expresan Hiebert y Carpenter (1992, citados en Hitt, 2000) que entre mayor sea la cantidad y la fuerza de las conexiones mejor será el grado de comprensión logrado; por lo que en teoría P2 y P6 son quienes han logrado un mayor grado de comprensión, y con ello mayor su nivel de visualización para la secuencia didáctica propuesta.

Validación. En este apartado se muestra una tabla comparativa (tabla 11) entre lo esperado en el análisis *a priori* y lo encontrado en el análisis *a posteriori*, generado a partir de los resultados arrojados por los participantes de preparatoria abierta.

Tabla 11

Confrontación entre análisis a priori y a posteriori

Lo esperado (análisis a priori)	**Lo logrado (análisis a posteriori)**
Actividad 1	
Que el participante describa la relación que existe entre los pasos expresados de manera **verbal** y **aritmética**	En general los estudiantes de preparatoria abierta fueron capaces de identificar el proceso que se estaba llevando a cabo y plasmarlo de manera **verbal**. Esta actividad fue la base para el desarrollo de las siguientes cuatro, fue en la que se mostró el contenido matemático
Que el participante describa por lo menos una forma en la que se obtiene el denominador de la expresión matemática	La mayoría de los estudiantes fueron capaces de identificar que en uno de los procesos se estaban multiplicando los denominadores, sin embargo, para el caso de la obtención del mínimo común denominador requirieron apoyo por parte de la investigadora para la comprensión del proceso llevado a cabo
Actividad 2	
Que el participante interprete el procedimiento **gráfico** para un problema de reparto de pastel	Planteado en la actividad 2, en la que se pretendía mostrar un proceso gráfico para realizar una resta de fracciones relacionada con un reparto de pastel, en este caso consideramos que la mayoría de los estudiantes lo visualizaron, y solamente a uno de ellos (el caso particular) se le explicó de manera verbal, la solución del problema correspondiente a esta actividad se podría visualizar fácilmente por medio de la gráfica que representaba el pastel
Que el participante identifique el paso faltante y sea capaz de plasmarlo	La mayoría de los estudiantes se pudo percatar que el paso faltante hacía referencia a los productos cruzados de numeradores y denominadores, únicamente un participante mostró una idea confusa al mezclar el proceso gráfico con el proceso aritmético, por lo que plasmó operaciones incoherentes.
Actividad 3	
Que el participante identifique los datos faltantes para la obtención del mínimo común denominador	Cuatro de los seis participantes realizaron esto de manera correcta pues identificaron el elemento que falta y realizaron el cálculo

	correctamente para el mínimo común denominador.
Que el participante identifique correctamente los datos faltantes en los espacios en blanco	Se hace para la obtención de los numeradores de la nueva fracción que representa la resta. Lo realizaron correctamente los mismos cuatro participantes que obtuvieron el común denominador en el rubro anterior.
Actividad 4	
Que el participante identifique y exprese la manera de eliminar paréntesis y agrupar términos semejantes **algebraicament**e	Para el caso de eliminación de paréntesis la mitad de los participantes identificaron qué se requiere para determinar la operación que deben realizar con los términos. En el caso de la agrupación de términos semejantes se consideró que lo identificaron correctamente 4 de los 6 participantes, incluso hay quienes ya plasmaron la relación en el contexto del problema.
Que el participante sea capaz de llenar los espacios en blanco con el dato correspondiente de acuerdo con el procedimiento mostrado	Para la actividad 4 se plantean espacios en blanco en los que se debe completar con el dato correcto, en el que a pesar de algunos errores (las fracciones incorrectas) la mayoría lo realiza correctamente.
Que el participante complete la respuesta verbal en el contexto de cada uno de los problemas	Las cuatro actividades consideran el completar una respuesta verbal dentro del contexto del problema, la mayoría los completó correctamente, esto se propone como base para la solución expresada en el contexto del problema que realizarán en la actividad evaluativa.
Que el participante describa de manera **verbal** cada uno de los pasos realizados para faldas y sacos	Cuatro de los seis participantes describieron cada uno de los pasos llevados a cabo para realizar la resta que correspondía a faldas y sacos, una por medio del mcd y la otra mediante productos cruzados.
Actividad 5	
Que el participante identifique los datos del problema	La mayoría de los participantes no tiene problema para identificar los datos que necesitan para dar respuesta a las preguntas que se les plantean.
Que el participante extraiga las expresiones **algebraicas** que han de ayudar en la solución del problema, a partir de la observación de las **figuras** mostradas	A partir de la figura que indica los datos que se necesitan para obtener el perímetro todos supieron que debían sumar cada término algebraico con su semejante, esto para la primera parte del problema. Sin embargo, en la segunda parte se encontraron varios errores pues no se obtenía de manera correcta la

	expresión algebraica que indicaba una resta de áreas.
El participante opere de manera correcta los datos que se obtienen, es decir, agrupe y reduzca los términos que resulten semejantes, utilizando la suma y resta **aritmética** de fracciones	En este caso se puede notar que casi todos los participantes realizaron este proceso cometiendo un error al momento que reducir un término semejante negativo asociado a una resta, lo que los lleva a obtener un resultado erróneo. Cabe mencionar que únicamente uno de los participantes logra superar este error y encuentra una respuesta a la operación aritmética correcta.
El participante obtenga una expresión **algebraica** resultado de las operaciones realizadas	Considerando las dos partes de que consta la actividad 5, en la primera parte todos identificaron que había que realizar una suma con los términos mostrados en la figura por lo que obtienen la expresión algebraica que representa los metros que hay que poner de cimientos. Sin embargo, en la segunda parte cometen un error aritmético (la resta de un número negativo) al momento de restar las expresiones algebraicas que representan el área, los hace llegar a la mayoría (excepto 1) a una expresión algebraica errónea para este apartado.
El participante interprete el resultado de manera **verbal** en el contexto del problema	A pesar de haberlo intentado fomentar en las cuatro primeras actividades, la mayor parte de los estudiantes dejaron expresada la respuesta de manera algebraica, sin embargo, uno de ellos le preguntó a la investigadora acerca de la interpretación que él daba de esta expresión en el contexto del problema, acerca de las medidas utilizadas por el ingeniero para conocer el área de la vivienda.

Como se puede observar en la tabla 11, así como en las figuras de cada una de las redes de representación mental de los participantes, la mayoría de los estudiantes lograron realizar numerosas conexiones entre las representaciones semióticas que se consideraron en cada una de las actividades (excepto uno, en el que se pudo notar completo desinterés al momentos de la aplicación de la secuencia en el departamento de preparatoria abierta); sin embargo también se puede notar que las conexiones en varios de los casos no son fuertes, puesto que esos participantes no lograron pasar por esas conexiones las veces suficientes para darle mayor fortaleza. Así mismo esto da idea del porque quedó de esa manera la clasificación en los niveles y del porque se habla de fuerza de conexión dentro de los niveles de comprensión propuestos por Hitt (1998).

En el siguiente apartado se describen las conclusiones a las que se puede llegar a partir de los resultados obtenidos y de los análisis realizados en el presente capítulo; principalmente con la finalidad de corroborar si se cumplió el objetivo general, así como los particulares planteados al principio de esta práctica de desarrollo profesional.

