

# Análisis temporal de imágenes de franjas en técnicas ópticas de medición

José de Jesús Villa Hernández,  
Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales,  
Unidad de Ingeniería Eléctrica, UAZ, Zacatecas, Zac.-C.P. 98000.  
TEL: +(492)9239407, ext. 1518, correo-e: [jvillah@cantera.reduaz.mx](mailto:jvillah@cantera.reduaz.mx)

José A. Gómez Pedrero,  
Departamento de Óptica, Facultad de C. Físicas  
Universidad Complutense de Madrid,  
Ciudad Universitaria s/n, C.P. 28040 Madrid

Juan A. Quiroga Mellado  
Departamento de Óptica, Facultad de C. Físicas  
Universidad Complutense de Madrid,  
Ciudad Universitaria s/n, C.P. 28040 Madrid

**Resumen** — El análisis de imágenes de franjas, que es de fundamental importancia en una gran cantidad de métodos ópticos de medición, en muchas ocasiones puede presentar dificultades como puede ser la presencia de altos niveles de ruido, la falta de una señal portadora o la presencia de discontinuidades en la cantidad física a medir. Estas dificultades en muchas ocasiones pueden ser disminuidas en gran medida si se utilizan técnicas temporales de análisis de franjas. En el presente trabajo se hace un resumen de un conjunto de nuevas técnicas temporales de análisis de franjas así como algunos resultados de sus aplicaciones.

**Abstract** — A fundamental task in most optical measurement techniques is the so called fringe pattern analysis. Often this task is difficult with the presence of high noise-levels, when a carrier frequency is missing or when the physical quantity to be measured is discontinuous. Many times these problems can be alleviated by using temporal fringe pattern analysis. In this work a review of new temporal fringe pattern algorithms is made and some results of their applications are presented.

*Palabras clave* — *Análisis de imágenes franjas.*

## I. INTRODUCCIÓN

La aplicación de técnicas ópticas con propósitos de medición, en la mayoría de las ocasiones, presenta muchas ventajas con respecto a la de otras técnicas. Entre estas ventajas se pueden mencionar las de mayor velocidad, mayor precisión y medición de campo completo; ésta última, que se refiere a que el objeto o cantidad a medir se puede llevar a cabo en todo su campo o extensión de una sola vez, es una de las principales y está relacionada con la adquisición y el procesamiento digital de imágenes de franjas [1].

Uno de los trabajos fundamentales en los métodos ópticos de medición es el llamado procesamiento de imágenes de franjas, que en resumen consiste en analizar una imagen de intensidad que se modela por una función senoidal bidimensional que está modulada por una

función de fase. Esta última, es la función que está relacionada con la cantidad física a medir y cuyos parámetros que la relacionan con dicha cantidad física dependen del tipo de técnica que se esté aplicando. Entre las técnicas más comúnmente usadas se pueden mencionar las de interferometría, interferometría electrónica de patrones de moteado (ESPI o Electronic speckle pattern interferometry), moiré y fotoelasticidad.

En términos generales el problema principal del análisis de franjas consiste en obtener la función de fase que modula a la función senoidal bidimensional. Para el análisis de franjas existe una gran variedad de técnicas descritas en la literatura [1]; sin embargo, en muchos casos, las técnicas tradicionales pueden ser inapropiadas para resolver problemas como la presencia de un alto nivel de ruido, la falta de una señal portadora o la presencia de discontinuidades en la cantidad física a medir. Las técnicas temporales [2-6], sin embargo, pueden en muchas ocasiones resolver este tipo de problemas. Este tipo de técnica consiste en el análisis de la evolución de las franjas de forma temporal al ser variada ya sea la sensibilidad del sistema óptico, o la misma cantidad física a medir.

