



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA
LUZ Y LA MATERIA



ESTUDIOS DE PROPAGACIÓN DE LA LUZ Y MODELADO MATEMÁTICO
PARA ILUMINACIÓN CON METASUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:

M. en C. Cosmy Polet Castañeda Almanza

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Iván Moreno Hernández

Zacatecas, Zac., México, Junio 2024.

Declaración de autenticidad

Manifiesto que el presente trabajo de tesis de doctorado es original y no ha sido presentado total o parcialmente para obtener otro título o grado en esta o cualquier otra universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo dentro del doctorado en ciencia y tecnología de la luz y la materia y no contiene plagio o copia de ninguna naturaleza, dando el crédito correspondiente a otros documentos de investigación o similares tales como tesis, artículos o publicaciones de otros grupos o personas, reportando de manera puntual y adecuada las respectivas fuentes bibliográficas. Asimismo, declaro que soy plenamente consciente de que el incumplimiento de la presente declaración de autenticidad, dará lugar a sanciones universitarias y legales conforme a la normativa vigente.

M. en. C. Cosmy Polet Castañeda Almanza

Zacatecas, Zac., México, Junio 2024.

Comité de seguimiento y evaluación

Sinodales:

Dr. Jesús Madrigal Melchor

Dr. Isaac Rodríguez Vargas

Dr. Iván Moreno Hernández

Dr. Juan Carlos Basilio Ortíz

Suplentes:

Dr. José Samuel Pérez Huerta

Dr. Carlos Iván Cabrera Perdomo

Externos:

Dr. Maximino Avendaño Alejo

Comité de seguimiento:

Dr. Isaac Rodríguez Vargas

Dr. Jesús Madrigal Melchor

Dr. Iván Moreno Hernández

Dedicatoria

A mi amada madre, cuyo apoyo inquebrantable y sacrificio han sido el motor que me impulsa a alcanzar mis metas, también, a la memoria de mi padre, cuyo ejemplo y sabiduría continúan inspirándome cada día, aunque ya no esté físicamente conmigo. A ambos les agradezco infinitamente por su amor incondicional y por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia.

A mis sobrinos, que este logro les inspire a seguir persiguiendo sus sueños con determinación y pasión. Siempre recuerden que no hay límites para lo que deseen lograr.

Cosmy Castañeda.

Agradecimientos

Gracias a Dios.

A mis padres, Eloisa Almanza Herrera y Ricardo Castañeda Almanza, que siempre me han brindado su apoyo incondicional y a quienes debo este triunfo profesional, por todo su trabajo y dedicación para darme una formación académica, humanista y espiritual. De ellos es este triunfo y para ellos es todo mi agradecimiento.

A mi director de tesis, Dr. Iván Moreno Hernández, por su asesoría siempre dispuesta, su inagotable entusiasmo, sus acertados consejos y sugerencias tanto para este trabajo de tesis como en los diferentes proyectos que hemos realizado en equipo, le agradezco su paciencia y apoyo incondicional.

A la Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia y a la planta docente que la conforma, por proporcionar los recursos y el ambiente propicio para llevar a cabo esta investigación, en especial, a los miembros de mi comité doctoral, Dr. Isaac Rodríguez Vargas y Dr. Jesús Madrigal Melchor, por su cuidadosa revisión y valiosos comentarios que ayudaron a mejorar significativamente este trabajo.

A CONAHCyT por el apoyo económico brindado a través del programa de becas para estudios de posgrado en instituciones nacionales acreditadas en el SNP.

Resumen

La óptica de iluminación es una rama de la óptica cuyo objetivo es maximizar la eficiencia y el desempeño de dispositivos que transfieren la luz desde una fuente hasta un plano u objeto a iluminar. En general, se requiere formar patrones espaciales de iluminación con características específicas y con alta eficiencia en la transferencia de luz. Las lentes óptimas para iluminación, en su mayoría, no son esféricas o asféricas, suelen tener superficies de forma “libre”. Sin embargo, estas, son lentes abultadas y pesadas que vuelven a los sistemas ópticos voluminosos. Las metalentes, y en general las metasuperficies, al ser estructuras 2D, hacen que los sistemas ópticos sean compactos y ligeros, por tales cualidades poseen un alto potencial de desempeño en aplicaciones de la óptica de iluminación. Para analizar y diseñar metalentes en óptica de iluminación, es necesario contar con leyes generalizadas de transmisión de la luz en metasuperficies. En esta tesis se generalizaron las leyes de propagación de la luz en metasuperficies. Inicialmente se dedujeron la ley de reflexión y refracción para metasuperficies en coordenadas polares, para luz incidente en el plano de incidencia; después, se derivaron las ecuaciones generales para calcular la dirección 3D de los rayos refractados y reflejados por una metasuperficie, es decir, se derivaron las expresiones vectoriales de los rayos reflejados y transmitidos por una metasuperficie con un perfil de fase 2D arbitrario, mismas que son válidas para cualquier dirección de los rayos incidentes. Las fórmulas obtenidas simplifican el trazo de rayos 3D a través de sistemas o dispositivos que estén formados por metalentes o metasuperficies. Finalmente, se desarrollaron cuatro modelos matemáticos que usan a las metasuperficies o metalentes para producir iluminación homogénea. En específico, aplicamos el método Monge-Ámpere y las leyes generalizadas para metasuperficies, y obtuvimos las ecuaciones diferenciales no lineales con valores en la frontera que debe satisfacer el perfil de fase “libre” o arbitrario de una metalente que genera un patrón de iluminación. En el último capítulo se presenta el método de diferencias finitas y algoritmos genéticos como propuesta de solución numérica a los modelos matemáticos de iluminación obtenidos, que son la base del diseño de una metalente para iluminación.

Palabras clave: iluminación, metasuperficies, método Monge-Ámpere

Abstract

Illumination optics is a branch of optics that aims to maximize the efficiency and performance of devices that transfer light from a source to a plane or object to be illuminated. In general, it is required to form spatial patterns of illumination with specific characteristics and high light transfer efficiency. Optimal lenses for illumination are mostly not spherical or aspherical, they usually have “free-form” surfaces. These, however, are bulky and heavy lenses that make optical systems bulky. Metalenses and metasurfaces in general, being 2D structures, make optical systems compact and lightweight, and therefore have a great potential in illumination optics applications. In this thesis, the laws of light propagation in metasurfaces were generalized. Initially, the law of reflection and refraction for metasurfaces in polar coordinates was deduced for incident light in the plane of incidence. Then, the general equations for calculating the 3D direction of the refracted and reflected rays by a metasurface were derived, in other words, the vector expressions of the reflected and transmitted rays by a metasurface with an arbitrary 2D phase profile were derived, which are valid for any direction of the incident rays. The formulas obtained simplify 3D ray tracing through systems or devices with metalenses or metasurfaces. Finally, four mathematical models were developed that implement metasurfaces or metalenses in illumination optics. We applied the Monge-Ámpere method and the generalized laws for metasurfaces and obtained the nonlinear differential equations with values on the boundary that satisfy the “free” or arbitrary phase profile of a metalens that generates a desired illumination pattern. The last chapter presents the finite difference method and genetic algorithms as a proposal for a numerical solution to the mathematical models of illumination, which are the basis for the design of a metalens for illumination.

Keywords: illumination, metasurfaces, Monge-Ámpere method

Índice general

Índice de figuras	VIII
1. Introducción	2
1.1. Lentes ópticas	2
1.2. Metamateriales y metasuperficies	4
1.3. Metalentes	6
1.4. Diseño y fabricación de metalentes	10
1.5. Formación de imágenes con metalentes	12
2. Refracción y reflexión generalizadas para trazos de rayos	14
2.1. Introducción	14
2.2. Deducción de leyes generalizadas en forma vectorial	15
2.3. Trazo de rayos en metasuperficies	18
3. Metaóptica no formadora de imágenes	21
3.1. Introducción	21
3.2. Metaconcentrador	24
3.3. Metacolimador	26
3.4. Metalentes condensadoras	27
4. Diseño de metalentes para iluminación	29
4.1. Método Monge-Ámpere	31
4.2. Diseño de una metalente de perfil de fase libre (MFL)	33
4.3. Modelos matemáticos para el diseño de una MFL	34
4.3.1. Incidencia normal de luz sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$	34
4.3.2. Incidencia normal de luz sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r, \varphi)$	36
4.3.3. Incidencia de luz oblicua sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$	39
4.3.4. Incidencia de luz oblicua sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(x, y)$	41
4.4. Diseño inverso de una MFL	43
4.5. Esquema numérico de la solución a una EDO no lineal con valores en la frontera no lineales	45
4.5.1. Diferencias finitas	45

4.5.2. Algoritmos genéticos (AG)	47
4.5.3. Implementación	49
5. Resultados	51
6. Conclusiones	53
7. Apéndices	54
A. Ley de Snell para metasuperficies en coordenadas polares	54

Índice de figuras

1.1. Lentes ópticas	3
1.2. Metamateriales y metasuperficies	4
1.3. Refracción y reflexión sobre una metasuperficie	8
2.1. Refracción generalizada sobre una metasuperficie (plano xy) con perfil de fase arbitrario $\Phi = \Phi(x, y)$	16
2.2. Trazo de rayos para transmisión de luz a través de una metalente	19
2.3. Trazo de rayos para refracción y reflexión sobre una metasuperficie	20
3.1. Características ópticas de las metalentes	22
3.2. Concentrador y metaconcentrador de luz	25
3.3. Colimador y metacolimador de luz	26
3.4. Metalente condensadora	27
4.1. Lente de forma libre	30
4.2. Diseño de una metalente de fase libre (MFL)	33
4.3. Diseño de una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$ para incidencia normal de rayos de luz	35
4.4. Diseño de una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$ e incidencia oblicua	40
4.5. Diseño de una MFL con perfil de fase generalizado e incidencia oblicua	41
4.6. Discretización de una EDO	47
4.7. Diagrama de flujo de un algoritmo genético	48

Capítulo 1

Introducción

La óptica ha sido durante mucho tiempo, un generador de invenciones que ha llevado a un enorme progreso tecnológico, teóricamente, su desarrollo comienza cuando Euclides publica las leyes de reflexión hacia el siglo III a. c., desde ese tiempo hasta la actualidad se ha desarrollado una gran variedad de dispositivos ópticos que han mejorado las comunicaciones, la formación de imágenes y la tecnología de sensores. Aproximadamente, hace un par de décadas aparecieron las metasuperficies que son estructuras fotónicas bidimensionales compuestas de arreglos de nano antenas, también llamadas, meta-átomos. Una de las aplicaciones más importantes de las metasuperficies es la lente metasuperficie también denominada metalente la cual ha atraído fuertemente la atención de la comunidad científica en tiempos recientes porque posee un gran potencial para innovar la fotónica y la optoelectrónica, al ser un gran candidato de reemplazo de las lentes clásicas en todos los dispositivos ópticos.

1.1. Lentes ópticas

La lente es el sistema óptico más utilizado, su origen se remonta a la antigua Grecia y Roma, en esa época ya se conocían las propiedades refractivas de algunos materiales transparentes, de tal manera que los romanos ya utilizaban cristales para leer manuscritos, pero fue hasta el siglo XIII cuando oficialmente Roger Bacon inventa las lentes de aumento. En general, una lente es un dispositivo que recoge y reconfigura la distribución de energía radiante emitida por una fuente [1] su diseño consta de la elección del material y de la forma de sus superficies, ya que de esto depende la forma final del frente de onda que la atraviesa.

En su forma simple, una lente óptica es una pieza de material transparente limitado por dos superficies, siendo curva al menos una de ellas, figura 1.1 (a). En su mayoría, dichas superficies son esféricas ya sea abultada desde la lente hacia afuera (convexa) o hacia adentro (cóncava) además, si la luz que atraviesa la lente se enfoca en un punto o diverge, las lentes se clasifican como convergentes (positivas) o divergentes (negativas) respectivamente. Un dispositivo óptico, puede estar compuesto no por una lente simple, si no, por un sistema de lentes (figura 1.1 (b)) que prácticamente está compuesto por

un número finito de lentes que trabajan de manera conjunta para que el dispositivo realice la función deseada, pero principalmente para corregir aberraciones de imagen.

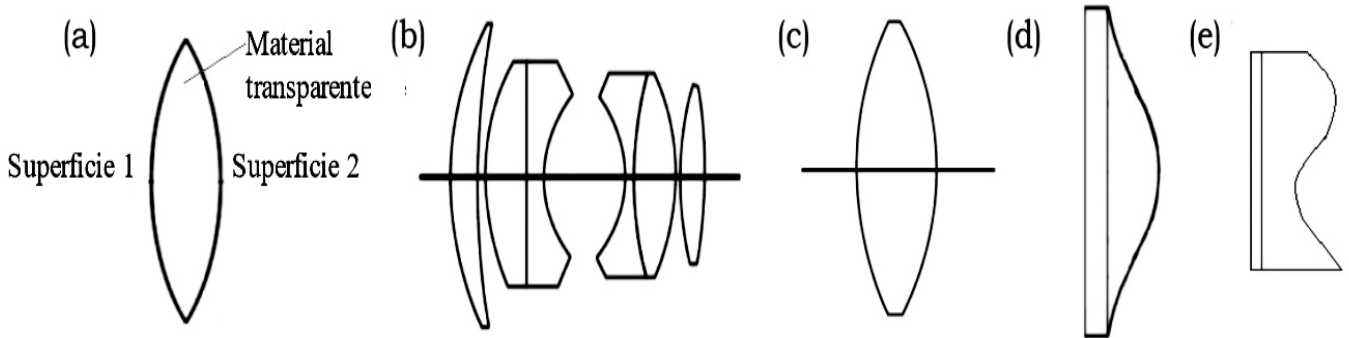


Figura 1.1: Lentes. (a) clásica. (b) sistema de lentes. (c) esférica. (d) asférica. (e) lente de forma libre.

La complejidad del diseño de una lente radica en que en el caso ideal, todos los rayos originados en un punto objeto en todas las longitudes de onda deben propagarse con precisión hasta un punto imagen. En general, idealmente, la imagen formada debe ser lo más parecida al objeto, sin ningún tipo de distorsión o aberración [2]. En términos generales, una imagen puede contener una mezcla de aberraciones del tipo coma, esférica, cromática y astigmática que deben ser corregidas en la medida que sea posible. Algunas de estas aberraciones pueden corregirse simplemente cambiando la forma de uno o más elementos de una lente, mientras que otras requieren una alteración total de todo el sistema óptico. Por ejemplo, para la formación de una imagen mediante un sistema de lentes, los parámetros modificables o grados de libertad del sistema óptico, son los radios de curvatura de las superficies de cada lente, el grosor del espacio de aire, los índices de refracción y el perfil de dispersión de los vidrios utilizados en las lentes del sistema y el límite en la apertura del diafragma.

En su mayoría las lentes de vidrio esféricas, figura 1.1 (c), son las que más se fabrican ya que son fáciles de producir en comparación a las asféricas, figura 1.1 (d), que poseen mayor número de grados de libertad y cuya fabricación es costosa, a menos, que se fabriquen en gran cantidad [3]. Estas lentes, las asféricas, son muy utilizadas en la óptica no formadora de imágenes. En el área de iluminación su función es dirigir la luz y formar patrones de iluminación con simetría lineal o rotacional [4-6], y para el caso en que los patrones de iluminación carecen de simetría se diseñan lentes de forma libre (figura 1.1 (e)), que son lentes cuya superficie se diseña a partir de un modelo matemático que se deduce de la conservación de energía transportada desde una fuente hasta una pantalla a través de la lente de forma libre [7].

Todos los tipos de lentes anteriormente presentados tienen la característica de ser abultados y pesados tal que hacen que los sistemas ópticos que los contienen estén limitados en su estado físico tanto en tamaño y peso, siendo esto, sin duda, uno de los aspectos más importantes que se desea mejorar por parte de los diseñadores. Para esto se han realizado cambios en materiales y formas de las lentes, o

bien, en el caso de sistemas de lentes se hace todo lo posible por utilizar el menor número de lentes para lograr el efecto de la luz deseado.

1.2. Metamateriales y metasuperficies

La historia de los metamateriales tiene sus raíces en el desarrollo de la teoría electromagnética y la óptica a lo largo del siglo XX. Fue en 1968 cuando Victor Veselago, un físico soviético, publicó un artículo teórico en el que describía las propiedades de sustancias que tenían valores negativos tanto de permeabilidad magnética μ como de la constante dieléctrica ϵ [8]. Esto implicaba que la luz se comportaría de manera inusual en este tipo de materiales, es decir, que experimentaría reflexión inversa y refracción negativa, pero en ese tiempo fue imposible verificar experimentalmente estos fenómenos. A finales de la década de 1990, John B. Pendry, David Smith, y otros investigadores comenzaron a desarrollar la teoría y la tecnología detrás de los metamateriales, incluyendo la creación de estructuras artificiales que exhibieran índices de refracción negativos [9].

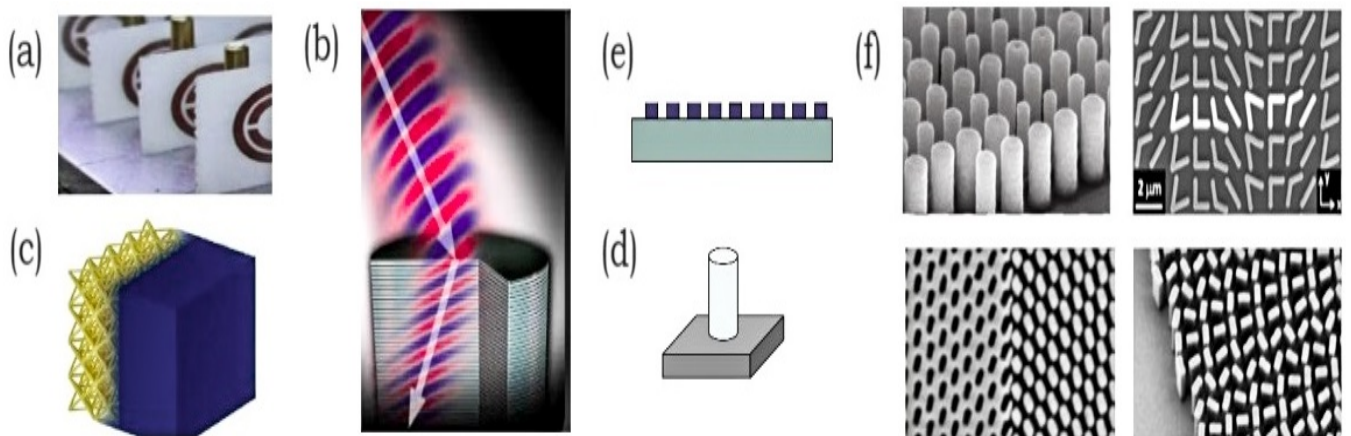


Figura 1.2: Metamateriales y metasuperficies. (a) Celdas de cobre con SSR (b) Refracción negativa. (c) Metamaterial. (d) Diagrama de un meta-átomo. (e) Esquema de una metasuperficie (f) Imagen SEM de diferentes metasuperficies..

En el año 2000, un equipo dirigido por David R. Smith y David Schurig de la Universidad de Duke creó la primera estructura con índice de refracción negativo a frecuencias de microondas, esto marcó un hito importante en el desarrollo de los metamateriales. El primer metamaterial se fabricó entrelazando resonadores metálicos de anillo recortado (SRR por su siglas en inglés) que tienen $\mu < 0$ y cables de cobre con $\epsilon < 0$. En el experimento se demostró que un haz transmitido a través de un prisma compuesto por matrices 2D de celdas unitarias repetidas de tiras de cobre y SRR (figura 1.2 (a)), tenía un ángulo de dispersión de refracción negativa (figura 1.2 (b)) [10].

A medida que las investigaciones teóricas y experimentales en metamateriales evolucionaban, la comunidad científica estableció la definición formal de metamaterial como:

Nanoestructura tridimensional, artificial, que está compuesta de estructuras periódicas y no periódicas cuya función depende de su arquitectura celular y composición química (figura 1.2 (c)) [10].

Como esta definición abarca una amplia gama de materiales y estructuras diseñadas para manipular la luz y otras formas de ondas, los metamateriales se clasifican en diferentes categorías según las propiedades modificadas del material, entre las cuales están las térmicas, acústicas, electromagnéticas o mecánicas [11].

Algunos tipos principales de metamateriales son [11, 12]:

- 1) Metamateriales de índice negativo: estos tienen la propiedad de tener un índice de refracción negativo en ciertas frecuencias electromagnéticas. Esto significa que la luz se refracta en la dirección opuesta a la que se espera en materiales convencionales, como Veselago lo discutió teóricamente en su artículo de 1968.
- 2) Metamateriales dieléctricos: estos están compuestos de estructuras dieléctricas dispuestas de forma específica para manipular las propiedades electromagnéticas de la luz, entre sus características está el no tener pérdidas metálicas, es decir, no pasan por procesos de corrosión, abrasión o desgaste, también están libres de conducción de corriente eléctrica y exhiben polarización eléctrica.
- 3) Metamateriales plasmónicos: estos están diseñados para manipular la luz a escalas menores de la longitud de onda utilizando polaritones superficiales, que son cuasipartículas que surgen de la fuerte interacción entre la luz y los electrones libres en los metales en la interfaz entre un metal semiinfinito y un dieléctrico semiinfinito.
- 4) Metamateriales acústicos: estos están diseñados para controlar y manipular ondas sonoras, es decir, controlan la forma en que el sonido se propaga a través de un medio.
- 5) Metamateriales térmicos: estos se diseñan para controlar y manipular la propagación del calor, es decir, controlan la conducción de energía térmica.
- 6) Metamateriales mecánicos: estos se diseñan para manipular la propagación de ondas mecánicas, pueden dirigir, desviar o focalizar ondas mecánicas de una manera que no ocurre en materiales convencionales.

Las aplicaciones de los metamateriales se dan en diversos campos, entre los que están, la acústica, la fotónica, la biomedicina, la construcción, las tecnologías de la información, entre muchos más, destacando su aplicación en la óptica, debido a su capacidad para controlar y manipular la luz de maneras que no son posibles con materiales naturales. Por ejemplo, el poder enfocar con una “súper” lente basada en metamateriales, constituida por elementos del tamaño del orden o menor al de la longitud de

onda de la luz misma.

A pesar de sus fascinantes propiedades de manipulación de ondas, los metamateriales 3D presentaron varios desafíos incluyendo su compleja fabricación y grandes pérdidas por inserción, es decir, pérdidas de energía transmitida por el metamaterial. Por lo tanto, se comenzó a cuestionar si todas las propiedades intrigantes de los metamateriales 3D serían las mismas que las de una “capa” de metamaterial, es decir, un metamaterial 2D, mucho más fáciles de fabricar. El término metasuperficie aparece por primera vez en 2003 en un artículo publicado por Sievenpiper et al. [13], donde se estudian las propiedades electromagnéticas de una superficie metálica con textura periódica. Sin embargo, fue hasta 2011 cuando se estableció formalmente el término metasuperficie en los trabajos de Cappaço y Shalaev [14, 15].

Una metasuperficie es un conjunto bidimensional (figura 1.2 (d)) de meta-átomos (figura 1.2 (e)) de tamaño del orden o menor a la longitud de onda en la que están diseñados, al igual que metamateriales se clasifican en diferentes categorías de acuerdo al tipo de onda de trabajo (ópticas, térmicas, acústicas, por mencionar algunas.) a la función que realizan (lentes, reflectores, polarizadores, entre muchos más.) a tipos de materiales y estructuras (plasmónicas, dieléctricas, entre otras.) y al rango espectral de operación (visible, infrarrojo, microondas). Las aplicaciones de las metasuperficies, prácticamente se dan en los campos ya mencionados para los metamateriales [16].

Los meta-átomos de las metasuperficies están dispuestos periódicamente (o aperiódicamente) encima de un sustrato, tienen dimensiones del orden o fracción de la longitud de onda, la geometría es muy variada y se eligen de acuerdo al fenómeno que se desee estudiar. En la literatura, se han reportado análisis teóricos y experimentales de metasuperficies con meta-átomos de forma cilíndrica, fichas de dominó, antenas metálicas, nano-agujeros, entre muchas más (figura 1.2 (f)). Entre las ventajas de las metasuperficies, sobre los metamateriales, está su estructura plana y que se pueden fabricar fácilmente mediante herramientas de fabricación plana que son mucho más rentables en comparación con la fabricación de estructuras 3D. Por lo tanto, las metasuperficies, al ser bidimensionales, pueden integrarse con gran facilidad en los dispositivos, y debido a estas y otras ventajas que ofrecen las metasuperficies sobre los metamateriales, el campo de las metasuperficies se va desarrollando rápidamente, desde la teoría física que gobierna su comportamiento hasta su fabricación e integración en dispositivos [17, 18].

