UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Máximos y mínimos, una secuencia didáctica utilizando GeoGebra y Representaciones Semióticas

Práctica de desarrollo profesional para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

L.M.A. Erick del Refugio de Lira Lozano

Directores de tesis:

Dra. Elvira Borjón Robles

M.A.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Zacatecas, Zacatecas Agosto 2022

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) para estudios de Maestría de Septiembre de 2014 a Julio de 2016 y movilidad en el extranjero en Junio de 2016.

CONACYT

No. De Becario: 334575

No. De CVU: 628784

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, a los 17 días del mes de agosto del año 2022, quien suscribe, Erick del Refugio de Lira Lozano, estudiante del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 34155938, manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado titulado *"Máximos y mínimos, una secuencia didáctica utilizando GeoGebra y Representaciones Semióticas"*, bajo la dirección de la Dra. Elvira Borjón Robles y M.A.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

AGRADECIMIENTOS

Primero que nada, quisiera agradecer a mis asesoras, que con su sapiencia, paciencia y constancia fue posible llegar a la culminación de este trabajo. Gracias por sus acertadas orientaciones y por la confianza que siempre depositaron en mí.

Agradezco a mi familia y amigos quienes siempre han estado a mi lado impulsándome en la realización de este proyecto. Quisiera dedicar este logro de manera muy especial a mis amados padres, mi esposa y mi hija. Gracias por creer en mí.

Gracias a la vida por permitirme vivir este momento.

ÍNDICE

Contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. Resumen

Una de las preguntas frecuentes que los estudiantes hacen al profesor de matemáticas es: ¿y esto para qué me va a servir?

En los programas de Cálculo Diferencial en bachillerato el tema de optimización queda relegado a las últimas unidades y generalmente no se le proporciona la importancia que amerita; como consecuencia, tanto su enseñanza como su aprendizaje es endeble.

En el presente trabajo se plantea una secuencia didáctica para la resolución de problemas de optimización basándonos en la teoría de Representaciones Semióticas, considerando que la articulación conceptual depende estrechamente de la capacidad que tienen los individuos de transitar entre representaciones; esto va a permitir afianzar y construir modelos de las situaciones problema que se quieren resolver.

En nuestro caso, apoyados con el uso de la tecnología, queremos promover esos procesos de articulación proponiendo actividades de conversión entre representaciones en la resolución de problemas de optimización. Creemos que ello permitirá robustecer el aprendizaje del cálculo y proporcionará al estudiante una idea clara del potencial del mismo en aplicaciones de la vida diaria, permitiendo mostrar la utilidad de la matemática en la resolución de problemas.

Específicamente, el presente trabajo de investigación parte de la problemática que presentan los estudiantes de bachillerato para resolver problemas de optimización utilizando el criterio de la primera derivada. Se propone una secuencia didáctica que busca guiar a los estudiantes en la resolución de dichos problemas mediante la integración de diversos registros de representación. Dicha secuencia es aplicada en estudiantes de bachillerato.

Para llegar a la consolidación de dicha propuesta se analiza la forma en cómo los problemas de optimización son presentados en diversos libros y se propone un nuevo esquema para su solución.

Entre los resultados a los que llegan los estudiantes es que la matemática es una herramienta que posibilita la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Palabras clave: problemas de optimización, Representaciones Semióticas, GeoGebra.

Abstract

One of the frequent questions that students ask their math teacher is: what is this for?

In the Differential Calculus programs in high school, the topic of optimization is relegated to the last units and is generally not given the importance it deserves; as a consequence, both, teaching and learning, is weak.

In the present work, a didactic sequence is proposed for the resolution of optimization problems based on the theory of Semiotic Representations, considering that the conceptual articulation depends closely on the ability of individuals to move between representations; this will allow to consolidate and build models of the problem situations that are to be solved.

In our case, supported by the use of technology, we want to promote these articulation processes by proposing conversion activities between representations in solving optimization problems. We believe that this will strengthen the learning of calculus and provide the student with a clear idea of its potential in applications of daily life, allowing the usefulness of mathematics to be shown in problem solving.

Specifically, this research work is based on the problem presented by high school students to solve optimization problems using the first derivative criterion. A didactic sequence is proposed that seeks to guide students in solving these problems through the integration of various registers of representation. This sequence is applied to high school students.

To reach the consolidation of this proposal, the way in which optimization problems are presented in various books is analyzed and a new scheme for its solution is proposed.

Among the results that students reach is that mathematics is a tool that enables the resolution of problems of daily life.

Keywords: optimization problems, Semiotic Representations, GeoGebra.

2. Introducción

El tema de máximos y mínimos de una función está estrechamente ligado a los problemas de optimización, es de interés primordial en el aprendizaje del cálculo y sus aplicaciones a la ingeniería, sin embargo, queda de manifiesto que este tema no se aborda adecuadamente debido a distintos factores que acontecen dentro y fuera del aula, siendo uno de ellos el tiempo que se le dedica a su estudio, debido a la manera en la que están estructurados los programas (Tomás, 2002), ya que, por lo general, este tema se ve relegado al final de los cursos. Además, son varios los autores que coinciden que el Cálculo Diferencial en bachillerato generalmente se vuelve un proceso algorítmico y con falta de significado (Ríos y Monserrat, 2007; Moreno y Cuevas, 2004). Esto no parece ser un modelo curricular novedoso. Desde los años 60's del siglo pasado se ha pensado que los acercamientos para iniciar un curso de cálculo en el bachillerato deberían incluir una perspectiva de la resolución de problemas de optimización.

Podemos adelantar que la investigación en didáctica de las matemáticas tiene en perspectiva la modelación matemática como núcleo para la organización del currículo en el futuro, núcleo que llevará a la adquisición de significados de los conceptos por parte de los estudiantes.

Basándonos en el curriculum actual de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), en donde las aplicaciones del cálculo se proponen hacia la última parte del curso, se diseña una propuesta de secuencia didáctica que contempla diversas Representaciones Semióticas, cuyo objetivo es promover procesos de conversión entre diferentes representaciones y por ende, llegar a una aprehensión de los conceptos involucrados para resolver problemas de optimización, incluyendo los conceptos de máximo, mínimo, derivada, entre otros, intentando con ellos que los estudiantes dejen de considerar la derivación y en general el Cálculo Diferencial, como un proceso algorítmico y carente de significado.

Para promover dicha aprehensión, se considera el marco teórico de Representaciones Semióticas propuesto por Duval (1998) quien señala que "la coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos" (p. 176).

De acuerdo con Duval (1998), la comprensión de los conceptos se adquiere cuando los estudiantes logran transitar de un registro a otro, haciendo posible la identificación y aplicación del concepto.

En la enseñanza tradicional, se enfatiza, casi siempre, en abordar los conceptos en un solo registro, el algebraico, creando la necesidad de formular propuestas didácticas para una presentación sólida de conceptos en los estudiantes y con ello una mejor comprensión de los mismos. Este trabajo de investigación tiene el objetivo de contribuir a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial en relación a la formación de conceptos matemáticos, específicamente en el proceso de formación del concepto de máximo y mínimo de una función, en estudiantes del nivel medio superior.

3. Antecedentes y Planteamiento del Problema

A continuación, se presentan algunos trabajos de investigación que involucran los problemas de optimización, aplicación inmediata de los conceptos de máximo y mínimo, como foco central de estudio; también se incluyen trabajos en los que quedan expuestas las bondades e inclusive los riesgos que brinda el uso de la tecnología en el aula tanto para el docente al momento de enseñar como para los estudiantes al aprender.

3.1. Antecedentes

Iniciaremos reportando y analizando algunas investigaciones que ponen de manifiesto la problemática que existe alrededor de la enseñanza del tema de máximos y mínimos, particularmente en los problemas de optimización, en donde se hacen evidentes las dificultades que tienen los estudiantes al momento de resolver dichos problemas.

Malaspina (2004) señala la importancia que tienen los problemas de optimización pues "la optimización es una actividad muy natural en el hombre, y en la vida cotidiana frecuentemente estamos resolviendo o tratando de resolver problemas de optimización apoyados fuertemente en la intuición y haciendo conjeturas" (p. 931). El autor remarca la importancia que deben proporcionar los profesores al conocimiento de problemas de optimización, a sus múltiples formas de resolverlos, a las variaciones de los problemas, con el fin de estimular a los estudiantes e interesarlos en el estudio de los mismos:

> Es importante que los docentes conozcamos una variedad amplia de problemas de optimización ... reflexionar sobre ellos, manejar adecuadamente el ensayo y error, buscar la visualización, proponer nuevos enunciados o contextualizaciones, resolver el mismo problema de varias formas, hacer variantes al problema y crear nuevos problemas, contribuye a contar con mayores elementos para orientar a nuestros estudiantes, tanto estimulando su pensamiento matemático y valorando sus aproximaciones intuitivas, como mostrándoles una visión más amplia e integrada de las matemáticas. (Malaspina, 2004, p. 931)

Con este trabajo el autor nos propone tomar en cuenta la intuición que tienen los estudiantes hacia los problemas de optimización pues juega un papel importante al momento de aproximarse a la resolución de los problemas.

Tomás (2002) afirma que, a la enseñanza de los problemas de optimización, no se le hace demasiado hincapié al momento de llevar a cabo el programa de estudios y que, en muchas de las ocasiones, las clases se encaminan a la derivación de funciones cada vez más complejas, haciendo que el estudiante pierda interés al momento de introducir máximos y mínimos, lo que conlleva a un tedio al momento de abordar los problemas aplicados de optimización de funciones:

> en los actuales planes de estudio, los problemas de optimización en los que se usa el Cálculo Diferencial están enclavados en el bachillerato. El abordaje de tales problemas es delicado y árido … El profesor dedica muchas clases enseñándoles a emplear las reglas de derivación … En muchas ocasiones realizan ejercicios abstractos, desprovistos de interés práctico. Esto produce una dejadez en el alumno que puede ser fatal a la hora de introducir los máximos y los mínimos con problemas interesantes. (Tomás, 2002, p. 87)

En Ríos y Monserrat (2007) se menciona que, los procedimientos para resolver un problema de optimización se vuelven mecánicos y los estudiantes no se ponen a pensar en la factibilidad del resultado o en qué tan apegada a la realidad está la solución obtenida, "muchas veces los resultados teóricos obtenidos después de una optimización llevada a cabo para dar respuesta a un problema matemático, pueden distar de las soluciones prácticas utilizadas en la vida real" (p. 23). Los problemas de optimización son una de las aplicaciones inmediatas del Cálculo Diferencial a problemas de la vida cotidiana y por ello deben ser redactados de tal manera que las soluciones obtenidas se apeguen a ella y no simplemente obtener soluciones óptimas que en realidad nunca las veremos en la vida cotidiana.

Por su parte Moreno y Cuevas (2004) muestran que, con base en un estudio realizado a profesores de nivel medio y superior, y a estudiantes de maestría e ingeniería, "debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas de optimización proporcionan respuestas inverosímiles ..." (p. 94). En esta investigación se menciona el planteamiento de dos problemas cuyo objetivo es el de maximizar el volumen de una caja partiendo de una lámina de cartón. En ambos problemas las láminas tienen las mismas dimensiones, la variación de los problemas radica en el corte y armado solicitado. En las soluciones del primer problema no hubo mayor dificultad para la población examinada, pero en el segundo problema, se observó que a pesar de que algunos profesores y estudiantes realizaron el proceso analítico correcto y su solución es “analíticamente” correcta, tal resultado es imposible de embonar como solución al problema real ya que aunque es matemáticamente correcto, no resulta ser una solución factible en la vida real, lo cual pocas personas de la población se percataron de ello, mostrando así lo mencionado anteriormente sobre la interpretación errónea que se tiene del tema. Tall (1997) menciona al respecto que:

> cuando se encara con dificultades conceptuales, el estudiante debe aprender a hacerles frente. En matemática elemental, este enfrentamiento incluye aprender habilidades manipulativas y de cálculo para aprobar los exámenes ... El problema es que tales rutinas muy pronto llegan a ser simplemente «rutinas», así, el estudiante empieza a encontrar dificultades para responder preguntas que conceptualmente son desafíos. El profesor compensa colocando preguntas en los exámenes que los estudiantes pueden contestar y el círculo vicioso de enseñanza de procedimientos y aprendizaje se pone en movimiento. Como resultado, las conexiones conceptuales tienen menos probabilidad de ser llevadas a cabo. (Tall, 1997, p. 17)

En Malaspina (2007), se analizan las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Los resultados a los que se llegan no son alentadores ya que, "se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, más no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado" (p. 391). Es en este sentido en donde podemos aventurarnos a pensar en que, con la ayuda de las Representaciones Semióticas, los estudiantes poseerán y podrán dar argumentos válidos y de rigor para defender sus soluciones.

Una vez identificada la problemática del aprendizaje del tema de optimización en diversas investigaciones, la atención se orienta ahora hacia el análisis de investigaciones que reporten ventajas o desventajas que ofrecen las herramientas tecnológicas digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Tall (1997) se mencionan las bondades que tiene el uso de la tecnología como apoyo para la clase de matemáticas, "la computadora proporciona un nuevo entorno para explorar el concepto de función" (p. 12). También hace mención de que cuando el software es utilizado para representar el concepto de función generalmente se hace de manera gráfica y en ocasiones de forma tabular. Fey (1989) menciona que "la función de las computadoras que ha causado recientemente más entusiasmo entre los educadores matemáticos es la facilidad de pasar de una forma de representación de la información (numérico, gráfico y simbólico) a otra ..." (p. 255). Keller y Hirsch (1994), citado en Tall (1996), encontraron que "los estudiantes a menudo mostraron una fuerte preferencia por una representación en particular" la representación gráfica (p. 14). Tall (1996) menciona que en la investigación de Keller y Hirsch (1994) se observó que, cuando los problemas son puramente matemáticos, sin aplicación específica, muchos de los estudiantes prefieren utilizar símbolos, mientras que en los problemas que implican un contexto de aplicación específica, las preferencias por símbolos disminuyen y los gráficos son más propensos a ser utilizados.

Por su parte, Hitt (2003) remarca la importancia del uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, pues su desarrollo "impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en su construcción" (p. 213). Sin embargo, el autor advierte en este artículo sobre el cuidado que se debe tener al momento de implementar el uso de calculadoras gráficas en el aula pues cuando se pide a los estudiantes, por ejemplo, proporcionar la solución a un problema de cálculo de raíces de una función periódica, "no toman la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estamos observando una parte de la gráfica" (p. 220) y por ende sus soluciones son solamente lo que se observa en la pantalla.

Otro punto importante, es el enfoque que el profesor le proporcione al uso de la tecnología en el aula pues, en muchas ocasiones, se llega a afirmar que no es conveniente que los estudiantes trabajen con computadora o calculadoras gráficas, debido a que el estudiante solo se dedicará a “dar clic” y ver los resultados, sin hacer un mayor esfuerzo para hacer los cálculos y sin la rigurosidad de emplear un razonamiento lógico para llegar a la solución; por ello Hitt (2003) menciona que:

> en general el profesor de matemáticas que rechaza el uso de tecnología dice a sus alumnos que no es necesario utilizarla ya que de cualquier modo no les servirá para realizar un proceso algebraico. Sin embargo, en el desarrollo de

> habilidades matemáticas, el uso de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas. (Hitt, 2003, p. 221)

Gamboa (2007) menciona que el uso de la tecnología ha incidido de manera importante en la forma en cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Barrera y Santos (2001), citados en Gamboa (2007), señalan el potencial que la tecnología puede brindar al aprendizaje de las matemáticas: "el uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas ..." (p. 9). En esta investigación, el autor menciona que en muchas ocasiones un estudiante no sabe que resolver una ecuación polinómica se traduce, gráficamente, a encontrar los puntos donde la gráfica corta al eje X, lo cual se podría arreglar si el estudiante trabaja con un medio tecnológico como Excel, calculadoras gráficas, etc. Sin embargo, también hace advertencia sobre el uso que se le dará a la tecnología en el aula:

> los alumnos podrían “perderse” durante el proceso de solución de un problema y centrarse en aspectos que no le aporten información relevante o provocar que se queden en una observación superficial de los resultados, sin dar una interpretación adecuada o elaborar exploraciones más profundas al problema. (Gamboa, 2007, p. 38)

Gamboa (2007) también advierte que la tecnología no debe sustituir por completo las operaciones fundamentales, es decir, que "el estudiante debe ser capaz de cuestionar y refutar un resultado que obtenga al trabajar con la tecnología, basado en sus conocimientos matemáticos" (p. 39).

Ortiz y Arias (2012) destacan que “entre las ventajas que ofrece el uso de TIC en el aula es la posibilidad de implementar una visión constructivista, en nuestro caso, en la enseñanza de la matemática” (p. 2). Los autores mencionan que países como México, Chile, Costa Rica y Brasil son los más avanzados con respecto a enunciar políticas que las incorporen en el aula y que en este proceso el docente tiene el rol más importante, pues debe saber cómo utilizarlas para poder apoyar adecuadamente a sus estudiantes, sin embargo, los autores se preguntan si realmente los docentes están listos para ello.

> Lamentablemente, y a pesar de que en la actualidad muchas de las carreras de educación matemática se centran en enseñar a utilizar programas educativos, sin embargo, le dan muy poco énfasis en preparar a los futuros docentes a utilizar eficazmente dichas herramientas en una clase real… A pesar de la amplia gama de posibilidades en que un docente puede utilizar un equipo computacional en sus clases, este no cuenta ni con la preparación ni con la experiencia para darle un uso apropiado a la computadora. (Ortiz y Arias, 2012 p. 2)

En Arcavi y Hadas (2000) se menciona que, debido al surgimiento de diferentes softwares para la enseñanza de las matemáticas, su implementación en el salón de clases exige al profesor que introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la computadora, "la existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje" (p. 41).

Como menciona el título de este trabajo "*Secuencia didáctica de enseñanza de máximos y mínimos utilizando GeoGebra y Representaciones Semióticas*", se trabaja con el software GeoGebra, el cual fue ideado por Markus Hohenwarter como resultado de su trabajo de tesis de Maestría, presentada en la Universidad de Salzburgo, Austria, en el año 2002.

GeoGebra es un software de matemática dinámica que puede ser utilizado en todos los niveles educativos; reúne elementos de geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficas, probabilidad y cálculo en un solo programa que, además, es sencillo de utilizar.

Siguiendo la recomendación hecha por Arcavi y Hadas (2000), sobre la responsabilidad de diseñar actividades que aprovechen las características de la tecnología en el aula, a continuación, se presentan algunas investigaciones que se centran en el uso e importancia del software GeoGebra, como medio articulador y generador de conocimientos matemáticos.

López (2008), realiza una serie de actividades con las que pretende mostrar al lector el uso y la importancia de GeoGebra para la construcción de algunas propiedades y conceptos matemáticos; el autor propone "el uso del software de geometría dinámica GeoGebra como un espacio educativo que facilita los procesos de aprendizaje, en particular, del concepto de derivada, del cual tradicionalmente privilegiaba los procesos algorítmicos y no el conceptual" (p. 1167). El autor resalta al software GeoGebra sobre otros, en gran parte, por el tratamiento algebraico de los elementos geométricos, sin necesidad de manejar sintaxis o lenguajes de programación que exigen un conocimiento profundo para su utilización.

Ortiz y Arias (2012), llevaron a cabo en Costa Rica un curso virtual de seis semanas, en el que se capacitó a los docentes de secundaria para utilizar y darle un uso apropiado al software GeoGebra, como una herramienta didáctica en la enseñanza de la matemática. "El objetivo principal que hemos tenido con el curso es el de poder colaborar con los docentes, dando a conocer al GeoGebra como una herramienta dinámica y gratuita con la que le damos la oportunidad al estudiante de descubrir por sí mismo, es decir, que, mediante el análisis y la exploración, y una guía adecuada, el estudiante pueda construir sus propios conocimientos" (p. 3). Los autores resaltan el impacto que puede tener en los profesores y posteriormente en los estudiantes si se llega a hacer un buen uso de GeoGebra, tanto en el manejo del software, por parte del docente, como en la planeación o construcción de actividades y tareas.

Rodríguez (2012) menciona, entre otras, las aplicaciones que los docentes le pueden dar al software GeoGebra como: crear material educativo dinámico, ya sea para la demostración de algún concepto en el aula o la creación de applets para su uso público y con ello motivar en los estudiantes la capacidad de experimentar y descubrir conceptos por sí mismos. También resalta algunas de las ventajas que los estudiantes pueden aprovechar al momento de trabajar con GeoGebra como: visualizar conceptos abstractos y sus relaciones con otros objetos, realizar construcciones por iniciativa personal o con la guía del profesor y experimentar con las matemáticas debido a lo fácil e intuitivo que resulta el manejo del software.

3.2. Planteamiento del problema

3.2.1 Problemática

De las investigaciones revisadas, identificamos nuestra problemática, basándonos tanto en la experiencia propia como en lo que mencionan Moreno y Cuevas (2004):

> *La resolución de problemas aplicados de optimización de funciones utilizando el cálculo diferencial se enseña como un proceso mecánico, algorítmico y carente de significado.*

En el capítulo 3: Antecedentes y Planteamiento del Problema, quedó evidenciado que, la enseñanza de los problemas de optimización está, en su gran mayoría, basada en la mecanización de procesos y la algoritmización, donde el aprendizaje del estudiante es evaluado con un correcto o incorrecto sin darle un peso específico a todo aquello que involucra la resolución de un problema de optimización, es decir, a todos los conceptos, ideas y representaciones que están actuando en su pensamiento para poder siquiera empezar a resolver.

El estudiante generalmente se enfrenta a la resolución de estos problemas a ciegas y como un dogma de fe, sin saber el porqué de todo lo que se tiene que hacer, lo intenta resolver (derivar, puntos críticos, evaluar, etc.). Así, como consecuencia de lo anterior, retomamos lo mencionado por Malaspina (2007) como parte de nuestra problemática:

> *Cuando los estudiantes llegan a la solución de un problema de optimización no "tienen" las herramientas para argumentar y justificar por qué su solución es óptima.*

Lo anterior muestra la poca experiencia que tienen los estudiantes para entender los procesos de la modelización matemática. En un currículum tradicional, los procesos de modelización quedan de lado, dejando toda esa tarea al estudiante. En estos procesos de modelización, es esencial la articulación entre representaciones (Hitt y González-Martín, 2015).

Hitt (2003) hace referencia a la nula capacidad, ya sea por falta de práctica o simple desconocimiento, de los estudiantes para trabajar con otra representación que no sea la algebraica. Debemos pensar si esto es el resultado de nuestra manera, como docentes, de enseñar las matemáticas, o verdaderamente es un obstáculo insuperable para muchos estudiantes.

3.2.2 Pregunta de investigación

La pregunta de investigación que se plantea resolver con la investigación es:

¿De qué manera puede ser concebida una secuencia didáctica, basada en la conversión entre Representaciones Semióticas, mediada con el uso de GeoGebra, para promover la aprehensión, y con ello el significado, del tema de máximos y mínimos aplicados a los problemas de optimización, en estudiantes de bachillerato?

Recordemos que nuestra investigación tiene la intencionalidad de hacer a un lado el enfoque tradicional en la resolución de problemas de optimización y, con ayuda de GeoGebra y las Representaciones Semióticas, promover procesos de articulación entre conceptos involucrados y con ello incidir en el modelado, resolución e interpretación de las soluciones de problemas de optimización por parte de los estudiantes.

3.2.3 Hipótesis

Dado que el objeto central de este trabajo es la enseñanza del tema de máximos y mínimos en la resolución de problemas de optimización tomamos como hipótesis, y a la vez como un desafío lo siguiente:

La implementación de una secuencia didáctica, basada en el tránsito entre Representaciones Semióticas mediada con el uso de GeoGebra, promoverá la aprehensión y con ello el significado del tema de máximos y mínimos aplicados a la resolución de problemas de optimización.

Los autores confiamos firmemente que la implantación de esta secuencia en el aula promoverá que el estudiante resuelva problemas de optimización evocando distintas representaciones y aproximaciones para llegar a la solución.

3.2.4 Objetivos

Para este trabajo se han establecido un objetivo general y una serie de objetivos particulares, los cuales contribuirán al logro del objetivo general de manera "escalonada". A continuación, se describen cada uno de ellos.

3.2.4.1 Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es, diseñar una secuencia de actividades en GeoGebra con la que se promuevan procesos de conversión entre diferentes representaciones semióticas y, por ende, se llegue a una aprehensión de los conceptos involucrados para resolver problemas de optimización. Se busca además promover significados del proceso de resolución de problemas de optimización, así como de su solución.

Esta investigación intenta ser un parteaguas en la enseñanza del tema de optimización en la materia de Cálculo Diferencial en el nivel medio superior pues, de cumplirse el objetivo planteado, muchos serán los profesores que puedan llevar esta actividad al aula y así abordar de manera distinta a la habitual. Además de contar con un nuevo acercamiento, aprovechando las ventajas que brindan las nuevas tecnologías, en particular, el software GeoGebra.

3.2.4.2 Objetivos particulares

Dentro de los objetivos particulares, se encuentran los siguientes:

- Investigar en libros propuestos en el programa de la materia de Cálculo Diferencial del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, del tema de optimización para la selección de problemas que aparecerán en la secuencia didáctica.
- Diseñar en GeoGebra los problemas seleccionados. Se trabajará con las distintas vistas que el software matemático ofrece; gráfica en 2D, en 3D, hoja de cálculo, tablero algebraico.
- Hacer el pilotaje de la secuencia didáctica, tanto de las actividades escritas como de los programas hechos en GeoGebra.
- Aplicar la secuencia didáctica en condiciones reales de clase a estudiantes del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- Analizar cualitativamente los resultados, conclusiones y propuestas de mejora.

3.2.5 Justificación

A través del análisis de las investigaciones se evidencia, en primer lugar, que existe una gran preocupación por atender y mejorar el aprendizaje de los estudiantes en el tema de optimización. Más aún, en las investigaciones se sugiere el uso de tecnología; el presente trabajo se realiza con el apoyo del software GeoGebra, debido a que se considera que tanto profesores como estudiantes tienen más posibilidad de acceder a él (de uso libre) que a calculadoras gráficas u otro dispositivo. También se elige debido a que la interacción con este software es amigable y sencilla y en general no se necesita una introducción previa del mismo para su utilización.

Como se mencionó previamente, en el estudio de estos temas prevalece una tendencia algebraica. Para romper con este esquema se propone trabajar a través del uso de diversas Representaciones Semióticas (Duval, 1998).

Con este diseño de secuencia didáctica se espera desarrollar una adecuada herramienta tanto para el aprendizaje como para la enseñanza del tema de máximos y mínimos haciendo uso del criterio de la primera derivada para resolver problemas de optimización de funciones en el nivel medio superior.

En la actualidad, el uso de la tecnología es atractivo para los estudiantes del nivel medio superior; la utilización de un software con interfaz amigable y sencilla nos permite trasladar un problema dado de manera tradicional en los libros de texto, a diversas representaciones semióticas, entre ellas, la representación verbal, algebraica, tabular, gráfica y, como auxiliar para la comprensión del enunciado inicial, una representación pictórica, permitiendo, por ejemplo, que el estudiante pueda manipular fácilmente los elementos que en la pantalla se muestran y observar las variaciones que se van obteniendo con ello, así como el comportamiento de las gráficas, etc.

Es importante resaltar la importancia del uso de la tecnología debido a que se ahorran cálculos y el estudiante no pierde de vista el objetivo, es decir, el estudiante se centra más en lo que sucede en la pantalla, en las variaciones existentes y menos en la realización de operaciones en su calculadora, realización de tablas de datos, graficación de puntos, dibujos, etc. Es precisamente la parte visual en la que más énfasis hacemos pues, con las múltiples vistas y representaciones que brinda el software GeoGebra, el estudiante ya no solamente tendrá que imaginarse el problema, sino que podrá verlo y manipularlo con ayuda de deslizadores.

La tecnología (en nuestro caso GeoGebra) es un arma de doble filo pues por un lado tiene las ventajas antes mencionadas y por el otro, si el profesor no tiene buenas bases en el manejo de GeoGebra ni en el diseño de actividades para el máximo aprovechamiento de las características del mismo, es muy probable que cualquier intento de implementarlo en el aula sea fallido. Por ello es de vital importancia para este trabajo, además del diseño y su implementación, un análisis de los resultados obtenidos con el fin de realizar las mejoras o ajustes necesarios para que los estudiantes logren un aprendizaje integral del tema de máximos y mínimos. Además, si el diseño logra dar resultados satisfactorios y es bien recibido por los estudiantes se espera hacerlo llegar a más profesores para que ellos también lo apliquen a sus estudiantes.

4. Marco teórico

En este capítulo se describen aspectos importantes sobre la teoría de las Representaciones Semióticas de Duval en la construcción de conceptos, marco teórico que sustenta esta investigación. Además, se dan a conocer los conceptos matemáticos que juegan un papel importante en el abordaje de los problemas de optimización y se describe el fundamento tecnológico.

4.1. Teoría de las Representaciones Semióticas

Para Duval (1998) existe una palabra importante en matemáticas: la palabra representación, entendiendo a una representación como una manera de identificar a un objeto matemático, por ejemplo, una escritura, una notación, un símbolo, etc. El porqué de la importancia de dicha palabra recae en que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Más aún, Pluvinage (1998; citado en Gatica y Maz-Machado, 2012) menciona que entender un concepto significa tener una imagen del concepto.

Sin embargo, es importante no confundir a un objeto matemático con su representación ya que esto puede desencadenar una pérdida de comprensión, ya sea a mediano o largo plazo.

"La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas" (Duval, 1998). Tal como se menciona en Deledicq & Lassave (1979; citado en Duval, 1998): es el objeto representado lo que importa y no sus diferentes Representaciones Semióticas posibles.

Las Representaciones Semióticas juegan un papel fundamental en la actividad matemática, pues según afirma Duval (1998), los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o de una experiencia intuitiva inmediata, sino que es necesario poder proporcionar representantes. Además, en matemáticas, una representación muestra parcialmente el objeto matemático al que se refiere. Es la coordinación entre sus diferentes representaciones que permitirá la comprensión conceptual. Solamente por medio de las Representaciones Semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos (Duval, 1998).

Duval (1998), define a las representaciones mentales, como aquellas que cubren al conjunto de imágenes y a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto matemático, sobre una situación y sobre lo que le está asociado. A las Representaciones Semióticas, las considera como "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación el cual contiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento".

Las Representaciones Semióticas no solo son un medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, sino que además son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, para una construcción conceptual más que puramente algorítmica. Estas representaciones juegan un papel primordial en:

- El desarrollo de las representaciones mentales, lo cual depende de una interiorización de las Representaciones Semióticas.
- El cumplimiento de diferentes funciones cognitivas: la función de objetivación (expresión privada) que es independiente de la función de comunicación (expresión para otros), y la función de tratamiento que no puede ser desempeñada por las representaciones mentales.
- La producción de conocimientos: las Representaciones Semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que pueden surgir sistemas semióticos totalmente diferentes (Benveniste, 1974; Bresson, 1987; citados en Duval, 1998).

Para Duval (1998), "el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación". Afirma que no puede haber noésis sin sémiosis, llamando sémiosis, a la aprehensión o producción de una Representación Semiótica y noésis, a la aprehensión conceptual de un objeto.

En la enseñanza de la matemática, la sémiosis es esencial para poder movilizar varios registros de representación o para escoger un registro en lugar de otro. La coordinación de varios registros de Representación Semiótica aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: "es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas "(Duval, 1998).

Duval (1998), define los registros de representación, como aquel sistema semiótico que permite realizar las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la sémiosis:

1. La **formación** de una representación identificable en un registro dado; esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.
2. El **tratamiento** de una representación como la transformación de ésta en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
3. La **conversión** de una representación como la transformación de ésta en una representación de otro registro conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida.

Cabe resaltar que la conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente de la del tratamiento.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la sémiosis, sólo las dos primeras, la de formación y la de tratamiento, son tomadas en cuenta en la enseñanza tradicional. Se considera generalmente que la conversión resultaría por sí misma desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones, por ejemplo, construir una gráfica o escribir una ecuación y sustituir en ella los valores numéricos de las variables.

Duval (1998) se cuestiona sobre ¿a qué corresponde la existencia de varios registros de representación y cuál es el interés de su coordinación para el funcionamiento del pensamiento humano?, para lo cual da respuesta con base en los siguientes tres puntos:

1. **Economía de tratamiento**: La existencia de varios registros permite hacer cambio entre ellos, y este cambio tiene como objetivo permitir efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente.
2. **Complementariedad de los registros**: la naturaleza del registro semiótico que se selecciona para representar un contenido, impone una selección de los elementos significativos informativos del contenido al que representa. Esta selección se hace en función de las posibilidades y de las restricciones semióticas del registro seleccionado. Un lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama. Ello quiere decir que *toda representación es parcial*

cognitivamente con respecto a lo que ella representa y que de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.

3. La conceptualización implica una **coordinación de registros de representación**:
    a. **Hipótesis 1**: Si se selecciona bien el registro de representación, las representaciones en él son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado.
    b. **Hipótesis 2**: La comprensión de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

En resumen, la teoría de las Representaciones Semióticas propone trabajar en diferentes registros de representación para que el estudiante logre una aprehensión de los objetos matemáticos y esto contribuya más adelante en la resolución, en nuestro caso, de problemas de optimización.

4.2 Fundamento matemático

Una de las aplicaciones más importantes del concepto de derivada son los problemas de optimización, en los cuales, tratándose de funciones, debemos encontrar los valores de la función que la maximizan o minimizan. Casos de este tipo de problemas abundan en muchas áreas de la vida. Por ejemplo, un médico que desee encontrar la menor cantidad de dosis de una droga para curar cierta enfermedad; una empresa fabricante de envases para bebidas necesita determinar las dimensiones que debe tener el envase para maximizar el volumen que pueda contener, o bien, dado un volumen determinado, qué dimensiones debe tener un recipiente para minimizar costos de materiales.

Nuestro objeto matemático de interés es el de máximo y mínimo de funciones, y nuestras actividades estarán inmersas en los problemas de optimización, los cuales son la aplicación inmediata del concepto en cuestión. Pero lograr encontrar un máximo o mínimo de una función no es tarea sencilla, es decir, se deben tener en cuenta otros conceptos y teoremas del Cálculo Diferencial. Así, necesitamos tener en cuenta las siguientes definiciones, teoremas y corolarios, los cuales fueron tomadas de los libros Swokowski (1998) y Purcell

(2007), los cuales forman parte de la bibliografía sugerida en el programa del curso de Cálculo Diferencial establecido por la Academia de Matemáticas del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Debemos tener claro que el tema de máximos y mínimos se ubica en la quinta y última unidad de aprendizaje del programa del curso y coincide con lo reportado por Tomás (2002). Por lo anterior, no creemos necesario enunciar aquí los conceptos matemáticos previos tales como función, dominio, codominio, límite, derivada, entre otros.

Primeramente:

Definición 1: Sea f una función con dominio real definida en el intervalo I y sea c un número contenido en dicho intervalo:

i. $f(c)$ es máximo global de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I;

ii. Si c es un número contenido en D, $f(c)$ es un máximo local de f en $D \subset I$ si $f(c) \geq f(a)$ para todo a en D pero no necesariamente para todo x en I;

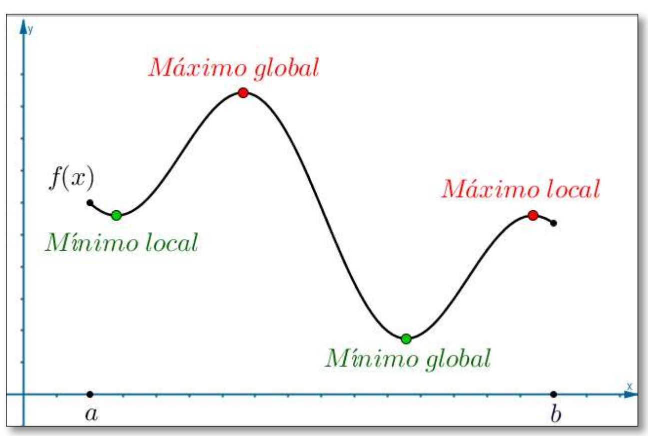
iii. $f(c)$ es mínimo global de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I;

iv. Si c es un número contenido en D, $f(c)$ es un mínimo local de f en $D \subset I$ si $f(c) \leq f(a)$ para todo a en D pero no necesariamente para todo x en I

Definición tomada del libro Purcell (2007, p.151)

Figura 1

Máximos y mínimos locales y globales



En la Figura 1 podemos observar gráficamente cual es la diferencia entre un máximo global y un máximo local, y entre un mínimo global y un mínimo local. Básicamente el máximo global es el valor más grande que puede tomar la función en todo el intervalo o dominio, y el máximo local es el valor más grande que puede tomar la función en un intervalo que sea subconjunto del dominio. Análogo para el mínimo global y local.

Una vez definido el máximo y mínimo de una función pasamos entonces a definir qué es una función creciente o decreciente. Una función creciente es aquella en la cual, para cada par de números, uno menor que el otro, la imagen del menor de ellos será menor que la imagen del número mayor. De manera similar, una función decreciente es aquella en la cual, para cada par de números, uno menor que el otro, la imagen del menor de ellos será mayor que la imagen del número mayor.

Definición 2: Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1, x_2 dos números que están en I:

(i). f es creciente en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

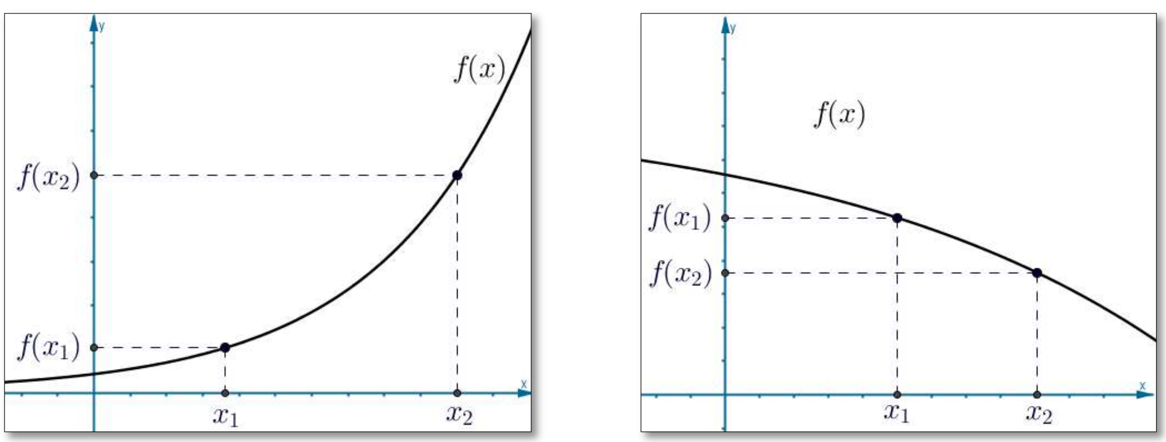
(ii). f es decreciente en I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

(iii). f es constante en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.162)

Figura 2

Funciones creciente y decreciente



El siguiente teorema es de gran importancia pues en él se afirma la existencia de un máximo y un mínimo para cualquier función continúa definida en un intervalo cerrado. Estos valores máximo y mínimo son también llamados absolutos o globales pues efectivamente son los valores más "grande" y "pequeño" que puede tomar la función en un intervalo cerrado.

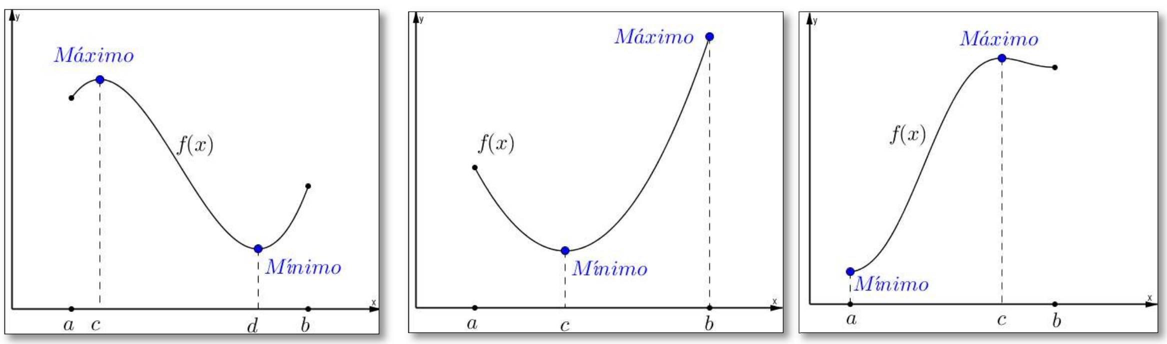
Teorema del valor extremo

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un mínimo y un máximo por lo menos una vez en $[a, b]$.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.164)

Figura 3

Máximos y mínimos globales o absolutos



Encontrar el máximo y/o mínimo de una función no es una tarea demasiado exhaustiva siempre que se cuente con un software graficador o con una representación gráfica de la función objetivo, ¡basta con observar cual es el punto más alto o más bajo y ya! El siguiente teorema nos muestra cómo encontrar máximos o mínimos locales de una función en un intervalo abierto de manera más precisa, dejando de lado a la "estimación".

