



Universidad Autónoma de Zacatecas  
"Francisco García Salinas"  
Unidad Académica de Física

---



# Estudio teórico y observacional de la energía oscura

## T E S I S

Que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN CIENCIAS BÁSICAS**  
(Orientación en Física)

PRESENTA

**M. en C. Mario Alejandro Herrera Amante**

DIRECTORES DE TESIS

**Dr. Miguel Ángel García Aspeitia**

**Dr. Juan Aldebaran Magaña Zapata**

Zacatecas, México

Julio del 2020



A mis padres por ser el gran soporte de mi vida

A mi esposa por su apoyo incondicional



## Agradecimientos

Al Dr. Miguel Ángel García Aspeitia por encabezar este proyecto, por guiarme en el mundo de la ciencia y por ayudarme a crecer académicamente.

Al Dr. Juan Aldebaran Magaña Zapata por sus enseñanzas en diversos temas, por brindarme un gran apoyo en un país extranjero y por permitirme ampliar mis barreras de conocimiento en la cosmología.

A la Dra. Verónica Motta por todas sus enseñanzas, por orientarme en varios temas de Astronomía y por aconsejarme para ser un mejor científico.

Al Dr. Tomás Verdugo por su disposición para instruirme y apoyarme a entender mejor acerca de los lentes gravitacionales.

A la Universidad Autónoma de Zacatecas por permitirme realizar mis estudios y principalmente a la Unidad Académica de Física por haberme brindado muchas oportunidades. Además de su apoyo económico para realizar la estancia de investigación en la Universidad de Valparaíso y poder asistir a un taller posterior en la misma Universidad.

A todos los profesores de la UAF que me han formado a lo largo de los años y han aportado considerablemente en mi conocimiento.

Al Dr. Francisco Javier Domínguez Garay y al Dr. Rubén Ibarra Reyes por todo el apoyo brindado.

Al plantel administrativo de la UAZ, en especial a los trabajadores de la Unidad Académica de Física por su disposición en todo momento.

Al apoyo económico recibido por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT a través de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC), en particular al programa de Doctorado en Ciencias Básicas con número PNPC 3911, mediante la beca nacional **490862**.

A la **Universidad de Valparaíso, Chile**. y todos sus profesores, donde realicé mi estancia de investigación, por proporcionarme un espacio de trabajo y brindarme la oportunidad de seguir creciendo como científico y como persona. Nuevamente al CONACyT por proporcionarme la beca mixta **445931** y brindarme la oportunidad de ampliar mis fronteras de conocimiento.

Al Consejo Zacatecano de Ciencia, Tecnología e Innovación COZCyT por apoyarme económicamente para realizar actividades académicas dentro y fuera de mi país. En especial al Dr. Agustín Enciso por facilitarme los procesos.

Al Dr. Sinhué Hinojosa por ser parte de mi comité durante todo el proceso, por sus consejos y su apoyo.

Al Dr. Carlos Ortiz por su disposición y ayuda, y por formar parte de mi comité.

Al Dr. Jaime Suárez por pertenecer parcialmente a mi comité e impulsarme a mejorar mis habilidades académicas.

Al Dr. Luis Ureña por sus recomendaciones para enriquecer este trabajo.

Al Dr. Juan Carlos Martínez por ser mi sinodal y apoyarme en el proceso.

Al Dr. Jose Juan por sus atinados comentarios para mejorar el trabajo.

Al Dr. Javier Chagoza por sus diversas aportaciones a la mejoría del documento.

A mis compañeros y amigos del Doctorado Rogelio, Carlos, Alejandra, David, Emmanuel, Fernando y en especial a Cesar el cuál me acompañó en todo el camino.

Al Dr. Leonardo Quintanar por transmitir su conocimiento en las reuniones semanales.

A mi esposa, por apoyarme, aconsejarme y darme ánimos en todo momento, por ayudar a convertirme en una mejor persona y un mejor científico.

A mis padres que siempre tendrán unas palabras de aliento, y porque nunca dejaré de aprender de ellos. Por impulsarme a conseguir siempre mis metas.

A mis hermanos que siempre serán un ejemplo para mí.

A mi nueva familia, la familia Argüelles Estrada por su soporte y apoyo.

A todos mis amigos y familiares que aportaron consejos de ánimo, interés y asombro, ayudándome a seguir adelante.



## Resumen

La primera evidencia observacional de la aceleración cósmica fue en 1998, cuando un grupo de colaboradores encabezados por Adam Riess, Perlmutter, Schmidt la observaron usando supernovas de tipo Ia (SN Ia) conocidas como candelas estándares en el Universo. Desde entonces la expansión acelerada del Universo ha sido confirmada por diferentes e independientes observaciones usando diversas técnicas que involucran objetos astrofísicos. Desde ese momento los científicos han tratado de darle una explicación a este problema, conocido como el problema de la energía oscura DE (dark energy por sus siglas en inglés). Este problema nos ha llevado a adoptar el modelo estándar de cosmología llamado (por sus siglas en inglés)  $\Lambda$ CDM el cuál contiene materia oscura fría más una constante cosmológica propuesta anteriormente por Albert Einstein. A pesar de ser un modelo exitoso para describir la dinámica del Universo en diferentes etapas, confronta algunos problemas, entre los más importantes se encuentra la diferencia de 120 ordenes de magnitud entre el valor de  $\Lambda$  que predice la teoría y lo que se observa. Por esta razón han surgido modelos alternativos para tratar de explicar este y otros problemas. Una de las preguntas más importantes acerca de la expansión acelerada del Universo es saber si la DE puede evolucionar en el tiempo o ha permeado el Universo de manera constante desde sus inicios, tal y como predice el modelo estándar de cosmología. De esta forma, en un poco más de 20 años la DE se ha situado como uno de los problemas más relevantes de la ciencia moderna. Como consecuencia este trabajo está enfocado en el estudio de la DE desde perspectivas diferentes y complementarias. Es esencial obtener una teoría que pueda describir el funcionamiento de la aceleración cósmica, así que analizaremos ciertos modelos que producen una expansión acelerada en el Universo en la actualidad. Además, propondremos un modelo basado en dimensiones extras, capaz de reproducir una expansión acelerada del Universo, sin necesidad de recurrir a energía oscura. Por otro lado, los modelos estudiados en este trabajo serán confrontados contra diversas pruebas, realizadas a través de diferentes observaciones astrofísicas. Entre las más importantes se encuentran los sistemas lentes gravitacionales fuertes SLS (strong lensing systems), las mediciones de cronómetros cósmicos  $H(z)$ , oscilaciones acústicas



de bariones (BAO, baryon acoustic oscillations) y SN Ia. Finalmente, haciendo uso de un análisis de datos estadísticos, estudiaremos y compararemos los diferentes modelos de DE presentados en este trabajo, y destacaremos los resultados más relevantes que obtuvimos en esta investigación.

## Abstract

The first observational evidence of the cosmic acceleration was discovered in 1998 by two groups of collaborators led by Adam Riess, Perlmutter, Schmidt, they observed type Ia supernovae (SN Ia) known as standard candles. Since then, the accelerated expansion of the Universe has been confirmed by different and independent observations using various techniques involving astrophysical objects. Scientists have tried to explain this problem, known as the problem of dark energy (DE). This problem has led us to develop the standard model of cosmology called  $\Lambda$ CDM. This model contains cold dark matter plus a cosmological constant previously proposed by Albert Einstein. Despite being a successful model to describe the dynamics of the Universe at different epochs, it faces some problems. Particularly important is the difference of 120 orders of magnitude between theoretical predictions for the value of  $\Lambda$  and what is observed. Therefore, alternative models have emerged to explain this and other problems. One of the most important questions about the accelerated expansion of the Universe is whether DE can evolve over time or not, as predicted by the standard model of cosmology. Thus, over the past 20 years, DE has positioned itself as one of the most relevant problems of modern science. As a consequence this work is focused on the study of DE from different and complementary perspectives. It is essential to obtain a theory that can describe the mechanism of cosmic acceleration, therefore we analyze some models that produce an accelerated expansion in the Universe at late times. In addition, we propose a model based on extra dimensions, capable of reproducing an accelerated expansion of the Universe, without resorting to dark energy. Furthermore, by using various techniques, the models studied in this work will be confronted with different astrophysical observations. Among the most important are gravitational strong lens systems (SLS), cosmic chronometers  $H(z)$ , baryons acoustic oscillations (BAO) and SN Ia. Finally, using data analysis, we compare the different DE models presented in this work with

X

different techniques, and we highlight the most relevant results that we obtained in this research.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice</b>	<b>X</b>
<b>1. Cosmología moderna</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
<b>2. Pruebas observacionales cosmológicas</b>	<b>7</b>
2.1. Datos observacionales de Hubble . . . . .	7
2.2. Supernovas tipo Ia . . . . .	10
2.3. Lentes gravitacionales . . . . .	13
2.4. Estadística Bayesiana en Cosmología . . . . .	18
2.4.1. Modelado de datos . . . . .	21
2.4.2. Método Monte Carlo . . . . .	23
2.5. Selección de modelo . . . . .	25
<b>3. Modelos de Energía Oscura</b>	<b>27</b>
3.1. Modelo estandar de comología . . . . .	27

3.1.1.	La formación de estructura en el Universo . . . . .	34
3.2.	Análisis de las anisotropías del CMB . . . . .	37
3.3.	Parámetros cosmológicos . . . . .	42
3.4.	Modelo $\omega$ CDM . . . . .	45
3.5.	Cosmología Cardassiana . . . . .	46
3.5.1.	Modelo Cardassiano Original . . . . .	46
3.5.2.	Modelo Cardassiano politrópico modificado . . . . .	48
3.6.	Parametrizaciones de la Energía Oscura . . . . .	49
3.6.1.	Parametrización CPL . . . . .	49
3.6.2.	Parametrización JBP . . . . .	50
3.7.	Modelo de brana con tensión variable . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Resultados y Conclusiones</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1.	Resultados . . . . .	53
4.2.	Resultados del modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	54
4.3.	Resultados del modelo $\omega$ CDM . . . . .	56
4.4.	Resultados de los modelos Cardassianos . . . . .	62
4.4.1.	cJLA vs. fJLA en la estimación de los parámetros cosmológicos Cardassianos . . . . .	63
4.4.2.	Los efectos de la submuestra homogénea de DOH en la estimación de parámetros. . . . .	65
4.4.3.	Los efectos de un prior gaussiano diferente en $h$ . . . . .	66
4.4.4.	Implicaciones cosmológicas de las constricciones de los modelos CO y CPM . . . . .	68
4.5.	Resultados del modelo CPL y JBP . . . . .	75
4.5.1.	Constricciones para CPL . . . . .	77
4.5.2.	Constricciones para el modelo JBP . . . . .	79
4.6.	Comparación de las constricciones cosmológicas con lentes gravitacionales para los modelos $\omega$ CDM, CPL y JBP . . . . .	83

4.7. Resultados del modelo de brana con tensión variable VBT . . . . .	89
4.8. Comparación entre los diferentes modelos cosmológicos . . . . .	92
4.9. Conclusiones . . . . .	97
<b>A. Apéndice</b>	<b>105</b>
A.1. Compilación de datos observacionales de Hubble . . . . .	105
A.1.1. Muestra homogénea de datos provenientes de BAO . . . . .	105
A.2. Muestra comprimida JLA . . . . .	108
A.3. Compilación de sistemas lentes gravitacionales . . . . .	108
A.3.1. SLS con valores para la ecuación de la lente ( $D^{obs} > 1$ ) . . . . .	108
<b>Bibliografía</b>	<b>116</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>140</b>



# Capítulo 1

## Cosmología moderna

### 1.1. Introducción

Hoy en día, el Universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, que a lo largo de los años se ha medido con diferentes técnicas aplicadas a un gran número de objetos astrofísicos con características peculiares, los cuales nos permiten entender y modelar la evolución del Universo a lo largo de su existencia. A pesar de poder medir esta expansión acelerada, teóricamente se desconoce el origen del mecanismo por el cual ocurre este proceso en el Universo. Sin duda, conocer a detalle la “aceleración cósmica” nos ayudará a comprender mejor el funcionamiento del Universo y probablemente develará nueva física y con esto nueva tecnología.

El contraste de modelos cosmológicos con observaciones modernas es fundamental para comprender la naturaleza del  $\sim 95\%$  de nuestro Universo (Aghanim et al. [1]) conocido como el sector oscuro, que se refiere a  $\sim 26\%$  del contenido total del Universo conocido como materia oscura (DM por sus siglas en inglés) la cual es responsable de la formación de la estructura a gran escala, y  $\sim 69\%$  de energía oscura (DE), la posible causa de la expansión acelerada actual [2, 3, 4]. En el paradigma más aceptado, la DM es no relativista en la época de desacoplamiento (es decir, fría), y la forma tradicional de tratar la naturaleza de la DE se consigue agregando una constante cos-

mológica efectiva (CC) en el tensor de energía-momento en las ecuaciones de campo de Einstein. Se cree que el origen de la CC está relacionado con las fluctuaciones del vacío cuántico, pero esta hipótesis está plagada de patologías severas debido a su incapacidad para renormalizar la densidad de energía del vacío cuántico, obteniendo una discrepancia de  $\sim 120$  órdenes de magnitud entre las estimaciones teóricas y las observaciones cosmológicas [5, 6]. La CC también tiene el problema de la coincidencia, es decir, que la transición del Universo de una fase desacelerada a una acelerada se produce en los últimos tiempos.

Los problemas teóricos de la CC han llevado a la comunidad a proponer una variedad de ideas para reproducir la aceleración cósmica tardía. Algunos de ellos postulan la existencia de la DE, por ejemplo, quintaesencia [7, 8], campos fantasmas [9, 10], gas de Chaplygin [11, 12, 13], parametrizaciones dinámicas  $w(z)$  para la DE [14, 15, 16], etc [17, 18, ver para una revisión exhaustiva de todas estas alternativas]. Otros modelos modifican la gravedad de Einstein para que se asemeje a la DE como modelos de branas [19, 20], modelos  $f(R)$  [21, 22, 23], teorías tenso-escalares [24, 25, 26], gravedad unimodular [27, 28], entre otros.

Se han propuesto también escenarios de dimensiones extra para resolver los problemas de la CC, como los modelos de mundo brana, que aceleran el Universo bajo la suposición de asumir un espacio-tiempo de  $4 + 1$  dimensiones (el bulto) que contiene una variedad de dimensión ordinaria  $3+1$  (la brana). Sin embargo, la mayoría de ellos (incluidos los modelos de Randall y Sundrum (RS)<sup>1</sup>) logran una aceleración cósmica tardía estable solo al incluir DE [29, 30]. Aunque los modelos con tensión de brana variable (VBT) originados por suposiciones termodinámicas (ley de Eötvös) se han estudiado previamente<sup>2</sup> [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], no han sido contrastados con observaciones recientes o aún necesitan introducir un fluido de DE para reproducir la aceleración cósmica tardía.

Por otro lado, los datos observacionales se utilizan para probar los modelos propuestos desde diferentes perspectivas. Entre las técnicas más utilizadas se encuentran las mediciones de la radia-

---

<sup>1</sup>Los modelos de RS se dividen en el caso de dos branas (RSI) y una brana (RSII) respectivamente.

<sup>2</sup>Observe que solo los modelos con tensión de brana constante han sido contrastados con observaciones astrofísicas.



ción cósmica de fondo de microondas (CMB por sus siglas en inglés) [1, 40], oscilaciones acústicas de bariones (BAO por sus siglas en inglés) [41, 42, 43, 44], Supernovas de tipo Ia [45] y datos observacionales de Hubble [DOH, 46, 47, 48]. La coherencia en los parámetros cosmológicos entre diferentes técnicas, en lugar de mediciones más precisas, es deseable para comprender mejor la naturaleza de la DE. En los últimos años, la comunidad ha realizado varios esfuerzos para incluir sistemas lentes gravitacionales en el estudio de la evolución del Universo. Algunos de los pioneros son [49, 50], que utilizaron solo un sistema lente fuerte para estudiar algunos de los modelos cosmológicos más populares. Grillo et al. [51] introdujeron una metodología para estimar parámetros cosmológicos usando sistemas lentes gravitacionales fuertes (SLS por sus siglas en inglés) [ver también 52, 53, 54], aplicando una relación entre el radio de Einstein  $\theta_E$  y la dispersión de velocidades estelar  $\sigma$  asumiendo un perfil isotérmico para la distribución total de materia de la lente (galaxias elípticas). Sus simulaciones encontraron que el método es lo suficientemente preciso como para obtener información sobre la cosmología. Llegaron a la conclusión de que la dispersión de velocidades estelar y la dispersión de velocidad del modelo de lente isoterma son muy similares en la primera extensión del modelo estandar de cosmología, el modelo  $\omega$  de materia oscura fría ( $\omega$ CDM). Biesiada et al. [55] utilizaron el mismo procedimiento que compara una relación de distancia,  $D^{obs}$ , construida a partir de observaciones de SLS como el radio de Einstein  $\theta_E$  y la dispersión de velocidades espectroscópica de la galaxia del lente, con una contraparte teórica,  $D^{th}$ . Al utilizar una muestra que contiene 20 SLS, demostraron que esta técnica es útil para proporcionar información sobre la DE. Así mismo Cao et al. [56] actualizaron la muestra a 80 sistemas y propusieron una modificación que tiene en cuenta las desviaciones de la esfericidad, es decir, de la esfera singular isoterma (SIS por sus siglas en inglés). Más tarde, Cao et al. [57] consideraron las desviaciones del perfil de la lente debidas a la evolución del redshift de las galaxias elípticas mediante el uso de distribuciones masivas esféricamente simétricas de la ley de potencia para las lentes y también aumentaron la compilación hasta 118 puntos. También exploran las consecuencias del uso de dispersiones de velocidad con corrección de apertura en las estimaciones de parámetros cosmológicos. Algunos autores han señalado la necesidad de una muestra suficientemente grande

para probar modelos de DE con mayor precisión [58]. Por ejemplo, [59] ha enfatizado que una muestra de  $\sim 200$  SLS puede discernir entre el modelo  $R_h = ct$  y el modelo estándar. Además, Qi et al. [60] simularon datos de lentes fuertes para constreñir la curvatura del Universo y descubrieron que, al aumentar la muestra (16000 lentes) y combinarla con radio cuásares, podría verse constreñida con una precisión de  $\sim 10^{-3}$ . Recientemente, Leaf and Melia [61] han revisado esta herramienta cosmológica con la mayor muestra de SLS (158) hasta ahora, incluyendo 40 nuevos sistemas presentados por [62]. Los autores propusieron un nuevo enfoque para mejorar esta técnica al introducir un nuevo parámetro  $\sigma_x$  en la fórmula de la propagación del error para el cociente observacional de distancias de diámetro angular ( $\delta D^{obs}$ ), esto con el fin de tener en cuenta la dispersión entre una elipse singular isoterma (SIE por sus siglas en inglés) y cualquier otra fuente de error proveniente de las mediciones. En su análisis, excluyeron 29 SLS que están fuera de la región  $0 < D_{obs} < 1$ , y el sistema SL2SJ085019-034710 [63] que parece ser un valor atípico para todos los modelos que estudiaron. Sus resultados muestran que  $\sigma_x = 12.2\%$  proporciona constricciones cosmológicas estadísticamente más significativas. Finalmente, [64] usó 157 SLS para analizar el modelo  $\Lambda$ CDM. Consideraron una distribución de masa de la lente  $\rho(r) = \rho_0 r^{-\gamma}$  y tres caminos para el posible valor del parámetro  $\gamma$ : un valor constante, una dependencia con el redshift de la lente ( $z_l$ ), y una dependencia tanto de la densidad de masa superficial como del redshift de la lente, llegaron a la conclusión de que a pesar de que el parámetro  $\Omega_{0m}$ , es el único parámetro libre para el modelo  $\Lambda$ CDM, es un parámetro muy sensible al modelo de la lente, y proporciona constricciones débiles que también están en tensión con las mediciones de Planck.

En este trabajo compilamos una nueva muestra de 205 sistemas lentes gravitacionales fuertes (la muestra mas grande actualmente), que han sido medidos por diferentes colaboraciones: Sloan Lens ACS survey [65, SLACS]; BOSS Emission-Line Lens Survey [66, BELLS]; CfA-Arizona Space Telescope LEns Survey [67, CASTLES]; Lenses Structure and Dynamics survey [68, LSD]; CFHT Strong Lensing Legacy Survey [69, SL2S]; Strong-lensing Insights into Dark Energy Survey [70, STRIDES]. Hemos agregado 48 sistemas a la última compilación dada por [64] con el objetivo de constreñir los parámetros cosmológicos para el modelo  $\omega$  de materia oscura fría ( $\omega$ CDM), el mode-

lo CPL (Chevallier-Polarski-Linder) propuesto por Chevallier and Polarski [14] y Linder [15] y la parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura JBP (Jassal-Bagla-Padmanabhan) postulada por Jassal et al. [16]. Además, algunos modelos se prueban usando una muestra actualizada (la más grande del mundo) de datos observacionales del parámetro de Hubble (DOH) y los datos de SN de tipo Ia en una muestra comprimida (cJLA) y completa (fJLA) dada por Betoule et al. [71]. Por último, se propone un modelo de energía oscura, motivado por la teoría de branas, donde se asume que nuestro Universo 4D, está embebido en un bulto de 5D con ciertas propiedades geométricas. Este modelo capaz de describir una aceleración cósmica tardía, logra hacerlo sin la necesidad de adoptar un fluido con características exóticas, así la expansión acelerada logra explicarse desde un punto de vista geométrico donde la gravedad puede escapar a esta dimensión extra. Este modelo será contrastado por las técnicas mencionadas anteriormente.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 2 abordaremos las diferentes técnicas con las que contrastamos los parámetros de los diferentes modelos cosmológicos. Estas técnicas están soportadas por diferentes mediciones astronómicas hechas por diversos instrumentos. En el capítulo 3 presentamos el enfoque para estudiar el Universo a partir de la teoría de la Relatividad General y estudiamos algunos de los modelos alternativos más relevantes para describir la dinámica del Universo, además presentamos las ecuaciones modificadas de Friedmann<sup>3</sup>, provenientes de asumir diferentes comportamientos para la energía oscura. Por último, en el capítulo 4 presentamos los resultados y las conclusiones generales y más importantes de este trabajo.

---

<sup>3</sup>La ecuación de Friedmann describe el comportamiento del Universo en sus diferentes etapas proporcionándonos características de su evolución.



# Capítulo 2

## Pruebas observacionales cosmológicas

En este capítulo nos familiarizaremos con algunas de las técnicas más importantes que existen para entender el comportamiento del Universo a lo largo de su historia. Estas consisten en observar diferentes objetos astrofísicos cuyas propiedades principales están ligadas a la posición que ocupan en el Universo respecto a nosotros (planeta Tierra), en nuestro caso usaremos las observaciones de galaxias de tipo temprano, supernovas de tipo Ia, lentes gravitacionales fuertes y oscilaciones acústicas de bariones. La metodología usada para cada técnica y los datos observacionales que consideramos se describen a continuación.

### 2.1. Datos observacionales de Hubble

El método de “edad diferencial”(ED) propuesto por Jimenez and Loeb [46], nos permite medir la tasa de expansión del Universo a un corrimiento al rojo ( $z$ ) específico, es decir,  $H(z)$ . Esta técnica compara las edades de las galaxias de tipo temprano (es decir, sin formación estelar continua) con metalicidades similares y separadas por un pequeño intervalo de desplazamiento al rojo ( $\Delta z$ ) [por ejemplo, 72, mide  $\Delta z \sim 0.04$  en  $z < 0.4$  y  $\Delta z \sim 0.3$  en  $z > 0.4$ ]. Por lo tanto, un punto de  $H(z)$

puede estimarse usando la siguiente ecuación:

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (2.1)$$

donde  $\frac{dz}{dt}$  se mide utilizando la función de ruptura de 4000 Å (D4000) en función del corrimiento al rojo. Una fuerte ruptura de D4000 depende de la metalicidad y la edad de la población estelar de la galaxia de tipo temprano. Por lo tanto, la técnica de Jimenez y Loeb ofrece medir directamente el parámetro de Hubble usando datos espectroscópicos de galaxias en evolución pasiva para comparar sus edades y metalicidades, proporcionando mediciones de  $H(z)$  que son independientes del modelo. Estos puntos  $H(z)$  son dados por diferentes autores como [72, 73, 74, 75, 76], y constituyen la mayoría de nuestra muestra (31 puntos). Además, utilizamos 20 puntos de mediciones provenientes de BAO, algunos de ellos están correlacionados porque pertenecen al mismo análisis o hay una superposición entre las muestras de galaxias. Además, algunos puntos de datos están sesgados porque se estiman utilizando un horizonte de sonido,  $r_d$ <sup>1</sup>, en la época de arrastre ( $z_d$ ), que depende del modelo cosmológico [77]. Los puntos proporcionados por diferentes autores usan valores distintos para  $r_d$  en las medidas de BAO, por ejemplo Anderson et al. [78] toma 153.19 Mpc mientras que Gaztanaga et al. [79] elige 153.3 Mpc, etc.

La tabla A.1 contiene nuestra compilación de mediciones del parámetro de Hubble acumulando un total de 51 puntos<sup>2</sup> [otras compilaciones recientes son proporcionadas por 80, 81, 82]. Hemos incluido todos los puntos de las referencias anteriores, aunque se ha dado prioridad a las mediciones que provienen del método de ED y que también se han medido con oscilaciones acústicas de bariones para el mismo corrimiento al rojo. Como referencia para comparar nuestros resultados, también damos el punto medido por Riess et al. [83] de  $73.24 \pm 1.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  para la constante de Hubble  $H_0$  con 2.4% de incertidumbre. Los autores sostienen que esta mejora se debe a una mejor calibración (usando Cefeidas) de la distancia a 11 galaxias anfitrionas de Supernovas

---

<sup>1</sup>el horizonte de sonido es la distancia comóvil máxima de desplazamiento que las ondas sonoras podrían viajar al desplazamiento al rojo  $z_d$ .

<sup>2</sup>La muestra con el mayor número de puntos en la actualidad.

tipo Ia, reduciendo el error en casi uno por ciento. Utilizamos esta muestra para constreñir los parámetros cosmológicos de algunos de los modelos más importantes y competitivos y de esta manera, encontrar indicios para el comportamiento de la expansión acelerada del Universo. La función chi-cuadrada (la definición se verá en la sección 2.4.1) para los datos originales de Hubble (DOH) viene dada como:

$$\chi_{\text{DOH}}^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{DOH}}} \frac{[H(z_i) - H_{\text{obs}}(z_i)]^2}{\sigma_{H_i}^2}, \quad (2.2)$$

donde  $N_{\text{DOH}}$  es el número de datos observacionales de Hubble (DOH)  $H_{\text{obs}}(z_i)$  a un  $z_i$ ,  $\sigma_{H_i}$  es el error asociado, y  $H(z_i)$  es el valor teórico dado un modelo cosmológico. En el siguiente capítulo, se introducirán las bases teóricas de la cosmología moderna, y se presentarán diferentes modelos cosmológicos que permiten explicar el proceso evolutivo del Universo.

### Una muestra homogénea de DOH

Como se mencionó anteriormente, los DOH provenientes de BAO están sesgados debido a que asumen una cosmología  $\Lambda$ CDM para estimar  $r_d$ . Diferentes autores usaron distintos valores en los parámetros cosmológicos y obtuvieron diferentes horizontes de sonido en la época de arrastre, que se usan para romper la degeneración en  $Hr_d$ . Además, para determinar  $H(z)$  a partir de las características de BAO, se tienen en cuenta errores sistemáticos muy conservadores [consulte la discusión de 77, 84].

Como un primer intento de homogeneizar y lograr la independencia del modelo para los DOH obtenidos con BAO, tomamos el valor  $Hr_d$  para cada punto de los datos y asumimos un valor común  $r_d$  para todo el conjunto de datos. Consideramos dos estimaciones de  $r_d$ :  $r_{\text{dpl}} = 147.33 \pm 0.49$  Mpc y  $r_{\text{dw9}} = 152.3 \pm 1.3$  Mpc de las mediciones de Planck 2015 [85] y WMAP9 [86] respectivamente. Además, también tomamos en cuenta otras tres fuentes de errores que podrían afectar a  $r_d$  debido a su contaminación por un modelo cosmológico. El primero proviene del error reportado de cada valor. El segundo considera la diferencia entre el horizonte de sonido dado por WMAP9 y Planck.

Este error es el que produce el mayor impacto en el valor medio  $r_d$  (3.37% y 3.26% para los datos de Planck y WMAP9 respectivamente). El último error a tener en cuenta es la diferencia entre  $r_d$  utilizado para obtener los DOH y el que se obtendría si asumimos otro modelo cosmológico en lugar de  $\Lambda$ CDM. Por lo tanto, calculando el horizonte de sonido para el modelo  $\omega$ CDM de la ecuación de estado constante ( $\omega$ ),  $r_{d\omega\text{cdm}} = 148.38$  Mpc [se proporcionan los parámetros cosmológicos para este modelo por 87]. Agregando en cuadratura el porcentaje de estos tres errores, obtenemos  $r_{\text{dpl}} = 147.33 \pm 5.08$  Mpc y  $r_{\text{dw9}} = 152.3 \pm 6.42$  Mpc. Finalmente, propagamos este nuevo error a la cantidad  $H(z)$  para asegurar una nueva muestra homogeneizada e independiente del modelo (Tabla A.2).

## 2.2. Supernovas tipo Ia

Las observaciones de SN Ia aportan evidencia de la expansión acelerada del Universo. Estos objetos se consideran candelas estándar debido a que todas las explosiones de SN Ia tienen aproximadamente la misma luminosidad y además son extremadamente brillantes, siendo perfectas para observarlas a distancias muy lejanas. De esta manera son útiles para medir la geometría y la dinámica del Universo y se han utilizado ampliamente para constreñir modelos cosmológicos alternativos para explicar la aceleración cósmica de los últimos tiempos. Actualmente, hay varias muestras compiladas de SN Ia, por ejemplo, la compilación Union 2.1 de Suzuki et al. [88] que consta de 580 puntos en el rango para  $z$  entre  $0.015 < z < 1.41$ , y la muestra Lick Observatory Supernova Search (LOSS) que contiene 586 SN Ia en el rango del corrimiento al rojo  $0.01 < z < 1.4$  [89]. Recientemente, Betoule et al. [71] presentó la llamada muestra completa JLA (fJLA) que contiene 740 puntos que abarcan un rango entre  $0.01 < z < 1.2$ . Los mismos autores también proporcionan la información de los datos de fJLA en un conjunto comprimido (cJLA) de 31 módulos de distancia binned  $\mu_b$  que abarcan un rango de desplazamiento al rojo  $0.01 < z < 1.3$ , que aún sigue siendo preciso para algunos modelos donde la distancia de luminosidad isotrópica evoluciona ligeramente con desplazamiento al rojo. Por ejemplo, cuando el cJLA se usa en combinación con otros datos



cosmológicos, la diferencia entre fJLA y cJLA en los valores medios para los parámetros del modelo  $\omega$ CDM es como máximo  $0.018\sigma$ . Aquí utilizamos las muestras fJLA y cJLA para estimar los parámetros de algunos modelos cosmológicos que se describirán en el siguiente capítulo, como es el modelo cardassiano original (CO), y el modelo cardassiano politrópico modificado (CPM). Además se realizarán las constricciones de los parámetros cosmológicos del modelo de brana con tensión variable mencionado anteriormente, y se proporcionarán las bases para estudiar el Universo desde un punto de vista estadístico.