1.3. Metalentes

En general, la óptica busca controlar o manipular la luz por medio de cambios en su amplitud, fase y polarización, con el objetivo de dirigir la propagación de un haz de luz, o bien, de obtener un frente de onda deseado. Convencionalmente, esto se realiza mediante el uso de prismas, polarizadores, rejillas, espejos, hologramas y como se mencionó en la Sección 1 con lentes ópticas. Sin embargo, dichos lentes suelen ser voluminosos, pesados y algunas veces costosos. Los avances tecnológicos en micro satélites, drones y teléfonos móviles, ha demandado requisitos cada vez más exigentes en integración y miniaturización de los sistemas electromagnéticos y fotónicos modernos, lo que llevó al surgimien-

to de las metasuperficies como plataforma para diseñar ópticas de espesor inferior a la longitud de onda.

Así, una metasuperficie óptica, o también llamada, metalente, es un lente que promete ser un gran candidato para miniaturizar los sistemas ópticos. Una metalente tiene la propiedad de que cuando la luz incide sobre sus meta-átomos espaciados por distancias menores a una longitud de onda, cada uno de ellos puede considerarse como una fuente de ondas esféricas, característica que se explota para moldear a voluntad la forma de un frente de onda. En resumen, las metalentes proporcionan muchos más grados de libertad de diseño que las lentes clásicas, por tanto, son una plataforma disruptiva para sistemas ópticos planos y compactos.

La modificación de un frente de onda para llevarlo a una forma deseada o esperada, depende de la interacción entre la luz y el dispositivo óptico utilizado, por ejemplo, en el caso de lentes y prismas, los fenómenos físicos presentes son la refracción y la reflexión de la luz, fenómenos comunes en la naturaleza que han dado lugar a numerosas aplicaciones que van desde el telescopio hasta la fibra óptica. En óptica clásica, tanto la refracción como la reflexión de la luz, están regidas por leyes ya establecidas, la ley de Snell y la ley de reflexión, respectivamente. Estas leyes proporcionan la dirección de propagación de un haz de luz después de refractarse o reflejarse sobre una interfaz que separa dos medios homogéneos con índices de refracción diferentes. En su forma más básica estas leyes obligan a los rayos reflejados y refractados a estar en el plano de incidencia.

En el caso cuando una metasuperficie se encuentra en la interfaz que separa a dos medios, las leyes clásicas de refracción y reflexión, cambian, ya que los meta-átomos de la metasuperficie inducen variaciones de fase espaciales en la onda refractada o reflejada [14], cualidad de las metasuperficies, utilizada para controlar la dirección de la onda propagada, la forma del frente de onda y la polarización.

Aieta et. al. [19], derivaron las leyes generalizadas de refracción y reflexión 3D para metasuperficies, para la deducción se considera una onda plana incidente con vector de onda \mathbf{k}_i con dirección sobre el plano yz , la metasuperficie en la interfaz (plano xy) entre dos medios con índices de refracción n_i y n_t posee un gradiente de fase dual (en dirección “x” y en “y”), la onda al incidir sobre la metasuperficie es en parte transmitida \mathbf{k}_t y parcialmente reflejada \mathbf{k}_r (figura 1.3 (a)). Considerando la trayectoria de la luz (a través de un punto A y un punto B) y aplicando el principio de Fermat (fase estacionaria):

$$\int_A \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_B \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.1)$$

lo que significa que, al tener una variación infinitesimal de una trayectoria la diferencia de fase acumulada es igual cero, considerando dos puntos P_i y P_t en medios con índices de refracción n_i y n_t , respectivamente, se trazan dos trayectorias infinitesimalmente cercanas de un punto a otro, donde tales trayectorias están separadas por una distancia Δr (figura 1.3 (b)).

Incorporando la fase acumulada $\Phi(r) = kr$, y el gradiente de fase $d(\Phi)/dr$ de la metasuperficie, en el

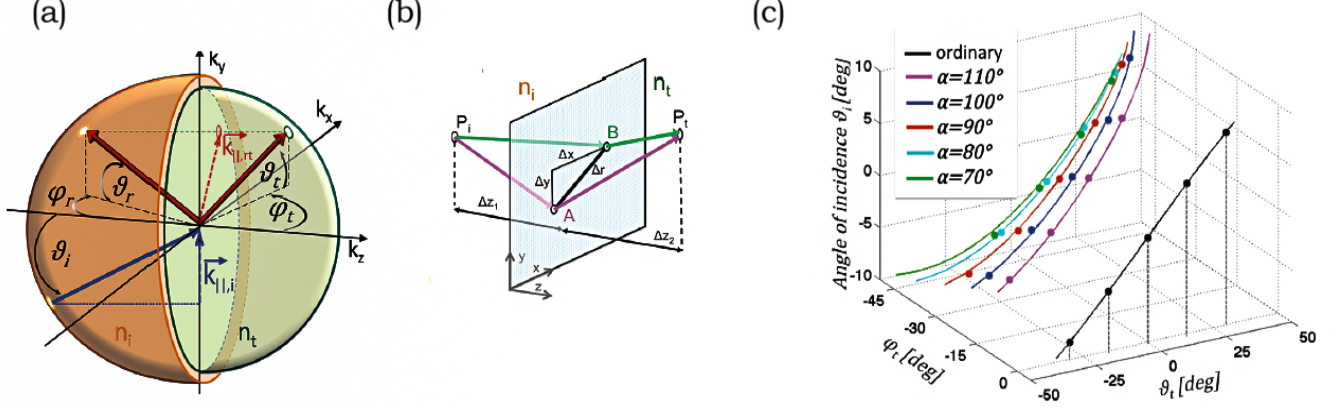


Figura 1.3: Refracción y reflexión generalizada sobre una metasuperficie. (a) Esquema de los rayos incidente (azul), reflejado y transmitido (rojo). (b) Interfaz entre dos medios. (c) Ángulos de incidencia vs. ángulos de refracción para diferentes orientaciones (α) del gradiente de fase, imágenes tomadas de [19].

principio de fase estacionario, ecuación (1.1), se tiene,

$$\left[\int_{P_i}^A \mathbf{k}_i \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_i}^B \mathbf{k}_i \cdot d\mathbf{r} \right] + \left[\int_A^{P_t} \mathbf{k}_t \cdot d\mathbf{r} - \int_B^{P_t} \mathbf{k}_t \cdot d\mathbf{r} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial r} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) = 0, \quad (1.2)$$

donde $\mathbf{r}_{A(B)}$ es la posición del punto A(B) sobre la superficie. Después de integrar la ecuación (1.2), las componentes del vector de onda del rayo transmitido son [19],

$$\begin{cases} k_{x,t} = k_{x,i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ k_{y,t} = k_{y,i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}, \quad (1.3)$$

en la ecuación (1.3) se observa que la componente tangencial del vector de onda del rayo transmitido no se conserva ya que la interfaz contribuye con un cambio en la fase que se produce por el gradiente de la metasuperficie $\nabla \Phi = (\partial \Phi / \partial x, \partial \Phi / \partial y)$, cabe mencionar que al analizar la reflexión sobre la metasuperficie, las componentes del rayo reflejado k_{xr} y k_{yr} tienen la misma forma de la ecuación (1.3).

Aieta et. al. [19] sólo consideraron una incidencia en el plano yz , es decir, $k_{x,i} = 0$ y que las componentes de los rayos incidentes y transmitidos en términos de sus ángulos polar y azimutal,

$$k_x = k \cos \theta \sin \varphi,$$

$$k_y = k \sin \theta, \quad (1.4)$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = k \cos \theta \cos \varphi,$$

donde k es el número de onda dado por $k = k_0 n$, donde n es el índice de refracción y $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (1.4) en (1.3), las leyes de refracción y reflexión de la luz sobre una metasuperficie con un gradiente de fase dual son dadas por:

Refracción	Reflexión
$\cos \theta_t \sin \varphi_t = \frac{1}{n_t k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$	$\cos \theta_r \sin \varphi_r = \frac{1}{n_i k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$
$n_t \sin \theta_t - n_i \sin \theta_i = \frac{1}{k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$	$\sin \theta_r - \sin \theta_i = \frac{1}{n_i k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$

(1.5)

donde se puede observar que cuando el gradiente de fase es cero, se recuperan las leyes clásicas para ambos fenómenos, como se visualiza en la figura 1.3 (c), misma que muestra la validez de la ley de Snell para diferentes incidencias y evidencia que la orientación del gradiente de fase α produce un cambio en la orientación del rayo refractado por la metasuperficie.

Conociendo la longitud de onda de la luz (λ_0), y si la incidencia es normal o está en el plano de incidencia, a partir de la ley de Snell y la ley de reflexión, antes presentadas, puede obtenerse el perfil de fase de la metalente para lograr un enfoque de luz deseado. Cuando un frente de onda plano incide sobre una metasuperficie con un gradiente de fase radial $\nabla \Phi = d\Phi/dr$ y forma un punto focal a una distancia f , se integra la ley de refracción, considerando que Φ es una función de la posición, continua en la interfaz, de tal forma que se obtiene el perfil de fase hiperbólico [20]:

$$\Phi(x, y, \lambda_0) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + f^2} - f \right), \quad (1.6)$$

donde (x, y) es la ubicación de cada meta-átomo en la metalente. La ecuación (1.6) muestra que todos los rayos deben llegar en fase al foco, lo que da como resultado un punto limitado por difracción. Este perfil de fase hiperbólico se ha empleado en la mayoría de los diseños de metalentes, pero también se pueden usar otros perfiles de fase para aplicar diferentes características a las metalentes y los frentes de onda incidente, transmitido o reflejado, siempre y cuando la metalente logre cubrir todo el rango de fases requerido de 0 a 2π para controlar completamente el frente de onda.

1.4. Diseño y fabricación de metalentes

La manipulación de las propiedades de la luz, incluidas la fase, la amplitud y la polarización, se puede realizar mediante el diseño de los perfiles geométricos y las posiciones de los meta-átomos de una metalente y en la elección del perfil de fase, en general, este diseño se puede resumir en cuatro pasos:

- 1) Definir la óptica de la metalente, fenómeno y leyes físicas, el tipo de luz, es decir, la longitud de onda o ancho de banda de trabajo y el perfil de fase de la metalente.
- 2) Elegir los materiales del sustrato y de los meta-átomos.
- 3) Realizar la simulación numérica para diseñar y optimizar la forma, tamaño y disposición espacial de los meta-átomos para lograr el objetivo deseado.
- 4) Ajustar los parámetros mencionados en los puntos anteriores, para maximizar la eficiencia de la metalente, esto se hace también vía la simulación numérica.

La simulación numérica de una metalente, se lleva a cabo, utilizando software comercial basado en diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), método que simula la propagación de la luz en dispositivos fotónicos, entre estos softwares está Lumerical Inc., RSoft (Synopsys) y Comsol que son softwares de alto nivel que han estado a la vanguardia de la innovación en el campo de la fotónica y la nanotecnología, proporcionan herramientas de software avanzadas para la investigación en estos campos. La simulación numérica es un paso imprescindible ya que de esto depende que el proceso de fabricación se lleve de manera óptima, es decir, que los parámetros geométricos y los materiales elegidos sean los indicados para que la eficiencia real de una metalente fabricada sea lo más cercana posible a la eficiencia teórica.

La nano-fotolitografía es la técnica más utilizada en la fabricación de metalentes, es una tecnología que tiene la ventaja de poseer una alta precisión en el control de las dimensiones de nano(micro) estructuras a fabricar, este proceso consiste en colocar una máscara de diseños sobre un sustrato cubierto por una película fotosensible, que al ser expuesta a cierto tipo de luz se modifica, para después ser sometida a revelado y grabado y así obtener las nano-estructuras deseadas sobre el sustrato, es decir, la metalente. El proceso es altamente versátil y efectivo, ofrece una combinación de alta resolución, precisión, escalabilidad y reproducibilidad, lo que lo convierte en una herramienta indispensable en la fabricación de dispositivos electrónicos y en otras áreas de la nanotecnología. Por otra parte, las limitaciones de la nano-fotolitografía radican en que los equipos empleados son altamente costosos, la disponibilidad de materiales es restringida y además los procesos químicos utilizados pueden generar residuos peligrosos y contaminantes que en caso de no ser gestionados de manera adecuada, pueden producir impactos negativos en el medio ambiente.

A raíz del incremento en las demandas de la nanofabricación, se han desarrollado e incorporado nuevas técnicas de fabricación prometedoras, son una especie de nuevos tipos de litografía, por ejemplo, la

litografía de inmersión, litografía UV extrema, litografía por nanoimpresión, litografía de interferencia, litografía con haz de iones enfocado, por mencionar algunas, ya que existen muchas técnicas más reportadas e implementadas, lo que indica, que el campo de la fabricación es un área que se encuentra en desarrollo e innovación continua [21].

Los materiales, para la fabricación de una metalente, se eligen de acuerdo a la funcionalidad óptica deseada, en general, las metalentes se clasifican en óxidos conductores transparentes y plasmónicas, las del primer tipo están compuestas por nitruros de metales de transición, óxidos conductores transparentes o dieléctricos con constante dieléctrica alta, por ejemplo, nitruro de galio (GaN), dióxido de titanio (TiO_2), diamantes, silicio (Si), nitruro de silicio (SiN_x), por mencionar algunos, para las metasuperficies plasmónicas, se utilizan metales nobles y semimetales, entre los que están, oro (Au), plata (Ag), cobre (Cu), aluminio (Al), nitruro de titanio (TiN), nitruro de circonio (ZrN), grafeno, entre muchos más materiales; cabe destacar que la elección de los materiales depende también de la longitud de onda o ancho de banda (infrarrojo medio, visible, infrarrojo cercano, entre otros.) de trabajo de la metalente [22].

En la literatura, existe una gran variedad de trabajos que reportan diseños y fabricación de metalentes en diferentes fenómenos ópticos, por ejemplo, la integración de una metalente dieléctrica y un LED [23], filtrado de colores y enfoque de luz mediante una metalente dieléctrica [24]; en [25] She, Alan, et al., reportan el diseño y fabricación de una metalente dieléctrica refractiva de 2 cm de diámetro (metalente de área grande) con perfil de fase hiperbólico, ecuación (1.6), longitud de onda de diseño $\lambda_0 = 1550$ nm (infrarrojo cercano), distancia focal $f = 50$ mm. Como materiales eligieron, para los meta-átomos, silicio amorfo (aSi) y como sustrato dióxido de silicio (SiO_2). Se consideró un arreglo de meta-átomos cilíndricos, para no tener efectos de polarización, con diámetros que oscilan entre 830 y 990 nm y una altura fija de 600 nm, al variar el diámetro, los postes pudieron producir una cobertura de fase de 2π , transmitancias altas y relativamente uniformes, con una eficiencia efectiva de 91 %.

Desde su reciente aparición, las metalentes, han sido un campo de estudio en diferentes aplicaciones ópticas, entre las que está la conformación de un frente de onda, es decir, el control de la fase y la amplitud de una onda electromagnética en el espacio, que mediante el uso de metasuperficies, se logra a través de la configuración geométrica y la distribución espacial adecuada de sus meta-átomos, fenómeno fundamental en los campos de iluminación y formación de imágenes. Por otra parte, los estados de polarización (orientación de campos eléctricos y magnéticos) de la luz, clásicamente, se manipulan utilizando cristales, pero estos son pesados, voluminosos y su ancho de banda de trabajo es limitada, por estos motivos, se han diseñado y fabricado metasuperficies que actúan como polarizadores lineales, circulares e incluso algunas que controlan la polarización de forma dinámica mediante la aplicación de campos externos [17].

1.5. Formación de imágenes con metalentes

Como se mencionó anteriormente, las metalentes ofrecen una serie de aplicaciones prometedoras en diversas áreas de la óptica, por su diseño ultradelgado y su capacidad para enfocar la luz en longitudes de onda específicas, prometen incrementar la eficiencia y disminuir el tamaño de los sistemas ópticos, entre los que destacan, los dispositivos formadores de imágenes, a cuyo desarrollo e innovación se le invierte grandes cantidades de recursos financieros. Tales dispositivos, en sí, clásicamente funcionan mediante lentes que manipulan la luz por refracción y reflexión y aunque con el tiempo esta tecnología se ha desarrollado muy bien, logrando obtener imágenes con muy alta resolución y amplio campo de visión, los sistemas de lentes que los componen, son cada vez más complejos y en consecuencia, voluminosos, pesados y difíciles de portar. Sin embargo las tecnologías recientes requieren componentes ópticas compactas y ligeras.

Tres características importantes que indican si un sistema formador de imágenes es eficiente o no, son el enfoque, que hace referencia a la capacidad del sistema para proyectar una imagen nítida y clara de un objeto; la apertura numérica que representa la medida de la capacidad del sistema para recoger luz y controlar el ángulo bajo el cual puede aceptarla o emitirla, cuanto mayor sea esta, mayor será la resolución; y finalmente el grado y tipo de aberraciones presentadas, entre las que pueden estar la esférica, cromática y coma. Un buen sistema óptico presenta mínimas aberraciones, ya que no pueden eliminarse totalmente.

El diseño y fabricación de metalentes para formación de imágenes, es el área en la que más trabajos de investigación se reportan, y hay una gran variedad de estudios referentes a esta aplicación. Uno de los primeros reportes de metalentes formadoras de imágenes, se publicó en 2016 por Khorasaninejad et. al. [26], quien es parte del grupo del profesor Federico Cappaso, ellos diseñaron y fabricaron una metalente refractiva de TiO_2 con una eficiencia de enfoque de hasta 86 %, apertura numérica $\text{NA}=0.8$ que trabaja a longitudes de onda 405, 532 y 660 nm (espectro visible), las pruebas que realizaron dieron como resultado imágenes con alta resolución y calidad comparable con imágenes formadas por un objetivo Nikon con la misma apertura numérica.

Los sistemas formadores de imágenes, capturan y forman la imagen de objetos con diferentes dimensiones, que van desde una célula, hasta cúmulos de estrellas. En la medicina y la biología existe la necesidad de formar imágenes del orden de 1 mm hasta 10 mm para el diagnóstico de enfermedades, por tales motivos, las metalentes representan una herramienta aplicable a este tipo de necesidades. En [27] Wang et. al., fabricaron una metalente de TiO_2 para formar imágenes biológicas en infrarrojo cercano (650-1000 nm) con eficiencia de hasta 88 %, aperturas numéricas 0.1-0.24 y eficiencia máxima de enfoque de 90 %, sin embargo, aunque esta eficiencia es alta, las aperturas son pequeñas. De acuerdo al objetivo del sistema óptico, debe determinarse un equilibrio entre la apertura numérica y la eficiencia de enfoque.

En relación a las distorsiones (aberraciones) que presentan las imágenes y con el fin de disminuirlas también se han fabricado y probado metalentes que las corrigen. Por ejemplo, Shuming Wang et. al. [28],

probaron una metalente acromática en modo transmisión en el espectro visible, la eficiencia determinada fue de aproximadamente 40 % y su apertura numérica de 0.106, con estos parámetros se formaron imágenes donde se muestra que la aberración cromática es eliminada. Además, se han diseñado dobletes de metalentes, para el mismo fin, disminuir o eliminar aberraciones. En [29] Benedikt Groever et. al., fabricaron un doblete, que consiste en dos metasuperficies ubicadas a ambos lados de un sustrato, su apertura numérica es de 0.44, longitud de onda de trabajo 532 nm y un campo de visión de 50°, las imágenes formadas presentaron una alta calidad en el plano focal, este tipo de dobletes puede aplicarse en microscopía, visión artificial, entre otras áreas.

Una de las aplicaciones que proyecta el alcance que pueden llegar a tener las metalentes se muestra en [30], ahí se integró una metalente dieléctrica en un endoscopio con el objetivo de obtener imágenes de alta resolución de los órganos internos del cuerpo humano, en este trabajo se hicieron pruebas obteniendo imágenes endoscópicas en muestras de pulmón humano ex vivo y en vías respiratorias de ovejas in vivo, las imágenes muestran características estructurales del tejido pulmonar claramente visibles y se pueden discernir rasgos finos, es decir, la presencia de aberraciones es mínima. En especial, esta aplicación nos da la idea de como las metalentes representan un importante campo de estudio, porque su desarrollo impulsará avances significativos en una variedad de campos que impactan directamente en la vida humana, desde la medicina y la fotografía hasta la comunicación y la realidad virtual. Estos avances podrían mejorar la calidad de vida.

Capítulo 2

Refracción y reflexión generalizadas para trazos de rayos

El diseño óptico de metalentes o meta dispositivos está basado en el trazo de rayos, es decir, en el proceso a partir del cual se obtiene la trayectoria de la luz después de haber sido refractada o reflejada por una metasuperficie. Dado que en la literatura no se encontró algún trabajo que dedujera las leyes de refracción y reflexión 3D vectoriales, el primero de nuestros objetivos de trabajo doctoral, fue el deducirlas para contribuir a la implementación de metasuperficies a sistemas ópticos. En esta Sección se muestra la deducción geométrica de la ley de Snell 3D en su forma vectorial y a partir de esta determinamos las ecuaciones generales para calcular la dirección de los rayos refractados y reflejados por una metasuperficie que posee un gradiente de fase dual.

2.1. Introducción

Actualmente, la tecnología basada en metalentes ha ganado la atención de la comunidad científica ya que ha abierto nuevas oportunidades para crear dispositivos ópticos delgados, planos y ligeros [31, 32]. A pesar de que el comportamiento de las metalentes ha sido probado bajo la óptica ondulatoria, su diseño óptico no, éste ha sido principalmente desarrollado por trazo de rayos, en particular para análisis generales y corrección de aberraciones en metasuperficies con gradiente de fase unidimensional. Por otra parte, podemos encontrar a las metasuperficies en aplicaciones de la óptica anidólica (OA), rama de la óptica que busca optimizar la concentración y transferencia de la energía luminosa de una fuente, sin la necesidad de formar una imagen. Algunos sistemas ópticos son los concentradores con metasuperficies de gradiente de fase bidimensional. En ese caso están las metalentes concentradoras, que son un ejemplo de muchas aplicaciones de metalentes no formadoras de imágenes [33], por tanto es indispensable e importante analizar las trayectorias 3D de los rayos a través de estos sistemas ópticos.

Los esquemas de trazo de rayos exacto en la óptica tradicional están basados en formulaciones vectoriales y programas computacionales. Las leyes clásicas de refracción y reflexión para materiales refractivos

son bien conocidas y estudiadas en su forma vectorial tanto que hay múltiples estudios y reportes recientes de ellas [34-36]. Por tanto, para formular el trazo de rayos para metasuperficies es necesario llevar las leyes de refracción y reflexión a su forma vectorial.

En el caso de las metasuperficies, la refracción y reflexión está determinada por un perfil de fase espacial de la metasuperficie y sus leyes en 1D fueron reportadas y experimentalmente probadas en un artículo clásico de metaóptica [14]. Además un conjunto de ecuaciones escalares de la ley de Snell para metasuperficies con un perfil de fase 2D fueron reportadas en [19], sin embargo estas ecuaciones son válidas para el caso especial en que el plano de incidencia está orientado en la dirección del gradiente de fase. En el caso especial de la formulación vectorial para metasuperficies con perfil de fase 1D cuya dirección es la misma que el plano de incidencia fue reportada en [37].

Considerando que los métodos de trazo de rayos en metasuperficies para iluminación se requieren la forma vectorial de la dirección del rayo refractado y reflejado a través de una metasuperficie con un gradiente de fase 2D que sea válida para cualquier dirección de incidencia, en este capítulo presentamos su deducción.

2.2. Deducción de leyes generalizadas en forma vectorial

Para definir la geometría del problema, consideramos un rayo de luz monocromático incidiendo sobre una metasuperficie que se encuentra entre dos medios homogéneos e isotrópicos (figura 2.1 (a)). La dirección de propagación del rayo de luz incidente y refractado (o reflejado) están dados por los vectores de onda normalizados \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , respectivamente. El subíndice “1” representa al rayo incidente, y el subíndice “2” indica el rayo refractado o reflejado.

La metasuperficie se encuentra en el plano xy , en la interfaz entre dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 (figura 2.1 (a)). Dicha metasuperficie posee un gradiente de fase dual $\nabla\Phi(x, y)$, con componentes $\partial\Phi/\partial x$ y $\partial\Phi/\partial y$ en cada punto (x, y) sobre la metasuperficie (figura 2.1 (b)).