## II. ANÁLISIS TEMPORAL DE IMÁGENES DE FRANJAS

Considerando una técnica óptica utilizada para medir alguna cantidad física, la distribución de intensidad del patrón de franjas digitalizado a través de una cámara CCD para su posterior proceso en una computadora, puede ser modelada por la siguiente expresión matemática:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\Phi(x, y)], \quad (1)$$

donde  $x$  e  $y$  representan las coordenadas espaciales,  $a(x, y)$  es la iluminación de fondo y  $b(x, y)$  la modulación de amplitud. El campo  $\Phi(x, y)$  representa la fase a recuperar, la cual está relacionada con la cantidad física a ser medida. Muchas técnicas han sido desarrolladas para el análisis de este tipo de imágenes [1], sin embargo, muchas de ellas presentan varios inconvenientes al ser aplicadas debido principalmente a que la fase que entregan está acotada en el intervalo  $-\pi$  a  $\pi$  debido al uso de la función tangente inversa. Por otro lado, estas técnicas convencionales están limitadas a ser usadas sólo cuando el campo de fase es una función suave sin la presencia de discontinuidades. En años recientes, algunas técnicas para la evaluación temporal de mapas de fase han sido desarrolladas. Estas técnicas temporales tienen importantes ventajas sobre las tradicionales técnicas espaciales. Estas ventajas son precisamente la posibilidad de recuperar la fase en forma continua (no acotada en el rango  $-\pi$  a  $\pi$ ) además de que nos ofrecen la posibilidad de ser aplicadas a campos de fase discontinuos.

Para entender a grandes rasgos cómo funcionan las técnicas temporales consideramos que la ecuación (1) la reescribimos ahora como una función con dependencia temporal, esto es

$$I(x, y; t) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\Phi(x, y; t)]. \quad (2)$$

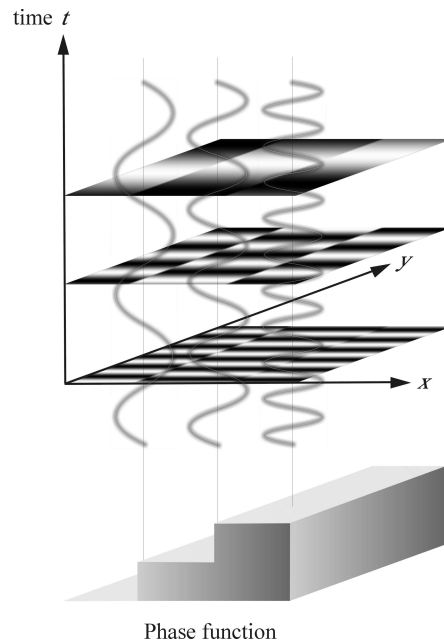
La dependencia temporal puede ser causada por una de dos cosas: por la variación de la sensibilidad del sistema óptico, llevada a cabo intencionalmente por medio de la variación de los parámetros del sistema óptico; o por la variación de la cantidad física que se está midiendo, esto es, la deformación, el esfuerzo etc. Teniendo en consideración lo antes mencionado y olvidando la dependencia espacial de la intensidad, la ecuación puede ser reescrita como

$$I(t) = a + b \cos[\Phi(t)]. \quad (3)$$

Esto significa que analizando punto a punto la variación en el tiempo de la intensidad en la imagen de franjas, podemos determinar el campo de fase sobre toda la imagen. Por ejemplo, en el

caso de que exista una variación lineal de la sensibilidad del sistema óptico, la ecuación (3) será una simple función cosenoidal de frecuencia fija, y el parámetro físico a medir en ese punto será directamente proporcional a dicha frecuencia. De esta manera, el análisis se reduce al trabajo de determinar la frecuencia de la señal unidimensional representada por la ecuación (3), en cada punto de la imagen.

Como se dijo anteriormente, la variación en el tiempo de la intensidad se puede deber también al cambio o evolución de la cantidad física a medir; además, esta variación no necesariamente tiene que ser lineal, por lo que sería necesario aplicar técnicas más sofisticadas para analizar la señal representada por la ecuación (3) y recuperar la función  $\Phi(t)$  en cada punto de la imagen.