### Muestra JLA completa

Como se mencionó, la muestra JLA completa contiene 740 SN Ia confirmadas en el intervalo  $0.01 < z < 1.2$ , que es una de las muestras de SN Ia más recientes<sup>3</sup> y confiables en la actualidad. Utilizamos esta muestra para constreñir los parámetros cosmológicos de ambos modelos cardassianos y del modelo de branas tipo Randall Sundrum II con tensión variable. La función chi-cuadrada para la muestra fJLA se calcula como:

$$\chi_{\text{fJLA}}^2 = (\hat{\mu} - \mu_{\text{teo}})^\dagger \mathbf{C}_\eta^{-1} (\hat{\mu} - \mu_{\text{teo}}), \quad (2.3)$$

donde  $\mu_{\text{teo}} = 5 \log_{10}(d_L/10pc)$  es el valor teórico del módulo de distancia una vez asumido un modelo cosmológico en la distancia luminosa  $d_L$ , dada por:

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{E(z', \Theta)}, \quad (2.4)$$

siendo  $E(z', \Theta)$  el parámetro de Hubble adimensional, y  $\mathbf{C}_\eta$  es la matriz de covarianza de  $\hat{\mu}$  proporcionada por Betoule et al. [71], y es construida de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_\eta = (\mathbf{C}_{\text{cal}} + \mathbf{C}_{\text{model}} + \mathbf{C}_{\text{bias}} + \mathbf{C}_{\text{host}} + \mathbf{C}_{\text{dust}}) + (\mathbf{C}_{\text{pecvel}} + \mathbf{C}_{\text{nonIa}}) + \mathbf{C}_{\text{stat}}, \quad (2.5)$$

---

<sup>3</sup>Era la muestra de SN Ia más reciente cuando se realizó el trabajo, ahora es la muestra Pantheon [? ]

donde  $\mathbf{C}_{\text{cal}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{model}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{bias}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{host}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{dust}}$  son las incertidumbres sistemáticas asociadas con la calibración, el modelo de curva de luz, correcciones por contaminación, la función escalón de la masa, e incertidumbres del polvo respectivamente.  $\mathbf{C}_{\text{pecvel}}$  y  $\mathbf{C}_{\text{nonIa}}$  corresponden a incertidumbres sistemáticas en las correcciones en la velocidad peculiar y la contaminación del diagrama de Hubble por no tener eventos de SN Ia respectivamente.  $\mathbf{C}_{\text{stat}}$  corresponde a una incertidumbre estadística obtenida por la propagación del error de la curva de luz. Finalmente  $\hat{\mu}$  es dado por

$$\hat{\mu} = m_b^* - (M_B - \alpha \times X_1 + \beta \times C), \quad (2.6)$$

donde  $m_b^*$  corresponde al pico de la magnitud observada,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $M_B$  son parámetros redundantes en las estimaciones de distancia. Las variables  $X_1$  y  $C$  describen el estiramiento en el tiempo de la curva de luz y el color de la Supernova con el brillo máximo, respectivamente. La magnitud absoluta  $M_B$  está relacionada con la masa estelar del huésped ( $M_{\text{estelar}}$ ) por la función escalón:

$$M_B = \begin{cases} M_B^1 & \text{if } M_{\text{stellar}} < 10^{10} M_{\odot}, \\ M_B^1 + \Delta_M & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Asumiendo un modelo cosmológico ( $E(z)_{\text{teo}}$ ) para calcular la distancia luminosa y sustituyendo la ecuación (2.5) y (2.6) en (2.3), obtenemos la función chi-cuadrada  $\chi_{\text{JLA}}^2$  para cualquier modelo cosmológico que quiera ser puesto a prueba bajo las observaciones de Supernovas tipo Ia, las famosas candelas estándares del Universo.

### Forma comprimida de la muestra JLA

La tabla A.3 muestra los 31 módulos de distancia bineados al corrimiento al rojo bineado  $z_b$ . La función chi-cuadrada para la muestra cJLA se calcula como:

$$\chi_{\text{cJLA}}^2 = \mathbf{r}^\dagger \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{r}, \quad (2.8)$$

donde  $C_b$  es la matriz de covarianza dada por Betoule et al. [71], y  $\mathbf{r}$  es dado por

$$\mathbf{r} = \mu_b - M - \log_{10} d_L(\mathbf{z}_b, \Theta), \quad (2.9)$$

donde  $M$  es un parámetro redundante y la distancia luminosa ha sido definida en la ecuación (2.4). Sustituyendo cualquier modelo cosmológico en la última expresión, podemos construir la función chi-cuadrada comprimida  $\chi_{\text{CJLA}}^2$  que nos permita poner a prueba diferentes modelos cosmológicos de una manera más eficiente, ahorrándonos tiempo de cómputo sin que nuestros resultados cambien drásticamente en comparación con la muestra completa.

## 2.3. Lentes gravitacionales

El efecto lente gravitacional se refiere a la curvatura de la luz de una fuente distante (por ejemplo una galaxia) debida a una distribución de masa que se interpone entre un observador y la fuente. En el régimen de los lentes fuertes, la desviación de los rayos de luz es grande por lo que se pueden producir anillos de Einstein, arcos o imágenes múltiples [91]. A lo largo de los años se han utilizado sistemas lentes fuertes para constreñir los parámetros cosmológicos de los modelos más aceptados que describen una expansión acelerada a tiempos tardíos y proporcionan una forma alternativa de comprender la naturaleza de la energía oscura [50, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. En este trabajo recopilamos nuevos datos de SLS, haciendo un catálogo con 205 sistemas <sup>4</sup>. Esta compilación nos permite analizar modelos cosmológicos con mayor precisión y puede ayudarnos a comparar con otras herramientas astrofísicas como candelas estándar o reglas estándar [42, 43, 44, 45]. Cuando una galaxia actúa como lente, la separación entre las imágenes múltiples depende de la masa del deflector y las distancias de diámetro angular a la lente y a la fuente. Cuando una esfera singular

---

<sup>4</sup>La muestra de SLS más grande en la actualidad

isoterma (SIS) describe una lente, el radio de Einstein se define como [91]

$$\theta_E = 4\pi \frac{\sigma_{SIS}^2 D_{ls}}{c^2 D_s}, \quad (2.10)$$

donde  $\sigma_{SIS}$  es la dispersión de velocidades de la galaxia lente,  $c$  es la velocidad de la luz,  $D_s$  es la distancia de diámetro angular a la fuente, y  $D_{ls}$  es la distancia de diámetro angular entre la lente y la fuente. La masa proyectada encerrada dentro del radio de Einstein ( $\theta_E$ ) es independiente del perfil de masa [91], generalmente estimado utilizando una distribución de masa isoterma elipsoide (SIE). Además, se ha demostrado que la distribución de masa de una galaxia lente de tipo temprano esta muy cerca de ser isoterma [92, 93, 94, 95, 96, 97]. La distancia de diámetro angular  $D$  en términos del corrimiento al rojo es definida como

$$D(z) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.11)$$

siendo  $H_0$  la constante de Hubble, entonces el radio de Einstein depende del modelo cosmológico a través de la ecuación adimensional de Friedmann  $E(z)$ . Si definimos un cociente de distancias teórico  $D^{th} \equiv D_{ls}/D_s$ , obtenemos

$$D^{th}(z_l, z_s; \Theta) = \frac{\int_{z_l}^{z_s} \frac{dz'}{E(z', \Theta)}}{\int_0^{z_s} \frac{dz'}{E(z', \Theta)}}, \quad (2.12)$$

donde  $\Theta$  es el vector de parámetros libres para cualquier modelo cosmológico,  $z_l$  y  $z_s$  son los corrimientos al rojo de la lente y la fuente respectivamente. Por otro lado, su contraparte observacional puede calcularse como,

$$D^{obs} = \frac{c^2 \theta_E}{4\pi \sigma^2}, \quad (2.13)$$

donde  $\sigma$  es la dispersion de velocidades medida del halo de materia oscura. Por lo tanto, la compilación de lentes gravitacionales fuertes con sus mediciones para  $\sigma$  y  $\theta_E$  puede ser usada para

estimar parámetros cosmológicos [51] minimizando la siguiente función chi-cuadrada,

$$\chi_{\text{SL}}^2(\Theta) = \sum_{i=1}^{N_{\text{SL}}} \frac{[D^{\text{th}}(z_l, z_s; \Theta) - D^{\text{obs}}(\theta_E, \sigma^2)]^2}{(\delta D^{\text{obs}})^2}, \quad (2.14)$$

donde la suma es sobre todos los sistemas lente ( $N_{\text{SL}}$ ) y  $\delta D^{\text{obs}}$  es la incertidumbre de cada medición para  $D^{\text{obs}}$ , y puede ser calculada empleando la forma estándar de propagación del error como

$$\delta D^{\text{obs}} = D^{\text{obs}} \sqrt{\left(\frac{\delta\theta_E}{\theta_E}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta\sigma}{\sigma}\right)^2}, \quad (2.15)$$

siendo  $\delta\theta_E$  y  $\delta\sigma$  el error reportado para el radio de Einstein y la dispersión de velocidades respectivamente.

Una de las ventajas de este método es su independencia sobre la constante de Hubble  $H_0$ , ya que se elimina en la relación de dos distancias de diámetro angular (vea la ecuación 2.10). Por lo tanto, la tensión que existe para calcular el valor de  $H_0$  entre algunas de las colaboraciones más importantes [83, 98, 99] no es un problema para este método ya que no es necesario asumir ningún  $H_0$  como valor inicial. Algunas desventajas son: su dependencia del modelo lente ajustado a los datos para obtener el radio de Einstein [57], la dispersión de velocidades estelar medida espectroscópicamente ( $\sigma$ ) la cual podría no ser la misma que la dispersión de velocidades del halo de materia oscura  $\sigma_{DM}$ , y cualquier otro error sistemático que pueda cambiar la separación entre imágenes o la  $\sigma$  observada. En consecuencia, como primera aproximación, podemos tener en cuenta estas incertidumbres al introducir el parámetro  $f$  en la relación  $\sigma_{DM} = f\sigma$ , por lo tanto, la ecuación. (2.10) es

$$D^{\text{obs}} = \frac{c^2\theta_E}{4\pi\sigma^2 f^2}. \quad (2.16)$$

[100] estima que esos sistemáticos podrían afectar la separación de la imagen hasta un  $\sim 20\%$ , y asumen las restricciones para  $f$  como  $(0.8)^{1/2} < f < (1.2)^{1/2}$ . Además, Treu et al. [101] afirman que, para sistemas con dispersión de velocidades entre  $200 - 300 \text{ km s}^{-1}$ , existe una relación entre

la medición de  $\sigma_{spec}$  proveniente de la espectroscopia y la estimada a partir del modelo lente

$$\langle f_{SIE} \rangle = \frac{\sigma_{spec}}{\sigma_{SIE}} \approx 1.010 \pm 0.017, \quad (2.17)$$

donde  $\sigma_{SIE}$  es la dispersión de velocidades obtenida para una elipse singular isoterma, que es consistente con los resultados de [100]. Note que la relación de [101] no se puede utilizar en nuestro caso porque: a)  $\sigma$  queda fuera del intervalo de validez para varios objetos de nuestra muestra, y b) se obtuvo asumiendo un modelo  $\Lambda$ CDM, y por lo tanto, podría introducir otra fuente de error en nuestras estimaciones. Por lo tanto, para algunos casos usaremos la estimación de [100] para  $f$  agregándolo como nuevo parámetro libre.

Por otro lado, para algunos sistemas lente obtenemos valores incorrectos para  $D_{obs} > 1$  (es decir,  $D_{ls} > D_s$ , consulte la Tabla A.5). En [61] señalan que estos valores son teóricamente no físicos, por lo tanto, se deben ignorar o corregir introduciendo una fuente de error adicional (por ejemplo,  $\delta D^{obs}$ ). Sin embargo, como se desconoce la fuente de tal comportamiento, elegimos mantener estos sistemas observados durante todo nuestro análisis (sin introducir el error sugerido  $\delta D^{obs}$ ) y, en cambio, realizaremos las estimaciones de los parámetros cosmológicos con y sin esos sistemas por comparación. Presentamos los datos que se utilizarán en la función chi-cuadrada (Eq. 2.14) para probar modelos de DE.

A continuación, describimos nuestra nueva compilación de SLS. Para construir  $D^{obs}$  solo hemos elegido sistemas con datos espectroscópicos bien medidos de diferentes colaboraciones. Hemos considerado 20 SLS de la colaboración [67, CASTLES], 107 sistemas de [65, SLACS], 38 de [66, BELLS], 4 de [68, LSD], 35 de [69, SL2S] y un sistema del DES [70, STRIDES]. La lista final tiene un total de 205 sistemas, siendo la muestra más grande de SLS hasta la fecha. Solo consideramos galaxias de tipo temprano que actúan como lentes, con morfologías lenticulares (S0) o elípticas (E) que se han modelado asumiendo un SIS o SIE. Muchos sistemas no se han tenido en cuenta debido a varias consideraciones. Por ejemplo, el sistema PG1115 + 080 de la colaboración de

CASTLES se ha descartado porque el modelo de masa de la lente es más pronunciado que el isotérmico. De SLACS [102, 103] eliminamos los sistemas SDSSJ1251-0208, SDSSJ1432 + 6317, SDSSJ1032 + 5322 y SDSSJ0955 + 0101 ya que las galaxias de las lentes son de tipo tardío (espirales). La misma razón se aplica a los sistemas SDSSJ1611 + 1705 y SDSSJ1637 + 1439 de la colaboración de BELLS [104]. También hemos descartado los sistemas SDSSJ2347 – 0005 y SDSSJ0935 – 0003 de la colaboración SLACS y el sistema SDSSJ111040.42 + 364924.4 de la colaboración BELLS porque tienen grandes dispersiones de velocidad medidas ( $\sim 400 \text{ km s}^{-1}$  o valores mayores), lo que sugiere que la lente podría ser parte de un grupo de galaxias o que hay una subestructura en la línea de visión. Para aquellos sistemas sin error reportado en la dispersión de velocidades, asumimos el error para cada colaboración de la siguiente manera. Para los 9 sistemas de CASTLES consideramos el error promedio en  $\sigma$  para estas mediciones, es decir, un 14%. En el caso del sistema DES J2146-0047 [105], hemos asumido un error del 10% en  $\sigma$ , que es el error promedio de toda la muestra. La colaboración LSD [68, 106] reporta  $\sigma$  corregido por apertura circular usando la expresión obtenida por [107, 108]. Una inspección minuciosa de los valores  $\sigma_{spec}$ , con y sin corrección de apertura, presentada por [57] muestra que la diferencia es menor que el error reportado. Por lo tanto, decidimos usar los valores observados ( $\sigma$ ) y el error para la muestra sin la corrección de apertura. Por otro lado, en aquellos sistemas en los que no se reportó el error del radio de Einstein, seguimos el trabajo de Cao et al. [57] y asumimos un error de  $\delta\theta_E = 0.05$ , que es el valor promedio de los sistemas con errores reportados en esta muestra.

Nuestra muestra final (FS) se presenta en la Tabla A.4, que tiene un total de 205 puntos de datos cuyos desplazamientos al rojo de la lente y fuente están en los rangos  $0.0625 < z_l < 0.958$  y  $0.196 < z_s < 3.595$ , respectivamente. Todos los sistemas para los cuales asumimos un error en la dispersión de velocidades, son presentados con letra negrita en la muestra.

Además, hemos construido las siguientes submuestras para probar el impacto en la estimación de parámetros para los diferentes modelos de DE. Dividimos la muestra en diferentes regiones de acuerdo con el valor observado para la relación de distancia  $D^{obs}$ , porque hay sistemas que no caen en una región física. También dividimos la muestra en diferentes regiones de acuerdo con el

desplazamiento al rojo de la galaxia de la lente para verificar cualquier cambio significativo en la estimación de los parámetros cosmológicos asociados a la posición del deflector. Finalmente, siguiendo [64], también separamos los sistemas en distintas submuestras de acuerdo con la dispersión de velocidades medida. Nombramos las submuestras de la siguiente manera:

- SS1: 173 puntos con  $D^{obs} \leq 1$
- SS2: 30 puntos con  $D^{obs} < 0.5$
- SS3: 143 puntos con  $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$
- SS4: 32 puntos con  $D^{obs} > 1$
- SS5: 64 puntos con  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$
- SS6: 53 puntos entre  $210 \text{ km s}^{-1} \leq \sigma < 243 \text{ km s}^{-1}$
- SS7: 49 puntos entre  $243 \text{ km s}^{-1} \leq \sigma \leq 276 \text{ km s}^{-1}$
- SS8: 39 puntos entre  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$
- SS9: 52 puntos con  $D^{obs} \leq 1$  y  $z_l < 0.2$
- SS10: 49 puntos con  $D^{obs} \leq 1$  y  $0.2 \leq z_l \leq 0.4$
- SS11: 72 puntos con  $D^{obs} \leq 1$  y  $z_l > 0.4$

## 2.4. Estadística Bayesiana en Cosmología

La estadística suele dividirse en dos categorías, la estadística descriptiva y la estadística inferencial. La primera nos permite recopilar, procesar y analizar información, siendo sus conclusiones válidas solo para el grupo analizado. Por otra parte, la estadística inferencial proporciona métodos y procedimientos que permiten obtener conclusiones para una población a partir del estudio de una o más muestras representativas. De esta manera, es importante mencionar que el trabajo realizado



en esta tesis está basado en el uso de la estadística inferencial, debido a que nos interesa obtener información de la dinámica del Universo a partir de muestras representativas, que para nuestro caso son las diversas observaciones astrofísicas mencionadas en las secciones anteriores.

Uno de los objetivos principales en estadística es predecir los sucesos que ocurrirán en un futuro cercano dentro de todos los eventos posibles, a la medida de que dicho suceso ocurra se le denomina probabilidad (la denotaremos como  $\mathcal{P}$ )<sup>5</sup>. La probabilidad se mide entre un rango de 0 y 1, cuando un evento es imposible que suceda  $\mathcal{P} = 0$  y cuando estamos completamente seguros que sucederá  $\mathcal{P} = 1$ . Existen dos enfoques distintos para estudiar la probabilidad, desde un punto de vista frecuentista o Bayesiano. En la perspectiva frecuentista, generalmente los datos son los que varían mientras que los parámetros están fijos. Para ilustrar un ejemplo, la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda, podría calcularse con la frecuencia, y estaría dada de la siguiente manera:

$$\mathcal{P} = \frac{E_x}{N_{exp}}, \quad (2.18)$$

donde  $E_x$  es el número de éxitos (que se refiera al número de veces que salió cara al lanzar una moneda) y  $N_{exp}$  es el número de experimentos (en este caso el número de veces que se lanzó la moneda al aire). De esta manera, obtendremos una probabilidad diferente, que dependerá de el número de experimentos que se realicen para lanzar la moneda, y solo hasta que lancemos la moneda un número infinito de ocasiones podremos encontrar un valor más preciso para obtener la probabilidad deseada (suponiendo que no hay preferencias en el lanzamiento de la moneda). Se dice que desde esta perspectiva los datos son los que pueden variar, debido a que podríamos calcular la probabilidad de obtener cara lanzando una moneda cien veces, o quinientas o mil, mientras que los parámetros están fijos, en este ejemplo podrían referirse a las condiciones en las que lanzamos una moneda. Por lo tanto, ya que es imposible realizar una infinidad de experimentos para medir las propiedades del Universo, necesitamos un enfoque diferente y es el que comunmente

---

<sup>5</sup>No confundir con el símbolo de la presión  $P$  de un fluido que veremos en el siguiente capítulo.

suele usarse en cosmología. La probabilidad bayesiana será el enfoque que adoptaremos de aquí en adelante y describiremos sus propiedades más importantes a continuación. Esta perspectiva de calcular probabilidades está basada principalmente en el teorema de Bayes, haciéndole honor al matemático y ministro presbiteriano Thomas Bayes, el cual fundó las bases de la estadística bayesiana, sin embargo fue el gran científico Pierre-Simon Laplace el que perfeccionó el trabajo de Bayes y le dió el nombre de Teorema de Bayes. Se expresa de la siguiente manera,

$$\mathcal{P}(H|D) = \frac{\mathcal{P}(H)\mathcal{P}(D|H)}{\mathcal{P}(D)}, \quad (2.19)$$

donde  $H$  representa una hipótesis (p. ej. el conjunto de parámetros de un modelo específico) y  $D$  representa a los datos.  $\mathcal{P}(H|D)$  es conocida como la distribución posterior.  $\mathcal{P}(H)$  es el prior y  $\mathcal{P}(D|H)$  es la función de verosimilitud. El enfoque bayesiano interpreta probabilidades como el grado de creencia en una hipótesis, usando información previa, juicio, teoría de probabilidad. Las distribuciones de probabilidad son un concepto fundamental para comprender la posibilidad de que ocurra un suceso. Son usados para calcular intervalos de confianza de los parámetros de un modelo específico. Otro concepto importante es el de una variable aleatoria, algunos ejemplos pueden ser el número de galaxias en un volumen  $\delta V$ , la cara de un dado, la temperatura del CMB en un pixel, etc. La probabilidad de que la variable aleatoria (la denotaremos como  $x$ ) pueda tomar un valor específico se denota como  $\mathcal{P}(x)$  donde  $\mathcal{P}$  denota la distribución de probabilidad. Sus propiedades son las siguientes:

- $\mathcal{P}(x)$  es un número real no negativo.
- $\mathcal{P}(x)$  está normalizado tal que  $\int dx \mathcal{P}(x) = 1$ , ó  $\sum_i \mathcal{P}(x_i) = 1$ , para una distribución continua o discreta respectivamente.
- Para dos eventos  $x_1$  y  $x_2$  mutuamente excluyentes,  $\mathcal{P}(x_1 + x_2) = \mathcal{P}(x_1) + \mathcal{P}(x_2)$
- $\mathcal{P}(a, b) = \mathcal{P}(a)\mathcal{P}(b|a)$  ;  $\mathcal{P}(b, a) = \mathcal{P}(b)\mathcal{P}(a|b)$

La probabilidad de que  $a$  y  $b$  ocurra es la probabilidad de  $a$  multiplicada por la probabili-

dad condicional de que ocurra el evento  $b$ , dado que  $a$  ha ocurrido. Además para eventos independientes se cumple  $\mathcal{P}(a, b) = \mathcal{P}(a)\mathcal{P}(b)$ .

De esta manera el teorema de Bayes (2.19) considera tanto hipótesis como eventos mientras que en el punto de vista frecuentista solo se consideran distribuciones de eventos. Las aplicaciones de este teorema ocurren en muchas áreas de la ciencia y son de gran importancia en el ámbito científico. Es natural cuestionarse sobre algunas consideraciones importantes de este teorema, p. ej. ¿Como escogemos  $\mathcal{P}(H)$ ? ¿La elección afectará nuestro resultado?. A continuación se dará una explicación detallada para ajustar un modelo.

### 2.4.1. Modelado de datos

Como se mencionó anteriormente, adoptamos un enfoque bayesiano en cosmología debido a que es muy complicado realizar una infinidad de experimentos para comprender la naturaleza del Universo, las razones son muy diversas, pero unas de las más importantes son la dificultad para observar un objeto astrofísico, la calibración de los aparatos con los que se mide, el costo de realizar dicho experimento, o simplemente porque no se puede repetir el experimento (por ejemplo la observación de una supernova a una determinada distancia). Por lo tanto, desde esta perspectiva la tarea será ajustar un modelo cosmológico con una serie de parámetros a los datos observados. Generalmente, el modelo a ajustar está motivado teóricamente bajo ciertas hipótesis, por lo que es importante analizar diferentes modelos que podrían explicar las observaciones realizadas. Para realizar el procedimiento mencionado anteriormente, es importante definir una función de mérito capaz de evaluar el acuerdo entre los datos y el modelo en cuestión. Esto se logra ajustando los parámetros que maximicen el acuerdo entre ambos, estos parámetros reciben el nombre de "parámetros de mejor ajuste". Presentamos la información que es más relevante obtener tras realizar el procedimiento del ajuste de un modelo.

- Los parámetros de mejor ajuste.
- Errores estimados en los parámetros.

- Alguna medición estadística de la bondad del ajuste.

De esta manera, el propósito de una función de mérito es encontrar la probabilidad de que un conjunto de datos ocurra a partir de asumir un conjunto de parámetros. Esto es la verosimilitud definida anteriormente en (2.19), por lo que el objetivo principal es estimar el conjunto de parámetros maximizando la probabilidad de que ocurran en un conjunto de observaciones. Supongamos que queremos ajustar un conjunto de  $N$  datos a un modelo que tiene  $M$  parámetros ( $a_1 \dots a_M$ ) ajustables. Si el modelo representa una línea recta y usamos el método de mínimos cuadrados [vea 109, y las referencias que mencionan para más detalles] tenemos:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[N_i - y(x_i|a_j)]^2}{\sigma^2}, \quad (2.20)$$

donde  $\frac{1}{\sigma^2}$  son los pesos mínimos de varianza,  $N_i$  son los puntos de los datos,  $a_j$  son los  $M$  parámetros y  $y(x_i|a_j)$  es la relación funcional entre las variables independientes y dependientes medidas. En consecuencia, el valor de los parámetros de mejor ajuste serán los que minimicen la función  $\chi^2$ . Comúnmente la distribución chi-cuadrada suele emplearse en modelos no lineales e inclusive en caso más generales. Denotaremos como  $C$  a la probabilidad calculada cuando se evalúan los parámetros de mejor ajuste en la ecuación (2.20), la cuál nos proporciona una medida cuantitativa de la bondad de ajuste. Si  $C$  es una probabilidad muy pequeña se puede concluir que el modelo está equivocado y puede ser rechazado, o que los errores de las mediciones no tienen una distribución gaussiana, o los errores son realmente más grandes de lo esperado. Por otra parte, si el valor de  $C$  es una probabilidad muy grande, se puede concluir que los errores han sido sobreestimados, o que los datos están correlacionados y se han ignorado en el ajuste, o que la distribución de los datos está muy alejada de una distribución gaussiana (esto no suele ser muy común debido al teorema del límite central). Un mejor ajuste en principio se logra cuando el valor de  $\chi^2$  es igual al número de datos menos el número de parámetros. Usualmente se acostumbra presentar regiones de confianza, las cuales son regiones en el espacio de parámetros  $M$ -dimensional (recordar que  $M$  se definió como el número de parámetros) que contienen un cierto porcentaje de la distribución de

probabilidad total. Por lo tanto, suelen presentarse las regiones de confianza a 1, 2 y 3 desviaciones estándar ( $\sigma$ ), lo que equivalen al 68.3 %, 95.4 % y 99.7 % (asumiendo que la distribución es gaussiana). Recordando el teorema de Bayes (2.19), definimos la verosimilitud como la probabilidad de los datos dado un modelo. Si establecemos que  $\mathcal{P}(D) = 1$  e ignoramos el prior y maximizamos la verosimilitud, encontraremos la hipótesis más probable, o para nuestro caso, los parámetros más probables de un modelo dado. En la mayoría de los casos, la verosimilitud puede ser bien aproximada a una distribución gaussiana como  $\mathcal{L} = L_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ , y es la distribución que asumimos en las diferentes técnicas consideradas para este trabajo. Por lo tanto, maximizar la verosimilitud es equivalente a minimizar la función  $\chi^2$ .

Es importante mencionar que el prior debe considerarse de mediciones previas, o de alguna "creencia". Además, es fundamental asumir que distintas regiones en el Universo tienen las mismas propiedades estadísticas, esto es posible debido al principio cosmológico. Es crucial reconocer que las regiones del Universo que observamos, son una muestra representativa de todo lo que no observamos, sin embargo, mejorar las observaciones y la tecnología es esencial para abarcar regiones más profundas del Universo, y obtener un mejor análisis probabilístico de su comportamiento. A continuación describiremos el método Monte Carlo, el cual nos proporciona una herramienta útil en la estimación de parámetros y el cálculo de sus errores.

### 2.4.2. Método Monte Carlo

El objetivo principal del método Monte Carlo es generar un conjunto de puntos en el espacio de parámetros cuya función de distribución sea la misma que la verosimilitud, o más general a la distribución posterior. El método realiza evaluaciones aleatorias en los parámetros, moviéndose en el espacio de parámetros en un proceso de Markov, es decir, el siguiente muestreo depende del actual, pero no de los anteriores. Por diseño, la cadena de Markov resultante muestrea la distribución posterior, de modo que la densidad de puntos es proporcional a la densidad objetivo,

permitiendo estimar todas las cantidades habituales de interés, como la media, varianza, etc. En cosmología es una herramienta muy efectiva, debido a que los modelos suelen tener muchos parámetros, y el número de puntos requeridos para obtener una buena estimación escala linealmente con el número de parámetros. En consecuencia, la densidad objetivo es aproximada por un conjunto de funciones delta,

$$\mathcal{P}(a) \sim \frac{1}{N} \sum_i \delta(a - a_j). \quad (2.21)$$

El procedimiento para hacer una cadena es generar un nuevo punto  $a^*$  desde el punto actual  $a$ , y aceptarlo como un nuevo punto en la cadena con una probabilidad que depende del cociente de ambas densidades. La distribución de pasos es llamada "distribución de propuesta". El algoritmo más conocido es el algoritmo de Metropolis-Hastings, y su probabilidad de aceptación está dada como,

$$\mathcal{P}(\text{aceptación}) = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{P}(a^*)q(a^*|a)}{\mathcal{P}(a)q(a|a^*)} \right], \quad (2.22)$$

donde  $q(a^*|a)$  es la función de distribución de propuesta para un movimiento de  $a$  a  $a^*$ . Usualmente la distribución de propuesta es simétrica, en ese caso el algoritmo se simplifica al algoritmo de Metropolis como:

$$\mathcal{P}(\text{aceptación}) = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{P}(a^*)}{\mathcal{P}(a)} \right], \quad (2.23)$$

de este modo, el algoritmo puede ser expresado por los siguientes pasos:

- Escoge una condición inicial aleatoria en el espacio de los parámetros y calcula la distribución posterior.
- Genera un nuevo candidato en el espacio de parámetros de la distribución de propuesta, y calcula su correspondiente distribución posterior.
- Calcula la densidad objetivo en el nuevo punto, y aceptala (o no) con el algoritmo de Metropolis-Hastings
- Si el punto no es aceptado, el punto previo es repetido en la cadena

- Repite hasta que tengas una cadena lo suficientemente grande.

Este proceso es comúnmente conocido como Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC por sus siglas en inglés) y serán usadas para maximizar las distribuciones posteriores (o minimizar la función  $\chi^2$ ) de las diferentes técnicas astrofísicas mencionadas anteriormente para los diferentes conjuntos de parámetros que veremos en el siguiente capítulo. En nuestro caso usaremos una implementación bien probada de python con licencia del Massachusetts Institute of Technology (MIT) llamado emcee, la cual fue propuesta por Foreman-Mackey et al. [110]<sup>6</sup> y está basado en el algoritmo de Goodman and Weare [111]. En concreto, este algoritmo está basado en evolucionar un ensamble  $S$  de  $K$  caminantes, es decir  $S = \{X_K\}$ , donde la distribución propuesta para un caminante  $k$  está basada en las posiciones actuales de los  $K - 1$  caminadores en el ensamble complementario  $S_{[k]} = \{X_j, \forall j \neq k\}$ , donde "posición" se refiere a un vector en el espacio de parámetros  $M$ -dimensional. Por lo tanto, la posición de un caminante en la posición  $X_k$  se actualiza cuando un caminante  $X_j$  se extrae al azar de los caminantes restantes  $S_{[k]}$  y se propone una nueva posición mediante una transformación afín (vea las referencias anteriores para más detalles).

## 2.5. Selección de modelo

Para comparar entre los diferentes modelos de energía oscura, usamos el criterio de información de Akaike [AIC, 112] y el criterio de información bayesiano [BIC, 113] definido como:

$$\text{AIC} = \chi_{min}^2 + 2k, \quad (2.24)$$

$$\text{BIC} = \chi_{min}^2 + k \ln N, \quad (2.25)$$

donde  $\chi_{min}^2$  es la función chi-cuadrada obtenida del mejor ajuste de los parámetros,  $k$  es el número de parámetros y  $N$  el número de puntos observacionales usados en el ajuste. Un modelo con AIC y BIC pequeños es mas favorecido por los datos (véase la tabla 2.1). Note que el valor absoluto

---

<sup>6</sup>ver más detalles en <http://github.com/dfm/emcee>

Tabla 2.1: Criterios  $\Delta\text{AIC}$  y  $\Delta\text{BIC}$ .

$\Delta\text{AIC}$	Soporte empírico para el modelo $i$
0 - 2	Sustancial
4 - 7	Considerablemente menos
> 10	Esencialmente ninguno

$\Delta\text{BIC}$	Evidencia en contra del modelo $i$
0 - 2	No vale más que una simple mención
2 - 6	Positiva
6 - 10	Fuerte
> 10	Muy fuerte

para AIC (BIC) es irrelevante, la cantidad importante es el valor relativo de AIC (BIC) para el modelo  $i$  con respecto al valor mínimo  $\text{AIC}_{min}$  ( $\text{BIC}_{min}$ ) entre todos los modelos en consideración [ver 114, y referencias en el mismo artículo para el criterio AIC y BIC].

Además, para medir la calidad de nuestras constricciones cosmológicas usamos el estimador FOM

$$\text{FoM} = \frac{1}{\sqrt{\det \text{Cov}(f_1, f_2, f_3, \dots)}}, \quad (2.26)$$

donde  $\text{Cov}(f_1, f_2, f_3, \dots)$  es la matriz de covarianza de los parámetros cosmológicos  $f_i$  [115]. Este indicador es una generalización del propuesto por Albrecht et al. [116], y valores más grandes implican constricciones más fuertes en los parámetros cosmológicos ya que corresponden a una elipse de error más pequeña.



# Capítulo 3

## Modelos de Energía Oscura

En este capítulo describiremos algunos de los modelos que existen para explicar la evolución del Universo, los cuáles son capaces de detallar las diferentes etapas en las que el Universo se ha encontrado a lo largo de su historia. Estos modelos están motivados por diferentes argumentos teóricos, sin embargo están principalmente basados en la teoría de la Relatividad General de Einstein o extensiones a esta teoría. Cabe resaltar que el estudio del presente trabajo no está enfocado en estudiar las perturbaciones cosmológicas, las cuales pueden explicar la formación de estructura como las galaxias y cúmulos de galaxias, y solo nos enfocaremos en estudiar el fondo del Universo asumiendo el principio cosmológico (homogeneidad e isotropía) a grandes escalas, como se ha confirmado por diferentes observaciones astrofísicas.