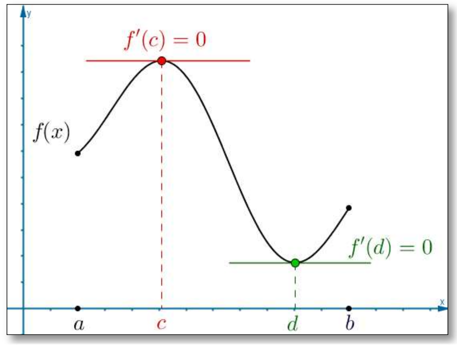
Teorema de Fermat

Si una función f tiene un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.165)

Figura 4

Existencia de máximo y mínimo local



Como corolario del teorema anterior tenemos lo siguiente:

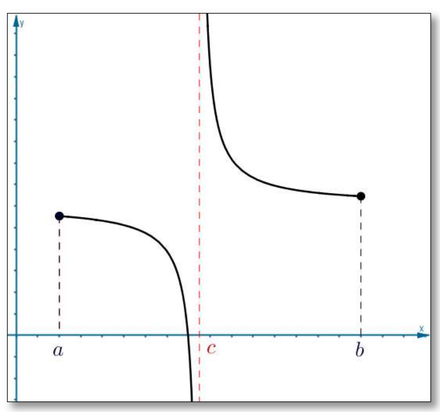
Corolario

Si $f'(c)$ existe y $f'(c) \neq 0$, entonces $f(c)$ no es ni un máximo local ni un mínimo local.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.165)

Figura 5

Función sin máximo ni mínimo local



Gracias al Teorema de Fermat encontrar un máximo o mínimo de una función consiste en encontrar, primeramente, su derivada y posteriormente igualarla a cero, es decir, el máximo o mínimo local de una función en un punto c se presenta cuando $f'(c) = 0$. Sin embargo, es posible que una función verifique el teorema de Fermat y no tenga ningún máximo local. Por ejemplo:

La función $f(x) = x^3$ en el intervalo $(-1,1)$.

Su derivada es $f'(x) = 3x^2$

Igualamos a cero,

$$f'(x) = 0$$

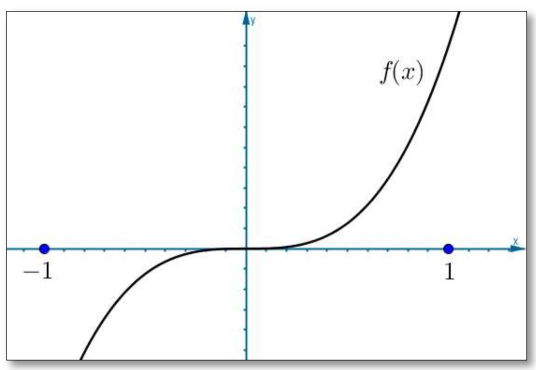
$$\leftrightarrow 3x^2 = 0$$

$$\leftrightarrow x = 0$$

Entonces en $x = 0$ la función tiene un máximo o mínimo local, observando la gráfica podemos ver que no es así.

Figura 6

Función $f(x) = x^3$

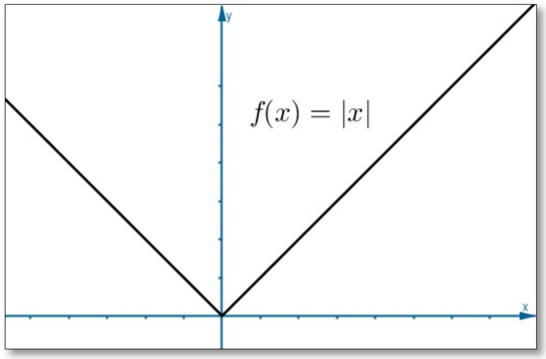


Nota: En $x = 0$ se observa claramente que no se alcanza ni el máximo ni el mínimo de la función en el intervalo mencionado.

O también, es posible que una función no sea derivable y presente un máximo o mínimo. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ presenta un mínimo en $x = 0$ pero $f'(0)$ no existe en ese valor.

Figura 7

Función $f(x) = |x|$



Nota: En $x = 0$ se observa claramente que se alcanza el mínimo, pero la función no es derivable

Teorema

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y alcanza su máximo o su mínimo en un número c del intervalo abierto (a, b), entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.165)

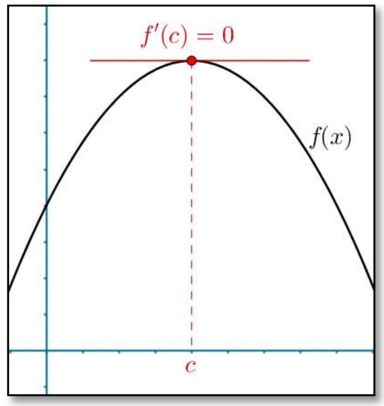
Número crítico

Definición 3: Un número c del dominio de una función f se llama número crítico de f si $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.166)

Figura 8

Número crítico



Entonces, una guía para encontrar el máximo y el mínimo absolutos de una función $\boldsymbol{f}$ en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es la siguiente:

1. Encontrar todos los números críticos de f.
2. Calcular $f(c)$ para cada número crítico c.
3. Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
4. El máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$ son, respectivamente, el mayor y el menor de los valores de la función determinados en los pasos 2 y 3.

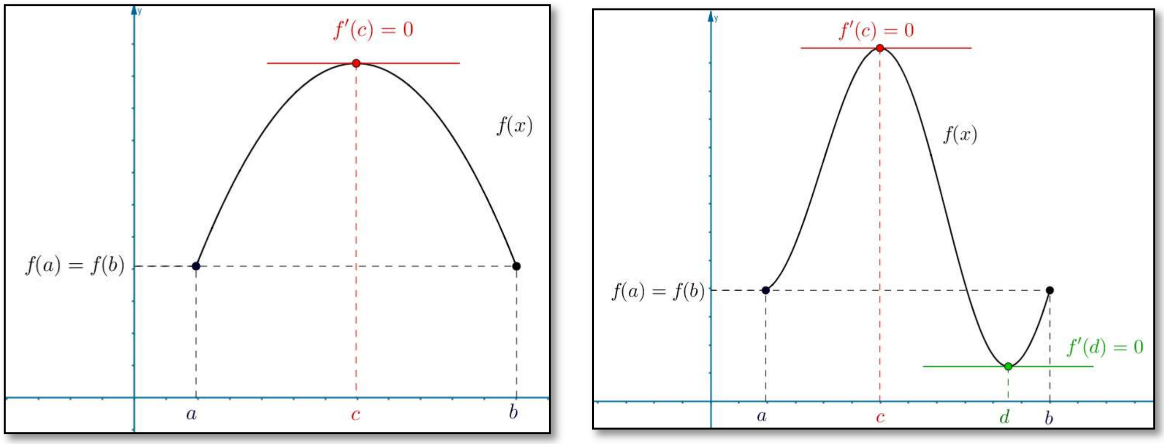
Teorema de Rolle

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.170)

Figura 9

Teorema de Rolle



Corolario

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces f tiene al menos un número crítico en el intervalo abierto (a, b).

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.170)

Teorema del valor medio

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

O bien

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

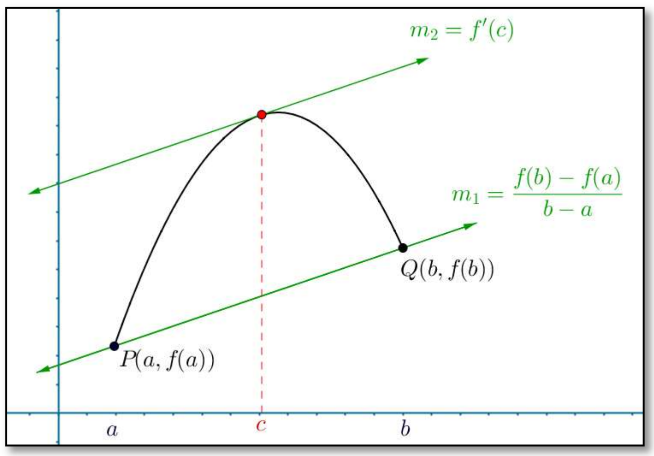
Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.172)

El teorema del valor medio puede interpretarse geométricamente como sigue:

Consideremos la representación gráfica de una curva continua $f(x)$ (ver Figura 10), la recta secante que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ tiene como pendiente $m_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Según el teorema del valor medio, debe existir algún punto sobre la curva, localizado entre P y Q, en el que la recta tangente sea paralela a la recta secante que pasa por P y Q; es decir, existe algún número $c \in (a, b)$ tal que $m_2 = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Figura 10

Teorema del valor medio



Teorema

Sea f una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b):

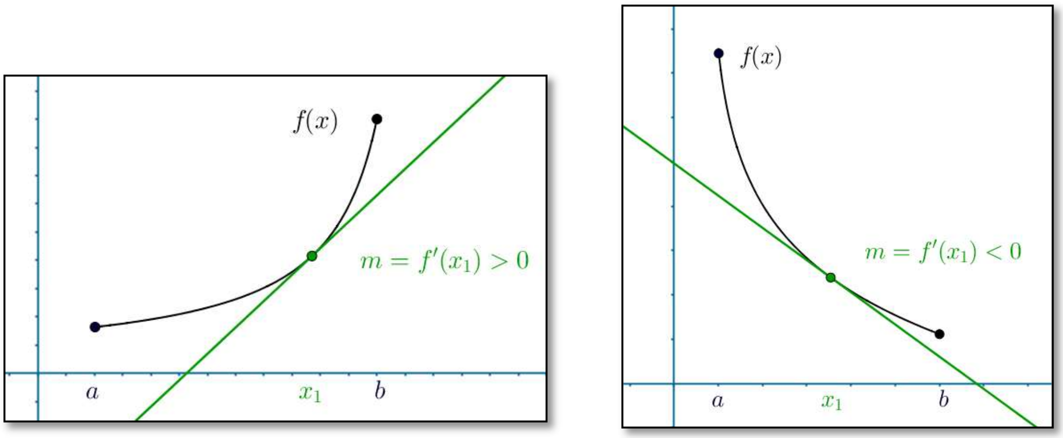
(i). Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

(ii). Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.175)

Figura 11

Funciones creciente y decreciente



Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea f una función que es continua en un número crítico c y derivable en un intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en c mismo:

(i). Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.

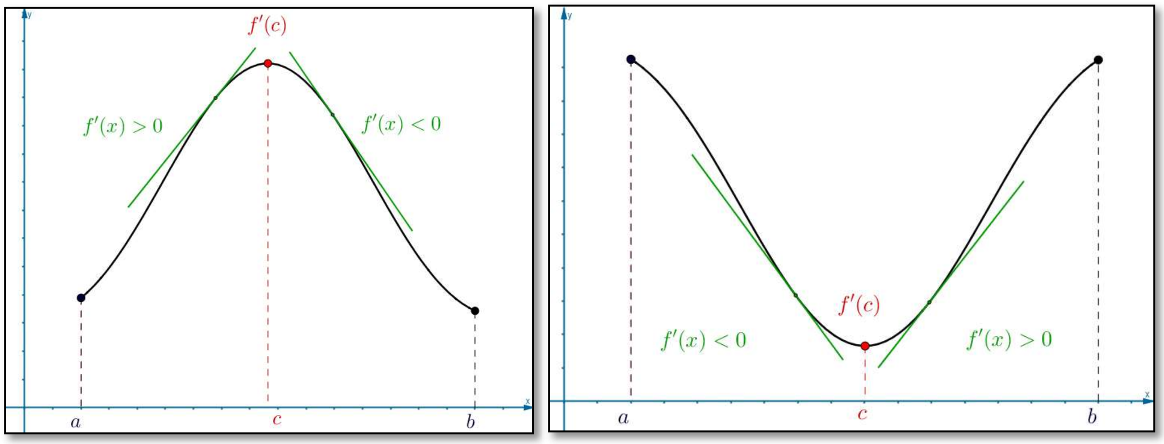
(ii). Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.

(iii). Si $f'(x) > 0$ o bien si $f'(x) < 0$ para todo x en I, excepto para $x = c$, entonces $f(c)$ no es un valor extremo local de f.

Definición tomada del libro Swokowski (1998, p.178)

Figura 12

Criterio de la primera derivada



Nótese que la tarea de encontrar el máximo o mínimo de una función es un proceso que involucra o envuelve a otros conceptos.

4.3 Fundamento tecnológico

Comencemos este apartado con un breve recuento de la incorporación de las TIC en las aulas.

Según Rojano (2003), el uso de las tecnologías de la información y comunicación en la escuela radica desde la década de los 80´s, no obstante, dicha incorporación en las aulas era carente de una debida sistematización. Tuvieron que pasar varios años para que las TIC tuvieran un manejo oficial como herramienta en el sistema escolar.

En los años 80´s y aprovechando las nuevas potencialidades gráficas, se realizó un proyecto experimental con estudiantes universitarios. En él se pretendía introducir ecuaciones diferenciales. El proyecto, aunque exitoso, tuvo complicaciones al momento de pretender generalizarlo debido al tipo de registro gráfico que en ese momento se requería. (Rivera, 2010)

Sabemos por Rivera (2010) que en los años 90´s se comenzó a experimentar con los sistemas algebraicos computarizados, CAS, por sus siglas en inglés, en las clases de matemáticas a nivel secundaria y que en el año 2000 los proyectos TELMA y ReMath pretendieron mejorar los intercambios y cooperaciones internacionales respecto a los marcos teóricos utilizados en el dominio de las tecnologías digitales en el aprendizaje.

Autores como Dunham y Dick (1994) y Boers-van Oosterum (1990), así como Rojano (1996) coinciden en que, en diversas partes del mundo, los estudiantes experimentan un aprendizaje significativo a través de un uso apropiado de las TIC, esto según algunos resultados reportados.

A pesar de esto y como menciona McFarlane (2001) las TIC no lograrán una importante influencia en las aulas si los docentes cuentan con poca o nula experiencia en el uso de las mismas como herramienta potencializadora del aprendizaje y si no están convencidos al respecto.

Respecto a la utilización de las TIC en el aula, se reconoce tres concepciones: las TIC como un conjunto de habilidades o competencias; las TIC como un conjunto de herramientas o de medios de hacer lo mismo de siempre, pero de un modo más eficiente; las TIC como un agente de cambio con impacto revolucionario (McFarlane et al., 2000).

De acuerdo con Rojano (2003) cuando se habla de las TIC como conjunto de habilidades, se refiere a concebirla como una materia de enseñanza, lo que conduce a reflexionar sobre ciertos niveles en la competencia de informática lo cual no puede garantizar un reflejo de lo logrado en otras áreas.

En la segunda concepción se percibe a las TIC como un conjunto de herramientas o de medios de hacer lo mismo de siempre, pero de un modo más eficiente, es decir, incluir elementos de tecnología a diversas tareas de aprendizaje. La experiencia muestra, bajo este enfoque, que las tareas realizadas con tecnología, bien pudieran realizarse sin ella. Además, como comentan algunos autores, el aprendizaje que se lleva a cabo en un entorno tecnológico no siempre se transfiere de manera espontánea a otro tipo de entornos (por ejemplo, el de papel y lápiz) (Lave, 1988; Rogoff y Lave, 1984; Wertsch, 1991).

En la tercera concepción se considera a las TIC como un agente de cambio; este paradigma lleva a reflexionar sobre qué enseñar, cómo enseñarlo y el papel que juega el docente como el hacedor de experiencias de enseñanza-aprendizaje:

> concebir intervenciones deliberadas para cambiar en lo esencial los modelos pedagógicos, las prácticas en el aula y los contenidos curriculares en sistemas educativos

> en los que se ha planteado la necesidad de emprender reformas de esta naturaleza, a fin de conducir a los estudiantes hacia un aprendizaje significativo y satisfactorio.
>
> (Rojano, 2003, p. 138).

En Rojano (2003), se puede encontrar la experiencia de un Proyecto de Innovación Educativa desarrollado en México, en el cual fueron incorporadas las TIC a la enseñanza de las matemáticas bajo la tercera concepción.

El propósito del proyecto era probar ciertos modelos de uso de las TIC que influyeran en el mejoramiento del aprendizaje de ciertos temas curriculares clásicos y que además se reflejara una influencia en la transformación de las prácticas en el aula donde "se incursionara en la enseñanza de nuevos contenidos que permitieran al estudiante el acceso a ideas importantes en matemáticas y ciencias mediante el trabajo en entornos tecnológicos". (Rojano, 2003, p. 139).

Se puede apreciar que, aunque la incorporación de esta tercera concepción del uso de las TIC sería ideal en las aulas, "es difícil encontrar ejemplos de su implementación en los sistemas educativos" (Rojano, 2003, p. 138).

Convencidos de este tercer enfoque es que realizamos el presente trabajo de investigación ya que, con el aumento del uso de nuevas tecnologías, "la enseñanza de la matemática está teniendo una transformación en la forma de abordar las metodologías de aprendizaje y la utilización de recursos gráficos e interactivos" (Rivera, 2010, p. 67).

5. Metodología y diseño

A continuación, se enlistan los pasos que se siguieron en la realización de la presente investigación, así como la descripción de cómo fue llevado a cabo cada uno.

5.1 Búsqueda, revisión y selección de diversos problemas de optimización

Para la realización de la secuencia didáctica fue necesaria la búsqueda de problemas de optimización que estuvieran adhoc con el nivel académico en el que se pretendían presentar, es decir, considerando que son estudiantes de bachillerato, sus conocimientos previos y sobre todo que sería la primera vez en su vida que se enfrentarían a ellos. Los problemas fueron tomados de la bibliografía sugerida en el programa de la materia de Cálculo

Diferencial para cuarto semestre de bachillerato del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA), además de otros libros con los que contaba la biblioteca de dicho centro.

Se optó por trabajar con los libros Granville (2009), Larson (2005), Stewart (2012), Swokowski (1998) y Purcell (2007), ya que en ellos podemos encontrar una adecuada cantidad de problemas propuestos para el estudiante.

Se hizo una revisión exhaustiva de los tipos de problemas de optimización que se manejan en estas bibliografías llegando a la siguiente categorización:

Problemas directos: estos problemas se caracterizan porque solamente se da una función $f(x)$ a los estudiantes y sobre esa función se pide obtener máximos y/o mínimos.

Problemas aplicados a la física: este tipo de problemas son muy parecidos a los anteriores solo que tienen la particularidad de que hay un contexto físico, generalmente velocidad, y se proporciona al estudiante una función $s(t)$ en la cual hay que encontrar el tiempo t donde la velocidad es máxima o mínima.

Problemas aplicados a la economía: estos problemas se caracterizan, generalmente, porque no se brinda al estudiante una función directa con la cual trabajar, sino que se les brindan otras funciones con las cuales debe construir otra función que será la que hay que optimizar. Por ejemplo, se da una función de costos $C(x)$ y una función de ganancias $G(x)$ y se pide al estudiante calcular la utilidad máxima $U(x)$.

Problemas geométricos: en este tipo de problemas incluye todos aquellos en los que se propone una situación "real" en la que se requiera tener una imagen de la situación en cuestión, por ejemplo, el volumen mínimo de una caja que se arma con una lámina de cartón o el área máxima de una ventana rectangular coronada con un medio circulo por donde debe pasar luz.

Debido a nuestra hipótesis y objetivos planteados, se optó por trabajar con los problemas de optimización de tipo geométrico ya que es en ellos donde más variedad y riqueza de representaciones podemos encontrar y así podremos aprovechar al máximo las virtudes del GeoGebra y cumplir con la promoción de las Representaciones Semióticas.

5.2 Diseño en GeoGebra de los problemas seleccionados

Ya que estábamos interesados en que, al realizar las actividades planteadas, los estudiantes manipularan diferentes registros de representación de los temas mencionados, cada problema se pensó para que contara con una especie de animación que permitiera observar el comportamiento del fenómeno planteado. Para lograrlo, se hizo uso de deslizadores.

Cada actividad además cuenta con la respectiva representación algebraica de la función que modela el enunciado del problema de optimización; cuenta con la gráfica (en todo su dominio) de dicha función y con un gráfico limitado a mostrarse solo en el dominio factible del problema.

5.3 Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica consta de cinco actividades introductorias que se centran en la resolución de problemas de optimización. Cada actividad está programada para que tenga una duración de 60 minutos, que es el tiempo dedicado a la materia de Cálculo Diferencial al día en el CEM UAA.

Las actividades de la secuencia están conformadas con preguntas abiertas que tiene la intención de que el estudiante reflexione sobre los diversos pasos que se pueden llevar a cabo en el intento de resolver un problema de optimización. La intención es que con dichas actividades los estudiantes vayan construyendo el criterio de la primera derivada.

No olvidemos que nuestro objetivo principal es promover la conversión entre distintas representaciones de los conceptos involucrados en los problemas de optimización y con ello promover la aprehensión de los mismos y sus significados, apoyados con tecnología.

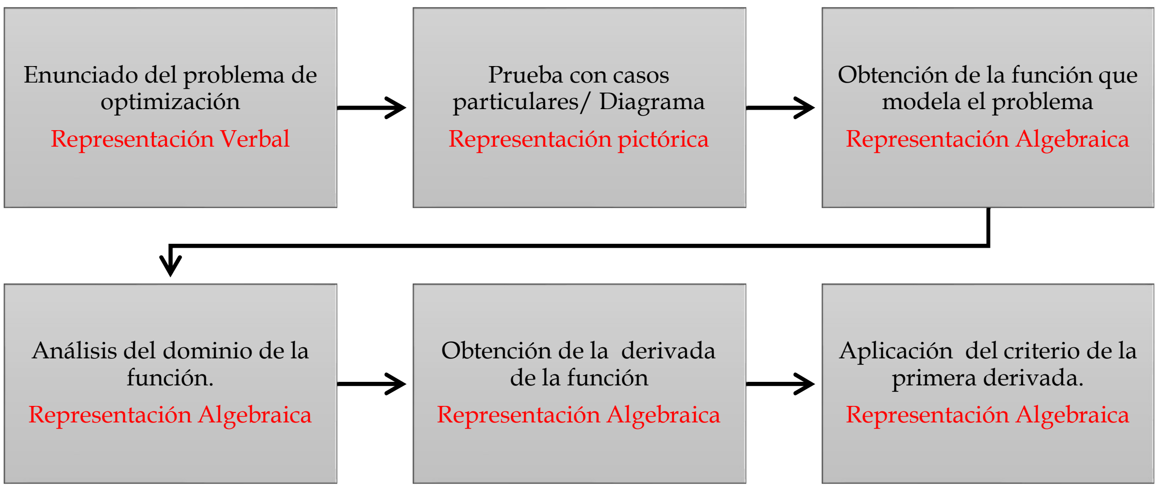
A continuación, se explicará paso a paso, una de las actividades del diseño, ya que todas las actividades involucradas tienen estructuras y propósitos similares. Cuando sea necesario, se esclarecerán particularidades de ciertas actividades. Cada actividad consta de cinco etapas. Se mostrará al lector la intencionalidad de cada etapa y su relación con el objetivo general antes planteado.

Como se vio en el apartado de “Fundamento matemático”, resolver un problema de optimización usando el Cálculo Diferencial no es tarea sencilla en el sentido de que se requieren conocimientos previos y además saber articularlos.

Haciendo un bosquejo, la solución de un problema de optimización, que maneja la bibliografía sugerida del CEM-UAA, se puede esquematizar como se muestra en la figura 13:

Figura 13

Proceso de resolución de un problema de optimización en el CEM-UAA



Un ejemplo de esto se puede ver a continuación:

Figura 14

Proceso de resolución de un problema de optimización en el libro Stewart (2012)

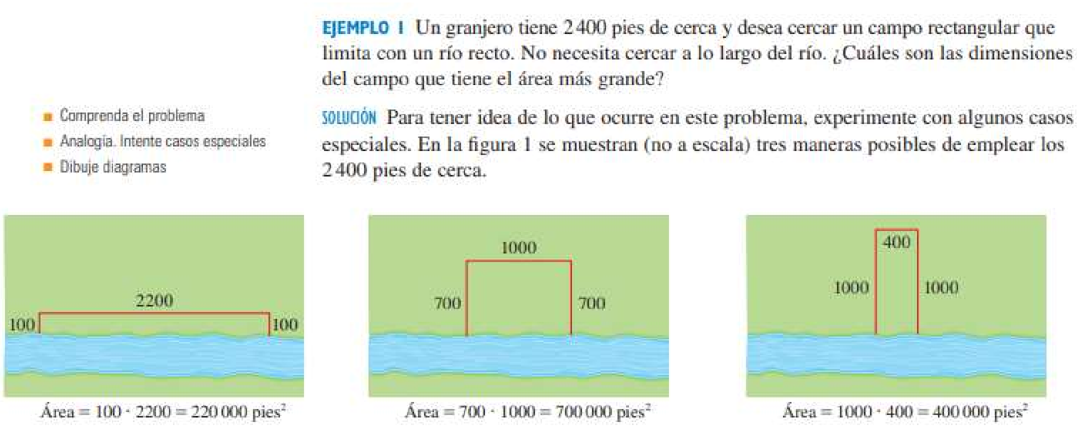


Figura 15

Proceso de resolución de un problema de optimización en el libro Stewart (2012)

Cuando intenta cercar campos poco profundos y anchos, o profundos y anchos, obtiene áreas más o menos pequeñas. Parece que existe alguna configuración intermedia que produce al área más grande.

En la figura 2 se ilustra el caso general. Desea maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y la profundidad y el ancho del campo (en pies). Enseguida exprese A en términos de x y y:

$$A = xy$$

Quiere expresar A como expresión sólo de una variable, de modo que elimina y al expresarla en términos de x. Para llevar a cabo esto, usa la información dada de que la longitud total de la cerca es 2 400 pies. Por esto.

$$2x + y = 2400$$

A partir de esta ecuación $y = 2400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1\,200$ (de lo contrario $A < 0$). De manera que la función que desea maximizar es

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, de suerte que para encontrar los números críticos resuelve la ecuación

$$2400 - 4x = 0$$

lo cual da $x = 600$. El valor máximo de A debe ocurrir en este número o en uno de los puntos extremos del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1\,200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo como $A(600) = 720\,000$.

[De modo alternativo, podría ver que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x, de modo que A siempre es cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

En estos términos, el campo rectangular debe tener 600 pies de profundidad y 1 200 pies de ancho. □

Nótese que, aunque se sugieren la representación pictórica, las representaciones verbales y algebraicas son las que prevalecen.

El diseño propuesto en este trabajo toma como base el proceso de solución anterior, pero incorpora además otros tipos de representaciones, gracias a las potencialidades que el software GeoGebra presenta.

En nuestro caso se trabajó con cinco problemas de optimización, todos con la misma estructura, incorporando las representaciones semióticas y el GeoGebra, los problemas que se estructuraron fueron:

Problema 1: Problema geométrico en donde a los estudiantes se les plantea el armado de una caja. Dadas las dimensiones de una pieza de cartón rectangular se les pide determinar el tamaño óptimo de cortes cuadrados en las esquinas de dicha pieza para que la caja albergue un volumen máximo.

Problema 2: Problema geométrico. A los estudiantes se les pide que, con 50 metros de cerca, piensen en cercar un terreno rectangular con la condición de que ese espacio delimite un área máxima. El reto está en encontrar las dimensiones óptimas de ese terreno.

Problema 3: Problema geométrico en donde se plantea a los estudiantes la cantidad de volumen que debe tener una lata de refresco. El objetivo es determinar las dimensiones físicas de la lata de tal manera que se minimice el material utilizado sin perder de vista la condición inicial del volumen.

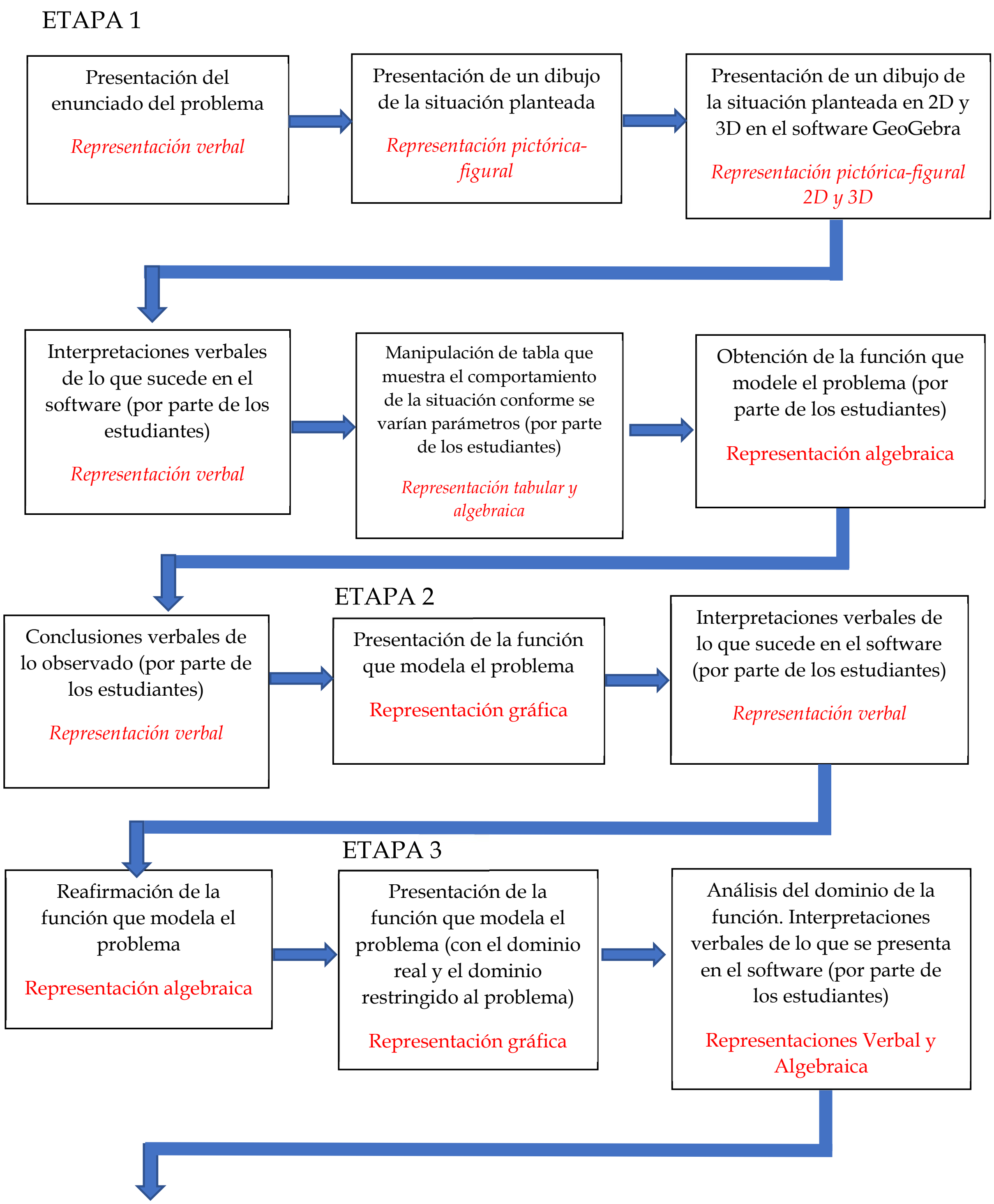
Problema 4: Problema geométrico cuyo planteamiento busca cercar un jardín rectangular considerando un mínimo de material. El problema maneja dos condiciones; primero, el jardín debe conservar un área determinada y segundo, un lado del jardín no necesita valla.

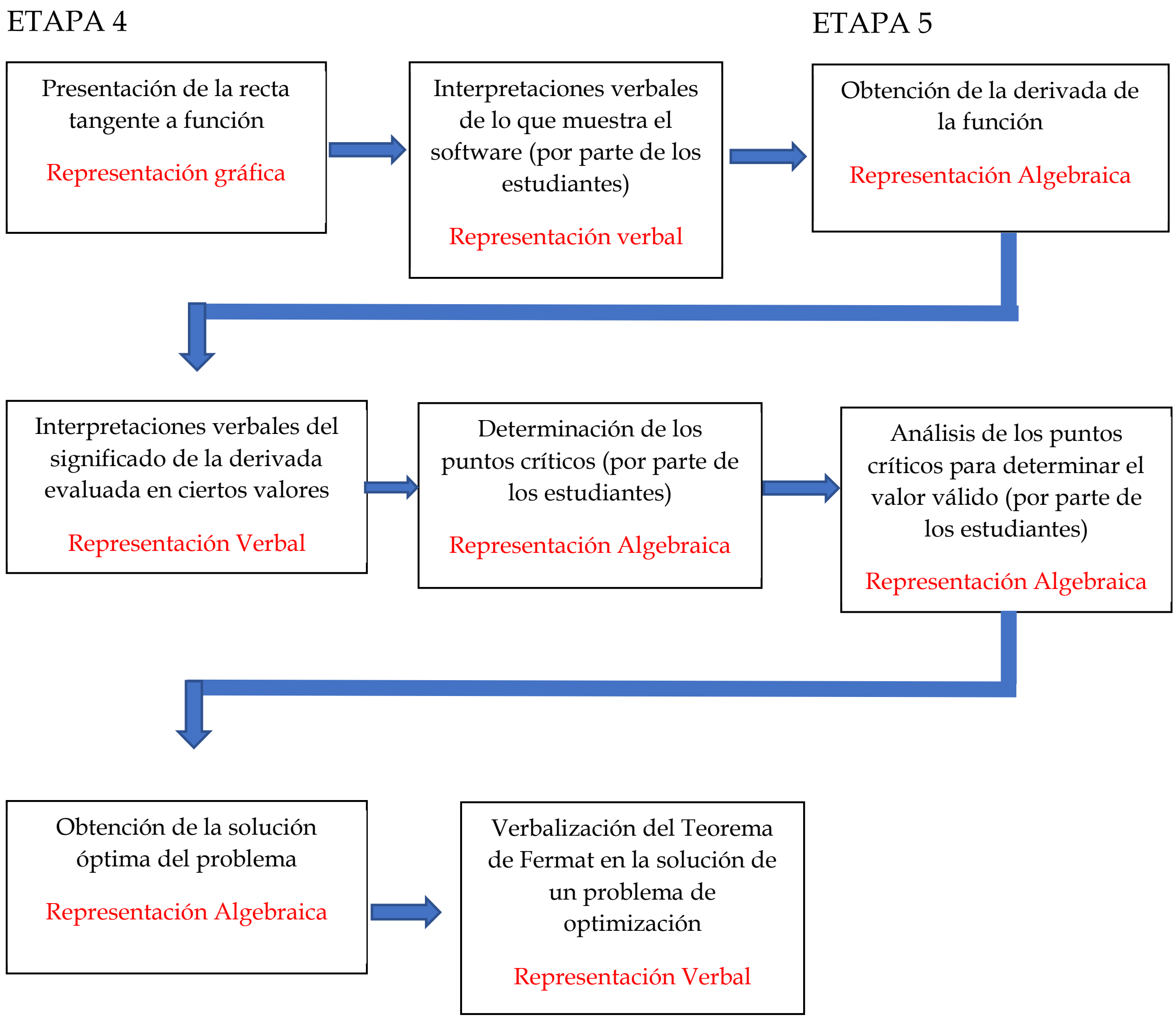
Problema 5: Problema geométrico donde se desea construir cierta cantidad de jaulas con una cantidad de malla determinada. Se desea saber las dimensiones de las jaulas, las cuales deben ser todas iguales y albergar un área máxima.

Una de las principales motivaciones para la elaboración del diseño a continuación expuesto es que tanto profesores como estudiantes tengan otro enfoque para trabajar el tema. El objetivo de este diseño es que el estudiante interactúe, desde el inicio, con distintas representaciones, promoviendo procesos de conversión entre ellas y así llegar a una aprehensión de los conceptos involucrados, encontrándole significado a todo aquello que se utiliza en el proceso de buscar máximos y mínimos a través de la resolución de problemas de optimización. Para el logro de nuestros objetivos tomamos como base el esquema presente en la figura 16:

Figura 16

Proceso de resolución de un problema de optimización propuesto en este trabajo





Antes de empezar con la descripción de las actividades es necesario señalar las distintas representaciones que se manejarán en el diseño. En la siguiente tabla se realiza una descripción de cada una de ellas:

Tabla 1

Descripción de las representaciones utilizadas en la secuencia didáctica

REPRESENTACIÓN	ABREVIATURA	DESCRIPCIÓN
Verbal	RV	Es el enunciado del problema y todas aquellas interpretaciones que el estudiante hace sobre lo que observa en el software GeoGebra.

Pictórica	RP	Llamamos así a todos aquellos dibujos que se encuentran seguidos del enunciado de cada problema, así como las figuras 2D y 3D que aparecen en GeoGebra. Es aquella representación que acerca al estudiante o que le permite situar el problema en la "realidad". Aparecen en la Vista gráfica 1 y en la vista 3D de GeoGebra y es con la que más contacto tienen los estudiantes pues los deslizadores actúan directamente sobre ellas.
Gráfica	RG	Son todas aquellas gráficas, estrictamente, que se manejan en los problemas. Entiéndase a la gráfica de una función f como el conjunto de pares formados por los valores de la variable y sus imágenes correspondientes $(x, f(x))$. Aparecen en la vista grafica 2 de GeoGebra para cada problema.
Tabular	RT	Son los espacios tabulares que se manejan en cada problema, estrictamente, una tabla es una representación de datos que expresan la relación existente entre dos o más magnitudes. El estudiante tiene la tarea de llenarlas con base en lo que observa en las RP y RG.
Algebraica	RA	Denominamos así a todo aquella notación y proceso que involucre símbolos y operaciones matemáticas.

A continuación, se presenta la estructura e intencionalidad de cada una de las etapas de las actividades 1 y 3, "Volumen máximo de una caja" y "Área superficial mínima de una lata" respectivamente, pues, como ya se mencionó anteriormente, las demás actividades tienen una estructura similar. Cuando es necesario, se aclaran las particularidades de ciertas etapas en ciertas actividades.

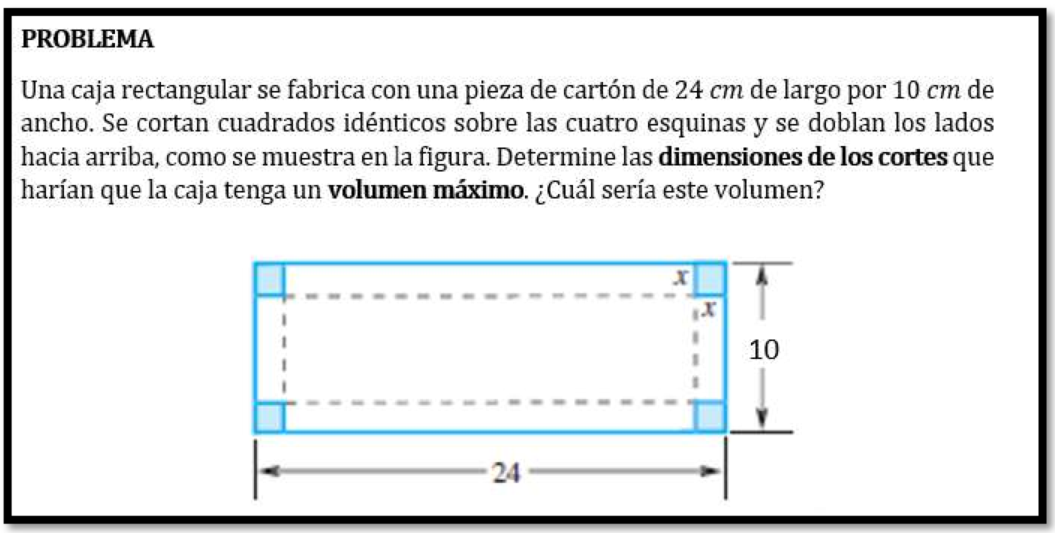
Cada etapa de cada actividad tiene la intención de promover el uso de Representaciones Semióticas, así como promover ciertas conversiones entre representaciones con el fin último de que en los estudiantes se presente una aprehensión de los conceptos involucrados en la resolución de problemas de optimización, por lo que, para cada etapa se señalarán las preguntas que buscan mostrar que en el estudiante se promovió alguna conversión entre representaciones y las preguntas que sirven de apoyo para este fin.

Las conversiones realizadas por los estudiantes se reflejarán en las respuestas que arrojen, para lo cual se han diseñado una serie de indicadores que nos mostraran cómo están pensando. Dichos indicadores serán el medio de contraste de las respuestas reales de los estudiantes y se analizarán más adelante.

Las actividades comienzan con el enunciado del problema de optimización. Con el enunciado se trabaja la ***Representación Verbal (RV)*** del problema; además el enunciado viene acompañado de su ***Representación Pictórica (RP)***.