CONCLUSIONES

Coincidimos con autores como Ávila (1993, 2003) en cuanto a la problemática que existe alrededor de la enseñanza en la educación para adultos y con ello la preparatoria abierta, dado que nuestra experiencia en este contexto educativo nos ha llevado a un interés especial hacia este tipo de estudiantes, y en la que se ha podido corroborar la necesidad de propuestas de materiales centrados en fomentar el autoaprendizaje de los temas matemáticos. Este contexto hace que la mayor responsabilidad de enseñanza recaiga sobre esos materiales, lo que a su vez implica interés por el correcto diseño de ellos.

Por todo lo anterior, nos propusimos diseñar una secuencia ah-doc, que consta de cinco actividades y que toma como base la visualización matemática para fomentar la comprensión de la suma y resta de fracciones en primer lugar, para posteriormente transitar a los procesos de suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.

El diseño de la secuencia didáctica utilizó esquemas que, por medio de la visualización matemática buscaron fomentar la comprensión del tema propuesto, mientras que haciendo uso de la ingeniería didáctica como metodología de investigación pudimos realizar una validación interna del mismo.

La secuencia fue validada mediante una prueba piloto, para después llevarla a su implementación en el ambiente real de preparatoria abierta. Posteriormente se analizaron las conexiones entre las representaciones generadas, lo que nos permitió determinar los niveles de comprensión y las redes de representación mental formadas por cada uno de los estudiantes de preparatoria abierta que participaron en la implementación de la secuencia.

Con base en los niveles de visualización alcanzados, podemos concluir que la metodología utilizada permitió que el diseño de la secuencia contará con elementos que dieron pauta para la comprensión de los procesos mostrados en cuanto a la suma y resta de fracciones; lo que indica que lograron visualizar el tema, por lo mismo consideramos que puede servir como herramienta para el apoyo en el autoaprendizaje de los estudiantes de preparatoria abierta en la comprensión de la suma y resta de expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios.

Creemos además que la visualización matemática ha servido como herramienta en nuestro diseño y que podría contribuir de manera positiva en el autoaprendizaje de las matemáticas en estudiantes de educación abierta, de tal manera que este solo recurra al asesor en caso de tener dudas concretas, pues esta es la forma en la que se desarrolla una sesión de matemáticas en preparatoria abierta.

También consideramos que el utilizar representaciones semióticas ha servido como una herramienta importante, que ha permitido que la visualización de estas tenga efecto positivo en la comprensión del tema matemático propuesto en esta práctica de desarrollo profesional.

Dentro del análisis encontramos también que las limitaciones de nuestra propuesta radican principalmente en que se atienden únicamente la parte de la suma y resta de fracciones con distinto denominador, y la identificación de términos semejantes, dejando por un lado las operaciones entre fracciones impropias y del mismo denominador, así como leyes de los signos. Así mismo pudimos notar que una limitación importante es que no logramos fomentar la conexión del ir y venir entre el registro verbal y algebraico, pues se podría decir que en general los estudiantes no lograron realizar esta conexión lo que a su vez afecta su red de representación mental y con ello el nivel de comprensión alcanzado.

A manera de mejoras para la secuencia didáctica creemos que sería bueno dividir en dos opciones las últimas dos actividades puesto que se podría estar obligando a estudiar los dos procesos de sumar y restar fracciones, siendo que podrá utilizar el que más haya comprendido o más le haya gustado; de esta manera la primera propuesta es presentar dos tipos de solución para esas actividades, en la que puedan escoger el procedimiento que ellos desean reforzar. Incluso consideramos que puede funcionar como actividad complementaria para cuando se aborda este tema en los libros de preparatoria abierta, se podría proponer como actividad en casa.

Así mismo en la actividad “pastel para todos” se podría diseñar una parte en la que se pueda aplicar el método gráfico para la solución de algún problema dado que en este diseño solo se consideró mostrarlo como una alternativa más, pero sin realizar alguna evaluación al respecto; considerando que para completar la solución verbal para el problema podrían hacer uso de la solución analítica o gráfica.

También creemos que el esquema propuesto para la actividad 3, El tropiezo de Rosalba, se podría mejorar en el sentido de que quede más entendible y se retome cada uno de los elementos que se tomaron en cuenta en las actividades 1 y 2; como por ejemplo dejar espacio para todos y cada uno de los pasos que se deben seguir. Así mismo para fomentar que el participante proponga una respuesta verbal en el contexto del problema, probablemente si agregamos en las respuestas verbales que nosotros hemos redactado la palabra “solución” al principio del enunciado nos beneficiaría; esto para que al momento de proponer la solución en la actividad 5 no se queden con la idea de una expresión matemática.

REFLEXIÓN FINAL COMO PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El interés por la realización del presente proyecto, incluso por el estudio en esta maestría, nace a partir de mi experiencia como docente en preparatoria abierta, lugar en el que se atienden estudiantes de diferentes edades y con diferentes niveles de conocimiento matemático, pero con un fin en común, concluir sus estudios de bachillerato. En este sistema no se hace diferencia entre si el estudiante es recién egresado de secundario o es una persona que lleva años sin haber estudiado, sin embargo, considero que los libros están diseñados de acuerdo con lo que se investiga alrededor de los sistemas abiertos en nuestro país, como lo son primaria y secundaria. Aspecto que en un inicio me costó trabajo comprender y analizar dado que no encontraba claramente la relación con la educación para adultos.

Es por esto por lo que en un principio pensaba en utilizar como enfoque teórico la Teoría de Situaciones Didácticas, pero con eso lo que podía hacer era modificar la dinámica de trabajo de esta modalidad de educación, cosa que como asesor preocupado no me serviría de nada para mejorar mi práctica, pues podría crear un escenario que no era real en preparatoria abierta.

La dinámica de una clase en preparatoria abierta es algo distinta a la de una clase normal; en primer lugar, no es el profesor quien presenta los contenidos, pues los materiales que se utilizan, principalmente libros, son los que contienen toda la información que necesita el estudiante para prepararse para el examen de la materia; en segundo lugar, el profesor funge como guía, incluso no se llama profesor sino asesor, el estudiante recurre a él con dudas concretas acerca de la materia. Los grupos de estudiantes que acuden a asesorías varían en cantidad pues como puede asistir uno pueden asistir más de cinco, cursando diferentes niveles; lo que hace que el asesor organice el tiempo que dedicará a cada uno de ellos pues no puede atenderlos de manera simultánea.

El poder establecer una problemática y un problema a partir de lo que había observado en mi práctica, pero ahora con sustento en investigaciones realizadas previamente también me costó un poco de trabajo; pues mi principal interés era atender un problema en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en preparatoria abierta, pero en la maestría nadie había trabajado acerca de esta modalidad de educación media superior, y les era difícil poder ayudarme en un principio, sin embargo, logramos con la ayuda de mis profesores clarificar todo y se llegó a establecer un problema que gira en torno a la educación abierta.

Fue por todo lo anterior por lo que me costó un poco de trabajo poder adoptar un enfoque teórico que fuera capaz de proporcionarme elementos para poder proponer una secuencia de actividades diseñadas de acuerdo con el contexto que se vive en preparatoria abierta, debía adaptarme a la dinámica y no adaptar la dinámica para mi beneficio, al platicar con mis asesoras consideramos que la visualización matemática nos podría proporcionar esas herramientas que nos hacían falta para poder diseñar la propuesta de secuencia dado el contexto y la forma de trabajo, pues con ella no se consideraba que debíamos tener el desarrollo de una clase normal, además de que se ha demostrado que ayuda en la comprensión de las matemáticas y con ello a la resolución de problemas.