### 3.1. Modelo estandar de comología

La teoría de la Relatividad General de Albert Einstein nos ha permitido por primera vez en la historia, modelar de manera convincente la evolución del Universo y nos ha permitido comprobarla a través de diferentes e independientes mediciones. Tenemos muy buena evidencia de que el Universo se encuentra actualmente en una etapa de expansión, esto significa que al principio de su historia, la distancia entre nosotros y las galaxias distantes era menor de lo que es hoy. Este

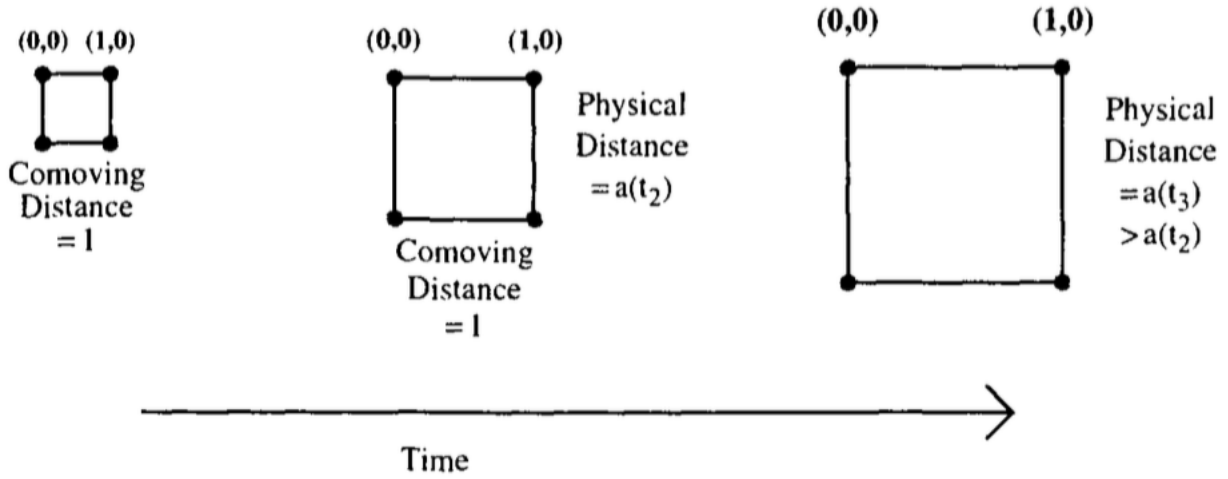


Figura 3.1: Representación de la expansión del Universo. La distancia comóvil entre los puntos de una hipotética cuadrícula permanece constante mientras el Universo se expande. La distancia física es proporcional a la distancia comóvil multiplicada por el factor de escala, haciéndose mayor mientras el tiempo evoluciona [117].

efecto lo podemos entender introduciendo el factor de escala  $a$ , que mide el tamaño del Universo y cuyo valor es igual a uno actualmente y más pequeño a inicios del Universo. Podemos representar el espacio como una cuadrícula dada por la figura 3.1, que se expande uniformemente a medida que el tiempo evoluciona. Los puntos en la cuadrícula mantienen sus coordenadas, por lo que la distancia comóvil entre dos puntos, que solo mide la diferencia entre las coordenadas, permanece constante. Sin embargo, la distancia física es proporcional al factor de escala, y la distancia física evoluciona con el tiempo.

Adicionalmente, el Universo suave también es caracterizado por su geometría, teniendo 3 posibilidades: plano, abierto o cerrado según la densidad de energía que pudiera tener el Universo. Por lo tanto, para entender su historia, necesitamos determinar la evolución del factor de escala con el tiempo cósmico  $t$ . Esto puede ser entendido gracias a la teoría de la Relatividad General de Einstein, la cual nos proporciona una conexión entre esta evolución y la energía en el Universo. Para entender esto, definamos las ecuaciones de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein;  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci,  $R$  el escalar de Ricci el cual es la contracción del tensor de Ricci ( $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ),  $G$  es la constante de Newton,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento el cual describe los constituyentes del Universo. El lado izquierdo de la ecuación 3.1 es una función de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , el cual es el ente fundamental para entender la geometría en el formalismo de la Relatividad General mientras el lado derecho es una función de la energía, siendo las ecuaciones de Einstein una relación entre ambas. De esta manera, la métrica que usaremos necesita cumplir con los requisitos de homogeneidad e isotropía que nos dicta el principio cosmológico, dichas características son descritas por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) que está dada de la siguiente manera<sup>1</sup>:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 dr^2 - a(t)^2 r^2 d\Omega^2, \quad (3.2)$$

En consecuencia, la métrica 3.2 debe ser introducida en las ecuaciones de Einstein 3.1 para obtener información de la evolución del Universo. Si queremos enfocarnos en la evolución del factor de escala en un Universo donde se cumple la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, necesitamos considerar solo la componente temporal de las ecuaciones de Einstein de tal manera que operando obtenemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3} \rho_i, \quad (3.3)$$

donde  $\rho_i$  se refiere a la densidad de energía de cada uno de los constituyentes del Universo, como materia, radiación y energía oscura de la cuál hablaremos más adelante. El término  $\dot{a}/a \equiv H$  es conocido como el factor de Hubble, el cual mide la razón de expansión del Universo. La ecuación 3.3 no contiene un término relacionado con la curvatura del Universo (como se ha medido por diferentes observaciones [1, 118]) y es conocida como la ecuación de Friedmann, ésta ecuación nos permite encontrar la evolución del factor de escala a través de la densidad de energía de los diferentes componentes del Universo, es una de las ecuaciones más importantes en cosmología, siendo esta ecuación modificada cuando se asume un modelo cosmológico diferente basado generalmente en

---

<sup>1</sup>Para un universo sin curvatura

modificaciones a la teoría de la Relatividad General. Además, la ecuación de Friedmann suele expresarse en unidades adimensionales, definiendo una densidad de energía crítica como  $\rho_{cr} \equiv 3H_0^2/8\pi G$ , por lo tanto dividiendo ambos lados por  $H_0^2$  tenemos:

$$E(t) \equiv \frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}}, \quad (3.4)$$

donde  $\frac{\rho}{\rho_{cr}} \equiv \Omega t$  se le conoce como el parámetro de densidad, y es el que usualmente es acotado por las mediciones, teniendo diferentes valores dependiendo del tipo de componente que tenga el Universo. La ecuación adimensional  $E(z)$  para el modelo estándar está dada por la siguiente ecuación,

$$E(z)_{\Lambda CDM}^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}), \quad (3.5)$$

Hemos considerado  $\Omega_{r0} = 2.469 \times 10^{-5} h^{-2} (1 + 0.2271 N_{eff})$  [126], donde  $N_{eff} = 3.04$  es el número estándar de especies relativistas [127]. Por otra parte, para entender la evolución de la energía necesitamos analizar el tensor de energía-momento que se encuentra del lado derecho de las ecuaciones de Einstein. De igual manera nos interesa saber como evoluciona la componente temporal de dicho tensor, por consiguiente operando resulta que la ley de conservación en un Universo en expansión está dado por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} [3\rho + 3P] = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $P$  la presión de cada componente del fluido. La ecuación de conservación 3.6 también es muy importante en la cosmología, ya que nos ayuda a entender la evolución de los diferentes componentes del Universo. Además, la ecuación que es esencial para relacionar la densidad de energía  $\rho$  con la presión  $P$  de cada uno de los constituyentes del Universo es la ecuación de estado definida como,

$$w \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (3.7)$$

donde  $w = 0$  para la materia,  $w = 1/3$  para la radiación y  $w = -1$  para la constante cosmológica. La constante cosmológica fue introducida por Albert Einstein para explicar un Universo estático, de acuerdo con las observaciones que se tenían de el Universo en ese tiempo, sin embargo según palabras de el mismo, fue uno de sus mayores errores en su vida. No obstante, después de haberse medido que en realidad el Universo se está expandiendo aceleradamente por diferentes e independientes observaciones, la comunidad ha adquirido nuevamente la constante cosmológica para poder explicar dicha aceleración cósmica. De esta manera ha surgido el modelo estándar de cosmología, como el modelo más prometedor para entender la evolución del Universo actualmente, teniendo gran éxito en predecir las observaciones del CMB y muchas otras, pero también teniendo debilidades para explicar teóricamente la razón de expansión actual del Universo. Esto ha llevado a la comunidad a proponer modelos alternativos para tratar de explicar este y otros problemas. Con lo que uno de los objetivos principales de esta Tesis será analizar estos modelos con diferentes observaciones astrofísicas y también propondremos un modelo que es capaz de explicar dicha expansión acelerada en un contexto de dimensiones extra sin necesidad de adoptar un fluido con características exóticas ( $w = -1$ ).

A continuación, motivaremos la importancia de la constante cosmológica en la cosmología moderna. Para ello necesitamos recordar tres ecuaciones definidas anteriormente, las cuales nos permiten obtener información acerca del Universo, como su evolución en términos del factor de escala para diferentes etapas, o como su edad. Para ello analicemos la ecuación de conservación del fluido (ecuación 3.6) junto con la ecuación de estado (ecuación 3.7). La materia tiene presión cero, por lo tanto la ecuación 3.6 se convierte en,

$$\frac{\partial [\rho_m a^3]}{\partial t} = 0, \quad (3.8)$$

implicando que la densidad de energía de la materia es proporcional al factor de escala de la siguiente manera:  $\rho_m \propto a^{-3}$ , ya que la masa permanece constante mientras que la densidad escala

como el inverso del volumen. Por otra parte, la radiación cumple con  $P = \rho/3$ , por lo tanto sustituyendo en la ecuación del fluido obtenemos:

$$a^{-4} \frac{\partial [\rho_r a^4]}{\partial t} = 0, \quad (3.9)$$

indicando que la densidad de energía de la radiación es proporcional al factor de escala como  $\rho_r \propto a^{-4}$ , esto nos muestra porque la radiación contribuye en menor cantidad que la materia para la época actual del Universo. Si introducimos el decaimiento de la radiación ( $\rho_{0r} a^{-4}$ ) en la ecuación de Friedmann, obtenemos

$$a \propto k_1 t^{1/2}, \quad (3.10)$$

donde  $k_1$  es una constante de integración. Este sería el comportamiento que tendría el factor de escala en el Universo si estuviera compuesto sólo de radiación. Por otra parte, introduciendo el decaimiento de la materia ( $\rho_{0m} a^{-3}$ ) en la ecuación de Friedmann tenemos,

$$a \propto k_2 t^{2/3}, \quad (3.11)$$

donde  $k_2$  también es una constante de integración. Sin embargo, observacionalmente se ha encontrado que el Universo tardío se expande de manera exponencial, lo cual indica que los objetos astrofísicos que vemos se alejan más rápidamente de nosotros mientras más lejos se encuentren. De esta manera en 1998, dos grupos de colaboradores, demostraron este hecho por medio de observaciones de Supernovas tipo Ia (SN Ia), las cuales pueden ser consideradas como candelas estándar (tienen magnitudes absolutas cercanamente idénticas). Por lo tanto hay otras especies que necesitan ser consideradas para explicar lo que vemos y medimos, ya que ni la radiación ni la materia muestran este comportamiento. Además, como sabemos, la materia domina sobre la radiación a tiempos actuales, por lo tanto podemos calcular la edad de un universo conformado de materia. Para ello recordemos que el parámetro de Hubble está definido como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , para el tiempo actual

tenemos:

$$H_0 = \frac{\dot{a}|_{t=0}}{a|_{t=0}}, \quad (3.12)$$

este tipo de universo tiene un comportamiento para el factor de escala dado por la ecuación (3.11), por lo tanto  $\dot{a} = \frac{2}{3}K_2t_0^{-1/3}$ . Sustituyendo en (3.12) finalmente obtenemos que la edad de un universo contenido sólo de materia al tiempo actual es,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \sim 6.5 \times 10^9 \text{ años}. \quad (3.13)$$

Sin embargo, se han observado estrellas con edades mayores, indicando una vez más que el Universo necesita de constituyentes extra que expliquen este problema [6]. Por otra parte, otro motivo para pensar en la presencia de otros componentes que nos ayuden a entender el comportamiento del Universo es dado por la ecuación de aceleración, dicha ecuación se conoce como la ecuación de Raychaduri y se obtiene derivando la ecuación de Friedmann respecto del tiempo y sustituyendo la ecuación del fluido expresándose como,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3P_i). \quad (3.14)$$

Se ha observado que el Universo tiene una expansión acelerada, por lo que el lado izquierdo de la ecuación (3.14) tiene que ser mayor a cero, y como  $\frac{4\pi G}{3}$  es una constante positiva, la única manera de que el lado derecho de la ecuación sea positiva es mediante la condición  $\rho + 3P < 0$ . Esto implica que si hacemos uso de la ecuación de estado, el Universo acelera solo si se cumple que  $w < -\frac{1}{3}$ . Esto se puede entender como un fluido exótico con presión negativa ejerciendo una fuerza de repulsión. Al fluido con estas características se le conoce comúnmente como energía oscura. Se puede observar que hay una infinidad de valores posibles para la ecuación de estado de la DE, inclusive pudiendo evolucionar en el tiempo con diferentes comportamientos (estudiaremos algunos casos en las siguientes secciones). El modelo estándar de cosmología adopta un valor de  $w = -1$  y se conoce como constante cosmológica, introducida por primera vez por Albert Einstein

para explicar un universo estacionario, pero abandonada por el mismo señalándola como una de las propuestas más erróneas de su vida. Ahora la comunidad, ha vuelto a adoptar esta idea para explicar una aceleración cósmica, inclusive siendo el modelo más prometedor para explicar las diferentes mediciones astrofísicas que existen en la actualidad mediante distintas e independientes técnicas. Para entender su importancia, analicemos un universo que solo contiene una constante cosmológica. Para empezar, analicemos la ecuación del fluido (3.6) con  $w = -1$ . Bajo esta condición la ecuación de estado para la constante cosmológica es  $P = -\rho$ , convirtiendo la ecuación del fluido en  $\dot{\rho} = 0$ . Esto indica que la densidad de energía oscura es constante en el tiempo  $\rho_\Lambda \equiv \text{constante}$ , sugiriendo que la constante cosmológica ha permeado al Universo desde sus inicios de manera constante, y estamos viviendo una etapa donde predomina sobre las demás especies. Además, si analizamos la evolución de un universo con constante cosmológica  $\rho = \rho_\Lambda$  obtenemos que el factor de escala se comporta exponencialmente como:

$$a = e^{k_3 t} \quad (3.15)$$

donde  $k_3$  es una constante de integración. De esta manera la constante cosmológica nos ayuda a entender la dinámica del Universo de una mejor manera, favoreciendo lo que vemos a través de distintas mediciones.

### 3.1.1. La formación de estructura en el Universo

Las ecuaciones vistas en la sección anterior nos permiten entender al universo asumiendo que es homogéneo e isotrópico, esto es válido en promedio solo cuando consideramos grandes escalas. Observando el Universo cercano vemos que existe estructura como estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias, las cuales no parecen ser homogéneas e isotrópicas. Pequeñas perturbaciones a cantidades del fondo homogéneo, como la métrica y la densidad de energía estuvieron presentes en el inicio del Universo, creciendo a través de inestabilidades gravitacionales las cuales son reflejadas en los



grandes y complejos objetos que observamos cerca de nuestra galaxia actualmente. Se cree que estas perturbaciones provienen de fluctuaciones de energía cuántica en una etapa muy temprana del Universo, alargadas a un tamaño clásico por el proceso de inflación. Este proceso se mencionará brevemente más adelante.

Desafortunadamente existen pocas soluciones exactas en relatividad general que incorporen inhomogeneidades espaciales y anisotropías en la materia y por lo tanto en la geometría. Por lo tanto usualmente se utiliza una aproximación perturbativa partiendo de la métrica homogénea e isotrópica FLRW como una solución del fondo del Universo con propiedades simples y después incrementando la complejidad de las perturbaciones inhomogéneas orden por orden. De acuerdo al trabajo de Bardeen [119], las perturbaciones de la métrica pueden ser distinguidas en contribuciones escalares, vectoriales y tensoriales. Una razón de separar así las perturbaciones de la métrica dentro de estos tres tipos, es que las ecuaciones se desacoplan a orden lineal, y por lo tanto podemos resolver cada tipo de perturbación por separado. Por lo tanto, a primer orden las perturbaciones escalares pueden escribirse modificando la métrica como,

$$ds^2 = -a(\tau) [(1 + 2\psi) d\tau^2 - (1 + 2\phi) dx_i dx^i], \quad (3.16)$$

donde hemos escogido el tiempo conforme  $d\tau = dt/a$  y se han introducido dos potenciales escalares. Al estar relacionados la geometría y la energía, el tensor de energía también es modificado como,

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -(\rho + \delta\rho), \\ T_i^0 &= -T_o^i = v_i(\rho + P), \\ T_j^i &= \delta_j^i(P + \delta P) + \sigma_j^i, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\sigma_i^i = 0$ ,  $\delta\rho$  y  $\delta P$  representan las fluctuaciones de la densidad y la presión respectivamente, y  $v$  es el campo de velocidad. Se ha considerado una perturbación anisotrópica  $\sigma_i^i$  en  $T_i^i$ . Es im-

portante resaltar, que hemos escrito la ecuación anterior en el gauge newtoniano, donde los modos vectoriales y tensoriales equivalen a cero desde un inicio. Esto está principalmente relacionado con la libertad de escoger un marco en el cual realizar las expansiones de la perturbación.

Resolviendo las ecuaciones de Einstein (3.16) y (3.17) en el espacio de Fourier a orden cero, obtenemos las ecuaciones (3.3), (3.14) vistas en la sección anterior y es lo que usualmente se conoce como fondo del Universo. A primer orden obtenemos que las fluctuaciones en la métrica son dadas por,

$$k^2\phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\phi} + \psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi Ga^2\delta T_0^0, \quad (3.18)$$

$$k^2\left(\dot{\phi} + \psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi Ga^2(\rho + P)\theta, \quad (3.19)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\psi} + 2\dot{\phi}\right) + \psi\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) = \frac{4\pi Ga^2\delta T_i^i}{3}, \quad (3.20)$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi Ga^2(\rho + P)\sigma, \quad (3.21)$$

del mismo modo las perturbaciones de la energía están descritas por,

$$\dot{\delta} = -(1+w)\left(\theta - 3\dot{\phi}\right) - 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right), \quad (3.22)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{a}}{a}(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta - k^2\sigma + k^2\psi, \quad (3.23)$$

donde se ha definido  $\theta = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  y  $w$  es la ecuación de estado del fluido total del Universo.

En 2006, el físico George Smoot fue galardonado con el distinguido premio nobel junto con su colega John C. Mather. Su trabajo está relacionado con el estudio del fondo de microondas mediante un satélite artificial nombrado COBE, con el cual lograron medir las anisotropías del CMB (véase Smoot et. al. [120] para más detalles). En principio, el CMB nos dicta que el Universo estaba en equilibrio térmico en épocas tempranas, sin embargo en el trabajo de Smoot midieron una

diferencia de temperatura  $\delta T/T \sim 10^{-5}$ . Estas anisotropías pueden relacionarse con la formación de estructura que observamos actualmente, y desde entonces las mediciones han sido refinadas obteniendo información más precisa. Uno de los objetivos primordiales en cosmología es rastrear esas anisotropías que han evolucionado a lo largo de nuestra historia permitiendo que la estructura del Universo se forme.

## 3.2. Análisis de las anisotropías del CMB

El fondo cósmico de microondas es considerado por muchos como la principal herramienta para investigar nuestro Universo. Una de sus fortalezas es que prácticamente los fotones provenientes del CMB han viajado en un Universo casi transparente desde la época de recombinación, en donde se formaron las primeras generaciones de estrellas. Esto nos permite obtener información de la evolución del Universo en sus etapas más tempranas. Además, otra ventaja de estudiar el CMB es que se puede definir naturalmente en una esfera, haciendo una análisis computacional más eficiente que analizarlo en tres dimensiones. A pesar de que las mediciones de la temperatura son entendidos en el espacio real, el espacio armónico es una elección natural para estudiar las propiedades estadísticas de la radiación del CMB. Por lo tanto si descomponemos el campo de radiación en esféricos armónicos tenemos:

$$T(\gamma) = \sum_{lm} Y_{lm}(\gamma) a_{lm}, \quad (3.24)$$

donde  $a_{lm}$  son los coeficientes de los armónicos esféricos y  $l$  es el multipolo a considerar. Estamos interesados en la distribución de potencia angular asumiendo la homogeneidad y la isotropía del Universo, podemos deducir la invariancia rotacional del CMB y luego reemplazar el promedio del conjunto con una suma sobre  $m$ . De esta manera la distribución de potencia angular está codificada

en (ver el trabajo de Komatsu [121] para más detalles):

$$C_l = 4\pi \sum_m \frac{a_{lm} a_{lm}^*}{2l+1}, \quad (3.25)$$

además esta relación está caracterizada por una incertidumbre conocida como varianza cósmica dada por la siguiente expresión,

$$\Delta_{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} C_l. \quad (3.26)$$

El espectro de potencia de las perturbaciones escalares en un universo sin curvatura de fondo es un ajuste excelente para presentar los datos, como se puede ver en la figura 3.2, donde comparamos el espectro calculado de mejor ajuste con los datos. La región sombreada en la figura indica la varianza cósmica, es decir, el error estadístico debido al hecho de que solo observamos el cielo desde un solo lugar. Es importante mencionar que la expresión dada por la ecuación (3.26) ha sido derivada asumiendo fluctuaciones gaussianas, que en principio han sido originadas por el proceso de inflación. Además, de la expresión puede verse fácilmente como  $\Delta_{C_l}$  disminuye monótonamente con el multipolo  $l$ . En la práctica, no podemos usar la región cercana al plano galáctico para analizar el CMB, así que el error se incrementa como  $\Delta_{C_l} = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f}} C_l$ , donde  $f$  describe la fracción del cielo usado para el análisis. Típicamente  $f \sim 0.7$ .

Entender los primeros instantes del Universo es uno de los retos primordiales en cosmología, ya que nadie ha logrado reconciliar la gravedad con el modelo estándar de física de partículas, el cual nos describe con precisión las interacciones microscópicas de las partículas elementales que conforman la materia. Sin embargo, la teoría de inflación es la más aceptada por la comunidad debido a que logra explicar algunos paradigmas relacionados con mediciones del Universo. Esta teoría sugiere que dos puntos totalmente opuestos en el Universo han estado previamente en contacto y por lo tanto tienen la misma temperatura (como demuestra el CMB), esto sería imposible de lograr a menos que el espacio-tiempo se haya expandido a una velocidad inclusive mayor a la de la luz a principios del Universo. El modelo de inflación explica lo antes mencionado suponiendo que el espacio en el Universo muy temprano (antes de que las partículas existieran) tenía una den-

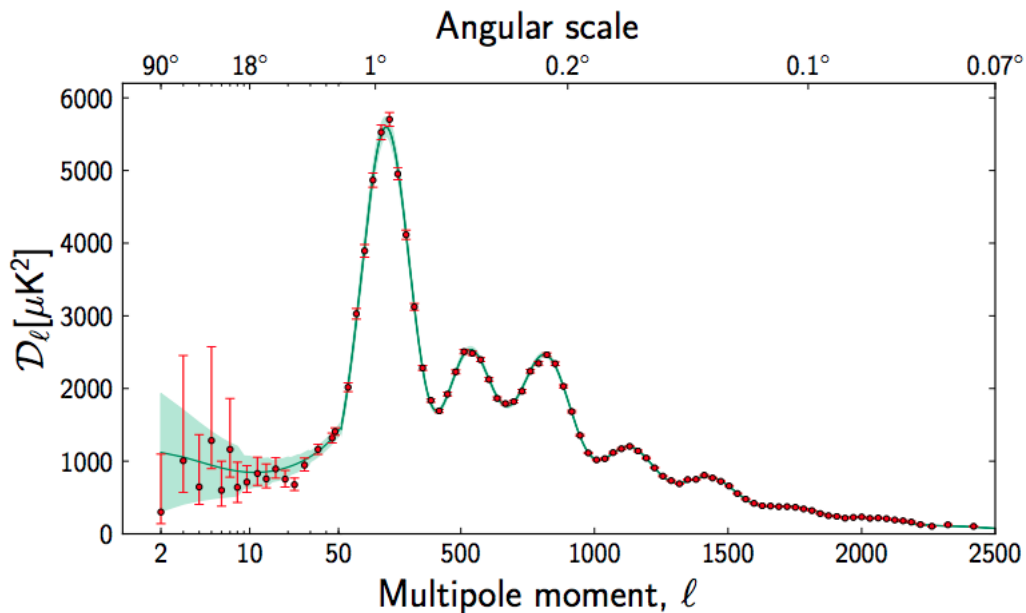


Figura 3.2: Espectro de potencia angular de temperatura del CMB. Esta imagen fue tomada de Ade et. al. [122]. Los puntos rojos con barras de error son los datos medidos y la línea verde es el modelo teórico que mejor se ajusta. La región sombreada indica el error teórico de la varianza cósmica. La precisión es esencialmente una variación cósmica limitada a  $l \sim 2000$ .

sidad de energía muy grande ocasionando a su vez una gran presión que causó en el espacio una expansión rapidísima y a un ritmo exponencial. Al inicio (antes de este proceso) supongamos que los puntos A y B estaban en contacto compartiendo información, sin embargo cuando empezó el proceso de inflación el espacio entre los dos puntos crece tan rápido que es imposible comunicarse entre ellos, siendo su distancia de separación aparente más rápida que la velocidad de la luz, a una distancia donde ya no pueden afectarse mutuamente. Esto ocurre en un lapso muy pequeño de tiempo (una pequeñísima fracción de segundo), e inmediatamente el universo se situó en una etapa de expansión más calmada, haciendo al universo observable cada vez más grande hasta que se pueden observar los puntos A y B en direcciones opuestas. Este mecanismo proporciona una explicación para que los puntos A y B estuvieran en contacto en una etapa muy temprana del Universo, y puedan estar separados una distancia muy grande durante la época de inflación y ser vistos recientemente en el universo observable.

El modelo más simple de inflación, consta de dos características que son relevantes en las mediciones del CMB. Una de ellas consiste en que el proceso de inflación genera un mecanismo que ocasiona la formación de las semillas de la estructura cósmica, estas semillas son nombradas fluctuaciones cuánticas en la densidad de energía primordial. Pueden entenderse como fluctuaciones de energía muy pequeñas a escala sub-atómica, que han podido ser medidas en un laboratorio y se conocen como partículas virtuales, ya que aparecen continuamente y luego desaparecen en una escala de tiempo inversamente proporcional a su energía. Estas fluctuaciones demuestran que el vacío está lleno de actividad y sus efectos pueden ser medidos con precisión. En consecuencia, el modelo de inflación asume que las fluctuaciones cuánticas estaban presentes en la densidad de energía primordial, siendo separadas a escalas cósmicas a través del violento incremento del espacio. Estas fluctuaciones pueden ser vistas en el CMB como puntos aleatorios ligeramente más calientes o más fríos, manifestando que quizá fueron originados en un proceso cuántico tal y como predice el modelo de inflación. Sin embargo, como se ha explicado antes, estas partículas virtuales suelen entenderse solo a nivel cuántico, pero debido a la gran expansión en el proceso de inflación la escala cuántica se convirtió en la escala cósmica. Por otra parte, la otra característica de inflación que es relevante para el CMB es que el universo es geoméricamente plano, como se ha estimado con diferentes mediciones astrofísicas y se había predicho por el modelo de inflación, antes de tener acceso a dichas observaciones. El mecanismo de inflación permite al universo ser plano a pesar de que al inicio tuviera una geometría curva (positiva o negativa) debido a que se expandió de una manera suficientemente rápida. Para los límites de nuestras mediciones, nuestra geometría es plana. Sin embargo, no se puede descartar aún que el Universo tenga una geometría curva ligeramente positiva o negativa, y simplemente no tengamos la tecnología para observarla actualmente.

Aunque el modelo de inflación está motivado principalmente por las mediciones del CMB, hay muchas otras formas de estudiar el comportamiento del Universo mediante diversas observaciones astrofísicas, siendo la mayoría a través del estudio del espectro electromagnético en diferentes longitudes de onda. La mayoría de las observaciones utilizadas en cosmología son enfocadas en el estudio

de galaxias, ya sea individualmente como lo hacen las mediciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes o de manera general, por ejemplo estudiando las propiedades de millones de galaxias en una gran parte del cielo. Gracias a estos y otros esfuerzos tenemos mapas en tres dimensiones de las distribuciones de galaxias en el Universo observable. Si promediamos sobre grandes volúmenes podremos ver que existe un tamaño característico para la agrupación de galaxias que corresponde al tamaño promedio de los puntos calientes y fríos del CMB. En el caso de las galaxias, el tamaño especial del punto se denomina “escala de oscilaciones acústicas de bariones”. La huella de los procesos físicos que produjeron los puntos calientes y fríos en el CMB también se detecta en la distribución de las galaxias. Por otro lado, independientemente de las mediciones del CMB y las distribuciones de galaxias, los cosmólogos estudian los primeros tres minutos del Universo en un estudio denominado “Nucleosíntesis del big bang”. Este proceso consiste en predecir la abundancia de elementos ligeros: hidrógeno, deuterio, helio, litio y berilio. El primer núcleo atómico estaba formado de un protón y un neutrón llamado deuterio. Antes de unos 100 segundos, cada vez que un deuterio intentaba formarse, se dividía por fotones energéticos a más de mil millones de kelvin. Después de 100 segundos, el universo se enfrió y expandió lo suficiente para que las fuerzas que unen al protón y al neutrón superaran las colisiones con los fotones que intentaban desgarrarlos permitiendo al deuterio sobrevivir intacto. En aproximadamente los siguientes 100 segundos, el deuterio se convirtió en helio a través de una serie de interacciones nucleares. A los 1000 segundos, se formaron los otros núcleos ligeros mediante un proceso en donde competían tres efectos: la fuerza que une a los neutrones y protones, los fotones que pierden su energía debido a la expansión del universo y el tiempo de desintegración de 10 minutos del neutrón. Las principales predicciones de los cálculos de la nucleosíntesis son las fracciones cósmicas promedio de los átomos. Por lo que existe una íntima relación entre la energía de los fotones y el número de núcleos que se forman. Para que la abundancia nuclear predicha coincida con las observaciones, debe haber alrededor de dos mil millones de fotones por cada protón. Por supuesto, siendo estos fotones el CMB. Los cálculos predicen que los átomos del universo son principalmente de hidrógeno con el 75 % de abundancia mientras que el siguiente elemento más abundante es el helio con aproximadamente el 25 %, siendo

los demás elementos casi nulos en proporción. Además muestran que ningún elemento más pesado que el berilio podría haberse formado en el universo temprano. Las mediciones de la abundancia cósmica de elementos ligeros es consistente con los que se observan en el CMB, a excepción del litio, donde se encuentra menos del predicho y hasta ahora es una de las principales debilidades.

### 3.3. Parámetros cosmológicos

A continuación se presentarán los seis parámetros del modelo estándar de cosmología, siendo sus valores particulares ajustados por el espectro de potencias del CMB (ver figura 3.2). Hay que resaltar que estos valores podrían cambiar al utilizar otro tipo de mediciones, pero hasta la fecha se cree que sus variaciones no son sustanciales. Los primeros tres parámetros del modelo cosmológico nos permiten conocer el contenido total del Universo. El primer parámetro toma en consideración el contenido total de átomos en el Universo usualmente denotado como  $\Omega_b$ , según lo predicho por el CMB equivale a  $\Omega_b = 0.05$ . Este hecho, es sin duda un resultado sorprendente debido a que nos dice que los átomos solo conforman un 5 % de la densidad de energía total del Universo. El segundo parámetro proporciona información acerca del contenido total de materia oscura en el Universo, este valor es  $\Omega_{DM} = 0.25$  siendo en proporción cinco veces mayor que los átomos en el Universo. Este resultado también es soportado por observaciones de movimientos de estrellas y galaxias los cuales se han medido a lo largo de los años. Por último, el tercer parámetro que nos permite abarcar el contenido total del Universo es la constante cosmológica  $\Lambda$  siendo aproximadamente el 70 % restante. A pesar de no saber con certeza qué es la constante cosmológica, se ha podido medir directamente mediante la aceleración cósmica, y en el espectro de potencias su valor está establecido por el primer pico. Además, el valor de  $\Lambda$  es consistente con las observaciones provenientes de SN Ia siendo  $\Omega_\Lambda = 0.70$ . Además de estos tres componentes, existen otros componentes en el Universo como la propia radiación proveniente del CMB, y los neutrinos. Sin embargo, ya que su contribución es casi nula  $\ll 1\%$ , no los consideraremos debido a que no



contamos con un nivel de precisión actualmente para obtener sus valores. Es importante señalar que este trabajo está principalmente motivado en entender el comportamiento del Universo a través de mediciones a bajos redshift, así que la contribución de la radiación y los neutrinos no es importante para entender la dinámica del Universo tardío. Otro parámetro que es importante considerar es aquel que captura nuestro escaso conocimiento de todo el complejo proceso de formación y posterior explosión de las primeras estrellas y la formación de las primeras galaxias. La intensa luz de estas primeras estrellas y galaxias rompió el hidrógeno en sus protones y electrones constituyentes, reionizando el universo. Con el nivel actual de precisión, solo necesitamos un parámetro para describir este hecho. En el proceso de reionización, alrededor del 5-8 % de los fotones provenientes del CMB se volvieron a dispersar. El parámetro que describe esta dispersión se conoce como la profundidad óptica y su símbolo es  $\tau$ . El valor medido es  $\tau = 0.05 - 0.08$  siendo el parámetro menos conocido de los seis y toma en cuenta la polarización del CMB. Por otro lado, los dos parámetros restantes caracterizan las semillas de las fluctuaciones que forman la estructura en el universo. Estas fluctuaciones primordiales son descritas por el espectro de potencias primordial, en principio de carácter similar al espectro de potencias de anisotropías del CMB, pero en vez de describir una superficie desacoplada, describe fluctuaciones en la densidad en un espacio de tres dimensiones. Observando el cosmos, podemos ver que actualmente las fluctuaciones tridimensionales en densidad son grandes. En algunos lugares hay galaxias, en otros cúmulos de galaxias y en otros casi nada. Suele usarse el espectro de potencias primordial para cuantificar las fluctuaciones de la densidad en el inicio de la expansión cósmica. Uno de estos dos parámetros restantes es la amplitud del espectro de potencias primordial codificado en el símbolo  $\Delta_R^2$ . El parámetro final, es el llamado índice espectral usualmente denotado por el símbolo  $n_s$ . Al igual que  $\Delta_R^2$ , el índice espectral  $n_s$  nos ayuda a entender las fluctuaciones primordiales. Su diferencia consiste en entender como las fluctuaciones primordiales dependen de una escala angular. Actualmente sabemos que el valor es  $n_s = 0.95$ . Estos seis parámetros mencionados anteriormente ayudan a calcular las propiedades y el espectro no solo para las mediciones del CMB sino en principio para cualquier medición, sin embargo en este trabajo solo consideraremos los tres primeros parámetros  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_\Lambda = 0.70$ .