**Figura 1** Secuencia de imágenes de franjas al variar la sensibilidad linealmente. Note que la frecuencia de la señal senoidal en cada punto es proporcional a la función de fase

### III. MÉTODOS TEMPORALES DE ANÁLISIS DE FRANJAS

Suponiendo que un conjunto temporal de patrones de franjas a ser procesados pueden ser representadas por la función

$$I(x, y; t) = a(x, y) + b(x, y) \cos\{S(t) \cdot [H(x, y) + X(x)]\} \quad (4)$$

donde sabemos que

$$\Theta(t) = S(t) \cdot (H(x, y) + X(x)) \quad (5)$$

y

$$\Omega = H(x, y) + X(x), \quad (6)$$

donde  $t = 1, 2, 3, \dots, N$ , y ahora en el argumento de la función coseno  $S$  representa la sensibilidad del sistema que varía con el tiempo,  $H$  la cantidad física a ser medida y  $X$  el término que frecuencia portadora en la dirección de  $x$ .

Con el propósito de medir la cantidad física de interés a partir de los datos  $I(t)$ , la sensibilidad se hace variar linealmente de tal manera que  $S(t) = S_0 + \xi \cdot (t - 1)$  en óptimas condiciones como se sugiere en la referencia [2]. Una vez que  $\Theta(t)$  es obtenido de la ecuación (4) usando un algoritmo apropiado, es posible recobrar  $\Omega$  por medio de un ajuste de mínimos cuadrados de la relación  $\Theta(t) = S(t) \cdot \Omega$ . Finalmente,  $H$  se obtiene con  $H = \Omega - X$ .

#### a) Método de Fourier

En este método se obtiene  $\Theta(t)$  en cada píxel por medio de la expresión [2]

$$W[\Theta(t)] = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{\hat{I}(t)\}}{\text{Re}\{\hat{I}(t)\}}, \quad (7)$$

donde  $W[\ ]$  representa el operador de envolvimiento de fase y  $\hat{I}(t)$  la función analítica que se obtiene de la transformada de Hilbert [7] de  $I(t)$ . Finalmente, se debe llevar a cabo un desenvolvimiento de fase unidimensional con el propósito de obtener la fase continua.

#### b) Método de ajuste por mínimos cuadrados a una función cosenoidal

En este método se pretende recuperar la cantidad física de interés minimizando la función [3,5]

$$\text{minimise } U(\Psi) = \sum_{t=1}^N (\cos[\alpha + \beta \cdot (t - 1)] - \hat{I}(t))^2 \quad (8)$$

donde  $\alpha = S_0 \cdot [H + X]$ ,  $\beta = \xi \cdot [H + X]$ ,  $\Psi = [\alpha, \beta]^T$ , y  $\hat{I}(t)$  representa una versión de  $I(t)$  filtrada por un filtro pasa-altas, además, normalizada (i.e.,  $a=0$  y  $b=1$ ).

#### c) Detección síncrona

Siguiendo la misma notación que la ecuación (8), rescribimos la ecuación (4) como [4]

$$I(t) = a + \frac{1}{2} b \exp\{i[\alpha + \beta \cdot (t - 1)]\} + \frac{1}{2} b \exp\{-i[\alpha + \beta \cdot (t - 1)]\}. \quad (9)$$

Multiplicando esta ecuación por  $\exp[i\beta_0 \cdot (t - 1)]$ , donde  $\beta_0$  tiene un valor arbitrario, obtenemos

$$\begin{aligned} I_e(t) = & a \exp[i\beta_0 \cdot (t - 1)] + \frac{1}{2} b \exp\{i[\alpha + \beta \cdot (t - 1) + \beta_0 \cdot (t - 1)]\} \\ & + \frac{1}{2} b \exp\{-i[\alpha + \beta \cdot (t - 1) - \beta_0 \cdot (t - 1)]\} \end{aligned} \quad (10)$$