Figura 17

Enunciado del Problema Actividad 1


PROBLEMA

Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 cm de largo por 10 cm de ancho. Se cortan cuadrados idénticos sobre las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura. Determine las **dimensiones de los cortes** que harían que la caja tenga un **volumen máximo**. ¿Cuál sería este volumen?

En la bibliografía sugerida, en ocasiones, esta es la única imagen que se presenta a los estudiantes y sin embargo se les pide que se "imaginen" lo que sucede, por ejemplo, cuando cambia el tamaño del corte o del radio, etc. Para un estudiante hábil, esto puede ser tarea sencilla, pero para la mayoría de los estudiantes, su imaginación espacial suele estar en vías de desarrollo y les cuesta trabajo recrear en su mente la situación. Este es la principal motivación por la que se planea la Etapa 1 de las actividades.

ETAPA I

Representaciones Semióticas que se involucran: $\boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RP}, \boldsymbol{RT}, \boldsymbol{RA}$

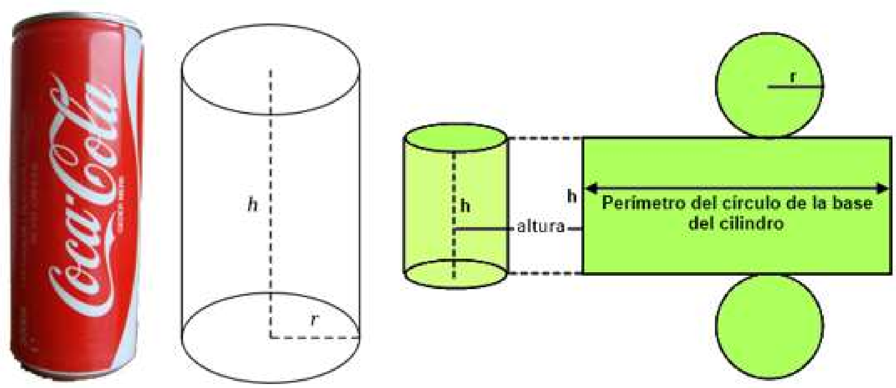
Objetivo: promover las conversiones $(\boldsymbol{RP} \rightarrow \boldsymbol{RV})$; $(\boldsymbol{RP}, \boldsymbol{RT} \rightarrow \boldsymbol{RA})$

Figura 18

Enunciado del Problema Actividad 3

PROBLEMA

Una lata polaca de Coca-Cola debe contener 355 ml de líquido. Hallar las dimensiones que **minimizan** la cantidad de aluminio empleada en su construcción. Una lata polaca es de grosor uniforme.



Uno de los propósitos de la Etapa 1 es que los estudiantes comprendan el enunciado; comprendan qué es lo que se está preguntando ya que de tener esto claro, los estudiantes podrán proceder a tratar de resolverlo. Es por ello que el enunciado del problema (***RV***) va acompañado de un dibujo de la situación (***RP***) y, por si fuera poco, en GeoGebra se puede observar de nuevo el dibujo, pero ahora con deslizadores que le permitirán al estudiante animar dicha representación y darse cuenta de lo que se pide resuelva.

En esta etapa se invita al estudiante a inicializar la aplicación de GeoGebra específica de cada problema (para la actividad 1, Caja.ggb; para la actividad 3, Lata.ggb), así como a explorarla y manipularla. En seguida se le proporcionan instrucciones de que mueva el deslizador que aparece en pantalla y observe lo que sucede. Con esta acción se busca que el estudiante trabaje con la ***RP*** del problema mediante las vistas gráficas 1 y 3D; se busca que el estudiante experimente por sí mismo los cambios que sufriría en la vida real el objeto con el que se está trabajando y observe dichos cambios, no solo se los "imagine". En esta etapa se busca promover la conversión entre la representación pictórica y la representación verbal ($\boldsymbol{RP} \rightarrow \boldsymbol{RV}$), lo cual se logará mostrar con el tipo de respuestas que brinden los estudiantes a la pregunta 1 de la etapa 1 (los indicadores se presentan un poco más adelante).

Figura 19

Representación Pictórica del Problema en GeoGebra, Actividad 1

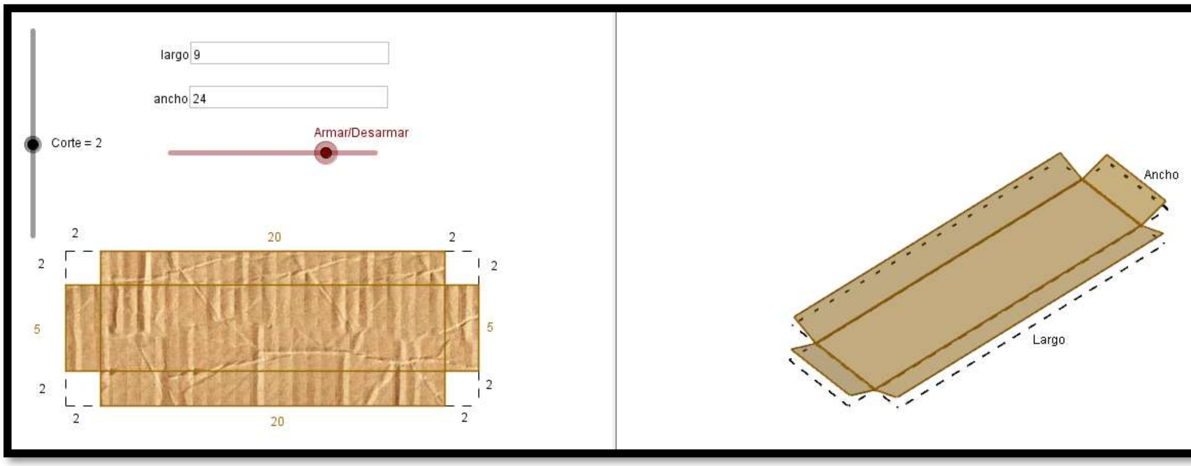
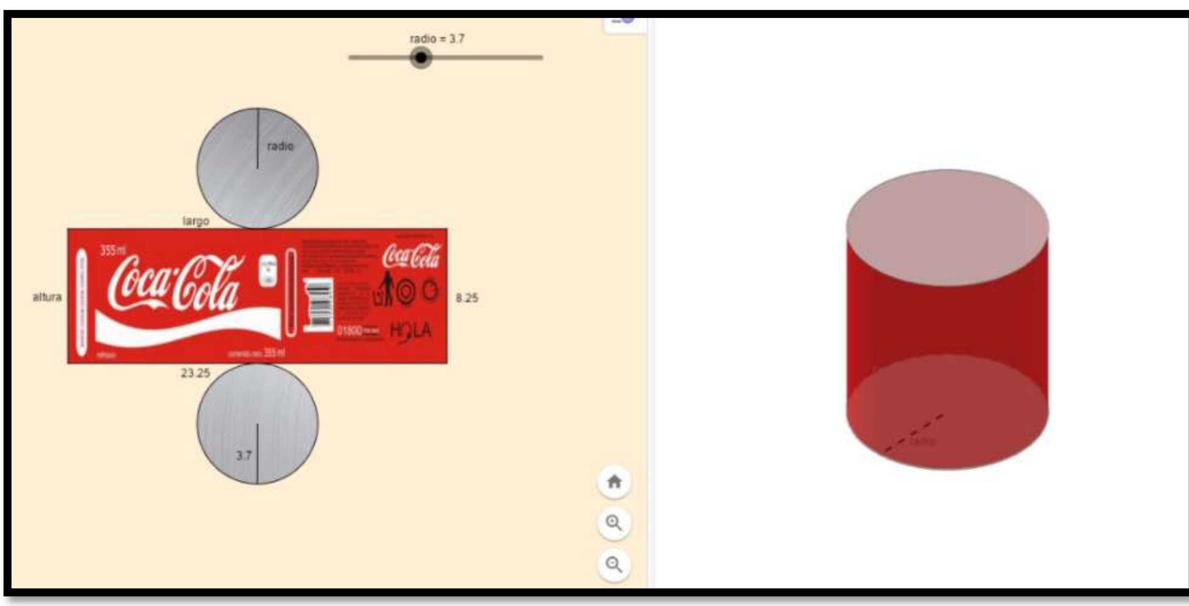


Figura 20

Representación Pictórica del Problema en GeoGebra, Actividad 3



En esta misma etapa, se pide al estudiante completar una tabla con los valores que se observan en pantalla (valores que dependen de la manera en cómo el estudiante decida mover el deslizador) y obtenga, por ejemplo, para la actividad 1, un volumen; para la actividad 3, un área superficial (esto cambia dependiendo del problema, en la actividad 2 se pide encontrar el área de un jardín; en la actividad 4, un perímetro y en la actividad 5, el área de unas jaulas). De esta manera se trabaja con la ***Representación Tabular (RT)*** del problema, existiendo un vínculo entre lo que observa y lo anotado en la tabla, buscando promover la conversión entre lo pictórico y lo tabular (***RP → RT).***

Figura 21

Representación Tabular del Problema, Actividad 1

Corte (cm)	Dimensiones de la caja			Volumen (cm^3)
	Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)	
0.4	9.2	23.2	0.4	85.376
2				
4.4				
x		$24-2x$		

Figura 22

Representación Tabular del Problema, Actividad 3

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5					
5					
9.2					
r	h				

Se pide al estudiante que analice el comportamiento de la tabla para que deduzca el modelo de las dimensiones que maneja el problema, para el caso de la actividad 1, las dimensiones de la caja y el volumen en términos del corte x; para la actividad 3, las dimensiones de la lata y el área superficial. Con ello se promueve el trabajo con la ***Representación Algebraica (RA)*** y la conversión entre la representación tabular y la algebraica del problema pues se obtiene la función a optimizar que es la materia prima para resolver el problema (**$RT \rightarrow RA$**).

A continuación, se presentan los indicadores de la etapa 1 para las actividades 1 y 3. La tabla completa de indicadores se puede encontrar en los anexos "Indicadores":

Tabla 2

Indicadores por pregunta de la etapa 1 para las actividades 1 y 3

Etapa 1 Actividad 1		
Pregunta	**Representaciones con las que interactúa**	**Indicadores de promoción o no de la conversión entre representaciones señalada ¿Qué se espera?**
1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones de la caja, largo, ancho y alto con el movimiento del deslizador

mueves el deslizador llamado "Corte"?		y/o relaciona otras magnitudes como: área, profundidad, volumen, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene todas las expresiones de ancho, alto y volumen en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **1:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de ancho, alto y volumen en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
Etapa 1 Actividad 3		
1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "radio"?	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones de la lata, largo, alto, y radio con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como: área, volumen, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**3:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **2:** El estudiante no llena la tabla por completo de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, si logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de

		sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. **1:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D

ETAPA II

Representaciones Semióticas que participan: $\boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RG}, \boldsymbol{RT}, \boldsymbol{RA}$

Objetivo: promover las conversiones $(\boldsymbol{RG} \rightarrow \boldsymbol{RV}); (\boldsymbol{RG}, \boldsymbol{RT} \rightarrow \boldsymbol{RV}); (\boldsymbol{RV} \rightarrow \boldsymbol{RA})$

En esta etapa se pide al estudiante abrir la vista gráfica 2 en GeoGebra en la que se muestra la gráfica de la función que modela el problema. En este apartado se trabaja con una ***Representación Gráfica (RG)*** del problema pues el estudiante analiza la gráfica que modela el problema, su forma, si crece o decrece y dónde queda su punto más alto (o más bajo) $(\boldsymbol{RG} \rightarrow \boldsymbol{RV})$; se le pide que haga interpretaciones acerca de lo que representa cada una de las variables involucradas $(\boldsymbol{RG}, \boldsymbol{RT} \rightarrow \boldsymbol{RV})$. También se introduce al estudiante a la formalización matemática del problema, pues se le pide que proporcione las expresiones o fórmulas de las dimensiones correspondientes, trabajando así con la $\boldsymbol{RA}$ del problema. Una de las características de las actividades es que algunas de las etapas están relacionadas de una u otra manera, por ejemplo, en esta actividad se le pide al estudiante que como parte de sus reflexiones regrese a analizar lo ocurrido en la Tabla de la etapa 1.

Una cosa que hay que hacer notar es que en la actividad 1, cuando el estudiante da la expresión que determina la función a optimizar, ésta queda en términos de una variable "x". En el resto de las actividades, dicha función queda en términos de dos variables y el estudiante es guiado para que realice el álgebra correspondiente y la lleve a una expresión de una variable. Con ello se busca promover la representación algebraica ($\boldsymbol{RA}$) del problema y sus conceptos involucrados.

Figura 23

Gráfica de la función volumen. Actividad 1

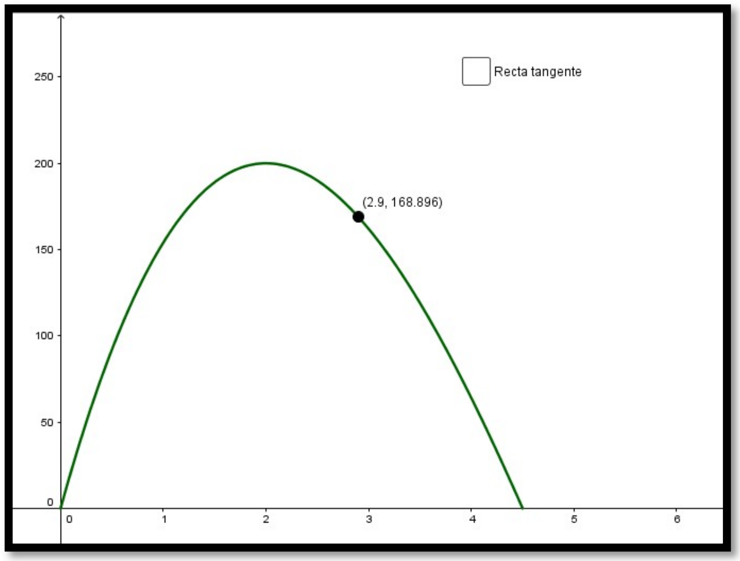
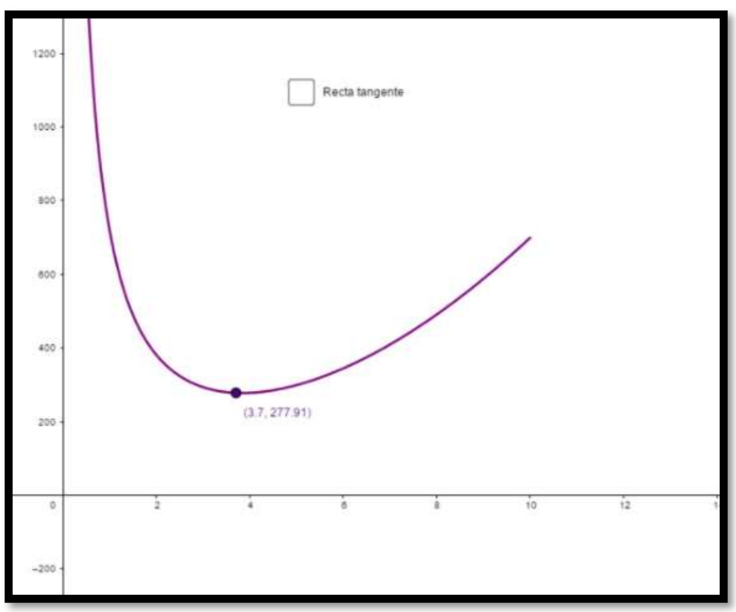


Figura 24

Gráfica de la función área superficial. Actividad 3



A continuación, se presentan los indicadores de la etapa 2 para las actividades 1 y 3. La tabla completa de indicadores se puede encontrar en los anexos "Indicadores":

Tabla 3

Indicadores por pregunta de la etapa 2 para las actividades 1 y 3

Etapa 2 Actividad 1		
Pregunta	**Representaciones con las que interactúa**	**Indicadores de promoción o no de la conversión entre representaciones señalada ¿Qué se espera?**
1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del corte y el volumen de la caja. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: “el volumen” o “el corte”. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del corte de la caja; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del corte de la caja, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el volumen de la caja y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el volumen de la caja sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
6.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MAYOR** volumen que		**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el volumen de la caja. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.

puede tener la caja?	$RG \rightarrow RV$	
7.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más alto de la gráfica con el volumen máximo. **0:** El estudiante no relaciona el punto más alto de la gráfica con el volumen máximo y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.
8.- ¿Cuál es el valor del corte del **MAYOR** volumen?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el corte y que influye en el volumen de la caja. **0:** El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
10.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del corte correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más alto. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el máximo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el corte correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.
Etapa 2 Actividad 3		
1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del radio de la lata y el área total (superficial) de la lata. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: "el radio" o "el área". **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del radio de la tapa de la lata; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1.

	$RG, RT \to RV$	**1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del radio de la tapa de la lata, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área total (superficial) de la lata y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área total (superficial) de la lata sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
6.- Si el problema menciona que la lata debe contener 355ml de líquido ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?	$RV \to RA$	**1:** El estudiante relaciona lo expresado en el enunciado del problema (contener 355ml de líquido), con el volumen de la lata. **0:** El estudiante no relaciona lo expresado en el enunciado del problema (contener 355ml de líquido), con el volumen de la lata.
7.- ¿Cómo podría expresarse algebraicamente?		**1:** El estudiante relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (contener 355ml de líquido) con la fórmula del volumen de la lata que dedujo en preguntas anteriores. **0:** El estudiante no relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (contener 355ml de líquido) con la fórmula del volumen de la lata que dedujo en preguntas anteriores.
9.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MENOR** área que puede tener la lata?	$RG \to RV$	**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el área total (superficial) que puede tener la lata. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
10.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más bajo de la gráfica con el área mínima. **0:** El estudiante no relaciona el punto más bajo de la gráfica con el área mínima y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.

11.- ¿Cuál es el valor del radio para la **MENOR** área?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el radio y que influye en el área total (superficial) de la lata. **0:** El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
13.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del radio correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más bajo. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el mínimo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el radio correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.

ETAPA III

Representaciones Semióticas que participan: $\boldsymbol{RP}, \boldsymbol{RG}, \boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RA}$

Objetivo: promover de las conversiones $(\boldsymbol{RP}, \boldsymbol{RG} \rightarrow \boldsymbol{RV}); (\boldsymbol{RG} \rightarrow \boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RA})$

En esta etapa se pide al estudiante que en la vista de cálculo simbólico (CAS) active la función a optimizar que obtuvo antes (Etapa II) y que posteriormente se vaya a observar la gráfica de la función en la otra vista. Con esto se busca promover la conversión entre la representación algebraica (**$\boldsymbol{RA}$**) y la representación gráfica (**$\boldsymbol{RG}$**) del problema. En esta etapa el estudiante compara dos gráficas "iguales" cuya diferencia radica en su dominio, el cual está determinado por el contexto del problema. Así pues, el objetivo de esta etapa es que el estudiante determine el dominio de la función de acuerdo al contexto del problema, esto porque según lo reportado en Moreno y Cuevas (2004), los estudiantes llegan a soluciones inverosímiles debido que no se detiene a analizar el dominio de la función.

Figura 25

Gráfica de la función volumen, en todo su dominio y con dominio restringido. Actividad 1

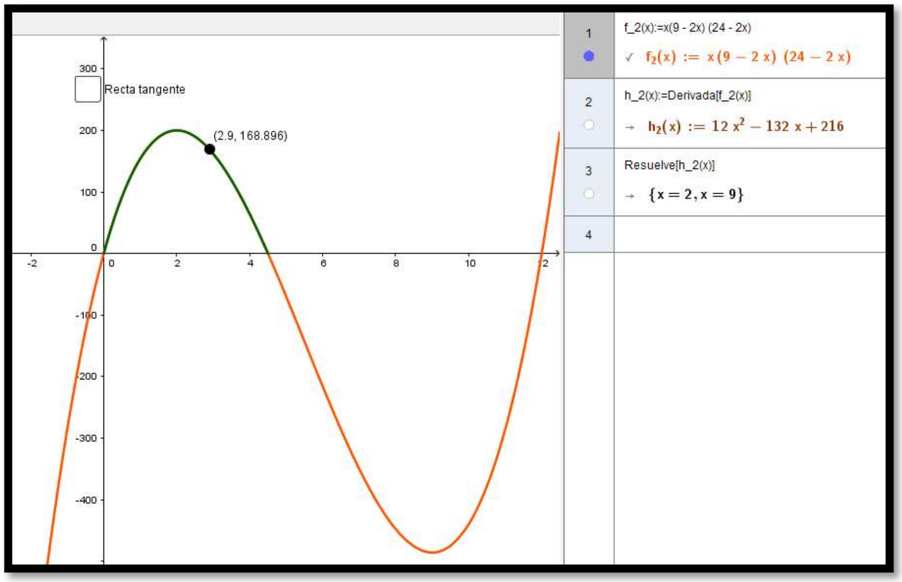
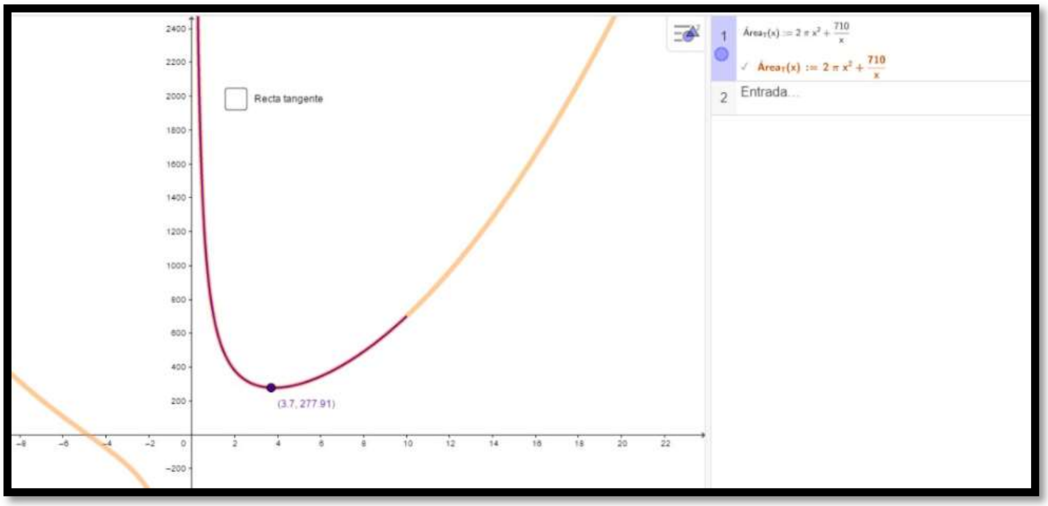


Figura 26

Gráfica de la función área superficial, en todo su dominio y con dominio restringido. Actividad 3



A continuación, se presentan los indicadores de la etapa 3 para las actividades 1 y 3. La tabla completa de indicadores se puede encontrar en los anexos "Indicadores":

Tabla 4

Indicadores por pregunta de la etapa 3 para las actividades 1 y 3

Etapa 3 Actividad 1		
Pregunta	**Representaciones con las que interactúa**	**Indicadores de promoción o no de la conversión entre representaciones señalada ¿Qué se espera?**
4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica verde es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica verde se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el corte x? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin notación de

		intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
Etapa 3 Actividad 3		
4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica púrpura es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica púrpura se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el radio r de la lata? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

ETAPA IV

Representaciones Semióticas que participan: RG, RV, RA

Objetivo: promover de las conversiones $(RG \rightarrow RV, RA)$

En esta etapa al estudiante se le muestra la recta tangente a la curva de la función a optimizar y se le pide que la manipule con ayuda de un deslizador. Uno de los objetivos es que el estudiante analice la inclinación de dicha recta y el signo de su pendiente conforme cierta variable va cambiando; que pueda concluir cómo es la recta y el signo de su pendiente justo antes y después de un supuesto punto máximo o mínimo, así como justo en el punto de interés. Ha de mencionarse que, en todos los ejercicios, la pendiente de la recta tangente a la curva nunca da cero, siempre se aproxima a cero, debido a que un "impedimento" de la representación gráfica puede ser la inexactitud. Los parámetros del programa en cierto momento se pudiesen modificar para que se pudieran observar valores más precisos, pero no se quiso hacer de esa manera ya que se pretendía que la búsqueda del x exacto (el valor x que optimizaría el problema) continuara en la actividad 5.

Pretendemos que en esta etapa el estudiante reconozca la relación existente entre el punto tangencial a la curva donde la pendiente de la recta tangente se hace cero y la solución, x, a los problemas de optimización.

Al ponerlo a analizar la gráfica y después a expresar lo que alcanza a percibir de manera escrita, buscamos promover la conversión entre la representación gráfica y la verbal.

Figura 27

Recta tangente sobre la función volumen. Actividad 1

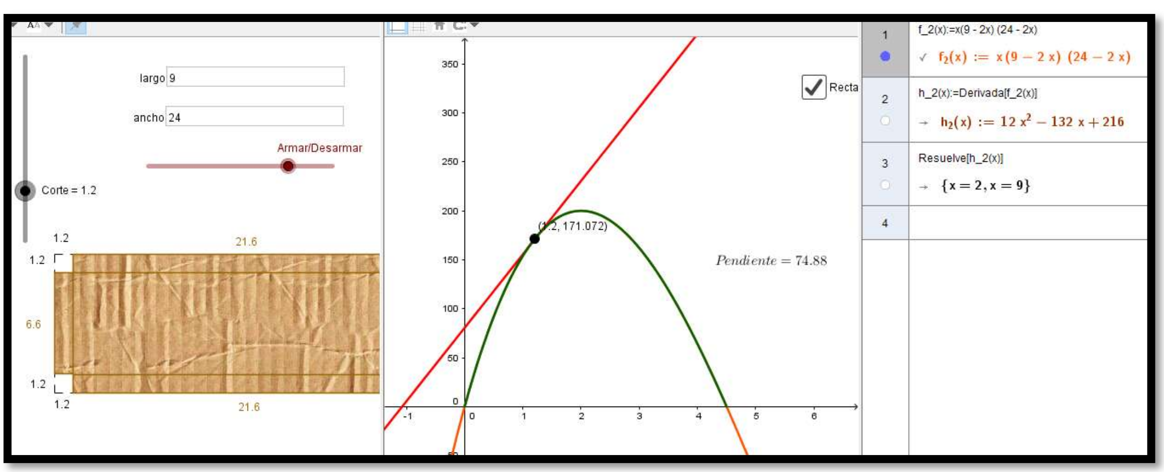
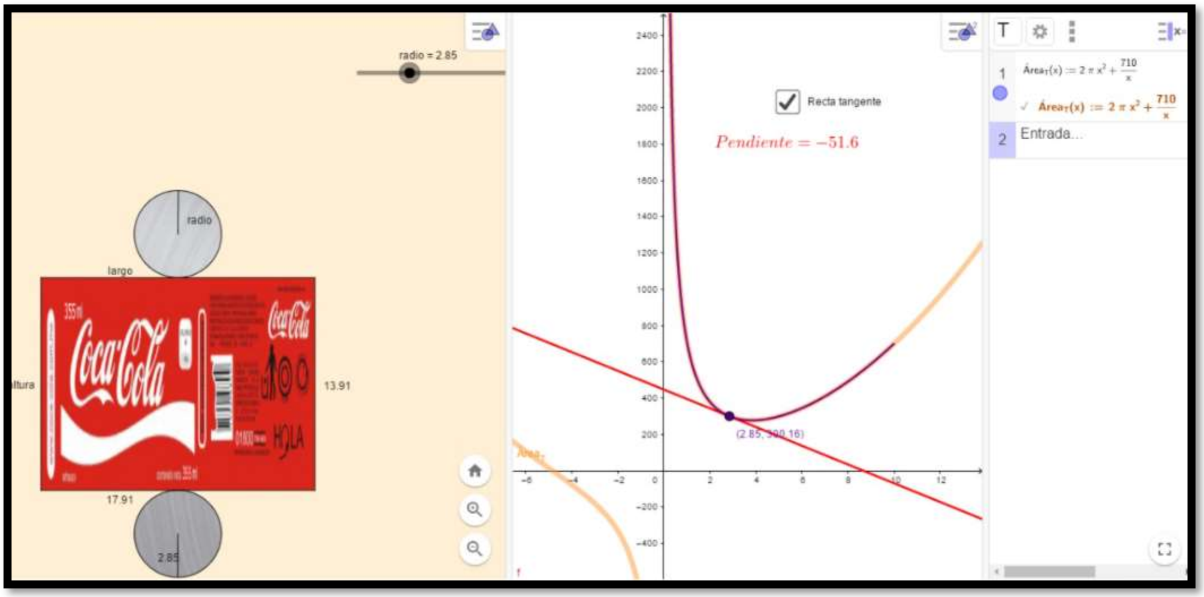


Figura 28

Recta tangente sobre la función área superficial. Actividad 3



A continuación, se presentan los indicadores de la etapa 4 para las actividades 1 y 3. La tabla completa de indicadores se puede encontrar en los anexos "Indicadores":

Tabla 5

Indicadores por pregunta de la etapa 4 para las actividades 1 y 3

Etapa 4 Actividad 1		
Pregunta	**Representaciones con las que interactúa**	**Indicadores de promoción o no de la conversión entre representaciones señalada ¿Qué se espera?**
1.- Moviendo el deslizador "Corte" de menor a mayor (de abajo hacia arriba), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
Etapa 4 Actividad 3		

1.- Moviendo el deslizador “radio” de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

ETAPA V

Representaciones Semióticas que participan: $\boldsymbol{RT}, \boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RA}$

Objetivo: promover de las conversiones $(\boldsymbol{RA} \rightarrow \boldsymbol{RV}, \boldsymbol{RT})$; $(\boldsymbol{RA} \rightarrow \boldsymbol{RT})$

En esta etapa se pide al estudiante que derive la función a optimizar, obtenida en la etapa II. Mediante esta instrucción se busca seguir promoviendo la representación algebraica ($\boldsymbol{RA}$). Una vez realizado lo anterior, al estudiante se le cuestionará con la finalidad de que verbalice el significado de la derivada y de su evaluación en puntos determinados; por ejemplo, se le presenta:

$$f'(0.4) = 12(0.4)^2 - 136(0.4) + 240 = 187.52$$

Se le pide reportar cuál es el valor de la pendiente en $x = 0.4$ y así para otros valores. Luego se le presenta, por ejemplo:

$$f'(1.3) = 83.48$$

Y se le pide su significado; se espera que el estudiante reflexiones y explique que “83.48 es el valor de la PENDIENTE de la recta tangente que pasa por el punto $(1.3, f(1.3))$”. Se pueden presentar respuestas como que: “83.48 es la derivada evaluada en el punto $x = 0.4$”.

Una vez que se pregunta por casos particulares, se le cuestionará sobre el significado de $f'(x) = 0$, en específico se pregunta ¿qué se quiere encontrar cuando se resuelve esa igualdad?

Para nosotros es una de las preguntas más relevantes ya que el hecho de dar una respuesta conforme a los indicadores nos mostraría que en el estudiante se ha promovido la conversión de la representación algebraica a la verbal y gráfica y con ello ha comprendido que el valor de x que genera un máximo o un mínimo, y por ende resuelve un problema de optimización, cumple con la característica de que evaluado en la función derivada, da cero, es decir, que la pendiente de la recta tangente a la curva siempre es cero en los valores de x que producen máximos y mínimos.

Más adelante en esta misma etapa, se pide calcular los puntos críticos, es decir, se pide resolver la ecuación $f'(x) = 0$; esta acción pretende seguir promoviendo en todo momento la representación algebraica ($\boldsymbol{RA}$).

Una vez que encuentre dichos valores, se solicita al alumno verifique si son valores válidos, es decir, valores presentes en el dominio de la función, físicamente hablando. Para ello, los estudiantes se auxiliarán del análisis del dominio realizado en la etapa 3.

Una vez que identifican el valor crítico válido, se les pide evaluarlo en la función a optimizar y se analizará si se ha encontrado el mínimo o máximo de la función. Se espera que esto lo realicen comparando el valor resultante con los resultados de la tabla de la etapa 1 y las respuestas de la etapa 2.

Se espera que el estudiante brinde el valor correcto de x, junto con las demás dimensiones del problema; que proporcionan el máximo o el mínimo solicitado, lo cual arrojaría indicios de que reconoce que el valor que produce el máximo es la solución de la derivada de la función igualada a cero.

Figura 29

Tabla resumen. Actividad 1

12. Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MAXIMIZA** el volumen de la caja así como sus dimensiones y el volumen **MÁXIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.

Corte (cm)	Volumen de la caja (cm^3)	Dimensiones de la caja		
		Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)

Figura 30

Tabla resumen. Actividad 3

12.Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que **MINIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)

Al término de la etapa 5, y en cada actividad, se realizará un par de preguntas reflexivas con las que se pretende mostrar que en el estudiante se promovieron conversiones entre la representación algebraica y la representación verbal.

En una de dichas preguntas se le pide que reflexione sobre la relación que encuentra entre la materia de Cálculo Diferencial y la resolución de problemas de optimización. Aquí pretendemos promover en el estudiante una utilidad del cálculo, que de cierta manera lo valore.

Se solicita que describa los pasos que seguiría al resolver un problema de optimización. Para nosotros, esta también es una pregunta relevante ya que pretendemos que nos muestre de qué manera el estudiante se formó un criterio de solución de dichos problemas; si identifica como importante lo que nosotros quisiéramos que identificara de esta manera o si la solución de estos problemas le sigue resultando complicada, desorganizada y con ello demuestre una carencia de sentido de estudiar Cálculo Diferencial.

A continuación, se presentan los indicadores de la etapa 5 para las actividades 1 y 3. La tabla completa de indicadores se puede encontrar en los anexos "Indicadores":

Tabla 6

Indicadores por pregunta de la etapa 5 para las actividades 1 y 3

Etapa 5 Actividad 1		
Pregunta	**Representaciones con las que interactúa**	**Indicadores de promoción o no de la conversión entre representaciones señalada ¿Qué se espera?**

4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(1.3) = 83.48$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** 83.48 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=1.3 **0:** Otra respuesta.
5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no). **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
12.- Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MAXIMIZA** el volumen de la caja, así como sus dimensiones y el volumen **MÁXIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto del corte y las dimensiones de la caja que proporcionan el máximo volumen, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el máximo volumen es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos mostrando indicios de que no reconoce que el valor que produce el máximo volumen es la solución de la derivada de la función igualada a cero.
1.A ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?	$RA \rightarrow RV$	**1:** El estudiante relaciona las derivadas de las funciones como una manera de resolver los problemas de optimización. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.
1.B Sin GeoGebra, ¿cómo crees que se resolvería este problema de optimización?	$RA \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero. **1:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.
Etapa 5 Actividad 3		
4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(4.8) = 29.5$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** 29.5 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=4.8 **0:** Otra respuesta.

<table>
<tr><td>5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?</td><td></td><td>1: El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no).

0: El estudiante brinda alguna otra respuesta.</td></tr>
<tr><td>12.- Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que MINIMIZAN su área) Auxíliate de la Tabla 1.</td><td>$RA \rightarrow RT$</td><td>1: El estudiante brinda el valor correcto de las dimensiones de la lata que proporcionan el área mínima, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el área mínima es la solución de la derivada de la función igualada a cero.

0: El estudiante brinda valores incorrectos mostrando indicios de que no reconoce que el valor que produce el área mínima es la solución de la derivada de la función igualada a cero.</td></tr>
<tr><td>1.A ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?</td><td rowspan="2">$RA \rightarrow RV$</td><td>1: El estudiante relaciona las derivadas de las funciones como una manera de resolver los problemas de optimización.

0: El estudiante brinda cualquier otra respuesta.</td></tr>
<tr><td>1.B Recapitulando lo trabajado en la actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.</td><td>2: El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero.

1: El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas.

0: El estudiante brinda cualquier otra respuesta.</td></tr>
</table>

6. Aplicación de la secuencia didáctica y Análisis Cualitativo de Resultados

6.1. Aplicación de la secuencia didáctica

Una vez diseñada la secuencia de actividades, se procedió a realizar un pilotaje con la finalidad de detectar posibles errores en las preguntas planteadas; para observar si todo lo que se preguntaba era claro y para medir los tiempos de aplicación.

La secuencia didáctica ya piloteada se aplicó a 20 estudiantes del CEM de la UAA que cursaban el cuarto semestre de bachillerato. La secuencia se aplicó en los tiempos reales de clase, es decir, a su respectiva hora de clase de cálculo y los días que el cronograma del docente-investigador marcaban para introducir el tema de optimización.

Para la aplicación de la secuencia se tuvo que hacer uso de un laboratorio de cómputo en donde se contó con una computadora para cada estudiante. Cabe señalar que durante la aplicación de la propuesta el docente-investigador estuvo en todo momento guiando las actividades y auxiliando a los estudiantes en que lo requerían.

Cada actividad se realizó en un tiempo aproximado de 60 min y en los anexos "Codificación" se pueden encontrar las respectivas codificaciones que se hicieron a las respuestas de los estudiantes con base en los respectivos indicadores planteados.

A continuación, se presenta un análisis cualitativo de las respuestas de las estudiantes y se forman conclusiones acerca de si los objetivos planteados se cumplieron y en qué medida.

6.2 Análisis Cualitativo de Resultados

A continuación, presentaremos un Análisis Cualitativo de las respuestas arrojadas por los estudiantes; para ello nos apoyaremos de la estadística descriptiva, como medio para organizar y presentar la información de una manera inmediata y entendible para el lector; no obstante, en la sección de anexos "Codificación" se presenta la codificación completa de cada una de las actividades. También aquí se muestran con imágenes, algunos ejemplos de las respuestas que los estudiantes proporcionaron. El total de las respuestas se encuentran escaneadas y almacenadas para su posible consulta.

Se analizará de qué manera los estudiantes cumplieron con los objetivos planteados para determinar si se promovieron las conversiones deseadas o no.

Análisis de la Etapa 1

Etapa 1, Pregunta 1

Esta etapa 1 tuvo dos objetivos primordiales; el primero fue que los estudiantes comprendieran el enunciado del problema. Esto englobó una serie de cuestiones que fueron desde que el estudiante leyera bien el problema hasta que, con ayuda de la representación pictórica (***RP***) y su animación, observara (y no solo imaginara), cuáles eran los posibles cambios físicos que se llevarían a cabo dependiendo de la modificación de cierto parámetro; además, se buscó que dichos cambios los pudiera expresar.

La Pregunta 1 de la Etapa 1 se codificó y analizó en cada una de las cinco actividades. Se contó con tres indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

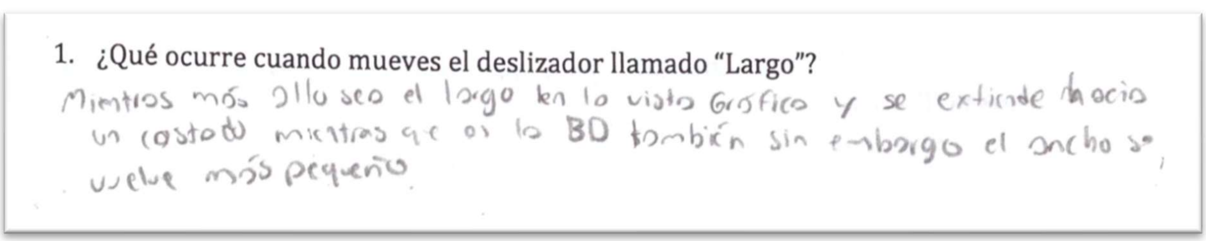
- Se asigna un "cero" cuando el estudiante realizó una descripción poco clara o sin relación aparente de lo que se observaba.
- Se asigna un "uno" cuando el estudiante mencionó que al mover el respectivo deslizador se realizaba un "cambio" en la figura y decía cuál.
- Se asigna un "dos" cuando el estudiante describió la relación de las dimensiones del problema con el movimiento del deslizador.

Para recordar los indicadores, diríjase al anexo "Indicadores":

Ejemplo de estos tres tipos de respuestas se muestran en la ***Figura 31, Figura 32*** y ***Figura 33***:

Figura 31

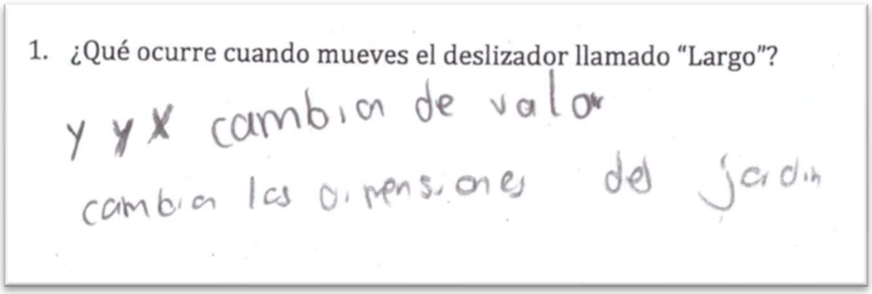
Estudiante 2, Etapa 1-Pregunta 1, Actividad 2, respuesta codificada con "cero"


1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado "Largo"?