Este hecho es debido a que no consideraremos las perturbaciones cosmológicas, y para entender el fondo del Universo solo se necesitan estos tres parámetros. Uno de los principales objetivos de este trabajo consiste en buscar desviaciones a estos parámetros mediante diferentes observaciones astrofísicas que nos permiten entender la dinámica del Universo.

El proceso de inflación podría estar relacionado con el proceso de expansión actual del Universo, no lo sabemos. Ambos procesos tienen propiedades similares y tal vez sus orígenes provengan de las mismas interacciones, sin embargo hay diferentes posibilidades para explicar la evolución del Universo y quizás el modelo de inflación no sea el paradigma correcto para explicar su comportamiento. El camino para entender los mecanismos que rigen la conducta del Universo parece estar demasiado lejos de su comprensión y la cosmología necesita estudiar todas las posibilidades, al menos hasta que el modelo estándar de cosmología  $\Lambda$ CDM (donde  $\Lambda$  es conocida como la constante cosmológica), se consagre o sea reemplazado por un modelo más competitivo que no presente deficiencias teóricas y observacionales que se mencionarán a continuación. Existe una diferencia  $\sim 120$  órdenes de magnitud entre lo que predice la teoría y lo que se observa, siendo su principal debilidad [5, 6]. Pero también existen otros problemas como la medición del parámetro de Hubble  $H_0$  (la razón de expansión actual del Universo) usando diferentes observaciones astrofísicas. Por un lado, las mediciones más recientes del CMB proporcionan un valor de  $67.36 \pm 0.54$  (Aghanim et al. [1]), mientras que las mediciones de SN Ia muestran un valor de  $74.03 \pm 1.42$  (Riess et al. [99]), ésta última sugiriendo que las mediciones proporcionan evidencia para un Universo más allá del modelo estándar de cosmología. Esto muestra una diferencia totalmente significativa de  $4.4 \sigma$  entre ambas técnicas, y por ésta razón es primordial analizar diferentes modelos alternativos para describir la expansión acelerada del Universo. Por lo tanto, a continuación analizaremos y propondremos algunos modelos que explican este hecho de forma alternativa, teniendo sus propias fortalezas y debilidades.

Uno de los principales motivos para considerar en nuestro análisis solo los parámetros que describen el fondo del Universo es debido a que las anisotropías son explicadas a partir de un análisis perturbativo del fondo del Universo, además muchos de los parámetros que se mencionan ante-

riormente son relevantes en etapas muy tempranas del Universo. Este trabajo está principalmente relacionado con estudiar el comportamiento del Universo tardío (con observaciones a bajos redshift, es decir  $z < 5$ ) siendo los parámetros del fondo del Universo los más relevantes para entender su dinámica. Además, ha sido demostrado en el trabajo de Wang [123] que al constreñir los parámetros de las perturbaciones (junto con los del fondo del Universo) no existen diferencias significativas al probar modelos con pequeñas desviaciones al modelo estándar. Debido a los modelos considerados en este trabajo, que serán mencionados a continuación, nos enfocaremos en analizar únicamente los parámetros del fondo del Universo con el objetivo principal de buscar pequeñas desviaciones al modelo estándar de cosmología.

### 3.4. Modelo $\omega$ CDM

Se puede entender al modelo  $\omega$ CDM como la primer extensión del modelo estándar de cosmología ( $\Lambda$ CDM), el cuál tiene propiedades similares, pero difiere en el valor de la ecuación de estado para la energía oscura  $\omega = -1$ . De esta manera, la ecuación de estado para la energía oscura permanece constante en el tiempo y solo necesita cumplir con la condición  $\omega < -1/3$  para obtener un Universo acelerado, agregando un parámetro libre extra ( $\omega$ ) en comparación al modelo estándar. Consideraremos al modelo  $\omega$ CDM con geometría plana, materia bariónica y materia oscura, y despreciaremos la densidad de energía de la radiación debido a que su contribución a bajos corrimientos al rojo<sup>2</sup> es del orden de  $\sim 10^{-5}$ . La ecuación adimensional  $E(z)$  puede ser escrita como:

$$E(z)_\omega^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0)}, \quad (3.27)$$

---

<sup>2</sup>Este modelo será contrastado con observaciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes, las cuales tienen un límite para la fuente de  $z \sim 3.6$ , que pueden considerarse como mediciones del Universo tardío.

donde  $\Omega_{m0}$  es el parámetro de densidad de materia a  $z = 0$  y el parámetro de desaceleración es

$$q(z)_\omega = \frac{1}{2E(z)_\omega^2} \left[ 3\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3(1+\omega_0)(1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0)} \right] - 1. \quad (3.28)$$

## 3.5. Cosmología Cardassiana

### 3.5.1. Modelo Cardassiano Original

El modelo Cardassiano original fue introducido por Freese and Lewis [124] para explicar la expansión acelerada del Universo sin DE. Motivado por teoría de branas, este modelo modifica la ecuación de Friedmann como

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_t}{3} + B\rho_t^n, \quad (3.29)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble,  $a$  es el factor de escala del Universo (esta normalizado entre el inicio del big bang donde vale cero y en la actualidad donde su valor es uno),  $G$  es la constante gravitacional de Newton,  $B$  es una constante de acoplamiento dimensional que depende de la teoría, y la densidad de materia total en el Universo es  $\rho_t = \rho_m + \rho_r$ . Las recientes mediciones de Planck [85, 125] sugieren una densidad de energía para la curvatura  $\Omega_k \simeq 0$ , por lo tanto asumiremos una curvatura plana. La ecuación de conservación se mantiene de la forma tradicional:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.30)$$

La evolución de la densidad de materia (materia oscura y bariones),  $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$ , y la densidad de la radiación,  $\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}$ , puede ser calculada de la ecuación (3.30). El segundo término del lado derecho de la ecuación (3.29), conocido como el término Cardassiano, lleva al Universo a una expansión acelerada si el exponente  $n$  satisface la condición  $n < 2/3$ . A tiempos tempranos en el Universo, este término correctivo es despreciable y la dinámica del Universo es gobernada por el término canónico de la ecuación de Friedmann. Cuando el Universo evoluciona, la densidad de

energía tradicional y la debida a la corrección cardassiana se vuelven iguales al corrimiento al rojo  $z_{Card} \sim \mathcal{O}(1)$ . Después, el término Cardassiano empieza a dominar la evolución del Universo y produce una aceleración cósmica. La ecuación (3.29) reproduce el modelo estándar  $\Lambda$ CDM para  $n = 0$ . Como en el caso estandar, es posible definir una nueva densidad crítica para el modelo CO,  $\rho_{Nc}$ , que satisface la ecuación (3.29) y puede escribirse como  $\rho_{Nc} = \rho_c F(B, n)$ , donde  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  es la densidad crítica estandar, y  $F(B, n)$  es una función que depende de los parámetros del modelo CO y de los componentes del Universo.

La ecuación de Raychaudhuri puede ser escrita en la forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_t + 3p_t) - B \left[ \left( \frac{3n}{2} - 1 \right) \rho_t^n + \frac{3}{2} n \rho_t^{n-1} p_t \right], \quad (3.31)$$

donde se usaron las ecuaciones (3.29) y (3.30). De la ecuación (3.29), es posible obtener el parámetro de Hubble adimensional  $E^2(z) \equiv H^2(z)/H_0^2$  como,

$$E(z, \Theta)^2 = \Omega_{std} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}) \left[ \frac{\Omega_{std}}{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} \right]^n, \quad (3.32)$$

donde  $\Theta = (\Omega_{m0}, h, n)$  es el vector de parámetros libres que será contrastado con los datos,  $\Omega_{r0} = \rho_{r0}/\rho_c$  es el parámetro de densidad estándar para la componente de radiación en la actualidad,  $\Omega_{m0} = \rho_{m0}/\rho_c$  es el parámetro de densidad observado para la materia (bariones y materia oscura), y definimos  $\Omega_{std} \equiv \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4$ . Calculamos el parámetro de densidad para la radiación como  $\Omega_{r0} = 2.469 \times 10^{-5} h^{-2} (1 + 0.2271 N_{eff})$  [126], donde  $N_{eff} = 3.04$  es el número estándar de especies relativistas [127]. Note que también hemos impuesto una condición de planitud en el contenido total del Universo [para detalles de como se obtiene la ecuación (3.32) vea 128, 129].

El parámetro de desaceleración, definido como  $q \equiv -\ddot{a}/aH^2$ , puede ser escrito

$$q(z, \Theta) = \frac{\Omega_{std} - \frac{1}{2}\Omega_{m0}(1+z)^3}{E^2(z, \Theta)} + \frac{1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}}{(\Omega_{m0} + \Omega_{r0})^n} \left[ \left( \frac{3n}{2} - 1 \right) + \frac{n\Omega_{r0}}{2\Omega_{std}} (1+z)^4 \right] \frac{\Omega_{std}^n}{E^2(z, \Theta)}. \quad (3.33)$$

Para investigar si el modelo CO puede producir una aceleración cósmica, es necesario reconstruir

$q(z)$  usando los valores medios para los parámetros  $\Theta$ .

### 3.5.2. Modelo Cardassiano politrópico modificado

Gondolo and Freese [130, 131] introdujeron una generalización simple del modelo Cardassiano original, y lo llamaron el modelo Cardassiano politrópico modificado, agregando un exponente adicional  $l$  [ver también 132]. La ecuación modificada de Friedmann es escrita como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t \beta^{1/l}, \quad (3.34)$$

donde

$$\beta \equiv 1 + \left( \frac{\rho_{Card}}{\rho_t} \right)^{l(1-n)}, \quad (3.35)$$

y  $\rho_{Card}$  es la densidad de energía característica, con  $n < 2/3$  y  $l > 0$ . De acuerdo con la previa ecuación de Friedmann (3.29), también asumiremos  $\Omega_k \simeq 0$ . La ecuación (3.34) reproduce el modelo  $\Lambda$ CDM para  $l = 1$  y  $n = 0$ . Entonces, la ecuación de la aceleración es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_t \beta^{1/l} + 4\pi G(1-n)\rho_t \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) \beta^{1/l}. \quad (3.36)$$

El modelo CPM (ecuación 3.37) ha sido estudiado por varios autores usando diferentes datos con  $\rho_t = \rho_m$  [ver por ejemplo 133] y además con  $\rho_t = \rho_m + \rho_r$  junto con un término de curvatura [134]. Aquí consideraremos un modelo CPM plano con componentes de materia y radiación. La ecuación adimensional del parámetro de Hubble  $E^2(z, \Theta)$  esta dada por:

$$E^2(z, \Theta) = \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 \beta(z, \Theta)^{1/l}, \quad (3.37)$$

donde

$$\beta(z, \Theta) \equiv 1 + \left[ \left( \frac{1 - \Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \right)^l - 1 \right] (1+z)^{3l(n-1)}, \quad (3.38)$$

siendo  $\Theta = (\Omega_{m0}, h, l, n)$ , el vector de parámetros libres que será ajustado a los datos.

Además,  $q(z, \Theta)$ , está dado como:

$$q(z, \Theta) = \frac{\Omega_{m0}\beta(z, \Theta)^{1/l}}{2E^2(z, \Theta)} \left[ 1 - 3(1-n) \left( 1 - \frac{1}{\beta(z, \Theta)} \right) \right] (1+z)^3 + \frac{\Omega_{r0}}{E^2(z, \Theta)} (1+z)^4. \quad (3.39)$$

Usamos los valores medios de  $\Theta$  en la última expresión para reconstruir el parámetro de desaceleración  $q(z)$  e investigar si el modelo CPM es consistente con una aceleración cósmica a tiempos tardíos. Estimaremos los parámetros cosmológicos de ambos modelos cardassianos usando mediciones del parámetro de Hubble y supernovas tipo Ia.

## 3.6. Parametrizaciones de la Energía Oscura

### 3.6.1. Parametrización CPL

Una forma de estudiar modelos de DE dinámicos, es a través de una parametrización de su ecuación de estado. Una de las más populares es propuesta por Chevallier, Polarski [14] y Linder [15] y se expresa como

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{(1+z)}, \quad (3.40)$$

donde  $\omega_0$  es la ecuación de estado a  $z = 0$  y  $\omega_1 = dw/dz|_{z=0}$ . El parámetro adimensional de Hubble  $E(z)$  para la parametrización CPL es:

$$E(z)_{CPL}^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp\left(\frac{-3\omega_1 z}{1+z}\right), \quad (3.41)$$

por lo tanto el parámetro de desaceleración  $q(z)$  se expresa de la forma

$$q(z)_{CPL} = \frac{1}{2E(z)_{CPL}^2} \left[ 3\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3(1-\Omega_{m0})(1+w_0+w_1)(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \times \exp\left(\frac{-3\omega_1 z}{1+z}\right) - 3\omega_1(1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)-1} \exp\left(\frac{-3\omega_1 z}{1+z}\right) \right] - 1. \quad (3.42)$$

### 3.6.2. Parametrización JBP

Jassal et al. [16] propusieron el siguiente ansatz para parametrizar la ecuación de estado de la energía oscura como

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{(1+z)^2}, \quad (3.43)$$

donde  $\omega_0$  es la ecuación de estado a  $z = 0$  y  $\omega_1 = dw/dz|_{z=0}$ . El adimensional  $E(z)$  para la parametrización JBP esta escrito de la siguiente manera

$$E(z)_{JBP}^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0)} \exp\left(\frac{3\omega_1 z^2}{2(1+z)^2}\right), \quad (3.44)$$

y el parámetro de desaceleración se escribe como

$$q(z)_{JBP} = \frac{1}{2E(z)_{JBP}^2} \left[ 3\Omega_{m0}(1+z)^3 3(1 - \Omega_{m0})(1 + \omega_1)(1+z)^{3(1+\omega_1)} \times \right. \\ \left. \exp\left(\frac{3\omega_1 z^2}{2(1+z)^2}\right) + 3\omega_1(1 - \Omega_{m0})z(1+z)^{3(1+\omega_1)-2} \exp\left(\frac{3\omega_1 z^2}{2(1+z)^2}\right) \right] - 1. \quad (3.45)$$

Por lo tanto, es posible reconstruir el parámetro  $q(z)$  contrastando los parámetros de cada modelo y determinar si el Universo experimenta una fase acelerada a tiempos tardíos.

## 3.7. Modelo de brana con tensión variable

En esta sección propondremos un modelo de branas fenomenológico basado en el modelo de Randall Sundrum II con una brana con tensión variable, llamado *chrono-brane* (CB) de aquí en adelante. Este modelo es capaz de lograr una expansión acelerada sino que también está apoyada por diferentes observaciones del Universo (vea Garcia-Aspeitia et al. [135] para todos los detalles).

Investigamos los efectos de una brana con tensión variable VBT (variable brane tension por sus siglas en inglés) en términos del factor de escala (redshift), i.e.  $\lambda(a)$  o  $\lambda(z)$ . Proponemos una función polinomial para la tensión de la brana, la cual es dominante a tiempos tardíos en el Universo, pero



subdominante en el Universo temprano.

La tensión de la brana establece los límites de altas y bajas energías. Siguiendo las referencias [136, 137], las ecuaciones de campo de Einstein proyectadas en una variedad cuatro dimensional con una VBT (vea [138, 139] para una brana con tensión constante) puede ser escrita en la forma:

$$G_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu} = \kappa_{(4)}^2 T_{\mu\nu} + \frac{6\kappa_{(4)}^2}{\lambda} \Pi_{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

No asumimos campos de materia en el bulto [137] el cual es  $\text{AdS}_5$  [139]. Por lo tanto, la ecuación de Friedmann es:  $H^2 = (\kappa_{(4)}^2/3) \sum_i \rho_i [1 + \rho_i/(2\lambda)]$ , recuperando la forma canónica cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . La tensión de la brana puede ser re-escrita como  $\lambda(a) \equiv \lambda_0 \hat{\lambda}(a)$ , con  $\lambda_0$  como parámetro libre. La función general adimensional,  $\hat{\lambda}(a)$ , da el comportamiento de la tensión de la brana en términos de el factor de escala. Esta forma de escribir  $\lambda$  evita problemas con las constantes fundamentales, eliminando la dependencia temporal. Por ejemplo,  $\hat{\lambda}(a)$  ha sido absorbida por alguno de los tensores asociados en (3.46).

Para producir una aceleración cósmica en las últimas etapas del Universo con una brana con tensión variable VBT sin energía oscura, solo consideramos materia (bariónica y materia oscura) y radiación como componentes del Universo, siendo una de las peculiaridades más interesantes de este modelo. Una ecuación adimensional de Friedmann,  $E(z)^2 \equiv H^2(z)/H_0^2$ , puede ser re-escrita como

$$E(z)^2 = E_{nb}^2(z) + \frac{\mathcal{M}}{\hat{\lambda}(z)} [\Omega_{m0}^2(z+1)^6 + \Omega_{r0}^2(z+1)^8], \quad (3.47)$$

donde  $E_{nb}^2(z) = \Omega_{m0}(z+1)^3 + \Omega_{r0}(z+1)^4$ ,  $\mathcal{M} = 3H_0^2/2\kappa_4^2\lambda_0$ , and  $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{DM0}$ . La componente de la radiación puede ser expresada como  $\Omega_{r0} = 2.469 \times 10^{-5}(H_0/100\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1})^{-2}(1 + 0.2271(3.04))$ . De la condición de planitud obtenemos,

$$\mathcal{M} = \frac{1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}}{\Omega_{m0}^2 + \Omega_{r0}^2} \hat{\lambda}(0). \quad (3.48)$$

El parámetro de desaceleración puede ser expresado como,  $q(z) = (q_I(z) + q_{II}(z))/E^2(z)$ , donde:

$$q_I(z) \equiv \frac{1}{2}\Omega_{m0}(z+1)^3 + \Omega_{r0}(z+1)^4, \quad (3.49a)$$

$$q_{II}(z) \equiv \frac{\mathcal{M}}{\hat{\lambda}(z)} [2\Omega_{m0}^2(z+1)^6 + 3\Omega_{r0}^2(z+1)^8 - \frac{1}{2\hat{\lambda}(z)} \frac{d\hat{\lambda}(z)}{dz} [\Omega_{m0}^2(z+1)^7 + \Omega_{r0}^2(z+1)^9]]. \quad (3.49b)$$

Note que las ecuaciones (3.47) y  $q(z)$  se reducen a esas mostradas en [30] cuando la tensión de la brana es constante.

Para explorar la cosmología de fondo, proponemos el siguiente ansatz para la VBT:  $\hat{\lambda}(a) = a^{-n} \rightarrow \hat{\lambda}(z) = (z+1)^n$ , donde  $n \in \mathbb{R}$  es el parámetro libre y  $\hat{\lambda}(1) = \hat{\lambda}(0) = 1$  para el factor de escala y el redshift respectivamente. Otros autores han analizado el caso  $\hat{\lambda}(a) = 1 - a^{-1} \rightarrow |\hat{\lambda}(z)| = z$  [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Esta forma ( $n = 1$ ) se infiere a través de la ley de Eötvös  $\lambda(T) = K(T_c - T)$ , donde  $K$  es una constante,  $T_c$  es una temperatura crítica, y  $T \sim a^{-1}$ , es la temperatura del Universo (ver [33] para más detalles). Por lo tanto, desde un punto de vista fenomenológico, nuestra propuesta  $\hat{\lambda}(z)$  podría obtenerse a partir de una generalización de la ley de Eötvös, similar al teorema de Gauss en n-dimensiones.

# Capítulo 4

## Resultados y Conclusiones

### 4.1. Resultados

En este capítulo presentaremos los resultados más relevantes de los diferentes modelos cosmológicos estudiados en este trabajo. Los resultados están basados en estimar los parámetros cosmológicos de cada modelo mediante un análisis Bayesiano, así como entender las repercusiones más importantes para explicar la evolución del Universo bajo estos diferentes enfoques. Presentaremos los resultados en el mismo orden en que los modelos fueron descritos en la sección anterior. Primero presentaremos los resultados del modelo estándar de cosmología, el modelo  $\Lambda$ CDM. A continuación se presentarán los resultados del modelo  $\omega$ CDM, el cuál fue estudiado mediante el uso de observaciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes. A continuación, se presentarán los resultados de los modelos Cardassianos, que fueron contrastados con observaciones de SN Ia y mediciones del parámetro de Hubble  $H(z)$ . Luego se presentarán los resultados de los modelos CPL y JBP, que fueron analizados por medio de sistemas lentes gravitacionales fuertes del mismo modos que el modelo  $\omega$ CDM. Por último, presentaremos los resultados de el modelo VBT que fue contrastado con las observaciones: SN Ia,  $H(z)$ , y SLS. Además se mencionarán algunas de las consecuencias más importantes en la estimación de parámetros a través de las diferentes observaciones astrofísicas y se discutirán cuestiones relevantes en la elección de diferentes priors para

constreñir los modelos cosmológicos.

En la estimación de parámetros hemos considerado una probabilidad gaussiana  $\mathcal{L}(\Theta) \propto e^{-\chi^2(\Theta)/2}$ , donde  $\chi^2(\Theta)$  es dado por cada una de las funciones chi-cuadrada que se definieron en la sección (2). Los parámetros libres  $\Theta$  para cada modelo fueron estimados a través de un análisis bayesiano MCMC mediante el módulo para python llamado `emcee` dado por [140]. Checamos las convergencias de las cadenas usando la prueba de Gelman-Rubin propuesta por [141], parando la fase de quemado si todos los parámetros tienen un valor menor a 1.07.

## 4.2. Resultados del modelo $\Lambda$ CDM

Para analizar los parámetros del fondo del Universo para el modelo estándar de cosmología ( $\Omega_{0m}$  y  $h$ ) hemos considerado las mediciones de datos observacionales de Hubble y Supernovas tipo Ia. Los lentes gravitacionales han sido descartados debido a que el único parámetro libre que es posible constreñir es  $\Omega_{0m}$ , este parámetro tiene constricciones débiles utilizando lentes gravitacionales fuertes como ya ha sido encontrado por diferentes autores (ver por ejemplo el trabajo de Biesiada 2006 [50] para más detalles) y corroborado en este trabajo. Esto es debido a que la cantidad de materia que existe entre un lente gravitacional y el observador (nosotros en la tierra) siempre es cero, ya que la única forma de medir un lente gravitacional es que la luz viaje hasta nosotros sin ser interrumpida por objetos materiales. El otro parámetro  $h$  no es considerado en ésta técnica debido a que se cancela, ya que está basado en un cociente de dos distancias de diámetro angular (véase la sección 2.3 para mas detalles).

Los parámetros ( $\Omega_{0m}$ ,  $h$ ) se estimaron mediante un análisis estadístico bayesiano MCMC asumiendo un prior plano en ambos parámetros:  $0 < \Omega_{0m} < 1$  y  $0 < h < 1$ . Los valores del mejor ajuste para los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM están dados en la tabla 4.1, además los contornos

Tabla 4.1: Valores medios para los parámetros ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ) del modelo  $\Lambda$ CDM derivados por cada conjunto de datos.

Conjunto de datos	$\chi^2_{min}$	$\Omega_{m0}$	$h$
H(z)	15.91	$0.265^{+0.0348}_{-0.0324}$	$0.718^{+0.015}_{-0.015}$
SN Ia	682.9	$0.2971^{+0.0346}_{-0.0331}$	$0.732^{+0.0175}_{-0.0173}$

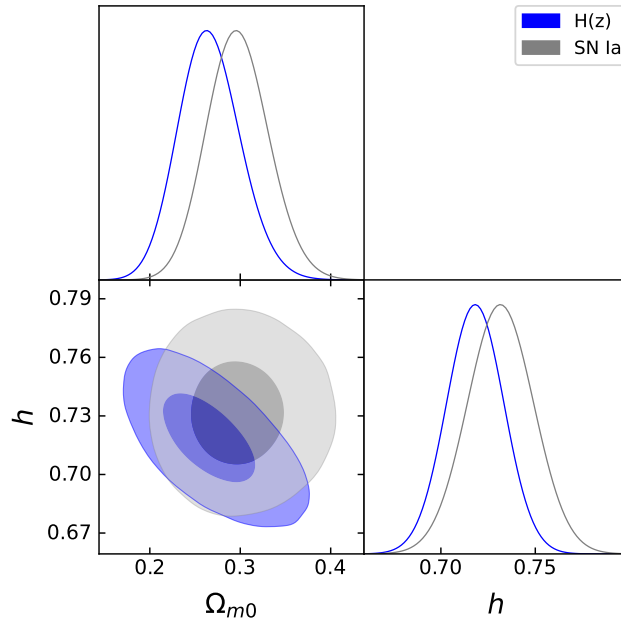


Figura 4.1: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $h$  del modelo  $\Lambda$ CDM usando las mediciones de BAO, SN Ia y H(z).

de confianza estadística para las diferentes mediciones se presentan en la figura 4.1. Entre los resultados más importantes resalta la consistencia a  $1 \sigma$  entre las diferentes observaciones para ambos parámetros. Es importante mencionar que se realizará una comparación entre los diferentes modelos en la sección 4.8 con el fin de analizar el modelo más prometedor para describir la dinámica del Universo tardío. Vale la pena señalar que el valor para la constante de Hubble  $H_0$  se desvía considerablemente de los valores obtenidos por las mediciones de Planck 2015 [85], este resultado que ya ha sido corroborado por diferentes autores es actualmente uno de los problemas más grandes a los que se enfrenta el modelo estándar.

### 4.3. Resultados del modelo $\omega$ CDM

Consideramos una probabilidad gaussiana  $\mathcal{L}(\Theta) \propto e^{-\chi_{\text{SL}}^2(\Theta)/2}$ , donde  $\chi_{\text{SL}}^2(\Theta)$  es dado por la ecuación (2.14). El modelo  $\omega$ CDM fue contrastado con observaciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes considerando dos parámetros libres  $\Omega_{0m}$  y  $\omega_0$ , además consideramos un parámetro adicional  $f$  solo en el tercer caso (vea la tabla 4.2). Como mencionamos anteriormente, se supone un prior gaussiano en  $\Omega_{0m}$ , por lo tanto, nuestra atención se centra en el parámetro  $\omega_0$ . Encontramos consistencia para las constricciones obtenidas en las primeras tres pruebas (ver figuras 4.2 y 4.3), es decir, el valor  $\omega_0$  no se ve afectado si un nuevo parámetro adicional  $f$  es considerado o los sistemas con  $D^{\text{obs}} > 1$  son excluidos. Sin embargo, los valores  $\chi_{\text{min}}^2$  y  $\chi_{\text{red}}^2$  reflejan la calidad de las constricciones cosmológicas: mejora cuando excluimos los sistemas en la región  $D^{\text{obs}} > 1$ , y sin cambios significativos cuando consideramos el parámetro correctivo  $f$ , de acuerdo con estudios previos [ $f \sim 1$ ;  $f = 1.010 \pm 0.017$  para 56, 101, respectivamente]. Sin embargo, cuando se consideran diferentes submuestras (vea las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 prueba T4 a T13)  $\omega_0$  adquiere valores diferentes, la mayoría apuntando a un universo con DE fantasma ( $\omega_0 < -1$ ) y dos casos (T4 y T10) donde  $\omega_0$  es positivo, lo que no satisface la condición para un Universo en expansión acelerada a tiempos tardíos  $\omega_0 < -1/3$ , produciendo un  $q(z)$  no físico (ver Figura 4.7). A continuación, analizamos con más detalle algunos resultados clave obtenidos de las submuestras.

La cuarta prueba T4 se realizó utilizando sistemas en la región de  $D^{\text{obs}} < 0.5$ , esta submuestra consta de 30 puntos. Nueve de ellos tienen la peculiaridad de que su ecuación de lente teórica Eq. (2.12) proporciona  $D^{\text{th}} < 0.5$  solo cuando  $\omega_0$  se vuelve positivo. Sin embargo, tres de estos sistemas (MG0751+2716, SL2SJ085019–034710, y SL2SJ02325–040823) nunca ingresan a la región mencionada. Estas son consecuencias de la forma funcional de  $D^{\text{th}}$ , que da el mismo resultado para diferentes valores de  $\omega_0$ . Como repercusión, los parámetros cosmológicos muestran problemas de convergencia con el método MCMC, p. ej. observe que la distribución posterior  $\Omega_{m0}-\omega_0$  presenta contornos dobles de confianza (ver figura 4.4).

La prueba T10 considera sistemas con dispersión de velocidades para las galaxias lentes en la

región  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$ . Este caso proporciona valores más grandes para  $\chi_{red}^2$  que las pruebas anteriores, lo que indica un Universo sin una etapa de aceleración dentro de  $3\sigma$ . La región  $D^{obs} > 1$  (T6) presenta el valor más alto de  $\chi_{red}^2$  para el modelo  $\omega$ CDM. Estos problemas indican que algunos sistemas dentro de estas regiones podrían tener algunas incertidumbres que afectan las cantidades medidas  $\theta_E$  y  $\sigma$ . La tabla A.5 muestra los 32 sistemas con  $D^{obs} > 1$ . Muchos de estos sistemas aparecen marcados, lo que significa que tales objetos son: lentes no confirmados, o tienen estructuras fuente complejas con múltiples arcos y contra-arcos, o la lente de primer plano está claramente compuesta de dos componentes distintos, tienen medidas inciertas de desplazamiento al rojo, o los arcos (anillos) están incrustados a la luz de la lente frontal. Remitimos al lector interesado a las referencias presentadas en la Tabla A.4. Sugerimos que estos sistemas con  $D^{obs} > 1$ , no deben usarse en la estimación de parámetros cosmológicos [vea también 61]. Finalmente, examinamos tres regiones diferentes de acuerdo con el desplazamiento al rojo de la galaxia lente, excluyendo aquellos sistemas con  $D^{obs} > 1$ . Descubrimos que:  $0.2 \leq z_l \leq 0.4$  presenta las peores constricciones, aunque con valores similares a los obtenidos con la muestra completa;  $z_l < 0.2$  y  $z_l > 0.4$  muestran las segundas y terceras mejores estimaciones (consulte los valores de  $\chi_{red}^2$  en la tabla 4.7). En general, obtenemos un buen ajuste a los datos y los peores resultados (mayor  $\chi_{red}^2$ ) son los correspondientes a las submuestras:  $D^{obs} > 1$  (SS4),  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$  (SS5) y  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$  (SS8). El mejor valor de  $\chi_{red}^2$  se obtiene utilizando SS3, es decir, cuando  $0.5 < D^{obs} < 1$ .

Para la mayoría de las pruebas, los valores estimados para las constricciones  $\omega_0$  se desvían del modelo de concordancia  $\Lambda$ CDM ( $\omega_0 = -1$ ) hacia la región fantasma. Cuando se usa la muestra completa, nuestros límites  $\omega_0$  ( $\sim -2.6$ ) son inconsistentes con  $\omega_0 = -1.56 \pm 0.54$  y  $\omega_0 = -1.026 \pm 0.041$ , obtenido por [45, 98] respectivamente. Sin embargo, nuestra mejor estimación  $\omega_0 = -1.653_{-0.322}^{+0.264}$  obtenida en la región  $0.5 \leq D^{obs} < 1$  (T5) es consistente con los valores antes mencionados y los obtenidos por Cao et al. [56] ( $\omega_0 = -1.15_{-0.35}^{+0.34}$ ) usando el mismo método (46 SLS) con un parámetro correctivo  $f$ , y [57] ( $\omega_0 = -1.48_{-0.94}^{+0.54}$ ) suponiendo una generalización de la distribución de masa para la galaxia lente (118 SLS). Para juzgar la calidad de nuestras constricciones, también calculamos el FOM (Eq. 2.26) para cada prueba. Las constricciones más fuertes (es decir, el FOM

Tabla 4.2: Valores medios de los parámetros ( $\Omega_{m0}$ ,  $w_0$ ) para el modelo  $\omega$ CDM y el parámetro correctivo  $f$  derivados de emplear diferentes pruebas de SLS. Etiquetamos algunas submuestras como U (unreliables), ya que presentan constricciones débiles en todos los modelos cosmológicos estudiados con lentes gravitacionales, y presentan resultados no confiables en el análisis Bayesiano.