Creo que fue debido a que los profesores en la maestría conocen poco del contexto de preparatoria abierta que yo sentía que me iba mal en cada una de las presentaciones de avances de este proyecto, y creo que me hacía falta una explicación más precisa de lo que era la preparatoria abierta y de cómo era su contexto educativo; además de que al elegir tarde mi enfoque teórico me retraso en su estudio y su comprensión. La verdad mis ánimos iban en decadencia, pero estaba segura de lo que quería hacer, así que no baje la guardia y continúe con ello, investigando con mis asesoras leyendo acerca de la visualización, revisando tesis que hubieran utilizado este enfoque teórico, para ver que podría utilizar en mi trabajo que no afectara en nada el contexto educativo e institucional al que iba a dirigir mi diseño.

Creo que esta experiencia de desarrollo profesional me ha enseñado que como profesores debemos buscar herramientas que apoyen nuestras actividades de clase sin importar el tiempo que nos lleve o nuestro contexto y el material del que dispongamos, y creo que la matemática educativa es una buena opción para buscar y encontrarlas, buscando la mejor manera de llevar a la práctica las propuestas que se realizan para mejorar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Ahora bien, quienes nos hemos desempeñado como profesores podemos dar cuenta de las dificultades que la falta de comprensión de un tema tiene, específicamente sobre el aprendizaje de las matemáticas pues sabemos que al abordar un nuevo tema debemos hacer uso de nociones matemáticas previas. De esta manera como profesores debemos tener el compromiso de buscar alternativas de enseñanza para aminorar estas dificultades. Los estudios en torno a la enseñanza aprendizaje del álgebra nos pueden proporcionar recomendaciones para mejorar nuestra enseñanza en esta rama de las matemáticas.

Es por esto por lo que debemos ser docentes comprometidos con la educación, misma en la que el profesor tiene gran responsabilidad pues debemos buscar la manera de formar personas de bien; que se encuentren preparadas para enfrentarse al mundo que existe fuera del aula de clases. Que sean capaces de enfrentar los problemas de la vida diaria con opciones de solución.

Creo que el haber cursado la maestría en matemática educativa abrió mucho mi panorama acerca de la docencia, pues por mi formación tal vez en algún momento llegué a creer que era suficiente con saber matemáticas para poderlas enseñar; sin embargo, al estar impartiendo clase me pude dar cuenta que esa idea si bien tiene fundamento, no es suficiente, pues se requieren muchos más conocimientos; y aunque sobre la marcha se aprenden estrategias de enseñanza yo consideraba que me hacía falta más, necesitaba saber más, prepararme para ofrecer una educación de calidad, y fue debido a eso que decidí ingresar a esta maestría. Lo que ayudó también a mi crecimiento personal.

El poder compartir con mis compañeras y profesores, y a su vez escuchar sus experiencias me ha ayudado también en mi crecimiento profesional, el escuchar sus opiniones, sus consejos, incluso sus críticas, todo pensado en mejorar nuestros trabajos y nuestra práctica como profesores de matemáticas. Llamándolo así como una forma de aprendizaje para adquirir conocimiento que se requiere para ser un profesor de matemáticas eficiente. Así mismo creo que todos los aspectos mencionados me han hecho una persona más crítica, capaz de cuestionar algo que no me convence o en lo que tenga dudas.

Creo que un aprendizaje muy importante que también he obtenido con este trabajo y además con esta maestría es el buscar mejorar. En este proyecto que he llevado a escena no todo sale como uno lo espera, pero por eso se puede mejorar el diseño o incluso la aplicación, creo que por eso estamos experimentando a ver qué sucede, y he aprendido que se puede mejorar y tomando fundamentos de la matemática educativa lograr lo que todo profesor busca, el aprendizaje de sus estudiantes. Por eso hay que perseguir lo que queremos y con dedicación lo podemos lograr.

También considero de mucha importancia que debo ser una profesora preocupada por investigar en mi práctica para localizar mis propios errores y buscar la manera de minimizarlos. He visto en esta maestría que resalta mucho la importancia de vincular la investigación con la práctica docente, y creo que es correcto ya que hay investigaciones que en eso se quedan, en investigaciones, y los problemas reales que aquejan a un profesor dentro del aula a veces ni siquiera son investigados. Creo que también es importante que se respete nuestra postura de enseñanza; también pude notar que cada profesor tiene diferentes estilos de enseñanza y no por eso unos son mejores que otros.

Finalmente creo que algo que puedo rescatar, para el caso de esta práctica de desarrollo profesional, es que considero que la visualización matemática tiene gran potencial principalmente como herramienta que se puede utilizar en preparatoria abierta como apoyo para el aprendizaje de los estudiantes incluso para fomentar el autoaprendizaje. Lo que no considero pertinente utilizar son los análisis a partir de niveles de comprensión, o la formación de redes de representación mental por un asesor, principalmente por el gran tiempo y dedicación que esto requiere, además que en preparatoria abierta no es el asesor quien pone una calificación a sus estudiantes, el asesor debe prepararlos para resolver satisfactoriamente el examen que propone la Secretaria de Educación Pública de este país, para cada una de las materias, siendo así que el asesor debe ayudar en la adquisición los conocimientos necesarios para aprobar matemáticas, considerando cada uno de los factores que se han estudiado acerca del contexto de la preparatoria abierta.

REFERENCIAS

Adame, A. (2016). *Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas. México.

Amador, M., Guzmán, M., Solís, L. y González, R. (2009). *Cuentas útiles. Libro del adulto.* 3ª ed. México. Modelo Educativo para la Vida y el Trabajo.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215-241. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/225216743_The_role_of_visual_representations_in_the_learning_of_mathematics_Educational_Studies_in_Mathematics_523

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Pp. 33-59. Colombia: Iberoamérica.

Ávila, A. (1993). El saber Matemático Extraescolar en los Libros para la Educación de Adultos. *Educación Matemática, 5* (3), 60-77.

Ávila, A. (2003). Matemática y educación de jóvenes y adultos. *Decisio. Saberes para la acción en la educación de adultos. 4,* 5-8.

Aznar, M., Distefano, M., Moler, E. y Pesa, M. (2014). Visualización y conversiones: un estudio aplicado a curvas y regiones del plano complejo. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina.

Ballén, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado* (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Baltazar, C. y Valdemoros, M. (2017). La reflexión como vía de aprendizaje de las fracciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 30*(1), 403-411. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Bello, I. (1999). *Álgebra elemental.* (E. Alatorre, Trad.). México: International Thomson Editores. (Versión original publicada en 1998)

Bishop, A. (2002). Preface. En D. Coben, J. O´Donoghue & G.E. FitzSimons. (Eds.). *Adults Learning Mathematics, Research and Practice* (pp. xi-xiii). United States of America: Kluwer Academic Publisher.

Cabañas, M., Guillén, F. y Galeana, M. (2004). Situaciones didácticas en la comprensión del concepto de número racional en alumnos de nivel medio superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17*(1), 181-187. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Cantoral, R. y Montiel G. (2003). *Visualización y pensamiento matemático*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Coben, D., FitzSimons, G. y O'Donoghue, J. (2002). Chapter I, Introduction. En D. Coben, J. O´Donoghue & G.E. FitzSimons. (Ed.). *Adults Learning Mathematics, Research and Practice* (pp. 1-10). United States of America: Kluwer Academic Publisher

De Agüero, M. (2003). Interpretación y retos de las etnomatemáticas para la educación básica de adultos. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos. 4.* 41-45.

De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, (2).* Recueperado de cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%205.pdf

Delprato, M. (2005). Educación de adultos. ¿Saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? *Relime. 8*(2), 129-144.