Eligiendo un valor apropiado para  $\beta_0$  aplicamos un filtro pasa-bajas a la señal representada por esta última ecuación para obtener

$$\hat{I}_e(t) = I_e(t) * h(t) \approx \frac{1}{2} b \exp[-i(\alpha + \beta \cdot (t-1) - \beta_0 \cdot (t-1))] \quad (11)$$

donde  $h(t)$  representa el filtro pasa-bajas y  $*$  la operación de convolución. Finalmente, el conjunto de valores  $\Theta(t)$  pueden ser calculados con

$$\Theta(t) = \tan^{-1} \left( - \frac{\text{Im}\{\hat{g}_e(t) \exp[-i\beta_0 \cdot (t-1)]\}}{\text{Re}\{\hat{g}_e(t) \exp[-i\beta_0 \cdot (t-1)]\}} \right). \quad (10)$$

De igual manera que en el método de Fourier, se debe llevar a cabo un desenvolvimiento de fase unidimensional con el propósito de obtener la fase continua.

#### IV. APLICACIONES

Las técnicas temporales pueden ser aplicadas en una gran variedad de técnicas ópticas de medición. Estas además presentan ventajas con respecto a las técnicas tradicionales, por supuesto, pagando el costo de tener que procesar una mayor cantidad de información. Las aplicaciones que se muestran en el presente trabajo son en: medición automática de potencia de lentes oftálmicas por medio de deflectometría, medición tridimensional de objetos por proyección de luz estructurada y, medición de esfuerzos en objetos transparentes por medio de la técnica fotoelástica.

##### a) *Medición de potencia en lentes oftálmicas*

En esta aplicación se usó el método de Fourier para recuperar la fase de la imagen de franjas. El arreglo óptico para hacer la medición de los mapas de deflexión se muestra en la Figura 2. Para generar las franjas se usó un monitor CCD de computadora para facilitar la variación de la sensibilidad al cambiar la frecuencia de las franjas digitalmente [2,3].

En este caso se usó una lente bifocal con el propósito de ejemplificar la habilidad de procesar campos de fase discontinuos. La Figura 3(a) muestra una de las imágenes de la secuencia temporal. Por otro lado, la Figura 3(b) muestra los resultados de las deflexiones en la dirección  $x$ .

##### b) *Medición tridimensional de objetos por proyección de franjas*

Otra de las aplicaciones de las técnicas temporales es la de medición tridimensional de objetos por proyección de franjas, que es la que se muestra en esta sección. Para este ejemplo se usó el algoritmo de detección sincrona [4]. La Figura 4 muestra el arreglo óptico para llevar a cabo esta aplicación. En este caso se usó un proyector LCD para poder generar los patrones en forma digital y poder variar la sensibilidad del sistema óptico al variar la frecuencia de las franjas proyectadas. La Figura 5(a) muestra la imagen de un objeto bajo prueba con las franjas proyectadas, mientras que la Figura 5(b) muestra la recuperación de la forma del objeto en el área marcada por la línea amarilla de la Figura 5(a).

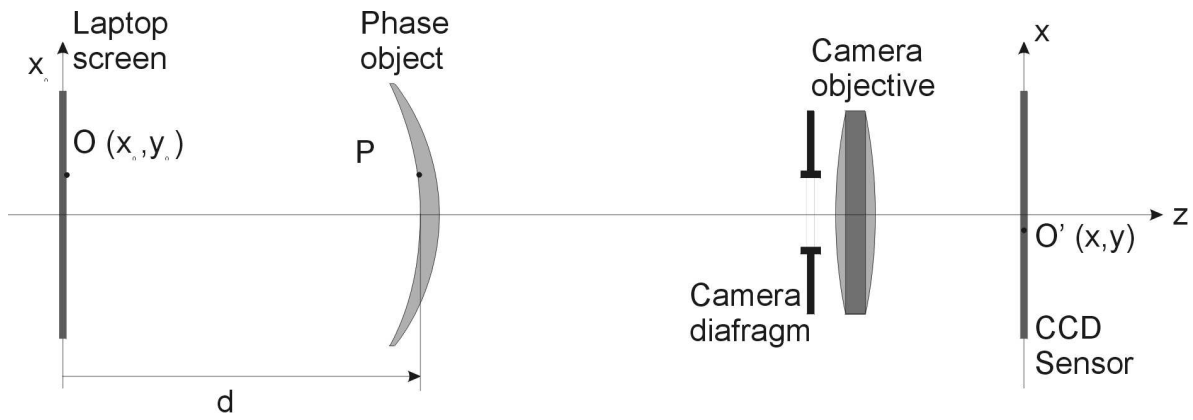


Figura 2.- Arreglo óptico para medir los mapas de deflexiones de una lente oftálmica.