Conjunto de datos: número de datos	$\chi_{min}^2$	$\chi_{red}^2$	$\Omega_{m0}$	$w_0$	$f$
modelo $\omega$ CDM					
T1 (todos los sistemas: 205)	597.693	2.944	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.606^{+0.513}_{-0.610}$	—
T2 ( $D^{obs} \leq 1$ : 173)	409.759	2.396	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.593^{+0.794}_{-0.860}$	—
T3 (todos los sistemas con $f$ : 205)	589.197	2.917	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.603^{+1.002}_{-0.917}$	$1.017^{+0.006}_{-0.006}$
T4 ( $D^{obs} < 0.5$ : 30) <sup>U</sup>	67.469	2.410	$0.312^{+0.006}_{-0.006}$	$0.653^{+0.175}_{-4.515}$	—
T5 ( $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$ : 143)	263.795	1.871	$0.308^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.653^{+0.264}_{-0.322}$	—
T6 ( $D^{obs} > 1$ : 32) <sup>U</sup>	186.417	6.214	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.628^{+0.571}_{-0.665}$	—
T7 ( $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$ : 64) <sup>U</sup>	201.766	3.254	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.100^{+0.416}_{-0.525}$	—
T8 ( $210 \text{ km s}^{-1} \leq \sigma < 243 \text{ km s}^{-1}$ : 53)	118.092	2.316	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.633^{+0.550}_{-0.641}$	—
T9 ( $243 \text{ km s}^{-1} \leq \sigma \leq 276 \text{ km s}^{-1}$ : 49)	107.252	2.282	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.854^{+0.672}_{-0.958}$	—
T10 ( $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$ : 39) <sup>U</sup>	128.989	3.486	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$0.234^{+0.116}_{-0.127}$	—
T11 ( $D^{obs} \leq 1$ and $z_l < 0.2$ : 52)	110.663	2.213	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-3.134^{+0.807}_{-0.603}$	—
T12 ( $D^{obs} \leq 1$ and $0.2 \leq z_l \leq 0.4$ : 49)	137.509	2.926	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-3.627^{+0.588}_{-0.276}$	—
T13 ( $D^{obs} \leq 1$ and $z_l > 0.4$ : 72)	149.099	2.129	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.163^{+0.318}_{-0.446}$	—

más alto) se obtienen cuando  $0.5 \leq D^{obs} < 1$  (ver tabla 4.8). Por otro lado, la región  $D^{obs} < 0.5$  proporciona las constricciones menos confiables, como se espera de los problemas de convergencia y los contornos de doble confianza (ver Figura 4.4).

Presentamos la reconstrucción del parámetro de desaceleración en la figura 4.7 usando las estimaciones obtenidas en cada prueba. Observe que las estimaciones dadas por las pruebas T4 y T10 exhiben valores no físicos, es decir, no proporcionan una aceleración cósmica en el Universo a épocas tardías y sus  $q(z)$  están en desacuerdo con la predicción teórica estándar a altos desplazamientos al rojo ( $q(z) \rightarrow 0.5$ ). Las constricciones obtenidas de otras muestras proporcionan una fase acelerada en los últimos tiempos. Sin embargo, solo T13 produce un valor  $q_0 = q(z = 0)$  de acuerdo con el modelo estándar ( $q_{0\Lambda\text{CDM}} \sim -0.5$ ), mientras que los valores restantes de la muestra están en tensión con el modelo estándar.



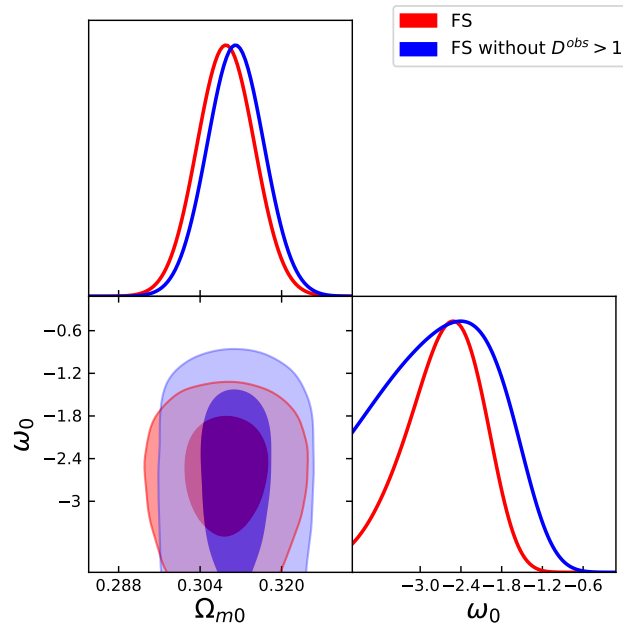


Figura 4.2: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $\omega_0$  del modelo  $\omega$ CDM para la muestra completa y la muestra final (FS) excluyendo sistemas lentes gravitacionales fuertes (SLS) con un valor  $D^{obs} > 1$ .

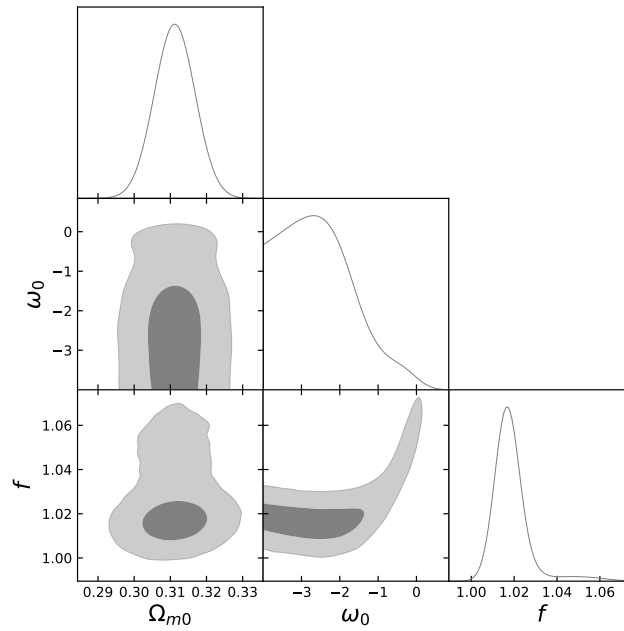


Figura 4.3: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 % y 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $\omega_0$  del modelo  $\omega$ CDM y el parámetro correctivo  $f$  para la muestra completa.

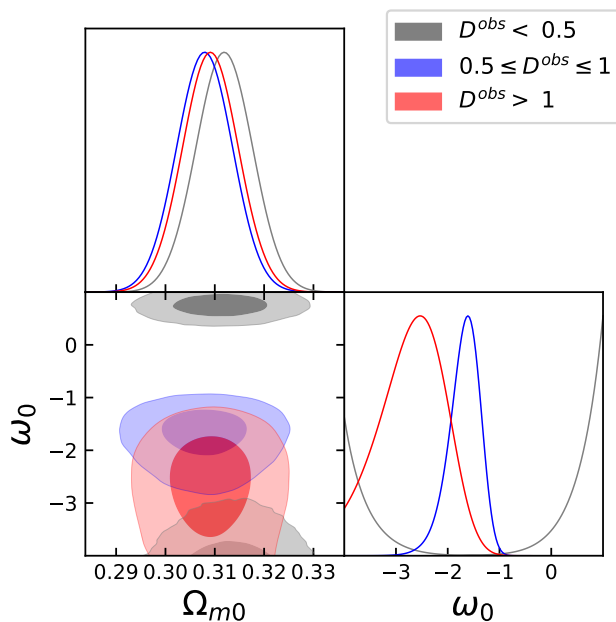


Figura 4.4: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $\omega_0$  del modelo  $\omega$ CDM para diferentes regiones según el valor de  $D^{obs}$ .

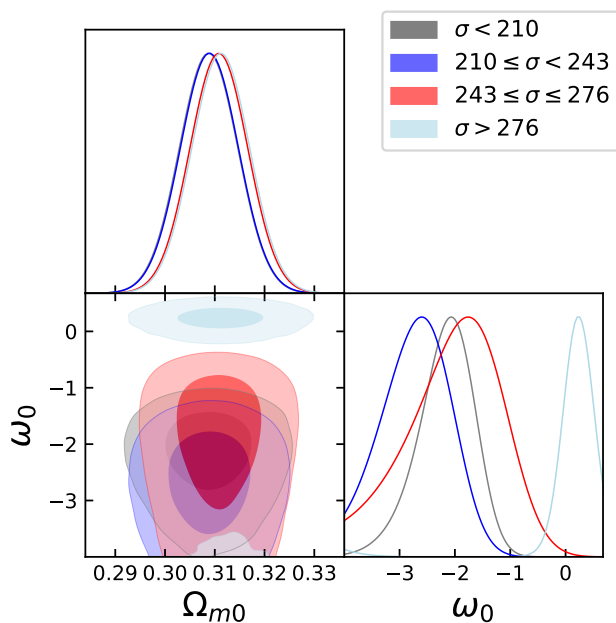


Figura 4.5: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $\omega_0$  del modelo  $\omega$ CDM para diferentes regiones según el valor de la dispersión de velocidades  $\sigma$ .

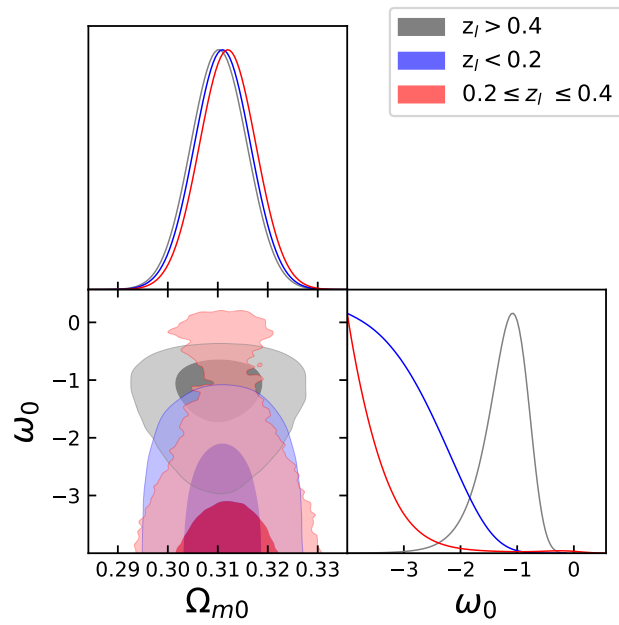


Figura 4.6: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $\omega_0$  del modelo  $\omega$ CDM para diferentes regiones en el redshift de la lente  $z_l$ .

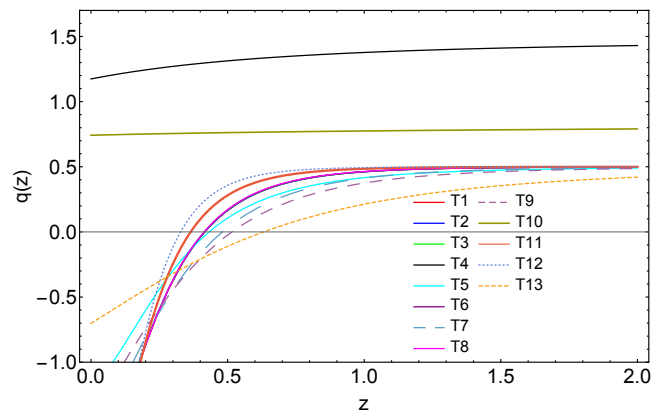


Figura 4.7: Reconstrucción del parámetro  $q(z)$ , usando las constricciones obtenidas para el modelo  $\omega$ CDM.

## 4.4. Resultados de los modelos Cardassianos

Se realizó un análisis estadístico bayesiano MCMC para estimar los parámetros  $(\Omega_{m0}, h, n)$  y  $(\Omega_{m0}, h, n, l)$  para los modelos CO y CPM respectivamente. Estos modelos fueron contrastados con observaciones de SN Ia y mediciones del parámetro de Hubble  $H(z)$ , las cuales consisten de mediciones de cronómetros cósmicos y oscilaciones acústicas de bariones [vea la sección 2.1 para más detalles]. La función de probabilidad gaussiana construida para cada conjunto de datos viene dada por  $\mathcal{L}_{\text{OHD}} \propto \exp(-\chi_{\text{OHD}}^2/2)$ ,  $\mathcal{L}_{\text{cJLA}} \propto \exp(-\chi_{\text{cJLA}}^2/2)$ ,  $\mathcal{L}_{\text{fJLA}} \propto \exp(-\chi_{\text{fJLA}}^2/2)$ , y  $\mathcal{L}_{\text{joint}} \propto \exp(-\chi_{\text{tot}}^2/2)$ , donde  $\chi_{\text{tot}}^2 = \chi_{\text{OHD}}^2 + \chi_{\text{cJLA}}^2$ . En todos nuestros cálculos, consideramos 3000 pasos para estabilizar las estimaciones (fase de quemado), 6000 pasos MCMC y 1000 caminantes que se inicializan en una región alrededor de los puntos esperados de máxima probabilidad, que se estima con el método “differential evolution” proveniente de la paquetería *scipy* de *python*. Para ambos modelos, CO y CPM, asumimos los siguientes priors:  $\Omega_{m0}[0, 1]$  y  $n[-1, 2/3]$ . Para el parámetro  $l$  consideramos el prior  $[0, 6]$ . Para el parámetro  $h$  se consideran tres valores: un prior plano  $[0, 1]$  y dos priors gaussianos, uno por Riess et al. [83, el primer punto en la Tabla A.1], y el otro por Ade et al. [85] de las mediciones de Planck 2015 ( $h = 0.678 \pm 0.009$ ). Cuando se usan los datos de cJLA, también tomamos un prior plano para el parámetro  $M[-1, 1]$ . Los siguientes priors  $\alpha[0, 2]$ ,  $\beta[0, 4.0]$ ,  $M_B^1[-20, -18]$  y  $\Delta_M[-0.1, 0.1]$  se consideran cuando se emplea la muestra fJLA. Para juzgar la convergencia de la muestra, pedimos que la fracción de aceptación esté en el rango  $[0.2 - 0.5]$  y verifiquemos el tiempo de autocorrelación que tiene que ser  $\mathcal{O}(60 - 80)$ .

Llevamos a cabo cuatro corridas utilizando diferentes conjuntos de DOH: la muestra de observaciones completa dada en la Tabla A.1, los 31 puntos obtenidos usando el método ED ( $\text{OHD}_{\text{DA}}$ ), y dos muestras que contienen los puntos de ED más esos puntos homogeneizados provenientes de BAO utilizando un  $r_d$  común, estimado a partir de mediciones de Planck y WMAP (Tabla A.2). También estimamos los parámetros cosmológicos de los modelos CO y CPM utilizando las muestras cJLA y fJLA. Además, realizamos un análisis en conjunto considerando cada muestra de DOH y la muestra de cJLA. Las tablas 4.3 y 4.4 proporcionan los mejores ajustes para los parámetros

utilizando los diferentes conjuntos de datos y priors en  $h$ . Las tablas 4.5 y 4.6 dan las constricciones del siguiente análisis conjunto: OHD + cJLA (J1), OHD<sub>DA</sub> + cJLA (J2), OHD<sub>hpl</sub> + CJLA (J3), y OHD<sub>hw9</sub> + CJLA (J4). También damos el valor mínimo para la función chi-cuadrada,  $\chi_{min}$ , y  $\chi_{red} = \chi_{min}/dof$  reducido, donde el grado de libertad (dof) es la diferencia entre el número de puntos y los parámetros libres.

#### 4.4.1. cJLA vs. fJLA en la estimación de los parámetros cosmológicos Cardassianos

El uso de la muestra fJLA para inferir valores a los parámetros cosmológicos tiene un alto costo computacional cuando se prueban varios modelos. Para lidiar con esto, usamos la muestra cJLA en lugar de la muestra fJLA. Sin embargo, la muestra cJLA se construyó bajo la suposición de que la evolución del Universo está dada según la cosmología estándar. Para evaluar cómo las constricciones del modelo cardassiano están sesgadas cuando se usan las diversas muestras de SNIa, realizamos la estimación de parámetros con diferentes combinaciones de modelos, priors y muestras. Las diversas constricciones se presentan en las Tablas 4.3 y 4.4. Observe que los valores medios para los parámetros cosmológicos en el modelo CO obtenidos de ambas muestras de SNIa son los mismos. Para el modelo MPC, la mayor diferencia se observa en el parámetro  $l$  (con prior plano en  $h$ ),  $\sim 0.18\sigma$ . Es más pequeño para el parámetro  $n$  cuando se emplea un prior gaussiano en  $h$ . La figura 4.8 ilustra la comparación de los contornos de confianza estadística para estos parámetros utilizando ambas muestras cJLA y fJLA (con prior plano en  $h$ ). La figura 4.9 muestra que no existe una diferencia significativa en la reconstrucción del parámetro  $q(z)$  para los modelos CO y CPM utilizando las constricciones obtenidas de ambas muestras de SNIa. Por lo tanto, para optimizar el tiempo computacional, en el siguiente análisis solo usamos la muestra comprimida de JLA.

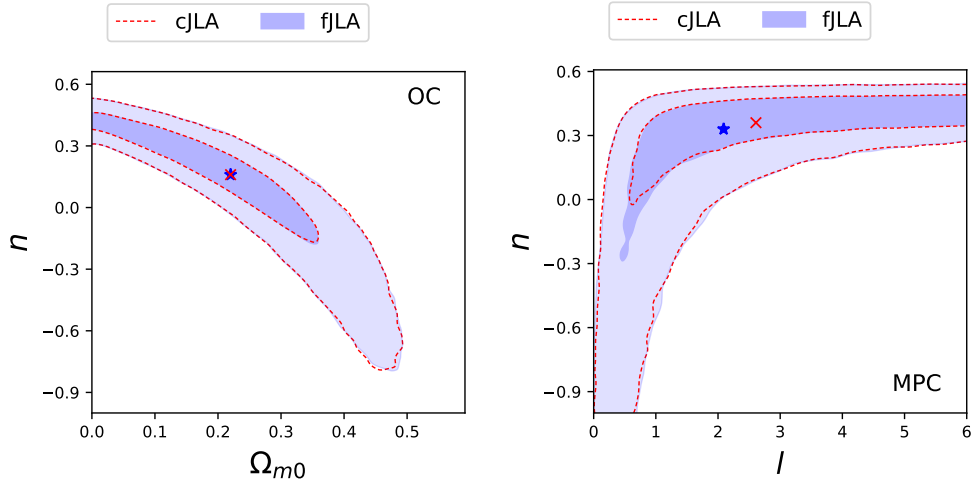


Figura 4.8: Comparación de los contornos de confianza  $\Omega_{m0}-n$  (panel izquierdo) y  $n-l$  (panel derecho) para los parámetros de los modelos CO y CPM dentro de los niveles de confianza a  $1\sigma$  y  $3\sigma$  usando las muestras cJLA (líneas discontinuas) y fJLA (líneas sólidas) respectivamente. En la estimación de parámetros, un prior plano es considerado. La cruz y la estrella marcan los valores medios de cada conjunto de datos.

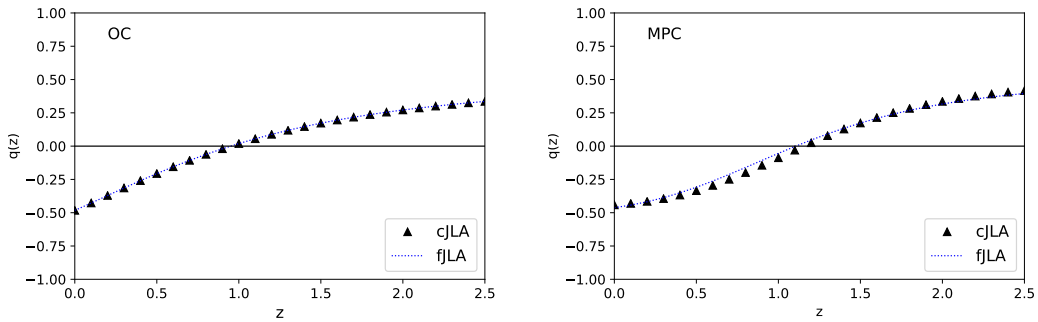


Figura 4.9: Reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para el modelo CO (panel izquierdo) y CPM (panel derecho) usando las constricciones de las muestras cJLA y fJLA cuando un prior plano en  $h$  es considerado. Note que no hay una diferencia significativa en el comportamiento de  $q(z)$  usando las distintas muestras.

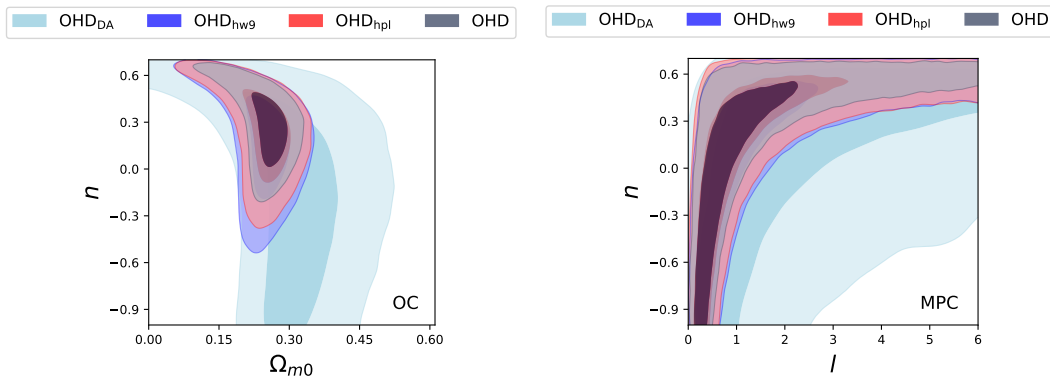


Figura 4.10: Contornos de confianza de los parámetros  $\Omega_{m0}-n$  (panel izquierdo) y  $n-l$  (panel derecho) para los modelos CO y CPM dentro del nivel de confianza a  $1\sigma$  y  $3\sigma$  usando la muestra de DOH en Tabla A.1, la muestra de DOH<sub>ED</sub>, y dos muestras que contienen los puntos del método de ED más los puntos homogeneizados de las mediciones de BAO usando los valores de  $r_d$  provenientes de las mediciones de WMAP y Planck. Un prior plano en  $h$  fue considerado en la estimación de parámetros.

#### 4.4.2. Los efectos de la submuestra homogénea de DOH en la estimación de parámetros.

En el capítulo 2, se construyó una muestra homogénea de DOH independiente del modelo para evitar o reducir las constricciones sesgadas debido a asumir una cosmología o a los errores sistemáticos subestimados en las mediciones de BAO. Las tablas 4.3 - 4.4 proporcionan los valores estimados para el modelo CO y CPM a partir de la combinación de la nueva muestra de DOH. El aumento en el error de  $r_d$  también aumenta el error en  $H(z)$ , reduciendo el ajuste para  $(\chi_{red})$ . A pesar de esto, la ventaja de estos nuevos valores es que podrían ser considerados independientes de asumir un modelo cosmológico. La figura 4.10 muestra los contornos de los parámetros  $\Omega_{m0} - n$  CO (panel izquierdo) y  $n - l$  CPM (panel derecho) respectivamente utilizando diferentes muestras de DOH. Tenga en cuenta que todas las estimaciones son consistentes dentro de los niveles de confianza a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ . La figura 4.11 ilustra las reconstrucciones para  $q(z)$  utilizando los diferentes conjuntos de datos DOH. Observe que para el modelo CO, las muestras de DOH homogeneizadas dan valores  $q(0)$  ligeramente diferentes a los obtenidos de la muestra en la Tabla A.1. Para el modelo CPM, estas diferencias son menos significativas

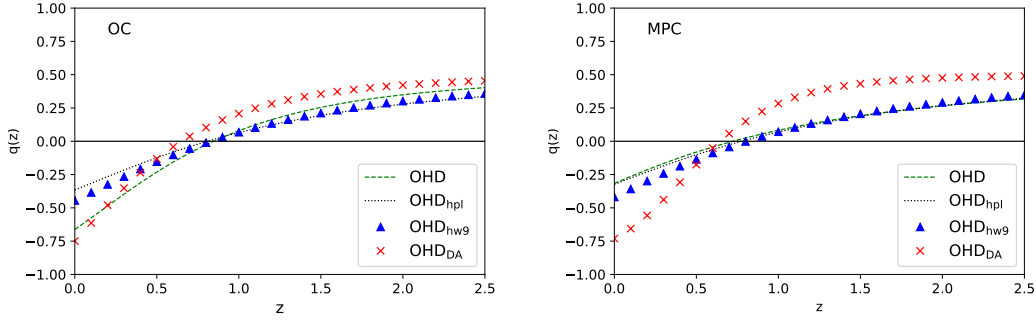


Figura 4.11: Reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para los modelos CO (panel izquierdo) y CPM (panel derecho) usando las constricciones de diferentes muestras de DOH cuando un prior plano en  $h$  es considerado.

#### 4.4.3. Los efectos de un prior gaussiano diferente en $h$ .

Uno de los problemas más importantes en cosmología es la tensión hasta más de  $3\sigma$  entre las mediciones locales de la constante de Hubble  $H_0$  y las obtenidas de las anisotropías del CMB [142]. La última estimación de la colaboración de Planck [85],  $h = 0.678 \pm 0.009$ , no está de acuerdo con el primer valor dado en la Tabla A.1. Por lo tanto, el uso de diferentes priors gaussianos en  $h$  conducirá a diferentes estimaciones en los parámetros de los modelos CO y CPM. Por lo tanto, llevamos a cabo todos nuestros cálculos con ambos casos. La figura 4.12 ilustra cómo los contornos de confianza para los parámetros  $\Omega_{m0} - n$  y  $l - n$  de los modelos CO (panel izquierdo) y CPM (panel derecho) obtenidos desde  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  cambian usando cada prior gaussiano. Aunque son consistentes a  $3\sigma$ , la tensión en las constricciones es notable. A pesar de estas diferencias, ambos resultados conducen al Universo a una fase de expansión acelerada pero con amplitud,  $q(0)$  y redshifts de transición ligeramente diferentes (es decir, el  $z$  al que el Universo pasa de una fase desacelerada a una acelerada). Además, las estimaciones del modelo CO y CPM son consistentes con la cosmología estándar, incluso cuando se consideran diferentes priors gaussianos.



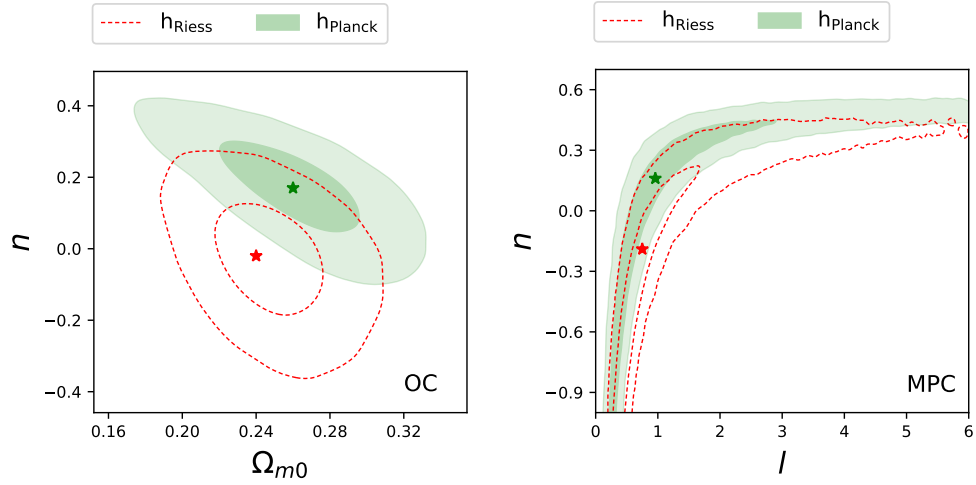


Figura 4.12: Comparación de los contornos de confianza para los parámetros  $\Omega_{m0}-n$  (panel izquierdo) y  $l-n$  (panel derecho) de los modelos CO y CPM respectivamente dentro de los niveles de confianza a  $1\sigma$  y  $3\sigma$  obtenidos de los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  usando dos priors gaussianos en  $h$ :  $0.732 \pm 0.017$  [83] y  $0.678 \pm 0.009$  [85]. Las estrellas marcan los valores medios de cada conjunto de datos.

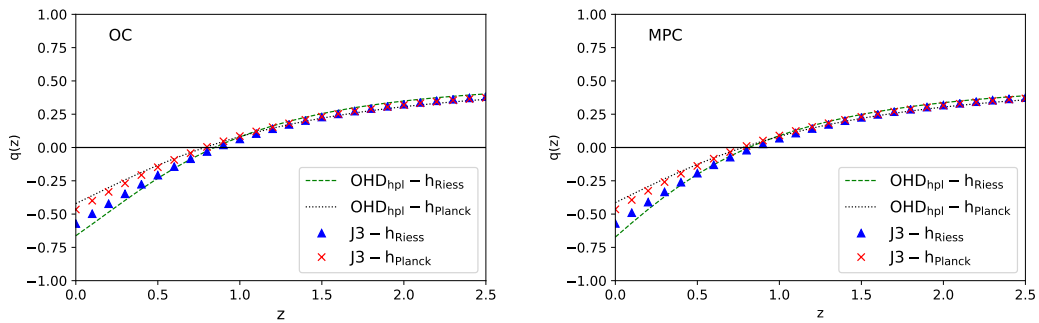


Figura 4.13: Reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para el modelo CO (panel izquierdo) y CPM (panel derecho) usando las constricciones de la muestra de  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  el análisis conjunto J3 cuando diferentes priors gaussianos en  $h$  son considerados:  $0.732 \pm 0.017$  [83] y  $0.678 \pm 0.009$  [85]

#### 4.4.4. Implicaciones cosmológicas de las constricciones de los modelos CO y CPM

La figura 4.14 muestra las distribuciones posteriores marginalizadas 1D y los contornos 2D 68 %, 95 %, 99 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $h$  y  $n$  del modelo CO obtenido de DOH<sub>hpl</sub>, cJLA y J3 con priors planos (panel izquierdo) y gaussianos (panel derecho) en  $h$ . Suponiendo un prior plano en  $h$ , las estimaciones de  $\Omega_{m0}$ ,  $h$  obtenidas de los diferentes conjuntos de datos son consistentes entre ellas y están de acuerdo con las mediciones de Planck para el modelo estándar. Para el parámetro  $n$  encontramos una tensión en las constricciones obtenidas de los diferentes conjuntos de datos. Sin embargo, las estimaciones tienen grandes incertidumbres siendo consistentes entre ellos dentro del nivel de condifencia a  $1\sigma$ . Nuestras restricciones para  $n$  son consistentes dentro del nivel de condifencia a  $1\sigma$  con aquellas que han sido obtenidas por otros autores, por ejemplo,  $n = -0.04_{-0.07}^{+0.07}$  [143],  $n = 0.16_{-0.52}^{+0.30}$  [144], y  $n = -0.022_{-0.05}^{+0.05}$  [145]. Vale la pena señalar que, cuando se usan los datos de cJLA,  $\Omega_m$  adquiere valores extremadamente bajos (vea el contorno  $\Omega_{m0} - n$ ), que es consistente con los resultados de Wei et al. [144] que obtuvo un contorno similar utilizando el conjunto de datos Union 2.1. Además, los valores para  $\chi_{red}^2$  provenientes de SN Ia sugieren que sus errores (muestra cJLA) están subestimados.