Los vectores de onda en función de los ángulos azimutales $\theta_{1(2)}$ (ángulos formados por $\mathbf{k}_{1(2)}$ con el eje z), y polares $\varphi_{1(2)}$ (ángulos formados por el eje x y las proyecciones de $\mathbf{k}_{1(2)}$ sobre el plano xy) pueden representarse en coordenadas esféricas como:

$$\mathbf{k}_{1(2)} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta_{1(2)} \cos \varphi_{1(2)} \\ \text{sen } \theta_{1(2)} \text{sen } \varphi_{1(2)} \\ \cos \theta_{1(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde el subíndice “1” representa al rayo incidente, y el subíndice “2” indica el rayo refractado o reflejado. La dirección del rayo refractado (o reflejado) está determinado por un perfil de fase espacial $\Phi(x, y)$ de la metasuperficie, el cual es generado por su superficie nanoestructurada [14, 19]. Por ejemplo, una metalente simple tiene un perfil de fase radial $\Phi(r)$, donde la coordenada radial está dada por

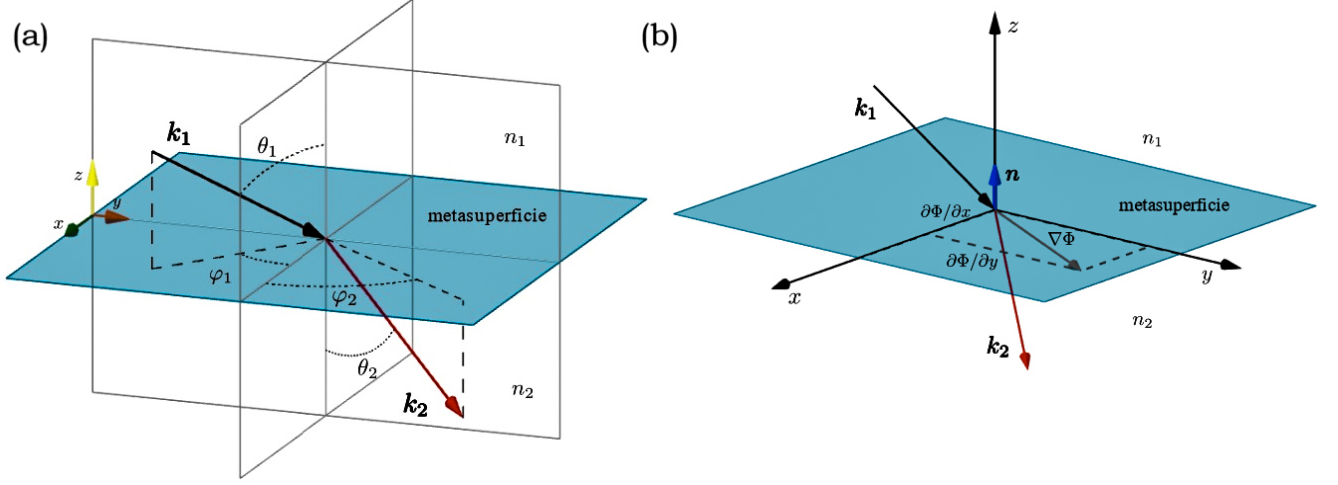


Figura 2.1: Refracción generalizada sobre una metasuperficie (a) Rayo incidente (\mathbf{k}_1) refractado (\mathbf{k}_2) por una metasuperficie (plano xy) con perfil de fase arbitrario $\Phi = \Phi(x, y)$. (b). Gradiente de fase de una metasuperficie (plano xy) que refracta un rayo que incide (\mathbf{k}_1) en ella con dirección arbitraria.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En general, una metasuperficie que tiene un perfil de fase $\Phi(x, y)$ tiene como ley de refracción generalizada (reflexión) dada por las ecuaciones [33, 38]:

$$\begin{cases} k_{02} \sin \theta_2 \cos \varphi_2 = k_{01} \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + \partial\Phi/\partial x \\ k_{02} \sin \theta_2 \sin \varphi_2 = k_{01} \sin \theta_1 \sin \varphi_1 + \partial\Phi/\partial y \end{cases}, \quad (2.2)$$

donde el número de onda es $k_{01(2)} = k_0 n_{1(2)}$. Aquí $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de onda en el espacio libre, y $n_{1(2)}$ es el índice de refracción del medio incidente (transmitido/reflejado).

Definiendo en forma vectorial al gradiente de fase dual $\nabla\Phi$ en el plano xy de la metasuperficie (figura 2.1 (b)),

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \hat{j}, \quad (2.3)$$

combinando las ecuaciones 2.2 y 2.3, tenemos,

$$\nabla\Phi = k_{02} (\sin \theta_2 \cos \varphi_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \hat{j}) - k_{01} (\sin \theta_1 \cos \varphi_1 \hat{i} + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \hat{j}) \quad (2.4)$$

Usando la definición del producto cruz en la ecuación (2.4), la ley de Snell de metasuperficies en forma vectorial se escribe como:

$$k_{02} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_2) \times \mathbf{n} - k_{01} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} = \nabla\Phi, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 son vectores unitarios a lo largo de las direcciones del rayo incidente y refractado, \mathbf{n} representa el vector unitario normal a la metasuperficie como se muestra en la figura 2.1 (b). También la ecuación (2.5) se reduce a la forma clásica de la ley de Snell para superficies puramente refractivas [1], esto haciendo $\nabla\Phi = 0$, es decir, $n_2 (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_2) = n_1 (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)$.

Utilizando propiedades geométricas y definiciones del producto cruz y punto entre tres vectores unitarios $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{n})$, los vectores unitarios de los rayos incidente y refractado se pueden representar como:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} \\ \mathbf{k}_2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_2) \times \mathbf{n} \end{cases}, \quad (2.6)$$

sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.5):

$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{n} + \beta \nabla\Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n}, \quad (2.7)$$

donde $\beta = 1/k_{02} = 1/(k_0 n_2)$ y $\mu = n_1/n_2$.

Dado que el vector $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{n}$ es normal al plano metasuperficie, es ortogonal al vector $\beta \nabla\Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n}$, el cual se encuentra sobre la interfaz (metasuperficie). Por tanto, por el teorema de Pitágoras, la norma del rayo refractado es:

$$1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + |\beta \nabla\Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n}|^2, \quad (2.8)$$

y entonces, reemplazamos el producto punto de la ecuación (2.8) en la ecuación (2.7). Obteniendo así la dirección del rayo refractado en términos de la dirección del rayo incidente, del gradiente de fase y de la normal a la metasuperficie [39],

$$\mathbf{k}_2 = \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} + \beta \nabla\Phi \pm \sqrt{1 - |\beta \nabla\Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n}|^2} \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) muestra dos posibles valores, los cuales dependen del signo positivo o negativo de la raíz. El signo negativo es para refracción y el positivo para reflexión. El rayo refractado se propaga del otro lado de la metasuperficie, es decir, \mathbf{k}_2 tiene la misma dirección a lo largo de la normal que \mathbf{k}_1 , lo cual implica que el signo de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_2$ es igual al signo de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1$ (figura 2.1 (b)). Por otra parte, para algunas aplicaciones se puede calcular este signo de forma automática, siguiendo la regla de los signos [35] y puede ser agregado en lugar del signo \pm . Aclarado esto, escribimos la dirección de la luz refractada en forma vectorial para una metasuperficie con un gradiente de fase 2D, válido para cualquier rayo de luz incidente con dirección arbitraria \mathbf{k}_1 , en términos de producto cruz está dado por:

$$\mathbf{k}_2 = \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} + \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla\Phi - \sqrt{1 - \left| \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla\Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} \right|^2} \mathbf{n}, \quad (2.10)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en espacio libre, $\mu = n_1/n_2$, n_1 es el índice de refracción del medio incidente y n_2 del medio refractado. Usando la relación entre el producto punto y cruz, la dirección del rayo refractado en términos del producto punto está dado por:

$$\mathbf{k}_2 = \mu [\mathbf{k}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{n}] + \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla \Phi - \sqrt{1 - \left| \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla \Phi + \mu [\mathbf{k}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{n}] \right|^2} \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

En el caso de la reflexión, la raíz en la ecuación (2.9) es positiva. Esto porque el rayo reflejado se propaga en el mismo lado de la metasuperficie que el rayo incidente, y la dirección del rayo reflejado \mathbf{k}_{2r} tiene dirección opuesta a la proyección con la normal del rayo incidente \mathbf{k}_1 , es decir, el signo de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_{2r}$ es opuesto al signo de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1$. Además, considerando que $n_2 = n_1$ en la ecuación (2.9), y el signo positivo de la raíz, la expresión de la dirección del rayo reflejado en forma vectorial y en términos del producto cruz, es:

$$\mathbf{k}_{2r} = (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} + \frac{\lambda_0}{2\pi n_1} \nabla \Phi + \sqrt{1 - \left| \frac{\lambda_0}{2\pi n_1} \nabla \Phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} \right|^2} \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

y utilizando nuevamente las relaciones vectoriales entre producto punto y cruz, la dirección del rayo reflejado puede escribirse en términos de productos puntos como:

$$\mathbf{k}_{2r} = [\mathbf{k}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{n}] + \frac{\lambda_0}{2\pi n_1} \nabla \Phi + \sqrt{1 - \left| \frac{\lambda_0}{2\pi n_1} \nabla \Phi + [\mathbf{k}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{n}] \right|^2} \mathbf{n}. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.10)-(2.13) describen la trayectoria 3D de los rayos de luz transmitido o reflejado a través de una metasuperficie [39]. La validez de estas ecuaciones fue probada comparando sus resultados con los valores obtenidos con la ecuación (2.2) para mismos rayos incidentes, dando como resultado los mismos valores con ambos enfoques. Por otra parte, las ecuaciones (2.10)-(2.13) se reducen a la forma vectorial clásica de la ley de refracción y reflexión para interfaces puramente refractivas cuando se hace $\nabla \Phi = 0$, considerando $|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| = |\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1|$ [34, 36]. Además, las ecuaciones (2.10) y (2.13) son equivalentes a las reportadas por Gutiérrez et. al. [40], las cuales fueron deducidas por un procedimiento totalmente diferente. La deducción presentada aquí es basada en un enfoque geométrico sencillo, fácil de entender y práctico de aplicar a metasuperficies para iluminación.

2.3. Trazo de rayos en metasuperficies

Para visualizar la aplicación de las ecuaciones (2.10)-(2.13) mostramos los rayos de luz transmitidos y reflejados por una metasuperficie, trazando campos vectoriales 3D. En el caso de una metálice cuyo gradiente de fase varía espacialmente, por ejemplo, considerando el perfil de fase:

$$\Phi(r) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\sqrt{r^2 + f^2} - f \right), \quad (2.14)$$

donde f es la distancia focal, λ_0 es la longitud de onda y la coordenada radial es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se puede usar la ecuación (2.14) en la ecuación (2.11) para mostrar los rayos de luz transmitidos a través de una metalente mediante un gráfico de un campo vectorial 3D. En la figura 2.2 se muestra un conjunto de 100 rayos de luz, incidiendo sobre una metalente de área 16 mm^2 . La distancia focal es $f = 19 \text{ mm}$, $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ y los índices refractivos $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.5$. La figura 2.2 (a) muestra la propagación de rayos de luz con direcciones fijas desde una fuente de luz puntual, mientras que la figura 2.2 (b) ilustra la propagación de rayos de luz incidentes con direcciones aleatorias en los intervalos $\theta_1 \in [0, \pi/2]$ y $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.

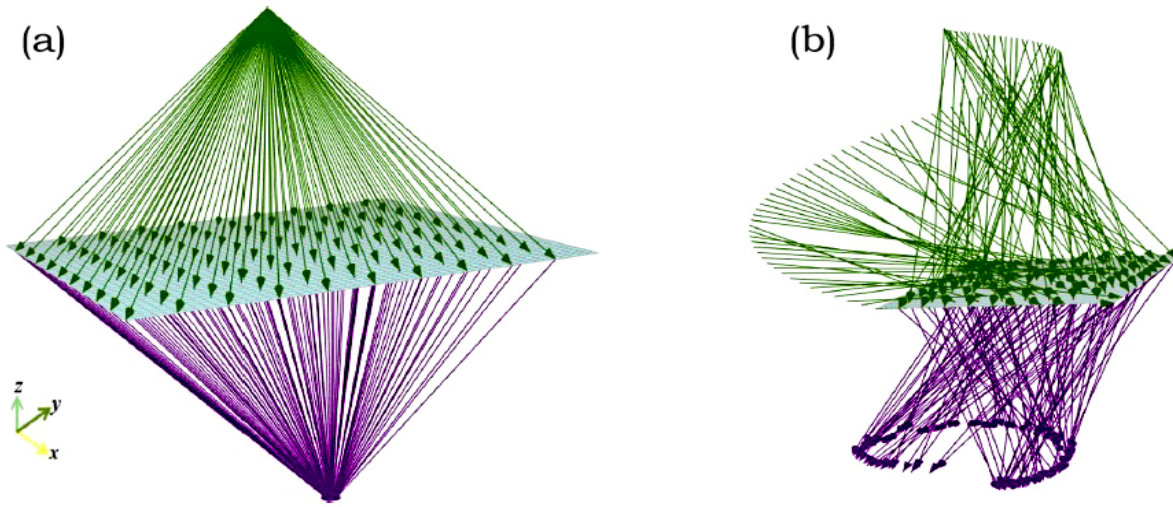


Figura 2.2: Trazo de rayos para transmisión de luz a través de una metalente. (a) Refracción de rayos desde una fuente puntual. (b) Refracción de rayos incidentes con dirección aleatoria.

Para metasuperficies con perfil de fase constante, se graficó un conjunto de 100 rayos de luz. La longitud de onda de la luz utilizada es de $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, la metasuperficie separa dos medios con índices de refracción $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.5$. El gradiente de fase dual es $\nabla\Phi = (\pi/7 \times 10^6, \pi/9 \times 10^6) \text{ m}^{-1}$ en las figuras 2.3 (a)-(c). La figura 2.3 muestra la simulación de diferentes tipos de incidencia, es decir, se consideran diferentes direcciones del vector \mathbf{k}_1 sobre una metasuperficie con un gradiente de fase constante. La figura 2.3 (a) muestra la refracción de la luz que tiene una dirección fija dada por $(\theta_1 = \pi/4, \varphi_1 = \pi/3)$, la figura 2.3 (b) muestra la refracción de la luz incidente con dirección aleatoria $\theta_1 \in [0, \pi/2]$ y $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$. La figura 2.3 (c) muestra la reflexión de rayos incidentes con dirección de incidencia fija $(\theta_1 = \pi/3, \varphi_1 = \pi/4)$. Finalmente, la figura 2.3 (d) muestra la refracción sobre una metasuperficie con un gradiente de fase polar dado por $\nabla\Phi = (\partial\Phi/\partial r = \pi/4 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \partial\Phi/\partial\psi = 2\pi/10 \text{ rad}^{-1})$, y trazando rayos incidentes con direcciones aleatorias $\theta_1 \in [0, \pi/2]$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ (ver Apéndice A).

Como puede observarse en las figuras 2.2 y 2.3, las ecuaciones vectoriales deducidas permiten realizar

cálculos para cualquier número de rayos incidentes sobre una metasuperficie, a cualquier longitud de onda y para gradientes de fase en 1D o 2D, constante o variable. Estas ecuaciones pueden adaptarse a algoritmos numéricos para obtener una descripción fiable del desempeño de un sistema óptico con metasuperficies, por ejemplo, el diseño de metalentes acromáticas híbridas [41].

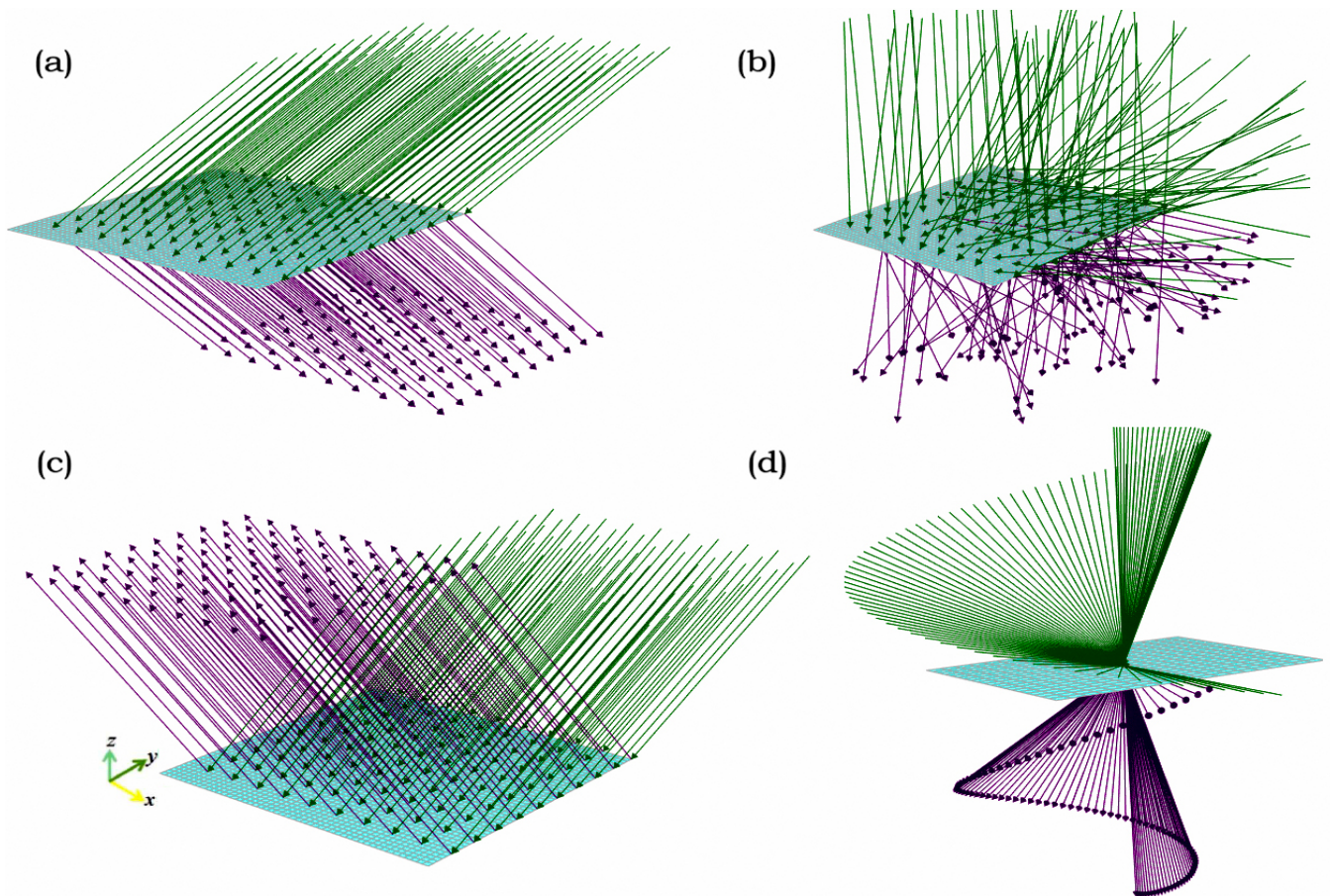


Figura 2.3: Trazo de rayos para refracción y reflexión sobre una metasuperficie. (a) Refracción de rayos incidentes con dirección fija. (b) Refracción de rayos incidentes con dirección aleatoria. (c) Reflexión de rayos incidentes con dirección fija. (d) Refracción sobre una metasuperficie con gradiente de fase polar y para rayos incidentes con dirección aleatoria.

Capítulo 3

Metaóptica no formadora de imágenes

Las metalentes, mayormente se estudian y aplican a sistemas en el campo de formación de imágenes, donde un punto en el espacio objeto se mapea a un punto correspondiente en el espacio imagen. En este capítulo exploraremos las metalentes y los metaespejos utilizados para analizar la transferencia y captación óptima de energía luminosa a través de ellos. Este estudio es motivado por las características especiales de las metalentes, como su compactibilidad y flexibilidad en su diseño óptico. Estas propiedades tienen el potencial de abrir nuevas oportunidades en el campo de la óptica no formadora de imágenes, es decir, en las áreas de iluminación y concentración de luz. En estas áreas de estudio se pueden aprovechar la libertad de diseño y fabricación de las metasuperficies, mediante el control de la forma, tamaño, posición y orientación de los meta-átomos. Esto ofrece un gran potencial para controlar mejor la distribución espacial de la luz como se desea en la OA.

Como parte de nuestros objetivos, en este capítulo introduciremos tres sistemas básicos de la óptica no formadora de imágenes, diseñados con metalentes, estos sistemas son el metaconcentrador compuesto (análogo al concentrador parabólico), las metalentes colimadoras con reflexión total interna (metalentes TIR) y la metalente condensadora; para determinar características de estos metasistemas se utilizan las leyes deducidas en capítulo anterior; la presentación de estos sistemas representan nuevamente una valiosa contribución al desarrollo de la OA con metasuperficies.

3.1. Introducción

Los dos problemas principales que aborda la óptica no formadora de imágenes son la concentración de luz y la iluminación. En la concentración de luz los rayos de los bordes de una fuente luminosa son dirigidos hacia los bordes del detector (o región de concentración), esto asegura que toda la luz emitida por la fuente caerá sobre el detector, lo que se conoce como principio de rayos de borde. En el caso de iluminación, los rayos de la fuente son dirigidos a puntos específicos sobre una pantalla para producir un distribución espacial de luz deseada. Las lentes refractivas y reflectivas no formadoras de imágenes tales como aquellas usadas en colimadores y concentradores frecuentemente son demasiado

voluminosas y pesadas para ser usadas en dispositivos pequeños. Su diseño y fabricación depende de la optimización de la forma de su superficie curva (refractiva-reflectiva). Por otro lado, las metalentes son ultra compactas y su fabricación es potencialmente más fácil, por ejemplo, con el uso adecuado de métodos de fabricación modernos, el perfil de fase de las metalentes puede ser digitalizado mediante meta-átomos que pueden construirse mediante técnicas estándar de nanolitografía que normalmente son usadas en la industria de circuitos integrados.

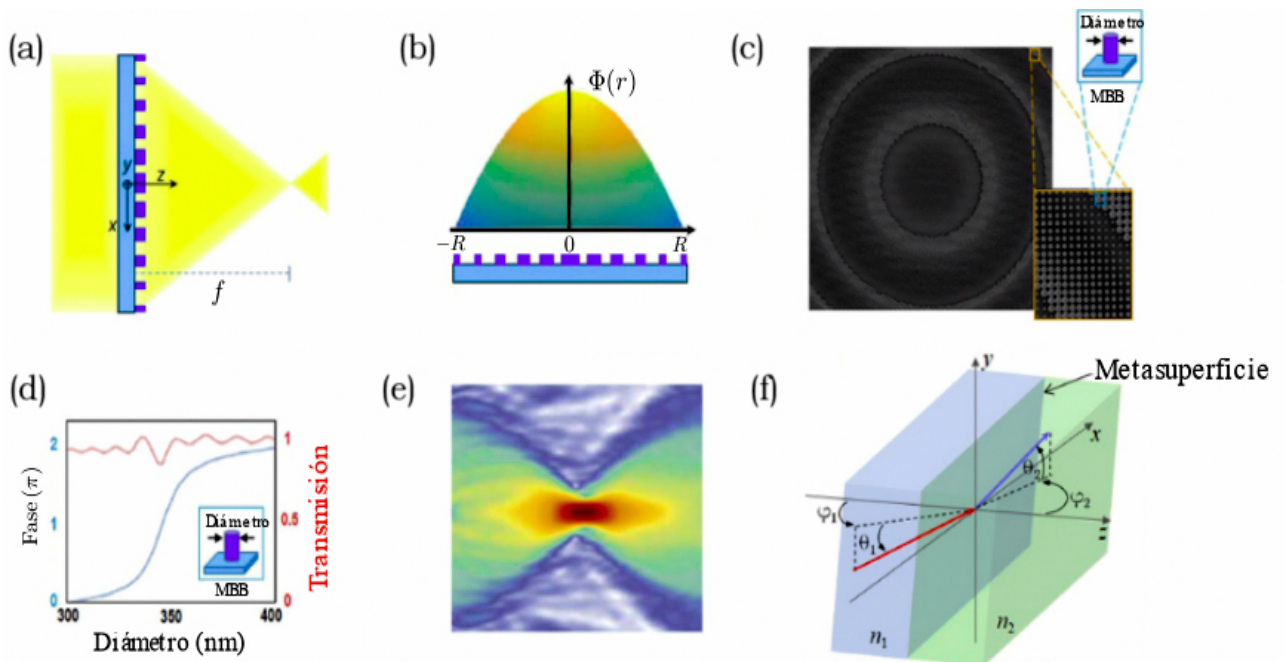


Figura 3.1: Características ópticas de las metalentes. (a) Diagrama de una metalente formadora de imágenes. (b) Perfil de fase hiperbólico de una metalente con radio R . (c) Metasuperficie construida a partir de su perfil de fase, que depende de la forma y tamaño de sus nanoantenas para enfocar un haz de luz. (d) Fase y transmitancia de luz refractada por una metasuperficie como función del diámetro de nano antenas cilíndricas. (e) Perfil de intensidad simulada en el plano xy en la región focal a escala nanométrica. (f) Representación de la refracción de luz por una metasuperficie con perfil del fase arbitrario.