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Mientras más alto sea el largo en la vista gráfica y se extiende hacia un costado mientras que en a BD también sin embargo el ancho se vuelve más pequeño".

Figura 32

Estudiante 17, Etapa 1-Pregunta 1, Actividad 2, respuesta codificada con "uno"

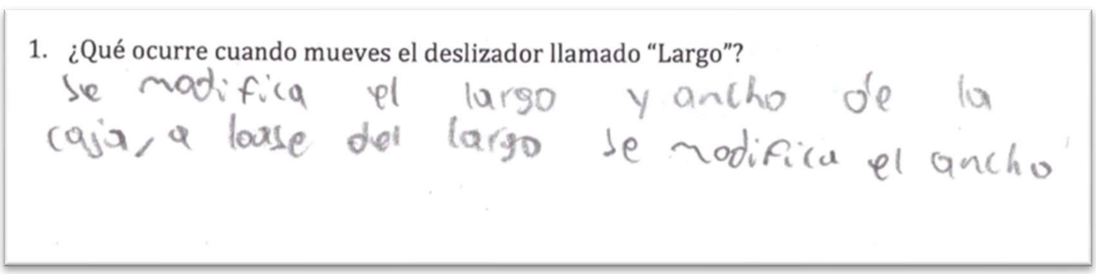

1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado "Largo"?

y y x cambia de valor
cambia las dimensiones del jardin

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "y y x cambian de valor cambian las dimensiones del jardín.

Figura 33

Estudiante 12, Etapa 1-Pregunta 1, Actividad 2, respuesta codificada con "dos"


1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado "Largo"?

Se modifica el largo y ancho de la
caja, a base del largo se modifica el ancho

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Se modifica el largo y ancho de la caja, a base del largo se modifica el ancho".

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "dos", se asignó un nivel "Alto" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación verbal.

Si el estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "cero", se asignó un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación verbal.

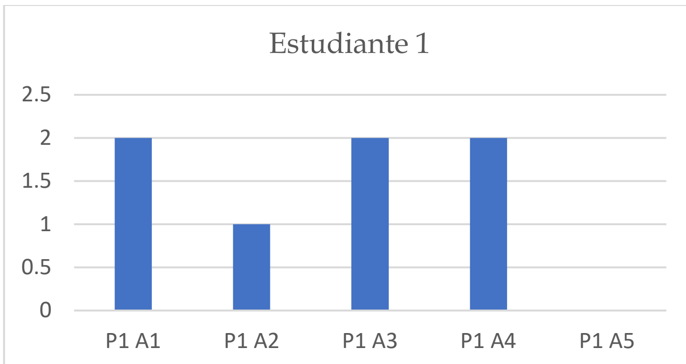
Al resto de los estudiantes se asignó un nivel "Medio" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación verbal.

De esta forma, de acuerdo al análisis realizado tenemos que 16 estudiantes obtuvieron un nivel "Alto" y cuatro estudiantes un nivel "Medio" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación verbal.

En la ***Figura 34*** se observan los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 1 (E1); él está clasificado en el nivel "Alto":

Figura 34

Gráfica del estudiante 1, nivel "Alto"



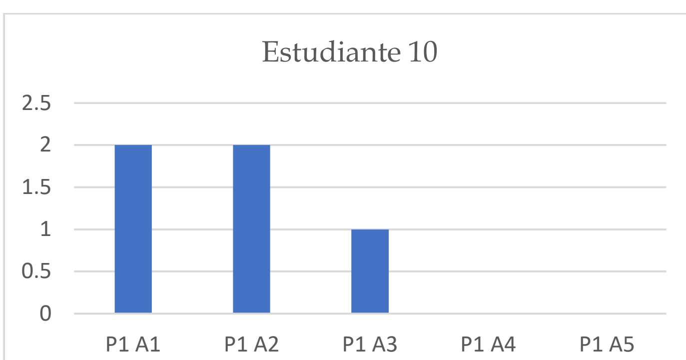
Nota: $PiAj$ es el número de la pregunta y la actividad en la que se encuentra, por ejemplo, P1A3 significa Pregunta 1 en Actividad 3, esto para todas las gráficas.

En las actividades 1, 3 y 4 alcanzó un "dos" en la codificación. En la actividad 2 alcanzó un "uno" en la codificación. En la actividad 5, alcanzó un "cero" en la codificación.

Por ejemplo, el Estudiante 10 (E10) entró, de acuerdo a muestro criterio, en el nivel "Medio" ya que su respectiva codificación se muestra en la ***Figura 35***:

Figura 35

Gráfica del estudiante 10, nivel "Medio"



El contraste entre estas dos maneras de responder es evidente.

Etapa 1, Pregunta 2

El segundo objetivo de la etapa 1 fue promover la conversión entre la representación pictórica (***RP***) a la representación tabular (***RT***), es decir, que fuera capaz de traducir a una tabla lo observado en la figura de cada problema, con ayuda de la manipulación de un deslizador. Una vez realizado esto, se pretendió promover la conversión de la representación tabular (***RT***) a la representación algebraica (***RA***), es decir, que los estudiantes fueran capaces de observar en los datos de la tabla algún patrón y lograr con ello una generalización (expresión algebraica de cada dimensión).

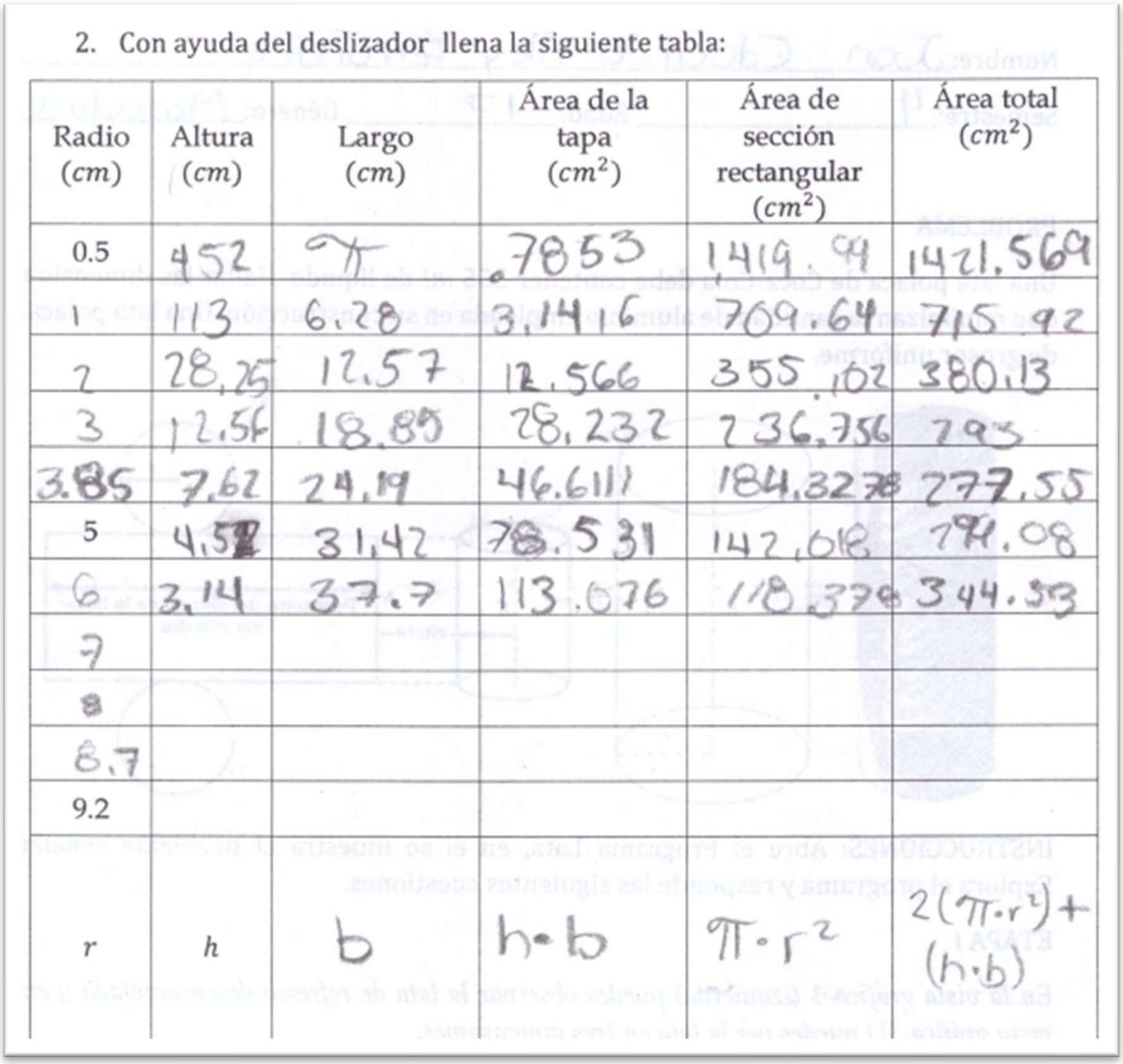
La Pregunta 2 de la Etapa 1 se codificó y analizó en cada una de las cinco actividades. Se contó con tres indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

- Se asigna un "cero" cuando el estudiante llenó la tabla con valores erróneos y además no logró expresar algebraicamente cada una de las dimensiones.
- Se asigna un "uno" cuando el estudiante realizó alguna de estas dos cosas: o no llenó la tabla por completo de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, pero si logró encontrar todas las expresiones algebraicas de las respectivas dimensiones del problema o el estudiante llenó la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, pero no logró encontrar todas las expresiones algebraicas de las respectivas dimensiones.
- Se asigna un "dos" cuando el estudiante llenó la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D y obtuvo todas las expresiones algebraicas de las respectivas dimensiones.

Ejemplo de estos tres tipos de respuestas se muestran en la ***Figura 36, Figura 37, Figura 38*** y ***Figura 39:***

Figura 36

Estudiante 3, Etapa 1-Pregunta 2, Actividad 3, respuesta codificada con "cero"



2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5	452	π	.7853	1,419.99	1421.569
1	113	6.28	3.1416	709.64	715.92
2	28.25	12.57	12.566	355.102	380.13
3	12.56	18.85	28.232	236.756	293
3.85	7.62	24.19	46.6111	184.3278	277.55
5	4.52	31.42	78.531	142.018	194.08
6	3.14	37.7	113.076	118.378	344.53
7					
8					
8.7					
9.2					
r	h	b	h·b	$\pi \cdot r^2$	$2(\pi \cdot r^2)+(h \cdot b)$

Figura 37

Estudiante 10, Etapa 1-Pregunta 2, Actividad 3, respuesta codificada con "uno".

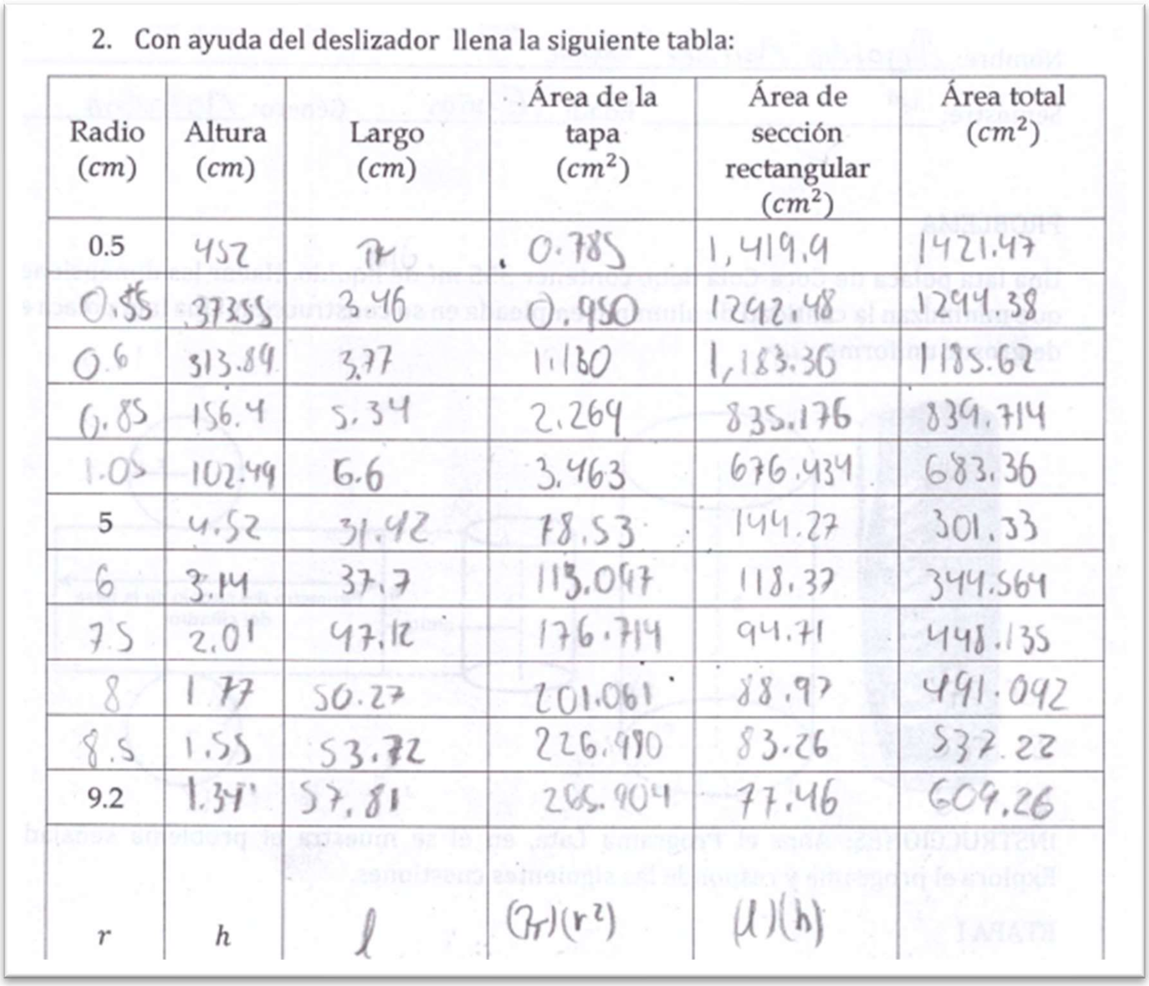
2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5					
5					
9.2					
r	h	$2\pi r$	πr^2	$2\pi r \cdot h$	$(\pi r^2)+(\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$

Nota: El estudiante no llenó la tabla, pero si logra encontrar todas las expresiones algebraicas de las respectivas dimensiones del problema.

Figura 38

Estudiante 2, Etapa 1-Pregunta 2, Actividad 3, respuesta codificada con "uno".



2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5	452	π	0.785	1,419.9	1421.47
0.55	37355	3.46	0.950	1292.48	1294.38
0.6	313.89	3.77	1.130	1,183.36	1185.62
0.85	156.4	5.34	2.264	835.176	839.714
1.05	102.49	6.6	3.463	676.434	683.36
5	4.52	31.42	78.53	144.27	301.33
6	3.14	37.7	113.047	118.37	344.564
7.5	2.01	47.12	176.714	94.71	448.135
8	1.77	50.27	201.061	88.97	491.092
8.5	1.55	53.72	226.980	83.26	537.22
9.2	1.34	57.81	265.904	77.46	609.26
r	h	l	$(\pi)(r^2)$	$(l)(h)$	

Nota: El estudiante llenó la tabla de manera, pero no logró encontrar todas las expresiones algebraicas de las respectivas dimensiones

Figura 39

Estudiante 11, Etapa 1-Pregunta 2, Actividad 3, respuesta codificada con "dos"

2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5	152	π	.7854	1420.0032	1421.574
1.15	85.4	7.23	3.61284	617.7312	624.956
2.4	19.62	15.08	18.095	295.8696	332.0596
3.65	8.48	22.93	41.853	194.1464	278.1524
4.5	5.58	28.27	63.6174	157.7416	284.9808
5	4.52	31.42	78.54	142.0184	299.0984
6.85	2.41	43.04	147.411	103.7264	398.5484
7.45	2.04	46.81	174.366	95.4924	444.2244
8.2	1.68	51.52	211.537	86.5536	509.6276
8.9	1.43	55.92	248.84	79.9656	577.6456
9.2	1.34	57.81	265.905	77.4654	609.2754
r	h	$2\pi r$	πr^2	$h \cdot 2\pi r$	$2\pi r^2 + (h \cdot 2\pi r)$

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "dos", se asignó un nivel "Alto" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación tabular y de la representación tabular a la representación algebraica.

Si el estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "cero", se asignó un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación tabular y de la representación tabular a la representación algebraica.

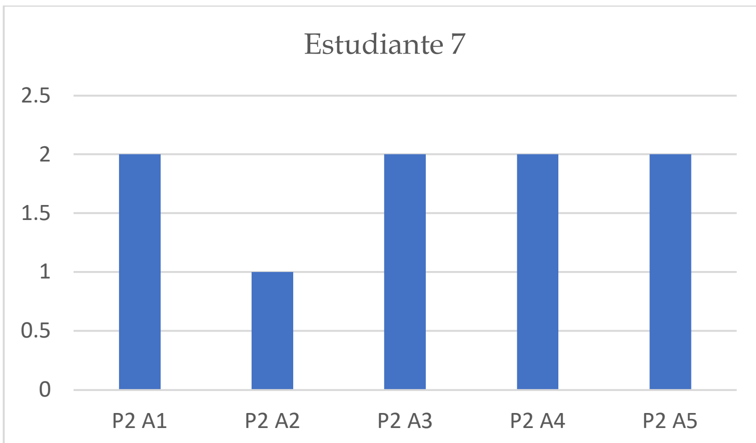
Al resto de los estudiantes se les asignó un nivel "Medio" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación tabular y de la representación tabular a la representación algebraica.

De esta manera, de acuerdo al análisis realizado tenemos que ocho estudiantes obtuvieron un nivel "Alto"; nueve estudiantes un nivel "Medio" y tres estudiantes un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación pictórica a la representación tabular y de la representación tabular a la representación algebraica.

En la ***Figura 40*** se observan los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 7 (E7); él está clasificado en el nivel "Alto":

Figura 40

Gráfica del estudiante 7, nivel "Alto"

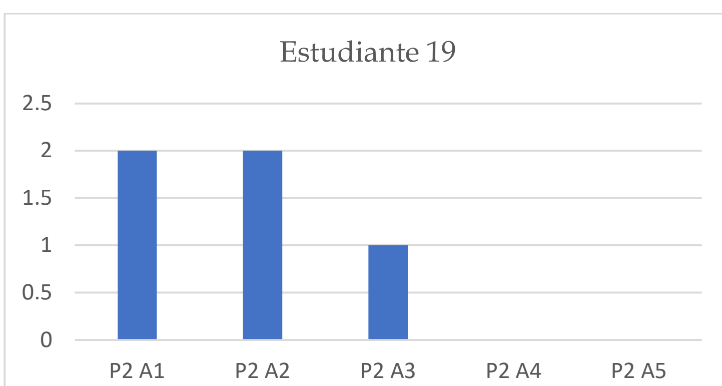


En las actividades 1,3,4 y 5 alcanzó un "dos" en la codificación. En la actividad 2 alcanzó un "uno" en la codificación.

Por ejemplo, el Estudiante 19 (E19) entró, de acuerdo a nuestro criterio, en el nivel "Medio" ya que su respectiva codificación se muestra en la ***Figura 41:***

Figura 41

Gráfica del estudiante 19, nivel "Medio"

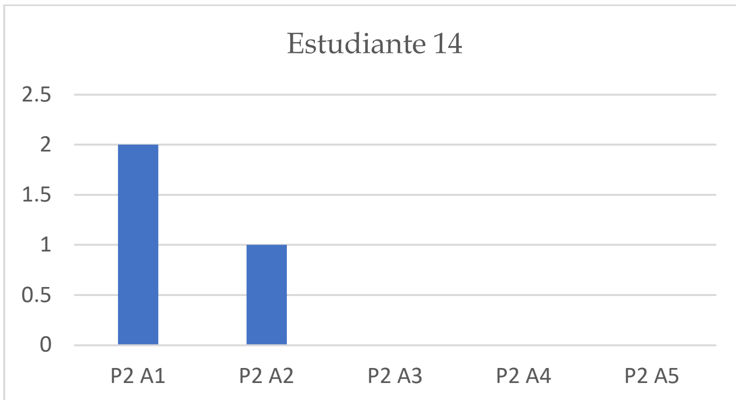


En las actividades 1 y 2 alcanzó un “dos” en la codificación. En la actividad 3 alcanzó un “uno” en la codificación. En las actividades 4 y 5, alcanzó una codificación de “cero”.

Por ejemplo, el Estudiante 14 (E14) entró, de acuerdo a nuestro criterio, en el nivel “Bajo” ya que su respectiva codificación se muestra en la ***Figura 42***:

Figura 42

Gráfica del estudiante 14, nivel "Bajo"



En las actividades 1 alcanzó un “dos” en la codificación. En la actividad 2 alcanzó un “uno” en la codificación. En las actividades 3, 4 y 5, alcanzó una codificación de “cero”.

Etapa 2, Pregunta 1

En esta etapa 2, el principal objetivo fue que el estudiante interactuara con la representación gráfica del problema y que afianzara la representación algebraica del mismo; para ello en la pregunta 1 de esta etapa estuvimos interesados en promover la conversión entre la representación gráfica y la representación verbal. Como ya se mencionó, se le mostró al estudiante la gráfica de la función que modelaba el problema y junto con un deslizador se le pidió que la manipulara. Una vez que el estudiante analizó el gráfico en general se le pidió escribir lo que representaba dicha gráfica.

La Pregunta 1 de la Etapa 2 se codificó y analizó en cada una de las 5 actividades. Se contó con 3 indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

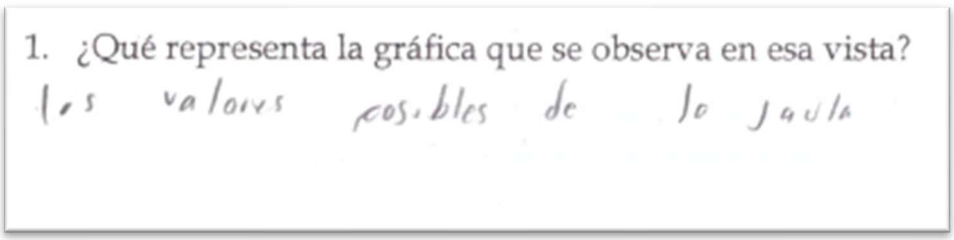
- Se asigna un “cero” cuando el estudiante proporcionó una respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.

- Se asigna un "uno" cuando el estudiante bridón una respuesta vaga y poco clara pero que si tenía relación con lo presentado en la gráfica.
- Se asigna un "dos" cuando el estudiante mencionó adecuadamente (con todo y dimensiones) lo que representaba la gráfica.

Ejemplo de estos tres tipos de respuestas se muestran en las **Figura *43***, **Figura *44*** y **Figura *45***.

Figura 43

Estudiante 9, Etapa 2-Pregunta 1, Actividad 5, respuesta codificada con "cero"

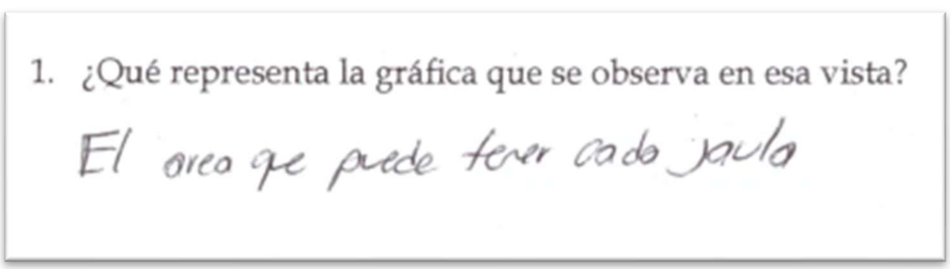

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

los valores posibles de lo jaula

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "los valores posibles de la jaula"

Figura 44

Estudiante 5, Etapa 2-Pregunta 1, Actividad 5, respuesta codificada con "uno"

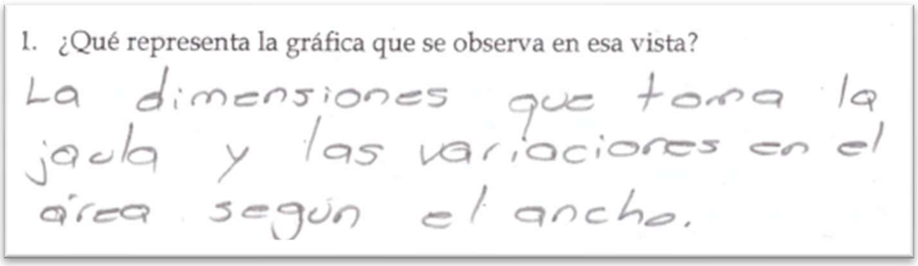

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

El area qe puede tener cada jaula

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "El área que puede tener cada jaula"

Figura 45

Estudiante 4, Etapa 2-Pregunta 1, Actividad 5, respuesta codificada con "dos"



1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

La dimensiones que toma la jaula y las variaciones en el área según el ancho.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Las dimensiones que toma la jaula y las variaciones en el área según el ancho"

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "dos", se asignó un nivel "Alto" de habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal.

Si el estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "cero", se asignó un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal.

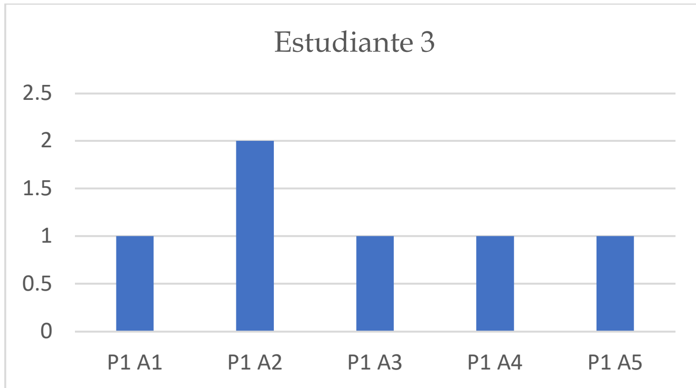
Al resto de los estudiantes se les asignó un nivel "Medio" de habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal.

De esta forma, de acuerdo al análisis realizado tenemos que ningún estudiante obtuvo un nivel "Alto"; 16 estudiantes un nivel "Medio" y cuatro estudiantes un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal.

En la **Figura *46*** se observan los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 3 (E3); él está clasificado en el nivel "Medio":

Figura 46

Gráfica del estudiante 3, nivel "Medio"

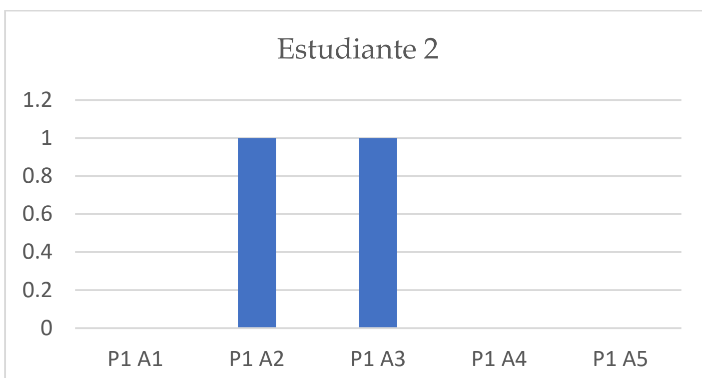


En las actividades 1,3,4 y 5 alcanzó un "uno" en la codificación. En la actividad 2 alcanzó un "dos" en la codificación.

Por ejemplo, el Estudiante 2 (E2) entró, de acuerdo a nuestro criterio, en el nivel "Bajo" ya que su respectiva codificación se muestra en la **Figura *47***:

Figura 47

Gráfica del estudiante 2, nivel "Bajo"



Se muestra que solamente en las actividades 2 y 3 alcanzó un "uno" en la codificación, en el resto de las actividades alcanzó un "cero".

Etapa 2, Preguntas 3 y 4

El objetivo de estas preguntas fue que el estudiante identificara en la gráfica cada una de las variables involucradas en el problema; que mencionara el significado de las respectivas coordenadas (x, y).

La conversión que se quiso promover fue de la representación gráfica, representación tabular, a la representación verbal. Se involucra la representación gráfica ya que en sus reflexiones puede hacer referencia a ella.

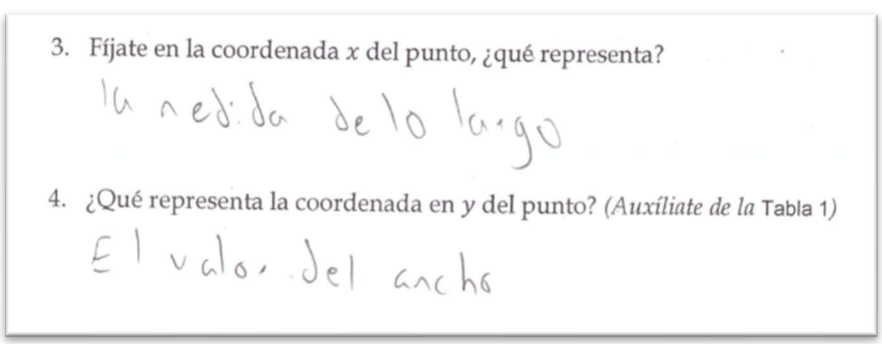
Estas preguntas 3 y 4 se codificaron y analizaron también en cada una de las cinco actividades. Se contó con tres indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

- Se asigna un "cero" cuando el estudiante respondió con algo que no estuviera presente en la gráfica.
- Se asigna un "uno" cuando el estudiante si relacionó las coordenadas "x" y "y" con las respectivas dimensiones del problema, pero no tomó en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1.
- Se asigna un "dos" cuando el estudiante si relacionó las coordenadas "x" y "y" con las respectivas dimensiones del problema y además hizo referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1.

A continuación, se presentan ejemplos de solo dos tipos de respuesta (para cada pregunta) ya que ningún estudiante logró un puntaje de "dos" en alguna de las actividades:

Figura 48

Estudiante 19, Etapa 2-Preguntas 3 y 4, Actividad 4, respuestas codificadas en "cero"



3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

la medida de lo largo

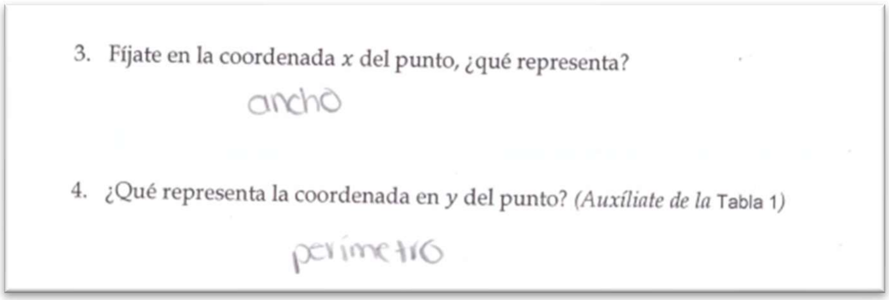
4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

El valor del ancho

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "la medida de lo largo/El valor del ancho"

Figura 49

Estudiante 15, Etapa 2-Preguntas 3 y 4, Actividad 4, respuestas codificadas en "uno"



3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

ancho

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

perimetro

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "ancho/perímetro"

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "dos", se asignó un nivel "Alto" de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

Si el estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "cero", se asignó un nivel "Bajo" de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

Al resto de los estudiantes se les asignó un nivel "Medio" de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

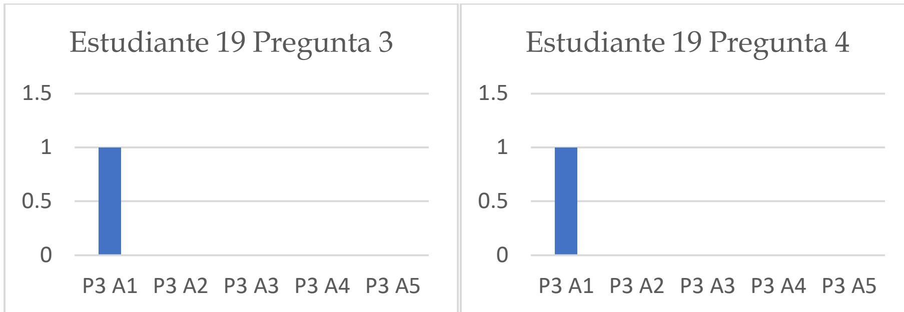
De esta manera, de acuerdo al análisis realizado tenemos que ningún estudiante obtuvo un nivel "Alto" (esto en ninguna de las dos preguntas); 19 estudiantes un nivel "Medio" (en ambas preguntas) y 1 estudiantes un nivel "Bajo" (también de ambas preguntas) de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

Aquí hay que hacer notar que la única persona que obtuvo un nivel "Bajo" en la pregunta 3 fue la misma que obtuvo un nivel "Bajo" en la pregunta 4.

La codificación de dicha persona, Estudiante 19 (E19), se muestra en la **Figura *50***:

Figura 50

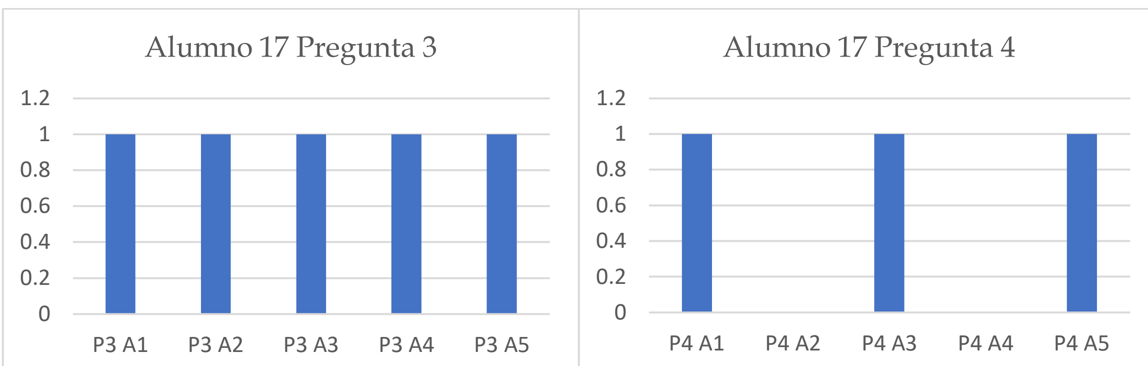
Gráficas del estudiante 19, nivel "Bajo"



En la Figura 51 se muestra el caso del Estudiante (E17), él alcanzó en ambas preguntas un nivel "Medio":

Figura 51

Gráficas del estudiante 17, nivel "Medio"



Etapa 2, Preguntas 6 y 7

Estas preguntas buscaron promover la conversión de la representación verbal a la representación algebraica. Este tipo de preguntas como tal se encontraron de la actividad 2 en adelante y esto se debió a los tipos de problemas de optimización que se presentaron. Resulta que el problema de optimización de la actividad 1 es un ejercicio en el cual es relativamente sencillo encontrar la función objetivo expresada en términos de una sola variable.

En el resto de problemas, esto no sucede. Recordemos que uno de los pasos relevantes al resolver problemas de optimización es que la función a la cual se le debe calcular el máximo o mínimo debe estar en términos de una sola variable. Para ello se debe estar atento a la redacción ya que dentro del mismo problema se presenta siempre un dato extra que es el que nos va a permitir escribir la función a optimizar en términos de una variable al sustituir algún dato. Pues es precisamente lo que se buscó en estas preguntas. Hacerle notar al estudiante ese dato extra y que él mismo pensara cómo es que se relacionaba con el resto de la información del problema.

Estas preguntas 6 y 7 (de las actividades 2, 3, 4 y 5) se codificaron solamente con base en 2 indicadores.

En el caso de la pregunta 6:

- se asigna un "cero" cuando el estudiante no relacionó lo expresado en el "dato extra" del problema con el resto de la información.
- se asigna un "uno" cuando el estudiante si relacionó el "dato extra" con el resto de la información del problema.

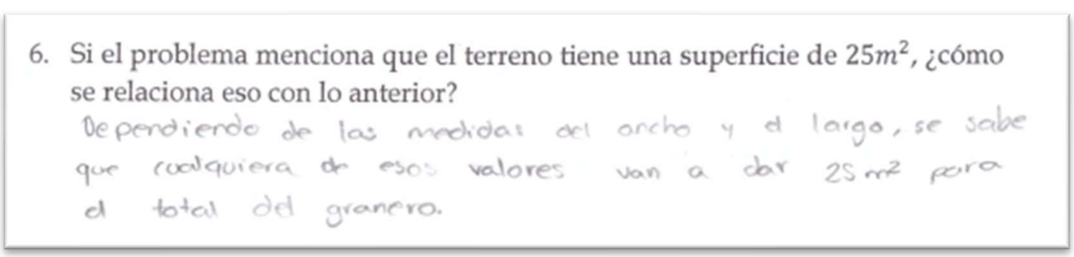
En el caso de la pregunta 7 sucedió algo similar:

- se asigna un "cero" cuando el estudiante no relacionó algebraicamente lo mencionado en el "dato extra" del problema con la fórmula a optimizar.
- se asigna "uno" cuando el estudiante si relacionó algebraicamente lo mencionado en el "dato extra" con la fórmula a optimizar.

Ejemplo de estos dos tipos de respuestas, para cada pregunta, se muestran en la Figura 52, Figura 53, Figura 54 y Figura 55:

Figura 52

Estudiante 7, Etapa 2-Pregunta 6, Actividad 4, respuesta codificada con "cero"



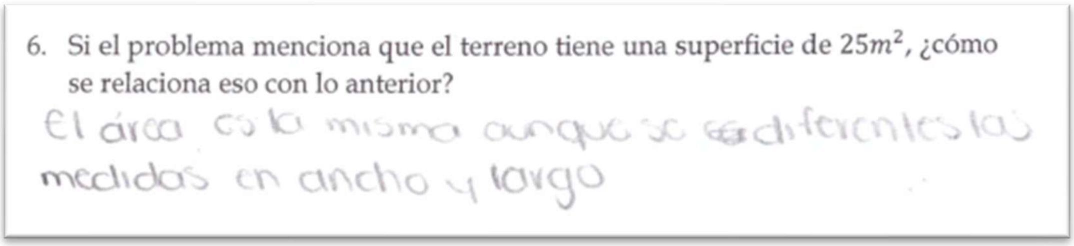
6. Si el problema menciona que el terreno tiene una superficie de $25m^2$, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

Dependiendo de las medidas del ancho y el largo, se sabe que cualquiera de esos valores van a dar 25 m² para el total del granero.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Dependiendo de las medidas del ancho y el largo, se sabe que cualquiera de esos valores van a dar $25m^2$ para el total del granero"

Figura 53

Estudiante 15, Etapa 2-Pregunta 6, Actividad 4, respuesta codificada con "uno"


6. Si el problema menciona que el terreno tiene una superficie de $25m^2$, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

El área es la misma aunque se diferentes las
medidas en ancho y largo

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "El área es la misma aunque sea diferentes las medidas en ancho y largo"

Figura 54

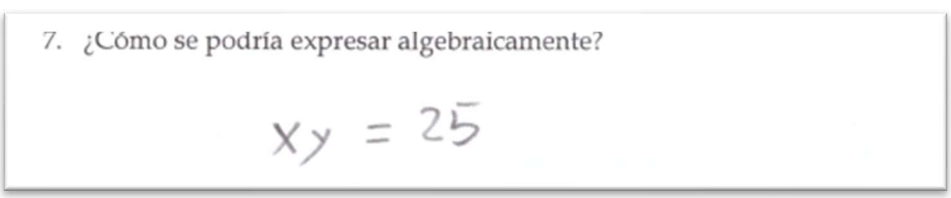
Estudiante 12, Etapa 2-Pregunta 7, Actividad 4, respuesta codificada con "cero"


7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente? XY

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "xy"

Figura 55

Estudiante 18, Etapa 2-Pregunta 7, Actividad 4, respuesta codificada con "uno"


7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente?

$xy = 25$

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "$xy = 25$"

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cuatro actividades un puntaje de "uno", se concluyó que si cuenta con la habilidad en la conversión de la representación verbal a la representación algebraica. En caso contrario, se concluyó que no cuenta con la habilidad en la conversión de la representación verbal a la representación algebraica.

Así, de acuerdo al análisis realizado tenemos que en la pregunta 6, 16 de los 20 estudiantes si manifestaron contar con la habilidad en la conversión de la representación verbal a la representación algebraica; el resto, cuatro, no.