Por otro lado, cuando se considera el prior gaussiano en  $h$  dado por Riess et al. [83], los DOH<sub>hpl</sub> proporcionan un mejor ajuste para los parámetros del modelo CO que aquellos que se obtiene cuando se utiliza un prior plano (vea los valores  $\chi_{red}^2$ ). Los datos de SN Ia no muestran diferencias estadísticas importantes en la estimación de parámetros cuando se emplean los diferentes priors. Observe que para el análisis en conjunto (ver Fig. 4.14),  $n$  prefiere valores alrededor de  $n \sim 0$ . La figura 4.15 muestra los ajustes para los DOH<sub>hpl</sub> (panel superior) y los datos de cJLA (panel inferior) utilizando los DOH<sub>hpl</sub>, cJLA y J3 para el modelo CO. Se realizó un análisis Monte Carlo para propagar el error a nivel de condifencia a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ . La comparación entre estos resultados y el ajuste para  $\Lambda$ CDM revela que ambos modelos están de acuerdo con los datos y que no hay una diferencia significativa entre ellos. Además, cuando se usan las constricciones J1, J2 y J4,

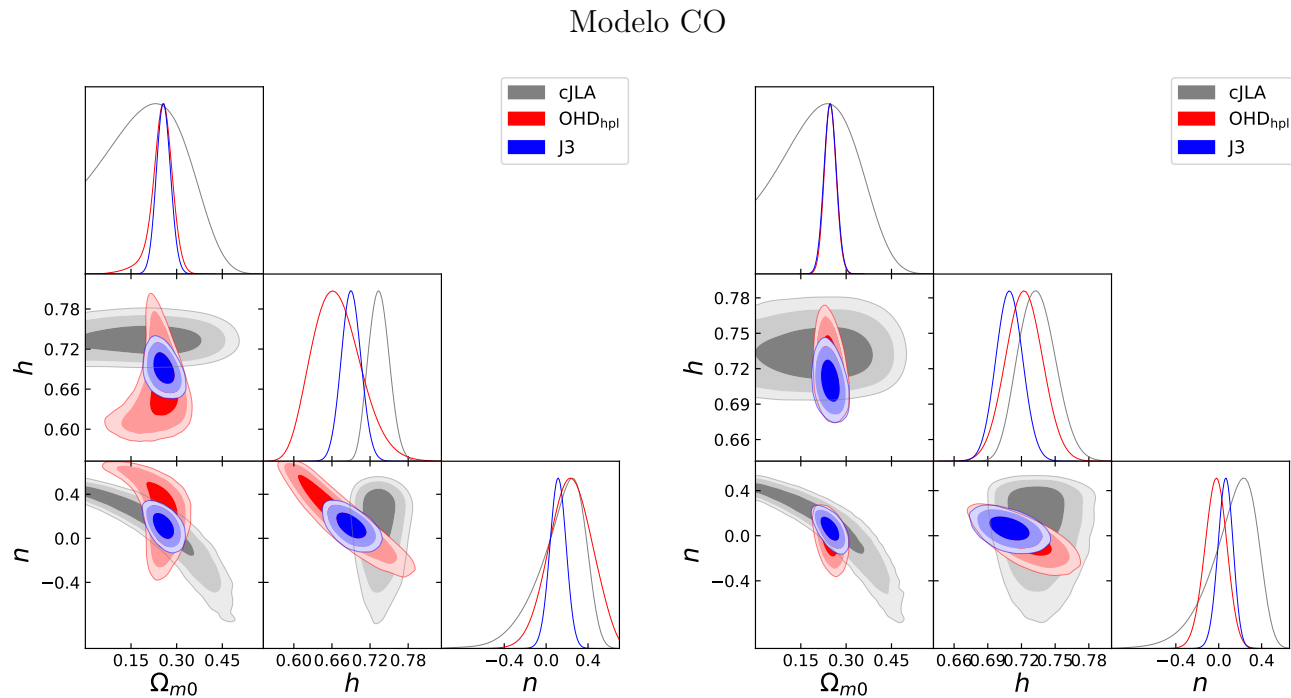


Figura 4.14: Distribuciones 1D y niveles de confianza 2D al 68 %, 95 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $h$  y  $n$  del modelo CO asumiendo un prior plano (izquierda) y gaussiano ( $h_{\text{Riess}}$  derecha) en  $h$ .

encontramos resultados consistentes dentro del nivel de confianza a  $1\sigma$ . Por lo tanto, el término adicional a la ecuación. (3.29) canónica de Friedmann actúa como una CC. Sin embargo, en los modelos CO, este término puede obtenerse mediante una dimensión adicional en lugar de la energía de vacío esperada.

Para confirmar que el modelo CO puede conducir a una aceleración cósmica tardía, reconstruimos el parámetro de desaceleración utilizando los valores medios derivados de los diferentes conjuntos de datos. La figura 4.16 muestra que la dinámica de  $q(z)$  es similar para los modelos  $\Lambda$ CDM y CO cuando se utilizan constricciones con  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$ , cJLA y J3, es decir, el universo tiene una fase tardía de expansión acelerada. Observe que aunque los niveles de confianza en la reconstrucción  $q(z)$  obtenida de las constricciones de SNIa son mayores que los obtenidos por  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$ , son consistentes entre ellos. La diferencia podría explicarse por el parámetro libre adicional ( $M$ ) en el análisis de SNIa.

La figura 4.17 muestra las distribuciones posteriores marginalizadas 1D y los contornos 2D

Tabla 4.3: Valores medios para los parámetros del modelo CO ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ) derivados de los DOH y los datos de SN IA para las muestras cJLA y fJLA.

modelo CO						
Parámetro	DOH	DOH <sub>ED</sub>	DOH <sub>hpl</sub>	DOH <sub>hw9</sub>	cJLA	fJLA
Prior plano en $h$						
$\chi^2_{min}$	25.37	15.22	21.25	22.52	32.95	682.28
$\chi^2_{red}$	0.52	0.54	0.44	0.46	1.22	0.93
$\Omega_{m0}$	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.30^{+0.06}_{-0.06}$	$0.25^{+0.02}_{-0.03}$	$0.25^{+0.03}_{-0.03}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$
$h$	$0.65^{+0.03}_{-0.03}$	$0.69^{+0.06}_{-0.05}$	$0.66^{+0.04}_{-0.03}$	$0.66^{+0.04}_{-0.03}$	$0.72^{+0.19}_{-0.19}$	$0.72^{+0.18}_{-0.18}$
$n$	$0.26^{+0.16}_{-0.15}$	$-0.19^{+0.51}_{-0.50}$	$0.23^{+0.20}_{-0.20}$	$0.16^{+0.22}_{-0.22}$	$0.16^{+0.17}_{-0.26}$	$0.16^{+0.18}_{-0.26}$
$M(M_B^1)$	–	–	–	–	$0.07^{+0.5}_{-0.66}$	$-18.96^{+0.49}_{-0.64}$
$\Delta_M$	–	–	–	–	–	$-0.06^{+0.02}_{-0.01}$
$\alpha$	–	–	–	–	–	$0.14^{+0.006}_{-0.006}$
$\beta$	–	–	–	–	–	$3.10^{+0.08}_{-0.07}$
Prior gaussiano en $h = 0.732 \pm 0.017$						
$\chi^2_{min}$	28.86	14.47	22.83	23.91	32.95	682.28
$\chi^2_{red}$	0.60	0.51	0.47	0.49	1.22	0.93
$\Omega_{m0}$	$0.24^{+0.01}_{-0.01}$	$0.31^{+0.03}_{-0.04}$	$0.24^{+0.01}_{-0.01}$	$0.24^{+0.01}_{-0.01}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$
$h$	$0.71^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.73^{+0.01}_{-0.01}$	$0.73^{+0.01}_{-0.01}$
$n$	$-0.01^{+0.08}_{-0.08}$	$-0.43^{+0.28}_{-0.30}$	$-0.02^{+0.09}_{-0.10}$	$-0.11^{+0.10}_{-0.11}$	$0.16^{+0.17}_{-0.26}$	$0.16^{+0.18}_{-0.26}$
$M(M_B^1)$	–	–	–	–	$0.10^{+0.05}_{-0.05}$	$-18.94^{+0.05}_{-0.05}$
$\Delta_M$	–	–	–	–	–	$-0.06^{+0.02}_{-0.01}$
$\alpha$	–	–	–	–	–	$0.14^{+0.006}_{-0.006}$
$\beta$	–	–	–	–	–	$3.10^{+0.08}_{-0.07}$
Prior gaussiano en $h = 0.678 \pm 0.009$						
$\chi^2_{min}$	25.24	14.53	20.79	22.04	32.95	–
$\chi^2_{red}$	0.52	0.51	0.43	0.45	1.22	–
$\Omega_{m0}$	$0.26^{+0.01}_{-0.01}$	$0.33^{+0.05}_{-0.07}$	$0.26^{+0.02}_{-0.02}$	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$	–
$h$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.67^{+0.009}_{-0.009}$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.67^{+0.009}_{-0.009}$	–
$n$	$0.15^{+0.06}_{-0.06}$	$-0.05^{+0.27}_{-0.32}$	$0.17^{+0.08}_{-0.08}$	$0.09^{+0.08}_{-0.09}$	$0.16^{+0.17}_{-0.26}$	–
$M$	–	–	–	–	$-0.06^{+0.03}_{-0.03}$	–

Tabla 4.4: Valores medios para los parámetros del modelo CPM ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $l$ ) derivados de los DOH y SN Ia usando las muestras cJLA y fJLA sample.

modelo CPM						
Parámetro	DOH	DOH <sub>ED</sub>	DOH <sub>hpl</sub>	DOH <sub>hw9</sub>	cJLA	fJLA
Prior plano en $h$						
$\chi_{min}^2$	25.31	17.95	21.17	22.98	33.76	682.92
$\chi_{red}^2$	0.53	0.66	0.45	0.48	1.29	0.93
$\Omega_{m0}$	$0.25^{+0.04}_{-0.04}$	$0.32^{+0.06}_{-0.07}$	$0.25^{+0.04}_{-0.05}$	$0.25^{+0.04}_{-0.04}$	$0.22^{+0.12}_{-0.13}$	$0.22^{+0.12}_{-0.13}$
$h$	$0.64^{+0.03}_{-0.02}$	$0.68^{+0.07}_{-0.05}$	$0.65^{+0.03}_{-0.03}$	$0.65^{+0.04}_{-0.03}$	$0.72^{+0.18}_{-0.19}$	$0.72^{+0.18}_{-0.18}$
$n$	$0.17^{+0.34}_{-0.68}$	$0.10^{+0.38}_{-0.60}$	$0.25^{+0.29}_{-0.68}$	$0.15^{+0.34}_{-0.65}$	$0.36^{+0.07}_{-0.33}$	$0.33^{+0.09}_{-0.50}$
$l$	$0.77^{+1.45}_{-0.43}$	$2.13^{+2.34}_{-1.33}$	$0.95^{+1.90}_{-0.58}$	$0.92^{+1.66}_{-0.52}$	$2.61^{+2.27}_{-1.83}$	$2.09^{+2.51}_{-1.49}$
$M(M_B^1)$	–	–	–	–	$0.08^{+0.50}_{-0.67}$	$-18.97^{+0.49}_{-0.65}$
$\Delta_M$	–	–	–	–	–	$-0.06^{+0.02}_{-0.01}$
$\alpha$	–	–	–	–	–	$0.14^{+0.006}_{-0.006}$
$\beta$	–	–	–	–	–	$3.10^{+0.08}_{-0.07}$
Prior gaussiano en $h = 0.732 \pm 0.017$						
$\chi_{min}^2$	27.75	14.92	22.40	23.42	33.75	683.17
$\chi_{red}^2$	0.59	0.55	0.47	0.49	1.29	0.93
$\Omega_{m0}$	$0.24^{+0.01}_{-0.01}$	$0.32^{+0.03}_{-0.04}$	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.23^{+0.02}_{-0.02}$	$0.22^{+0.12}_{-0.14}$	$0.22^{+0.12}_{-0.13}$
$h$	$0.71^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.72^{+0.01}_{-0.01}$	$0.73^{+0.01}_{-0.01}$	$0.73^{+0.01}_{-0.01}$
$n$	$-0.34^{+0.40}_{-0.42}$	$-0.03^{+0.24}_{-0.49}$	$-0.19^{+0.39}_{-0.50}$	$-0.28^{+0.39}_{-0.46}$	$0.36^{+0.07}_{-0.33}$	$0.34^{+0.08}_{-0.47}$
$l$	$0.62^{+0.49}_{-0.20}$	$2.12^{+2.29}_{-1.20}$	$0.75^{+0.80}_{-0.30}$	$0.77^{+0.73}_{-0.28}$	$2.60^{+2.27}_{-1.81}$	$2.26^{+2.44}_{-1.63}$
$M(M_B^1)$	–	–	–	–	$0.10^{+0.05}_{-0.05}$	$-18.94^{+0.05}_{-0.05}$
$\Delta_M$	–	–	–	–	–	$-0.06^{+0.02}_{-0.01}$
$\alpha$	–	–	–	–	–	$0.14^{+0.006}_{-0.006}$
$\beta$	–	–	–	–	–	$3.10^{+0.08}_{-0.07}$
Prior gaussiano en $h = 0.678 \pm 0.009$						
$\chi_{min}^2$	25.03	14.70	20.84	21.96	33.79	–
$\chi_{red}^2$	0.53	0.54	0.44	0.46	1.29	–
$\Omega_{m0}$	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.35^{+0.05}_{-0.08}$	$0.26^{+0.03}_{-0.03}$	$0.25^{+0.02}_{-0.03}$	$0.22^{+0.12}_{-0.13}$	–
$h$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.67^{+0.009}_{-0.009}$	$0.67^{+0.009}_{-0.009}$	$0.67^{+0.009}_{-0.008}$	$0.67^{+0.009}_{-0.009}$	–
$n$	$-0.01^{+0.35}_{-0.57}$	$0.24^{+0.19}_{-0.53}$	$0.16^{+0.26}_{-0.60}$	$0.03^{+0.31}_{-0.58}$	$0.36^{+0.07}_{-0.36}$	–
$l$	$0.71^{+0.95}_{-0.34}$	$2.08^{+2.44}_{-1.37}$	$0.96^{+1.55}_{-0.55}$	$0.87^{+1.22}_{-0.45}$	$2.59^{+2.27}_{-1.8}$	–
$M$	–	–	–	–	$-0.06^{+0.03}_{-0.03}$	–

Tabla 4.5: Valores medios para los parámetros ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ) derivados de un análisis en conjunto DOH+cJLA.

Modelo CO						
Conjunto de datos	$\chi^2_{min}$	$\chi^2_{red}$	$\Omega_{m0}$	$h$	$n$	M
Prior plano en $h$						
J1	58.91	0.71	$0.25^{+0.01}_{-0.01}$	$0.68^{+0.01}_{-0.01}$	$0.12^{+0.06}_{-0.06}$	$-0.04^{+0.03}_{-0.03}$
J2	48.28	0.58	$0.30^{+0.05}_{-0.05}$	$0.68^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.001^{+0.15}_{-0.17}$	$-0.03^{+0.06}_{-0.06}$
J3	54.28	0.66	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.69^{+0.01}_{-0.01}$	$0.11^{+0.07}_{-0.07}$	$-0.02^{+0.04}_{-0.04}$
J4	55.17	0.67	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.67^{+0.01}_{-0.01}$	$0.10^{+0.07}_{-0.08}$	$-0.07^{+0.04}_{-0.04}$
Prior gaussiano en $h = 0.732 \pm 0.017$						
J1	63.34	0.76	$0.25^{+0.01}_{-0.01}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$0.05^{+0.05}_{-0.05}$	$0.001^{+0.02}_{-0.03}$
J2	50.73	0.61	$0.27^{+0.04}_{-0.05}$	$0.71^{+0.01}_{-0.01}$	$0.001^{+0.14}_{-0.15}$	$0.03^{+0.04}_{-0.04}$
J3	57.37	0.69	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$0.06^{+0.06}_{-0.07}$	$0.01^{+0.03}_{-0.03}$
J4	60.96	0.73	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$0.04^{+0.07}_{-0.07}$	$-0.01^{+0.03}_{-0.03}$
Prior gaussiano en $h = 0.678 \pm 0.009$						
J1	59.04	0.71	$0.26^{+0.01}_{-0.01}$	$0.67^{+0.007}_{-0.007}$	$0.13^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.05^{+0.02}_{-0.02}$
J2	48.53	0.58	$0.31^{+0.04}_{-0.05}$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.001^{+0.15}_{-0.17}$	$0.05^{+0.03}_{-0.03}$
J3	54.80	0.66	$0.26^{+0.02}_{-0.02}$	$0.68^{+0.007}_{-0.007}$	$0.13^{+0.06}_{-0.07}$	$-0.04^{+0.02}_{-0.02}$
J4	55.18	0.65	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.67^{+0.007}_{-0.007}$	$0.10^{+0.07}_{-0.07}$	$-0.06^{+0.02}_{-0.02}$

Tabla 4.6: Valores medios para los parámetros del modelo CPM ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $l$ ) derivados de un análisis en conjunto de DOH+cJLA.

Modelo CPM							
Conjunto de datos	$\chi^2_{min}$	$\chi^2_{red}$	$\Omega_{m0}$	$h$	$n$	$l$	M
Prior plano en $h$							
J1	58.61	0.71	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.68^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.03^{+0.34}_{-0.56}$	$0.74^{+0.90}_{-0.35}$	$-0.04^{+0.03}_{-0.03}$
J2	48.25	0.58	$0.32^{+0.05}_{-0.07}$	$0.68^{+0.02}_{-0.02}$	$0.25^{+0.13}_{-0.51}$	$2.00^{+2.244}_{-1.33}$	$-0.03^{+0.06}_{-0.06}$
J3	54.23	0.66	$0.25^{+0.03}_{-0.03}$	$0.68^{+0.01}_{-0.01}$	$0.06^{+0.29}_{-0.58}$	$0.89^{+1.29}_{-0.47}$	$-0.02^{+0.04}_{-0.04}$
J4	55.14	0.67	$0.25^{+0.03}_{-0.03}$	$0.67^{+0.01}_{-0.01}$	$0.06^{+0.28}_{-0.58}$	$0.91^{+1.29}_{-0.49}$	$-0.07^{+0.04}_{-0.04}$
Prior gaussiano en $h = 0.732 \pm 0.017$							
J1	62.91	0.75	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.14^{+0.36}_{-0.51}$	$0.70^{+0.72}_{-0.29}$	$-0.0006^{+0.03}_{-0.03}$
J2	50.81	0.61	$0.30^{+0.04}_{-0.06}$	$0.71^{+0.01}_{-0.01}$	$0.22^{+0.14}_{-0.54}$	$1.77^{+2.44}_{-1.17}$	$0.03^{+0.04}_{-0.04}$
J3	57.32	0.69	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$0.002^{+0.29}_{-0.55}$	$0.88^{+1.12}_{-0.44}$	$0.01^{+0.03}_{-0.03}$
J4	60.91	0.73	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$0.70^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.007^{+0.29}_{-0.55}$	$0.89^{+1.15}_{-0.45}$	$-0.01^{+0.03}_{-0.03}$
Prior gaussiano en $h = 0.678 \pm 0.009$							
J1	58.85	0.70	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$0.67^{+0.007}_{-0.007}$	$-0.02^{+0.33}_{-0.57}$	$0.74^{+0.92}_{-0.35}$	$-0.05^{+0.02}_{-0.02}$
J2	48.45	0.58	$0.33^{+0.04}_{-0.06}$	$0.67^{+0.008}_{-0.008}$	$0.26^{+0.12}_{-0.51}$	$2.10^{+2.42}_{-1.42}$	$0.05^{+0.03}_{-0.03}$
J3	54.82	0.66	$0.26^{+0.03}_{-0.03}$	$0.68^{+0.007}_{-0.007}$	$0.09^{+0.28}_{-0.59}$	$0.91^{+1.35}_{-0.49}$	$-0.04^{+0.02}_{-0.02}$
J4	55.19	0.66	$0.25^{+0.02}_{-0.03}$	$0.67^{+0.007}_{-0.007}$	$0.06^{+0.27}_{-0.57}$	$0.91^{+1.25}_{-0.48}$	$-0.06^{+0.02}_{-0.032}$

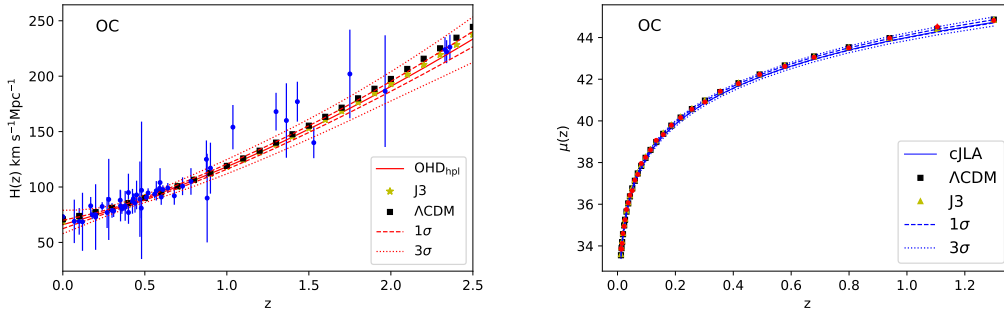


Figura 4.15: Ajuste a los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (panel izquierdo) y la muestra cJLA (panel derecho) usando los valores medios de  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (líneas rojas sólidas), cJLA (líneas sólidas azules) y J3 (estrella amarilla y triángulo) para los modelos  $\Lambda\text{CDM}$  (cuadrados negros) y CO con un prior plano en  $h$ . La línea discontinua y punteada representan el 68 % y 99.7 % niveles de confianza respectivamente.

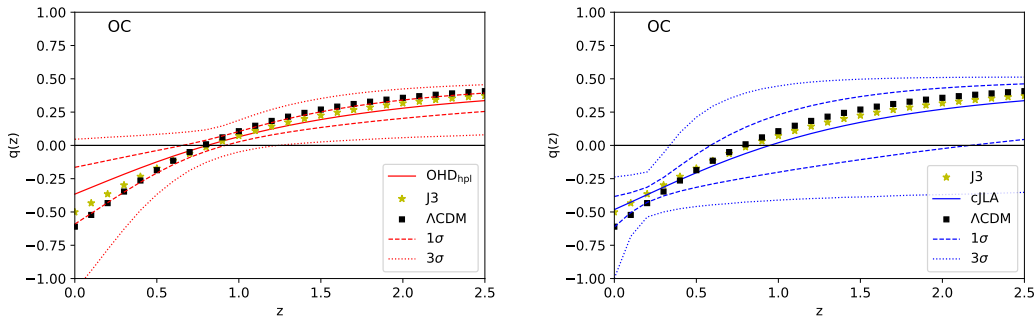


Figura 4.16: Reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para el modelo CO y  $\Lambda\text{CDM}$  usando las constricciones de los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (panel izquierdo) y la muestra cJLA (panel derecho) con un prior plano en  $h$ . La reconstrucción  $q(z)$  de las constricciones de J3 es mostrada en ambos paneles. La línea discontinua y punteada representan el 68 % y 99.7 % niveles de confianza respectivamente.

68 %, 95 %, 99 % para los parámetros del modelo CPM  $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$  y  $l$  obtenidos de DOH<sub>hpl</sub>, cJLA y J3 con priors planos (panel izquierdo) y gaussianos (panel derecho) en  $h$ . Considerando un prior plano en  $h$ , los diferentes conjuntos de datos proporcionan constricciones ligeramente diferentes en  $\Omega_{m0}$  y  $h$ . Por ejemplo, DOH<sub>ED</sub> estima valores más altos (bajos) en  $\Omega_{m0}$  ( $h$ ) y SN Ia valores más bajos (altos). Sin embargo, los límites son consistentes dentro de  $1\sigma$ . Para las restricciones  $n$  y  $l$ , también obtuvimos una tensión marginal usando diferentes datos, pero son consistentes dentro de  $1\sigma$ . Observe que nuestras constricciones incluyen  $n = 0$  y  $l = 1$ , que reproduce la dinámica del modelo  $\Lambda$ CDM. Todos nuestros límites son similares dentro de  $1\sigma$  a los que se han obtenido por otros autores, p.ej Li et al. [146] que combina datos de SN Ia, BAO y CMB  $n = 0.014_{-0.94}^{+0.36}$ ,  $l = 1.09_{-0.46}^{+1.01}$ , Magaña et al. [147] usando lentes gravitacionales fuertes estima  $n = 0.41 \pm 0.25$ ,  $l = 5.2 \pm 2.25$ , Zhai et al. [145] proporciona  $n = 0.16_{0.09}^{+0.08}$ ,  $l = 1.38_{-0.22}^{+0.25}$  del análisis conjunto de CMB, BAO más SN Ia (JLA), y Zhai et al. [148] obtienen  $n = 0.02_{-0.41}^{+0.26}$ ,  $l = 1.1_{-0.4}^{+0.8}$  del análisis conjunto de CMB, BAO, SN Ia,  $f\sigma_8$  y el valor  $H_0$  de Riess et al. [149]. Además, los valores  $\chi_{red}^2$  indican que DOH<sub>ED</sub> proporcionan constricciones para CPM mejores (imparciales) y los valores de los datos de SN Ia sugieren que sus errores (cJLA muestra) están subestimados. Teniendo en cuenta el prior gaussiano en  $h$  por Riess et al. [83], los DOH, DOH<sub>hpl</sub> y DOH<sub>hw9</sub> implica mejoras en las constricciones de CPM (ver los valores  $\chi_{red}$ ). Para la prueba de SN Ia (cJLA), no existe una diferencia significativa con el caso de prior plano. Observe que los límites estrictos se estiman a partir del análisis en conjunto (vea también la Fig. 4.17). La figura 4.18 muestra los ajustes a los DOH<sub>hpl</sub> y cJLA usando DOH<sub>hpl</sub>, cJLa y J3 de las constricciones para el modelo CPM y el modelo  $\Lambda$ CDM con un prior plano en  $h$ . Para propagar los errores en DOH,  $\mu(z)$  y  $q(z)$ , hemos utilizado un análisis Monte Carlo. Para ambas técnicas DOH y  $\mu(z)$ , no existe una diferencia estadística significativa entre el modelo CPM y el modelo estándar. Se obtiene un buen acuerdo a  $1\sigma$  empleando las constricciones J1, J2 y J4. Además, la Figura 4.19 muestra la reconstrucción del parámetro  $q(z)$  usando las estimaciones de los DOH y SN Ia. Para las constricciones de DOH, la dinámica de  $q(z)$  para el modelo CPM está de acuerdo con la del modelo estándar. Cuando se usan las estimaciones de SN Ia, el historial de la aceleración cósmica para el modelo CPM es consistente



## modelo CPM

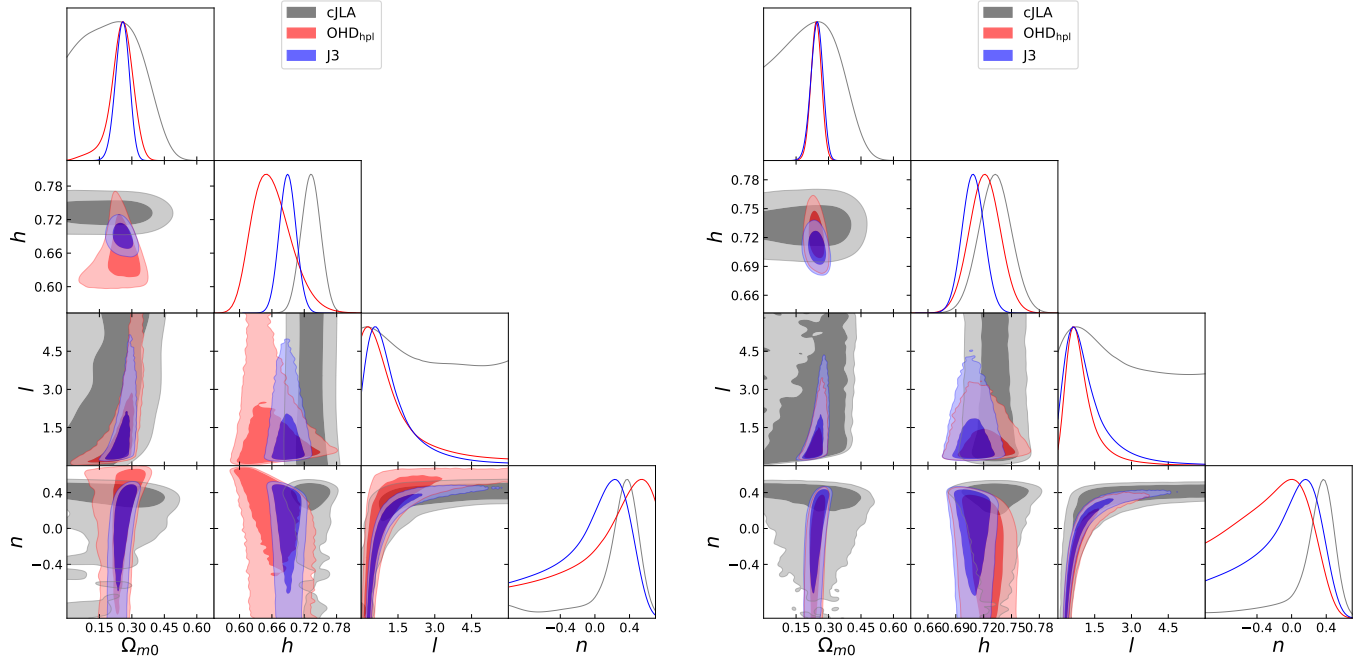


Figura 4.17: Distribuciones 1D y niveles de confianza 2D al 68 %, 95 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ , and  $l$  del modelo CPM asumiendo un prior plano (izquierda) y gaussiano ( $h_{\text{Riess}}$ ) en  $h$ .

con el model  $\Lambda$ CDM dentro de nivel de confianza a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ . Por lo tanto, el escenario para el modelo CPM es viable para explicar la aceleración cósmica tardía sin un componente de energía oscura y su dinámica cosmológica es casi indistinguible del modelo estándar.

## 4.5. Resultados del modelo CPL y JBP

Estos modelos fueron analizados con sistemas lentes gravitacionales fuertes. En la estimación de parámetros hemos considerado una probabilidad gaussiana  $\mathcal{L}(\Theta) \propto e^{-\chi_{\text{SL}}^2(\Theta)/2}$ , donde  $\chi_{\text{SL}}^2(\Theta)$  es dado por a ecuación (2.14). Los parámetros libres  $\Theta$  para cada modelo fueron estimados a través de un analysis bayesiano MCMC. Consideramos 1000 pasos de fase de quemado, 5000 pasos MCMC y 1000 caminadores inicializados cerca de la región de máxima probabilidad de acuerdo a otras observaciones astrofísicas.

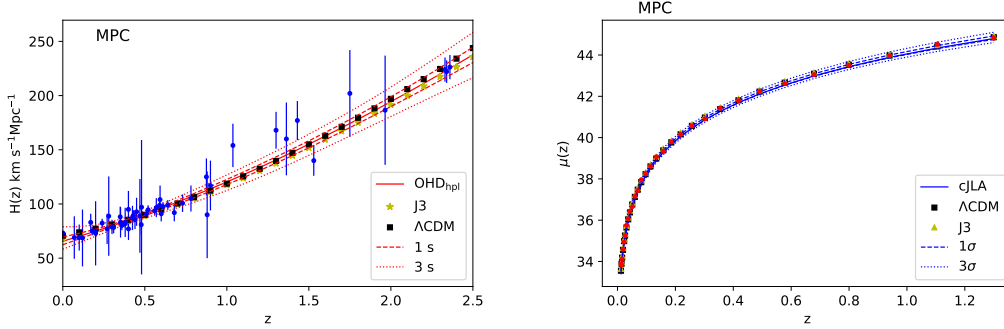


Figura 4.18: Ajuste a los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (panel izquierdo) y datos de SN Ia (panel derecho) usando los valores medios de los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (líneas rojas sólidas), cJLA (líneas azules sólidas) y J3 (estrella amarilla y triángulo) para el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  (cuadrados negros) y el modelo CPM cuando un prior plano en  $h$  es considerado. La línea discontinua y la línea punteada representan el 68% y 99.7% niveles de confianza respectivamente.

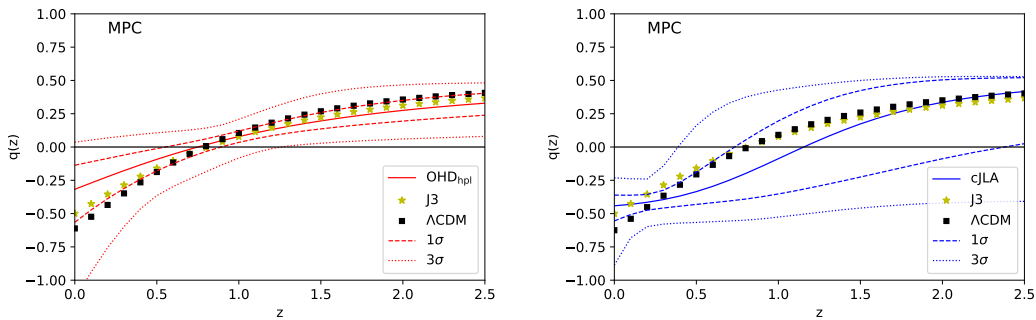


Figura 4.19: Reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para el modelo CPM y  $\Lambda\text{CDM}$  usando las constricciones de los  $\text{DOH}_{\text{hpl}}$  (panel izquierdo) y datos de SN Ia (panel derecho) con un prior plano en  $h$ . La reconstrucción  $q(z)$  de las constricciones de J3 es mostrada en ambos paneles. La línea discontinua y punteada representan el 68% y 99.7% niveles de confianza respectivamente.

En todos los escenarios, hemos considerado las siguientes pruebas en el analysis Bayesiano. La primer prueba (T1) fue realizada empleando la muestra completa usando la aproximación SIS dada por ecuación 2.13; la segunda prueba (T2) fue hecha usando la submuestra uno SS1 (por sus siglas en inglés); y la tercer prueba (T3) fue llevada acabo usando también la submuestra SS1 agregando un nuevo parámetro ( $f$ ) que toma en consideración sistemáticos desconocidos como ha sido mencionado previamente por ecuación (2.16). También realizamos pruebas con los datos de SLS bineados en  $D^{obs}$ : la submuestra SS2, SS3 y SS4 con las pruebas T4 a T6 respectivamente. Además, estimamos los parámetros de los modelos con los datos de SLS bineados en  $\sigma$  usando: las submuestras SS5 (T7); SS6 (T8); SS7 (T9); y SS8 (T10). Finalmente constreñimos los parámetros cosmológicos con los datos de SLS bineados en el redshift de la lente ( $z_l$ ) para: las submuestras SS9 (T11), SS10 (T12), y SS11 (T13). Estas pruebas fueron llevadas acabao asumiendo un prior gaussiano para  $\Omega_{0m} = 0.3111 \pm 0.0056$ , de acuerdo con las observaciones más recientes de Planck [1]. También asumimos los siguientes priors:  $-4 < \omega_0 < 1$ ,  $-5 < \omega_1 < 5$  y  $(0.8)^2 < f < (1.2)^2$ . La tabla 4.7 proporciona los mejores valores ajustados para los parámetros libres de cada modelo usando los diferentes casos mencionados anteriormente. También presentamos los valores para  $\chi_{min}^2$  y  $\chi_{red}^2$  y el número de puntos observacionales usado en cada escenario. La tabla 4.8 da los valores AIC, BIC, y FOM para cada modelo cosmológico usando las diferentes muestras de SLS (FS, SS1-SS11).