La planicidad y alta flexibilidad de diseño de las metasuperficies son propiedades ideales para la OA, el perfil de fase 2D de una metasuperficie tiene un efecto equivalente a la forma de la superficie 3D en la óptica refractiva o reflectiva. Los diseños ópticos de metalentes se pueden realizar determinando el perfil de fase 2D óptimo de una metasuperficie. Por ejemplo, para luz con incidencia normal, una metalente formadora de imágenes debe tener un perfil de fase:

$$\Phi(r) = \pm k \left(\sqrt{r^2 + f^2} - f \right), \quad (3.1)$$

donde k es el número de onda, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia radial al centro de la metalente, f es la longitud focal y el signo positivo y negativo indica si la metalente es divergente o convergente, respectivamente. Este es un perfil de fase hiperbólico que enfoca luz colimada hacia el plano focal donde el foco es la distribución de intensidad del disco de Airy. De alguna manera, el perfil de fase $\Phi(x, y)$ de una metalente es equivalente al perfil de superficie de una lente refractiva en la óptica tradicional. Tal perfil de fase se construye utilizando un patrón espacial de nanoelementos, las cuales actúan como antenas en miniatura que localmente imparten un desplazamiento de fase deseado. Las nanoantenas cilíndricas de diámetros y alturas del orden de longitud de onda han probado tener una alta resolución, además son insensibles a la polarización y muestran alta transmitancia [42]. Variando su tamaño, los meta-átomos producen un rango de fase de 2π y una transmitancia o reflectancia alta y cuasiuniforme (figura 3.1(d)). La eficiencia óptica y las limitaciones de fabricación dependen del índice de refracción de los nanoelementos y la separación entre ellos. Cuando se tiene un perfil de fase apropiado $\Phi(x, y)$, una metalente se diseña con este, el cual sirve para seleccionar los meta-átomos y su distribución espacial. En metaóptica de formación de imágenes, el campo de luz enfocado se verifica numéricamente mediante simulaciones a escala nanométrica (figura 3.1(f)), el cual se basa en el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD). En metaóptica no formadora de imágenes, también podría aplicarse el FDTD para los cálculos ya que se necesita que el diseño sea preciso ya que el tamaño del detector o la metalente son de orden micrométrica.

En general, el desempeño de los sistemas ópticos en la óptica de formación de imágenes se analiza mediante cálculos de óptica ondulatoria y métodos FDTD. Sin embargo, su diseño óptico es realizado principalmente bajo óptica geométrica utilizando las leyes generalizadas de refracción y reflexión [19, 31], utilizadas para corrección de aberraciones. En óptica de formación de imágenes, si las aberraciones son más grandes que el disco de Airy limitado por difracción, el diseño principal se basa en optimización de trazo de rayos [43], en problemas de OA, los discos de enfoque no son necesarios, ya que el detector o pantalla son mucho más grandes que el disco de Airy y el diseño óptico se basa en las leyes de refracción y reflexión para metasuperficies.

En la metaóptica anidólica, es decir, OA con metasuperficies, el uso de las nanoantenas para imponer un perfil 2D de desplazamiento de fase $\Phi(x, y)$ a un conjunto de frentes de onda incidentes, tiene el efecto equivalente a la forma 3D de la superficie en OA refractiva o reflejante. Esto tiene el potencial de simplificar el análisis, diseño y construcción en la OA, la cual se suele caracterizar por el uso de lentes 3D voluminosas con superficies de formas complejas. En general, el perfil de fase requerido se deduce a partir de las leyes generalizadas de reflexión y refracción que en el caso de una metasuperficie con variación de fase radial es [14]:

$$\frac{1}{k_0} \frac{d\Phi}{dr} = n_2 \sin \theta_2 - n_1 \sin \theta_1, \quad (3.2)$$

donde n_1, n_2 son los índices de refracción del medio donde incide y se transmite la luz, respectivamente; y k_0 es el número de onda en el vacío, los ángulos θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y transmisión, respectivamente. De la ecuación (3.2), se puede deducir el perfil de fase requerido de una metalente. Por ejemplo, la ecuación (2.1) se obtiene al resolver la ecuación diferencial (3.2) considerando $\sin \theta_1 = 0$ y $\sin \theta_2 = r(r^2 + f^2)^{-1/2}$ que básicamente es la condición geométrica para enfocar un haz de luz con incidencia normal ($\theta_1 = 0$). Sin embargo, en general, la metasuperficie puede tener una variación de fase arbitraria y las leyes generalizadas de reflexión y refracción en una interfaz con gradiente de fase 2D vienen dadas por las ecuaciones acopladas [19]:

$$\begin{cases} \frac{1}{k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = n_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = n_2 \sin \theta_2 - n_1 \sin \theta_1 \end{cases}, \quad (3.3)$$

donde φ_2 es el ángulo azimutal de la refracción (o reflexión) en el plano xz (figura 3.1(g)), θ_1 es el ángulo de latitud para el haz incidente (que está en el plano yz si $\varphi_1 = 0$), y θ_2 es el ángulo de latitud entre el rayo refractado (o reflejado) y su proyección en el plano xz [19]. Estas ecuaciones son válidas para luz incidente en el plano yz . Para el análisis en óptica no formadora de imágenes es necesario considerar incidencias arbitrarias, por tanto, en el caso general, obtenemos que sólo cambia la primer expresión de la ecuación (3.3) por [33]:

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = n_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 - n_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1, \quad (3.4)$$

donde φ_1 es el ángulo azimutal de incidencia en el plano xz . Las ecuaciones (3.2)-(3.4), junto con las ecuaciones de trazo de rayos exactos (Capítulo anterior), representan la base para análisis y diseños dentro de la metaóptica no formadora de imágenes.

3.2. Metaconcentrador

El sistema óptico clásico para la concentración de luz es el concentrador parabólico (CPC por sus siglas en inglés), que es un concentrador que capta y concentra haces de luz en un rango de ángulos de incidencia sobre un receptor plano (figura 3.2 (a)). Consta de dos espejos parabólicos, A y B, cuyos ejes están inclinados con el ángulo de media aceptación del colector θ_c . Este ángulo indica el máximo ángulo de incidencia del haz de luz, al cual el haz puede ser concentrado dentro del área del receptor o detector dentro del CPC. El CPC 2D alcanza el límite de concentración ideal $C = (\sin \theta_c)^{-1}$ [44, 45].

Un diseño metaóptico básico para la concentración de la luz puede ser el concentrador compuesto por metasuperficies (CCM). El CCM puede diseñarse para capturar y concentrar un haz de luz con divergencia angular delimitada por θ_c (figura 3.2 (b)). Consta de dos metaespejos planos, A y B, cuyos perfiles de fase $\Phi(l)$ podrían diseñarse para enfocar rayos que inciden a un ángulo θ_c hacia el borde del

receptor. Usando la ley de reflexión de metasuperficies se puede derivar el perfil de fase para enfocar los rayos reflejados por los bordes del CCM, que resulta ser:

$$\Phi(l) = -k \left(\sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos \beta} - a - l \sin (\beta - \theta_c) \right), \quad (3.5)$$

donde l es la distancia al borde inferior del metaespejo, donde $l = 0$ es el borde del metaespejo que está en contacto con la esquina del receptor. El parámetro a es el tamaño del receptor y β es el ángulo de inclinación del metaespejo (figura 3.2 (b)).

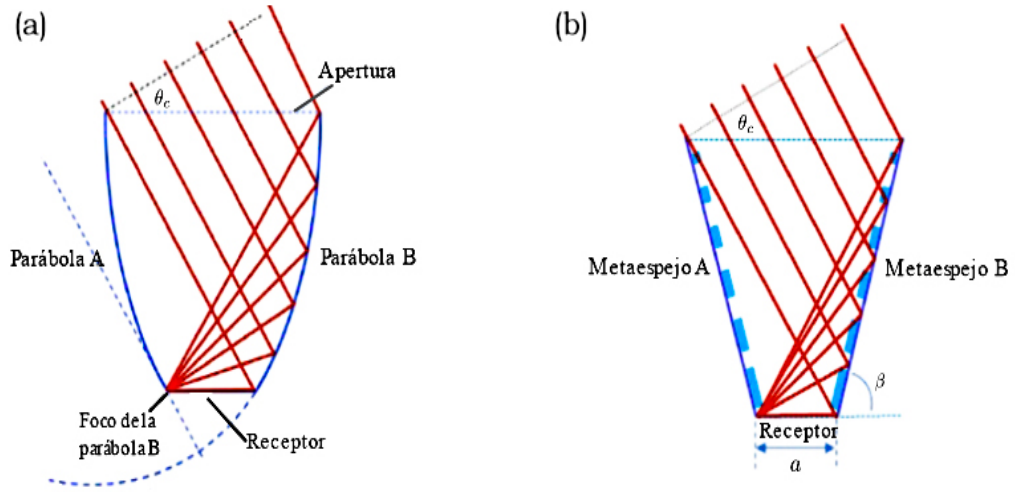


Figura 3.2: Concentrador de luz: (a) Esquema del CPC clásico. (b) Esquema de un metaconcentrador (CCM).

El perfil de fase es una función del ángulo de aceptación media θ_c del CCM. A primera vista, parece que el CCM puede alcanzar una concentración C sin tener una restricción del ángulo θ_c , pero se tendría que examinar todas las pérdidas de eficiencia óptica. Además, el tamaño del CCM parece no tener restricciones severas como las encontradas en el CPC debido a las propiedades geométricas de las parábolas, pero podría tener un valor óptimo de β . En el diseño del CPC se usa el método de cuerdas, que requiere que todos los rayos de luz tengan la misma longitud, que es lo que determina que las superficies del CPC sean dos parábolas inclinadas [44–46]. Curiosamente, la figura 3.2 (b) muestra que los rayos en el CCM se comportan igual que en el CPC, pero con rayos de longitudes diferentes, esto puede explicarse con el desplazamiento de fase debido al perfil de fase del metaespejo, el cual produce una longitud de camino óptico equivalente para cada rayo. Esto es debido a que en el CCM también se puede aplicar el método de cuerdas, aunque la versión modificada para metasuperficies [47]. Un concentrador como el CCM pero con espejos planos en lugar de metaespejos es un típico concentrador “cónico” de “espejo plano”, que no es ideal según las leyes de la termodinámica [44–46]. Sin embargo, las metasuperficies eliminan esta ineficiencia para producir el rendimiento del CCM. Estas observaciones abren nuevas interrogantes para futuras investigaciones.

3.3. Metacolimador

Un diseño óptico para la colimación de la luz es el lente de reflexión total interna (TIR por sus siglas en inglés), en la que la luz sufre reflexión total interna. La lente clásica TIR es un colimador diseñado para proyectar eficientemente luz de una fuente puntual hacia un haz de luz colimado (figura 3.3 (a)). Este colimador consiste de una lente frontal y un espejo parabólico, la fuente está situada en el punto focal de esos elementos ópticos. Este colimador es una solución popular para maximizar la colección de luz emitida por LEDs y redirigirla como un haz de luz estrecho [48].

Un diseño básico metaóptico para un colimador de luz puede ser la metalente TIR, que puede diseñarse para proyectar eficientemente la luz de una fuente puntual hacia un haz colimado mediante metasuperficies (figura 3.3 (b)). Este consiste de una placa plana transparente con una metasuperficie frontal transparente para la colimación directa y un metaespejo para colimar la luz después de la TIR. El perfil de fase de la superficie es hiperbólico $\Phi(r) = -nk(\sqrt{r^2 + t^2} - t)$. Por otra parte, la luz después de la TIR es colimada por un metaespejo con un perfil de fase $\Phi(r) = -nk(\sqrt{r^2 + 4t^2} - 2t)$. Aquí r es la distancia radial de la fuente de luz a un punto en el metaespejo, t es el ancho de la placa y n es el índice de refracción de la placa. El radio de la metasuperficie frontal es $r_L = t(n^2 - 1)^{-1/2}$ y el metaespejo se encuentra a una distancia $r_M = 2r_L$.

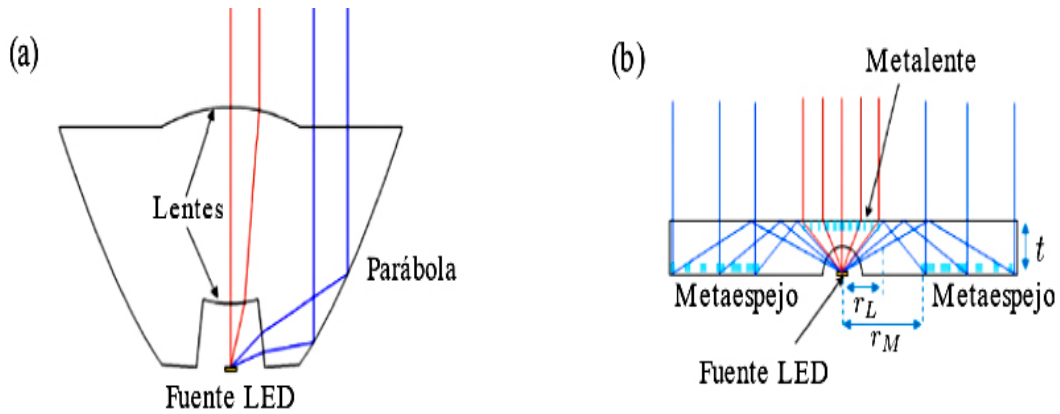


Figura 3.3: Colimador de luz: (a) Esquema de una lente TIR clásica. (b) Esquema de una metalente TIR.

Idealmente, las metalentes TIR colimadoras de luz, son placas delgadas, altamente compactas que no presentan restricciones en el volumen de su geometría paraboloidal como lo hacen las lentes TIR clásicas. Una metalente TIR en modo inverso, como concentradora de luz, fue demostrada recientemente mediante simulaciones precisas de propagación de onda usando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo [49].

3.4. Metalentes condensadoras

Los métodos de diseño de las lentes de forma libre son muy complejos de describir e implementarse [50], las técnicas de optimización pueden perderse en la infinidad de mínimos locales o en la gran cantidad de parámetros ópticos a optimizar en superficies 3D. Por otro lado, el diseño metaóptico sin imágenes es 2D, lo que puede ser más fácil de describir e implementar. Por ejemplo, considere una metalente condensadora de luz que tiene el objetivo de lograr la máxima eficiencia de transferencia de luz entre un conjunto de haces de luz y un detector. Para simplificar, analicemos una metalente con una sola metasuperficie, cuyo propósito es concentrar un cono de haces en un detector. En otras palabras, un conjunto de haces de luz en un rango angular continuo de ángulos de incidencia se requiere concentrar en un objetivo plano (figura 3.4).

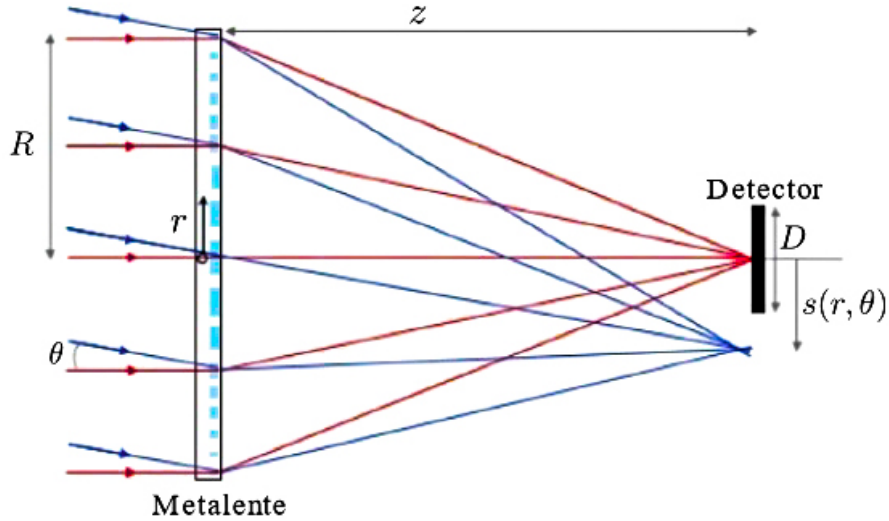


Figura 3.4: Metalente condensadora con una metasuperficie de radio R , el perfil de fase de la metalente debe maximizar la concentración de luz en el detector de diámetro D para el rango angular definido por θ .

El objetivo es maximizar el flujo de radiación en el detector, es decir, maximizar la relación de concentración del flujo radiante $C = \Psi/\Psi_0$, donde Ψ y Ψ_0 son el flujo de radiación en el detector con y sin metaconcentrador, respectivamente. Además, considerando que el flujo de radiación es proporcional tanto al número de rayos de luz que atraviesan el detector de tamaño D como del área proyectada del haz en un ángulo de incidencia. Entonces la concentración C debida a un conjunto de haces de luz incidentes con rango angular $2\Delta\theta = 2\theta_{max}$, es

$$C = \frac{1}{2D \sin \Delta\theta} \int_{-\Delta\theta}^{\Delta\theta} \int_{-R}^R U[s(r, \theta), D] \cos \theta dr d\theta, \quad (3.6)$$

donde R es el radio de la metalente y U es una función asociada al tamaño del área de concentración de luz en un detector situado a una distancia z que es definida como $U = 1$ para $-1/2D < s(r, \theta) < 1/2D$

y $U = 0$ para $|s(r, \theta)| > 1/2D$. Los rayos de luz cruzan el plano del detector a una distancia $s(r, \theta)$ del eje óptico, el cual también depende de la derivada de la fase $d\Phi/dr$ de la metalente y es obtenida de la ecuación (3.2).

$$s(r, \theta) = r - \frac{z \left(\frac{1}{k_0} \frac{d\Phi}{dr} + \text{sen } \theta \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{k_0} \frac{d\Phi}{dr} + \text{sen } \theta \right)^2}}. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, el problema de optimización se reduce a encontrar el perfil de fase de la metalente $\Phi(r)$ que maximiza la doble integral de la ecuación (3.6). El perfil de fase óptimo se obtiene mediante optimización no lineal. Teniendo en cuenta la simetría impuesta por el rango angular $\pm\Delta\theta$, el perfil de fase se puede definir como un polinomio de grado n par para la coordenada radial r como,

$$\Phi(r) = \sum_{n=1}^7 a_n \left(\frac{r}{R} \right)^{2n}. \quad (3.8)$$

Los coeficientes a_n son parámetros de optimización. La optimización se basa en la derivada de la fase $\sum 2nR^{-1}a_n (r/R)^{2n-1}$. Para el primer paso de la optimización, las condiciones iniciales para a_n se eligen para ser $(1/k_0) d\Phi/dr + \text{sen } \theta < 1$ para evitar TIR. Después de múltiples ciclos, se obtienen los parámetros de optimización a_n de manera que la ecuación (3.6) se maximiza. Sin restricciones, el perfil de fase de la metalente $\Phi(r)$ que maximiza la razón de concentración en este problema es el perfil de fase hiperbólico dado por la ecuación (3.1), con un detector colocado a la distancia focal $f = D/2 \tan(\Delta\theta)$. Al agregar restricciones al problema, se pueden alcanzar otras soluciones. Si se utiliza metalentes hiperbólicas con una distancia focal fija $f > D/2 \tan(\Delta\theta)$, la distancia del detector z que maximiza la razón de concentración es más corta que la distancia focal, es decir, $z_0 < f$. La distancia óptima del detector z_0 disminuye exponencialmente con el ángulo de aceptación $\Delta\theta$, es decir, $z_0 \propto \exp(-0,048(\Delta\theta - \Delta\theta_0))$ donde $\Delta\theta_0 = \arctan(D/2f)$. Por ejemplo, con $2\Delta\theta = 20^\circ$, $f = 10$ mm, $R = 5$ mm y $D = 1$ mm la distancia óptima es $z_0 = 7$ mm. El enfoque descrito se puede aplicar a problemas con múltiples metasuperficies o a problemas de razones de concentración 3D, así como a problemas de optimización que impliquen más restricciones.

Capítulo 4

Diseño de metalentes para iluminación

La óptica de forma libre es una rama de la óptica que clásicamente se enfoca en el diseño y fabricación de sistemas ópticos que no se adhieren a las formas convencionales, como lo son las lentes esféricas o planas. En lugar de eso, busca superficies ópticas que se adapten a geometrías más complejas para lograr funciones específicas, lo que ha permitido crear sistemas más compactos, ligeros y eficientes para aplicaciones especializadas [51]. El área más beneficiada por la evolución de la óptica de forma libre es la óptica de iluminación, ya que uno de sus problemas es el de eficientar la transferencia de energía de una fuente de luz y la uniformidad de la distribución espacial de la luz sobre una pantalla, cuyo diseño carece de simetría lineal o rotacional en la mayoría de las veces. Las lentes de forma libre ofrecen una solución a dicho problema mediante el diseño de lentes con superficies asimétricas que proporcionan grados de libertad adicionales utilizados para crear sistemas de iluminación más versátiles y efectivos, un ejemplo de esto son las luces de cruce (bajas) de los automóviles, que se alojan en el interior de los focos delanteros [52].

El diseño de una óptica de forma libre para iluminación consiste básicamente en diseñar una o múltiples superficies de forma libre para direccionar los rayos emitidos por una fuente, hacia el interior y frontera de un patrón de iluminación (figura 4.1 (a)). Por ejemplo, Rengmao Wu et al. en [53] diseñaron una lente de forma libre que por medio de reflexión total interna (TIR) redirecciona los rayos emitidos por una fuente para producir un patrón de iluminación elíptico uniforme en un plano de iluminación (figura 4.1 (b)). Mientras que diseños ópticos más avanzados permiten producir patrones de iluminación más complejos. Por ejemplo, en la referencia [54] se redirecciona a los rayos mediante una lente de forma libre refractiva y el patrón de iluminación obtenido mediante una simulación son los caracteres “mao” iluminados dentro una elipse ligeramente iluminada sobre una pantalla (figura 4.1 (c)).

Los métodos de diseño de una óptica de forma libre en iluminación se dividen en dos clases de acuerdo al tipo de fuente con el que se trabaja [55],

- 1) Algoritmos zero-étendue, son algoritmos para fuentes puntuales o frentes de onda planos, se basan en la suposición de fuente ideal e incluyen métodos como el de mapeo de rayos, método de ecuación

Monge-Ámpère y método cuadrático.

- 2) Algoritmos de diseño para fuentes de luz extendida que incluyen optimización de iluminación, retroalimentación de diseño y método de múltiples superficies simultáneas.

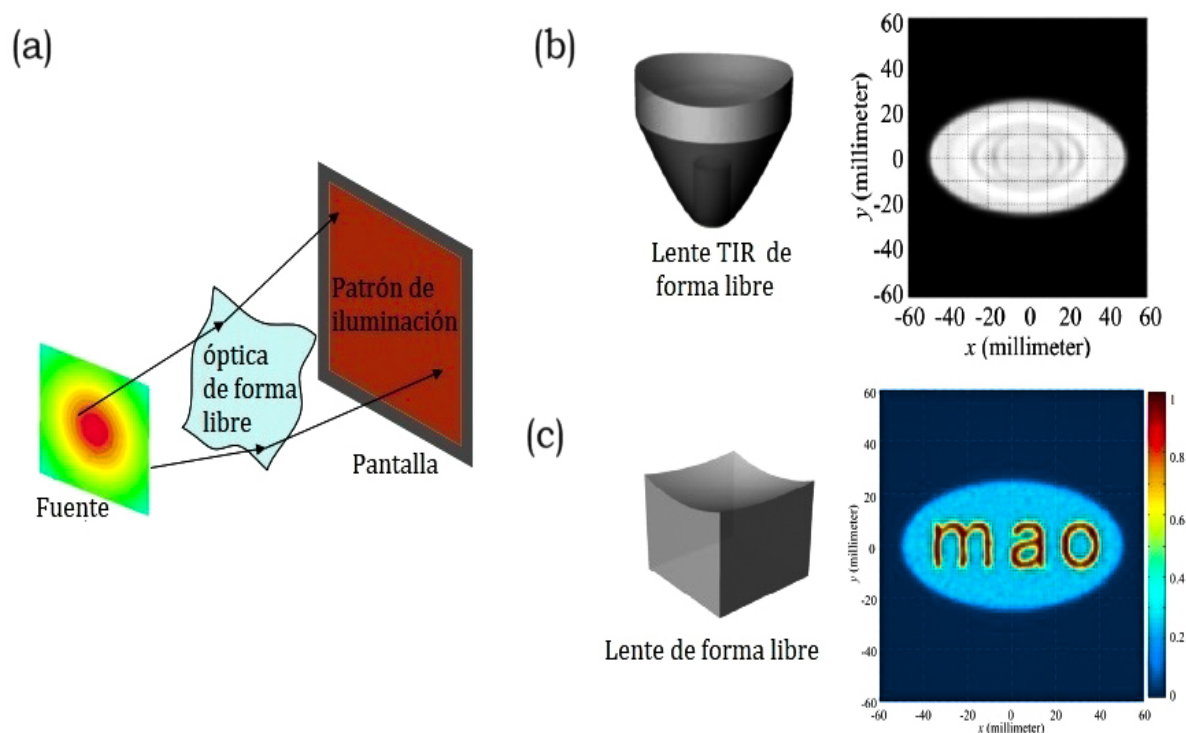


Figura 4.1: Lente de forma libre. (a) Geometría para el diseño de una lente de forma libre. (b) Iluminación con la lente de forma libre TIR [53]. (c) Iluminación con una lente de forma libre refractiva [54], se muestra un segmento de la lente y el patrón de iluminación resultante.