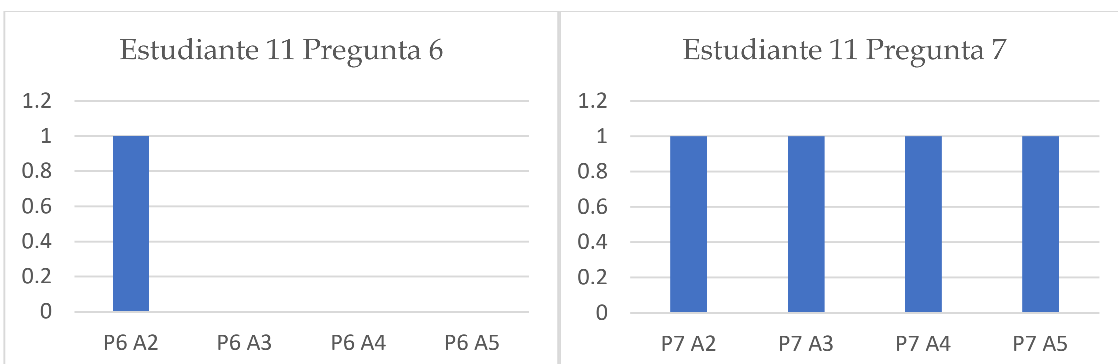
Respecto a la pregunta 7, se tiene que todos los estudiantes (20) manifestaron contar con la habilidad en la conversión de la representación verbal a la representación algebraica.

En particular, el resultado de estas preguntas sorprende ya que muestran en los estudiantes una madurez algebraica muy probablemente lograda a lo largo de su formación académica como bachilleres. También da una idea de la tendencia de los docentes por el enfoque algebraico en el transcurso de dicha formación.

En la Figura 56 se presentan los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 11 (E11); este estudiante en particular tuvo complicaciones al momento de expresar con palabras la relación del "dato extra" con el resto de la información del problema, pero respondió correctamente cuando dicha relación la expresó de manera algebraica:

Figura 56

Gráficas del estudiante 11



Etapa 2, Preguntas 9, 10 y 11

Estas preguntas buscaron promover la conversión de la representación gráfica a la representación verbal. Las preguntas estuvieron presentes en todas las actividades, pero, en la actividad 1 se encontraban con la numeración 6, 7 y 8, debido a que de la actividad 2 en adelante, la función a optimizar requirió de algunos pasos extras para llegar a estar expresada en términos de una sola variable.

Se le pidió al estudiante que manipulara la gráfica de la función con ayuda de un deslizador y que analizara en dónde se producía ya sea el máximo o mínimo de la función deseada, esto según el problema. Al igual que las preguntas 3 y 4 de esta misma etapa, el objetivo de estas preguntas fue que el estudiante identificara en la gráfica cada una de las variables involucradas en el problema; otro punto que se quiso lograr es que los estudiantes comenzaran a asociar los puntos más altos o más bajos de las gráficas con las soluciones de los problemas de optimización.

Estas preguntas se codificaron solamente con base en dos indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

Pregunta 9:

- se asigna un "cero" cuando el estudiante proporcionó una respuesta incorrecta.
- se asigna un "uno" cuando el estudiante proporcionó la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicó que habría identificado que la respectiva coordenada en "y" representaba la respuesta de la función objetivo (por ejemplo, el área que podría tener cada jaula, hablando de la actividad 5).

Pregunta 10:

- se asigna un "uno" si el estudiante logró relacionar el punto más alto o más bajo de la gráfica con la solución del problema estudiado.
- se asigna un "cero" en caso contrario.

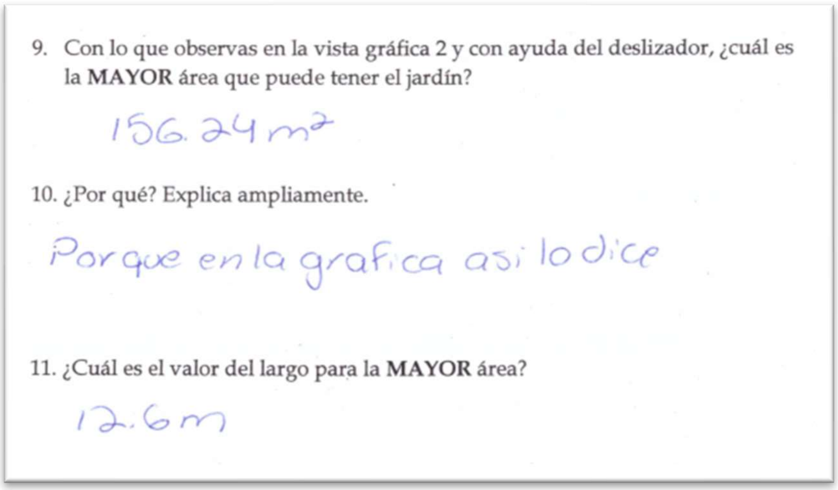
Pregunta 11:

- se asigna un "uno" cuando el estudiante logró identificar el valor de "x" que produce el máximo o el mínimo buscado.
- se asigna un "cero" en caso contrario.

Ejemplo de estos dos tipos de respuestas para cada pregunta (9, 10 y 11) se muestran en la Figura 57 y Figura 58:

Figura 57

Estudiante 8, Etapa 2-Preguntas 9, 10 y 11, Actividad 2, respuestas codificadas con "cero"



9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MAYOR** área que puede tener el jardín?

156.24 m²

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

Porque en la grafica asi lo dice

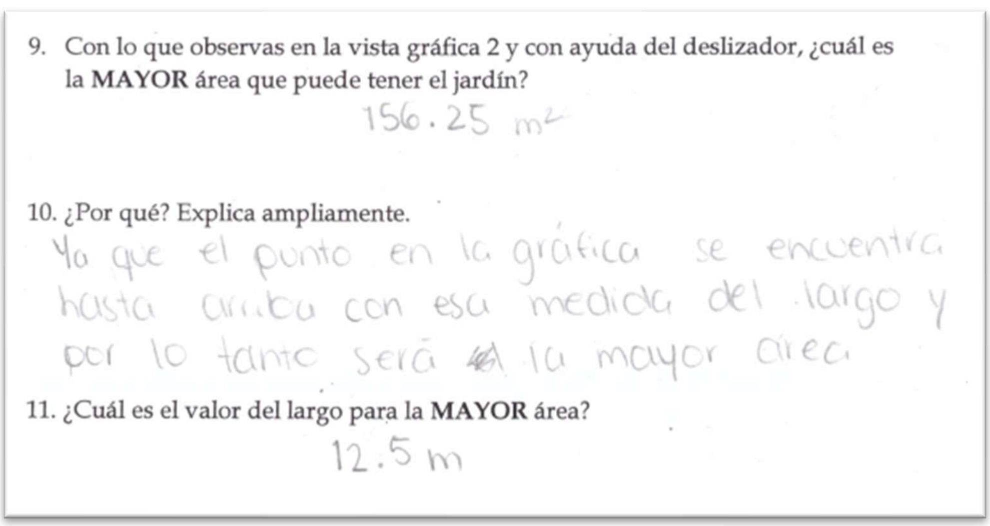
11. ¿Cuál es el valor del largo para la **MAYOR** área?

12.6m

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “$156.24m^2$ / Porque en la grafica así lo dice / $12.6m$”

Figura 58

Estudiante 16, Etapa 2-Preguntas 9, 10 y 11, Actividad 2, respuestas codificadas con "uno"



9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MAYOR** área que puede tener el jardín?

156.25 m²

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

Ya que el punto en la gráfica se encuentra hasta arriba con esa medida del largo y por lo tanto será la mayor area

11. ¿Cuál es el valor del largo para la **MAYOR** área?

12.5 m

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “$156.25m^2$ / Ya que el punto en la gráfica se encuentra hasta arriba con esa medida del largo y por lo tanto será la mayor área / $12.5m$”

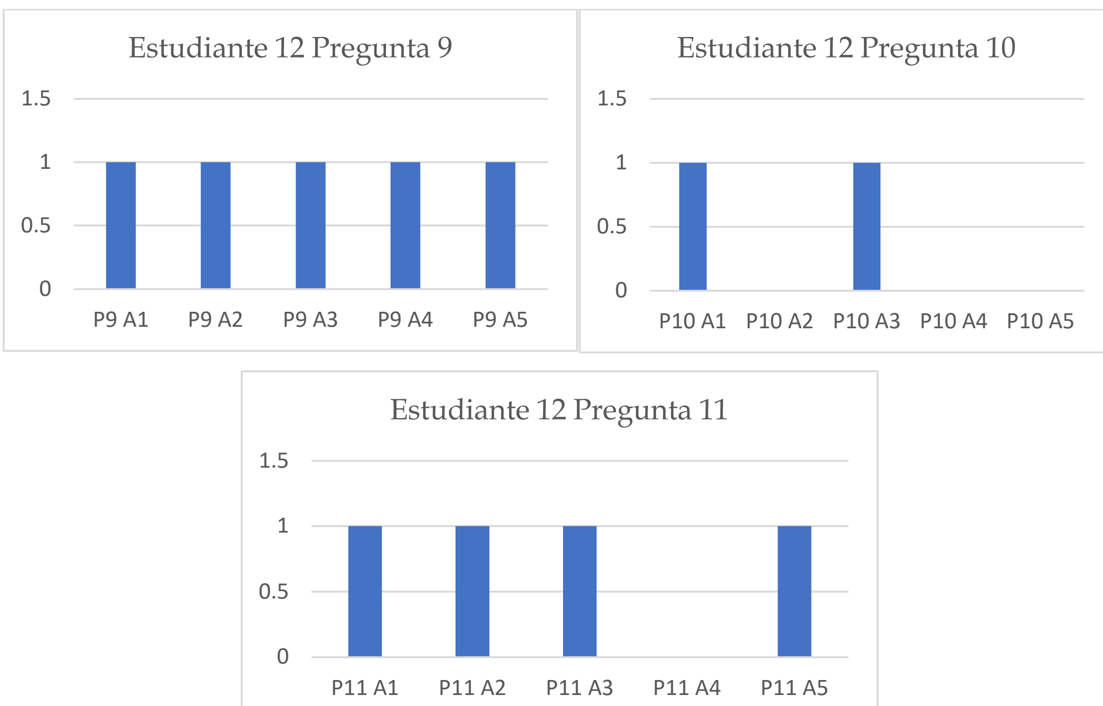
Cuando estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de "uno", se concluyó que si cuenta con la habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal. En caso contrario, se concluyó que no cuenta con la habilidad en la conversión de la representación gráfica a la representación verbal.

De esta manera, de acuerdo al análisis realizado tenemos que, en la pregunta 9, 20 estudiantes si cuentan con la habilidad en la conversión mencionada arriba; lo mismo ocurre en la pregunta 11, sin embargo, en la pregunta 10, solo cinco estudiantes cuentan con la habilidad y en el resto de estudiantes (15), no.

En la Figura 59 se muestra el caso del Estudiante 12 (E12) el cual tuvo una respuesta satisfactoria en las preguntas 9 y 11, más no así en la 10.

Figura 59

Gráficas del estudiante 12



En la pregunta 10 llama la atención el hecho de que los estudiantes al parecer, hasta este punto de las actividades, no tenían claro que los puntos más altos o más bajos de las gráficas representaban las soluciones a los problemas planteados. Más adelante, en el análisis de la etapa 4 se verá si los estudiantes lograron comprender esta idea o si siguieron igual.

Etapa 2, Pregunta 13

Esta pregunta buscó promover la conversión de la representación gráfica, representación tabular, a la representación verbal.

Se pidió al estudiante hacer una comparativa entre los resultados obtenidos durante la etapa 1 (en donde estuvo presente la representación tabular) y el análisis realizado en la etapa 2, respecto de encontrar el valor mínimo o máximo de la función.

Esta pregunta se codificó con tres indicadores:

Pregunta 13:

- se asigna un "cero" cuando el estudiante expresó una descripción vaga o incorrecta.
- se asigna un "uno" cuando el estudiante no hizo una comparación de métodos, es decir, solamente se encargó de explicar las ventajas o desventajas para encontrar la solución en alguno de los dos (la tabulación y la gráfica).
- se asigna un "dos" cuando el estudiante fue capaz de expresar que el intentar resolver el problema de optimización de manera tabular tiene la limitación de quizá, no encontrar la solución al problema porque los valores seleccionados para el ensayo y error fueron tomados de manera aleatoria. Aclara además que la gráfica ayudó en la obtención de dicho valor ya que ahí se puede ver qué sucede con más valores al mover un deslizador.

Ejemplos de estos tipos de respuestas se encuentran en la Figura 60, Figura 61 y Figura 62:

Figura 60

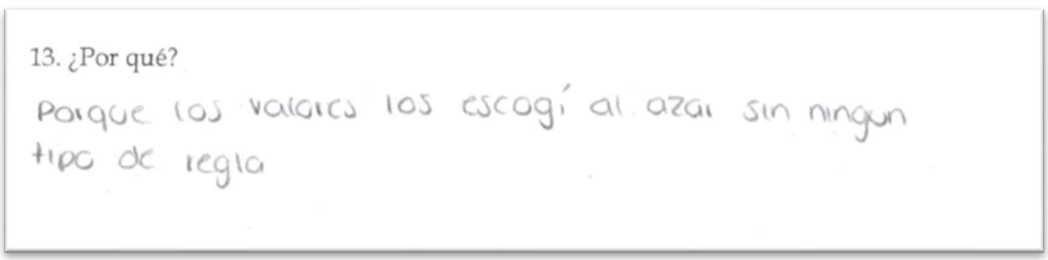
Estudiante 2, Etapa 2-Pregunta 13, Actividad 5, respuestas codificadas con "cero"


13. ¿Por qué?
Porque escogí ese número

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Porque escogí ese número"

Figura 61

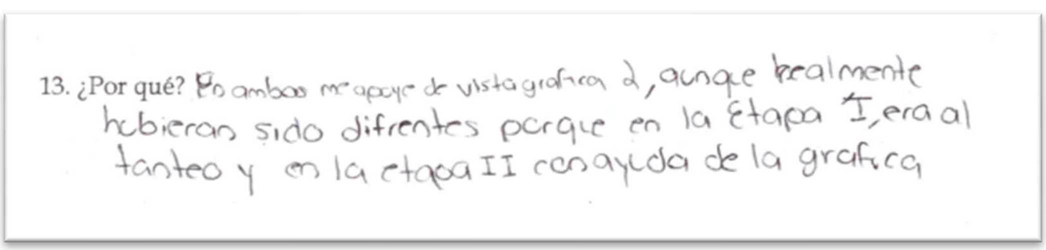
Estudiante 1, Etapa 2-Pregunta 13, Actividad 5, respuestas codificadas con "uno"


13. ¿Por qué?
Porque los valores los escogí al azar sin ningun tipo de regla

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Porque los valores los escogí al azar sin ningún tipo de regla"

Figura 62

Estudiante 14, Etapa 2-Pregunta 13, Actividad 5, respuestas codificadas con "dos"


13. ¿Por qué? En ambos me apoye de vista grafica 2, aunque realmente hubieran sido difrentes porque en la Etapa I, era al tanteo y en la etapa II con ayuda de la grafica

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "En ambos me apoye de vista gráfica 2, aunque realmente hubieran sido diferentes porque en la Etapa I, era al tanteo y en la etapa II con ayuda de la gráfica"

Cuando un estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de “dos”, se asignó un nivel “Alto” de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

Si el estudiante obtuvo en al menos tres de las cinco actividades un puntaje de “cero”, se asignó un nivel “Bajo” de habilidad en la conversión de la representación gráfica-tabular a la representación verbal.

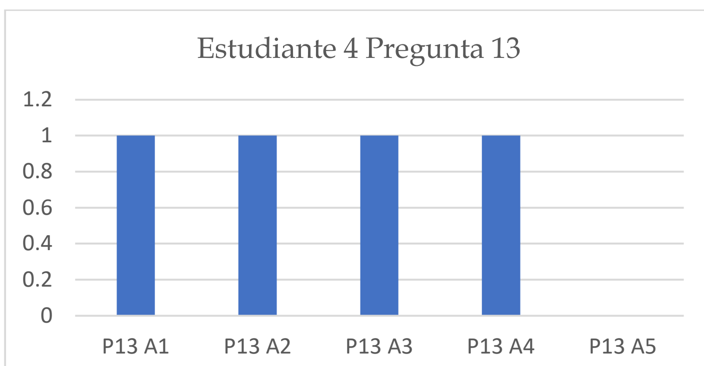
Al resto de los estudiantes se les asignó un nivel “Medio” de habilidad en la conversión de representación gráfica-tabular a la representación verbal.

De esta forma, de acuerdo al análisis realizado tenemos que ningún estudiante obtuvo un nivel “Alto”; un estudiante obtuvo un nivel “Medio” y 19 estudiantes un nivel “Bajo” de la habilidad en la conversión de representación gráfica-tabular a la representación verbal.

En la Figura 63 se observan los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 4 (E4), quién fue el único que alcanzó el nivel “medio”:

Figura 63

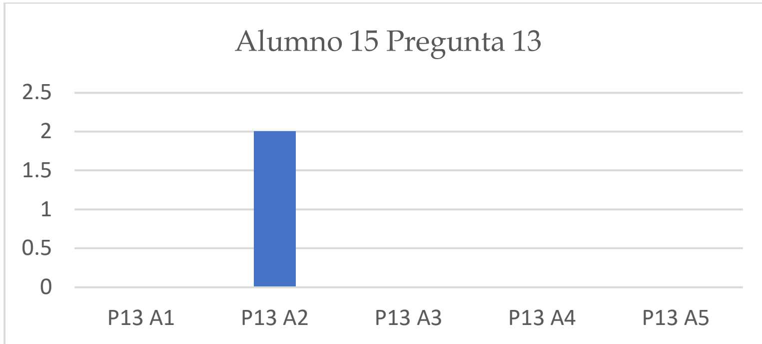
Gráfica del estudiante 4, nivel “Medio”



En la Figura 64 se muestran los resultados del análisis de las respuestas del Estudiante 15 (E15):

Figura 64

Gráfica del estudiante 15, nivel "Bajo"



Etapa 3

El principal objetivo de la etapa 3 es que el estudiante identifique gráficamente el dominio de la función a optimizar. Como ya se mencionó, en esta etapa se muestra al estudiante la gráfica en su dominio real, de la función y de otro color se le muestra la gráfica de la misma función, pero con el dominio restringido al contexto del problema.

Pregunta 4

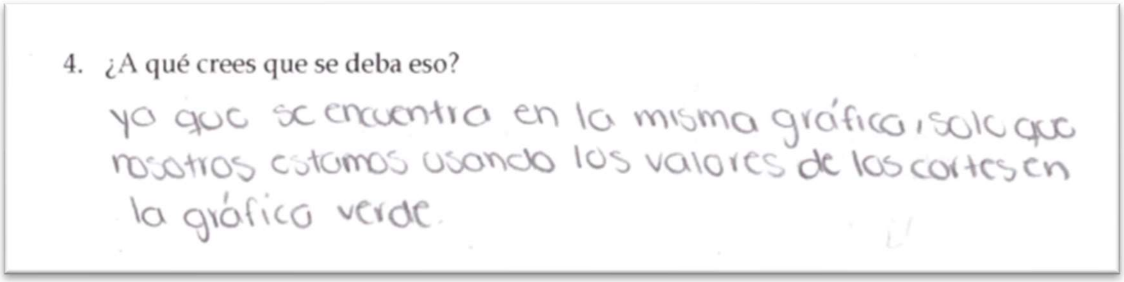
Al inicio de la actividad se le cuestiona sobre lo que representa cada gráfica, a continuación, entra la pregunta 4, con la cual se busca que el estudiante exprese a qué se debe que sean diferentes.

- se asigna un valor de "uno" cuando el estudiante expresa que una de las gráficas es parte de la otra solo que se encuentra restringida a lo que la realidad y el mundo físico lo permite.
- Se asigna un valor de "cero" cuando el estudiante brinda cualquier otra respuesta.

Ejemplos de ambos tipos de respuesta se muestra en la Figura 65 y Figura 66:

Figura 65

Estudiante 15, Etapa 3-Pregunta 4, Actividad 1, respuestas codificadas con "uno"



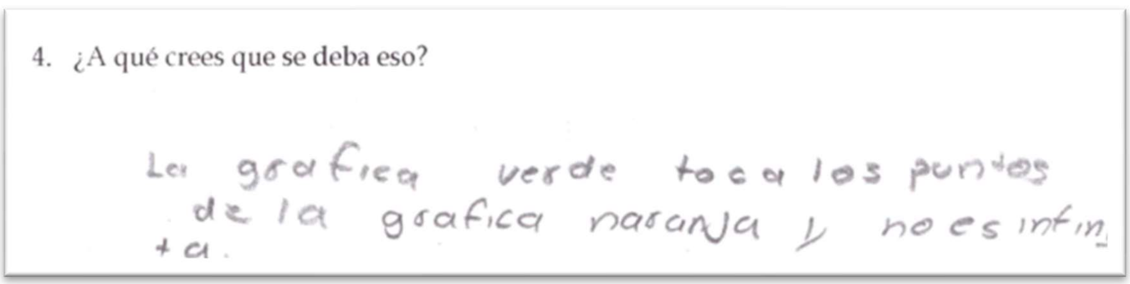
4. ¿A qué crees que se deba eso?

ya que se encuentra en la misma gráfica, solo que nosotros estamos usando los valores de los cortes en la gráfica verde.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "ya que se encuentra en la misma gráfica, solo que nosotros estamos usando los valores de los cortes en la gráfica verde"

Figura 66

Estudiante 18, Etapa 3-Pregunta 4, Actividad 1, respuestas codificadas con "cero"



4. ¿A qué crees que se deba eso?

La grafica verde toca los puntos de la grafica naranja y no es infinita.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "La grafica verde toca los puntos de la gráfica naranja y no es infinita"

Se decidió que cuando un estudiante obtuviera en tres o más de las cuatro actividades un puntaje de 1, se concluiría que, si existe la promoción de la conversión de la representación pictórica-gráfica a la representación verbal en el estudiante. En caso contrario se concluiría que no existe la promoción de la conversión de la representación pictórica-gráfica a la representación verbal.

Se tiene que en nueve estudiantes se logró la promoción de la conversión de la representación pictórica-gráfica a la representación verbal, mientras que en 11 no.

Se presenta el caso del Estudiante 7(E7) y del Estudiante 16 (E16), ver Figura 67 y Figura 68:

Figura 67

Gráfica 14 Estudiante 7

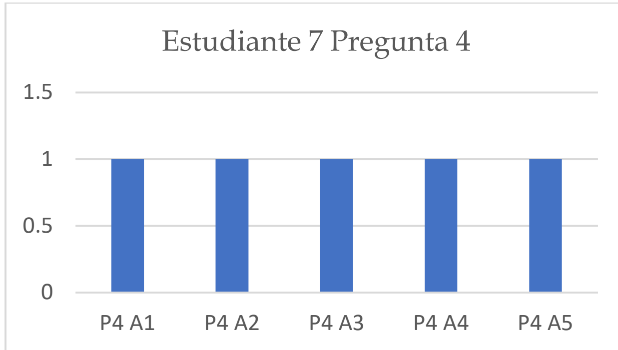
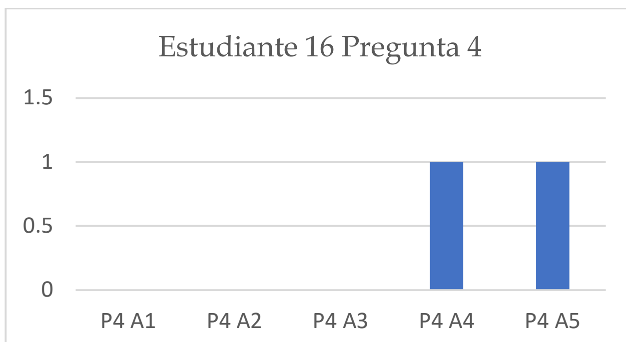


Figura 68

Gráfica 15 Estudiante 16



Pregunta 5

Una vez que el estudiante distingue el dominio de la función a optimizar de manera gráfica, se le cuestiona sobre la manera de expresarlo en forma algebraica. Es por ello que el objetivo de esta pregunta es promover la conversión de la representación gráfica a la representación verbal, algébrica (depende de cómo exprese su respuesta).

Esta actividad cuenta con cuatro indicadores:

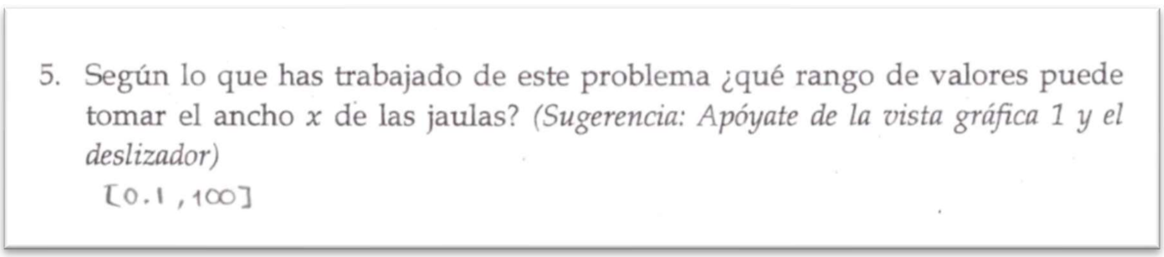
- se asigna un “tres” al estudiante que expresa con notación de intervalo el dominio de la función y además en su redacción añade el concepto de dominio.
- se asigna un “dos” al estudiante que expresa con notación de intervalo el dominio de la función, pero no añade el término dominio en su redacción.

- se asigna un “uno” al estudiante que brinda como valores del dominio los que observa en el deslizador sin notación de intervalo y sin hacer referencia al concepto de dominio.
- por último, se le asigna un “cero” al estudiante que brinda alguna otra respuesta

En la Figura 69, Figura 70 y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se presentan ejemplos de los diferentes tipos de respuestas:

Figura 69

Estudiante 7, Etapa 3-Pregunta 5, Actividad 5, respuestas codificadas con "dos"



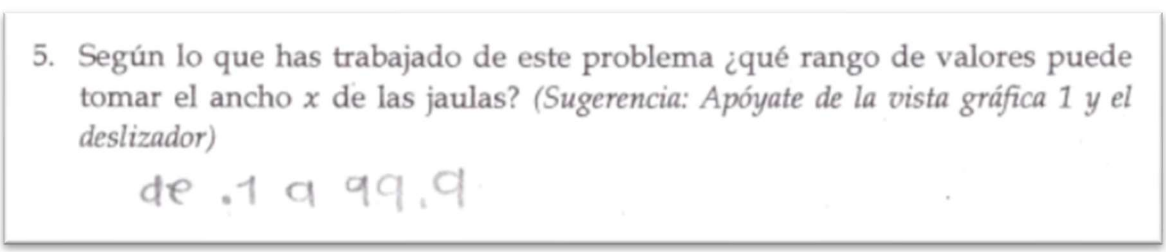
5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x de las jaulas? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

[0.1 ,100]

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “[0.1,100]”

Figura 70

Estudiante 11, Etapa 3-Pregunta 5, Actividad 5, respuestas codificadas con "uno"



5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x de las jaulas? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

de .1 a 99.9

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “de .1 a 99.9”

Figura 71

Estudiante 19, Etapa 3-Pregunta 5, Actividad 5, respuestas codificadas con "cero"

> 5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x de las jaulas? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

Nota: No hubo respuesta escrita por parte del estudiante

Se puede notar que esta pregunta en particular tiene más matices respecto a las maneras en las que un estudiante podría responder.

Se clasifica como sobresaliente en la promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica a los estudiantes que obtuvieran al menos un 3 dentro de sus codificaciones, lo cual no sucedió.

Si el estudiante obtuviera en tres de las cinco actividades, un puntaje de 2, se le asignaría un nivel “Alto” de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

Si el estudiante obtuviera en tres de las cinco actividades un puntaje de 0 (sobre la pregunta 1) se asigna un nivel “Bajo” de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

Al resto de los estudiantes se les asignaría un nivel “Medio” de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

Bajo estos acuerdos, tenemos que seis estudiantes obtuvieron un nivel “Alto”; 14 estudiantes obtuvieron un nivel “Medio” y ningún estudiante obtuvo un nivel “Bajo” de la promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica en el estudiante.

Un ejemplo de la codificación de los estudiantes con un resultado Alto y Medio se encuentra en la Figura 72 y Figura 73:

Figura 72

Gráfica del estudiante 17, nivel "Alto"

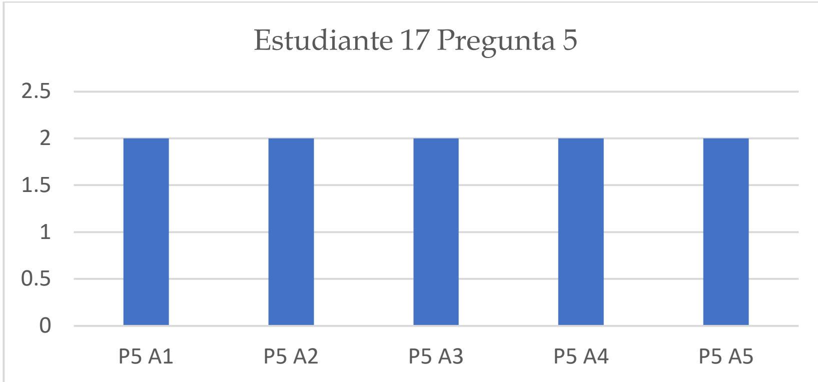
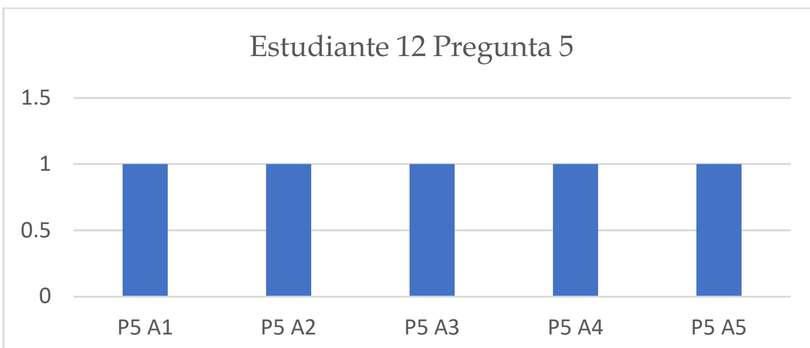


Figura 73

Gráfica del estudiante 12, nivel "Medio"



Pregunta 6

Para concluir con esta etapa analicemos los resultados de la pregunta 6. Una vez que los estudiantes expresan el rango de valores, se les pide una confirmación verbal del mismo; con esta confirmación se espera que los estudiantes pongan de manifiesto que el dominio de los problemas de optimización es restringido por el contexto del mundo físico.

Para esta pregunta se contó con tres indicadores:

- se asigna un "dos" al estudiante que precisamente argumenta que los valores del dominio están determinados por el contexto físico del problema.

- se asigna un “uno” al estudiante que argumenta que el dominio lo eligió de cierta manera porque así lo marcaba la gráfica, pero no reflexiona sobre su relación con el contexto del problema.
- se asigna un “cero” cuando el estudiante brinda alguna otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presentan en la Figura 74, Figura 75 y Figura 76:

Figura 74

Estudiante 7, Etapa 3-Pregunta 6, Actividad 5, respuestas codificadas con "dos"


6. ¿Por qué?
Porque si es 0, la jaulo no tendría ancho y si es mayor de 100, sería muy ancha y no tendría largo.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “Porque si es 0, la jaula no tendría ancho y si es mayor de 100, sería muy ancha y no tendría largo ”

Figura 75

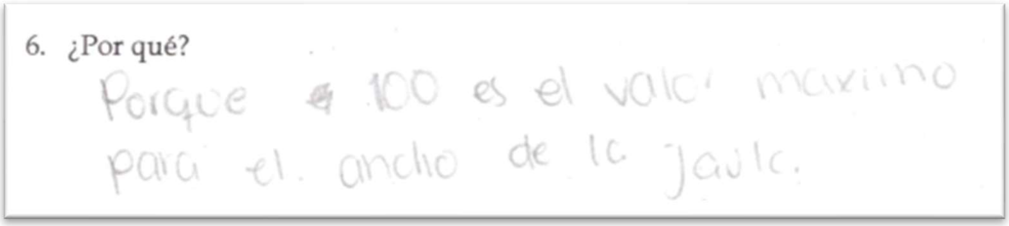
Estudiante 16, Etapa 3-Pregunta 6, Actividad 5, respuestas codificadas con "uno"


6. ¿Por qué?
son los que están dentro del rango azúl

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “son los que están dentro del rango azul”

Figura 76

Estudiante 9, Etapa 3-Pregunta 6, Actividad 5, respuestas codificadas con "cero"



Nota: Transcripción del texto de la imagen: “Porque 100 es el valor máximo para el ancho de la jaula”

Si el estudiante obtuvo en tres de las cinco actividades, un puntaje de 2, se asigna un nivel “Alto” de promoción de la conversión de la representación gráfica-pictórica a la representación verbal.

Si el estudiante obtuvo en tres de las cinco actividades un puntaje de 0 (sobre la pregunta 1) se le asignaría un nivel “Bajo” de promoción de la conversión de la representación gráfica-pictórica a la representación verbal.

El resto de los estudiantes se les asignaría un nivel “Medio” de promoción de la conversión de la representación gráfica-pictórica a la representación verbal.

Bajo esta mira, tenemos que ocho estudiantes obtuvieron un nivel “Alto”; dos estudiantes obtuvieron un nivel “Medio” y 10 estudiante obtuvo un nivel “Bajo” de la promoción de la conversión de la representación gráfica-pictórica a la representación verbal.

En la Figura 77, Figura 78 y Figura 79, se muestra un ejemplo de cada una de estas categorías:

Figura 77

Gráfica del estudiante 16, nivel "Alto"

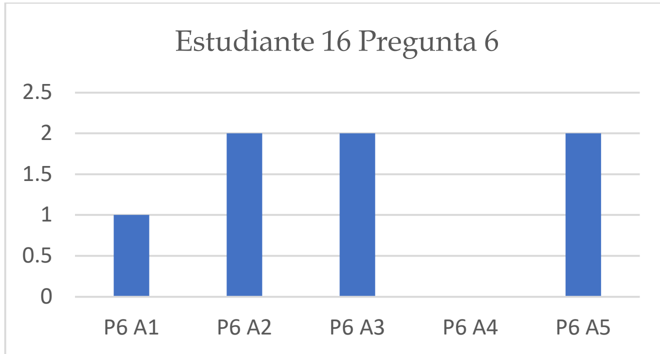


Figura 78

Gráfica del estudiante 2, nivel "Medio"

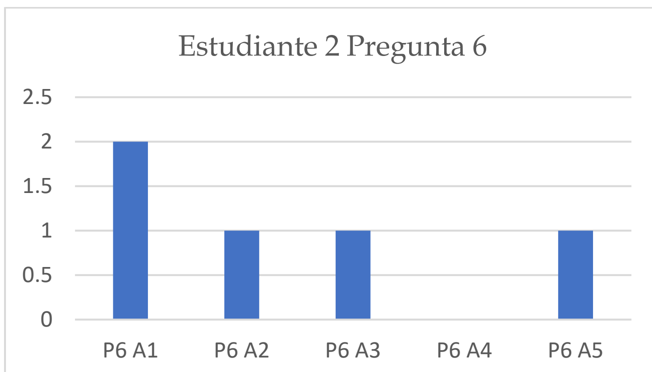
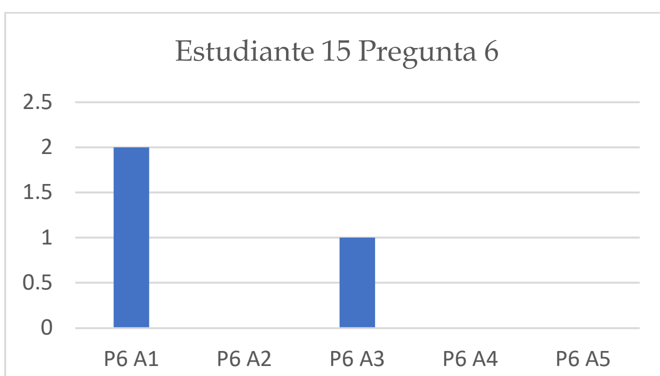


Figura 79

Gráfica del estudiante 15, nivel "Bajo"



Etapa 4, Pregunta 1

Como ya se mencionó, el objetivo de la etapa 4 era que el estudiante analizara la inclinación de la recta tangente a la curva y el signo de su pendiente conforme cierta variable va cambiando; se esperaba que el estudiante pudiera concluir cómo era la recta tangente y su signo antes y después de un supuesto máximo o mínimo, así como en el punto de interés. Se pretendía que el estudiante reconociera la relación existente entre el punto tangencial a la curva donde la pendiente de la recta tangente se hace cero y la solución, x, a los problemas de optimización.

En esta pregunta se busca promover la conversión de la representación gráfica, a la representación verbal-algebraica.

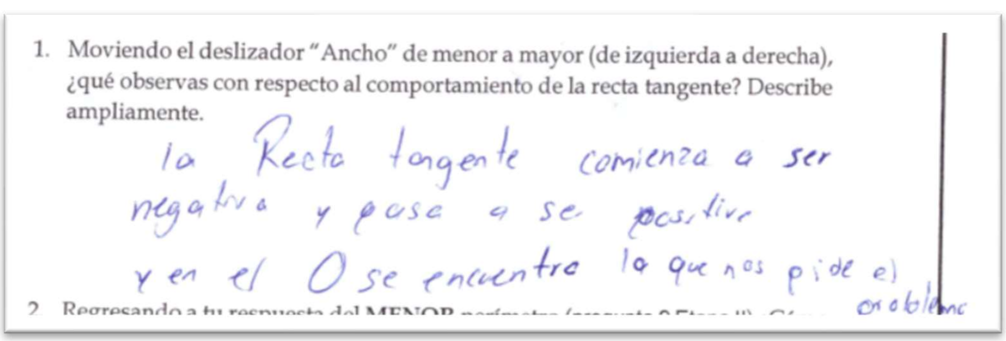
Para esta pregunta se contó con tres indicadores:

- se asigna un "dos" al estudiante que describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo.
- se asigna un "uno" al estudiante que describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo.
- se asigna un "cero" cuando el estudiante brinda alguna otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la Figura 80, Figura 81 y Figura 82:

Figura 80

Estudiante 17, Etapa 4-Pregunta 1, Actividad 4, respuestas codificadas con "dos"



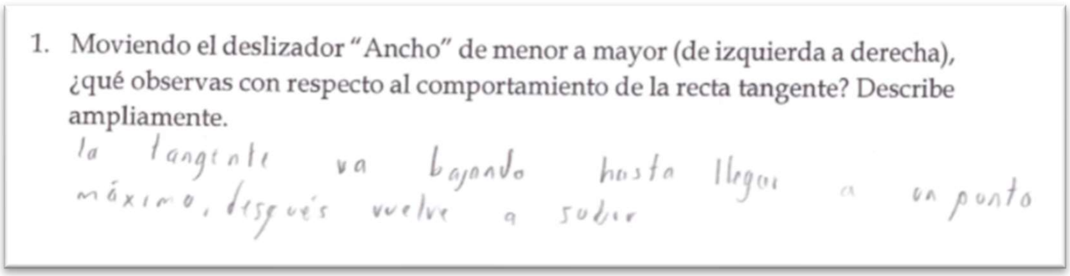
1. Moviendo el deslizador "Ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

la Recta tangente comienza a ser negativa y pasa a se positiva y en el 0 se encuentra lo que nos pide el problema

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "la Recta tangente comienza a ser negativa y pasa a ser positiva y en el 0 se encuentra la que nos pide el problema"

Figura 81

Estudiante 9, Etapa 4-Pregunta 1, Actividad 4, respuestas codificadas con "uno"



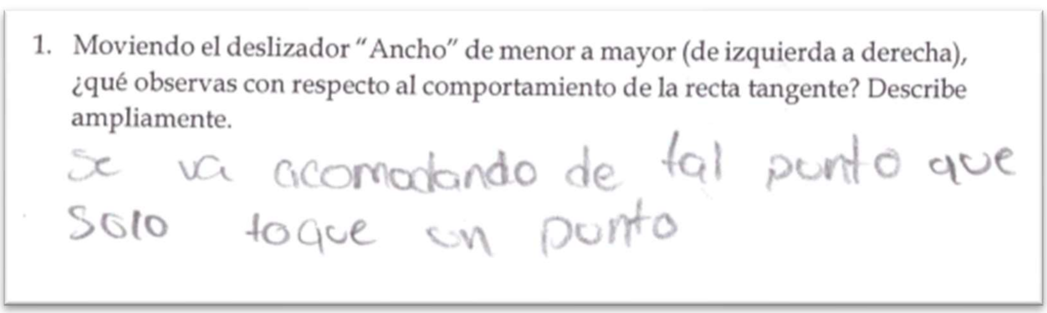
1. Moviendo el deslizador "Ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

la tangente va bajando hasta llegar a un punto máximo, después vuelve a subir

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "la tangente va bajando hasta llegar a un punto máximo, después vuelve a subir"

Figura 82

Estudiante 3, Etapa 4-Pregunta 1, Actividad 4, respuestas codificadas con "cero"



1. Moviendo el deslizador "Ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

Se va acomodando de tal punto que solo toque un punto

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Se va acomodando de tal punto que solo toque un punto"

Si el estudiante obtuviera en tres de las cinco actividades, un puntaje de 2, se le asignaría un nivel "Alto" de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

Si el estudiante obtuviera en tres de las cinco actividades un puntaje de 0 (sobre la pregunta 1) se asigna un nivel "Bajo" de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

El resto de los estudiantes se les asignaría un nivel "Medio" de promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

Bajo esta mira, tenemos que dos estudiantes obtuvieron un nivel "Alto"; 11 estudiantes obtuvieron un nivel "Medio" y siete estudiantes obtuvieron un nivel "Bajo" de la promoción de la conversión de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica.