#### 4.5.1. Constricciones para CPL

Note que a pesar de que la parametrización CPL para la ecuación de estado de la energía oscura (Eq. 3.40) agrega un nuevo parámetro extra en comparación del modelo  $\omega$ CDM, el cuál también ha sido contrastado con las mismas observaciones, los rangos de los valores para  $\chi_{min}^2$  y  $\chi_{red}^2$  son muy similares. Las constricciones para  $\omega_0$  estimadas para las pruebas T1-T3 son muy similares ( $\sim -2.4, -2.7$ ), sin embargo los valores para  $\omega_1$  no concuerdan entre las diferentes pruebas (ver figuras 4.20 y 4.21). Cuando las submuestras son consideradas (T4 to T13, figuras 4.22, 4.23 y

4.24),  $\omega_0$  es positivo solo para la región  $z_l > 0.4$  (ver figura 4.24), y adopta un valor negativo para las otras submuestras. El parámetro  $\omega_1$  es muy sensible a cada caso teniendo diferentes valores medios en cada prueba.

Cuando un nuevo parámetro  $f$ , (T3) es tomado en cuenta, no se muestran mejoras sustanciales en el valor de  $\chi_{red}^2$ . EL resultado para el parámetro correctivo  $f$  es consistente con los obtenidos por Cao et al. [56, 101]. Una vez más, las constricciones de  $\omega_0$  y  $\omega_1$  parecen empeorar en la región  $D^{obs} < 0.5$  (T4), mostrando problemas de convergencia reflejados en dobles contornos en la correlación de los parámetros cosmológicos (ver figura 4.22). Note que se obtienen valores más grandes para la  $\chi_{red}^2$  que los valores que se obtienen con la muestra completa (tabla 4.7) solo para las regiones:  $D^{obs} > 1$  (T6),  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$  (T7) y  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$  (T10). Por otro lado, el valor más pequeño para  $\chi_{red}^2$  está dado para la región  $0.5 < D^{obs} < 1$ , sugiriendo un mejor ajuste para el modelo.

Cuando la muestra completa es usada, las constricciones para  $\omega_0$  y  $\omega_1$  no son consistentes con las observaciones de Scolnic et al. [45] y Aghanim et al. [98] ( $\omega_0 = -1.009 \pm 0.159$   $\omega_1 = -0.129 \pm 0.755$  y  $\omega_0 = -0.961 \pm 0.077$   $\omega_1 = -0.28 \pm 0.29$ , respectivamente) pero muestran consistencia a  $1\sigma$  con esos obtenidos por Cao et al. [56] ( $\omega_0 = -0.024 \pm 2.42$   $\omega_1 = -6.35 \pm 9.75$ ) usando 46 SLS. A pesar de lo anterior, algunas submuestras son consistentes con los trabajos de Scolnic et al. [45] y Aghanim et al. [98], mostrando diferentes comportamientos para la energía oscura (fantasma y quintaesencia). El parámetro  $\omega_0$  adopta un valor positivo en la región  $z_l > 0.4$ , un valor similar es reportado en el trabajo de Cao et al. [56] usando una muestra con 80 SLS. Para todas las pruebas, el estimador FOM muestra constricciones más ajustadas en la región  $0.2 \leq z_l \leq 0.4$  (T12), y unas malas constricciones en la región  $243 \text{ km s}^{-1} < \sigma \leq 276 \text{ km s}^{-1}$  (T9).

Reconstruimos la función  $q(z)$  usando las constricciones obtenidas para cada prueba (ver figura 4.25). Note que T4, T10 y T13 nos llevan a constricciones que resultan en comportamientos no físicos para  $q(z)$ . Por el contrario, los proporcionados por las pruebas T5, T7 y T13 nos llevan a un época de aceleración-desaceleración la cual es característica de modelos donde la ecuación de estado de la energía oscura es parametrizada, es decir una realentización de la aceleración cósmica

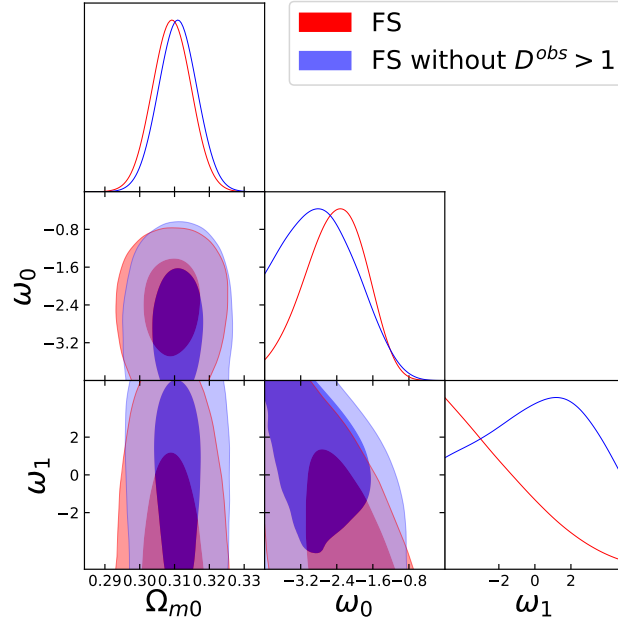


Figura 4.20: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo CPL para la muestra completa y la muestra final (FS) excluyendo sistemas lentes gravitacionales fuertes (SLS) con un valor  $D^{obs} > 1$ .

[150, 151, 152, 153, 154]. A pesar de que las constricciones en T13 producen una fase de aceleración en el Universo, no ocurre a  $z = 0$ .

#### 4.5.2. Constricciones para el modelo JBP

Los parámetros libres de la parametrización JBP son:  $\Omega_{0m}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  al igual que en el caso del modelo CPL, sin embargo la ecuación de estado de la energía oscura difiere en ambos casos. Es valioso resaltar que el rango de los valores para  $\chi_{min}^2$  y  $\chi_{red}^2$  son similares a esos obtenidos para los modelos  $\omega$ CDM y CPL. Para las primeras 3 pruebas (T1-T3), las constricciones para  $\omega_0$  difieren muy poco, encontrándose en el régimen fantasma (ver Tabla 4.7, figuras 4.26 y 4.27). Sin embargo, el parámetro  $\omega_1$  tiene cambios notables en su valor para cada caso (ver figuras 4.26 y 4.27). El parámetro correctivo  $f$  no introduce mejoras significativas en el valor de  $\chi_{red}^2$ , y es consistente con los valores reportados en Cao et al. [56], Treu et al. [101]. Cuando diferentes submuestras son usadas (es decir T4 a T13), las constricciones de los parámetros cosmológicos son muy sensibles a los datos

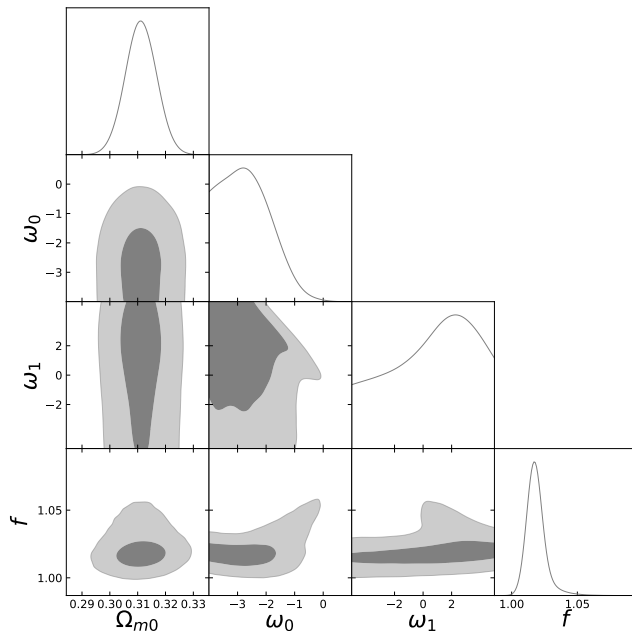


Figura 4.21: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo CPL usando el parámetro correctivo  $f$  para la muestra completa.

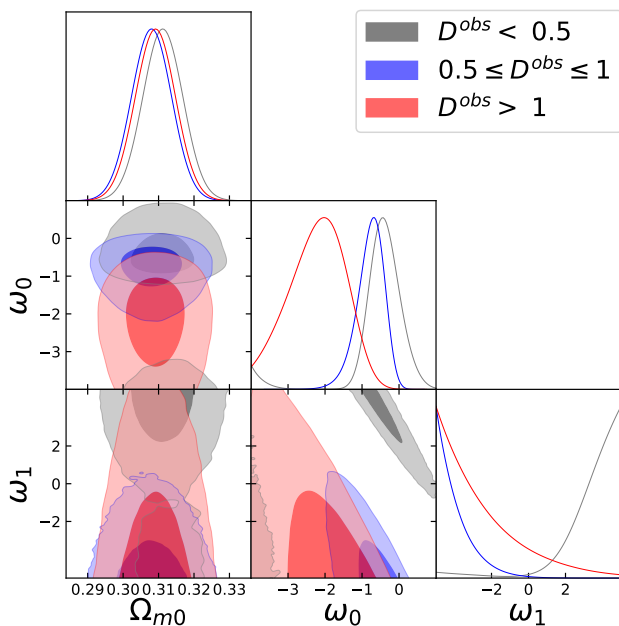


Figura 4.22: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo CPL para diferentes regions del valor de  $D^{obs}$ .

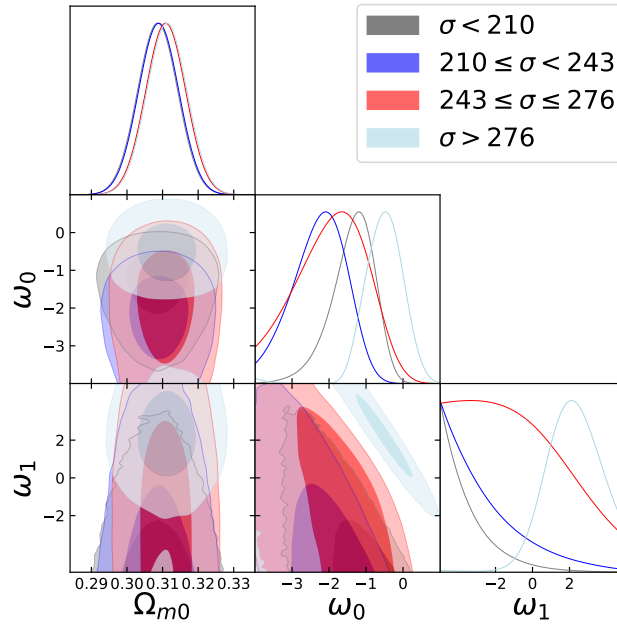


Figura 4.23: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo CPL para diferentes regiones del valor de la dispersión de velocidades.

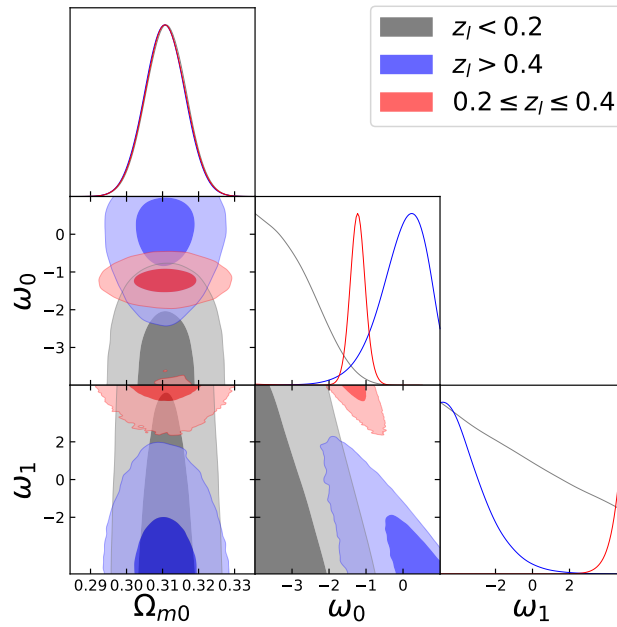


Figura 4.24: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo CPL para diferentes regiones del redshift de la lente.

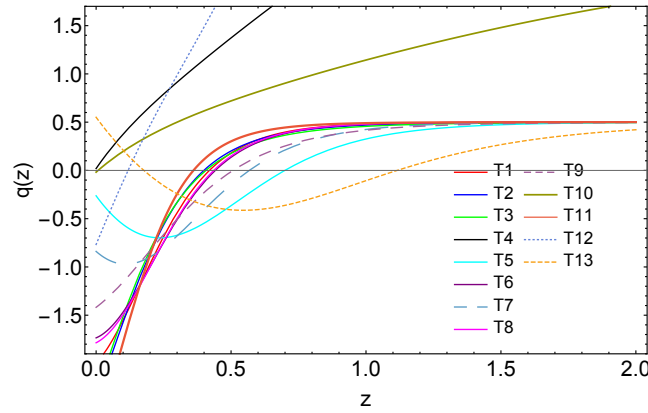


Figura 4.25: Reconstrucción del parámetro  $q(z)$ , usando las constricciones obtenidas para el modelo CPL.

seleccionados (ver figuras 4.28, 4.29 y 4.30). El parámetro  $\omega_0$  prefiere valores negativos llevando al Universo a una etapa de expansión acelerada en todos los escenarios excluyendo a la región  $D^{obs} < 0.5$  (T4). El parámetro  $\omega_1$  también adopta valores distintos en todos los casos. Como en los modelos  $w$ CDM y CPL, obtenemos valores grandes para la función  $\chi_{red}^2$  para las regiones:  $D^{obs} > 1$  (T6),  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$  (T7) y  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$  (T10). Similarmente, el mejor valor para  $\chi_{red}^2$  es también en la región  $0.5 < D^{obs} < 1$  (T5). La región  $D^{obs} < 0.5$  presenta problemas de convergencia como en los modelos anteriores, mostrando dobles contornos de confianza en todos los parámetros libres y resulta en constricciones positivas para el parámetro  $\omega_0$ , incompatible con un Universo en aceleración. Para las primeras tres pruebas, las constricciones del modelo JBP son inconsistentes con los obtenidos por Wang et al. [153] ( $\omega_0 = -0.648 \pm 0.252$ ,  $\omega_1 = -3.419 \pm 2.290$ ) y Magana et al. [155], ( $\omega_0 = -0.80 \pm 0.45$ ,  $\omega_1 = -3.78 \pm 3.73$ ). Sin embargo, las constricciones obtenidas para  $\omega_0$  en la región  $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$  es consistente con esos estimados por Magana et al. [155] y Wang et al. [153], aunque  $\omega_1$  es solo consistente con el valor obtenido por Magana et al. [155]. El estimador FOM nos resulta en constricciones ajustadas en la región  $0.5 \leq D^{obs} < 1$  (T5) y débiles en las regiones  $D^{obs} < 0.5$  (T4) y  $0.2 \leq z_l \leq 0.4$  (T12). La figura 4.31 muestra la reconstrucción del parámetro de desaceleración para el modelo JBP usando las constricciones derivadas de cada caso. Es de resaltar el comportamiento de la función  $q(z)$  mostrando una desaceleración del Universo a tiempos tardíos para las pruebas T5 y T13. Este comportamiento es consistente con muchos autores



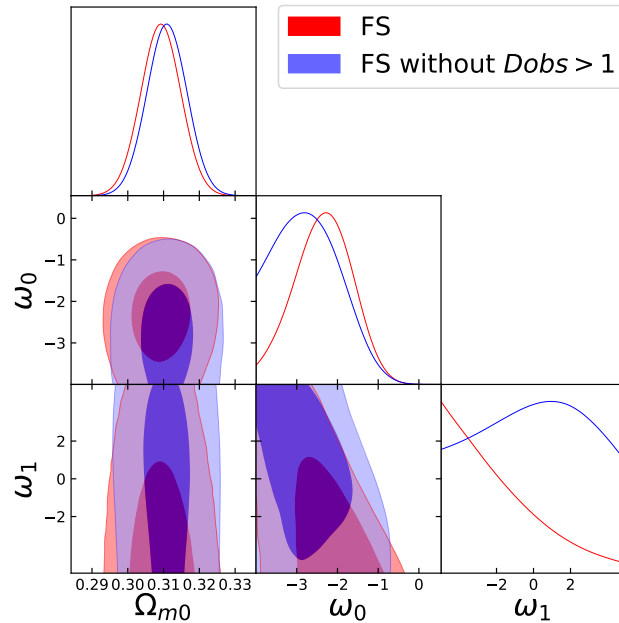


Figura 4.26: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo JBP para la muestra completa y la muestra final (FS) excluyendo sistemas lentes gravitacionales fuertes (SLS) con un valor  $D^{obs} > 1$ .

para estas parametrizaciones [ver por ejemplo 152, 153]. Note que también T4 y T10 presentan un comportamiento no estandar, es decir, nunca cruzan la región de aceleración. Los casos restantes están de acuerdo con el conocimiento estandar.

## 4.6. Comparación de las constricciones cosmológicas con lentes gravitacionales para los modelos $\omega$ CDM, CPL y JBP

Como podemos ver en la tablas 4.2 y 4.7, Los valores de  $\chi_{min}^2$  y  $\chi_{red}^2$  son muy similares entre los 3 modelos para todas las muestras, incluso cuando el modelo  $\omega$ CDM tiene un parámetro menos que los otros modelos. Es de mencionar, que el valor medio del parámetro  $f$  obtenido con diferentes modelos es consistente ( $f = 1.018_{-0.007}^{+0.007}$ ) entre ellos y está de acuerdo con los resultados reportados por [56, 101]. Por lo tanto, esto indica que los posibles errores sistemáticos que afecten la separación de la imagen están estimados a un máximo de 5% cuando  $f$  es considerado el

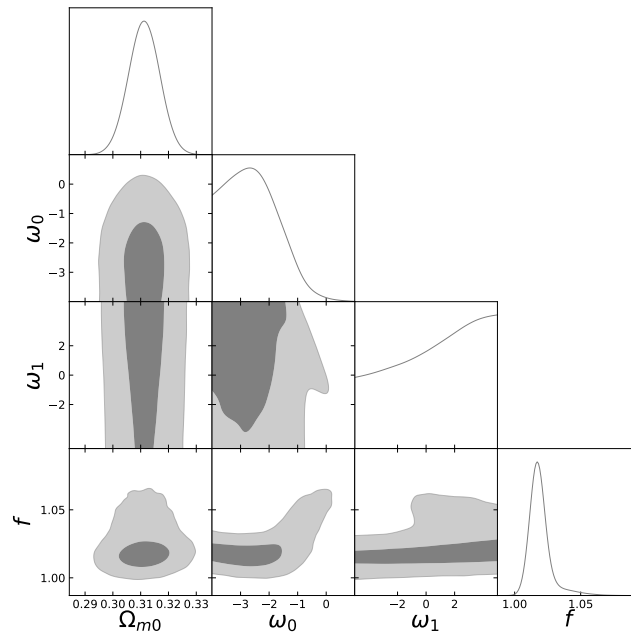


Figura 4.27: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo JBP usando el parámetro correctivo  $f$  para la muestra completa.

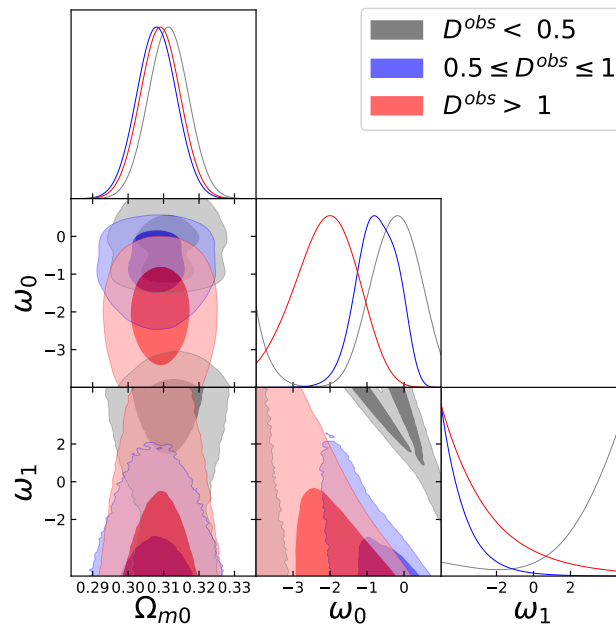


Figura 4.28: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo JBP para diferentes regiones del valor de  $D^{obs}$ .

4.6. COMPARACIÓN DE LAS CONSTRICCIONES COSMOLÓGICAS CON LENTES GRAVITACIONALES

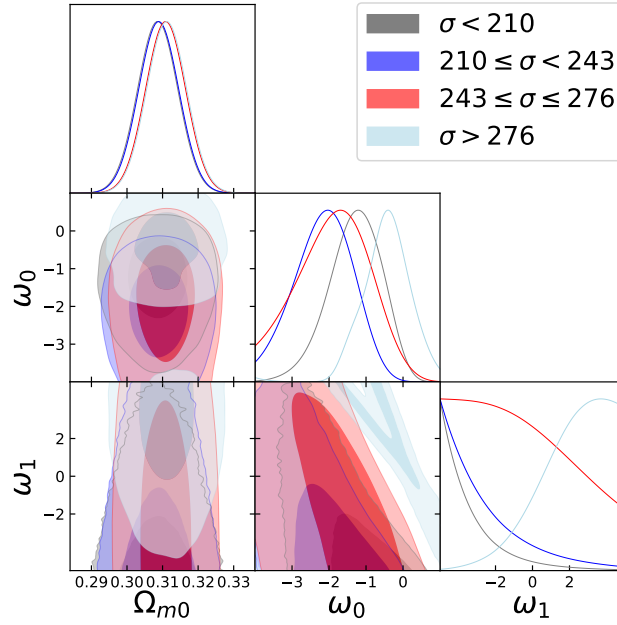


Figura 4.29: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo JBP para diferentes regiones del valor de la dispersión de velocidades  $\sigma$

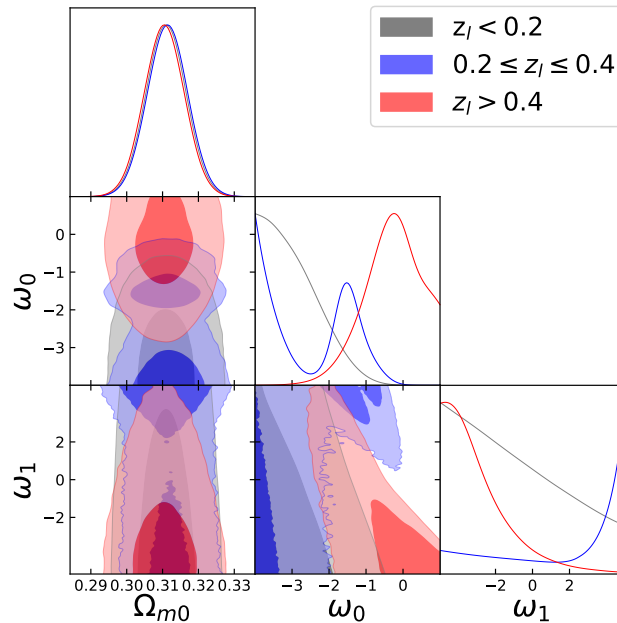


Figura 4.30: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68%, 99.7% para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  del modelo JBP para diferentes regiones del valor del redshift de la lente  $z_l$ .

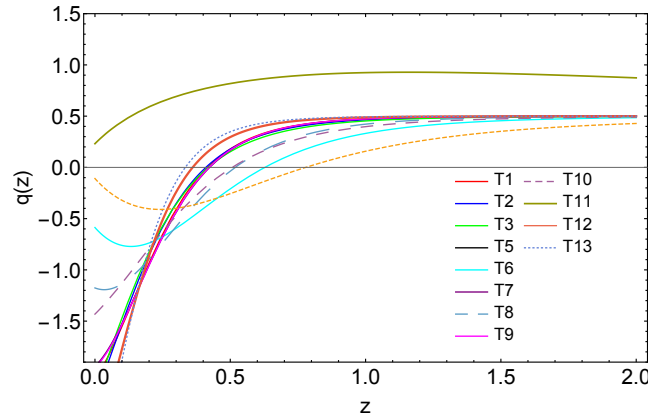


Figura 4.31: Reconstrucción del parámetro  $q(z)$ , usando las constricciones para el modelo JBP. Note que T4 está fuera del rango mostrado en la figura, en este caso T4 no predice un universo acelerado y por lo tanto no se encuentra dentro de nuestras regiones.

mismo valor para todos los sistemas. Sin embargo, ya que las mediciones de los SLS son hechos con diferentes instrumentos y bajo distintas circunstancias, se esperaría que cada sistema tenga sus propios errores sistemáticos. Considerando al parámetro correctivo  $f$  como independiente para cada sistema, obtenemos que algunas de las mediciones presentan desviaciones más allá de las propuestas por Treu et al. [101] y Cao et al. [56]. Esto puede verse en la figura 4.32, la cual muestra los valores obtenidos para el parámetro correctivo  $f$  cuando es considerado independiente para cada SLS, la muestra completa de sistemas muestra valores muy alejados en algunos sistemas, situación que logra corregirse en nuestra muestra restringida de 143 SLS para la región  $0.5 < D^{obs} < 1$ . Para analizar esta situación se realizaron simulaciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes, asumiendo diferentes perfiles de masa en la galaxia lente, encontrando que esas desviaciones del parámetro  $f$  pueden estar relacionadas con asumir una distribución de masa más compleja que una SIS (vea Amante et al. [156] para más detalles). Además Las tablas 4.2 y 4.7 muestran que hay cuatro regiones que presentan comportamientos no físicos para la EoS de la energía oscura (es decir, no satisface  $\omega_0 < -1/3$ ) o tienen valores superiores en la función  $\chi_{min}^2$  con respecto a la muestra completa, etiquetamos estas submuestras como poco confiables (marcadas con una letra U en las tablas) ya que tienen aspectos similares entre los modelos cosmológicos presentados en este trabajo siendo las siguientes regiones: SS2 ( $D_{obs} < 0.5$ ) que presentan problemas de convergencia

#### 4.6. COMPARACIÓN DE LAS CONSTRICCIONES COSMOLÓGICAS CON LENTES GRAVITACIONALES

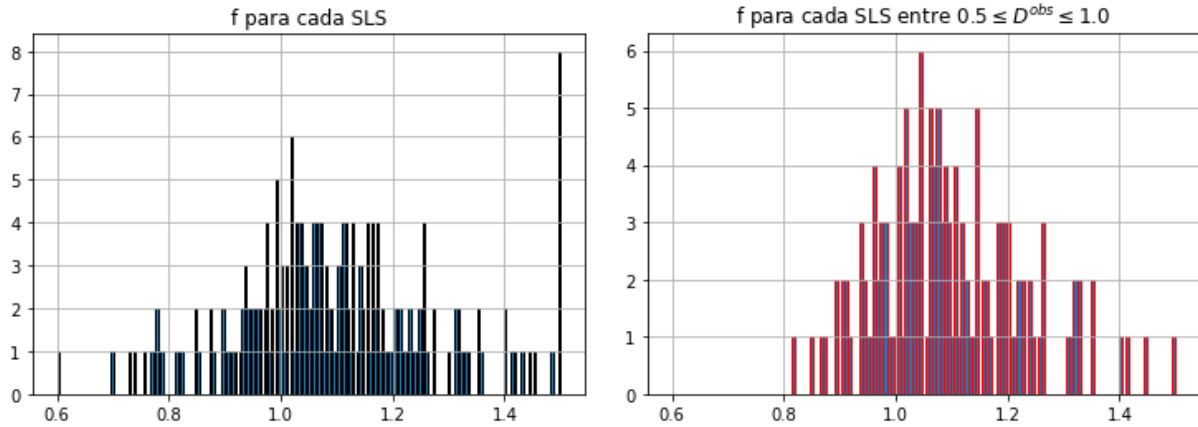


Figura 4.32: Histograma de la función de densidad de probabilidad de los valores del mejor ajuste para el parámetro correctivo  $f$  para la muestra completa (panel izquierdo) y la submuestra SS3  $0.5 < D^{obs} < 1$  (panel derecho) para el modelo  $\omega$ CDM, asumiendo  $f$  como un parámetro libre e independiente para cada SLS.

en la estimación de parámetros cosmológicos y un universo no acelerador en  $z = 0$  para los modelos  $\omega$ CDM y JBP, SS4 ( $D_{obs} > 1$ ) que muestra un valor no físico para la ecuación de la lente y un valor  $\chi^2_{min}$  más alto para todos los modelos, SS5 ( $\sigma < 210 \text{ kms}^{-1}$ ) y SS8 ( $\sigma > 276 \text{ kms}^{-1}$ ) los cuales muestran valores de la función  $\chi^2_{min}$  más altos que los obtenidos para la muestra completa y también muestran un universo no acelerado en SS8 para el modelo  $\omega$ CDM.

Aunque los parámetros cosmológicos tienen valores medios diferentes para las muestras restantes, la mayoría son consistentes a  $1 \sigma$  de nivel de confianza para todos los modelos. Sin embargo, para constreñir los parámetros cosmológicos, recomendamos el uso de la muestra restringida (SS3), que muestra las mejores constricciones y una menor dispersión en el valor del parámetro correctivo  $f$ , cuando se considera un parámetro independiente en cada SLS (ver figura 4.32). Las constricciones de la submuestra SS3 para los diferentes modelos también muestran consistencia con las mediciones de CMB y SNe Ia. Por lo tanto, favorecemos la muestra SS3 para realizar constricciones cosmológicas.

Los criterios para la selección de modelo están presentados en la tabla 4.8. Discutimos la

comparación entre los modelos cosmológicos para tres muestras: FS, FS + f y SS3. Agregamos a la discusión actual las muestras FS, FS + f, porque son las muestras completas (además, como apreciamos los valores para  $\chi_{red}^2$  son muy similares entre los tres modelos). Sin embargo, destacamos los resultados para la muestra SS3. Presentamos los criterios de selección del modelo, para las constricciones obtenidas de la muestra FS (con y sin el parámetro f), y la muestra SS3. Para discernir entre modelos (en cualquier muestra), es necesario comparar los diferentes criterios; El modelo preferido se obtiene a través de la evaluación entre los estimadores  $AIC$ ,  $BIC$  y  $FOM$ . Cuando realizamos la comparación de la muestra completa, el modelo  $\omega$ CDM produce los valores más bajos de  $AIC$  y  $BIC$ . Midiendo las diferencias relativas  $\Delta AIC = AIC_i - AIC_{min}$ , y  $\Delta BIC = BIC_i - BIC_{min}$  (donde el subíndice  $i$  se refiere a diferentes modelos y  $AIC_{min}$  ( $BIC_{min}$ ) es el valor más bajo de  $AIC$  ( $BIC$ )) hay un soporte sustancial para los tres modelos ( $\Delta AIC < 2$  o  $\sim 2$ ). Sin embargo, existe evidencia positiva contra los modelos CPL y JBP ( $4.5 < \Delta BIC < 5.1$  respectivamente). Analizando los criterios  $FOM$ , los valores más altos se obtienen de el modelo  $\omega$ CDM. Por lo tanto, todos los estimadores sugieren que  $\omega$ CDM es el modelo favorito de las constricciones para la muestra completa. Del mismo modo, los valores  $AIC$ ,  $BIC$  y  $FOM$  de las constricciones para FS + f sugieren lo mismo, que el modelo  $\omega$ CDM es el preferido. Como se mencionó anteriormente, sugerimos el uso de muestra SS3 para estimar parámetros cosmológicos. En particular, para las constricciones obtenidas para la muestra SS3, los valores más bajos de  $AIC$  y  $BIC$  se obtienen del modelo CPL. De hecho, la diferencia relativa  $\Delta AIC$  con respecto a este modelo ( $\sim 3.1$  y  $6.2$  para el modelo JBP y  $\omega$ CDM respectivamente) señala un apoyo considerablemente menor para estos modelos. Además, el  $\Delta BIC \sim 3.1$  y  $\sim 3.2$  para los modelos JBP y  $\omega$ CDM respectivamente, sugieren una evidencia positiva contra ambos modelos. Al analizar los criterios FOM, se obtiene el valor más alto para el modelo CPL, es decir, produce las constricciones más fuertes. Por lo tanto, todos los criterios sugieren que CPL es el modelo favorito de la muestra SS3. Sin embargo, es importante mencionar que no existe evidencia suficiente para descartar el modelo  $\omega$ CDM. Por lo tanto, cuando los datos SLS se utilizan como prueba cosmológica en el rango de  $0.5 \leq Dobs \leq 1$ , se favorece una energía oscura dinámica con una parametrización CPL para

explicar la aceleración cósmica tardía.