Respecto a los algoritmos zero-étendue, el principio de operación de los métodos mapeo de rayos y Monge-Ámpère es el mismo, es decir, ambos se basan en la conservación del flujo luminoso, que establece que la cantidad total de luz que sale de una fuente debe ser igual a la cantidad total de energía sobre la pantalla [55]. La principal diferencia entre ambos métodos radica en si hay o no simetrías en el mapeo de la luz. El método de mapeo de rayos considera algún tipo de simetría en la geometría del mapeo, dando como resultado ecuaciones diferenciales ordinarias con valores a la frontera que al resolverse proporcionan los datos para construir la superficie de la lente [56]. Por otro lado, el método Monge-Ámpère no considera simetrías en el mapeo y de él resulta una ecuación diferencial parcial no lineal que no posee solución analítica.

Considerando la relevancia de la óptica de forma de libre, sus métodos de diseño y las características de las metasuperficies, en este trabajo de doctorado, nos propusimos el objetivo de deducir los modelos matemáticos a partir de los cuales se pudiera diseñar una metalente de fase libre (MFL) que optimice la distribución de energía sobre una pantalla, proveniente de una fuente de luz. En esta Sección se detalla inicialmente el método matemático elegido y los modelados para diferentes tipos de incidencia y perfiles de fase de una metasuperficie. Cabe mencionar que este modelado es innovador y una vez determinada su solución numérica promete mejorar el diseño de metasuperficies para funciones específicas.

4.1. Método Monge-Ámpere

El fundamento teórico del método de Monge-Ámpere en ciencias es el problema de transporte óptimo (TO), que en general establece la búsqueda de la trayectoria óptima $u(x)$ para transferir una densidad inicial I_0 hacia un lugar objetivo x a un costo (pérdidas) mínimo [57], donde el costo total (M) de la transferencia es la suma de los costos $C(x, u(x))$, lo que se evalúa mediante:

$$M = \int_{\Omega_0} C(x, u(x)) I_0(x) dx, \quad (4.1)$$

donde Ω_0 es el dominio inicial. Al minimizar el funcional M se obtiene un mapeo óptimo $u: \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$, que bajo una ley de conservación (restricción) conserva el volumen o área, dicho de otra manera, la densidad inicial I_0 en su dominio Ω_0 debe ser igual a la densidad transferida y concentrada en el dominio Ω_1 ,

$$\int_{\Omega_0} I_0(x) dx = \int_{\Omega_1} I_1(y) dy. \quad (4.2)$$

Teóricamente está establecido y demostrado que si $C(x, u(x))$ es una función convexa, el problema de minimización del funcional ecuación (4.1) bajo la restricción ecuación (4.2) tiene solución única [58]; y si además, la función costo tiene la forma $C(x, u(x)) = |x - u(x)|^2$, la solución al problema de TO es el mapeo $u = \nabla\phi$, donde ϕ , es una función escalar.

Considerando las generalidades anteriores del método de Monge-Ámpere en el problema de iluminación, de diseñar una o varias lentes para que la transferencia de energía entre una fuente y una pantalla se lleve a cabo con pérdidas mínimas, se puede establecer teóricamente como un problema de TO [59] que al ser solucionado proporciona el mapeo óptimo y este a su vez da la forma de la lente que mejor redirige la luz hacia la pantalla [60]. De acuerdo al problema de TO el mapeo óptimo puede determinarse a partir de la ley de conservación (restricción), que en el caso de problemas de iluminación se establece como a continuación se explica [61].

El problema de TO se puede definir en términos de la intensidad de la fuente de luz I_0 y de la irradiancia en la pantalla iluminada I_1 . Es decir, la distribución de intensidad $I_0(x, y)$ en un dominio Ω_0 de una

fuente de luz es igual a la distribución de energía o irradiancia $I_1(t_x, t_y)$ sobre la pantalla en un dominio Ω_1 , es decir,

$$\int \int_{\Omega_0} I_0(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega_1} I_1(t_x(x, y), t_y(x, y)) dt_x dt_y. \quad (4.3)$$

Al considerar la relación entre los sistemas de coordenadas de la fuente (x, y) , y las coordenadas de la pantalla $t_x(x, y), t_y(x, y)$, se expresa como,

$$\int \int_{\Omega_0} I_0(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega_1} I_1(t_x, t_y) |J(t_x, t_y)| dx dy, \quad (4.4)$$

donde $|J(t_x, t_y)|$ es el módulo de la matriz Jacobiana dado por:

$$|J(t_x, t_y)| = \left(\frac{\partial t_x}{\partial x} \frac{\partial t_y}{\partial y} - \frac{\partial t_x}{\partial y} \frac{\partial t_y}{\partial x} \right), \quad (4.5)$$

y reescribiendo la ecuación (4.4),

$$\int \int_{\Omega_0} [I_0(x, y) - |J(t_x, t_y)| I_1(t_x, t_y)] dx dy = 0, \quad (4.6)$$

dado que la integral se realiza sobre una región Ω_0 cuya área, en general es diferente de cero, la ecuación (4.6) se satisface cuando se cumple,

$$I_0(x, y) - |J(t_x, t_y)| I_1(t_x, t_y) = 0, \quad (4.7)$$

finalmente, de esta ecuación se obtiene la condición de la conservación de energía en su forma local,

$$I_0(x, y) = |J(t_x, t_y)| I_1(t_x, t_y). \quad (4.8)$$

La solución a la ecuación (4.8) es la solución a la ecuación diferencial parcial (EDP) que resulta de ella, en el caso cuando la función mapeo es el gradiente de una función escalar convexa ϕ ,

$$(t_x, t_y)^T = \nabla \phi, \quad (4.9)$$

la conservación de energía reescrita en términos de ϕ y $\nabla \phi$, es

$$I_0(x, y) = I_1(\nabla \phi) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right), \quad (4.10)$$

que como se observa, de ella resulta una EDP de segundo orden, no lineal, llamada ecuación de Monge-Ámpere, siendo esta la razón del origen del nombre de este método. Y cabe señalar que la solución a este tipo de ecuación se da de forma numérica utilizando diferencias finitas y algún método iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones algebraicas no lineal, por ejemplo, el método de Newton. Hasta ahora no hemos encontrado su solución en la literatura, la forma de resolverla es una caja negra ya que no se ha publicado en detalle, sólo se menciona a grandes rasgos.

4.2. Diseño de una metalente de perfil de fase libre (MFL)

Podemos definir una metalente de perfil de fase libre (MFL) como una metalente cuya distribución espacial de desplazamientos de fase que introduce tiene forma libre. Es decir, no tiene la forma de los perfiles de fase de las metalentes clásicas con simetrías radiales, usadas en metalentes formadoras de imágenes, como la hiperbólica clásica o la cuadrática para metalentes de campo de vista amplio. Estas MFL se determinan a partir del diseño de iluminación deseado y del tipo de fuente con que se trabaje. Para establecer el diseño general de una MFL, consideramos una fuente de luz con una distribución de intensidad $I(x, y)$ sobre una Sección transversal Ω_1 con frontera $\partial\Omega_1$ sobre la metalente. Consideramos una metalente con un gradiente de fase dual $\nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y)$, donde Φ_x y Φ_y son las derivadas parciales de primer orden del perfil de fase deseado Φ . Cuando un rayo de luz arbitrario con dirección \mathbf{I} se propaga desde la fuente e incide en un punto $P(x, y, z)$ sobre una metalente, es refractado en dirección \mathbf{O} para finalmente, intersectar a la pantalla en el punto $T(t_x, t_y, t_z)$ dentro (Ω_2) o en la frontera ($\partial\Omega_2$) del patrón de iluminación con irradianza $E(t_x, t_y)$, como se puede observar en la figura 4.2. De acuerdo al método Monge-Ámpère antes descrito, la conservación de energía entre la distribución de intensidad de la fuente y la irradianza sobre la pantalla, en su forma local puede establecerse como:

$$I(x, y) = |J(t_x, t_y)| E(t_x, t_y). \quad (4.11)$$

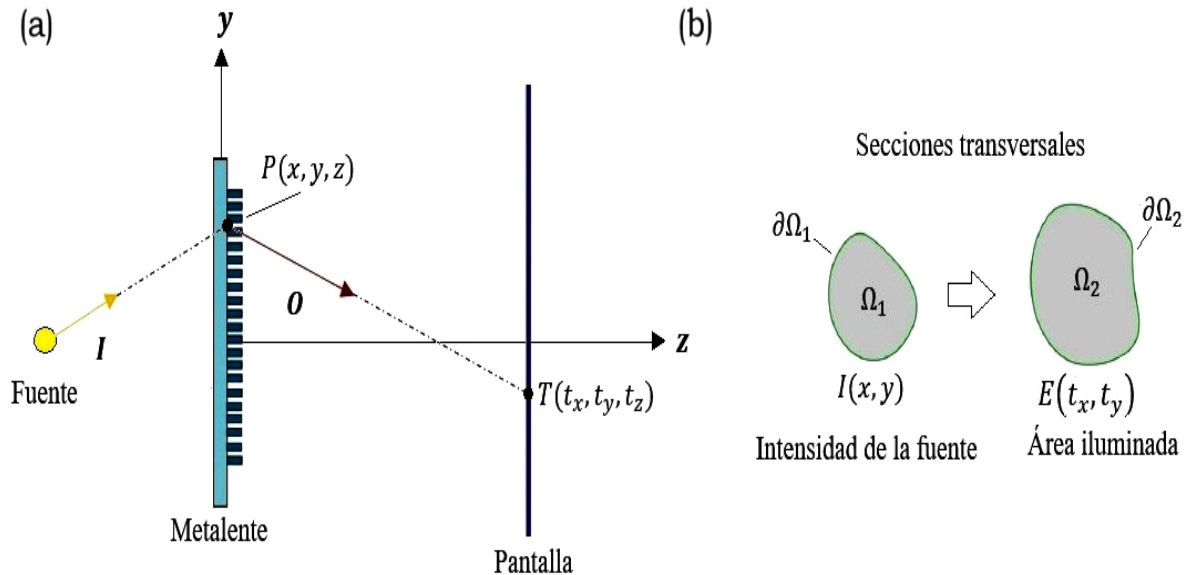


Figura 4.2: Diseño de una MFL. (a) Geometría del diseño general de una MFL. (b) Secciones transversales de las distribuciones de intensidad e irradianza de la fuente (en la metalente) y la pantalla, respectivamente.

En la figura 4.2, se observa que la línea recta cuya dirección es el vector unitario $\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ y que pasa por los puntos $P(x, y, z)$ y $T(t_x, t_y, t_z)$, que tiene como ecuación vectorial,

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} + \alpha \mathbf{O}, \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

de la cual, las coordenadas sobre la pantalla son:

$$t_x = x + (t_z - z) \frac{O_x}{O_z}, \quad t_y = y + (t_z - z) \frac{O_y}{O_z}. \quad (4.13)$$

El vector unitario \mathbf{O} es el rayo refractado, que de acuerdo a ley vectorial generalizada para metasuperficies, ecuación (2.10), es:

$$\mathbf{O} = \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{n} + \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla \Phi - \sqrt{1 - \left| \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \nabla \Phi + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{n} \right|^2} \mathbf{n}. \quad (4.14)$$

El vector \mathbf{I} es la dirección del rayo incidente, en el caso de que el origen del sistema de coordenadas se eligiera en la fuente de luz, el vector \mathbf{I} estaría dado por $\mathbf{I} = \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$, donde \mathbf{P} es el vector de posición trazo desde el origen a cada punto sobre la metalente. De acuerdo a las ecuaciones (4.13) y (4.14), las coordenadas sobre la pantalla (t_x, t_y) son funciones de x, y, Φ_x y Φ_y , es decir,

$$t_x = t_x(x, y, \Phi_x, \Phi_y), \quad t_y = t_y(x, y, \Phi_x, \Phi_y), \quad (4.15)$$

por lo tanto, al sustituir la ecuación (4.14) en (4.13) y a partir de esto calcular la matriz Jacobiana, la ecuación (4.11) arroja una ecuación diferencial con valores a frontera cuya solución proporcionará el perfil de fase deseado $\Phi(x, y)$ de la metalente y con ello se puede diseñar la nano-estructura de esta, es decir, la forma y dimensiones óptimas de sus nanoantenas para lograr el patrón de iluminación deseado.

4.3. Modelos matemáticos para el diseño de una MFL

En esta Sección se proponen y desarrollan cuatro modelos matemáticos para el diseño de metalentes de fase libre basándonos en el problema de transporte óptimo. Los cálculos se realizan para incidencia de luz normal y oblicua sobre metalentes con perfiles de fase $\Phi(r)$, $\Phi(r, \varphi)$ y $\Phi(x, y)$. Se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales no lineales sujetas a condiciones de frontera no lineales que dependen de la forma específica del patrón de iluminación, la solución a dichas ecuaciones debe obtenerse numéricamente porque analíticamente no es posible.

4.3.1. Incidencia normal de luz sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$

En este caso, se tiene un haz de luz con distribución de intensidad $I(r, \varphi)$, una metalente con perfil de fase $\Phi(r)$ y un patrón de irradianza en cuyo interior y frontera están formados por los puntos $T(t_r, t_\varphi)$. Cuando un rayo de luz (\mathbf{I}) se propaga desde la fuente hasta chocar en un punto P sobre la metalente,

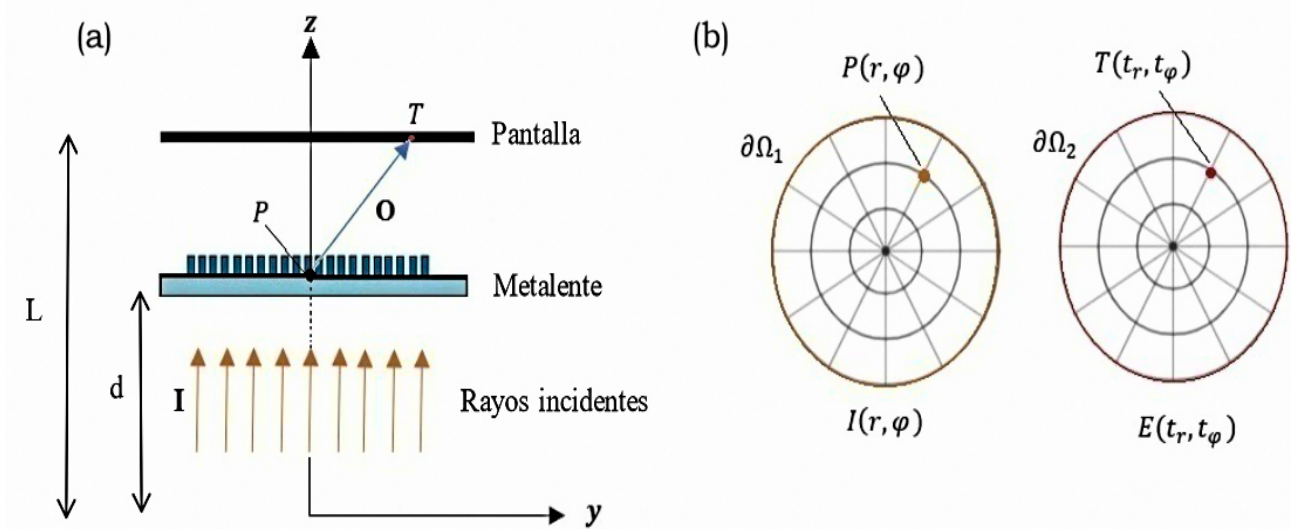


Figura 4.3: Diseño de una MFL para incidencia normal de rayos de luz. (a) Propagación de rayos desde una fuente que inciden perpendicularmente sobre una metalente y son refractados hacia puntos T sobre la pantalla. (b) Secciones transversales de la distribución de intensidad sobre la metalente y del área iluminada.

es refractado (O) y dirigido hacia puntos dentro (Ω_2) y en la frontera ($\partial\Omega_2$) del área iluminada como se observa en la figura 4.3.

Como los rayos incidentes, inciden normalmente sobre la metalente, pueden describirse como,

$$I = (0, 0, 1),$$

de la ecuación (4.14) y realizando una transformación de coordenadas rectangulares a polares, los rayos refractados $O(O_x, O_y, O_z) \subset \mathbb{R}^3$ están definidos por el campo vectorial:

$$O = \beta \left(\Phi_r, \frac{1}{\beta} \varphi, -\frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2 \Phi_r^2} \right), \quad (4.16)$$

donde $\beta = 1/(k_0 n_2)$ y Φ_r es la derivada de la fase Φ respecto a r . Considerando la ecuación (4.13) y que $t_r^2 = t_x^2 + t_y^2$, las coordenadas sobre la pantalla $T \subset \mathbb{R}^2$ son dadas por:

$$T(t_r, t_\varphi) = \beta \left(r - \frac{(L-d)}{\sqrt{1 - \beta^2 \Phi_r^2}} \Phi_r, \frac{1}{\beta} t_\varphi \right), \quad (4.17)$$

donde d y L son las distancias del origen a la metalente y a la pantalla, respectivamente, r es la distancia radial desde el origen a cualquier punto P sobre la metalente (figura 4.3). Para un mapeo en coordenadas polares, la ecuación (4.11) es dada por:

$$r I(r, \varphi) = E(t_r, t_\varphi) |J(t_r, t_\varphi)|, \quad (4.18)$$

considerando simetría angular entre la distribución de intensidad de la fuente y las coordenadas sobre la pantalla $t_\varphi = \varphi$, la conservación de energía en forma local queda establecida como,

$$r I(r, \varphi) - E(t_r, \varphi) t_r \frac{dt_r}{dr} = 0, \quad (4.19)$$

donde r es un punto sobre la metalente, t_r es un punto sobre la pantalla, $I(r, \varphi)$ y $E(t_r, \varphi)$ son las distribuciones de energía de la fuente y la que llega a la pantalla, respectivamente.

De las ecuaciones (4.17) y (4.19), la ecuación diferencial resultante que modela la metalente para este primer modelo, es:

$$A_1 \Phi_{rr} + A_2 \Phi_r - A_3 \frac{d}{dr} (\Phi_r^2) + A_4 = 0, \quad (4.20)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$A_1 = \frac{\beta(L-d)}{(1-\beta^2\Phi_r^2)^{3/2}}, \quad A_2 = \frac{\beta(L-d)}{r(1-\beta^2\Phi_r^2)^{1/2}}, \quad A_3 = \frac{\beta^2(L-d)^2}{2r(1-\beta^2\Phi_r^2)}, \quad A_4 = \frac{I(r, \varphi)}{E(t_r, \varphi)}.$$

Como se observa, la ecuación (4.20) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de orden dos cuyas condiciones en la frontera serán funciones del tipo,

$$\begin{cases} t_r = t_r(r, \Phi_r) \\ t_\varphi = \varphi \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2. \quad (4.21)$$

El problema de valor en la frontera, ecuaciones (4.20) y (4.21) no es un problema tipo Monge-Ámpere debido a la simetría angular considerada, es decir, la ecuación diferencial que modela este problema de iluminación es una aproximación de un modelo general. Un ejemplo clásico de valores de intensidad $I(r, \varphi)$ e irradiancia $E(t_r, \varphi)$ para conservar un flujo radiante de luz F_o sería considerar: $I(r, \varphi) = F_o / A_m$ y $E(t_r, \varphi) = F_o / A_p$, donde A_m es el área de la metalente y A_p el área de la pantalla iluminada. De esta manera el coeficiente A_4 sería $A_4 = A_p / A_m$.