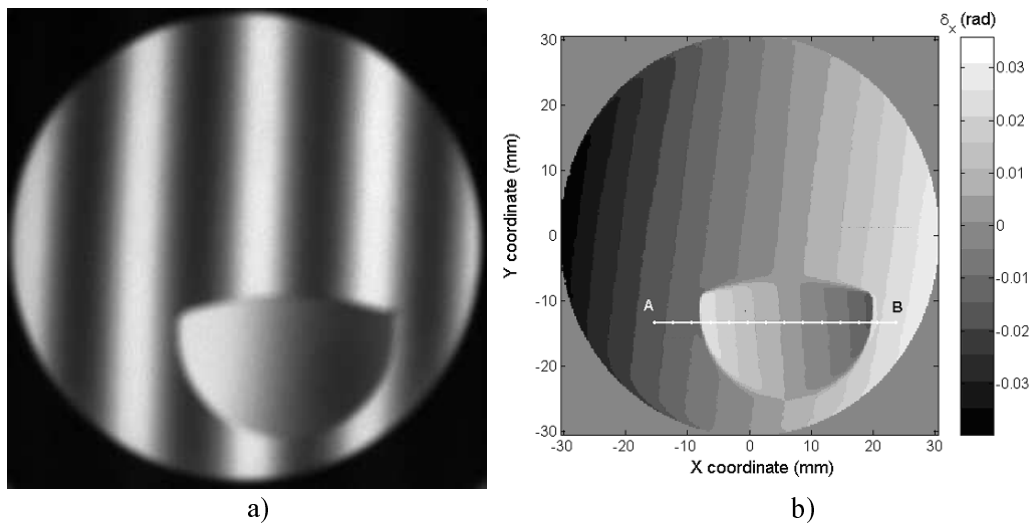


Figura 3.-a) Imagen de franjas para obtener el mapa de deflexiones en una lente oftálmica y b) medición de la deflexión en la dirección x.

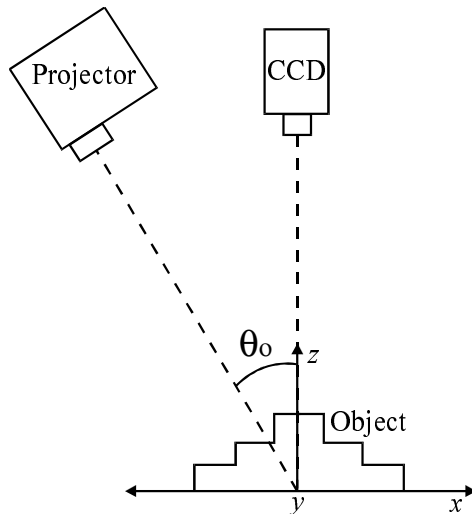
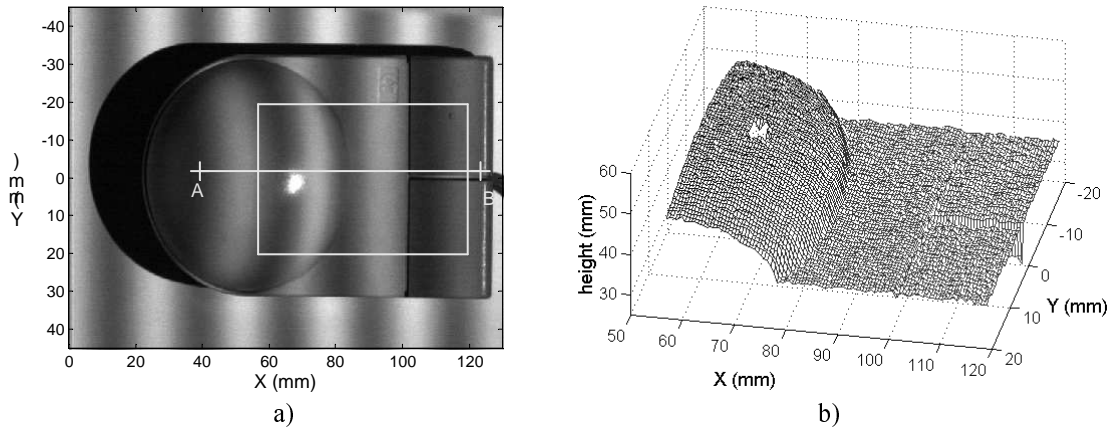