En la Figura 83, Figura 84 y Figura 85, se muestra un ejemplo de cada una de estas categorías:

Figura 83

Gráfica del estudiante 17, nivel "Alto"

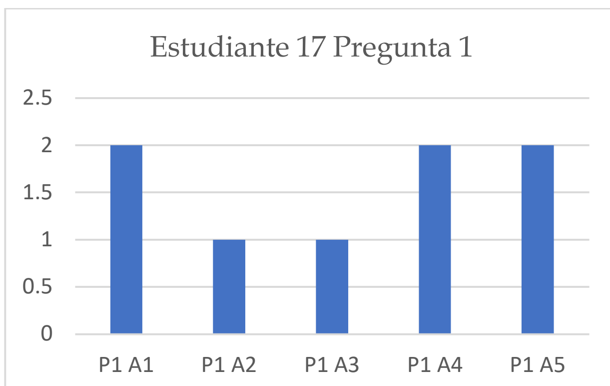


Figura 84

Gráfica del estudiante 11, nivel "Medio"

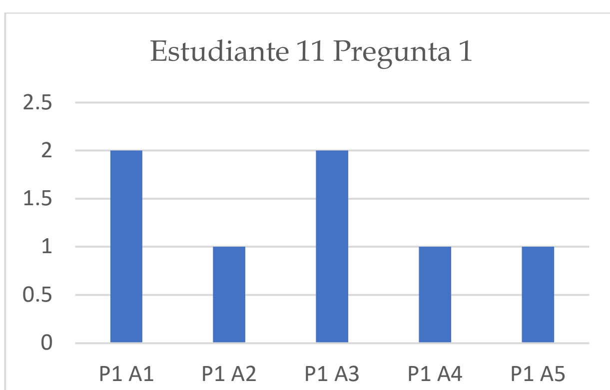
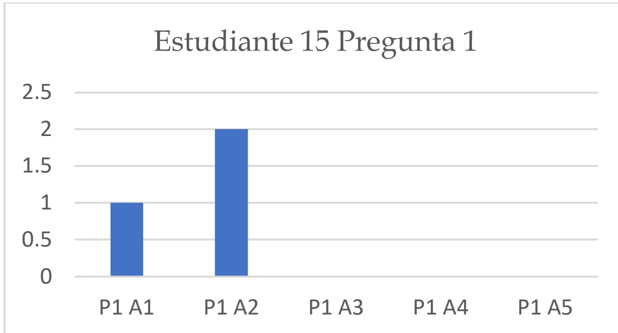


Figura 85

Gráfica del estudiante 15, nivel "Bajo"



Etapa 5

Esta etapa tiene como objetivo que el estudiante comprenda el significado de la derivada de una función cuando ésta es evaluada en cierto punto. Se pretende que el estudiante comprenda el significado de tener la derivada de una función igualada a cero y lo que se obtiene al momento de solucionar dicha ecuación.

Pregunta 4 y 5

Aquí se cuestiona al estudiante sobre el significado de expresiones como:

$$f'(28) = 5.5 \text{ y } f'(x) = 0$$

Recordemos que, como mencionamos anteriormente, para nosotros son unas de las preguntas más relevantes ya que el hecho de dar una respuesta conforme a los indicadores nos mostraría que en el estudiante se ha promovido la conversión de la representación algebraica a la verbal y gráfica y con ello ha comprendido que el valor de x que genera un máximo o un mínimo, y por ende resuelve un problema de optimización, cumple con la característica de que al ser evaluado en la función derivada, da cero, es decir, que la pendiente de la recta tangente a la curva siempre es cero en los valores de x que producen máximos y mínimos.

Estas preguntas se codificaron solamente con base en dos indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

Pregunta 4:

- se asignó a los estudiantes un "uno" cuando mencionaban que, por ejemplo, para la expresión $f'(h) = p$, p era el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en x=h.
- se asignó un valor de "cero" cuando el estudiante proporcionaba alguna otra respuesta.

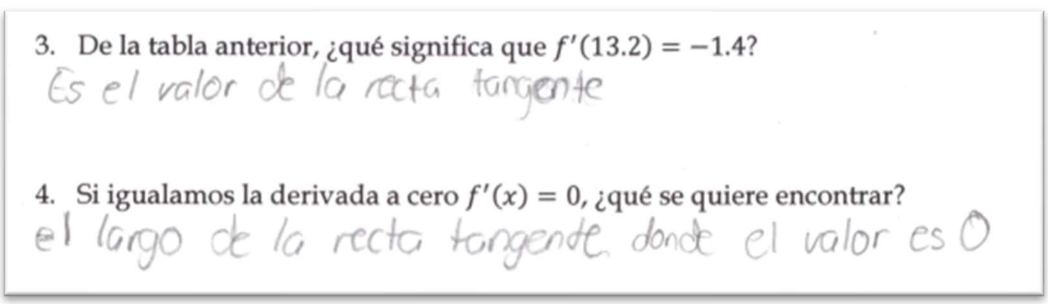
Pregunta 5:

- se asignaba un "uno" cuando el estudiante mencionaba que, para la expresión $f'(x) = 0$, se pretende encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (pudiendo hacer referencia a una recta con pendiente cero o no).
- se asignaba un "cero" cuando el estudiante proporciona alguna otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la Figura 86 y Figura 87:

Figura 86

Estudiante 6, Etapa 5-Preguntas 4 y 5, Actividad 2, respuestas codificadas con "cero"



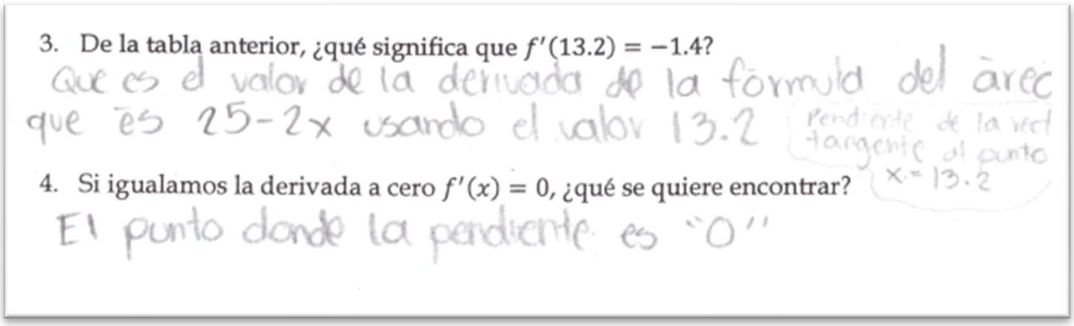
3. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(13.2) = -1.4$?
Es el valor de la recta tangente

4. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?
el largo de la recta tangende donde el valor es 0

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Es el valor de la recta tangente / el largo de la recta tangente donde el valor es 0"

Figura 87

Estudiante 13, Etapa 5-Preguntas 4 y 5, Actividad 2, respuestas codificadas con "uno”


3. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(13.2) = -1.4$?

Que es el valor de la derivada de la fórmula del área que es 25-2x usando el valor 13.2 (Pendiente de la recta tangente al punto x = 13.2)

4. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

El punto donde la pendiente es "0"

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “Que es el valor de la derivada de la fórmula del área que es $25 - 2x$ usando el valor 13.2 (pendiente de la recta tangente al punto $x = 13.2$) / El punto donde la pendiente es 0”

Se decidió que cuando un estudiante obtuviera en tres o más de las cinco actividades (de cada pregunta, 4 y 5) un puntaje de 1, se concluiría que si existe la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular en el estudiante. En caso contrario se concluiría que no existe la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular en el estudiante.

Bajo esta mira, tenemos en la pregunta 4, 10 de los 20 estudiantes si manifestaron la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular; el resto, 10, no lo hicieron.

Respecto a la pregunta 5, 7 de los 20 estudiantes si manifestaron la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular; el resto, 13, no lo hicieron.

Ejemplo del Estudiante 10, en la pregunta 4 manifestó la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular, pero en la pregunta 5 no.

Figura 88

Gráfica del estudiante 10

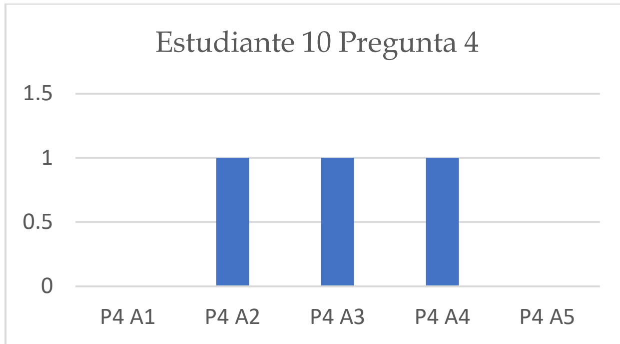
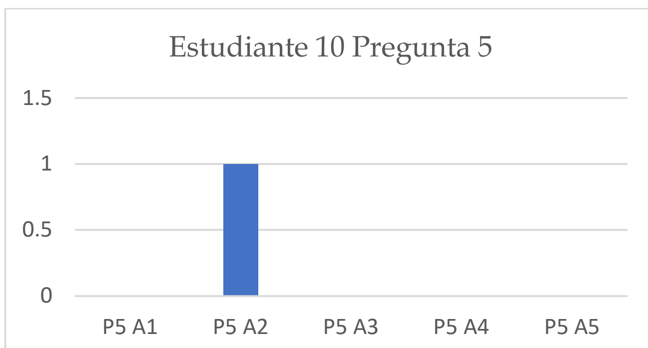


Figura 89

Gráfica del estudiante 10



Ejemplo del Estudiante 13, manifestó la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular.

Figura 90

Gráfica del estudiante 13

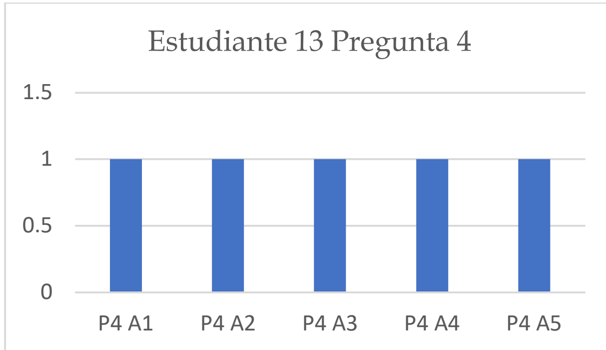
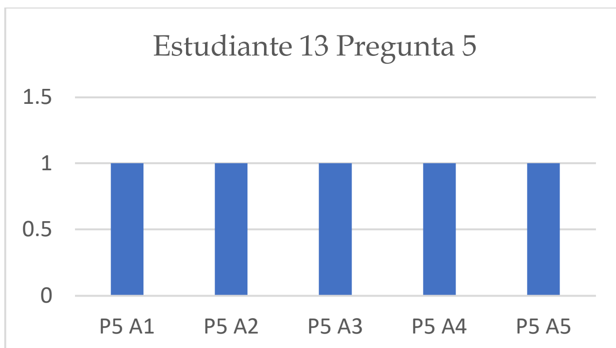


Figura 91

Gráfica del estudiante 13



Ejemplo del Estudiante 3, no manifestó la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación verbal-tabular.

Figura 92

Gráfica del estudiante 3

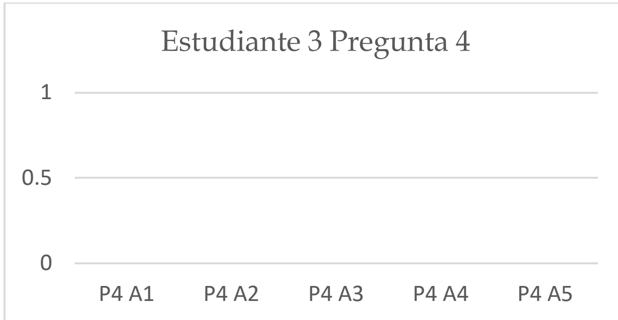
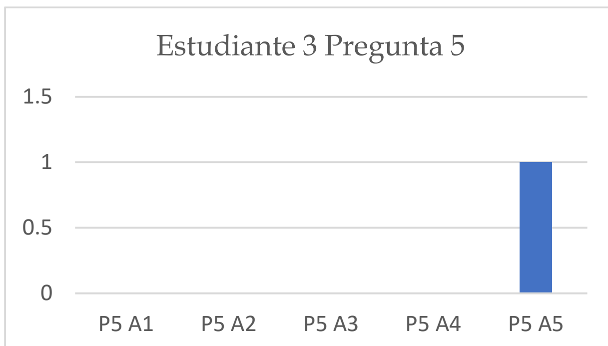


Figura 93

Gráfica del estudiante 3



Pregunta 12

En esta pregunta se espera que el estudiante brinde el valor correcto de x, junto con las demás dimensiones del problema que proporcionan el máximo o el mínimo solicitado, lo cual arrojaría indicios de que reconoce que el valor que produce el máximo o mínimo, es la solución de la derivada de la función igualada a cero.

Estas preguntas se codificaron solamente con base en dos indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

Pregunta 12:

- se asignó a los estudiantes un "uno" cuando brindaban correctamente los valores solicitados.

- se asignó un valor de “cero” cuando el estudiante proporcionaba valores incorrectos a los solicitados.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la Figura 94 y Figura 95:

Figura 94

Estudiante 7, Etapa 5-Preguntas 12, Actividad 3, respuestas codificadas con "cero”

11. Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que **MINIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
3.83	46.03	24.06	12.032	1107.69	1131.75

Figura 95

Estudiante 8, Etapa 5-Preguntas 12, Actividad 3, respuestas codificadas con "uno”

11. Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que **MINIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
3.85	7.62	24.19	46.56	184.32	277.54

Se decidió que cuando un estudiante obtuviera en tres o más de las cinco actividades un puntaje de 1, se concluiría que si existe la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación tabular en el estudiante. En caso contrario se concluiría que no existe la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación tabular en el estudiante.

Bajo esta mira, tenemos que 19 de los 20 estudiantes si manifestaron la existencia de la promoción de la conversión de la representación algebraica a la representación tabular; el resto, uno, no lo hizo.

Figura 96

Gráfica del estudiante 6

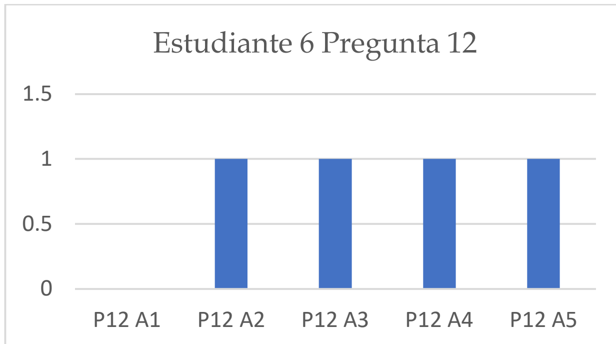
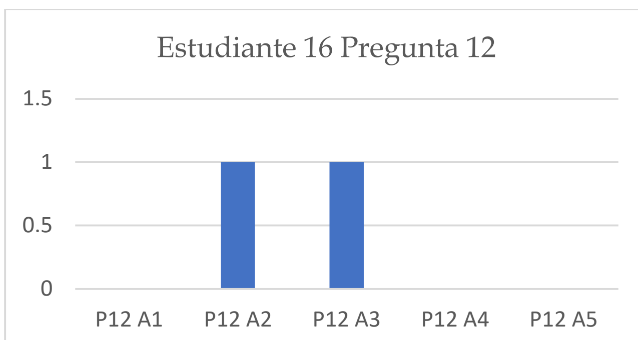


Figura 97

Gráfica del estudiante 16



Preguntas Finales

Al final de cada una de las actividades se agregaron preguntas reflexivas con las que se pretende mostrar que en el estudiante se promovieron conversiones entre la representación algebraica y la representación verbal.

En la Actividad 1 y Actividad 3 se les pregunta (Pregunta 1A):

> ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

Con esta pregunta se pretende promover en el estudiante una utilidad del cálculo diferencial, que de cierta manera lo valore.

Esta pregunta se codificó solamente con base en dos indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

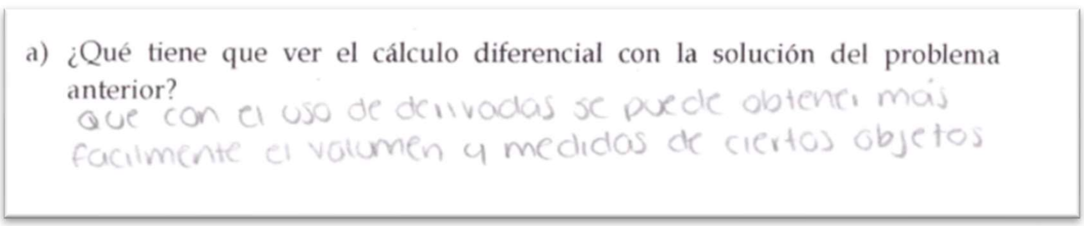
Pregunta 1A:

- Se asignó un "uno" cuando relacionaron las derivadas de las funciones como una manera de resolver los problemas de optimización.
- Se asignó un valor de "cero" cuando brindaron cualquier otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la Figura 98, Figura 99, Figura 100 y Figura 101:

Figura 98

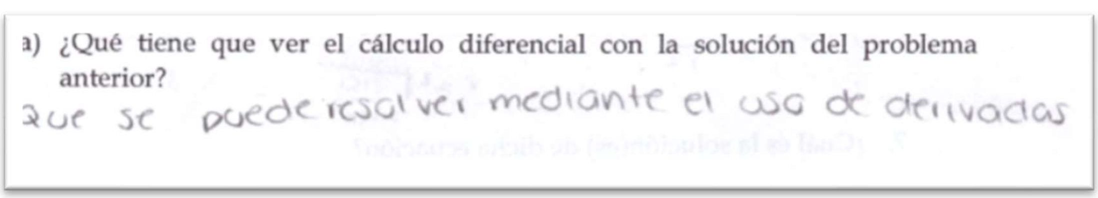
Estudiante 1, Pregunta Final 1A, Actividad 1, respuestas codificadas con "uno"


a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?
Que con el uso de derivadas se puede obtener más fácilmente el volumen y medidas de ciertos objetos

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Que con el uso de derivadas se puede obtener más fácilmente el volumen y medidas de ciertos objetos"

Figura 99

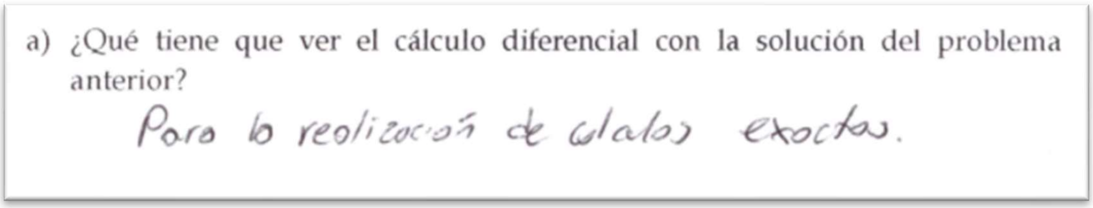
Estudiante 1, Pregunta Final 1A, Actividad 3, respuestas codificadas con "uno"


a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?
Que se puede resolver mediante el uso de derivadas

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Que se puede resolver mediante el uso de derivadas"

Figura 100

Estudiante 5, Pregunta Final 1A, Actividad 1, respuestas codificadas con "cero”

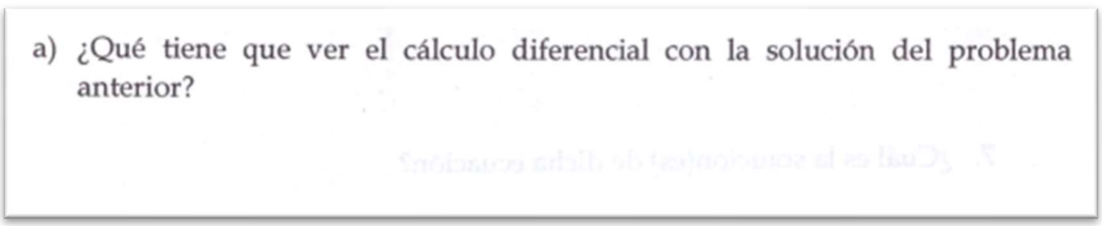

a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

Para la realización de calculos exactos.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: “Para la realización de cálculos exactos”

Figura 101

Estudiante 5, Pregunta Final 1A, Actividad 3, respuestas codificadas con "cero”


a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

Nota: No hubo respuesta escrita del estudiante

Si el estudiante obtuviera en dos de las dos actividades (Actividad 1 y Actividad 3), un puntaje de uno, se le asignaría un nivel “Alto” de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Si el estudiante obtuviera en uno de las dos actividades un puntaje de 1 (Actividad 1 y Actividad 3) se asigna un nivel “Medio” de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Si el estudiante obtuviera en dos de las dos actividades un puntaje de 0 (Actividad 1 y Actividad 3) se asigna un nivel “Bajo” de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Bajo esta mira, tenemos que cinco estudiantes obtuvieron un nivel “Alto”; siete estudiantes obtuvieron un nivel “Medio” y ocho estudiantes obtuvieron un nivel “Bajo” de la promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Figura 102

Gráfica del estudiante 2, nivel "Alto"

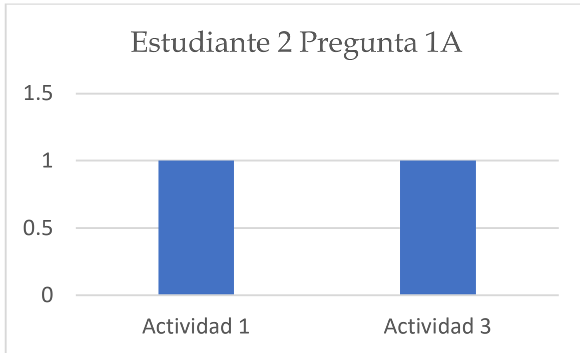


Figura 103

Gráfica del estudiante 3, nivel "Medio"

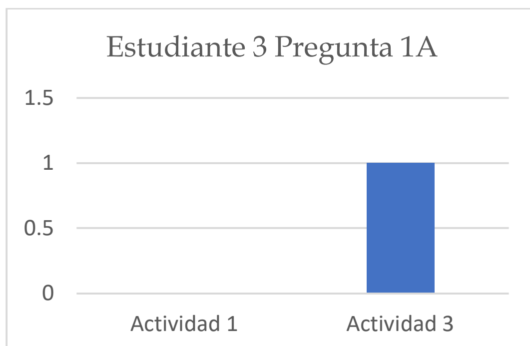


Figura 104

Gráfica del estudiante 5, nivel "Bajo"

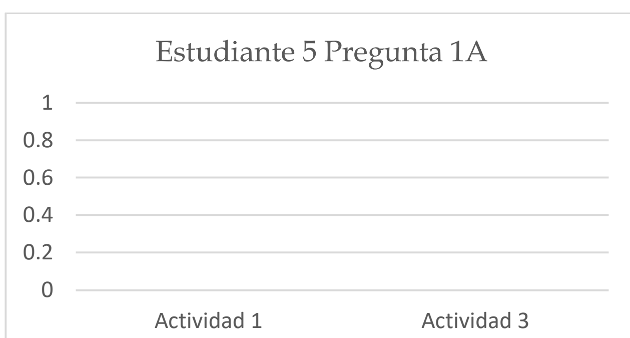
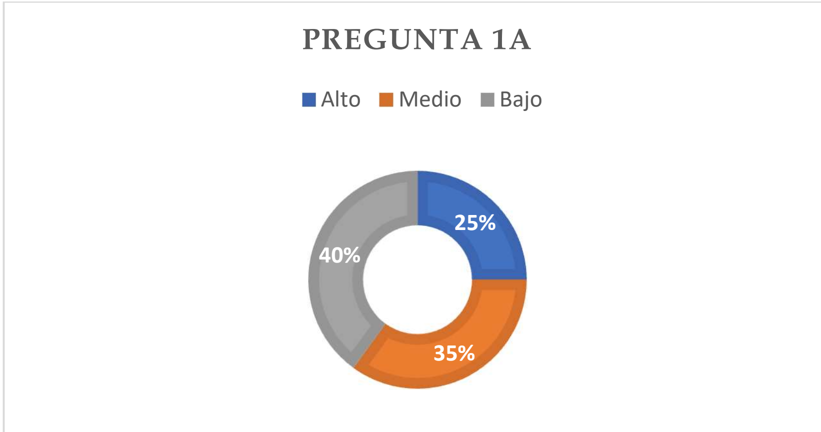


Figura 105

Gráfica de la pregunta 1A



En la Actividad 1, Actividad 2 y Actividad 3 se pregunta (Pregunta 1B):

Sin GeoGebra, ¿cómo crees que se resolvería este problema de optimización?

Al hacer esta pregunta, se busca que el estudiante relacione la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero.

Esta pregunta se codificó con base en tres indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

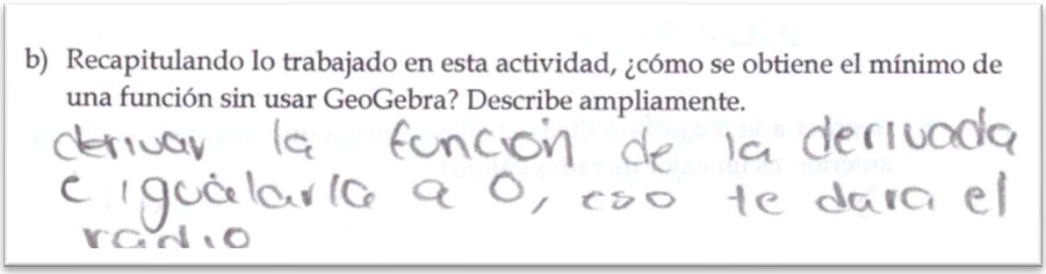
Pregunta 1B:

- se asignó a los estudiantes un "dos" si relacionaban la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero.
- se asignó un "uno" a los estudiantes que relacionaban la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas.
- se asignó un "cero" a los estudiantes que brindaron cualquier otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la Figura 106, Figura 107 y Figura 108:

Figura 106

Estudiante 3, Pregunta Final 1B, Actividad 3, respuestas codificadas con "dos"

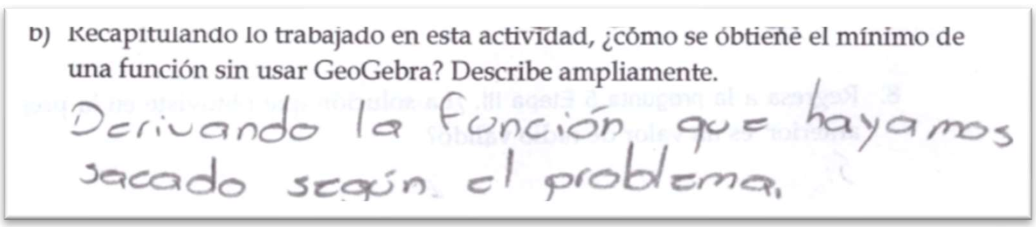

b) Recapitulando lo trabajado en esta actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.

derivar la funcion de la derivada e igualarla a 0, eso te dara el radio

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "derivar la función de la derivada e igualarla a 0, eso te dará el radio"

Figura 107

Estudiante 4, Pregunta Final 1B, Actividad 3, respuestas codificadas con "uno"

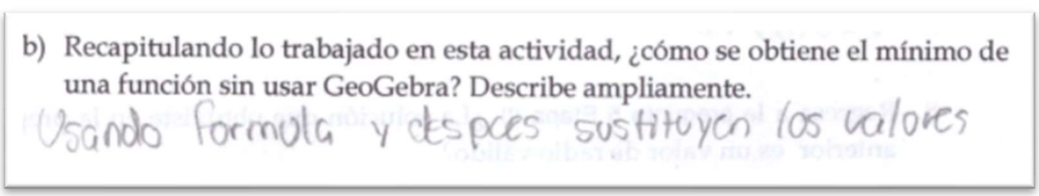

b) Recapitulando lo trabajado en esta actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.

Derivando la función que hayamos sacado según el problema.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Derivando la función que hayamos sacado según el problema"

Figura 108

Estudiante 6, Pregunta Final 1B, Actividad 3, respuestas codificadas con "cero"


b) Recapitulando lo trabajado en esta actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.

Usando formula y despues sustituyen los valores

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Usando formula y después sustituyendo los valores"

Si el estudiante obtuviera en dos o más de las tres actividades (Actividad 1, Actividad 2 y Actividad 3), un puntaje de dos, se asigna un nivel "Alto" de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Si el estudiante obtuviera en dos o más de las tres actividades un puntaje de 0 (Actividad 1, Actividad 2 y Actividad 3) se asigna un nivel "Bajo" de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal. Todos los demás casos se consideran en un nivel "Medio".

Bajo esta mira, tenemos que dos estudiantes obtuvieron un nivel "Alto"; nueve estudiantes obtuvieron un nivel "Medio" y nueve estudiantes obtuvieron un nivel "Bajo" de la promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Figura 109

Gráfica del estudiante 12, nivel "Alto"

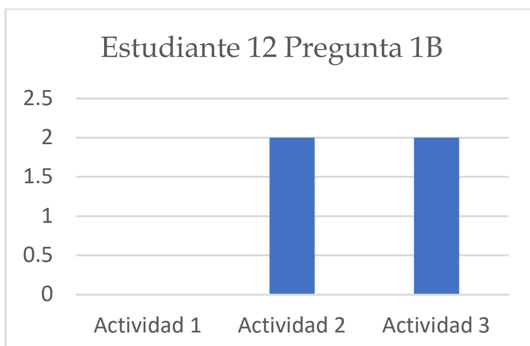


Figura 110

Gráfica del estudiante 17, nivel "Medio"

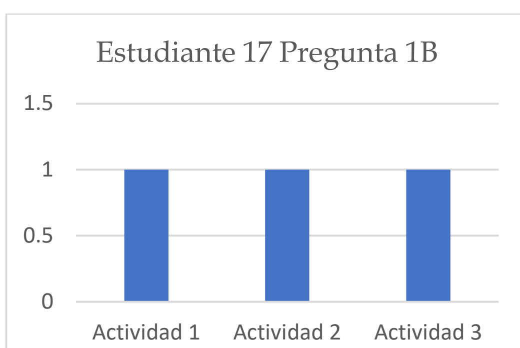


Figura 111

Gráfica del estudiante 16, nivel "Bajo"

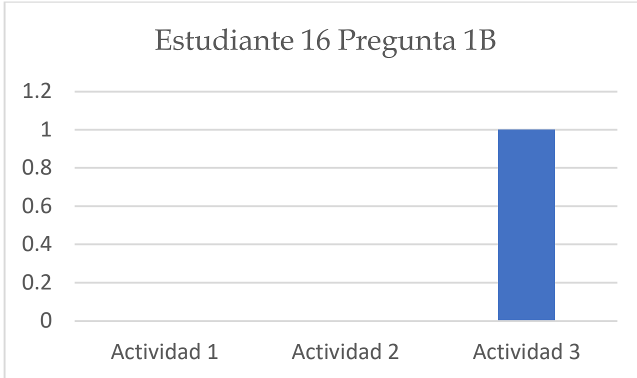
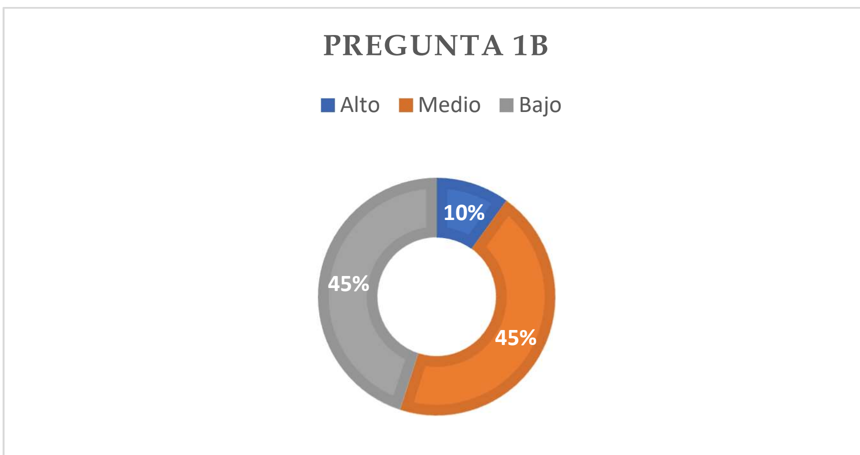


Figura 112

Gráfica de la pregunta 1B



En la Actividad 4 y Actividad 5 se les pregunta (Pregunta 1C):

¿Qué pasos (procesos) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.

Con esta pregunta se espera que los estudiantes muestren si se formaron un criterio de solución de dichos problemas; si identifica como importante lo que nosotros quisiéramos que identificara de esta manera o si la solución de estos problemas le sigue resultando complicada, desorganizada y con ello demuestren una carencia de sentido de estudiar cálculo diferencial.

Esta pregunta se codificó con base en tres indicadores los cuales se recuerdan a continuación:

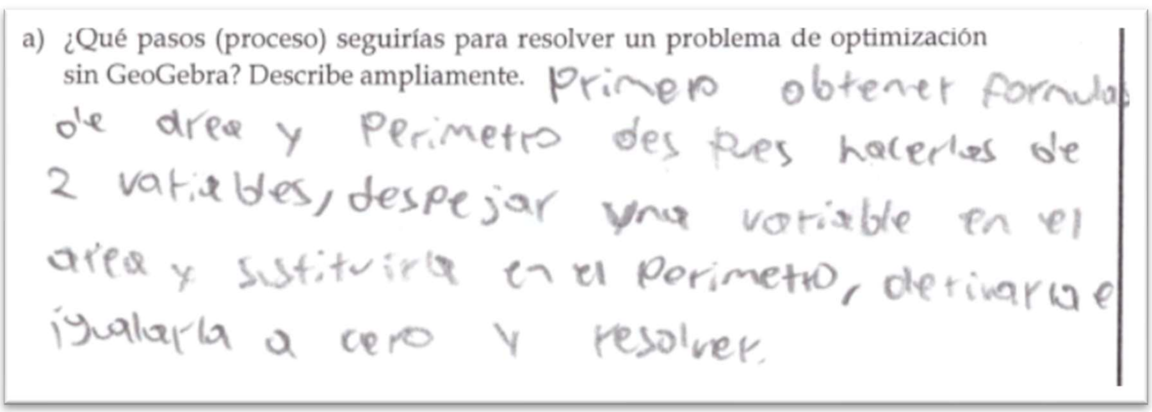
Pregunta 1C:

- se asignó a los estudiantes un "dos" cuando brindaron una descripción básica y completa del Teorema de Fermat.
- se asignó un "uno" cuando brindaron una descripción básica e incompleta del Teorema de Fermat.
- Se asignó un "cero" cuando el estudiante brindó alguna otra respuesta.

Ejemplos de cada una de los tipos de respuestas se presenta en la :

Figura 113

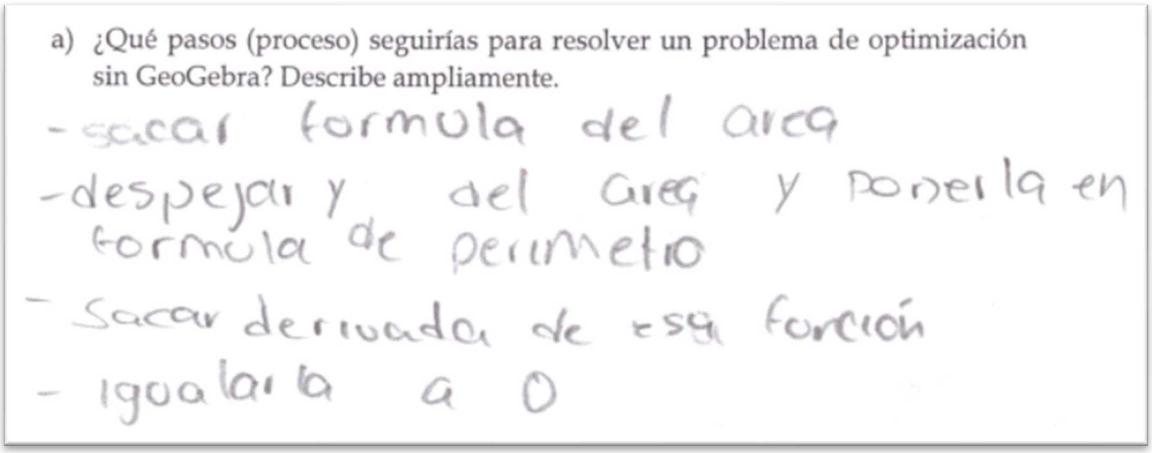
Estudiante 12, Pregunta Final 1C, Actividad 4, respuestas codificadas con "dos"


a) ¿Qué pasos (proceso) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente. Primero obtener formulas de área y Perimetro des pues hacerlas de 2 variables, despejar una variable en el área y sustituirla en el Perimetro, derivarla e igualarla a cero y resolver.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "Primero obtener formula de área y perímetro después hacerlas de 2 variables, despejar una variable en el área y sustituirla en el perímetro, derivar e igualarla a cero y resolver"

Figura 114

Estudiante 3, Pregunta Final 1C, Actividad 4, respuestas codificadas con "uno"



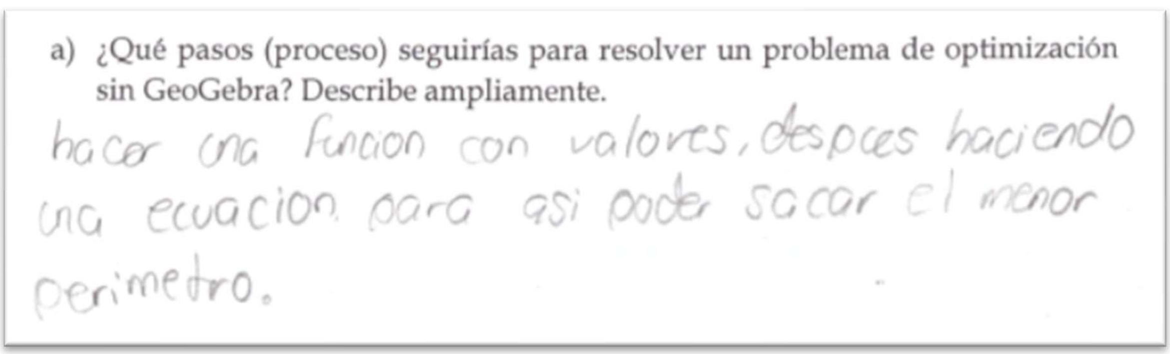
a) ¿Qué pasos (proceso) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.

-sacar formula del area
-despejar y del area y ponerla en formula de perimetro
- Sacar derivada de esa función
- igualarla a 0

Nota: Transcripción del texto de la imagen: "-sacar formula del área -despejar y del área y ponerla en formula de perímetro -sacar derivada de esa función -igualarla a 0"

Figura 115

Estudiante 6, Pregunta Final 1C, Actividad 4, respuestas codificadas con "cero"



a) ¿Qué pasos (proceso) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.

hacer una funcion con valores, despues haciendo una ecuacion para asi poder sacar el menor perimetro.

Nota: Transcripción del texto de la imagen: hacer una función con valores, después haciendo una ecuación para así poder sacar el menor perimetro"

Si el estudiante obtuvo:

Actividad 4	Actividad 5	
2	2	Alto
2	1	Alto
1	2	Alto
2	0	Medio
0	2	Medio
1	1	Medio
1	0	Bajo
0	1	Bajo
0	0	Bajo

de promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Bajo esta mira, tenemos que seis estudiantes obtuvieron un nivel "Alto"; ocho estudiantes obtuvieron un nivel "Medio" y seis estudiantes obtuvieron un nivel "Bajo" de la promoción de la conversión de la representación algebraica a verbal.