4.3.2. Incidencia normal de luz sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r, \varphi)$

Para este modelo, el planteamiento geométrico del problema de iluminación es el mismo que en el modelo anterior y su representación gráfica es mostrada en la figura 4.3. La diferencia con el modelo de la 4.3.1 radica en que la metalente posee un perfil de fase dual $\Phi(r, \varphi)$ y no se consideran simetrías, por ende, el método aplicado es el método Monge-Ámpere y no el de mapeo de rayos al que fue reducido en la subsección anterior. Los rayos incidentes, son normales a la metalente, por tanto se describen como,

$$\mathbf{I} = (0, 0, 1),$$

de acuerdo a la ecuación (4.14) y realizando una transformación de coordenadas rectangulares a polares, los rayos refractados $\mathbf{O} (O_x, O_y, O_z) \subset \mathbb{R}^3$ están definidos por el campo vectorial:

$$\mathbf{O} = \beta \left(\cos \varphi \Phi_r - \frac{1}{r} \sin \varphi \Phi_\varphi, \quad \sin \varphi \Phi_r + \frac{1}{r} \cos \varphi \Phi_\varphi, \quad -\frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2} \right), \quad (4.22)$$

donde $\beta = 1/(k_0 n_2)$, Φ_r y Φ_φ son derivadas de la fase Φ respecto a r y a φ , respectivamente. De acuerdo a las ecuaciones (4.13), las coordenadas sobre la pantalla $T(t_x(r, \varphi), t_y(r, \varphi)) \subset \mathbb{R}^2$ son dadas por:

$$T(t_x, t_y) = \left(r \cos \varphi - \frac{\beta(L-d) \left[\cos \varphi \Phi_r - \frac{1}{r} \sin \varphi \Phi_\varphi \right]}{\sqrt{1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2}}, \quad r \sin \varphi - \frac{\beta(L-d) \left[\sin \varphi \Phi_r + \frac{1}{r} \cos \varphi \Phi_\varphi \right]}{\sqrt{1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2}} \right), \quad (4.23)$$

donde d y L son las distancias del origen a la metalente y a la pantalla, respectivamente; r es la distancia radial desde el centro de la metalente a cualquier punto P sobre ella (figura 4.3). De acuerdo a la ecuación (4.11) y considerando que t_x y t_y son funciones de r y de φ , la conservación de energía en forma local para este mapeo, queda establecida como,

$$r I(r, \varphi) = E(t_x, t_y) |J(t_x, t_y)|, \quad (4.24)$$

donde el determinante de la matriz Jacobiana es,

$$|J(t_x, t_y)| = \left[\frac{\partial t_x}{\partial r} \frac{\partial t_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial t_x}{\partial \varphi} \frac{\partial t_y}{\partial r} \right]. \quad (4.25)$$

Para evaluar (4.25), de la ecuación (4.23) se tiene que,

$$t_x = r \cos \varphi - \beta(L-d) \frac{O_x}{O_z}, \quad t_y = r \sin \varphi - \beta(L-d) \frac{O_y}{O_z},$$

y definiendo las derivadas de las componentes del rayo refractado \mathbf{O} respecto a r y a φ como,

$$O_{xr} = \frac{\partial O_x}{\partial r}, \quad O_{yr} = \frac{\partial O_y}{\partial r}, \quad O_{zr} = \frac{\partial O_z}{\partial r}, \quad O_{x\varphi} = \frac{\partial O_x}{\partial \varphi}, \quad O_{y\varphi} = \frac{\partial O_y}{\partial \varphi}, \quad O_{z\varphi} = \frac{\partial O_z}{\partial \varphi},$$

las derivadas de la matriz Jacobiana, quedan determinadas por:

$$\frac{\partial t_x}{\partial r} = \cos \varphi - \beta(L-d) \frac{O_z O_{xr} - O_x O_{zr}}{O_z^2}, \quad \frac{\partial t_y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi - \beta(L-d) \frac{O_z O_{y\varphi} - O_y O_{z\varphi}}{O_z^2},$$

$$\frac{\partial t_x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi - \beta(L-d) \frac{O_z O_{x\varphi} - O_x O_{z\varphi}}{O_z^2}, \quad \frac{\partial t_y}{\partial r} = \sin \varphi - \beta(L-d) \frac{O_z O_{yr} - O_y O_{zr}}{O_z^2},$$

sustituyendo estas derivadas y realizando los productos, el determinante de la matriz Jacobiana es:

$$\begin{aligned}
|J(t_x, t_y)| &= r - \frac{\beta(L-d)}{O_z^2} [\cos \varphi (O_z O_{y\varphi} - O_y O_{z\varphi}) + \sin \varphi (O_z O_{x\varphi} - O_x O_{z\varphi})] \\
&- \frac{\beta(L-d)}{O_z^2} [\cos \varphi (O_z O_{xr} - O_x O_{zr}) + \sin \varphi (O_z O_{yr} - O_y O_{zr})] \\
&+ \frac{\beta^2(L-d)^2}{O_z^4} [(O_z O_{xr} - O_x O_{zr})(O_z O_{y\varphi} - O_y O_{z\varphi}) + (O_z O_{yr} - O_y O_{zr})(O_z O_{x\varphi} - O_x O_{z\varphi})].
\end{aligned} \tag{4.26}$$

De la ecuación (4.23), determinamos la forma explícita de las derivadas de las componentes del rayo refractado,

$$\begin{aligned}
O_{xr} &= \beta \cos \varphi \Phi_{rr} + \frac{\beta}{r^2} \sin \varphi \Phi_\varphi - \frac{\beta}{r} \sin \varphi \Phi_{r\varphi}, \\
O_{yr} &= \beta \sin \varphi \Phi_{rr} - \frac{\beta}{r^2} \cos \varphi \Phi_\varphi + \frac{\beta}{r} \cos \varphi \Phi_{r\varphi}, \\
O_{zr} &= \frac{1}{|O_z|} \left[-\beta^2 \Phi_r \Phi_{rr} + \frac{\beta^2}{r^3} \Phi_\varphi^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi \Phi_{r\varphi} \right], \\
O_{x\varphi} &= -\beta \sin \varphi \Phi_r + \beta \cos \varphi \Phi_{r\varphi} - \frac{\beta}{r} \cos \varphi \Phi_\varphi - \frac{\beta}{r} \sin \varphi \Phi_{\varphi\varphi}, \\
O_{y\varphi} &= \beta \cos \varphi \Phi_r + \beta \sin \varphi \Phi_{r\varphi} - \frac{\beta}{r} \sin \varphi \Phi_\varphi + \frac{\beta}{r} \cos \varphi \Phi_{\varphi\varphi}, \\
O_{z\varphi} &= \frac{1}{|O_z|} \left[-\beta^2 \Phi_r \Phi_{r\varphi} - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi \Phi_{\varphi\varphi} \right],
\end{aligned}$$

sustituyéndolas en la ecuación (4.26) y está a su vez en (4.23) y realizando algunas operaciones básicas, finalmente, se obtiene la ecuación diferencial parcial tipo Monge-Ámpere,

$$A_5 (\Phi_{rr} \Phi_{\varphi\varphi} - \Phi_{r\varphi}^2) + A_1 \Phi_{rr} + A_2 \Phi_{\varphi\varphi} + A_3 \Phi_{r\varphi} + A_4 = 0, \tag{4.27}$$

cuyos coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 están dados por:

$$A_1 = \frac{\beta r (L-d) \left[1 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2 \right]}{\left(1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2 \right)^{3/2}}, \quad A_3 = \frac{\beta (L-d) \left[\frac{2\beta}{r} \Phi_r \Phi_\varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left(2 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2 \right) \right]}{\left(1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2 \right)^{3/2}},$$

$$A_2 = \frac{\beta(L-d)[1 - \beta^2 \Phi_r^2]}{r \left(1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2\right)^{3/2}}, \quad A_4 = \frac{\beta(L-d) \left[\beta \sin^2 \varphi \Phi_r + \frac{1}{r} \sin \varphi \cos \varphi \Phi_\varphi \right]}{\left(1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2\right)^{1/2}} - \frac{E(t_x, t_y)}{I(r, \varphi)},$$

$$A_5 = \frac{\beta^2(L-d)^2 \left[\frac{\beta^2}{r^2} \Phi_r \Phi_\varphi + (1 - \beta^2 \Phi_r^2) \left(1 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2\right) \right]}{r \left(1 - \beta^2 \Phi_r^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \Phi_\varphi^2\right)^3}.$$

Las condiciones en la frontera a las que está sujeta la ecuación (4.27), en general serán funciones del tipo:

$$\begin{cases} t_x = t_x(r, \varphi, \Phi_r, \Phi_\varphi) \\ t_y = t_y(r, \varphi, \Phi_r, \Phi_\varphi) \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2. \quad (4.28)$$

y dependen de la forma del patrón de iluminación deseado.

4.3.3. Incidencia de luz oblicua sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(r)$

Considerando una fuente de luz puntual con distribución de intensidad $I(r, \varphi)$, una metalente con perfil de fase $\Phi(r)$ y un patrón de irradianza cuyo interior y frontera están formados por los puntos $T(t_r, t_\varphi)$. Cuando un rayo de luz (\mathbf{I}) se propaga desde la fuente hasta chocar en un punto P sobre la metalente, es refractado (\mathbf{O}) y dirigido hacia puntos dentro (Ω_2) delimitados por la frontera ($\partial\Omega_2$) del área iluminada como se observa en la figura 4.4.

Los rayos de luz inciden de forma oblicua sobre la metalente y definiéndolos en coordenadas esféricas (r, φ, θ) están dados por,

$$\mathbf{I} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, \cos \theta),$$

los rayos refractados $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^3$ de acuerdo a la ecuación (4.14) y después de realizar una transformación de coordenadas rectangulares a esféricas están dados por el campo vectorial:

$$\mathbf{O} = \left(\mu \cos \varphi \sin \theta + \beta \cos \varphi \Phi_r, \mu \sin \varphi \sin \theta + \beta \sin \varphi \Phi_r, -\sqrt{1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2} \right), \quad (4.29)$$

donde $\beta = 1/(k_0 n_2)$, $\mu = n_1/n_2$ y Φ_r es la derivada de la fase Φ respecto a r . De acuerdo a las ecuaciones (4.13) y (4.29) y además considerando que $t_r^2 = t_x^2 + t_y^2$ las coordenadas sobre la pantalla $T(t_r, t_\varphi) \subset \mathbb{R}^2$ son dadas por:

$$T(t_r, t_\varphi) = \left(r - \frac{(L-d)(\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)}{\sqrt{1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2}}, t_\varphi \right), \quad (4.30)$$

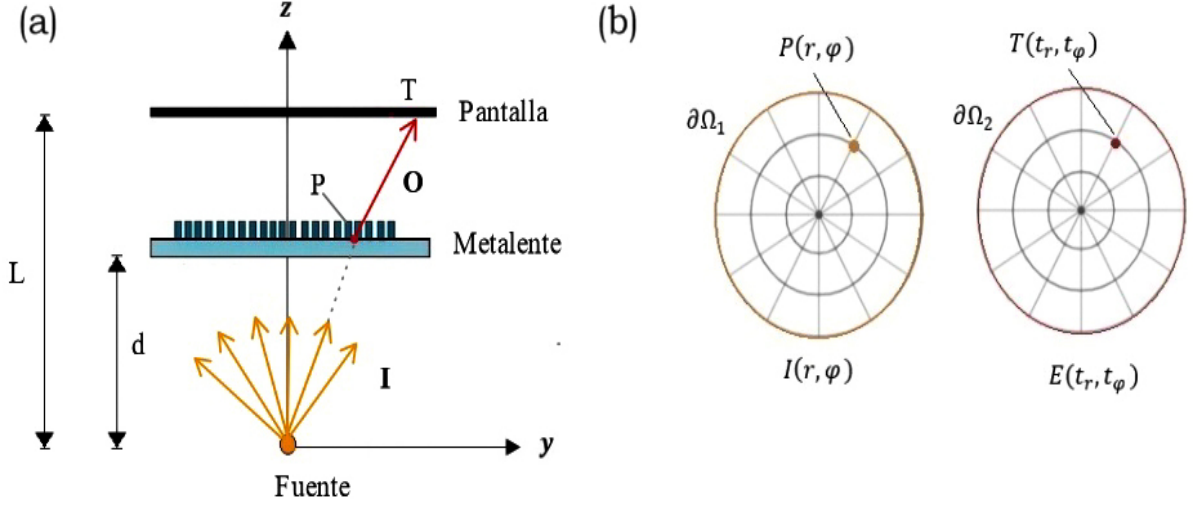


Figura 4.4: Diseño de una MFL para incidencia de luz oblicua. (a) Propagación de rayos desde una fuente que inciden oblicuamente sobre una metalente y son refractados hacia puntos T sobre la pantalla. (b) Secciones transversales de la distribución de intensidad de la metalente y del área iluminada.

donde d y L son las distancias del origen a la metalente y a la pantalla, respectivamente; r es la distancia radial desde el centro de la metalente hasta cualquier punto sobre ella (figura 4.4). De acuerdo la ecuación (4.19) (conservación de energía) y considerando simetría angular entre la distribución de intensidad de la fuente y las coordenadas sobre la pantalla, es decir, $t_\varphi = \varphi$. La ecuación diferencial resultante que modela la metalente para este escenario de iluminación, es:

$$A_1 \Phi_{rr} - A_2 \Phi_r + A_3 \frac{d}{dr} (\Phi_r^2) - A_4 = 0, \quad (4.31)$$

donde los coeficientes A_1 , A_2 , A_3 y A_4 están dados por:

$$A_1 = \frac{\beta(L-d)}{(1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2)^{3/2}} - \frac{\beta \mu \sin \theta (L-d)^2}{r(1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2)^2}, \quad A_2 = \frac{\beta(L-d)}{r(1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2)^{1/2}},$$

$$A_3 = \frac{\beta^2(L-d)^2}{2r(1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2)^2}, \quad A_4 = \frac{\mu \sin \theta (L-d)}{r(1 - (\mu \sin \theta + \beta \Phi_r)^2)^{1/2}} + \frac{I(r, \varphi)}{E(t_r, \varphi)},$$

donde el $\sin \theta = r/(r^2 + d^2)^{-1/2}$. Las condiciones en la frontera serán funciones del tipo,

$$\begin{cases} t_r = t_r(r, \Phi_r) \\ t_\varphi = \varphi \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2. \quad (4.32)$$

que como en todos los modelos, dependen de la forma geométrica del patrón de iluminación.

4.3.4. Incidencia de luz oblicua sobre una MFL con perfil de fase $\Phi(x, y)$

Para este modelo, el planteamiento del problema de iluminación es parecido al modelo anterior, la diferencia radica en que la metalente posee un perfil de fase dual $\Phi(x, y)$ y no se consideran simetrías (figura 4.5), por ende, el método aplicado es el método Monge-Ámpère y no el de mapeo de rayos que fue el aplicado en la subsección anterior.

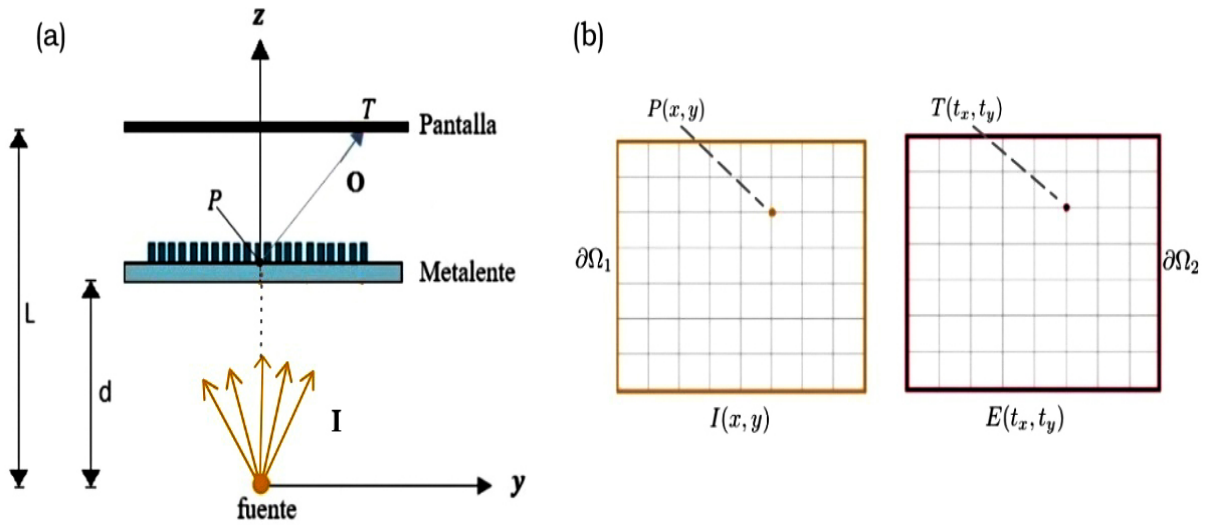


Figura 4.5: Diseño de una MFL con perfil de fase generalizado e incidencia oblicua. (a) Propagación de rayos desde una fuente que inciden oblicuamente sobre una metalente y son refractados hacia puntos T sobre la pantalla. (b) Secciones transversales de la distribución de intensidad de la fuente en la metalente y del área iluminada.

Considerando que un rayo $\mathbf{I} = (x, y, z)$ proveniente de una fuente de luz cuya intensidad es $I(x, y)$, incide sobre una metasuperficie que posee un gradiente de fase dual $\nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y)$. Cuando el rayo choca con la metasuperficie es refractado $\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ y sus coordenadas de acuerdo a la ley vectorial de Snell generalizada (ecuación (4.14)) están dadas por:

$$\mathbf{O} = \left(\mu x + \beta \Phi_x, \quad \mu y + \beta \Phi_y, \quad -\sqrt{1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2} \right), \quad (4.33)$$

donde $\beta = 1/(k_0 n_2)$, $\mu = n_1/n_2$, Φ_x y Φ_y es la derivada de la fase Φ respecto a x y a y , respectivamente. De acuerdo a las ecuaciones (4.13) y (4.33) las coordenadas sobre la pantalla $T(t_x, t_y) \subset \mathbb{R}^2$ son:

$$T(t_x, t_y) = \left(x - \frac{(L-d)(\mu x + \beta \Phi_x)}{\sqrt{1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2}}, \quad y - \frac{(L-d)(\mu y + \beta \Phi_y)}{\sqrt{1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2}} \right), \quad (4.34)$$

donde d y L son las distancias del origen a la metalente y a la pantalla, respectivamente. Por conservación de energía, ecuación (4.11), tenemos,

$$I(x, y) = E(t_x, t_y) \left[\frac{\partial t_x}{\partial x} \frac{\partial t_y}{\partial y} - \frac{\partial t_x}{\partial y} \frac{\partial t_y}{\partial x} \right],$$

donde t_x y t_y en términos de las componentes del rayo refractado (ecuaciones (4.13), (4.34)) se expresan como,

$$t_x = x - (L - d) \frac{O_x}{O_z}, \quad t_y = y - (L - d) \frac{O_y}{O_z},$$

y definiendo las derivadas de las componentes del rayo refractado \mathbf{O} respecto a x y a y como,

$$O_{xx} = \frac{\partial O_x}{\partial x}, \quad O_{yy} = \frac{\partial O_y}{\partial y}, \quad O_{xy} = \frac{\partial O_x}{\partial y}, \quad O_{yx} = \frac{\partial O_y}{\partial x}, \quad O_{zx} = \frac{\partial O_z}{\partial x}, \quad O_{zy} = \frac{\partial O_z}{\partial y},$$

la matriz Jacobiana, quedan determinadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_x}{\partial x} &= 1 - (L - d) \frac{O_z O_{xx} - O_x O_{zx}}{O_z^2}, & \frac{\partial t_y}{\partial x} &= - (L - d) \frac{O_z O_{yx} - O_y O_{zx}}{O_z^2}, \\ \frac{\partial t_x}{\partial y} &= - (L - d) \frac{O_z O_{xy} - O_x O_{zy}}{O_z^2}, & \frac{\partial t_y}{\partial y} &= 1 - (L - d) \frac{O_z O_{yy} - O_y O_{zy}}{O_z^2}, \end{aligned}$$

sustituyendo estas derivadas y realizando los productos, el determinante de la matriz Jacobiana es:

$$\begin{aligned} |J(t_x, t_y)| &= 1 - \frac{(L - d)}{O_z^2} [O_{xx} O_z - O_{zx} O_x + O_{yy} O_z - O_{zy} O_y] \\ &+ \frac{(L - d)^2}{O_z^4} [(O_{xx} O_z - O_{zx} O_x) (O_{yy} O_z - O_{zy} O_y)] \\ &- \frac{(L - d)^2}{O_z^4} [(O_{xy} O_z - O_{zy} O_x) (O_{yx} O_z - O_{zx} O_y)]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

De la ecuación (4.34), determinamos la forma explícita de las derivadas de las componentes del rayo refractado,

$$\begin{aligned} O_{xx} &= \mu + \beta \Phi_{xx}, \quad O_{yy} = \mu + \beta \Phi_{yy}, \quad O_{xy} = O_{yx} = \beta \Phi_{xy}, \\ O_{zx} &= \frac{1}{|O_z|} [(\mu x + \beta \Phi_x) (\mu + \beta \Phi_{xx}) + \beta \Phi_{xy} (\mu y + \beta \Phi_y)], \\ O_{zy} &= \frac{1}{|O_z|} [\beta \Phi_{xy} (\mu x + \beta \Phi_x) + (\mu y + \beta \Phi_y) (\mu + \beta \Phi_{yy})], \end{aligned}$$

sustituyéndolas y realizando operaciones básicas, finalmente se obtiene la ecuación diferencial parcial tipo Monge-Ámpere,

$$A_1 (\Phi_{xx} \Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2) + A_2 \Phi_{xx} + A_3 \Phi_{yy} + A_4 \Phi_{xy} + A_5 = 0, \quad (4.36)$$

donde los coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , son:

$$A_2 = \frac{\beta(L-d) [1 - 2(\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^{3/2}} + \frac{\mu \beta (L-d)^2 [1 - 2(\mu x + \beta \Phi_x)^2 - 2(\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^2},$$

$$A_3 = \frac{\beta(L-d) [1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - 2(\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^{3/2}} + \frac{\mu \beta (L-d)^2 [1 - 2(\mu x + \beta \Phi_x)^2 - 2(\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^2},$$

$$A_4 = \frac{2\beta(L-d) [(\mu x + \beta \Phi_x)(\mu y + \beta \Phi_y)]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^{3/2}}, \quad A_1 = \frac{\beta^2(L-d)^2 [1 - 2(\mu x + \beta \Phi_x)^2 - 2(\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^2},$$

$$A_5 = \frac{\mu(L-d) [2 - 3(\mu x + \beta \Phi_x)^2 - 3(\mu y + \beta \Phi_y)^2]}{[1 - (\mu x + \beta \Phi_x)^2 - (\mu y + \beta \Phi_y)^2]^{3/2}} - \frac{I(x, y)}{E(t_x, t_y)}$$

la ecuación diferencial, ecuación (4.36), estará sujeta a condiciones en la frontera del tipo:

$$\begin{cases} t_x = t_x(x, y, \Phi_x, \Phi_y) \\ t_y = t_y(x, y, \Phi_x, \Phi_y) \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2. \quad (4.37)$$

4.4. Diseño inverso de una MFL

Para diseñar una MFL inicialmente se plantea teóricamente el problema de iluminación, es decir, se elige el tipo de fuente de luz (fuente muy alejada = incidencia normal, fuente cercana = incidencia oblicua), el tipo de incidencia, la función de fase de la metalente (con variación 1D o 2D), la forma del patrón de iluminación y se especifican los parámetros constantes (longitud de onda, distancia fuente-metalente, distancia fuente-pantalla, entre otros.). Después se selecciona el modelo matemático adecuado a dicho problema, a través del cual se obtienen ecuaciones diferenciales con valores en la frontera que deben resolverse numéricamente. Finalmente se verifica el diseño por medio de simulaciones y experimentos, mediante los cuales se determinará el material, la forma, tamaño y distribución de las

nanoantenas que debe tener la metalente para lograr de forma óptima el patrón de iluminación deseado.

A este tipo de diseño, en el cual a partir de un objetivo deseado se determinan las características de una metalente, se le denomina diseño inverso. En el área de metalentes formadoras de imágenes, recientemente se han reportado varios estudios al respecto, con diferentes y muy variadas aplicaciones. Por ejemplo, en [62-64] Raphaël Pestourie et al., hacen una revisión de los distintos diseños inversos de metasuperficies que producen cierto perfil de fase deseado, optimizando los nanoelementos de la metasuperficie. Por ejemplo, uno de esos diseños inversos optimiza a los nanoelementos para corregir aberración cromática. En tales trabajos, la formulación matemática se realiza desde un enfoque ondulatorio, ellos resuelven un problema de optimización minimizando o maximizando una función objetivo. Específicamente, se minimiza la diferencia entre el campo eléctrico disperso deseado y el campo aproximado justo encima de la superficie de la metalente, el cual es dado por una aproximación localmente periódica, al realizar tal minimización, se obtiene la amplitud y fase que describen los parámetros de la metasuperficie.

Los procesos de diseño inverso permiten solucionar problemas en el diseño de metasuperficies aperiódicas de área grande, en la optimización del hardware fotónico y en el procesamiento de imágenes. Además, los métodos de diseño inverso tienen un gran potencial en aplicaciones del mundo real, ya que entre sus ventajas están:

- Ser adecuado para metasuperficies con una funcionalidad compleja que no se puede determinar analíticamente.
- Que puede funcionar con muchos algoritmos computacionales avanzados, especialmente con inteligencia artificial.
- Que permite buscar un espacio de diseño completo y encontrar soluciones no intuitivas con un rendimiento óptimo.
- Que son una herramienta poderosa para optimizar metasuperficies multifuncionales.
- Que se basa en el estudio de la relación entre la topología de la metasuperficie y las interacciones de la luz con la materia.

Todos los diseños inversos de metasuperficies, reportados hasta ahora, están dirigidos a enfocar la luz en un punto o bien, en temas relacionados a mejorar el rendimiento de meta-sistemas formadores de imágenes. La única excepción es la investigación reportada recientemente por Kirstine et al. [65], en el área de la óptica sin imágenes, para un problema de iluminación. Ellos presentan un método de diseño de perfil de fase de una metasuperficie basado en un concepto simplificado de transporte óptimo, es decir, diseñan una metalente con perfil de fase unidimensional $\Phi(x)$ que redistribuye un haz colimado sobre una pantalla a una distancia L donde se produce un perfil de irradiancia unidimensional $E(x)$ deseado. Ellos mencionan en su trabajo que su enfoque se adapta a una amplia gama de diferentes perfiles de intensidad de entrada y salida y lo verifican mediante simulaciones de campo completo.

Cabe destacar, que el modelo presentado en [65] es básicamente, una simplificación de nuestro modelo de iluminación más sencillo (Sección 4.3.1). Ellos hacen algunas consideraciones que convierten una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con valores en la frontera no lineales, en un problema de una ecuación diferencial que resuelven integrando directamente. En resumen, este trabajo establece un antecedente y cimienta nuestros modelos matemáticos que van desde el caso más simple, hasta el más general. En la siguiente Sección se establecerá una propuesta de solución numérica a nuestros modelos.

Aunque los objetivos de este trabajo fueron el deducir las leyes vectoriales de refracción y reflexión en metasuperficies utilizadas en trazo de rayos (Capítulo 2), establecer sistemas no formadores de imágenes clásicos con metasuperficies (Capítulo 3) y modelar matemáticamente el perfil de fase de una metalente para iluminación (Capítulo 4). En la siguiente Sección presentamos un método numérico para dar solución a las ecuaciones tipo Monge-Ámpere, deducidas en la Sección 4.3. La importancia de plantear este método radica en su naturaleza innovadora ya que en la literatura no se ha publicado hasta la fecha, la combinación entre los métodos, diferencias finitas y algoritmos genéticos para determinar la solución numérica a ecuaciones Monge-Ámpere. En la siguiente Sección se presenta un bosquejo general del proceso de solución a una ecuación diferencial ordinaria no lineal con valores en la frontera no lineales, específicamente, se utiliza una aproximación de la ecuación del primer modelo de iluminación (Sección 4.3.1.) para ilustrar de forma general el procedimiento para determinar la solución a este tipo de ecuaciones.