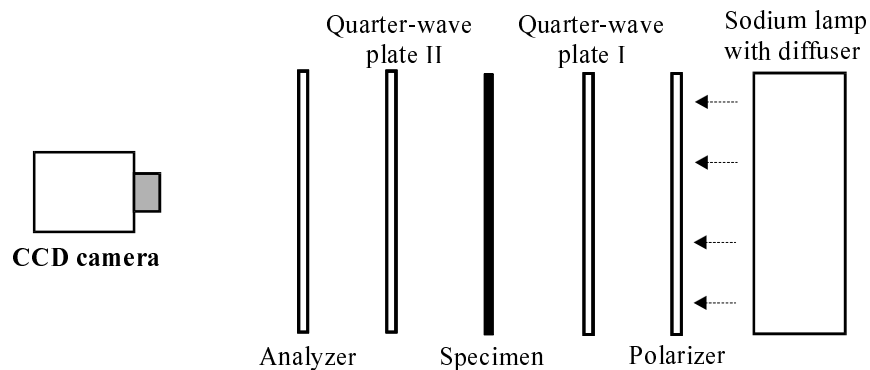
Figura 4. Arreglo óptico para medición tridimensional de objetos por proyección de franjas.



**Figura 5.** a) Imagen de franjas proyectadas sobre un objeto bajo prueba y b) resultado de la medición.

c) *Medición de esfuerzos en objetos transparentes por fotoelasticidad*

Otra de las aplicaciones de las técnicas temporales de análisis de franjas es el de medición de esfuerzos en objetos transparentes por medio de la técnica fotoelástica [5]. Para hacer el análisis en este ejemplo se usó el método de ajuste por mínimos cuadrados a una función cosenoidal. El instrumento necesario para llevar a cabo este tipo de análisis es el muy conocido polariscopio, en este caso en su configuración de polarización circular. El esquema de este instrumento se muestra en la Figura 6. El objeto de prueba para este ejemplo es el que se muestra en la Figura 7. A este se le aplicó una fuerza  $F$  como se muestra en la misma figura. Para llevar a cabo el análisis temporal, se hizo variar la magnitud de la fuerza en forma lineal. Una imagen de la secuencia de franjas de isocromas se muestra en la Figura 8(a), mientras que la Figura 8(b) muestra la recuperación del retardo en fase asociado a los esfuerzos internos de la muestra.



**Figura 6.** Configuración de polariscopio circular para fotoelasticidad.

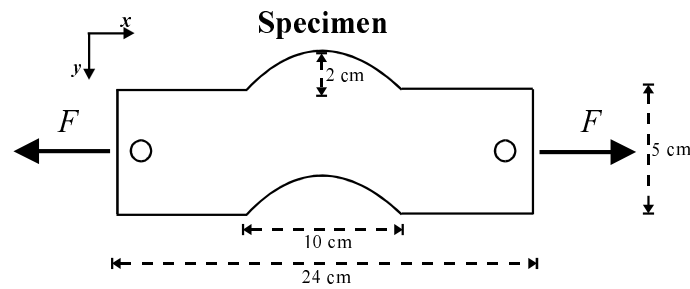


Figura 7. Objeto bajo prueba en fotoelasticidad.