Figura 116

Gráfica del estudiante 11, nivel "Alto"

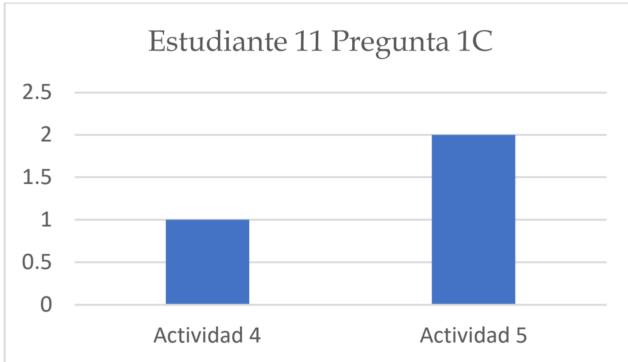


Figura 117

Gráfica del estudiante 4, nivel "Medio"

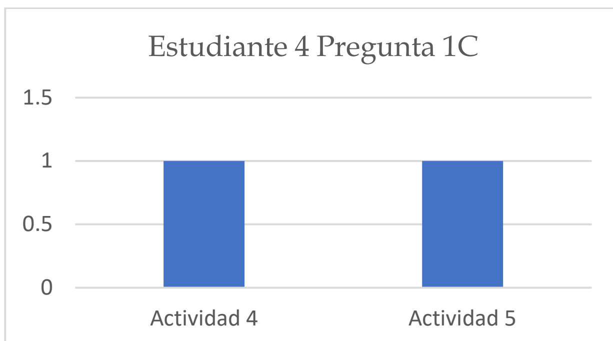


Figura 118

Gráfica del estudiante 2, nivel "Bajo"

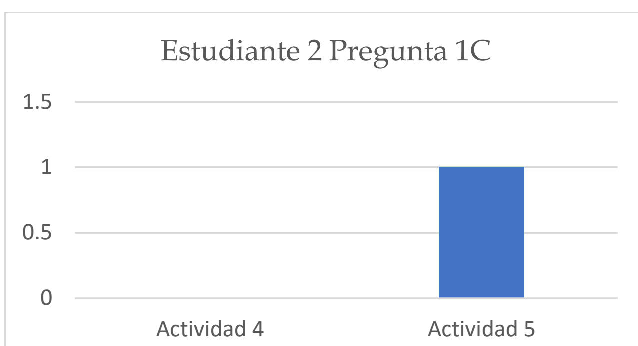
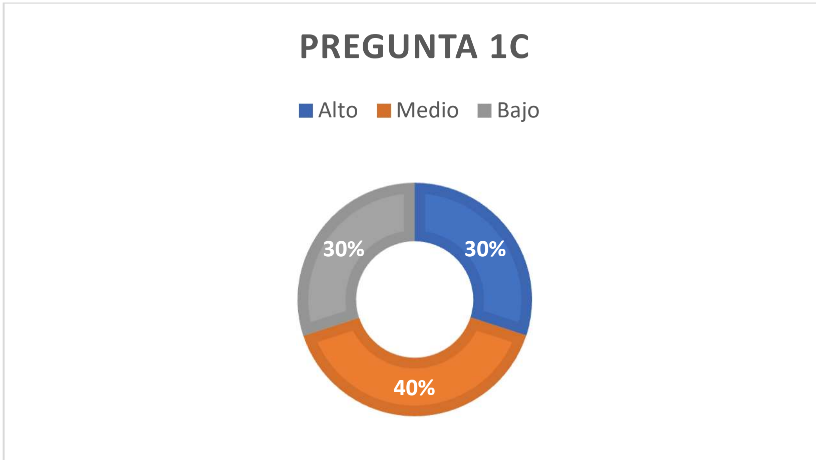


Figura 119

Gráfica de la pregunta 1C



7. Conclusiones Finales y Reflexión de la práctica docente

Después del análisis anterior, consideramos que una manera con la que puede ser concebida una secuencia didáctica para promover la aprehensión y significado del tema de máximos y mínimos en problemas de optimización es la estructurada en el presente trabajo.

Cuando nos damos a la tarea de estudiar el cómo se han venido haciendo las cosas desde hace décadas y el cómo esa manera de proceder ha marcado a generaciones de estudiantes, es cuando se busca que las cosas cambien y en este caso, gracias a la Matemática Educativa y en particular a la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, el docente puede ser capaz de repensar la manera de presentar el contenido matemático, con actividades novedosas que buscan impactar a los estudiantes.

De acuerdo con el objetivo que nos propusimos, consideramos que éste se cumplió, ya que se diseñó una secuencia de actividades en GeoGebra con la cual se promovieron los procesos de conversión entre diferentes representaciones semióticas a través de la solución de problemas de optimización en alumnos de bachillerato. Más aún, se logró promover significados de los problemas de optimización en los estudiantes ya que, resolviendo cinco problemas de la vida cotidiana, los estudiantes lograron en buena parte darse cuenta de que las matemáticas "sirven para algo" y no solo eso, sino que en particular la derivada y en nuestro caso el Teorema de Fermat "valen la pena" de ser estudiados ya que resultan herramientas que posibilitan resolver problemas de una manera más "rápida y directa".

Por otro lado, bajo la premisa de Duval (1998) en donde la "coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos" (p. 176), cabe mencionar que los alumnos participantes en esta propuesta lograron una aprehensión de los conceptos involucrados en el estudio de los problemas de optimización ya que muestran evidencia de la coordinación entre registros que experimentaron. La gran mayoría logró transitar entre dos o más representaciones propuestas y con ello lograron resolver problemas de máximos y mínimos.

Del análisis realizado de las cinco etapas y las tres preguntas de confirmación se observa que los estudiantes, en su mayoría, no tuvieron dificultades para transitar de la representación pictórica a la representación verbal (Pregunta 1, Etapa 1) (80% nivel alto y 20% nivel medio); de la representación pictórica a la representación tabular y de la representación tabular a la representación algebraica (Pregunta 2, Etapa 1) (40% nivel alto, 45% nivel medio y 15% nivel bajo); de la representación gráfica a la representación verbal (Pregunta 1, Etapa 2) (80% nivel medio y 20% nivel bajo); de la representación gráfica-tabular a la representación verbal (Preguntas 3 y 4, Etapa 2) (95% nivel medio y 5% nivel bajo); de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica (Pregunta 5, Etapa 3) (30% nivel alto, 70% nivel medio) y de la representación gráfica a la representación verbal-algebraica (Pregunta 1, Etapa 4) (10% nivel alto, 55% nivel medio y 35% nivel bajo).

Se puede ver que los estudiantes mostraron algo de dificultad en las siguientes promociones: de la representación gráfica-tabular a la representación verbal (Pregunta 13, Etapa 2) (5% nivel medio, 95% nivel bajo) y de la representación gráfica-pictórica a la representación verbal (Pregunta 6, Etapa 3) (40% nivel alto, 10% nivel medio y 50% nivel bajo). Nótese que, en estas conversiones, el nivel bajo prevaleció o igualó a la suma de los niveles medios y altos.

Existieron preguntas que no mostraron el nivel de promoción de cierta conversión, sino que solo nos mostraron si cierta conversión estuvo presente o no; dichas conclusiones se muestran enseguida: existencia de la promoción de la representación verbal a la representación algebraica (Pregunta 6, Etapa 2) (en 80% de los estudiantes sí, en 20%no) (Pregunta 7, Etapa 2) (en 100%de los estudiantes sí); de la representación gráfica a la representación verbal (Pregunta 9 y 11, Etapa 2) (en 100% de los estudiantes sí), (Pregunta 10, Etapa 2) (en 25% de los estudiantes sí, en 75% no); de la representación pictórica-gráfica a la representación verbal (Pregunta 4, Etapa 3) (en 45% delos estudiantes sí, en 55% no); de la representación algebraica a la representación verbal-tabular (Pregunta 4, Etapa 5) (en 50% de los estudiantes sí, en 50% no) (Pregunta 5, Etapa 5) (en 35% de los estudiantes sí, en 65% no) y por último de la representación algebraica a la representación tabular (Pregunta 12, Etapa 5) (en 95%de los estudiantes sí, en 5% no).

Respecto de las preguntas de confirmación se observa que en la pregunta 1A:

¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

el 25% de los estudiantes obtuvo un nivel alto, mientras que el 35% un nivel medio y el 40% un nivel bajo. Considerando a los estudiantes que obtuvieron nivel alto y medio (60%), podemos afirmar que la mayoría contestó que el cálculo nos sirve para resolver problemas de optimización.

A la pregunta:

Sin GeoGebra, ¿cómo crees que se resolvería este problema de optimización?

el 10% de los estudiantes se encontró en un nivel alto, el 45% en un nivel medio y el 45% en un nivel bajo. Por último, en la pregunta:

¿Qué pasos (procesos) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra?

el 30% de los estudiantes se clasificó en un nivel alto, el 40% en un nivel medio y el 30% en un nivel bajo. Considerando a los estudiantes que obtuvieron nivel alto y medio (70%), logramos corroborar que los estudiantes se formaron un criterio de solución de problemas de optimización.

Es importante mencionar que conforme fue avanzando la aplicación del diseño, los alumnos fueron desprendiéndose cada vez más de la tecnología, respondiendo ya de manera automática y siguiendo la lógica, pues consideramos que fue muy ventajoso que los problemas tuvieran la misma estructura en general.

Otro factor que consideramos importante mencionar es que la aplicación del diseño fue justamente en los tiempos que el docente-investigador tenía programado para impartir el tema de máximos y mínimos por lo que, con esto se abona al objetivo relacionado con el aportar a la comunidad de docentes que imparten la materia una propuesta distinta a la clásica y con uso de tecnología y evidenciar la decisión de que este trabajo se estructura como una práctica de desarrollo profesional.

Más aún, con este trabajo ponemos de manifiesto que es posible incorporar la tecnología y las diversas representaciones e innovar con propuestas didácticas que permitan al alumno aprender, construyendo su propio conocimiento. Coincidimos con Malaspina (2004) en el sentido de que damos mucha importancia a los problemas de optimización por ser una actividad natural en el hombre y en la vida cotidiana ya que frecuentemente estamos resolviendo o tratando de resolver problemas de optimización y en ese sentido este trabajo aporta una propuesta innovadora que permite abarcar este tema en los tiempos marcados en los programas de bachillerato. De igual forma, con este trabajo atendemos la crítica que hacen Ríos y Monserrat (2007) en el sentido de que generalmente el tema se aborda bajo un esquema algorítmico o de mecanización de solución de problemas. En nuestro diseño se consideró incluir actividades que permitieran al estudiante diferenciar entre el dominio de la función en general y el dominio que atendía al contexto del problema, ya que esta es una problemática reportada por Moreno y Cuevas (2004) evitando con esto que el alumno diera respuestas inverosímiles.

Por último, se debe mencionar que se optó por trabajar con problemas geométricos ya que esto permite conectar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en materias anteriores (como Geometría) con los problemas de optimización.

Como reflexión personal sobre este programa de posgrado, me gustaría resaltar lo bien organizado que está y la facilidad que nos brindó la planta docente para poder desarrollarnos adecuadamente, primero, impartiendo clases pertinentes, segundo, obligándome a ser bueno redactor y plasmar correctamente mis ideas al momento de escribirlas y exteriorizarlas a los demás, mediante la lectura de investigaciones en el área, la entrega de trabajos escritos y posteriormente las presentaciones a mis compañeros.

Asistir como ponente o asistente a diversos congresos, coloquios y eventos de investigación en el área de la Matemática Educativa y la docencia en general, fueron de gran ayuda para mi desarrollo profesional pues me permitieron estar en contacto con compañeros de profesión y con investigadores de toda la República Mexicana, además de que, éste contacto, me hizo darme cuenta de mi realidad y de cómo se vive la docencia en matemáticas en otros lados, reflexionar sobre las carencias y privilegios con las que cuento en mi zona y así potencializar mi desarrollo profesional.

En particular, fue gracias a la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática (AMIUTEM) que me decidí por realizar este trabajo de investigación, ya que en uno de sus seminarios realizado en la ciudad de Zacatecas tuve la oportunidad observar más de cerca cómo se trabaja con la tecnología y, más aún, con el GeoGebra.

Este programa de maestría superó mis expectativas pues, como el nombre lo dice, es una maestría profesionalizante en todos los sentidos; gracias a él logré dominar competencias docentes y aplicarlas en mi entorno profesional, aplicando mucho de lo aprendido y estando en constante formación.

8. Referencias

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5,* 25-45. Recuperado de http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/visualizacio/arcavi_computer.pdf

Boers-Van Oosterum, M. (1990). *Understanding of Variables and Their uses Acquired by Students in Traditional and Computer-Intensive Algebra*. Tesis de doctorado, Universidad de Maryland College Park. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/749716

Dunham, P. y Dick, T. (1994). Research on Graphing Calculators. *Mathematics Teacher, 87(6)*,

440-445.

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fey, J. (1989). Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics 20*, 237-272.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática*, 2(3), 09-41.

Gatica, N. y Maz-Machado, A. (2012). Estudio de inecuaciones de dos variables. España, F. y Sepúlbeda, B. (eds.). *Actas del XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Diversidad y matemáticas"*.Thales. Recuperado de: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://funes.uniandes.edu.co/21650/1/Gatica2012Estudio.pdf

Granville, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Limusa.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2),* 213-223. Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Hitt, F. y González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The Acodesa (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88(1)*, 201-219.

Larson, R. y Edwards, B. (2005). *Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial McGraw Hill.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511609268

López, A. (2008). Propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, un acercamiento visual con GeoGebra. *ALME, 21*, 1166-1175.

Malaspina, U. (2004). Problemas de optimización y pensamiento matemático. *ALME, 17*, 931-936. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Relime, 10(3),* 365-399.

McFarlane, A. (2001). El aprendizaje y las tecnologías de la información. Experiencias, promesas y posibilidades. Madrid: Aula XXI, Santillana.

McFarlane, A. Bonnett, M. y Williams, J. (2000). Assessment and Multimedia Authoring - A Technology for Externalising Understanding and Recognising Achievment. *Journal of Computer Assisted Learning, 16,* 201-212.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación matemática, 16(2)*, 93-104. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16-2.pdf

Ortiz, A. y Arias, R. (2012). GeoGebra como herramienta para la Enseñanza de la Matemática: Resultados de un curso de capacitación. *VIII Festival Internacional de Matemática.* Recuperado de http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Andres-Ortiz.pdf

Purcell, E. Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo*. Editorial Pearson.

Ríos, J. y Monserrat, F. (2007). Incursión en el ámbito de las dos variables: Optimización usando argumentos gráficos. *SUMA, 54*, 23-29. Recuperado de https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/54/023-029.pdf

Rivera, P. (2010). *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por alumnos de segundo grado de educación secundaria a través del uso de GeoGebra.* Tesis maestría inédita. Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Rogoff, B. y Lave, J. (1984). *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*. Harvard University Press.

Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving Within a Spreadsheet Environment. Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Londres, Boston. *Kluwer Academic Editores.*

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación, 33.* Recuperado de https://rieoei.org/historico/documentos/rie33a07.PDF

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Editorial CENGAGE Learning.

Swokowski, E. (1998). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Latinoamericano.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. *Bishop A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education,* 289-325. Recuperado de https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf

Tomás, F. (2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *SUMA, 40*, 87-90. Recuperado de https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/40/087-090.pdf

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*. Harvester Wheatsheaf

9. Anexos

Anexo 1: Actividades

Actividad 1
Tema: Optimización
Materia: Cálculo Diferencial
Docente: Erick del Refugio de Lira Lozano

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

Nombre: ____

Semestre: _________________________ Edad: __________________ Género: ______________

PROBLEMA

Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 cm de largo por 10 cm de ancho. Se cortan cuadrados idénticos sobre las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura. Determine las **dimensiones de los cortes** que harían que la caja tenga un **volumen máximo**. ¿Cuál sería este volumen?

Figura 1

INSTRUCCIONES: Abre el Programa Caja, en él se muestra el problema descrito anteriormente. Explora el programa y responde las siguientes cuestiones.

ETAPA I

En vista gráfica 1 (izquierda) puedes observar la lámina de cartón vista desde arriba, en vista 3D (derecha) puedes observar la caja que se forma en tres dimensiones.

1. ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "Corte"?

Vista 1:

Vista 3D:

2. Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:
(*Sugerencia: Llena la tabla en orden, es decir, que los tamaños del corte sean ascendentes*)

Corte (cm)	Dimensiones de la caja			Volumen (cm^3)
	Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)	
0.4	9.2	23.2	0.4	85.376
2				
4.4				
x		$24-2x$		

Tabla 1

¡¡Nota que los tamaños del corte son todos positivos!!

3. Con base en la tabla anterior, ¿para qué valor del corte se obtendría el **MAYOR** volumen en la caja?

4. ¿Cuál es ese volumen?

5. ¿Qué dimensiones tiene esa caja?

   Ancho:

   Largo:

   Alto:

6. Compara tu resultado con los otros equipos. ¿Coinciden sus valores de corte y de volumen máximo?

7. ¿A qué crees que se deba eso?

ETAPA II

Cierra la vista 3D. Da clic en el menú vista y activa la vista gráfica 2. Mueve el deslizador y observa. En caso de que no se observe la gráfica completa haz zoom.

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

2. ¿Qué sucede con el punto sobre la gráfica cuando mueves el deslizador "Corte"?

3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

5. Con base en tus respuestas anteriores (Tabla 1), dado un valor "x" del corte como expresarías algebraicamente:

    a) Largo

    b) Ancho

    c) Altura

    d) Volumen

Nota que todas las expresiones anteriores están dadas en términos de "x", es decir, ¡en términos de una sola variable!

6. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MAYOR** volumen que puede tener la caja?

7. ¿Por qué? Explica ampliamente.

8. ¿Cuál es el valor del corte del **MAYOR** volumen?

9. Comparando tu respuesta con la que diste en la etapa anterior (pregunta 4 Etapa I) ¿el **MAYOR** volumen fue el mismo en ambas representaciones?

10. ¿Por qué?

ETAPA III

Activa la vista de Cálculo Simbólico (CAS) desde el menú. En la primer línea se puede observar la función del volumen de la caja de nuestro problema (ver pregunta 5 Etapa II).

Marca el punto para que muestre la gráfica de la función.

Haz zoom hasta que se muestren las gráficas (verde y naranja) en pantalla y compáralas.

1. ¿Qué representa la gráfica naranja?

2. ¿Y la verde?

3. ¿Podríamos afirmar que la gráfica verde es una parte de la gráfica naranja?

4. ¿A qué crees que se deba eso?

5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el corte x? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

6. ¿Por qué?

ETAPA IV

Desactiva la gráfica naranja y cierra la vista CAS. En vista gráfica 2, activa la casilla Recta tangente.

> *Recuerda que la recta tangente es aquella recta que "toca" a una curva en un solo punto, es decir, el punto de tangencia.*

En pantalla se muestra la recta tangente (en color rojo) a la curva en un punto dado de color rojo. Contesta.

1. Moviendo el deslizador "Corte" de menor a mayor (de abajo hacia arriba), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

2. Regresando a tu respuesta del mayor volumen (pregunta 6 Etapa II) ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***antes*** de llegar a ese **MAYOR** volumen?

3. ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***después*** de pasar por ese **MAYOR** volumen?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en el **MAYOR** volumen?

ETAPA V

Recuerda que la pendiente de la recta tangente ($m_{\tan}$) a una curva en un punto (x_1) es la derivada de la función en dicho punto $f'(x_1)$, es decir, la derivada evaluado en dicho punto.

¡¡Llegó el momento de derivar!!

1. Desarrolla la función volumen (realiza los productos) que obtuviste en la pregunta 5 Etapa II y obtén su derivada.

Observa la siguiente tabla con detenimiento:

Corte (x)	Derivada evaluada en x
0.4	$f'(0.4) = 12(0.4)^2 - 136(0.4) + 240 = 187.52$
1.3	$f'(1.3) = 12(1.3)^2 - 136(1.3) + 240 = 83.48$
2.5	$f'(2.5) = 12(2.5)^2 - 136(2.5) + 240 = -25$
4	$f'(4) = 12(4)^2 - 136(4) + 240 = -112$

Tabla 2

2. Observa la vista gráfica 2 y la tabla anterior, ¿cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 0.4$?

3. ¿Y en $x = 2.5$?

4. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(1.3) = 83.48$?

5. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

6. ¿Cómo son las rectas cuya pendiente es cero?

Ahora sí, no hay de otra, ¡A ensuciarse!

7. Iguala la derivada a cero y resuelve $f'(x) = 0$. *(Sugerencia: Usa fórmula general)*

8. ¿Cuál es la solución(es) de dicha ecuación?

9. Regresa a la pregunta 5 Etapa III. ¿Las soluciones que obtuviste en la pregunta anterior son valores de corte válidos? ¿por qué?

10. Calcula el volumen de la caja con ese valor permitido de "x" que obtuviste en la pregunta anterior. *Usa la función volumen.*

11. ¿El tamaño del corte con el que obtuviste el **MAYOR** volumen (pregunta 6 Etapa II) se parece al resultado anterior?

12. Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MAXIMIZA** el volumen de la caja, así como sus dimensiones y el volumen **MÁXIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.

Corte (cm)	Volumen de la caja (cm^3)	Dimensiones de la caja		
		Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)

CONCLUSIONES

Para finalizar esta actividad, contesta de manera amplia las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

b) Sin GeoGebra, ¿cómo crees se resolvería este problema de optimización?

c) ¿Te gustó la actividad? ¿En algún momento se te hizo tediosa, predecible, fácil, difícil, simple?

d) Prefieres esta manera de llevar las clases o te agrada más el método tradicional (pizarrón y gis).

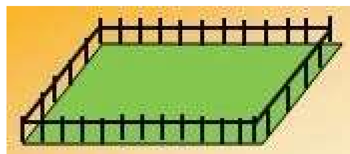
Actividad 2
Tema: Optimización
Materia: Cálculo Diferencial
Docente: Erick del Refugio de Lira Lozano

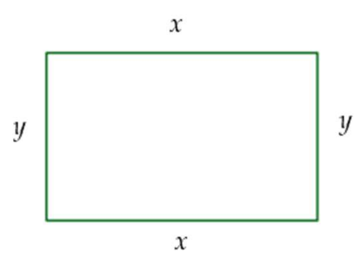
Nombre: ____

Semestre: ________________________ Edad: _________________ Género: _____________

PROBLEMA

Disponemos de $50\,metros$ de cerca para cerrar un espacio rectangular destinado a jardín. Hallar el **área máxima** que puede cercarse y las dimensiones de ese jardín.





INSTRUCCIONES: Abre el Programa Jardín, en él se muestra el problema señalado. Explora el programa y responde las siguientes cuestiones.

ETAPA I

En la vista gráfica 1 (izquierda) puedes observar el terreno del jardín visto desde arriba y en la vista gráfica 3D puedes ver el jardín en tres dimensiones.

1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado "Largo"?

2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Largo (m)	Ancho (m)	Área (m^2)
1.6	23.4	37.44
7.4	17.6	130.24
17.5	7.5	131.25
24.3	0.7	1.701
x	y	

Tabla 1

3. Con base en la tabla anterior, ¿para qué valor del largo se obtendría la **MAYOR** área?

4. ¿Cuál es esa área?

5. ¿Qué dimensiones tiene ese jardín?

   Ancho:

   Largo:

6. Compara tu resultado con tus compañeros. ¿Coinciden sus valores de largo y de **MAYOR** área?

7. ¿A qué crees que se deba eso?

ETAPA II

Cierra la vista 3D. Da clic en el menú vista y activa la vista gráfica 2. Mueve el deslizador y observa. En caso de que no se observe la gráfica completa haz zoom.

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

2. ¿Qué sucede con el punto sobre la gráfica cuando mueves el deslizador "Largo"?

3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

5. Con base en tus respuestas anteriores (Tabla 1), dado un valor “x” del largo y un valor “y” del ancho como expresarías algebraicamente:

    e) Largo del jardín:

    f) Ancho del jardín:

    g) Perímetro del jardín:

    h) Área del jardín:

Nota que las expresiones anteriores están dadas en términos de “x” y “y”, es decir, ¡en términos de dos variables!

6. Si el problema menciona que se disponen 50 metros de cerca, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente?

¡¡Hagamos álgebra!!

8. Despeja "y" de la fórmula del perímetro (pregunta 7) y luego sustitúyela en la fórmula del área (pregunta 6 d)).

¡Felicidades, ahora tienes la fórmula del área del jardín en términos de una sola variable!

9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MAYOR** área que puede tener el jardín?

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

11. ¿Cuál es el valor del largo para la **MAYOR** área?

12. Comparando tu respuesta con la que diste en la etapa anterior (pregunta 4 Etapa I) ¿la **MAYOR** área fue la misma en ambas representaciones?

13. ¿Por qué?

ETAPA III

Activa la vista de Cálculo Simbólico (CAS) desde el menú Vista.

En la primer línea se puede observar la expresión del área del jardín obtenida anteriormente (ver pregunta 5 Etapa II), en la segunda línea se observa la expresión del perímetro (ver pregunta 7 Etapa II), ambas en términos de dos variables.

En la cuarta línea se observa la función del área del jardín de nuestro problema (ver pregunta 8 Etapa II).

Marca el punto para que muestre la gráfica de la función.

Haz zoom hasta que se muestren las gráficas (azul y naranja) en pantalla y compáralas.

1. ¿Qué representa la gráfica naranja?

2. ¿Y la azul?

3. ¿Podríamos afirmar que la gráfica azul es una parte de la gráfica naranja?

4. ¿A qué crees que se deba eso?

5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el largo x del jardín? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

6. ¿Por qué?

ETAPA IV

Desactiva la gráfica naranja y cierra la vista CAS. En vista gráfica 2, activa la casilla Recta tangente.

> *Recuerda que la recta tangente es aquella recta que "toca" a una curva en un solo punto, es decir, el punto de tangencia.*

En pantalla se muestra la recta tangente (en color rojo) a la curva en un punto dado. Contesta.

1. Moviendo el deslizador "Largo" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

2. Regresando a tu respuesta de la mayor área (pregunta 9 Etapa II) ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***antes*** de llegar a esa **MAYOR** área?

3. ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***después*** de pasar por esa **MAYOR** área?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en la **MAYOR** área?

ETAPA V

Recuerda que la pendiente de la recta tangente ($m_{\tan}$) a una curva en un punto (x_1) es la derivada de la función en dicho punto $f'(x_1)$, es decir, la derivada evaluado en dicho punto.

¡¡Llegó el momento de derivar!!

1. Desarrolla la función área que obtuviste en la pregunta 8 Etapa II y derívala.

Observa la siguiente tabla con detenimiento:

Largo (x_0)	Derivada evaluada en x_0
5.5	$f'(5.5) = -2(5.5) + 25 = 14$
9.3	$f'(9.3) = -2(9.3) + 25 = 6.4$
13.2	$f'(13.2) = -2(13.2) + 25 = -1.4$
16.9	$f'(16.9) = -2(16.9) + 25 = -8.8$
23.4	$f'(23.4) = -2(23.4) + 25 = -21.8$

Tabla 2

1. Observa la vista gráfica 2 y la tabla anterior, ¿cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 9.3$?

2. ¿Y en $x = 16.9$?

3. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(13.2) = -1.4$?

4. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

5. ¿Cómo son las rectas cuya pendiente es cero?

Ahora sí, no hay de otra, ¡A ensuciarse!

6. Iguala la derivada a cero y resuelve $f'(x) = 0$.

7. ¿Cuál es la solución(es) de dicha ecuación?

8. Regresa a la pregunta 5 Etapa III. ¿La solución que obtuviste en la pregunta anterior es un valor de largo válidos?

9. Calcula el área del jardín con esa "x" que obtuviste en la pregunta anterior. *Usa la función área* (pregunta 8 Etapa II).

10. ¿El tamaño del largo con el que obtuviste la **MAYOR** área (pregunta 9 Etapa II) se parece al resultado anterior?

11. Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones del jardín que **MAXIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Largo (m)	Ancho (m)	Área (m^2)

12. ¿Por qué?

CONCLUSIONES

Para finalizar esta actividad, contesta de manera amplia las siguientes preguntas:

a) Recapitulando lo trabajado en esta actividad, ¿cómo se obtiene el máximo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.

b) ¿Qué ventajas encuentras al usar GeoGebra para resolver este tipo de problemas?

c) ¿Te gustó la actividad? ¿En algún momento se te hizo tediosa, predecible, fácil, difícil, simple, repetitiva? ¿Por qué?

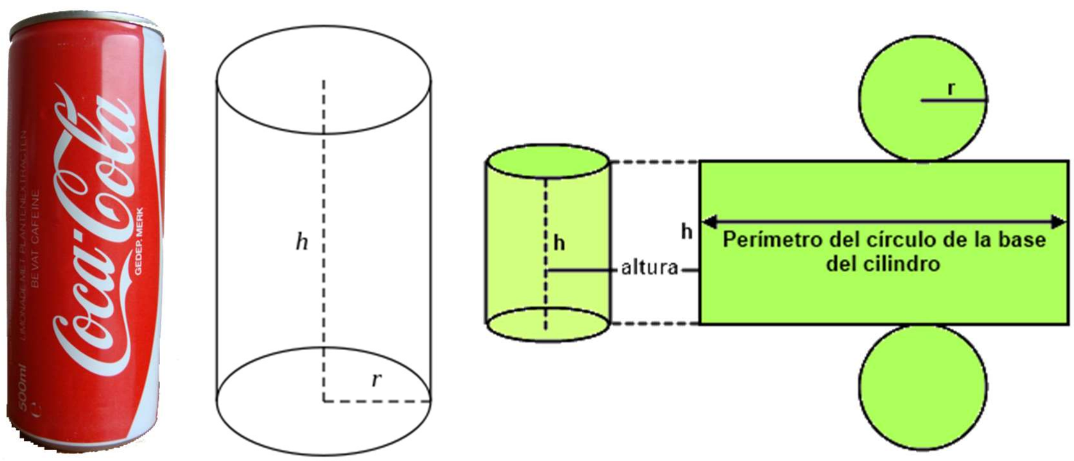
Actividad 3
Tema: Optimización
Materia: Cálculo Diferencial
Docente: Erick del Refugio de Lira Lozano

Nombre: ____

Semestre: __________________ Edad: ______________ Género: ___________

PROBLEMA

Una lata polaca de Coca-Cola debe contener 355 *ml* de líquido. Hallar las dimensiones que **minimizan** la cantidad de aluminio empleada en su construcción. Una lata polaca es de grosor uniforme.



INSTRUCCIONES: Abre el Programa Lata, en él se muestra el problema señalado. Explora el programa y responde las siguientes cuestiones.

ETAPA I

En la vista gráfica 1 (izquierda) puedes observar la lata de refresco desensamblada y en la vista gráfica 3D puedes ver la lata en tres dimensiones.

1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado “radio”?

2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)
0.5					
5					
9.2					
r	h				

Tabla 1

3. Con base en la tabla anterior, ¿para qué valor del largo se obtendría la menor cantidad de material para la construcción de la lata, es decir, la **MENOR** área?

4. ¿Cuál es esa área?

5. ¿Qué dimensiones tiene esa lata?

   Radio:

   Altura:

   Largo:

6. Compara tu resultado con tus compañeros. ¿Coinciden sus valores de radio y de **MENOR** área?

7. ¿A qué crees que se deba eso?

ETAPA II

Cierra la vista 3D. Da clic en el menú vista y activa la vista gráfica 2. Mueve el deslizador y observa. En caso de que no se observe la gráfica completa haz zoom.

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

2. ¿Qué sucede con el punto sobre la gráfica cuando mueves el deslizador “radio”?

3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

5. Con base en tus respuestas anteriores (Tabla 1), dado un valor "r" del radio y un valor "h" de la altura cómo expresarías algebraicamente:

    a. Radio del círculo (tapa de la lata):

    b. Perímetro del círculo (largo de la base del rectángulo)

    c. Altura del cilindro/lata:

    d. Área del círculo (tapa de la lata):

    e. Área del rectángulo:

    f. Área total del cilindro:

    g. Volumen del cilindro (lata):

Nota que las expresiones anteriores están dadas en términos de "r" y "h", es decir, ¡en términos de dos variables!

6. Si el problema menciona que la lata debe contener $355ml$ de líquido, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente?

¡¡Hagamos álgebra!!

8. Despeja "h" de la fórmula del volumen (pregunta 7) y luego sustitúyela en la fórmula del área (pregunta 5 e)).

¡Felicidades, ahora tienes la fórmula del área de la lata en términos de una sola variable!

9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MENOR** área que puede tener la lata?

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

11. ¿Cuál es el valor del radio para la **MENOR** área?

12. Comparando tu respuesta con la que diste en la etapa anterior (pregunta 4 Etapa I)¿la **MENOR** área fue la misma en ambas representaciones?

13. ¿Por qué?

ETAPA III

Activa la vista de Cálculo Simbólico (CAS) desde el menú Vista.

En la primer línea se puede observar la expresión del área total de la lata obtenida anteriormente (ver pregunta 8 Etapa II).

Marca el punto para que muestre la gráfica de la función.

Haz zoom hasta que se muestren las gráficas (púrpura y naranja) en pantalla y compáralas.

1. ¿Qué representa la gráfica naranja?

2. ¿Y la púrpura?

3. ¿Podríamos afirmar que la gráfica púrpura es una parte de la gráfica naranja?

4. ¿A qué crees que se deba eso?

5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el radio r de la lata? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

6. ¿Por qué?

ETAPA IV

Desactiva la gráfica naranja y cierra la vista CAS. En vista gráfica 2, activa la casilla Recta tangente.

Recuerda que la recta tangente es aquella recta que "toca" a una curva en un solo punto, es decir, el punto de tangencia.

En pantalla se muestra la recta tangente (en color rojo) a la curva en un punto dado. Contesta.

1. Moviendo el deslizador "radio" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

2. Regresando a tu respuesta de la mayor área (pregunta 9 Etapa II) ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***antes*** de llegar a esa **MENOR** área?

3. ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***después*** de pasar por esa **MENOR** área?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en la **MENOR** área?

ETAPA V

Recuerda que la pendiente de la recta tangente ($m_{\tan}$) a una curva en un punto (x_1) es la derivada de la función en dicho punto $f'(x_1)$, es decir, la derivada evaluado en dicho punto.

¡¡Llegó el momento de derivar!!

1. Desarrolla la función área que obtuviste en la pregunta 8 Etapa II y derívala.

Observa la siguiente tabla con detenimiento:

Largo (x_0)	Derivada evaluada en x_0
2.5	$f'(2.5) = 4\pi(2.5) - \frac{710}{(2.5)^2} = -82.18$
4.8	$f'(4.8) = 4\pi(4.8) - \frac{710}{(4.8)^2} = 29.5$
7.1	$f'(7.1) = 4\pi(7.1) - \frac{710}{(7.1)^2} = 75.14$

Tabla 2

1.Observa la vista gráfica 2 y la tabla anterior, ¿cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2.5$?

2. ¿Y en $x = 7.1$?

3. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(4.8) = 29.5$?

4. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

5. ¿Cómo son las rectas cuya pendiente es cero?

Ahora sí, no hay de otra, ¡A ensuciarse!

6. Iguala la derivada a cero y resuelve $f'(x) = 0$.

7. ¿Cuál es la solución(es) de dicha ecuación?

8. Regresa a la pregunta 5 Etapa III. ¿La solución que obtuviste en la pregunta anterior es un valor de radio válido?

9. Calcula el área de la lata con ese radio que obtuviste en la pregunta anterior. *Usa la función área (*pregunta 8 Etapa II*).*

10. ¿El tamaño del radio con el que obtuviste la **MENOR** área (pregunta 11 Etapa II) se parece al resultado anterior?

11. .Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que **MINIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Radio (cm)	Altura (cm)	Largo (cm)	Área de la tapa (cm^2)	Área de sección rectangular (cm^2)	Área total (cm^2)

12. ¿Por qué?

CONCLUSIONES

Para finalizar esta actividad, contesta de manera amplia las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?

b) Recapitulando lo trabajado en esta actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.

c) ¿Qué ventajas encuentras al usar GeoGebra para resolver este tipo de problemas?

d) ¿Te gustó la actividad? ¿En algún momento se te hizo tediosa, predecible, fácil, difícil, simple, repetitiva? ¿Por qué?

Actividad 4
Tema: Optimización
Materia: Cálculo Diferencial
Docente: Erick del Refugio de Lira Lozano

Nombre: ____

Semestre: ____________________ Edad: _______________ Género: ____________

PROBLEMA

En un jardín, se desea vallar una porción rectangular de 25 m^2 de área para protegerla de los conejos. Si un lado del jardín ya está protegido por una pared del granero, ¿Qué dimensiones se necesitarán para vallarlo con una longitud de valla **mínima**?

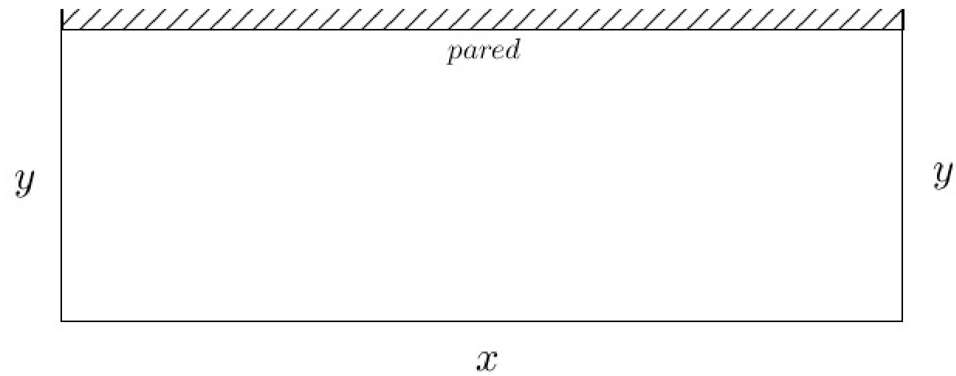


Figura 1

INSTRUCCIONES: Abre el Programa Corral, en él se muestra el problema descrito anteriormente. Explora el programa y responde las siguientes cuestiones.

ETAPA I

En vista gráfica 1 (izquierda) puedes observar el jardín vista desde arriba, en vista 3D (derecha) puedes observar la caja que se forma en tres dimensiones.

1. ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "Ancho"?

2. Con ayuda del deslizador y auxiliándote de la vista gráfica 1 llena la siguiente tabla: (*Sugerencia: Llena la tabla en orden, es decir, que los tamaños del ancho sean ascendentes*)

Ancho (m)	Largo (m)	Perímetro (m)
2.3	10.87	24.04
9.3	2.69	14.68
21.9	1.14	24.18
x	y	

Tabla 1

¡¡Nota que los tamaños del ancho son todos positivos!!

3. Con base en la tabla anterior, ¿para qué valor del ancho se obtendría el **MENOR** perímetro del jardín?

4. ¿Cuál es ese perímetro?

5. ¿Qué dimensiones tiene ese jardín?

   Ancho:

   Largo:

6. Compara tu resultado con los otros equipos. ¿Coinciden sus valores de ancho y de **MENOR** perímetro?

7. ¿A qué crees que se deba eso?

ETAPA II

Da clic en el menú vista y activa la vista gráfica 2. Mueve el deslizador y observa. En caso de que no se observe la gráfica completa haz zoom.

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

2. ¿Qué sucede con el punto sobre la gráfica cuando mueves el deslizador “Ancho”?

3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

5. Con base en tus respuestas anteriores (Tabla 1), dado un valor “x” del ancho un valor “y” del largo, cómo expresarías algebraicamente:

    a. Ancho del jardín:

    b. Largo del jardín:

    c. Perímetro del jardín:

    d. Área del jardín:

Nota que las expresiones anteriores están dadas en términos de “x” y “y”, es decir, ¡en términos de dos variables!

6. Si el problema menciona que el terreno tiene una superficie de $25m^2$, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente?

¡¡Hagamos álgebra!!

8. Despeja "y" de la fórmula del área (pregunta 7) y luego sustitúyela en la fórmula del perímetro (pregunta 5 c)).

¡Felicidades, ahora tienes la fórmula del área del jardín en términos de una sola variable!

9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MENOR** perímetro que puede tener el jardín?

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

11. ¿Cuál es el valor del ancho para el **MENOR** área?

12. Comparando tu respuesta con la que diste en la etapa anterior (pregunta 4 Etapa I) ¿la **MENOR** área fue la misma en ambas representaciones?

13. ¿Por qué?

ETAPA III

Activa la vista de Cálculo Simbólico (CAS) desde el menú. En la primer línea se puede observar la función del perímetro del jardín de nuestro problema (ver pregunta 8 Etapa II).

Marca el punto para que muestre la gráfica de la función.

Haz zoom hasta que se muestren las gráficas (azul y naranja) en pantalla y compáralas.

1. ¿Qué representa la gráfica naranja?

2. ¿Y la azul?

3. ¿Podríamos afirmar que la gráfica azul es una parte de la gráfica naranja?

4. ¿A qué crees que se deba eso?

5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

6. ¿Por qué?

ETAPA IV

Desactiva la gráfica naranja y cierra la vista CAS. En vista gráfica 2, activa la casilla Recta tangente.