4.5. Esquema numérico de la solución a una EDO no lineal con valores en la frontera no lineales

El modelo de diseño de una MFL, como observamos en la Sección anterior, es un problema a la frontera no lineal, y en el caso más general, es dar solución a una ecuación Monge-Ámpere, lo que significa un gran desafío, ya que el resolver este problema, consiste en dar solución a una ecuación diferencial parcial (EDP) no lineal con condiciones en la frontera no lineales. En la literatura, hay múltiples estudios y análisis sobre el tipo de solución de dicha ecuación, pero no se ha reportado la solución como tal. En el área de óptica de iluminación se han publicado diseños de superficies de lentes de forma libre obtenidos mediante la solución numérica a dicha ecuación [53, 54], en tales trabajos solo se menciona que la solución se obtiene discretizando la EDP y aplicando el método clásico de Newton para dar solución al sistema de ecuaciones algebraico. En esta sección la ecuación diferencial que se considera para mostrar el método numérico propuesto, es la obtenida en el primer modelo matemático (Sección 4.3.1).

4.5.1. Diferencias finitas

El método de diferencias finitas es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o parciales (EDP) con valores iniciales o en la frontera que modelan diversos problemas, el método básicamente aproxima las soluciones buscadas, convirtiendo ecuaciones diferenciales

4.5. Esquema numérico de la solución a una EDO no lineal con valores en la frontera no lineales 46

en sistemas de ecuaciones algebraicas mediante el proceso de discretización [66, 67]. Las aplicaciones del método son vastas y muy diversificadas, existen tres esquemas básicos de diferencias finitas, hacia atrás, centradas y hacia adelante, la elección del esquema depende de las condiciones iniciales o en la frontera, para aplicar diferencias finitas a un problema se debe:

- 1) discretizar el dominio solución en una malla o cuadrícula.
- 2) expresar las derivadas en diferencias finitas, es decir, en términos del cambio de la función entre puntos discretos en la malla.

El modelo matemático que se resolverá es el de incidencia normal sobre una metalente con perfil de fase $\Phi(r)$ (Sección 4.3.1), considerando un haz de luz incidente con perfil de irradiancia constante sobre la metalente $I = I_0$ y en la pantalla formando un patrón de iluminación circular de radio a centrado en la metalente, con distribución de energía uniforme, es decir, $E(t_r, \varphi) = E_0$, con $E_0 \in \mathbb{R}$. La ecuación diferencial a resolver de acuerdo a la ecuación (4.20) es:

$$\frac{\alpha}{(1 - \beta^2 \Phi_r^2)^{3/2}} \Phi_{rr} + \frac{\alpha}{r(1 - \beta^2 \Phi_r^2)^{1/2}} \Phi_r - \frac{\alpha^2}{2r(1 - \beta^2 \Phi_r^2)} \frac{d}{dr} (\Phi_r^2) + \frac{I_0}{E_0} = 0, \quad (4.38)$$

donde $\alpha = \beta L$ es constante, $\beta = \lambda_0/2\pi n_2$ y L es la distancia de la metalente a la pantalla. De la ecuación (4.17), para iluminar un círculo de radio a en la pantalla (centrado en la metalente), debe cumplirse que $t_r = a$, por lo tanto, las condiciones en la frontera son:

$$\Phi(0) = 0, \quad \beta r - \frac{\alpha \Phi_r}{(1 - \beta^2 \Phi_r^2)^{1/2}} = a. \quad (4.39)$$

Cabe señalar que por simplicidad se tomó el valor central $\Phi(0) = 0$, y el origen de coordenadas en el centro de la metalente ($d = 0$). Así el problema de iluminación de la Sección 4.3.1 queda determinado por las ecuaciones (4.38) y (4.39), claro, con algunas especificaciones que lo simplifican.

Una vez establecida la EDO y sus condiciones en la frontera, no lineales, el dominio solución se considera como una malla radial definida como $S_1 = \{r \mid r_{min} \leq r \leq r_{max}\}$ donde $r = r_{min} + ih$ para $i = 0, 1, \dots, n$ y donde $h = (r_{max} - r_{min})/n$ como se observa en la figura 4.6 (a).

Cada punto interno a la malla (figura 4.6 (a)) satisface la ecuación (4.38) y todo punto sobre la frontera satisface la condición a la frontera, ecuación (4.39). La discretización de la EDO se realiza mediante la aproximación en serie de Taylor de cada derivada alrededor de r_i y evaluada en r_{i-1} y r_{i+1} (figura 5.1 (b)). Suponiendo que la fase $\Phi(r) \in C^4 [r_{i-1}, r_{i+1}]$ la aproximación para las derivadas para puntos internos en la malla, por diferencias finitas centradas, están definidas por:

$$\Phi_r = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h}, \quad \Phi_{rr} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2}, \quad \Phi_r^2 = \frac{\Phi_{i+1}^2 - \Phi_{i-1}^2}{2h}, \quad (4.40)$$

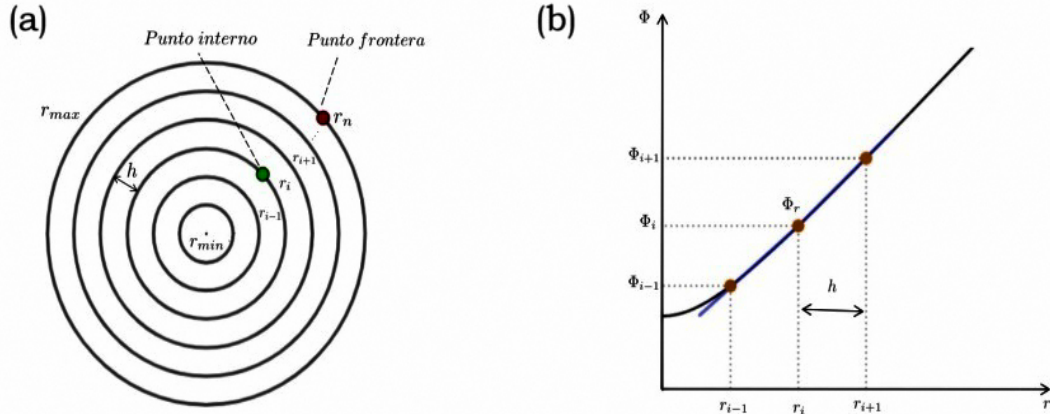


Figura 4.6: Discretización. (a) Discretización de dominio (b) Aproximación en diferencias finitas centradas.

y para los puntos en la frontera, es decir, para $i = n$ en diferencias finitas hacia atrás:

$$\Phi_r = \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}. \tag{4.41}$$

Estas aproximaciones poseen un error de truncamiento del orden de $O(h^2)$ y una vez definida la discretización, la aproximación de las derivadas (ecuaciones (4.40) y (4.41)), se sustituyen en la EDO, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal, $F(\mathbf{X}) = 0$, que relacionan los valores de la función buscada en los puntos discretos de la malla [68].

4.5.2. Algoritmos genéticos (AG)

Los algoritmos genéticos fueron desarrollados por John Holland, sus colegas y estudiantes en la universidad de Michigan en 1992, ellos se basaron en la explicación abstracta y rigurosa de los procesos adaptativos de los sistemas naturales para diseñar software que conserve el mecanismo de estos [69]. Hasta la fecha, estos algoritmos se han aplicado en una amplia variedad de campos, por ejemplo en la optimización de funciones matemáticas, la planificación de rutas, en la optimización del diseño de estructuras y sistemas; en la ingeniería se usan para la minimización de costos y la maximización de rendimientos; en la inteligencia artificial se utilizan para la optimización de parámetros de modelos y la generación de arquitecturas neuronales [70].

Los AG son una técnica de optimización y búsqueda basada en la mecánica de la evolución natural y la genética, la idea detrás de este método es simular el proceso de evolución natural, donde las características más adaptables de una población tienen más probabilidades de persistir y transmitirse a generaciones futuras, el funcionamiento básico de estos algoritmos consiste en [71]:

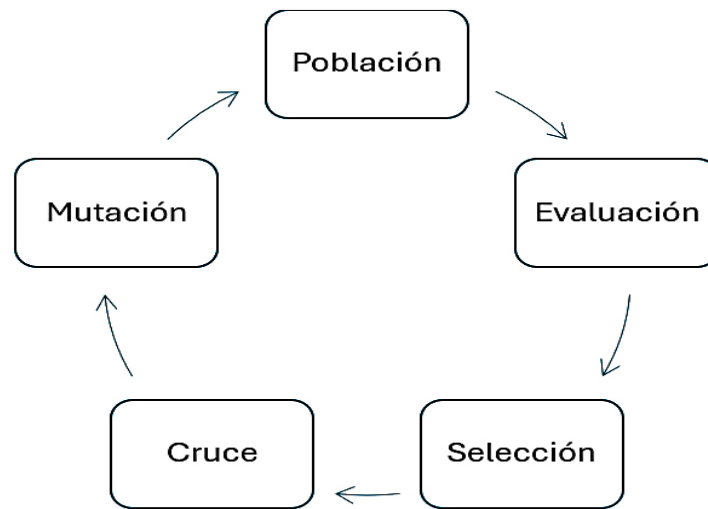


Figura 4.7: Diagrama de flujo de un algoritmo genético.

- Generar de manera aleatoria o mediante alguna estrategia específica una población de individuos donde cada uno de ellos represente una posible solución al problema dado.
- Evaluar la adaptación de cada individuo al problema.
- Seleccionar los mejores individuos de la población para reproducirse; aquellos individuos con una aptitud más alta tienen más probabilidad de ser seleccionados.
- Cruzar entre sí los individuos previamente seleccionados para producir nuevos y formar una nueva generación.
- Mutar cierto número de individuos para explorar nuevas áreas del espacio de búsqueda y evitar la convergencia prematura hacia soluciones no tan óptimas.
- Reemplazar la población inicial por la nueva generación, compuesta por los individuos seleccionados y modificados.
- Repetir el proceso durante un número determinado de generaciones, como se muestra en el diagrama de la figura 5.2., hasta que se cumpla algún criterio de finalización que se establece después de la mutación.

En soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales, se han reportado algunas publicaciones donde se utilizan los AG, por ejemplo, Omar Abu y Zaer Abo en [72] presentan el método de solución a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores a frontera aplicando estos algoritmos, el proceso consta de discretizar las ecuaciones mediante diferencias finitas y obtener un sistema de ecuaciones

algebraicas que resuelven mediante la maximización de una función aptitud, ellos concluyen que los AG son un método robusto y preciso, ya que obtienen errores del orden de 10^{-10} que comparados con otros métodos modernos son mucho mejores, ellos enfatizan que los AG tienen la ventaja de ser fáciles de entender e implementar.

Clásicamente se determina la solución a los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales mediante herramientas numéricas tales como los métodos de Newton, Broyden, Newton Raphson, secante, Halley; [66-68], varios de estos métodos requieren del cálculo de derivadas y de álgebra de matrices, lo que puede influir en el costo computacional. Los AG, también han sido implementados en este tipo de problemas, Grosan et. al. resuelven sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales convirtiéndolos en un problema multi-objetivo, donde la solución buscada debe minimizar la diferencia entre cada función y su valor absoluto. Por otro lado Pourrajabian et. al [73]. resuelven un sistema complejo de hasta 10 ecuaciones no lineales con 10 incógnitas, igualadas a cero, ellos definen una función objetivo como el valor absoluto de la suma de funciones sujeta a la condición de que cada ecuación por separado debe ser satisfecha, al implementar el procedimiento para un caso particular, obtienen resultados más precisos en comparación a los métodos clásicos y a los resultados obtenidos por Grosan et. al [74].

Existen formas diferentes de plantear la función objetivo de un AG, en [75] para un sistema de n ecuaciones no lineales, se define una función F igual a la suma de las n ecuaciones, se busca un vector \mathbf{X} que minimice a F , esto dando por hecho que si cada ecuación es mínima en \mathbf{X} , entonces F también lo es, la aptitud se mide calculando la probabilidad de cada ecuación, definida como la ecuación evaluada en el punto entre la función F , prácticamente esto representa el peso de cada ecuación y su viabilidad para ser un buen candidato de solución.

4.5.3. Implementación

Para implementar el método de solución al problema de valor en la frontera planteado en la Sección anterior (ecuaciones (4.38) y (4.39)), comenzaremos simplificando constantes, para obtener la solución más básica de la fase $\Phi(r)$ y después generalizarla. Considerando los valores de los parámetros $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $I_0/E_0 = c$, donde $c \in R$, reexpresamos la ecuación diferencial (4.38) como:

$$\frac{1}{(1 - \Phi_r^2)^{3/2}} \Phi_{rr} + \frac{1}{r(1 - \Phi_r^2)^{1/2}} \Phi_r - \frac{1}{2r(1 - \Phi_r^2)} \frac{d}{dr} (\Phi_r^2) + c = 0, \quad (4.42)$$

y las condiciones en la frontera (ecuación (4.39)) como,

$$\Phi(0) = 0, \quad r - \frac{\Phi_r}{(1 - \Phi_r^2)^{1/2}} = a, \quad (4.43)$$

donde a es el radio del patrón de iluminación circular, r está limitado de $r_{min} = 0$ hasta el radio de la metalente $r_{max} = b$. Realizando una reducción de orden en la ecuación (4.42) y en sus condiciones en la frontera (ecuación (4.43)), es decir, consideramos que $u(r) = \Phi_r$, así el problema de valor en la frontera, resulta ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r(1-u^2)^{1/2}} - \frac{u}{r(1-u^2)} \frac{du}{dr} + c = 0, \\ u(0) = 0, \qquad r - \frac{u}{(1-u^2)^{1/2}} = a. \end{array} \right.$$

La condición $u(0) = 0$ se elige de esta manera para garantizar que $\Phi(0)$ sea igual a una constante que puede tomar cualquier valor real, siendo esto poco relevante ya que para el diseño de una metalente se utiliza el gradiente de fase. Al realizar la reducción de orden, la función $u(r)$ es el gradiente de la fase, que buscamos, por lo tanto, si fuera necesario determinar el perfil de fase de forma explícita, después de interpolar nuestros resultados numéricos, se integrará directamente la función $u(r)$.

Para expresar el problema de valor en la frontera, como se mencionó en la sección 4.5.1 usamos diferencias finitas centradas y hacia atrás. El dominio solución se divide uniformemente, es una malla circular definida por todos los $r \in [0, b]$, la malla consta de n círculos concéntricos separados una distancia o paso h , donde,

$$h = \frac{b}{n}, \quad r_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \tag{4.44}$$

aproximando la función solución $u(r)$ como $u_i = u(r_i)$, y sus derivada en diferencias finitas para puntos internos y en la frontera, como:

$$\frac{du}{dr} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \frac{du}{dr} \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \tag{4.45}$$

el sistema de ecuaciones algebraico a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_i = 0, & i = 0 \\ \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h(1-u_i^2)^{3/2}} + \frac{u_i}{r_i(1-u_i^2)^{1/2}} - \frac{u_i}{hr_i(1-u_i^2)} = 0, & 1 \leq i \leq n-1 \\ r_i - \frac{u_i}{(1-u_i^2)^{1/2}} = a, & i = n \end{array} \right.$$

Nótese que el sistema de ecuaciones a resolver es no lineal, creemos que la solución se puede realizar implementando algoritmos genéticos, y que obtendremos mejores resultados que al utilizar métodos que impliquen álgebra de matrices. Esta tarea se planea finalizar en un trabajo futuro, en el cual, además de los aspectos planteados en esta Sección, se corroborara la convergencia del esquema de diferencias finitas elegido, los errores de truncamiento y la generalización de la técnica numérica para dar solución a ecuaciones Monge-Ámpere.

Capítulo 5

Resultados

En esta tesis se ha abordado el desafío de estudiar la propagación de luz y el modelado matemático de dispositivos de iluminación que usan metasuperficies o metalentes. El estudio comienza con la generalización de las leyes de propagación de la luz en metasuperficies, derivando ecuaciones vectoriales para el trazo de rayos exacto en sistemas ópticos con metasuperficies. Reportando la ley de reflexión y refracción para metasuperficies en coordenadas polares. Se finaliza la tesis con el desarrollo de una base teórica robusta para el diseño de metalentes para la óptica de iluminación, junto con la propuesta de algunas aproximaciones para resolver las ecuaciones diferenciales parciales no lineales que resultan.

Las metasuperficies han revolucionado el entendimiento de las propiedades y aplicaciones electromagnéticas de nanoestructuras con elementos de tamaño menor o igual al de la longitud de onda, este campo ha progresado rápidamente y existen ya numerosos efectos ópticos novedosos y aplicaciones potenciales en el control y manipulación de ondas electromagnéticas en frecuencias que van desde microondas hasta el ultravioleta. En este trabajo se derivaron las ecuaciones generales para calcular la dirección de los rayos de luz reflejados y refractados por una metasuperficie con perfil de fase arbitrario, es decir, se dedujeron las ecuaciones en forma vectorial de la ley de reflexión y refracción válidas para rayos de luz con incidencia general. Estas fórmulas simplifican el trazo de rayos 3D a través de sistemas de metalenses y otros dispositivos con metasuperficies, las expresiones obtenidas son simples, dependen de tres cantidades conocidas: la normal a la metasuperficie, la dirección del haz incidente y el gradiente de fase, además, tienen flexibilidad ya que no dependen de la elección del sistema de coordenadas ni de la orientación de la metasuperficie. En general, estas ecuaciones representan una base para el diseño de metalenses en diferentes sistemas ópticos, por ejemplo, en formación de imágenes, en óptica de iluminación, en problemas generales de metasuperficies, en cualquier dispositivo óptico avanzado que contenga metasuperficies.

Para mostrar la operabilidad de las leyes vectoriales generalizadas, se realizaron diferentes trazos de rayos tanto para refracción como reflexión de luz. Se consideraron diferentes direcciones de los rayos incidentes con el fin de exponer su validez y simplicidad, características que hacen que su aplicación sea fácil y óptima en trazado de rayos, ya que a partir de ellas se determina la trayectoria 3D de la luz que

pasa a través de una metasuperficie. Por ejemplo, para diseñar un sistema óptico formador de imágenes se debe determinar la posición y características de la imagen deseada a partir de las trayectorias de la luz. En el caso de metalentes para iluminación, la formulación vectorial de la ley de transmisión y reflexión resulta básica para resolver los problemas de iluminación planteados en el Capítulo 4.

También en este trabajo se introdujo el concepto de metaóptica sin imágenes, se exploraron aplicaciones de metasuperficies en algunos sistemas cuya función es transferir energía luminosa de forma óptima entre una fuente de luz y un objetivo (por ejemplo un plano iluminado), es decir, en concentración de luz e iluminación, ya que la compactibilidad y la alta flexibilidad de las metasuperficies pueden abrir nuevas oportunidades en el campo de la óptica sin imágenes. En el caso de los sistemas no formadores de imágenes, el objetivo principal es controlar la distribución espacial de la luz que mediante una metasuperficie se puede lograr a través del perfil de fase 2D que tiene el efecto equivalente a la forma de una superficie transparente 3D en la óptica sin imágenes refractiva o reflectante. En general, las lentes en sistemas ópticos no formadores de imágenes, son superficies complejas en 3D, cuyo diseño conlleva solución de problemas 3D muy complicados, por estas razones se presentan las bases de diseño de tres sistemas clásicos en óptica no formadora de imágenes basados en metasuperficies y metaespejos: El metaconcentrador compuesto, las metalentes TIR y las metalentes condensadoras. Se discutieron los desafíos y oportunidades de la metaóptica no formadora de imágenes y sus conceptos básicos. También en un trabajo futuro se pueden abordar los efectos cromáticos, que son importantes para el manejo de luz policromática; evaluar y cuantificar los efectos de las imperfecciones de fabricación; y, en general, abordar problemas avanzados de óptica sin imágenes, tales como, el principio del rayo de borde, entre otros tantos.

Con el fin de aplicar las leyes vectoriales generalizadas para metasuperficies, y continuar con la aplicación de estas a sistemas ópticos no formadores de imágenes, se planteó el problema clásico de óptica de iluminación, diseñar una metalente que distribuya espacialmente sobre una pantalla la luz proveniente de una fuente, de tal forma que modelamos matemáticamente el diseño de una metasuperficie que realiza dicha tarea de manera óptima, y para lograrlo planteamos el problema de diseño como problema de transporte de masa óptimo. Los casos modelados son cuatro, abordando desde el caso simple (considerando simetrías) hasta el caso más general (sin simetrías). En los cuatro modelos, el problema de iluminación se convierte en un problema de frontera no lineal y en el caso más general, la ecuación diferencial es una ecuación elíptica de Monge-Ampère. La solución a dichos modelos, no es analítica, e incluso la solución numérica es compleja. Aunque no fue uno de nuestros objetivos de trabajo, presentamos de forma general una técnica numérica en el Capítulo 4 para resolver estos problemas de iluminación aplicando diferencias finitas, para la discretización y algoritmos genéticos para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales resultantes, ilustramos la técnica utilizando una simplificación de nuestro modelo más simple; cabe señalar que la combinación entre diferencias finitas y algoritmos genéticos es innovadora, promete mejores resultados que los métodos clásicos (Newton, Newton-Broyden, entre otros.) al carecer de álgebra de matrices y además no ha sido utilizada para resolver ecuaciones tipo Monge-Ámpere.

Capítulo 6

Conclusiones

La implementación de metasuperficies en la OA es un área que actualmente tiene una infinidad de oportunidades, ya que la mayor parte de la comunidad científica se ha inclinado por estudiar de forma tanto teórica como experimental la aplicaciones de metalentes en sistemas formadores de imágenes. Motivándonos por esto nos fijamos los objetivos de establecer las leyes básicas del comportamiento de la luz refractada y reflejada por una metasuperficie, con el fin de obtener una herramienta para trazo de rayos y a partir de esta diseñar metalentes que eficienten la transferencia de energía desde una fuente hasta una pantalla. También cumplimos con el propósito de presentar los sistemas análogos al concentrador parabólico, colimador y lentes condensadoras, todos compuestos por metasuperficies en lugar de lentes y espejos clásicos.

La contribución de este trabajo a la metaóptica no formadora de imágenes es crucial por ser de los primeros estudios en aplicar metasuperficies en la OA (concentración e iluminación) y establecer bases para que en un futuro la metaóptica no formadora de imágenes logre diseñar sistemas más eficientes que los clásicos. Otro aspecto a destacar es que nuestros modelos matemáticos muestran elegancia al resolver un problema de diseño tridimensional con una metasuperficie de fase libre. Y aunque no era parte de nuestros objetivos el presentar y determinar la solución numérica a las ecuaciones diferenciales de nuestros modelos, presentamos una ilustración de la forma en que llevaremos a cabo la solución numérica en un trabajo futuro. Se espera que mediante la técnica de solución de la ecuación Monge-Ámpère en metasuperficies se puedan obtener las características de las metalentes para iluminación para varios escenarios de importancia práctica en el área de investigación de iluminación. La óptica de forma libre es una tecnología nueva que impulsa cambios importantes en el diseño de iluminación, el reemplazo de las lentes clásicas por metalentes permitirá lograr sistemas de iluminación miniaturizados, compactos y livianos con un alto rendimiento óptico. Las aplicaciones que se espera desarrollar van desde la conformación de sistemas láser, alumbrado público, iluminación de automóviles, iluminación uniforme en proyectores LED, entre muchas más aplicaciones.

Apéndice A

Ley de Snell para metasuperficies en coordenadas polares

En el caso de un perfil de fase polar $\Phi(r, \psi)$, la transformación de las componentes del gradiente de la fase, de coordenadas rectangulares a polares, es:

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = \left(\cos\psi \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\psi \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}, \quad \sin\psi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\psi \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \right) \quad (\text{A.1})$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la posición radial de cualquier punto sobre la metasuperficie y ψ el ángulo polar.

Sustituyendo la ecuación (B1) en la ecuación (2.2), la ley de refracción escalar generalizada para metasuperficies con gradiente de fase polar 2D, es dada por:

$$\begin{cases} k_{02} \sin\theta_2 \cos\varphi_2 = k_{01} \sin\theta_1 \cos\varphi_1 + \cos\psi \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\psi \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \\ k_{02} \sin\theta_2 \sin\varphi_2 = k_{01} \sin\theta_1 \sin\varphi_1 + \sin\psi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\psi \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \end{cases} . \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones (B2) permiten determinar la dirección de los rayos transmitidos por una metasuperficie con gradiente de fase polar, y también de esta se deduce la ley de reflexión, haciendo $n_1 = n_2$.