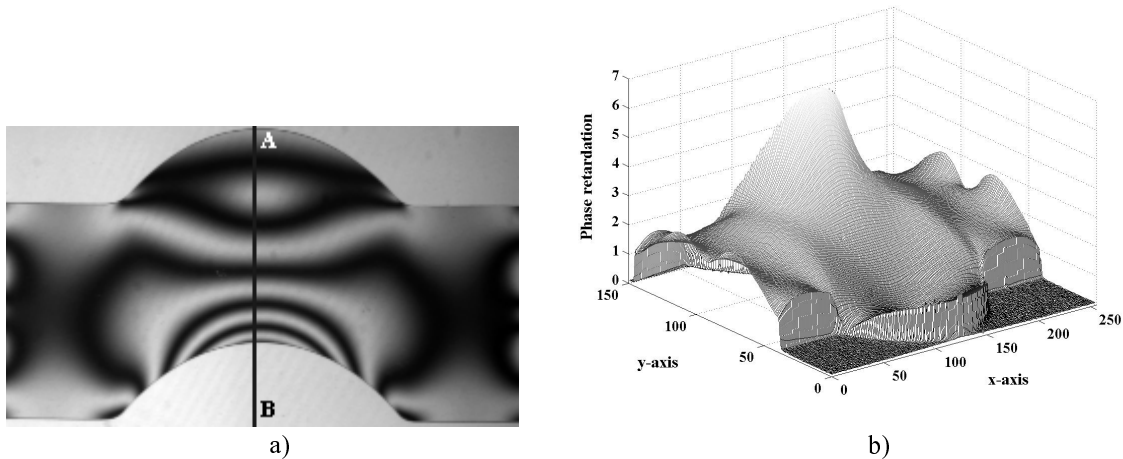


Figura 8. a) Imagen de franjas de isocromas cuando al espécimen se le aplicó una fuerza de 430 N, b) distribución del retardo en fase asociado al esfuerzo interno de la muestra.

## V. CONCLUSIONES

Se presentaron paralelamente tres algoritmos para análisis temporal de imágenes de franjas. Se ve en las aplicaciones y en los resultados que estos algoritmos pueden ser usados en muchas técnicas ópticas de medición. Además, como se vio, estos presentan la posibilidad de ser utilizados en casos en los que las técnicas tradicionales no es posible, ya que en primera instancia entregan la fase ya desenvuelta, además de que pueden ser apropiadamente usados en casos en los que existen discontinuidades en la cantidad física a medir.

Una de las desventajas de los algoritmos es que su robustez y facilidad de procesamiento se hace a costa del manejo de una mayor cantidad de datos (imágenes), además de tener cierta versatilidad en cuanto a la posibilidad de poder variar la sensibilidad del sistema óptico.

## RECONOCIMIENTOS

Para este trabajo se agradece el apoyo económico del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (México), a la Unión Europea por el proyecto **INDUCE, BRPR-CT97-0805** y a la Universidad Complutense de Madrid por el proyecto **PR48/01-9858**.

## REFERENCIAS

- [1] D. W. Robinson and G. T. Reid, *Interferogram Analysis*, IOP Publishing Ltd 1993.



- [2] Quiroga J. A., Gómez-Pedrero J. A., “*Temporal phase evaluation by Fourier analysis of fringe patterns with spatial carrier*,” J. Mod. Opt., 48(14), 2129-2139, (2001).
- [3] J. Villa, J. A. Quiroga, J. A. Gómez-Pedrero, “*Sinusoidal least-squares fitting for temporal fringe pattern analysis*,” J. Mod. Opt., 49(13), 2257-2266, (2002).
- [4] J. Villa, J. A. Gómez-Pedrero, J. A. Quiroga, “*Synchronous detection technique for temporal fringe pattern analysis*,” Opt. Comm. 204, 75-81 (2002).
- [5] J. Villa, J. A. Quiroga, J. A. Gómez-Pedrero, “*Measurement of retardation in digital photoelasticity by load stepping using a sinusoidal least-squares fitting*,” Opt. Las. Eng. 41, 127-137 (2004).
- [6] J. M. Huntley and H. Saldner, “*Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis*” Appl. Opt. 32(17), 3047-3052 (1993).
- [7] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its applications* (New York, McGraw-Will).