Díaz-Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Recuperado de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluación/Factores%20de%20Evaluación/Práctica%20Profesional/Guía-secuencias-didacticas_Angel%20Díaz.pdf

Díaz, M. (2007). Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. & Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socio-epistemología y la visualización en el aula*. (pp. 207-229). México: Díaz de Santos.

Diez, J. (2009). La enseñanza de las matemáticas a personas adultas desde un enfoque didáctico basado en el aprendizaje dialógico. *Enseñanza de las ciencias. 27*(3), 369-380.

Doyle, K., Días, O., Kennis, J., Czarnocha, B. y Baker, W. (2016). The rational number subconstructs as a foundation for problem solving. *Adults Learning Mathematics: An International Journal. 11*(1), 21-42.

Duval R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 5.

Escobar, D., Fuentes, L., Arcia, M. y Amaya, T. (2016). ¿Cuáles son las causas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucran fracciones? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*(1). 217-224. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Fazio, L. y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones.* [Folleto]. National and Kapodistrian University de Atenas, Grecia: STELLA VOSNIADOU. Serie Prácticas Educativas.

Fernández, M., Moreno, E., Ortega, K., Tous, W. y Amaya, T. (2016). Estrategias didácticas: dificultad o fortaleza en el aprendizaje de los estudiantes en el trabajo con fracciones algebraicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*(1). 490-496. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Fernández, N. (2001). Andragogía. Su ubicación en la educación continua. UNAM. 6 pp. Recuperado de www.paginaspersonales.unam.mx/files/275/andragogia.pdf

FitzSimons, G. (2002). Algebra, work and lifelong learning. *Australkian Senior Mathematics Journal 16(1)*. 34-42.

FitzSimons, G., Coben, D. y O'Donoghue, J. (2003). Lifelong mathematics education. En Kenneth L. y Philip, H. (Eds.) *Second international handbook of educational leadership an administration.* (pp. 103-142). United States of America: Springer.

Flores, R. (2011). Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 24*(1). 23-31.

Franco, S. (2012). Enseñanza y aprendizaje del concepto de número racional en estudiantes de grado séptimo, utilizando entornos informáticos. En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1051-1055). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2664/

García, M. (2003). La formación de asesores de matemáticas. Una experiencia en los talleres de formación y actualización de asesores y técnicos docentes del INEA. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos. 4.* 59-63

García, N. (2012). *Representaciones simbólicas y algoritmos.* (1ra ed.). En J. A. Quintanilla & M. Lobatón (Eds.), México: SEP.

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

González, P. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma. 45.* 17-28. Recuperado de http://www.fespm.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Godino, J., Cajaraville, J., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. *30*(2). 163-184.

Godino, J., Giacomone, B., Wilhelmi, M., Blanco, T. y Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Guerrero, D. (2011). *Incidencia motivacional de las estrategias metodológicas aplicadas en la enseñanza de las expresiones algebraicas, en octavo grado, en un colegio de carácter oficial de la ciudad de Manizales.* Tesis de maestría. Universidad de Colombia. Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª, ed.). México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (1998). *Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function*. JMB, Journal of Mathematical Behavior. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de Estructuras Cognitivas. Segunda versión del documento presentado en el Working Group: *Representations and mathematics visualization* del PME-NA22, Tucson, Arizona. 131-147.

Kothari, C. (2004). *Research Methodology. Methods and Thechniques*. New Delhi: New Age International Publishers

Londoño, N., Kakes, A. y Llanes, J. (2015). Dificultades en conceptos matemáticos que impliquen el uso de fracciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 28*(1). 230-237. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Macnab, J., Phillips, L. y Norris, S. (2012). Visualizations in Science and Mathematics. En P. Norris (ed.). *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education.* (pp. 103-122). Rotterdam: Sense Publishers.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE. 13*. 105-134.

Palmas, S. y Block, D. (2014), Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 17*(2). 165-189. Doi: 10.12802/relime.13.1722.

Pérez, M., Rincón, E., y Domínguez, A. (2012). La visualización y el aprendizaje colaborativo en la enseñanza de fracciones. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 717-725). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Pérez, S. (2009). *Modelo Andragógico. Fundamentos*. México: Universidad del Valle de México.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Angel, G. y Paolo, B. (Eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*. (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2008). Spatial Abilities Research as a Foundation for Visualization in Teaching and Learning Mathematics. En P. Clarckson y N. Presmeg (eds.) *Critical Issues in Mathematics Education.* (pp. 83-95). New York: Springer.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, (Ed.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1387/1/Puig2003Historia_SEIEM_97.pdf

Ramírez, L. y Víctor, A. (2010). Educación para adultos en el siglo XXI: análisis del modelo de educación para la vida y el trabajo en México ¿avances o retrocesos?. *Tiempo de educar. 11(21)*. 59-78.

Ríos, Y. (2007), Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *20*(1). México. pp, 270-275.

Rodríguez, F., Navarro, C., Maldonado, E., Romero, J., Vicario, M., Campistrous, L. y Rizo, C. (2016). *Iniciación al álgebra elemental.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Rojano, J. (2008). Conceptos básicos en pedagogía. *Revista electrónica de Humanidades, Educación y Comunicación Social. 4*(3). 36-47.

Rozo, R. (2012). *Limitaciones de los estudiantes de tercer grado de bachillerato con bajo desempeño académico al modelar polinomios a partir de un contexto.* Tesis de Maestría. Universidad Virtual. Escuela de Graduados en Educación. Colombia

Saavedra, G., Gallardo, A. y Espinoza, E. (2016). Números racionales negativos. Interpretaciones formuladas por docentes en formación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 29*(1). 1039-1045. Recuperado de http://clame.org.mx/actas/

Salas, J., Cucunubá, J., Pastor, L y Fernando, N. (2011). Propuesta para la enseñanza de la suma de fracciones desde la representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 24*(1). 615-621.

Sánchez, C. (2003). Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos. 4.* México. 12-16.

Schulmaister, M. (2003). Elaboración de materiales escritos de matemáticas para el aprendizaje a distancia. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos. 4.* México. 46-50.

SEP. (2014). Documento base para el servicio de Preparatoria Abierta. Subsecretaría de Educación Media Superior. México.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico et al. (Ed). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria (*Pp. 125-154). Barcelona: ICE/HORSORI.

Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Torres, C. (2017). Educación para adultos en México, 1976-1981. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. XLVII*(2). 165-200.

UNESCO. La educación de las personas adultas: la Declaración de Hamburgo: la agenda para el futuro. *Conferencia Internacional de Educación de las personas adultas*. 5. 1997, Hamburgo Actas Hamburgo: Unesco, 1997.

Valdemoros, M. y Ruíz, E. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11*(1). 127-157.

Villegas, M. y Zubieta, F. (s. f). *Matemáticas I.* México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Wedege, T. (2010). The problem field of adult learning mathematics. En Griffiths, G. & Kaye, D. (eds.), *Numeracy works for life: Proceedings of the 16th International Conference of Adults Learning Mathematics – A Research Forum (ALM)* (pp. 13-24). London: Adults Learning Mathematics (ALM) and LLU+, London South Bank University.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo 1. Diseño final de la secuencia didáctica

Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemática Educativa (Profesionalizante)

Secuencia didáctica para la Suma y Resta de Expresiones Algebraicas en dos variables con coeficientes fraccionarios

Fecha: ________________ Edad: _________ Género: _____________

Tiempo aproximado que dedica al estudio de las matemáticas: _________

Institución Educativa: _______________________________________

Apreciado estudiante, se le solicita de la manera más atenta que observe y resuelva las siguientes actividades, poniendo especial atención a cada uno de los procedimientos que se están realizando para llegar a la solución del problema planteado.