Bibliografía

- [1] E. Hecht, Optics, 4^a ed., Addison Wesley, 2002.
- [2] R. Kingslake, Lens design fundamentals, Elsevier, 2012.
- [3] D. A. Atchison, Design of aspheric intraocular lenses, Ophthalmic and Physiological Optics 11, 1991. [Doi:10.1111/j.1475-1313.1991.tb00213.x](https://doi.org/10.1111/j.1475-1313.1991.tb00213.x)
- [4] R. Winston, J. C. Miñano, P. Benítez, Nonimaging Optics, Elsevier, Burlington, MA, USA, 2005.
- [5] R. Wu, H. Hua, P. Benítez, J. C. Miñano, and R. Liang, Design of compact and ultra efficient aspherical lenses for extended Lambertian sources in two dimensional geometry, Opt. Express 24, 2016. [Doi:10.1364/OE.24.005078](https://doi.org/10.1364/OE.24.005078)
- [6] X. Luo, H. Liu, Z. Lu, and Y. Wang, Automated optimization of an aspheric light-emitting diode lens for uniform illumination, Appl. Opt. 50, 2011. [Doi:10.1364/AO.50.003412](https://doi.org/10.1364/AO.50.003412)
- [7] P. Benítez and J. C. Miñano, The Future of Illumination Design, Optics & Photonics News 18(5), 2007. [Doi:10.1364/OPN.18.5.000020](https://doi.org/10.1364/OPN.18.5.000020)
- [8] V. G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ., Soviet physics uspekhi, 10.4, 1968. [Doi:10.1070/PU1968v010n04ABEH003699](https://doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699)
- [9] S. Kshetrimayum, Rakesh, A brief intro to metamaterials, IEEE potentials 23.5, 2004.
- [10] T. J. Cui, D. R. Smith, and R. Liu, Metamaterials, Boston, MA, Springer, 2010.
- [11] R. Kumar, et al., Overview on metamaterial: History, types and applications, Materials Today: Proceedings 56, 2022. [Doi:10.1016/j.matpr.2021.11.423](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.11.423)
- [12] A. Valipour, et al., Metamaterials and their applications: an overview, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications 236.11, 2022. [Doi:10.1177/146442072199585](https://doi.org/10.1177/146442072199585)
- [13] D. Sievenpiper, J. Schaffner, H. Song, R. Loo, and G. Tansonan, Two dimensional beam steering using an electrically tunable impedance surface, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 51, 2003. [Doi:10.1109/TAP.2003.817558](https://doi.org/10.1109/TAP.2003.817558)

- [14] N. Yu et al., Light propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction, *Science*, vol. 334, 2011. [Doi:10.1126/science.1210713](https://doi.org/10.1126/science.1210713)
- [15] X. Ni, N. K. Emani, A. V. Kildishev, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, Broadband light bending with plasmonic nanoantennas, *Science*, vol. 335, 2012. [Doi:10.1126/science.121468](https://doi.org/10.1126/science.121468)
- [16] A. Li, S. Shreya , and D. Sievenpiper, Metasurfaces and their applications, *Nanophotonics* 7.6, 2018. [Doi:10.1515/nanoph-2017-0120](https://doi.org/10.1515/nanoph-2017-0120)
- [17] V. Su, et al., Advances in optical metasurfaces: fabrication and applications, *Optics express* 26.10, 2018. [Doi:10.1364/OE.26.013148](https://doi.org/10.1364/OE.26.013148)
- [18] A. I. Kuznetsov, et al., Roadmap for optical metasurfaces, *ACS photonics* 11.3, 2024. [Doi:10.1021/acsp Photonics.3c00457](https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.3c00457)
- [19] F. Aieta, P. Genevet, N. Yu, M. A. Kats, Z. Gaburro, F. Capasso, Out-of-plane reflection and refraction of light by anisotropic optical antenna metasurfaces with phase discontinuities, *Nano Lett.*, 12, 2012. [Doi:10.1021/nl300204s](https://doi.org/10.1021/nl300204s)
- [20] I. Moreno, Optics of the metalens, *European Journal of Physics* 43.6, 2022. [Doi:10.1088/1361-6404/ac93c8](https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac93c8)
- [21] H. Hsiao, C. H. Cheng, and T. Din Ping, Fundamentals and applications of metasurfaces, *Small Methods* 1.4, 2017.
- [22] S. M. Choudhury, et al., Material platforms for optical metasurfaces, *Nanophotonics* 7.6, 2018. [Doi:10.1515/nanoph-2017-0130](https://doi.org/10.1515/nanoph-2017-0130)
- [23] E. Khaidarov, et al., Control of LED emission with functional dielectric metasurfaces, *Laser & Photonics Reviews*, 14.1, 2020. [Doi:10.1002/lpor.201900235](https://doi.org/10.1002/lpor.201900235)
- [24] M. A. Sultan, et al., Hybrid metasurfaces for simultaneous focusing and filtering, *Optics Letters* 46.2, 2021. [Doi:10.1364/OL.410080](https://doi.org/10.1364/OL.410080)
- [25] A. She, et al., Large area metalenses: design, characterization, and mass manufacturing, *Optics express* 26.2, 2018. [Doi:10.1364/OE.26.001573](https://doi.org/10.1364/OE.26.001573)
- [26] M. Khorasaninejad, et al., Metalenses at visible wavelengths: Diffraction-limited focusing and sub-wavelength resolution imaging, *Science*, 2016. [Doi:10.1126/science.aaf6644](https://doi.org/10.1126/science.aaf6644)
- [27] Y. Wang, et al., High-efficiency broadband achromatic metalens for near-IR biological imaging window, *Nature communications* 12.1, 2021. [Doi:s41467-021-25797-9](https://doi.org/10.1038/s41467-021-25797-9)
- [28] S. Wang, et al., A broadband achromatic metalens in the visible, *Nature nanotechnology* 13.3, 2018. [Doi:s41565-017-0052-4](https://doi.org/10.1038/s41565-017-0052-4)

- [29] B. Groever, C. Wei Ting, and F. Capasso, Meta-lens doublet in the visible region, *Nano letters* 17.8, 2017. [Doi:10.1021/acs.nanolett.7b01888](https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.7b01888)
- [30] H. Pahlevaninezhad, et al., Nano-optic endoscope for high-resolution optical coherence tomography in vivo, *Nature photonics* 12.9, 2018. [Doi:10.1038/s41566-018-0224-2](https://doi.org/10.1038/s41566-018-0224-2)
- [31] N. Yu and F. Capasso, Flat optics with designer metasurfaces, *Nature Mater* (2), 139 – 150 (2014). [Doi:10.1038/nmat3839](https://doi.org/10.1038/nmat3839)
- [32] P. Lalanne and P. Chavel, Metalenses at visible wavelengths: past, present, perspectives, *Laser Photonics Rev.*11, 2017. [Doi:10.1002/lpor.201600295](https://doi.org/10.1002/lpor.201600295)
- [33] I. Moreno, M. Avendaño-Alejo and C. P. Castañeda-Almanza, Nonimaging metaoptics, *Opt. Lett.* 45(10), 2020. [Doi:10.1364/OL.391357](https://doi.org/10.1364/OL.391357)
- [34] E. R. Tkaczyk, Vectorial laws of refraction and reflection using the cross product and dot product, *Opt. Lett.* 37(5), 2012. [Doi:10.1364/OL.37.000972](https://doi.org/10.1364/OL.37.000972)
- [35] J. C. Valencia-Estrada and J. García-Márquez, Freeform geometrical optics I: principles, *Appl. Opt.* 58(34), 2019. [Doi:10.1364/AO.58.009455](https://doi.org/10.1364/AO.58.009455)
- [36] A. S. Glassner, *An introduction to ray tracing*, Morgan Kaufmann Publisher, 1989.
- [37] D. Smith, M. Campbell, and A. Bergmann, Vectorial approach of determining the wave propagation at metasurfaces, *Ann. Phys.* 361, 2015. [Doi:10.1016/j.aop.2015.06.016](https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.06.016)
- [38] J. Hu, J. Xie, S. Tian, H. Guo, and S. Zhuang, Snell-like and Fresnel-like formulas of the dual-phase-gradient metasurface, *Opt. Lett.* 45(8), 2020. [Doi:10.1364/OL.389067](https://doi.org/10.1364/OL.389067)
- [39] C. P. Castañeda-Almanza and I. Moreno, Ray tracing in metasurfaces, *Opt. Continuum* 1, 2022. [Doi:10.1364/OPTCON.449273](https://doi.org/10.1364/OPTCON.449273)
- [40] C. E. Gutiérrez, L. Pallucchini, and E. Stachura, General refraction problems with phase discontinuities on nonflat metasurfaces, *J. Opt. Soc. Am. A* 34(7), 2017. [Doi:10.1364/JOSAA.34.001160](https://doi.org/10.1364/JOSAA.34.001160)
- [41] F. Balli, M. Sultan, S. K. Lami, and J. T. Hastings, A hybrid achromatic metalens, *Nat. Commun.* 11(1), 2020. [Doi:10.1038/s41467-020-17646-y](https://doi.org/10.1038/s41467-020-17646-y)
- [42] X. Han, et al., High-efficiency one-dimensional metalens for 3D focusing, *Optics Letters* 47.7, 2022. [Doi:10.1364/OL.456024](https://doi.org/10.1364/OL.456024)
- [43] B. Groever, W. T. Chen and F. Capasso, Meta-Lens Doublet in the Visible Region, *Nano Lett.* 17, 4902, 2017. [Doi:10.1021/acs.nanolett.7b01888](https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.7b01888)
- [44] R. Winston, L. Jiang, and M. Ricketts, Nonimaging optics: erratum, *Adv. Opt. Photonics* 10, 48, 2018. [Doi:10.1364/AOP.431205](https://doi.org/10.1364/AOP.431205)

- [45] J. Chaves, Introduction to Nonimaging Optics, 2nd ed., CRC Press, 2015.
- [46] R. Winston, J. C. Miñano, and P. Benitez, Nonimaging Optics, Academic Press, 2005.
- [47] V.T. Galván, Metalentes y el método de cuerdas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Tesis de Maestría, 2024.
- [48] X. H. Lee, I. Moreno, and C.C. Sun, High-performance LED street lighting using microlens arrays, Opt. Express 21, 2013. [Doi:10.1364/OE.21.010612](https://doi.org/10.1364/OE.21.010612)
- [49] E. Dávila, Simulación de una metalente TIR para concentración de luz, Universidad Autónoma de Zacatecas, Tesis de Maestría, 2024.
- [50] P. Benítez, J. C. Miñano, J. Blen, R. Mohedano, J. Chaves, O. Dross and W. Falicoff, Analytic free-form lens design in 3D: coupling three ray sets using two lens surfaces, Opt. Eng. 43, 2004. [Doi:10.1364/OE.20.010839](https://doi.org/10.1364/OE.20.010839)
- [51] F. Konstantinos, J. Rolland, F. Duerr, and A. Sohn, Freeform optics: introduction, Opt. Express 30, 2022. [Doi:10.1364/OE.454788](https://doi.org/10.1364/OE.454788)
- [52] J. P. Rolland, M. A. Davies, T. J. Suleski, C. Evans, A. Bauer, J. C. Lambropoulos, and K. Falaggis, Freeform optics for imaging, Optica 8, 2021. [Doi:10.1364/OPTICA.413762](https://doi.org/10.1364/OPTICA.413762)
- [53] R. Wu, P. Benítez, Y. Zhang, and J. C. Miñano, Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge-Ampère equation method in freeform optics design, Opt. Lett. 39, 2014. [Doi:10.1364/OL.39.000634](https://doi.org/10.1364/OL.39.000634)
- [54] R. Wu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, and X. Liu, A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping, Opt. Express 21, 2013. [Doi:10.1364/OE.21.020974](https://doi.org/10.1364/OE.21.020974)
- [55] R. Wu et al., Design of freeform illumination optics, Laser Photon. Rev., vol. 12, no. 7, 2018. [Doi:10.1002/lpor.201700310](https://doi.org/10.1002/lpor.201700310)
- [56] I. Moreno, An LED metalens for uniform illumination, Proc. SPIE 12217, Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XXIII, 122170I, 2022. [Doi:10.1117/12.2632271](https://doi.org/10.1117/12.2632271)
- [57] V. I. Oliker., On reconstructing a reflecting surface from the scattering data in the geometric optics approximation, Inverse Problems, 5, 1989. [Doi:10.1088/0266-5611/5/1/008](https://doi.org/10.1088/0266-5611/5/1/008)
- [58] V. I. Oliker., Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics, In Trends in Nonlinear Analysis, Springer Verlag, 2003.
- [59] R. Wester, G. Muller, A. Voll, M. Berens, J. Stollenwerk, and P. Loosen, Designing optical free-form surfaces for extended sources, Opt. Express 22, 2014. [Doi:10.1364/OE.22.00A552](https://doi.org/10.1364/OE.22.00A552)

- [60] Z. Feng, B. D. Froese, and R. Liang, Freeform illumination optics construction following an optimal transport map, *Appl. Opt.* 55, 2016. [Doi:10.1364/AO.55.004301](https://doi.org/10.1364/AO.55.004301)
- [61] R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, and X. Liu, Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge-Ámpere equation, *Opt. Lett.* 38, 2013. [Doi:10.1364/AO.55.004301](https://doi.org/10.1364/AO.55.004301)
- [62] R. Pestourie, C. P. Arancibia, Z. Lin, W. Shin, F. Capasso, and S. G. Johnson, Inverse design of large-area metasurfaces, *Opt. Express* 26, 2018. [Doi:10.1364/OE.26.033732](https://doi.org/10.1364/OE.26.033732)
- [63] Z. Li, R. Pestourie, Z. Lin, S. G. Johnson, and F. Capasso, Empowering Metasurfaces with Inverse Design: Principles and Applications, *ACS Photonics*, 9 (7), 2022. [Doi:10.1021/acsp Photonics.1c01850](https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.1c01850)
- [64] Z. Li, R. Pestourie, JS. Park, et al., Inverse design enables large-scale high-performance meta-optics reshaping virtual reality, *Nat Commun.*, 13, 2022. [Doi:10.1038/s41467-022-29973-3](https://doi.org/10.1038/s41467-022-29973-3)
- [65] K. E. S. Nielsen, M. A. Carlsen, X. Z. Puyalto, and S. Raza, Non-imaging metasurface design for collimated beam shaping, *Opt. Express* 31, 2023. [Doi:10.1364/OE.504595](https://doi.org/10.1364/OE.504595)
- [66] R. L. Burden, J. Douglas, y P. Solorio, *Análisis Numérico*. 9^a.Ed., Cengage Learning, 2011.
- [67] L. Zhilin, et al. *Numerical Solution of Differential Equations: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods.*, Cambridge University Press, 2018.
- [68] J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2nd Ed., McGraw-Hill, Inc., 1992.
- [69] J. Holland, *Genetic algorithms*. *Sci. Am.*, 1992.
- [70] R. L. Haupt, S. E. Haupt, *Practical Genetic Algorithms*, John Wiley & Sons, 2004.
- [71] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Reading, Addison-Wesley, 1989.
- [72] O. A. Arqub, Z. A. Hammour, Numerical solution of systems of second-order boundary value problems using continuous genetic algorithm, *Information Sciences*, Volume 279, 2014. [Doi:10.1016/j.ins.2014.03.128](https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.03.128)
- [73] A. Pourrajabian, R. Ebrahimi, M. Mirzaei, M. Shams, Applying genetic algorithms for solving nonlinear algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 219, Issue 24, 2013. [Doi:10.1016/j.amc.2013.05.057](https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.057)
- [74] C. Grosan and A. Abraham, A New Approach for Solving Nonlinear Equations Systems, in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, vol. 38, no. 3, 2008. [Doi:10.1109/TSMCA.2008.918599](https://doi.org/10.1109/TSMCA.2008.918599)

-
- [75] G. Joshi and M. B. Krishna, Solving system of non-linear equations using Genetic Algorithm, 2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), Delhi, India, 2014. [Doi:10.1109/ICACCI.2014.6968423](https://doi.org/10.1109/ICACCI.2014.6968423)

Productos Académicos

Publicaciones:

Las publicaciones derivadas de este trabajo de tesis doctoral son:

1. I. Moreno, M. Avendaño-Alejo, and C. P. Castañeda-Almanza, Nonimaging metaoptics, Opt. Lett. 45(10), 2020. [Doi:10.1364/OL.391357](https://doi.org/10.1364/OL.391357)
2. C. P. Castañeda-Almanza and I. Moreno, Ray tracing in metasurfaces, Opt. Continuum 1, 2022. [Doi:10.1364/OPTCON.449273](https://doi.org/10.1364/OPTCON.449273)

Congresos:

Parte de este trabajo doctoral fue presentado en versión póster en los congresos:

1. C. P. Castañeda Almanza, I. Moreno, Metalens for uniform rectangular illumination, SPIE Optics + Photonics, San Diego California, Agosto 2022.
2. C. P. Castañeda Almanza, I. Moreno, Leyes de refracción y reflexión generalizadas para metasuperficies, LXV Congreso Nacional de Física, Zacatecas, Octubre 2022.



Optics Letters

Nonimaging metaoptics

IVAN MORENO,^{1,*}  MAXIMINO AVENDAÑO-ALEJO,²  AND C. P. CASTAÑEDA-ALMANZA^{1,3}

¹Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia, Universidad Autónoma de Zacatecas, 98060 Zacatecas, Mexico

²Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Cd. de México, Mexico

³UPIIZ, Instituto Politécnico Nacional, 98160 Zacatecas, Mexico

*Corresponding author: imorenoh@uaz.edu.mx

Received 25 February 2020; revised 28 March 2020; accepted 29 March 2020; posted 1 April 2020 (Doc. ID 391357); published 7 May 2020

So far, metalenses have only been studied in imaging optics, where a point from the object space is mapped to a corresponding point in the image space. Here we explore metalenses and metamirrors for dealing with the optimal transfer of light energy. Owing to its compactness and high design flexibility, metasurface-based flat optics may open new opportunities in the nonimaging field, which deals with light concentration and illumination. The building blocks of metalenses are subwavelength-spaced scatterers. By suitably adjusting their shape, size, position, and orientation, one can control the light spatial distribution, as is desired in nonimaging problems. In this Letter, we introduce nonimaging metaoptics, review its basics, and briefly explore three cases: the compound-metasurface concentrator [analogous to the compound parabolic concentrator (CPC)], the total internal reflection (TIR) metalens (analogous to the TIR lens), and a simple condensing metalens. © 2020 Optical Society of America

<https://doi.org/10.1364/OL.391357>

Recent progress in metasurfaces has led to the design and fabrication of ultrathin, lightweight, and flat lenses with novel functionalities [1,2]. Metasurfaces are clusters of subwavelength-spaced optical scatterers (metallic or dielectric) at an interface [3,4], which locally redirect the incident light by shaping the traversing wavefront in function of the spatial distribution of the scatterers. These subwavelength-sized scatterers are called unit cells, meta-atoms, or metasurface building blocks (MBBs). The MBBs are able to alter all aspects of transmitting and reflecting light beams, and they may be optical antennas, resonators, etc. Metalenses consist of carefully arranged MBBs with specific patterns at an ultrathin optical metasurface on a flat substrate. Their operation principle is related to the collective scattering of light by the array of MBBs to focus light. By spatially adjusting the MBB geometrical parameters (such as size, shape, orientation, and position across the metasurface), one can control either reflected or transmitted light spatial distribution with high spatial resolution. The recent realization of polarization-independent, high transmittance, and high numerical aperture metalenses makes them very suitable for nonimaging optics. These remarkable properties may have far-reaching implications in nonimaging optics, which deals

with the optimal transfer of radiant energy from a light source onto a target [5–8]. There are a few approaches of metalenses for light concentration, but not in the realm of nonimaging optics [9–11]. The two main problems that nonimaging optics solves are light concentration and illumination. In light concentration, the rays from the edges of the source are directed towards the edges of the target, thus ensuring that all light emitted from the source will fall on the target (edge-ray principle). In illumination problems, the rays from the source are directed to desired points of the target and produce a desired light spatial distribution.

Nonimaging refractive and reflective lenses such as those used in collimators and concentrators, have useful properties but are often bulky and heavy to be used in small optical systems. Their design and fabrication rely on the shape optimization of their refractive or reflective curved surfaces. On the other hand, metalenses are very compact, and their manufacturing is becoming increasingly easier. For example, with the use of appropriate fabrication methods, the metalens phase profile can be digitized with MBBs that are manufactured with standard lithographic techniques employed in the integrated circuits industry [12].

The flatness and high design flexibility of metasurfaces are ideal properties for nonimaging optics. The two-dimensional (2D) phase profile of a metasurface has the equivalent effect of the three-dimensional (3D) surface shape in refractive or reflective optics. Optical designs may be performed by finding the optimal 2D phase profile of the metasurface. For example, for normally incident light, an imaging metalens must have a metasurface with the following phase profile [1]:

$$\Phi(r) = \pm k \left(\sqrt{r^2 + f^2} - f \right), \quad (1)$$

where k is the wave number, r is the radial position ($r^2 = x^2 + y^2$), f is the focal length, and the plus or minus sign indicates a diverging or converging lens [Fig. 1(a)]. This is a hyperbolic phase profile that focuses collimated light into a diffraction-limited spot [Fig. 1(b)]. In some way, the phase profile $\Phi(x, y)$ is the equivalent of the surface profile in traditional optics. Such a phase profile is constructed using a dense pattern of MBBs, each of which acts as a miniature antenna to locally impart a desired phase shift. A high-performance MBB is the cylindrical post with subwavelength diameters and heights [Fig. 1(c)], which has a polarization-independent response and high transmittance. By varying their size, the MBBs are



Ray tracing in metasurfaces

C. P. CASTAÑEDA-ALMANZA^{1,2} AND IVAN MORENO^{1,*} 

¹Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia, Universidad Autónoma de Zacatecas, 98060 Zacatecas, Mexico

²Instituto Politécnico Nacional, 98160 Zacatecas, Mexico

*imorenoh@uaz.edu.mx

Abstract: Ray tracing in a metasurface is the process to obtain the three-dimensional (3D) light path under reflection and transmission, which may be helpful in the optical design of metalenses and other metaoptical devices. In this work, first we deduce the 3D vector form of Snell's law for metasurfaces by using a geometric approach. And then, we deduce the general equations to calculate the direction of the reflected and refracted beams in any metasurface, and for any incident beam. In other words, we derive vector form equations for the 3D direction of transmitted and reflected beams at a metasurface with arbitrary 2D phase profile, and for any 3D direction of incident light.

© 2022 Optica Publishing Group under the terms of the [Optica Open Access Publishing Agreement](#)

1. Introduction

Recently, metalens technology based on metasurfaces has shown considerable optical performance while opening up new opportunities to thin, flat, lightweight optical devices [1,2]. Although metalens performance is tested under wave optics, its optical design is primarily performed by ray tracing, in particular for general analyses and for correcting aberrations. Moreover, metasurfaces are finding advanced applications in compound optical systems such as compound metalenses, or new applications as nonimaging metalenses [3], and then analyzing the paths of rays through these optical systems is becoming more and more important. The exact ray tracing schemes in traditional optics are based on vector formulations and computer programs. Classical laws of refraction and reflection for refractive materials are well known and studied in its vector form, and even recent studies are reported [4–6]. Therefore, to formulate ray tracing procedures in metasurfaces, it is convenient to transform the law of refraction and reflection into vector forms.

In the case of metasurfaces, the beam's refraction and reflection is determined by the phase spatial profile of the metasurface. The laws of reflection and refraction for metasurfaces with 1D phase profile were reported and experimentally tested in a seminal paper of metaoptics [7]. Also, a set of scalar equations of the Snell law for a metasurface with 2D phase profile were developed in [8]. These equations are for the case in which the plane of incidence is along the direction of the phase gradient profile. Later, a vector formulation for metasurfaces with 1D phase spatial profile, for the case that the plane of incidence is along the phase gradient, was reported in [9]. Recently, a set of Snell equations valid for arbitrary direction of the incident light, and for 2D phase profiles, were reported [3,10]. However, ray tracing methods through metasurfaces require a vector form of the direction of the reflected and refracted beams through a metasurface with 2D phase gradient [11], and valid for any direction of the incident light, which is what we report here.

2. Theory

Let us first define the geometry, and consider monochromatic light incident on a metasurface surrounded by homogeneous and isotropic media (Fig. 1(a)). The direction of propagation of the incident light beam and the refracted (or reflected) one are given by the normalized wavevectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 , respectively. Here the subindex “1” represents the incident beam, and the subindex “2” indicates the refracted or reflected beam. Normalized wavevectors may be expressed as function