Recuerda que la recta tangente es aquella recta que "toca" a una curva en un solo punto, es decir, el punto de tangencia.

En pantalla se muestra la recta tangente (en color rojo) a la curva en un punto dado. Contesta.

1. Moviendo el deslizador "Ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

2. Regresando a tu respuesta del **MENOR** perímetro (pregunta 9 Etapa II) ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***antes*** de llegar a ese **MENOR** perímetro?

3. ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***después*** de pasar por ese **MENOR** perímetro?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en el **MENOR** perímetro?

ETAPA V

Recuerda que la pendiente de la recta tangente ($m_{\tan}$) a una curva en un punto (x_1) es la derivada de la función en dicho punto $f'(x_1)$, es decir, la derivada evaluado en dicho punto.

¡¡Llegó el momento de derivar!!

1. Desarrolla la función perímetro que obtuviste en la pregunta 8 Etapa II y derívala.

Observa la siguiente tabla con detenimiento:

Ancho (x)	Derivada evaluada en x
2.6	$f'(2.6) = 1 - \frac{50}{(2.6)^2} = -6.4$
6.3	$f'(6.3) = 1 - \frac{50}{(2.6)^2} = -0.26$
16.5	$f'(16.5) = 1 - \frac{50}{(2.6)^2} = .82$
23.8	$f'(23.8) = 1 - \frac{50}{(2.6)^2} = 0.91$

Tabla 2

2. Observa la vista gráfica 2 y la tabla anterior, ¿cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2.6$?

3. ¿Y en $x = 16.5$?

4. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(6.3) = -0.26$?

5. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

6. ¿Cómo son las rectas cuya pendiente es cero?

Ahora sí, no hay de otra, ¡A ensuciarse!

7. Iguala la derivada a cero y resuelve $f'(x) = 0$. *(Sugerencia: Usa fórmula general)*

8. ¿Cuál es la solución(es) de dicha ecuación?

9. Regresa a la pregunta 5 Etapa III. ¿La solución que obtuviste en la pregunta anterior es un valore de ancho válido? ¿por qué?

10. Calcula el perímetro del jardín con ese ancho que obtuviste en la pregunta anterior. *Usa la función volumen.*

11. ¿El tamaño del ancho con el que obtuviste el **MENOR** perímetro (pregunta 9 Etapa II) se parece al resultado anterior?

12. Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MINIMIZA** el perímetro del jardín así como sus dimensiones y el perímetro **MÍNIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.

Ancho (m)	Largo (m)	Área (m^2)

CONCLUSIONES

Para finalizar esta actividad, contesta de manera amplia las siguientes preguntas:

e) ¿Qué pasos (proceso) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.

f) ¿Te gustó la actividad? ¿En algún momento se te hizo tediosa, predecible, fácil, difícil, simple, repetitiva? ¿Por qué?

Actividad 5
Tema: Optimización
Materia: Cálculo Diferencial
Docente: Erick del Refugio de Lira Lozano

Nombre: ____

Semestre: ____________________ Edad: ______________ Género: ___________

PROBLEMA

Se van a usar $300m$ de malla de alambre para construir seis jaulas de un albergue para perros, como se muestra en la Figura 1. Calcula las dimensiones para las que al área que abarca **CADA JAULA** sea **MÁXIMA**.

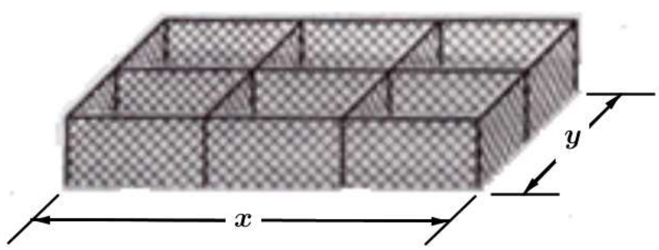


Figura 1

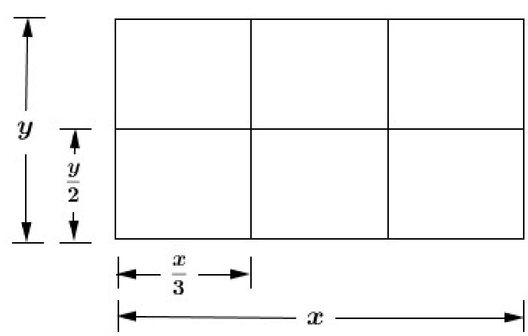


Figura 2

INSTRUCCIONES: Abre el Programa Jaulas, en él se muestra el problema señalado. Explora el programa y responde las siguientes cuestiones.

ETAPA I

En la vista gráfica 1 puedes observar las jaulas vistas desde arriba.

1. ¿Qué ocurre cuando mueves el deslizador llamado "ancho"?

2. Con ayuda del deslizador llena la siguiente tabla:

Ancho (Total) (m)	Largo (Total) (m)	Ancho (por jaula) (m)	Largo (por jaula) (m)	Área (por jaula) (m^2)
x	y			

Tabla 1

3. Con base en la tabla anterior, ¿para qué valor del ancho se obtendría la **MAYOR** área en cada jaula?

4. ¿Cuál es esa área?

5. ¿Qué dimensiones tiene esa jaula?

   Ancho de la jaula:

Largo de la jaula:

6. Compara tu resultado con tus compañeros. ¿Coinciden sus valores de largo y de **MAYOR** área?

7. ¿A qué crees que se deba eso?

ETAPA II

Da clic en el menú vista y activa la vista gráfica 2. Mueve el deslizador y observa. En caso de que no se observe la gráfica completa haz zoom.

1. ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?

2. ¿Qué sucede con el punto sobre la gráfica cuando mueves el deslizador "ancho"?

3. Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?

4. ¿Qué representa la coordenada en y del punto? *(Auxíliate de la* Tabla 1*)*

5. Con base en tus respuestas anteriores (Tabla 1), dado un valor "x" del ancho y un valor "y" del largo como expresarías algebraicamente:

    a. Largo de cada jaula:

    b. Ancho de cada jaula:

    c. Perímetro (total de malla utilizada):

    d. Área de cada jaula:

Nota que las expresiones anteriores están dadas en términos de "x" y "y", es decir, ¡en términos de dos variables!

6. Si el problema menciona que se disponen 300 metros de malla, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?

7. ¿Cómo se podría expresar algebraicamente?

¡¡Hagamos álgebra!!

8. Despeja "y" de la fórmula del perímetro (pregunta 7) y luego sustitúyela en la fórmula del área (pregunta 6 d)).

¡Felicidades, ahora tienes la fórmula del área de la jaula en términos de una sola variable!

9. Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MAYOR** área que puede tener cada jaula?

10. ¿Por qué? Explica ampliamente.

11. ¿Cuál es el valor del ancho para la **MAYOR** área?

12. Comparando tu respuesta con la que diste en la etapa anterior (pregunta 4 Etapa I)¿la **MAYOR** área fue la misma en ambas representaciones?

13. ¿Por qué?

ETAPA III

Activa la vista de Cálculo Simbólico (CAS) desde el menú Vista. En la primer línea se puede observar la expresión del área de cada jaula obtenida anteriormente (ver pregunta 8 Etapa II)

Marca el punto para que muestre la gráfica de la función.

Haz zoom hasta que se muestren las gráficas (azul y naranja) en pantalla y compáralas.

1. ¿Qué representa la gráfica naranja?

2. ¿Y la azul?

3. ¿Podríamos afirmar que la gráfica azul es una parte de la gráfica naranja?

4. ¿A qué crees que se deba eso?

5. Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x de las jaulas? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*

6. ¿Por qué?

ETAPA IV

Desactiva la gráfica naranja y cierra la vista CAS. En vista gráfica 2, activa la casilla Recta tangente.

Recuerda que la recta tangente es aquella recta que "toca" a una curva en un solo punto, es decir, el punto de tangencia.

En pantalla se muestra la recta tangente (en color rojo) a la curva en un punto dado. Contesta.

1. Moviendo el deslizador "ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.

2. Regresando a tu respuesta de la mayor área (pregunta 9 Etapa II) ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***antes*** de llegar a esa **MAYOR** área?

3. ¿Cómo es el signo de la pendiente de la recta tangente (positivo, negativo o cero) ***después*** de pasar por esa **MAYOR** área?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en la **MAYOR** área?

ETAPA V

Recuerda que la pendiente de la recta tangente ($m_{\tan}$) a una curva en un punto (x_1) es la derivada de la función en dicho punto $f'(x_1)$, es decir, la derivada evaluado en dicho punto.

¡¡Llegó el momento de derivar!!

1. Desarrolla la función área que obtuviste en la pregunta 8 Etapa II y derívala.

Observa la siguiente tabla con detenimiento:

Ancho (x_0)	Derivada evaluada en x_0
10.5	$f'(10.5) = -0.25(10.5) + 12.5 = 9.88$
28	$f'(28) = -0.25(28) + 12.5 = 5.5$
58	$f'(58) = -0.25(58) + 12.5 = -2$
81.6	$f'(81.6) = -0.25(81.6) + 12.5 = -7.9$

Tabla 2

1. Observa la vista gráfica 2 y la tabla anterior, ¿cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 28$?

2. ¿Y en $x = 81.6$?

3. De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(28) = 5.5$?

4. Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?

5. ¿Cómo son las rectas cuya pendiente es cero?

Ahora sí, no hay de otra, ¡A ensuciarse!

6. Iguala la derivada a cero y resuelve $f'(x) = 0$.

7. ¿Cuál es la solución(es) de dicha ecuación?

8. Regresa a la pregunta 5 Etapa III. ¿La solución que obtuviste en la pregunta anterior es un valor de ancho válido?

9. Calcula el área de la jaula con ese valor de ancho "x" que obtuviste en la pregunta anterior. *Usa la función área (*pregunta 8 Etapa II*).*

10. ¿El tamaño del ancho con el que obtuviste la **MAYOR** área (pregunta 9 Etapa II) se parece al resultado anterior?

11. Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la jaula que **MAXIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.

Ancho (Total) (m)	Largo (Total) (m)	Ancho (por jaula) (m)	Largo (por jaula) (m)	Área (por jaula) (m^2)

Tabla 3

12. ¿Por qué?

CONCLUSIONES

Para finalizar esta actividad, contesta de manera amplia las siguientes preguntas:

a) ¿Qué pasos (proceso) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe amplia y esquematizadamente.

b) ¿Te gustó la actividad? ¿En algún momento se te hizo tediosa, predecible, fácil, difícil, simple, repetitiva? ¿Por qué?

Anexo 2: Indicadores
Indicadores por etapas, actividad 1

Etapa	Pregunta	Representaciones con las que interactúa	Indicadores de promoción o no del tránsito entre representaciones ¿Qué se espera?
I	1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "Corte"?	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones de la caja, largo, ancho y alto con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como: área, profundidad, volumen, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
	2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene todas las expresiones de ancho, alto y volumen en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **1:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de ancho, alto y volumen en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
II	1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del corte y el volumen de la caja. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: "el volumen" o "el corte".

			0: El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del corte de la caja; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del corte de la caja, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el volumen de la caja y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el volumen de la caja sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
	6.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MAYOR** volumen que puede tener la caja?	$RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el volumen de la caja. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
	7.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más alto de la gráfica con el volumen máximo.

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td></td><td rowspan="2"></td><td>0: El estudiante no relaciona el punto más alto de la gráfica con el volumen máximo y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.</td></tr>
<tr><td>8.- ¿Cuál es el valor del corte del MAYOR volumen?</td><td>1: El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el corte y que influye en el volumen de la caja.

0: El estudiante brinda una respuesta incorrecta.</td></tr>
<tr><td>10.- ¿Por qué?</td><td>$RG, RT \rightarrow RV$</td><td>2: El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del corte correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más alto.

1: El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el máximo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el corte correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica.

0: El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.</td></tr>
<tr><td>4.- ¿A qué crees que se deba eso?</td><td>$RP, RG \rightarrow RV$</td><td>1: El estudiante aclara que la gráfica verde es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica verde se “restringe” a lo que la realidad y el mundo físico nos permite.

0: El estudiante brinda alguna otra respuesta.</td></tr>
<tr><td>III</td><td>5.- Según lo que has trabajado de este problema</td><td>$RG \rightarrow RV, RA$</td><td>3: El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo</td></tr>
</table>

	¿qué rango de valores puede tomar el corte x? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*		diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
IV	1.- Moviendo el deslizador "Corte" de menor a mayor (de abajo hacia arriba), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
V	4.- De la tabla anterior, ¿qué	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** 83.48 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=1.3

	significa que $f'(1.3) = 83.48$?		**0:** Otra respuesta.
	5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?		**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no). **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	12.- Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MAXIMIZA** el volumen de la caja, así como sus dimensiones y el volumen **MÁXIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto del corte y las dimensiones de la caja que proporcionan el máximo volumen, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el máximo volumen es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos brindando indicios de que no reconoce que el valor que produce el máximo volumen es la solución de la derivada de la función igualada a cero.
	1.A ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?	$RA \rightarrow RV$	**1:** El estudiante relaciona las derivadas de las funciones como una manera de resolver los problemas de optimización. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.
	1.B Sin GeoGebra, ¿cómo crees que se resolvería este problema de optimización?		**2:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero. **1:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.

Indicadores por etapas, actividad 2

Etapa	Pregunta	Representaciones con las que interactúa	Indicadores de promoción o no del tránsito entre representaciones ¿Qué se espera?
I	1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "Largo"?	$RV \rightarrow RP$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones del jardín, largo y ancho con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como el área, superficie, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
	2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene la expresión del área de la última línea correctamente. **1:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar la expresión del área en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
II	1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del largo del jardín y el área del jardín. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: "el área" o "el largo".

			0: El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del largo del jardín; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del largo del jardín, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área del jardín y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área del jardín sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
	6.- Si el problema menciona que se disponen de 50 metros de cerca, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?	$RV \rightarrow RA$	**1:** El estudiante relaciona lo expresado en el enunciado del problema (50 metros de cerca), con el perímetro del jardín. **0:** El estudiante no relaciona lo expresado en el enunciado del problema (50 metros de cerca), con el perímetro del jardín.
	7.- ¿Cómo podría expresarse algebraicamente?		**1:** El estudiante relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (50 metros de cerca) con la

			fórmula del perímetro que dedujo en preguntas anteriores. **0:** El estudiante no relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (50 metros de cerca) con la fórmula del perímetro que dedujo en preguntas anteriores.
	9.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MAYOR** área que puede tener el jardín?	$RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el área que puede tener el jardín. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
	10.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más alto de la gráfica con el área máxima. **0:** El estudiante no relaciona el punto más alto de la gráfica con el área máxima y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.
	11.- ¿Cuál es el valor del largo para la **MAYOR** área?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el largo y que influye en el área del jardín. **0:** El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
	13.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del largo correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más alto. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el máximo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde

			que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el largo correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.
III	4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica azul es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica azul se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el largo x del jardín? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema.

			0: El estudiante brinda alguna otra respuesta.
IV	1.- Moviendo el deslizador "Largo" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
V	4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(13.2) = -1.4$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** -1.4 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=13.2 **0:** Otra respuesta.
	5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?		**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no). **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	12.- Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones del jardín que **MAXIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto de las dimensiones del jardín que proporcionan el área máxima, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el área máxima es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos brindando indicios de que no reconoce que el valor que produce el área máxima es la solución de la derivada de la función igualada a cero.

	1.B Recapitulando lo trabajado en la actividad, ¿cómo se obtiene el máximo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.	$RA \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero. **1:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.

Indicadores por etapas, actividad 3

Etapa	Pregunta	Representaciones con las que interactúa	Indicadores de promoción o no del tránsito entre representaciones ¿Qué se espera?
I	1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "radio"?	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones de la lata, largo, alto, y radio con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como: área, volumen, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
	2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **1:** El estudiante no llena la tabla por completo de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos no son los adecuados. Sin embargo, si logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc., o el estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no

			parecen tener relación alguna con lo que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
II	1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del radio de la lata y el área total (superficial) de la lata. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: "el radio" o "el área". **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del radio de la tapa de la lata; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del radio de la tapa de la lata, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área total (superficial) de la lata y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área total (superficial) de la lata sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1.

			0: El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
	6.- Si el problema menciona que la lata debe contener 355ml de líquido ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?	$RV \rightarrow RA$	**1:** El estudiante relaciona lo expresado en el enunciado del problema (contener 355ml de líquido), con el volumen de la lata. **0:** El estudiante no relaciona lo expresado en el enunciado del problema (contener 355ml de líquido), con el volumen de la lata.
	7.- ¿Cómo podría expresarse algebraicamente?		**1:** El estudiante relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (contener 355ml de líquido) con la fórmula del volumen de la lata que dedujo en preguntas anteriores. **0:** El estudiante no relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (contener 355ml de líquido) con la fórmula del volumen de la lata que dedujo en preguntas anteriores.
	9.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es la **MENOR** área que puede tener la lata?	$RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el área total (superficial) que puede tener la lata. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
	10.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más bajo de la gráfica con el área mínima. **0:** El estudiante no relaciona el punto más bajo de la gráfica con el área mínima y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.
	11.- ¿Cuál es el valor del radio para la **MENOR** área?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x

			representa el radio y que influye en el área total (superficial) de la lata. **0:** El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
	13.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del radio correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más bajo. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el mínimo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el radio correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.
III	4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica púrpura es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica púrpura se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el radio r de la lata? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio.

			1: El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
IV	1.- Moviendo el deslizador "radio" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(4.8) = 29.5$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** 29.5 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=4.8 **0:** Otra respuesta.
	5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?		**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no).

V			**0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	12.- Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la lata que **MINIMIZAN** su área) Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto de las dimensiones de la lata que proporcionan el área mínima, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el área mínima es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos brindando indicios de que no reconoce que el valor que produce el área mínima es la solución de la derivada de la función igualada a cero.
	1.A ¿Qué tiene que ver el cálculo diferencial con la solución del problema anterior?	$RA \rightarrow RV$	**1:** El estudiante relaciona las derivadas de las funciones como una manera de resolver los problemas de optimización. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.
	1.B Recapitulando lo trabajado en la actividad, ¿cómo se obtiene el mínimo de una función sin usar GeoGebra? Describe ampliamente.		**2:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas de las funciones igualadas a cero. **1:** El estudiante relaciona la solución de los problemas de optimización con la resolución de las derivadas. **0:** El estudiante brinda cualquier otra respuesta.

Indicadores por etapas, actividad 4

Etapa	Pregunta	Representaciones con las que interactúa	Indicadores de promoción o no del tránsito entre representaciones ¿Qué se espera?
I	1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "Ancho"?	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones del granero, largo y ancho con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como: área, superficie, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
	2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene la expresión de perímetro en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **1:** El estudiante no llena la tabla por completo de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos no son los adecuados. Sin embargo, si logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc., o el estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo

			que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
II	1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del ancho del jardín y el perímetro. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: "el ancho" o "el perímetro". **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del ancho del jardín; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del ancho del jardín, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el perímetro del jardín y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con perímetro del jardín sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
	6.- Si el problema menciona que el terreno tiene una		**1:** El estudiante relaciona lo expresado en el enunciado del problema (tener

	superficie de $25m^2$ ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?	$RV \rightarrow RA$	una superficie de $25m^2$), con el área del jardín. **0:** El estudiante no relaciona lo expresado en el enunciado del problema (tener una superficie de $25m^2$), con el área del jardín.
	7.- ¿Cómo podría expresarse algebraicamente?		**1:** El estudiante relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (tener una superficie de $25m^2$) con la fórmula del área del jardín que dedujo en preguntas anteriores. **0:** El estudiante no relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (tener una superficie de $25m^2$) con la fórmula del área del jardín que dedujo en preguntas anteriores.
	9.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MENOR** perímetro que puede tener el jardín?		**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el perímetro que puede tener el jardín. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
	10.- ¿Por qué? Explica ampliamente.	$RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante relaciona el punto más bajo de la gráfica con el perímetro mínimo. **0:** El estudiante no relaciona el punto más bajo de la gráfica con el perímetro mínimo y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.
	11.- ¿Cuál es el valor del ancho para la **MENOR** perímetro?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el ancho y que influye en el perímetro del jardín.

			0: El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
	13.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del ancho correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más bajo. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el mínimo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el ancho correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.
III	4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica azul es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica azul se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin

			notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
IV	1.- Moviendo el deslizador "Ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
V	4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(6.3) = -0.26$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** -0.26 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=6.3 **0:** Otra respuesta.
	5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?		**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no). **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

	12.- Con base en todo lo anterior, ¿Podrías decir con certeza cuál es el valor del corte que **MINIMIZA** el perímetro del jardín, así como sus dimensiones y el perímetro **MÍNIMO**? Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto del corte y las dimensiones del jardín que proporcionan el mínimo perímetro, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el mínimo perímetro es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos brindando indicios de que no reconoce que el valor que produce el mínimo perímetro es la solución de la derivada de la función igualada a cero.
	1.C ¿Qué pasos (procesos) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.	$RA \rightarrow RV$	**2:** El estudiante brinda una descripción básica y completa del Teorema de Fermat. **1:** El estudiante brinda una descripción básica e incompleta del Teorema de Fermat. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

Indicadores por etapas, actividad 5

Etapa	Pregunta	Representaciones con las que interactúa	Indicadores de promoción o no del tránsito entre representaciones ¿Qué se espera?
I	1.- ¿Qué ocurre en ambas vistas cuando mueves el deslizador llamado "ancho"?	$RP \rightarrow RV$	**2:** El estudiante relaciona las dimensiones de la jaula, largo y ancho con el movimiento del deslizador y/o relaciona otras magnitudes como: área, superficie, etc. **1:** El estudiante menciona que hay un cambio y especifica cuál. **0:** El estudiante hace una descripción poco clara o sin relación aparente con lo que se observa.
	2.- Con ayuda del deslizador y auxiliándote de las vistas gráficas 1 y 3D llena la siguiente tabla:	$RP \rightarrow RT \rightarrow RA$	**2:** El estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Además, obtiene todas las expresiones de ancho, largo y área en términos de x, y, etc. de la última línea correctamente. **1:** El estudiante no llena la tabla por completo de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos no son los adecuados. Sin embargo, si logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc., o el estudiante llena la tabla de manera correcta tomando en cuenta las vistas gráficas 1 y 3D, es decir, sus cálculos numéricos son los adecuados. Sin embargo, no logra encontrar todas las expresiones de largo, área de la tapa, área de sección rectangular y área total en términos de x, y, etc. **0:** El estudiante llena la tabla con valores erróneos y/o sus resultados no parecen tener relación alguna con lo

			que se muestra en las vistas gráficas 1 y 3D
II	1.- ¿Qué representa la gráfica que se observa en esa vista?	$RG \to RV$	**2:** El estudiante describe que es la relación entre el tamaño del ancho total y el área superficial de cada jaula. **1:** El estudiante brinda una respuesta vaga y poco clara como: “el ancho” o “el área”. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	3.- Fíjate en la coordenada x del punto, ¿qué representa?	$RG, RT \to RV$	**2:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del ancho total de la jaula; además hace referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en x con el tamaño del ancho total de la jaula, sin tomar en cuenta lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica.
	4.- ¿Qué representa la coordenada en y del punto? (Auxíliate de la Tabla 1)		**2:** El estudiante relaciona la coordenada en y con el área de cada jaula y además hace referencia a que está relacionada con lo obtenido en la tabla de la etapa 1. **1:** El estudiante relaciona la coordenada en y con **área de cada jaula o simplemente área,** sin hacer referencia a lo observado en la tabla de la etapa 1. **0:** El estudiante proporciona otra respuesta sin relación a lo presentado en la gráfica o en la tabla de la etapa 1.
	6.- Si el problema menciona que se	$RV \to RA$	**1:** El estudiante relaciona lo expresado en el enunciado del problema

	dispone de 300 metros de malla, ¿cómo se relaciona eso con lo anterior?		(disponer de 300 metros de malla), con el perímetro TOTAL de las jaulas. **0:** El estudiante no relaciona lo expresado en el enunciado del problema (disponer de 300 metros de malla), con el perímetro TOTAL de las jaulas.
	7.- ¿Cómo podría expresarse algebraicamente?		**1:** El estudiante relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (disponer de 300 metros de malla) con la fórmula del perímetro TOTAL de las jaulas que dedujo en preguntas anteriores. **0:** El estudiante no relaciona algebraicamente lo mencionado en el enunciado (disponer de 300 metros de malla) con la fórmula del perímetro TOTAL de las jaulas que dedujo en preguntas anteriores.
	9.- Con lo que observas en la vista gráfica 2 y con ayuda del deslizador, ¿cuál es el **MAYOR** área que puede tener cada jaula?	$RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante proporciona la respuesta correcta a la pregunta, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en y representa el área que puede tener cada jaula. **0:** El estudiante proporciona una respuesta incorrecta.
	10.- ¿Por qué? Explica ampliamente.		**1:** El estudiante relaciona el punto más alto de la gráfica con el área máxima. **0:** El estudiante no relaciona el punto más alto de la gráfica con el área máxima de cada jaula y/o no articula sus palabras brindando una descripción vaga.
	11.- ¿Cuál es el valor del ancho para la **MAYOR** área?		**1:** El estudiante responde correctamente según lo que se observa en la gráfica, lo que indicaría que ha identificado que la coordenada en x representa el ancho y que influye en el área máxima de cada jaula.

			0: El estudiante brinda una respuesta incorrecta.
	13.- ¿Por qué?	$RG, RT \rightarrow RV$	**2:** El estudiante describe que en la tabla de la etapa 1 se tomaron valores al azar y por tal motivo era difícil encontrar el tamaño del ancho correcto, pero que la gráfica le ayudó a apreciar de mejor manera dónde se alcanza el punto más alto. **1:** El estudiante responde que la gráfica ayuda a ver dónde se alcanza el máximo sin hacer referencia a la tabla de la etapa 1 o el estudiante responde que la tabla, por contener valores aleatorios, no era de mucha ayuda al momento de querer encontrar el ancho correcto esto sin hacer referencia a lo observado en la gráfica. **0:** El estudiante no articula sus palabras brindando una descripción vaga e incorrecta.
III	4.- ¿A qué crees que se deba eso?	$RP, RG \rightarrow RV$	**1:** El estudiante aclara que la gráfica azul es parte de la gráfica naranja pero que la gráfica azul se "restringe" a lo que la realidad y el mundo físico nos permite. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	5.- Según lo que has trabajado de este problema ¿qué rango de valores puede tomar el ancho x de las jaulas? *(Sugerencia: Apóyate de la vista gráfica 1 y el deslizador)*	$RG \rightarrow RV, RA$	**3:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial y en su redacción utiliza o relaciona el concepto de dominio. **2:** El estudiante brinda el rango de valores con notación de intervalos manejada durante el curso de cálculo diferencial pero no hace referencia al concepto de dominio. **1:** El estudiante brinda los valores que se observan en el deslizador sin

			notación de intervalos y sin hacer referencia al concepto de dominio. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
	6.- ¿Por qué?	$RP, RG \rightarrow RV$	**2:** El estudiante argumenta que los valores anteriores están limitados por el contexto físico del problema. **1:** El estudiante se basa en lo que la vista gráfica 1 de GeoGebra muestra, sin reflexionar sobre las "cualidades" físicas del problema. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
IV	1.- Moviendo el deslizador "ancho" de menor a mayor (de izquierda a derecha), ¿qué observas con respecto al comportamiento de la recta tangente? Describe ampliamente.	$RG \rightarrow RV, RA$	**2:** El estudiante describe ampliamente lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador incluyendo en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **1:** El estudiante describe lo que le sucede a la recta tangente conforme se mueve el deslizador sin incluir en su descripción el concepto de pendiente de la recta y de su signo. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.
V	4.- De la tabla anterior, ¿qué significa que $f'(28) = 5.5$?	$RA \rightarrow RV, RT$	**1:** 5.5 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la cuerva en x=28 **0:** Otra respuesta.
	5.- Si igualamos la derivada a cero $f'(x) = 0$, ¿qué se quiere encontrar?		**1:** El estudiante argumenta que se quiere encontrar los valores de x en los que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cero (puede hacer referencia a una recta con pendiente cero o no). **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

	12.- Con base en todo lo anterior, ¿cuáles son las dimensiones de la jaula que **MAXIMIZAN** su área? Auxíliate de la Tabla 1.	$RA \rightarrow RT$	**1:** El estudiante brinda el valor correcto de las dimensiones de la jaula que proporcionan el área máxima, brindando indicios de que reconoce que el valor que produce el área máxima es la solución de la derivada de la función igualada a cero. **0:** El estudiante brinda valores incorrectos brindando indicios de que no reconoce que el valor que produce el área máxima es la solución de la derivada de la función igualada a cero.
	1.C ¿Qué pasos (procesos) seguirías para resolver un problema de optimización sin GeoGebra? Describe ampliamente.	$RA \rightarrow RV$	**2:** El estudiante brinda una descripción básica y completa del Teorema de Fermat. **1:** El estudiante brinda una descripción básica e incompleta del Teorema de Fermat. **0:** El estudiante brinda alguna otra respuesta.

Anexo 3: Codificación

ETAPA 1								
	RP A RV	RP, RT A RA		RP A RV	RP, RT A RA		RP A RV	RP, RT A RA
ACTIVIDAD 1	PREG 1	PREG 2	ACTIVIDAD 2	PREG 1	PREG 2	ACTIVIDAD 3	PREG 1	PREG 2
A1	2	2		1	1		2	0
A2	1	2		0	2		2	1
A3	1	2		2	2		2	0
A4	1	2		1	2		2	2
A5	1	2		1	2		2	0
A6	1	2		2	1		2	0
A7	2	2		2	1		2	2
A8	2	2		0	1		2	1
A9	1	2		2	1		2	0
A10	2	2		2	2		1	1
A11	2	2		2	2		0	2
A12	1	2		2	2		2	2
A13	2	2		2	2		2	2
A14	2	2		2	1		2	0
A15	2	2		2	2		2	1
A16	1	2		2	2		2	1
A17	2	2		1	2		2	0
A18	2	2		1	2		2	0
A19	2	2		0	2		2	1
A20	2	2		2	1		2	0

	RP A RV	RP, RT A RA		RP A RV	RP, RT A RA
ACTIVIDAD 4	PREG 1	PREG 2	ACTIVIDAD 5	PREG 1	PREG 2
	2	2		0	1
	2	1		2	0
	2	1		2	1
	2	2		0	1
	0	0		0	1
	2	1		2	2
	2	2		2	2
	2	1		2	2
	2	0		2	0
	0	2		0	1

2	2
1	0
2	2
0	0
0	2
0	2
2	0
0	0
0	0
2	0

2	2
2	2
2	2
0	0
0	1
2	0
2	1
0	1
2	0
2	0

ETAPA 2	RG A RV	RG, RT A RV	RG, RT A RV	RG A RV	RG A RV	RG A RV	RG, RT A RV
ACTIVIDAD 1	PREG 1	PREG 3	PREG 4	PREG 6	PREG 7	PREG 8	PREG 10
A1	2	1	1	1	1	1	0
A2	0	1	0	1	1	1	0
A3	1	1	1	1	1	1	0
A4	2	1	1	1	0	1	1
A5	1	1	1	1	1	1	1
A6	0	1	1	1	0	1	0
A7	1	1	1	1	0	1	0
A8	0	1	1	1	0	1	1
A9	1	1	1	1	0	1	2
A10	0	1	1	1	0	1	0
A11	0	0	0	1	0	1	0
A12	0	1	1	1	1	1	0
A13	0	0	0	1	0	1	0
A14	0	1	0	1	0	1	1
A15	0	1	1	1	0	1	0
A16	0	1	1	1	0	1	0
A17	1	1	1	1	1	1	0
A18	0	1	1	1	1	1	1
A19	1	1	1	1	0	1	0
A20	1	1	1	1	1	1	0

	RG A RV	RG, RT A RV	RG, RT A RV	RV A RA	RV A RA	RG A RV	RG A RV	RG A RV	RG, RT A RV
ACTIVIDAD 2	PREG 1	PREG 3	PREG 4	PREG 6	PREG 7	PREG 9	PREG 10	PREG 11	PREG 13
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	0	1	0
	2	1	1	1	1	1	1	1	0
	0	1	0	1	1	1	0	1	1
	2	1	1	1	1	1	0	1	0
	0	1	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	1	0	1	1	0	1	0
	1	1	0	0	1	0	0	0	2
	0	1	0	1	1	1	1	1	0
	2	1	1	1	1	1	0	1	0
	2	1	1	1	1	1	1	1	0
	0	1	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	1	1	0	1	0
	0	1	0	1	1	1	1	1	2
	0	1	0	1	1	1	1	1	0
	0	1	0	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	0	0	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	0	1	1	1	0	1	0

	RG A RV	RG, RT A RV	RG, RT A RV	RV A RA	RV A RA	RG A RV
ACTIVIDAD 3	PREG 1	PREG 3	PREG 4	PREG 6	PREG 7	PREG 9
	1	1	1	0	0	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	0	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	0	1
	0	1	1	0	1	1
	2	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	0	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	0
	1	0	0	1	1	0
	1	1	1	1	1	1

RG A RV	RG A RV	RG, RT A RV
PREG 10	PREG 11	PREG 13
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	1
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
1	1	1
0	1	1
0	1	0
0	1	0
0	1	0
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	1	0

	RG A RV	RG, RT A RV	RG, RT A RV	RV A RA	RV A RA	RG A RV
ACTIVIDAD 4	PREG 1	PREG 3	PREG 4	PREG 6	PREG 7	PREG 9
	1	1	1	1	1	1
	0	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	0	1	0	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	0	0	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	1
	1	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	0	1
	1	1	1	1	1	1

RG A RV	RG A RV	RG, RT A RV
PREG 10	PREG 11	PREG 13
1	1	0
1	0	0
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	0	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
0	1	0
0	1	0
0	0	0
1	1	0

	RG A RV	RG, RT A RV	RG, RT A RV	RV A RA	RV A RA	RG A RV
ACTIVIDAD 5	PREG 1	PREG 3	PREG 4	PREG 6	PREG 7	PREG 9
	1	1	1	1	1	1
	0	1	1	0	0	1
	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0	1
	0	1	1	0	0	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	1
	0	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	1	1

RG A RV	RG A RV	RG, RT A RV
PREG 10	PREG 11	PREG 13
0	1	1
1	1	0
1	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	1	0
0	1	0
0	1	2
0	0	0
1	1	2
0	1	0
0	0	0
1	1	2
1	1	0
0	1	0
0	0	0

ETAPA 3	RP, RG A RV	RG A RV, RA	RP, RG A RV		RP, RG A RV	RG A RV, RA	RP, RG A RV
ACTIVIDAD 1	PREG 4	PREG 5	PREG 6	ACTIVIDAD 2	PREG 4	PREG 5	PREG 6
A1	1	1	2		1	2	2
A2	0	1	2		1	1	1
A3	0	0	2		1	1	0
A4	0	2	2		1	2	0
A5	0	1	0		1	1	0
A6	0	2	2		1	0	0
A7	1	1	2		1	2	2
A8	0	2	2		0	2	0
A9	0	0	2		0	1	0
A10	0	2	0		0	2	0
A11	0	1	0		0	1	2
A12	1	1	1		0	1	0
A13	0	1	1		0	1	2
A14	0	1	2		0	0	0
A15	1	2	2		0	1	0
A16	0	1	2		0	1	0
A17	1	2	2		1	2	2
A18	0	1	2		0	0	0
A19	0	1	2		0	1	0
A20	0	1	2		0	1	0

	RP, RG A RV	RG A RV, RA	RP, RG A RV		RP, RG A RV	RG A RV, RA	RP, RG A RV
ACTIVIDAD 3	PREG 4	PREG 5	PREG 6	ACTIVIDAD 4	PREG 4	PREG 5	PREG 6
	1	1	0		1	1	2
	0	1	1		1	1	0
	0	1	0		1	1	0
	1	2	0		1	2	0
	0	1	0		1	1	0
	0	2	0		0	0	0
	1	2	2		1	2	2
	0	2	0		1	2	0
	1	1	0		0	1	0
	1	2	0		0	2	0
	1	1	2		1	1	2
	1	1	2		1	1	2
	0	1	2		1	1	0
	0	1	2		0	1	2
	0	2	1		0	2	0
	0	1	1		1	1	1
	0	2	1		1	2	0
	0	1	2		0	1	2
	0	1	0		0	0	0
	1	1	0		1	1	0

	RP, RG A RV	RG A RV, RA	RP, RG A RV
ACTIVIDAD 5	PREG 4	PREG 5	PREG 6
	1	1	0
	1	1	1
	1	1	1
	1	2	1
	0	1	0
	0	2	0
	1	2	2
	1	2	2
	1	1	1
	0	2	0
	1	1	2
	1	1	2
	1	1	2
	0	1	2
	0	1	0
	1	1	0
	1	2	2
	0	1	0
	0	0	0
	1	1	2

ETAPA 4	RG A RV, RA		RG A RV, RA		RG A RV, RA		RG A RV, RA		RG A RV, RA
ACTIVIDAD 1	PREG 1	ACTIVIDAD 2	PREG 1	ACTIVIDAD 3	PREG 1	ACTIVIDAD 4	PREG 1	ACTIVIDAD 5	PREG 1
A1	0		2		1		1		1
A2	2		1		1		1		1
A3	1		0		0		0		0
A4	2		0		0		0		0
A5	0		1		0		0		0
A6	0		1		2		0		2
A7	2		1		2		2		1
A8	1		1		2		1		1
A9	2		1		1		1		1
A10	0		0		2		0		0
A11	2		1		2		1		1
A12	2		2		1		0		1
A13	2		1		1		0		1
A14	2		0		0		1		0
A15	1		2		0		0		0
A16	1		1		0		0		1
A17	2		1		1		2		2
A18	0		1		0		0		0
A19	1		1		1		0		1
A20	2		1		1		1		1

ETAPA 5	RA A RV, RT		RA A RT	RA A RV			RA A RV, RT		RA A RT	RA A RV
ACTIVIDAD 1	PREG 4	PREG 5	PREG 12	PREG 1A	PREG 1B	ACTIVIDAD 2	PREG 4	PREG 5	PREG 12	PREG 1B
A1	1	1	0	1	1		1	1	1	1
A2	0	1	1	1	0		1	0	1	1
A3	0	0	1	0	1		0	0	1	2
A4	0	0	1	1	0		0	0	1	2
A5	0	1	1	0	0		0	0	1	0
A6	0	0	0	0	0		0	0	1	0
A7	0	0	0	1	1		1	1	1	0
A8	0	1	1	0	0		1	1	1	1
A9	1	0	1	1	0		0	1	1	1
A10	0	0	0	0	0		1	1	1	0
A11	0	1	1	0	0		1	1	1	2
A12	1	1	1	0	0		1	1	1	2
A13	1	1	1	0	0		1	1	1	0
A14	1	1	1	1	1		1	0	1	1
A15	0	0	1	1	0		0	1	1	1
A16	1	1	0	0	0		0	1	1	0
A17	0	0	1	0	1		1	1	1	1
A18	0	0	0	0	0		0	0	1	2
A19	0	0	0	0	0		0	0	1	0
A20	1	1	1	0	0		0	1	1	0

	RA A RV, RT		RA A RT	RA A RV			RA A RV, RT		RA A RT	RA A RV
ACTIVIDAD 3	PREG 4	PREG 5	PREG 12	PREG 1A	PREG 1B	ACTIVIDAD 4	PREG 4	PREG 5	PREG 12	PREG 1C
	1	1	1	1	1		1	1	1	0
	0	0	1	1	0		0	0	0	0
	0	0	1	1	2		0	0	0	1
	1	0	0	0	1		1	0	1	1
	0	0	0	0	0		0	0	0	1
	0	0	1	0	0		0	0	1	0
	0	1	0	0	0		1	1	1	2
	0	0	1	1	1		0	0	1	0
	1	0	1	1	1		1	1	1	0
	1	0	1	0	0		1	0	1	0
	1	0	1	1	1		1	1	0	1
	1	0	1	1	2		0	0	1	2
	1	1	1	0	1		1	1	0	0
	0	0	1	1	1		1	0	1	1
	0	0	1	1	1		1	0	1	0
	0	0	1	0	1		0	0	0	0
	0	0	1	1	1		0	1	0	1
	1	0	1	0	1		1	0	1	0
	0	0	1	0	1		0	0	0	1
	1	0	1	0	0		1	0	1	2

	RA A RV, RT		RA A RT	RA A RV
ACTIVIDAD 5	PREG 4	PREG 5	PREG 12	PREG 1C
	1	1	1	2
	0	0	1	1
	0	1	1	2
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	0	0	1	0
	1	0	1	2
	0	0	1	0
	1	1	1	1
	0	0	1	2
	1	1	1	2
	0	0	1	2
	1	1	1	2
	0	0	1	1
	0	0	1	2
	0	0	0	0
	1	1	1	2
	0	0	1	0
	0	0	1	1
	1	1	1	1