Recuerde los elementos de una fracción: $\frac{a}{b}$ $a \leftarrow$ Numerador, $b \leftarrow$ Denominador

Actividad 1. EL SEMBRADOR. Juan es un agricultor que año con año siembra frijol, maíz y chile en sus parcelas, las cuales son del mismo tamaño. Este año ha decidido sembrar en una de sus parcelas $\frac{3}{4}$ con chile, mientras que el cuarto restante sembrará maíz y frijol, y en otra $\frac{7}{10}$ con chile y los $\frac{3}{10}$ restantes sembrará frijol.

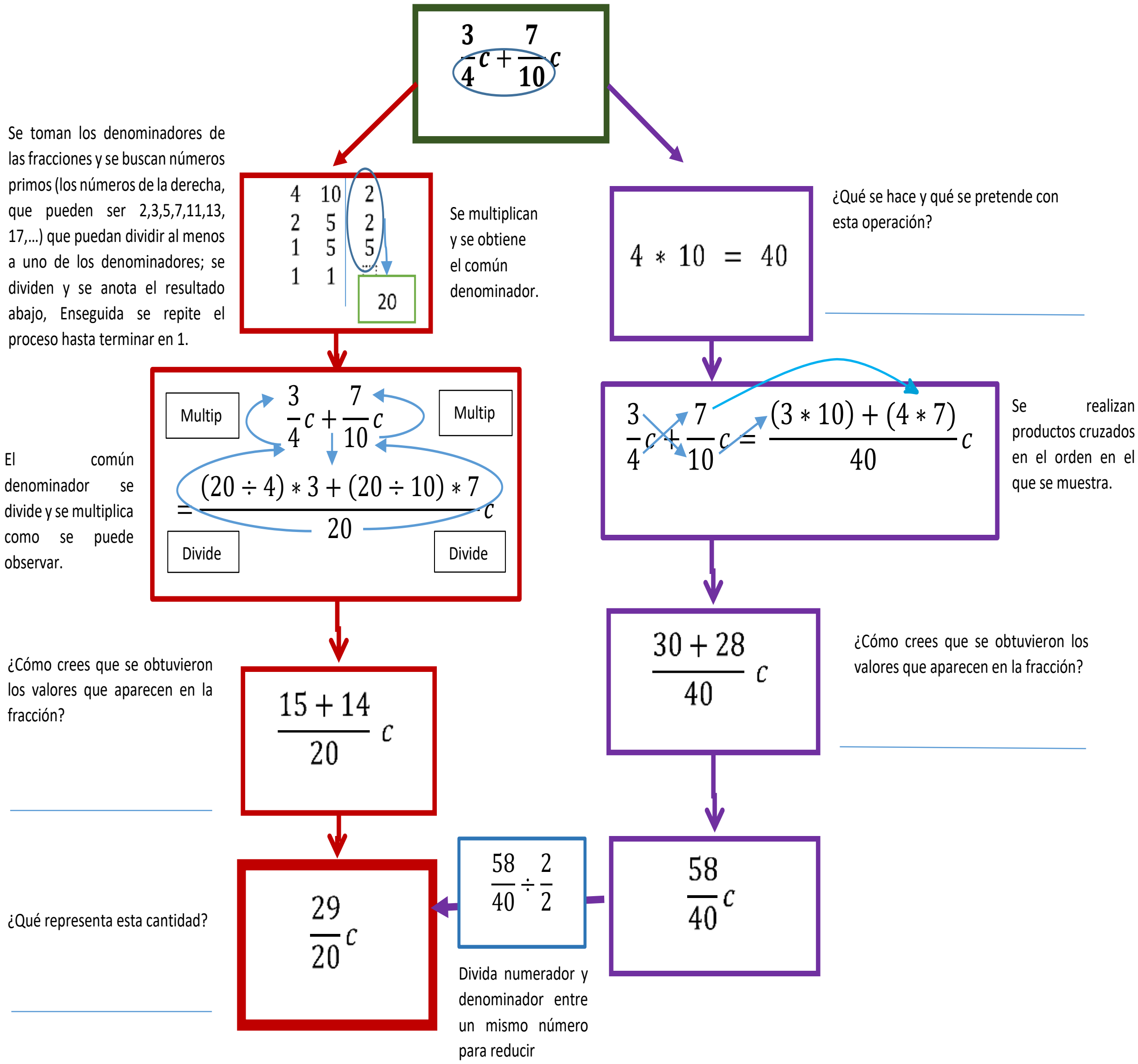
$\frac{3}{4}c$

$\frac{7}{10}c$

¿Cuánto sembrará con chile? y ¿La cantidad que sembrará de chile es más de una parcela? Representemos con la letra "c", la cantidad de chile en una parcela.

A partir de la interpretación del problema llegamos a que la suma de la cantidad de chile sembrada en cada parcela dará como resultado la cantidad total que se sembrará con chile.

De esta manera obtenemos la siguiente expresión matemática, a partir de la cual le describimos con un esquema una manera de resolver el problema mediante dos caminos, cada columna representa un camino para llegar al resultado, obsérvelos cuidadosamente por separado llene las líneas en blanco.



Juan sembrará ___________ con chile.

La cantidad que sembrará de chile es (menor, igual o mayor) ___________ de una parcela

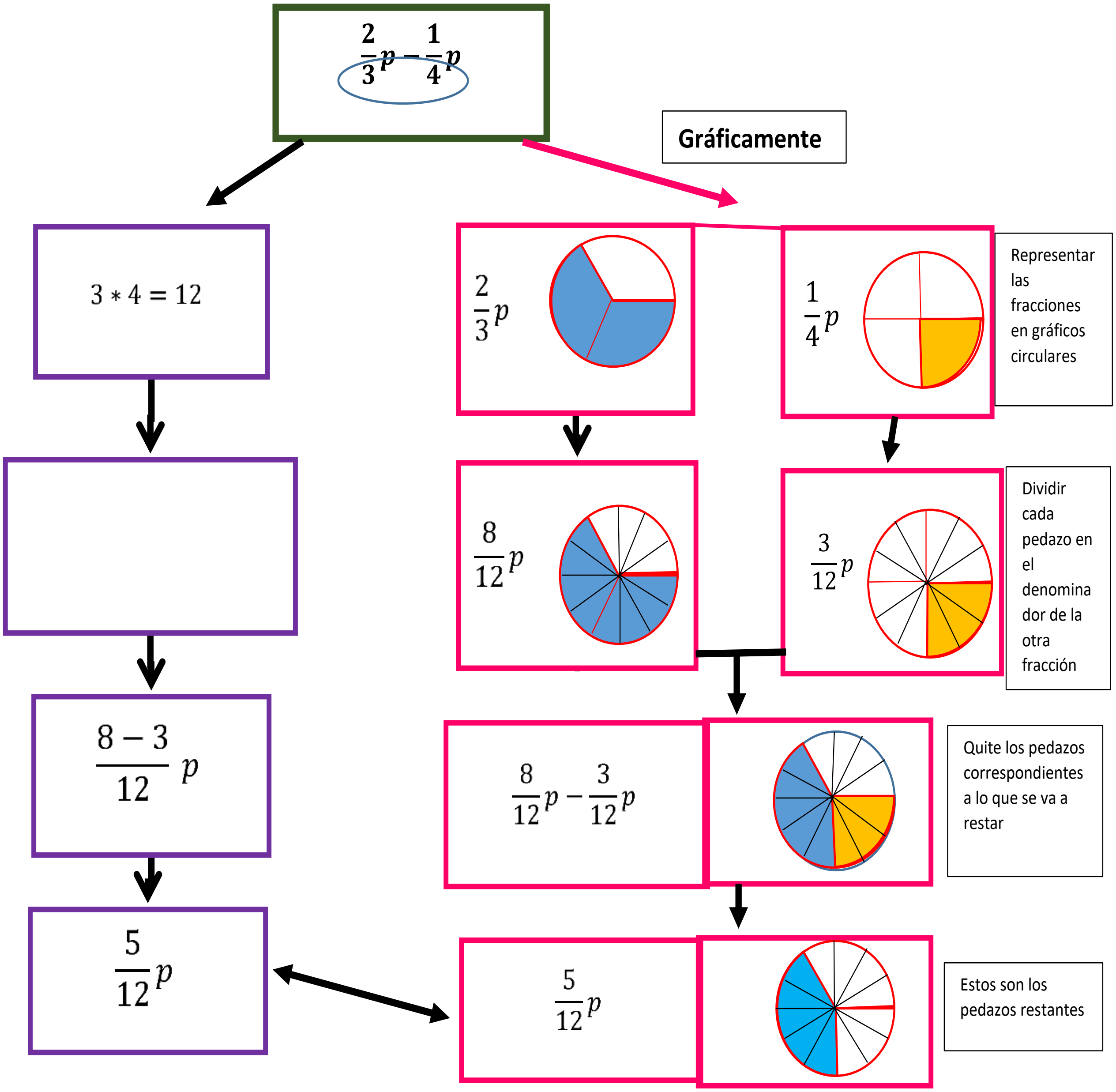
Recuerde que puede resolver la suma o resta de fracciones por el camino que más le haya gustado o se le haya facilitado. Ambos consisten en buscar un denominador común. ¡Y se obtiene la misma respuesta!

Actividad 2. **PASTEL PARA TODOS**. Doña Hermila hizo pastel para vender en la escuela.

Ella sabe que con una tercera parte del pastel recupera lo que invirtió en los ingredientes. Además de que en casa se le pidió dejar la cuarta parte de pastel para la cena de esa noche. Sabiendo esto Doña Hermila sacará su ganancia de los $\frac{2}{3}$ que quedan menos $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Cómo haría doña Hermila para poder particionar el pastel en pedazos iguales y cuántos de esos pedazos representan su ganancia? Enseguida le mostramos un diagrama en el que puede observar dos maneras de buscar la respuesta a la pregunta planteada. Incluimos uno que ya se ha revisado y le mostramos como se podría hacer con una gráfica circular que represente el pastel elaborado por Doña Hermila.

Iniciamos con los $\frac{2}{3}$ de pastel que podrá disponer pues ya se nos dijo que con la tercera parte recupera lo que invirtió, así pues, a lo que le quedó debe quitarle lo que usará en casa, $\frac{1}{4}$. Obteniendo lo que le sobra como el pedazo del que obtendrá su ganancia. Complete el esquema.

Tenga en cuenta que al resolver un problema gráficamente, se puede volver un proceso muy tedioso y tardado entre más grandes sean los denominadores.



Deberá partir el pastel en ________ rebanadas de las cuales las últimas __________ darán su ganancia.

Actividad 3. **EL TROPIEZO DE ROSALBA.** Rosalba lleva a vender al mercado $\frac{3}{4}$ de un garrafón con leche de su rancho. En el camino se tropieza y se le derraman $\frac{5}{18}$ de garrafón con leche. Vuelve al rancho por $\frac{2}{9}$ más de garrafón, pues era con lo que contaban hasta el momento. Si "g" representa un garrafón lleno con leche, ¿Qué expresión representa la cantidad que llevó a vender Rosalba finalmente al mercado? A continuación, le mostramos una manera de llegar a la respuesta, se le pide que llene los espacios vacíos con la cantidad que le corresponda.

En este **esquema** mostramos los cálculos que hay que hacer, teniendo en cuenta la cantidad que tenía en un principio, le restamos lo que se derramó y finalmente volvemos a sumar la cantidad por la que regreso.

Iniciemos por partes, realizando la resta primero

$$\frac{3}{4}g - \frac{5}{18}g + \frac{2}{9}g$$

$$\frac{3}{4}g - \frac{5}{18}g$$

4	18	2
2	9	2
1	$\square$	3
1	3	3
1	1	$\square$

$$(\square \div 4) * \square$$
$$(\square \div \square) * 5$$

$$\frac{27 - 10}{36}g$$

Este es nuestro primer resultado

$$\frac{17}{36}g$$

Ahora sumemos los $\frac{2}{9}$ de garrafón que aún nos faltan

$$\frac{17}{36}g + \frac{2}{9}g$$

$$\frac{17 + \square}{36}g$$

$$\frac{25}{36}g$$

Así, la cantidad de leche que llevó a vender finamente Rosalba al mercado fue de ______ de garrafón.

Recuerda que cuando tengas más de dos fracciones por sumar y/o restar puedes hacerlo por pares, utilizando el procedimiento que desees de los dos que se han estudiado.

Actividad 4. **LOS TRAJES DE DON FERMÍN.** Don Fermín es un reconocido sastre de la colonia en la que vive. Se le pidió que elaborara algunos trajes para una empresa, los cuales consistirían en falda y saco. Se le ha pagado por su elaboración cierta cantidad de dinero, de la cual se destinaron distintas cantidades al pago de las faldas y de los sacos, $\frac{3}{8}$ fueron destinados al pago de faldas y $\frac{5}{8}$ al pago de los sacos. Así mismo se dio cuenta que había gastado $\frac{3}{10}$ en la tela para las faldas y $\frac{7}{12}$ en la de los sacos. Observe la expresión matemática y los procedimientos que usó Don Fermín para obtener la ganancia de faldas y de sacos (f= faldas y s= sacos). Recuerde que la ganancia se puede obtener restándole al ingreso el gasto. ¿Cuál será la expresión a la que llegó don Fermín y que representa su ganancia? Llene los espacios vacíos.

De la misma manera que en los problemas anteriores le mostramos mediante un esquema la manera en la que se puede llegar a la respuesta. En este caso tomamos en cuenta en primer lugar el dinero destinado para el pago, para restar lo que se había gastado.

Recuerde que la reducción de términos semejantes en una expresión algebraica consiste en sumar (o restar) los coeficientes que acompañan a la misma letra. Y que al eliminar paréntesis debe conocer la ley de los signos.

$$\frac{3}{8}f+\frac{5}{8}s-\left(\frac{1}{10}f+\frac{7}{12}s\right)$$

Observa detenidamente. ¿Qué les pasó a los términos dentro del paréntesis?

____

____

Eliminación de paréntesis

$$\frac{3}{8}f+\frac{5}{8}s-\frac{1}{10}f-\frac{7}{12}s$$

¿Por qué cree que se agrupan los que tienen letra "f" y los que tienen "s"?

____

____

____

$\frac{3}{8}f-\frac{1}{10}f$	$\frac{5}{8}s-\frac{7}{12}s$

8	$\square$	2
4	5	2
2	5	$\square$
1	5	5
1	1	

$\square$

$$\frac{(40\div 8)*3-(40\div 10)*1}{\square}f$$

$$\frac{15-4}{\square}f$$

$$\frac{\square}{40}f$$

$$\square * 12 = 96$$

$$\frac{5*\square - 8*\square}{96}s$$

$$\frac{\square-56}{96}\square$$

$$\frac{4}{96}s$$

$$\frac{1}{\square}s$$

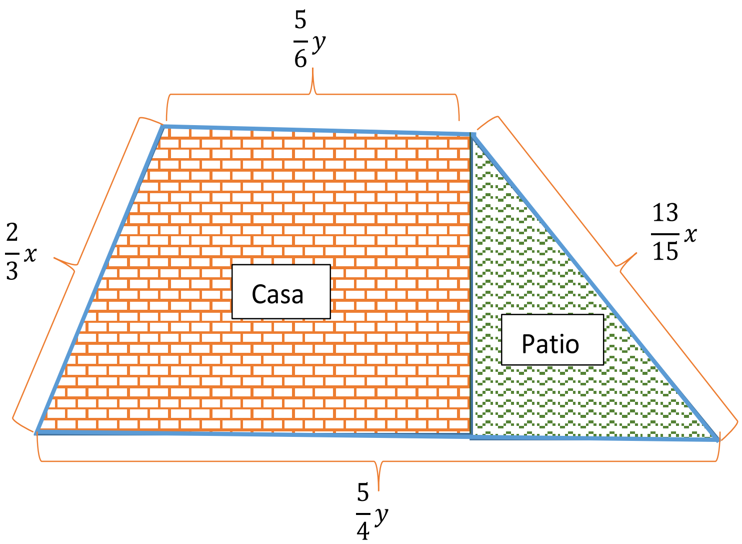
$$\frac{11}{40}f+\frac{1}{\square}s$$

Explique el procedimiento para las faldas.

Explique el procedimiento para los sacos.

La ganancia de Don Fermín queda expresada por ________________, en términos de faldas y sacos.

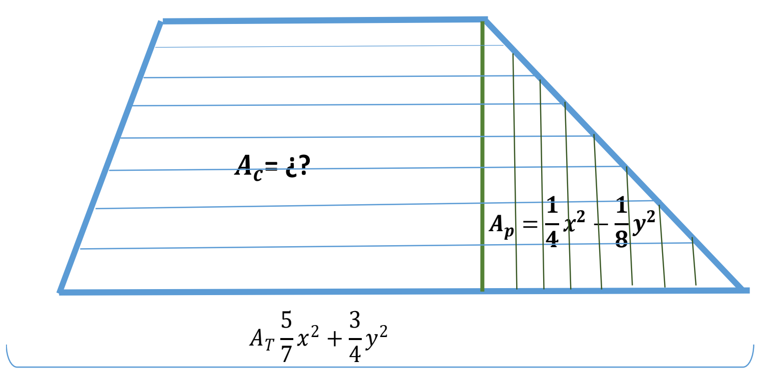
Actividad 5. EL PATRIMONIO DE CARMEN Y ROGELIO. Carmen y Rogelio se piensan casar pronto y decidieron comprar un terreno con sus ahorros para comenzar a formar su patrimonio. El terreno tiene forma particular, como se muestra en la figura. Destinando los espacios marcados para la casa y el patio, cuyas medidas se especifican en la misma figura. Donde x y y son medidas que utiliza el ingeniero, en metros.



Observando la figura y sabiendo que antes de construir deben poner cimientos, empezando por los de alrededor del terreno. El albañil que realiza este trabajo cobra por metro que construya. Obtenga la expresión de los metros que deben pagar Carmen y Rogelio por poner cimientos alrededor del total del terreno.

Solución: ____

Además, deben comprar el material que necesitan para poner un firme. Conocen el área total del terreno y el patio, pero en su patio no pondrán firme pues quieren sembrar pasto. ¿Para qué área deben comprar el material para el firme? Encuentre la expresión matemática que representa el área de la casa, A_c.



Solución: ____

Recuerde que puede utilizar uno de los dos procedimientos que se han mostrado. Tenga en cuenta también que solo puede simplificar cantidades con la misma letra y exponente.

Simplifique sus resultados.

Finalmente nos gustaría que nos proporcione una amplia opinión acerca de las actividades que le hemos propuesto.

¡Gracias!

Anexo 2. Rubrica de las actividades

Actividad 1				
	Identifica la obtención del común denominador	Identifica de dónde se obtienen las cantidades de la operación	Interpreta la respuesta en el contexto del problema	Presenta nociones de magnitud de fracciones
P1	No, ¨se pretende reducir”	Si, “con el procedimiento anterior”	Si, “la cantidad sembrada”	No, “igual”
P2	Si, “se multiplican los denominadores para obtener el denominador”	Si, por un lado: “se divide el común denominador por el denominador y el resultado se multiplica por el numerador”; por otro lado: “multiplicando el numerador por el denominador y el denominador por el numerador”	No, “el resultado de la división”	Si, “mayor”
P3	No, “multiplica”	Si, por un lado: “se dividieron paréntesis que multiplico después con numero de afuera”; por otro lado: “multiplico productos cruzados dando 30+28 de cada una”	Si, “la cantidad que sembrará de chile”	Si, “mayor”
P4	Si, multiplicando lo de abajo	Si, por un lado: “divide el denominador con la operación”; por otro lado: “multiplica cruzado”	Si, “el chile”	Si, $\frac{29}{20} = 1\frac{9}{20}$
P5 (caso particular)	Si, “multiplico los denominadores”	Si, por un lado “sumando los numeradores” por otro “multiplicación en las fracciones”	No, “numerador y denominador, resultado da”	Si, “mayor”
P6	Si, “común denominador”	No, en blanco	No, en blanco	Si, “mayor”

Actividad 2			
	Identifica el proceso faltante	Realiza el proceso faltante	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	Si	No, $\frac{8}{12}c + \frac{3}{12}c = \frac{96+28}{142}$	No, $\frac{8-3}{12}$; $\frac{5}{12}$

P2	Si	Si, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{(2*3)-(3*1)}{12}$	Si, 12; 5
P3	Si	Si, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{(2*4)-(3*1)}{12}$	No, $\frac{5}{12}$; 5
P4	Si	Si, $(2*4)-1*3$ $\frac{8-3}{12}$	Si, 12; 5
P5 (caso particular)	Si	Si, $(\frac{2}{3})-(\frac{1}{4})=\frac{(8)-(3)}{12}$	Si, 12 y 5
P5	Si	Si, $\frac{2}{3}p-\frac{1}{4}p=\frac{(2*4)-(3*1)}{12}$	Si, 12 y 5

Actividad 3				
	Obtiene el mínimo común denominador	Identifica el proceso de obtención de los numeradores	Obtiene el numerador faltante	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	No, en la celda faltante escribe “6”	No, $(3\div 4)*36$; $(2\div 9)*5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$
P2	Si	Si, $(36\div 4)*3$; $((36\div 18)*5$	No, 2	Si, $\frac{25}{36}$
P3	No, obtiene la mitad de 9	No, $(36\div 4)*2$; $(36\div 3)*5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$
P4	Si	Si, $(36\div 4)*3$; $(36\div 18)*5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}g$
P5 (caso particular)	Si	Si, $(36\div 4)*3$; $(36\div 18)*5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$
P6	Si	$(36\div 4)*3$; $(36\div 18)*5$	Si, 8	Si, $\frac{25}{36}$

Actividad 4											
	Identifica el proceso de eliminación de paréntesis	Identifica la agrupación de términos semejantes	Obtiene el mínimo común denominador	Identifica la posición del denominador obtenido	Realiza la resta de numeradores	Completa el producto de denominadores	Encuentra las cantidades faltantes	Encuentra la literal	Simplifica la fracción	Explica cada procedimiento realizado	Completa la respuesta en el contexto del problema
P1	No, “estaban sumando o pasaron restando”	Si, “para que se reduciera”	No, las primeras filas deben representar los denominadores, y escribe 6	Si, colocado bajo la fracción, 40	Si, 11	Si, 8	No, debe expresar los productos cruzados. Escribe la misma cantidad	No, 4	No, 96	No, en blanco	Si, aunque la expresión matemática encontrada es incorrecta, $\frac{11}{40}f + \frac{1}{96}s$
P2	No, “se convirtieron en positivos”	Si, “porque cada grupo corresponde al producto (falda y saco)	No, obtiene un factor 3 que no corresponde	Si, aunque el denominador encontrado es erróneo	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	No, $\frac{4}{96}$	Si, $\frac{1}{24}$	Si, para el primer proceso: “buscamos el común denominador, dividimos y multiplicamos el común denominador, restamos el resultado de las operaciones anteriores”; para el segundo proceso: “multiplicamos los denominadores, multiplicamos el	Si, $\frac{11}{40}f + \frac{1}{24}s$

										numerador por el denominador y viceversa, restamos los resultados para obtener la fracción, dividimos entre 4 cada uno para obtener el resultado”.	

P 3	No, “cambiaron de signo por la eliminación”	No, “igualdades”	Si, 40	Si	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	Si, “s”	Si, el resultado de su división es errónea sin embargo se identificó que se debía dividir entre 4. $\frac{1}{23}$	Si, en el primer proceso: “se busca el numero primo de los denominadores para que los divida, después se dividen denominadores con lo que salió de los números primos para ser multiplicados con numeradores. Se restan y tenemos $\frac{11}{40}$; en el segundo proceso: “se multiplica el denominador, directo, después de multiplica cruzado. Después se resta numeradores después se divide numerador y denominador por números iguales $\frac{4}{96} \div \frac{4}{4} = \frac{1}{23}$	No, en blanco
P 4	Si, “se hacen – “	Si, “porque representa el	Si, 40	Si	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	Si, “s”	Si, $\frac{1}{24}$	Si, primer proceso: “use el denominad	Si, $\frac{11}{40}f + \frac{1}{24}s$

		traje y faldas”								or 10, $\frac{divide\ y\ multip}{40}$ Simplificar y 15-4=11”; el segundo proceso: “multiplique el denominador, cruzado $\frac{x}{x}$ $\frac{x}{x}$ Bajé la letra y lo dividí entre 4”	
P5 (caso particular)	Si, “se hicieron resta”	Si, “sumar misma letra”	Si, 40	Si	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	Si, “s”	Si, $\frac{1}{24}$	Si, el primer proceso: “encontró número muy común, se divide por abajo y multiplica por arriba, hacer las cuentas”; para el segundo: “multiplicar denominadores, multiplicar la de arriba por el numerador, restar el resultado de los numeradores, buscar número que divide el numerador, y el resultado del proceso”	No, en blanco

P 6	Si, "para determinar signos"	Si, "para separar los gastos de cada prenda"	Si, 40	Si	Si, 11	Si, 8	Si, 12 y 7	No, 4	Si, $\frac{1}{24}$	No, en blanco	Si, $\frac{11}{40}f + \frac{1}{24}s$

Actividad 5										
	Identifica los datos del problema de acuerdo con la explicación y con la figura	Obtiene la expresión matemática para la solución del problema	Realiza la agrupación de términos semejantes para la primera respuesta	Realiza la suma de expresiones algebraicas utilizando uno de los procedimientos mostrados	Simplifica la expresión encontrada	Interpreta la respuesta en el contexto del problema	Obtiene la expresión a partir de la explicación y datos en la figura presentada	Realiza la agrupación de términos semejantes para la segunda respuesta	Realiza la resta de expresiones algebraicas utilizando uno de los procedimientos mostrados	Interpreta la respuesta en el contexto del problema
P 1	Si	Si, $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$; $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si, $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$; $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si, $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x = \frac{30+39}{45} = \frac{69}{45}x$; $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y = \frac{20+30}{24} = \frac{50}{24}$	No	No, $\frac{69}{45}x + \frac{50}{24}y$	No	No, $\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y$; $\frac{7}{5}x + \frac{3}{4}y$	No, dado que realizó la agrupación errónea	No, $\frac{12}{12}xy + \frac{13}{1}xy$
P 2	Si	Si, $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$; $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$	Si	Si, utilizando la obtención del mínimo común denominador	Si	No, $\frac{25}{12}y + \frac{23}{15}x$	Si	No, existe un error al encontrar la resta de un número negativo. $\frac{5}{7}x^2 - \frac{1}{4}x^2$ $\frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^2$	Si, Utiliza la obtención del mínimo común denominador	No, $\frac{13}{28}x^2$ $\frac{10}{16}y^2$
P 3	Si	Si, $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si	Si, utiliza los productos cruzados	No, simplifica correctamente una	No, $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si	Si, $\frac{5}{7} - \frac{1}{4}x^2$	Si, utiliza productos cruzados, sin embargo, comete dos	Si, a pesar de que el espacio

		$\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$			parte, pero en la otra cree que se pueden dividir por 2 y no se puede	$\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$		$-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}y^2$	errores de cálculo, al multiplicar 7 por 4 y al querer realizar la resta con el número negativo	destinado para ello se encuentra en blanco, al momento de realizar la entrega de sus respuestas a la secuencia hace un comentario acerca de la expresión final del área, cómo haría pues el ingeniero para utilizar la respuesta obtenida
P4	Si	Si, $\frac{5}{6} + \frac{5}{4}y$ $\frac{2}{3} + \frac{13}{15}x$	Si	Si, utiliza productos cruzados, con error de cálculo al	Si	No, $\frac{25}{12}y + \frac{23}{10}x$	No	Si, $\frac{5}{7} - \frac{1}{4}x = \frac{13}{28}x$	Si, utiliza productos cruzados, sin embargo, se olvida que las	No, en blanco

				multiplicar 3*15				$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}y = \frac{7}{8}y$	letras utilizadas serán cuadradas.	
P5 (caso particular)	Si	Si, $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$ $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si	Si, utiliza productos cruzados $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x = \frac{30+39}{45} = \frac{69}{45}x$; $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y = \frac{20+30}{24} = \frac{50y}{24}$	No	No, en blanco	No	Si, aunque al no interpretar de manera correcta el problema, realizo las operaciones en otro sentido.	No, con las operaciones que obtuvo realiza los productos cruzados, sin embargo, esas no son las operaciones requeridas para solucionar el problema	No, en blanco
P6	Si	Si, $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x$ $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y$	Si	Si, a través del mínimo común denominador. $\frac{2}{3}x + \frac{13}{15}x = \frac{10x + 13}{15} = \frac{23}{15}x$ $\frac{5}{6}y + \frac{5}{4}y = \frac{20+30}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}y$	Si	No, $\frac{23}{15}x + \frac{25}{12}y$	Si, $\frac{5}{7}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}y^2$	No, existe un error al encontrar la resta de un número negativo. $\frac{5}{7}x^2 - \frac{1}{4}x^2$ $\frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^2$	Si, utiliza un método de los vistos al realizar la resta, pero va cargando con el error del signo	No, en blanco