## 4.7. Resultados del modelo de brana con tensión variable VBT

En esta sección estudiaremos los resultados más importantes del modelo de VBT. La tabla 4.9 nos proporciona los valores medios de los parámetros libres y la función chi-cuadrada usando cada conjunto de datos. Se contrastó el modelo de branas con las siguientes observaciones: SN Ia, BAO,  $H(z)$ , SLS y CMB. Para los detalles acerca de las observaciones de BAO y CMB consulte Garcia-Aspeitia et al. [135]. Obtenemos valores medios para  $\Omega_{m0}$  consistentes, dentro de  $1\sigma$ , el cual también está de acuerdo por los estimados para el escenario estandar ( $\Lambda$ CDM). Obtenemos valores consistentes para el exponente  $n$  entre el rango  $\sim [5.5 - 7.9]$  a  $1\sigma$  de nivel de confianza. La figura 4.33 muestra la distribución posterior  $1D$  y los niveles de confianza  $2D$  a 68 %, 95 %, 99.7 % para los parámetros del modelo de branas a excepción de SLS. La figura 4.34 muestra la distribución posterior y los niveles de confianza para los parámetros  $\Omega_{m0}$  y  $n$ , y los niveles de confianza  $2D$  a 68 %, 95 % para los parámetros  $\lambda_0/\rho_c-n$ . Se han analizado independientemente de las otras observaciones, debido a que el método de sistemas lentes gravitacionales fuertes no depende del parámetro  $h$ , y han sido estimados usando solo la muestra recomendada de 143 sistemas, encontrando consistencia con las demás observaciones astrofísicas. La figura 4.36 muestra los contornos de confianza a 68 % y 99.7 %  $\lambda_0/\rho_c-n$ . Note que se sobreponen a  $\lambda_0/\rho_c \sim 0.06$ , confirmando que las constricciones de  $\lambda_0$  son consistentes entre ellas, resolviendo la tensión de los observables encontrada en [30]. Además, el análisis en conjunto corresponde a una tensión de la brana de  $\sim 10^{40} \text{eV}^4$  en la época de Nucleosíntesis, en concordancia con otras observaciones [157, 158].

La figura 4.35 ilustra un buen ajuste a  $H(z)$  y el reconstruido  $q(z)$  para el modelo usando los valores medios. Para el análisis en conjunto, obtenemos un Universo que empieza una fase acelerada a  $z = 0.641 \pm 0.018$ . El comportamiento de  $q(z)$  para el modelo de branas es consistente con  $\Lambda$ CDM

Tabla 4.7: Valores medios de los parámetros de los modelos CPL y JBP ( $\Omega_{m0}$ ,  $w_0$ ,  $w_1$ ) y el parámetro correctivo  $f$  derivados de las diferentes pruebas empleando datos de SLS. La etiqueta  $U$  hace referencia a las submuestras que presentan constricciones débiles y sus resultados no son confiables.

Conjunto de datos	$\chi_{min}^2$	$\chi_{red}^2$	$\Omega_{m0}$	$w_0$	$w_1$	$f$
Modelo CPL						
T1 (205)	596.893	2.955	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.413^{+0.644}_{-0.712}$	$-2.349^{+3.025}_{-1.907}$	—
T2 ( $D^{obs} \leq 1$ : 173)	409.780	2.410	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.768^{+0.833}_{-0.764}$	$0.163^{+2.914}_{-3.270}$	—
T3 (205)	588.971	2.930	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.728^{+0.933}_{-0.835}$	$0.922^{+2.589}_{-3.631}$	$1.018^{+0.007}_{-0.006}$
T4 ( $D^{obs} < 0.5$ : 30) <sup>U</sup>	59.088	2.188	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-0.465^{+0.420}_{-0.313}$	$3.756^{+0.881}_{-1.462}$	—
T5 ( $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$ : 143)	255.552	1.825	$0.308^{+0.006}_{-0.006}$	$-0.735^{+0.319}_{-0.395}$	$-4.202^{+1.208}_{-0.592}$	—
T6 ( $D^{obs} > 1$ : 32) <sup>U</sup>	184.319	6.356	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.156^{+0.710}_{-0.838}$	$-3.173^{+2.752}_{-1.361}$	—
T7 ( $\sigma < 210$ : 64) <sup>U</sup>	196.854	3.227	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.292^{+0.500}_{-0.641}$	$-3.912^{+1.767}_{-0.813}$	—
T8 ( $210 \leq \sigma < 243$ : 53)	116.000	2.320	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.205^{+0.668}_{-0.789}$	$-3.159^{+2.728}_{-1.369}$	—
T9 ( $243 \leq \sigma \leq 276$ : 49)	107.363	2.334	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.856^{+0.889}_{-1.062}$	$-1.208^{+3.130}_{-2.580}$	—
T10 ( $\sigma > 276$ : 39) <sup>U</sup>	126.821	3.523	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-0.501^{+0.486}_{-0.518}$	$2.172^{+1.462}_{-1.417}$	—
T11 ( $z_l < 0.2$ : 52)	110.539	2.256	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-3.107^{+0.857}_{-0.624}$	$-1.148^{+3.690}_{-2.743}$	—
T12 ( $0.2 \leq z_l \leq 0.4$ : 49)	117.784	2.561	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.226^{+0.206}_{-0.205}$	$4.664^{+0.250}_{-0.520}$	—
T13 ( $z_l > 0.4$ : 72)	144.466	2.094	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$0.049^{+0.536}_{-0.711}$	$-3.672^{+1.567}_{-0.925}$	—
Modelo JBP						
T1 (205)	597.116	2.956	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.473^{+0.616}_{-0.676}$	$-2.030^{+3.471}_{-2.151}$	—
T2 ( $D^{obs} \leq 1$ : 173)	409.750	2.410	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.671^{+0.801}_{-0.811}$	$0.201^{+3.209}_{-3.408}$	—
T3 (205)	589.058	2.931	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.627^{+0.991}_{-0.894}$	$0.911^{+2.875}_{-3.770}$	$1.018^{+0.007}_{-0.006}$
T4 ( $D^{obs} < 0.5$ : 30) <sup>U</sup>	64.908	2.404	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$5.534^{+0.394}_{-3.499}$	$3.166^{+1.367}_{-3.321}$	—
T5 ( $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$ : 143)	258.744	1.848	$0.308^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.047^{+0.324}_{-0.413}$	$-3.921^{+1.705}_{-0.805}$	—
T6 ( $D^{obs} > 1$ : 32) <sup>U</sup>	185.158	6.385	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.355^{+0.684}_{-0.778}$	$-2.666^{+3.285}_{-1.730}$	—
T7 ( $\sigma < 210$ : 64) <sup>U</sup>	198.932	3.261	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.617^{+0.502}_{-0.645}$	$-3.419^{+2.520}_{-1.181}$	—
T8 ( $210 \leq \sigma < 243$ : 53)	116.777	2.336	$0.309^{+0.006}_{-0.006}$	$-2.370^{+0.648}_{-0.742}$	$-2.682^{+3.262}_{-1.718}$	—
T9 ( $243 \leq \sigma \leq 276$ : 49)	107.317	2.333	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-1.869^{+0.821}_{-0.985}$	$-0.752^{+3.553}_{-2.941}$	—
T10 ( $\sigma > 276$ : 39) <sup>U</sup>	127.730	3.548	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-0.260^{+0.522}_{-0.357}$	$2.514^{+1.755}_{-2.675}$	—
T11 ( $z_l < 0.2$ : 52)	110.569	2.257	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-3.112^{+0.846}_{-0.619}$	$-1.012^{+3.686}_{-2.823}$	—
T12 ( $0.2 \leq z_l \leq 0.4$ : 49)	137.834	2.996	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-3.524^{+2.070}_{-0.359}$	$-0.246^{+4.167}_{-3.461}$	—
T13 ( $z_l > 0.4$ : 72)	147.010	2.131	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$-0.589^{+0.510}_{-0.696}$	$-3.182^{+2.633}_{-1.341}$	—



Tabla 4.8: Valores AIC, BIC y FOM para los modelos  $\omega$ CDM, CPL y JBP derivados de las diferentes pruebas empleando datos provenientes de mediciones de SLS.

Datos	$\omega$ CDM			CPL			JBP		
	AIC	BIC	FOM	AIC	BIC	FOM	AIC	BIC	FOM
T1 (205)	601.693	608.339	332.502	602.893	612.862	132.565	603.116	613.085	126.143
T3 (205)	595.197	605.166	24095.061	596.971	610.263	11552.400	597.058	610.350	9245.958
T5 (143)	267.795	273.720	584.736	261.552	270.441	586.979	264.744	273.632	338.777

dentro de  $1\sigma$  de nivel de confianza, con  $q(0) \simeq -0.60$  a  $z = 0$ .

Comparamos el criterio de información Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) entre el modelo VBT y  $\Lambda$ CDM usando cada conjunto de datos. Cuando el análisis en conjunto es considerado, obtenemos  $\Delta\text{AIC} \sim 5.6$  y  $\Delta\text{BIC} \sim 0.95$ , es decir, evidencia débil a favor y no suficiente evidencia en contra de el modelo VBT. Como conclusión principal, considerando que los datos prefieren una restricción para el parámetro  $n$  consistente con  $n = 6$ , sugerimos que *una brana con tensión variable*  $\lambda(z) = \lambda_0(1+z)^{6.19 \pm 0.12}$  *puede imitar la dinámica de la DE*. Aunque a primer ojo este resultado parece trivial, el origen de la aceleración es diferente a la propuesta en el escenario estándar. En modelos con dimensiones extras la topología influencia la aceleración, obteniendo en algunos casos una energía oscura fantasma. Nuestros resultados son también consistentes con esos explorados en [159]. También realizamos estimaciones usando diferentes priors gaussianos en  $h$ . Obtenemos que los contornos  $\lambda_0/\rho_c$ - $n$  provenientes de datos de  $H(z)$  obtienen valores pequeños para  $n$  ( $6.17^{+1.00}_{-0.83}$ ) y valores grandes de  $\lambda_0/\rho_c$ , pero siguen siendo consistentes a  $3\sigma$ . En el análisis de SNIa, la diferencia en los contornos de confianza de  $\lambda_0/\rho_c$ - $n$  es despreciable. Una desviación de 3% en el valor de  $n$  ( $6.00^{+0.10}_{-0.09}$ ) y un pequeño cambio es notable en el análisis en conjunto. También consideramos errores más pequeños (0.75% de los originales) en las mediciones de  $H(z)$ , como es sugerido por [160], llevándonos a contornos de confianza más pequeños y una desviación del 1% ( $7.32^{+0.82}_{-0.73}$ ) de nuestro valor para  $n$ . Usamos diferentes priors en los parámetros de SN Ia y encontramos que  $n$  es principalmente afectado por la estimación de  $\Omega_{m0}$ . Por lo tanto, aunque los diferentes sistemáticos

Tabla 4.9: Valores medios para los parámetros ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ) del modelo VBT derivados por cada conjunto de datos y un análisis en conjunto.

Conjunto de datos	$\chi^2_{min}$	$\Omega_{m0}$	$h$	$n$	$\lambda_0(10^{-12}\text{eV}^4)$
H(z)	14.46	$0.318^{+0.039}_{-0.042}$	$0.730^{+0.017}_{-0.017}$	$7.400^{+1.100}_{-0.926}$	$3.20^{+1.05}_{-0.95}$
BAO	9.49	$0.297^{+0.031}_{-0.028}$	$0.718^{+0.016}_{-0.016}$	$6.730^{+0.287}_{-0.289}$	$2.62^{+0.77}_{-0.57}$
CMB	3.64	$0.288^{+0.014}_{-0.013}$	$0.732^{+0.017}_{-0.017}$	$6.420^{+0.185}_{-0.185}$	$2.52^{+0.19}_{-0.17}$
SN Ia	691.10	$0.231^{+0.114}_{-0.120}$	$0.731^{+0.017}_{-0.017}$	$5.580^{+0.815}_{-0.568}$	$1.48^{+2.40}_{-1.16}$
SLS	261.21	$0.28^{+0.017}_{-0.017}$	—	$7.92^{+0.926}_{-0.763}$	$3.42^{+0.88}_{-0.78}$
Joint	716.43	$0.31^{+0.008}_{-0.008}$	$0.706^{+0.009}_{-0.009}$	$6.190^{+0.121}_{-0.120}$	$2.81^{+0.12}_{-0.11}$

en los datos introducen diferentes errores en las constricciones estimadas, los resultados finales son consistentes dentro de  $3\sigma$  niveles de confianza.

## 4.8. Comparación entre los diferentes modelos cosmológicos

En esta sección resaltaremos los resultados más importantes de los diferentes modelos estudiados en esta Tesis. Para ello, realizaremos una comparación bajo algunas consideraciones generales las cuales nos permitan equiparar los modelos de una manera imparcial. Estos resultados muestran los valores obtenidos asumiendo un prior plano en los diferentes parámetros analizados. Es importante mencionar que este trabajo no fue hecho únicamente bajo la consideración de priors planos, sin embargo, otros priors fueron asumidos para analizar el impacto en la estimación de parámetros utilizando como condición inicial valores que han sido extraídos de las colaboraciones más importantes en el mundo. Los resultados asumiendo priors diferentes no serán comentados en esta sección, ya que algunas técnicas estudiadas en este trabajo no permiten realizar una confrontación directa entre los diferentes modelos.

Para realizar la comparación entre los distintos modelos, utilizaremos los criterios de información de Akaike y el criterio de información bayesiano que han sido presentados anteriormente en la sección 2.5. En la tabla 4.10 se muestran los resultados obtenidos en la estimación de parámetros

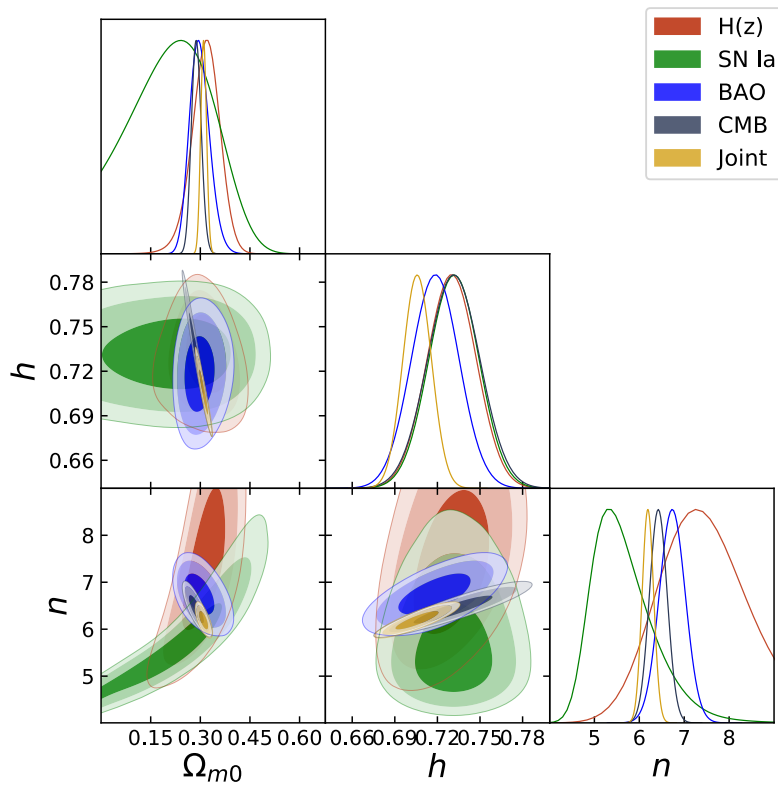


Figura 4.33: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 95 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $h$ , y  $n$  del modelo de branas.

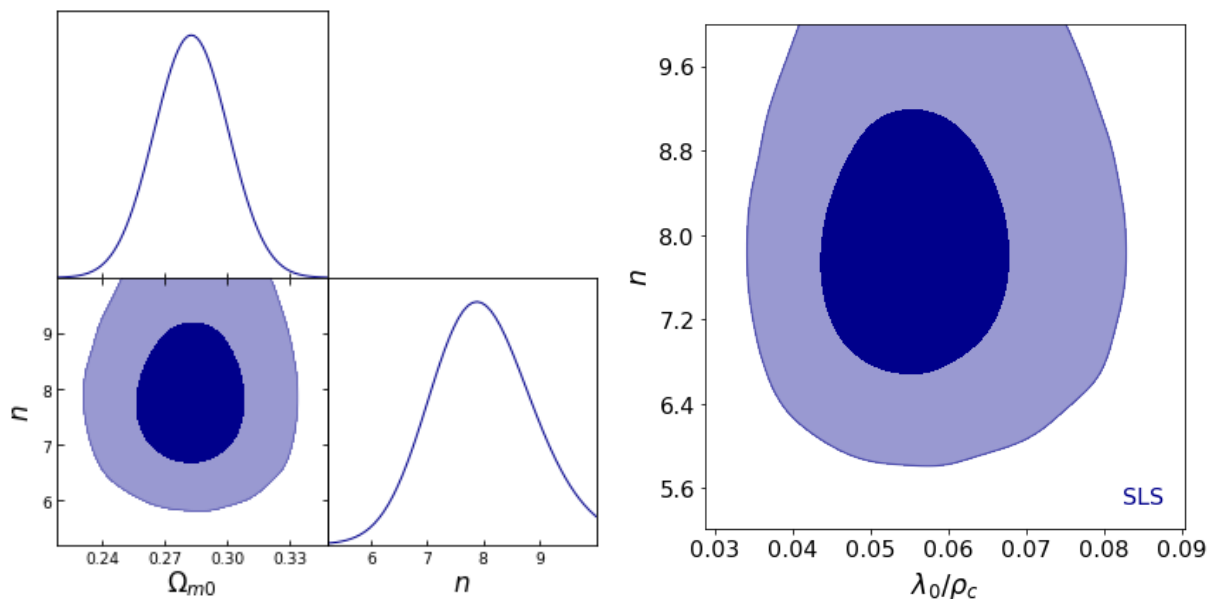


Figura 4.34: Distribuciones posteriores 1D y los niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % para los parámetros  $\Omega_{m0}$ , y  $n$  del modelo de branas (panel izquierdo) y niveles de confianza 2D al 68 %, 99.7 % de los parámetros  $\lambda_0/\rho_c$ - $n$  asumiendo  $\rho_c = 8.070 \times 10^{-11} h^2 \text{eV}^4$  (panel derecho). Se usaron mediciones de SLS.

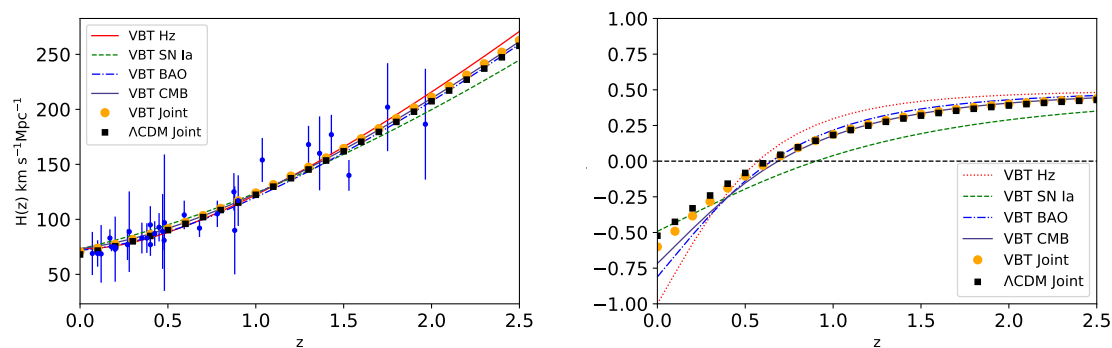


Figura 4.35: El ajuste del modelo VBT a los datos de  $H(z)$  y la reconstrucción de  $q(z)$  usando las constricciones de los datos. La dinámica del modelo  $\Lambda\text{CDM}$  es graficada por comparación.

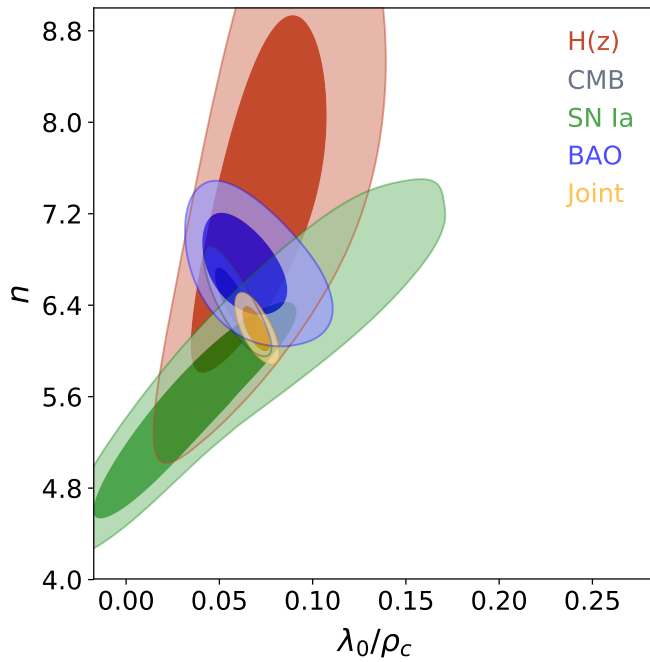


Figura 4.36: Contornos de confianza de los parámetros  $\lambda_0/\rho_c$ - $n$  dentro de  $1\sigma$  y  $3\sigma$  de nivel de confianza para cada conjunto de datos con  $\rho_c = 8.070 \times 10^{-11} h^2 \text{eV}^4$ .

cosmológicos para cada modelo. Los resultados han sido divididos para visualizar el impacto de las constricciones en cada una de las observaciones. Para comparar el mejor modelo que se ajusta a los datos, se muestran en la tabla los valores obtenidos para ambos criterios. Entre los resultados más importantes podemos mencionar que el modelo MPC es el modelo que menos prefieren las mediciones de  $H(z)$ , además, el modelo VBT resulta como el menos elegido para las observaciones de SN Ia. El modelo  $\Lambda$ CDM es el que proporciona valores más pequeños en los parámetros AIC y BIC. Sin embargo, analizando las mediciones  $H(z)$  podemos observar que tanto el modelo CO como el modelo VBT muestran un soporte sustancial debido a que presentan una diferencia en el criterio AIC  $< 1.32$  en comparación con el modelo  $\Lambda$ CDM. En cuanto a la diferencia del parámetro BIC el modelo CO muestra una diferencia de  $\Delta\text{BIC} \sim 2.7$  y el modelo VBT muestra una diferencia  $\Delta\text{BIC} \sim 1.9$ . En ambos casos no podrían descartarse los modelos debido a que no existe evidencia suficiente en contra de los modelos. Además, comparando las mediciones de SN Ia entre los distintos modelos, nuevamente el modelo CO muestra un soporte empírico sustancial teniendo una

Tabla 4.10: Valores medios para los parámetros del modelo CO ( $\Omega_{m0}$ ,  $h$ ,  $n$ ) derivados de los DOH y los datos de SN IA para las muestras cJLA y fJLA.

Comparación entre los diferentes modelos cosmológicos				
Parámetro	$\Lambda$ CDM	CO	MPC	VBT
		$H(z)_{ED}$		
$\chi^2_{min}$	15.91	15.22	17.95	14.46
$\Omega_{m0}$	$0.265^{+0.0348}_{-0.0324}$	$0.30^{+0.06}_{-0.06}$	$0.32^{+0.06}_{-0.07}$	$0.318^{+0.039}_{-0.042}$
$h$	$0.718^{+0.015}_{-0.015}$	$0.69^{+0.06}_{-0.05}$	$0.68^{+0.07}_{-0.05}$	$0.730^{+0.017}_{-0.017}$
$n$	–	$-0.19^{+0.51}_{-0.50}$	$0.10^{+0.38}_{-0.60}$	$7.4^{+1.10}_{-0.92}$
$l$	–	–	$2.13^{+2.34}_{-1.33}$	–
AIC	19.91	21.22	25.95	20.46
BIC	22.77	25.52	31.68	24.76
		SN Ia		
$\chi^2_{min}$	682.9	682.28	682.92	691.10
$\Omega_{m0}$	$0.297^{+0.0346}_{-0.0331}$	$0.22^{+0.11}_{-0.12}$	$0.22^{+0.12}_{-0.13}$	$0.231^{+0.114}_{-0.120}$
$h$	$0.732^{+0.0175}_{-0.0173}$	$0.72^{+0.18}_{-0.18}$	$0.72^{+0.18}_{-0.18}$	$0.731^{+0.017}_{-0.017}$
$n$	–	$0.16^{+0.18}_{-0.26}$	$0.33^{+0.09}_{-0.50}$	$5.580^{+0.815}_{-0.568}$
$l$	–	–	$2.09^{+2.51}_{-1.49}$	–
AIC	686.9	688.28	690.92	697.10
BIC	696.11	702.10	709.34	710.91

diferencia de  $\Delta AIC \sim 1.38$  y una diferencia  $\Delta BIC < 6$  respecto al modelo  $\Lambda$ CDM. El modelo MPC y el modelo VBT no parecen ser favorecidos por los datos ya que sus respectivos valores AIC y BIC tienen una diferencia de más de cuatro unidades mostrando poco soporte empírico y evidencia muy fuerte en contra. Por otra parte, comparando los parámetros del fondo del Universo ( $\Omega_{m0}, h$ ) podemos observar que son consistentes a  $3 \sigma$  para las dos mediciones analizadas. Los parámetros  $n$  y  $l$  no pueden ser comparados directamente, ya que sus contribuciones se originan de condiciones iniciales diferentes.

Es importante mencionar que se analizaron 3 modelos mediante la estimación de sus parámetros utilizando sistemas lentes gravitacionales. Ya que la técnica de lentes gravitacionales es independiente del parámetro  $h$ , y el modelo  $\Omega_{m0}$  no puede ajustarse sin asumir un prior, los modelos utilizados, fueron la primer extensión al modelo estándar y dos modelos con energía oscura dinámica, es decir energía oscura evolucionando en el tiempo. Los resultados de estos modelos y sus comparaciones han sido mencionadas en la sección 4.6.

## 4.9. Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a la tarea de estudiar el problema de la energía oscura. Para ello hemos realizado un análisis teórico de sus repercusiones más importantes en la evolución del Universo, así como entender los parámetros que describen al mismo Universo. En la actualidad se cuenta con un sin fin de técnicas que permiten medir y entender las propiedades de objetos astrofísicos, estas técnicas cada vez son más precisas ayudándonos a entender más allá de lo que la humanidad nunca soñó. El modelo estándar de cosmología  $\Lambda$ CDM permite describir el comportamiento del Universo, sin embargo hasta la fecha no se conocen muy bien sus constituyentes. Esto ha motivado a la comunidad científica a realizar varios esfuerzos utilizando distintas observaciones que nos permitan desentrañar la naturaleza de lo aún desconocido. De esta manera, este trabajo también intentó analizar diferentes modelos cosmológicos mediante un análisis estadístico bayesiano para estimar los parámetros de cada modelo con algunas de las técnicas más recientes de observaciones. Unos de los resultados más sobresalientes se debe a la gran adaptación del modelo estándar de cosmología con las diferentes observaciones consideradas en este trabajo, ya que muestra gran consistencia con los datos. Sin duda, el modelo estándar suele ser prometedor, pero buscar pequeñas desviaciones a ese modelo podría ayudarnos a comprender mejor los componentes que conforman nuestro Universo. Algunos de los modelos analizados en este trabajo, los cuales proponen pequeñas desviaciones al modelo original, muestran resultados estadísticos igualmente competentes que los que lo hace el modelo estándar, e inclusive los sistemas lentes gravitacionales parecen preferir un Universo con energía oscura dinámica que uno con energía oscura constante (ver la sección 4.6 para más detalles).

Entre los modelos estudiados en este trabajo, se llevó a cabo un análisis de la primer extensión del modelo estándar de cosmología, el cual es llamado el modelo  $\omega$ CDM. Este modelo describe una energía oscura constante (no evoluciona en el tiempo) pero a diferencia del modelo estándar el valor de la ecuación de estado de la energía oscura debe satisfacer  $\omega < -1/3$ . Por otra parte se estudiaron tres alternativas para explicar la aceleración cósmica tardía sin un componente de

energía oscura: los modelos cardassiano original (CO) y cardassiano politrópico modificado (CPM), además de una propuesta basada en dimensiones extra el modelo de brana con tensión variable VBT, siendo excelentes laboratorios para estudiar las desviaciones de la Relatividad General. Los modelos establecen la modificación de la ecuación canónica de Friedmann como consecuencia de la dinámica de un universo que emerge de ideas novedosas de las dimensiones espacio-temporales y se basa en una acción generalizada de Einstein-Hilbert. Además, se analizaron parametrizaciones de la ecuación de estado de la energía oscura  $\omega$ , en particular el modelo CPL y JBP. Por último, el modelo estándar fue comparado con algunos de nuestros resultados provenientes de otros modelos alternativos, encontrando una superioridad con sus competidores debido principalmente a que muestra los valores más pequeños en los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC).

Para contrastar los parámetros cosmológicos de los distintos modelos, utilizamos 51 datos observacionales de Hubble, 740 mediciones de SNIa, usando la muestra completa del catálogo JLA (fJLA) y 31 módulos de distancia binned para obtener una muestra comprimida del catálogo JLA (cJLA). La compilación de DOH contiene 31 puntos medidos usando la técnica de edad diferencial en galaxias de tipo temprano y 20 medidos usando mediciones de BAO. Estos últimos puntos están sesgados debido a que se asume una cosmología  $\Lambda$ CDM para estimar el horizonte de sonido en la época de arrastre, que se utiliza para calcular  $H(z)$ . Además, estos puntos se estiman teniendo en cuenta errores sistemáticos muy conservadores. Por lo tanto, construimos dos muestras homogeneizadas e independientes del modelo para los puntos de agrupamiento utilizando un  $r_d$  común obtenido de las mediciones de Planck y WMAP. Además, compilamos y utilizamos la muestra más grande de sistemas lentes gravitacionales fuertes que existe en la actualidad, con 204 sistemas que tienen medidas espectroscópicas de la dispersión de velocidades, un radio de Einstein estimado y presentan las medidas del corrimiento al rojo de la lente y la fuente.

El primer modelo puesto a prueba fue la primer extensión del modelo estándar, el modelo  $\omega$ CDM el cual fue contrastado con observaciones de sistemas lentes gravitacionales fuertes. Para ello usamos distintas muestras: la muestra completa (FS), la muestra completa excluyendo los sistemas



que presentan valores  $D^{obs} > 1$  (vea la tabla A.5 para más detalles) y la muestra completa con un parámetro correctivo  $f$  (FS + f) el cuál nos ayuda a cuantificar las desviaciones de asumir la galaxia lente como una esfera singular isoterma (SIS), además para evaluar el impacto en la estimación de parámetros de los diferentes observables hemos separado la muestra completa en diferentes submuestras según sus valores para la ecuación de la lente ( $D^{obs}$ ), la dispersión de velocidades ( $\sigma$ ) y el redshift de la galaxia lente ( $z_l$ ). Descartando las regiones no confiables, todos los casos el modelo  $\omega$ CDM presentan valores para  $\omega_0 < -1$ , a pesar de que los valores medios son diferentes en cada caso, la mayoría muestran consistencia a  $1 \sigma$  de nivel de confianza. Además los parámetros cosmológicos de los distintos modelos fueron analizados en conjunto con un parámetro extra que nos dicta la corrección al modelo de la lente por no ser una SIS perfecta. El valor obtenido para el parámetro correctivo  $f$  es muy similar a los reportados por [56, 101]. Se encontró mejora en las constricciones reflejadas en el valor  $\chi_{red}^2$  cuando excluimos los sistemas en la región de  $D^{obs} > 1$ . Respecto a la dispersión de velocidades, las regiones  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$  y  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$  presentan valores más grandes en la función  $\chi_{red}^2$  en comparación a la muestra completa, sugiriendo que algunos sistemas en esas regiones pueden estar apartándose de una esfera singular isoterma o existen efectos sistemáticos que no fueron considerados.

Además analizamos los modelos CO y CPM con observaciones de SN Ia y mediciones del parámetro de Hubble  $H(z)$ . Encontramos que las diferentes muestras de DOH proporcionan constricciones consistentes en los parámetros cosmológicos de los modelos CO y CPM. Además, no hay diferencias significativas en las constricciones obtenidas de la muestra cJLA y las estimadas a partir de la muestra fJLA. Además, obtuvimos constricciones consistentes a un nivel de confianza de  $3\sigma$  cuando se emplean diferentes priors gaussianos en la constante de Hubble  $h$ . Realizamos un análisis en conjunto con la combinación de cJLA y una muestra de DOH homogeneizada. Nuestros resultados mostraron que los parámetros libres de los modelos CO y CPM son consistentes con la dinámica tradicional dictada por la ecuación de Friedmann (ver Tablas 4.3 - 4.6) que tiene una constante cosmológica (CC). Sin embargo, en los modelos cardassianos, los términos adicionales en

la ecuación canónica de Friedmann imitan la CC pero provienen del tensor de energía momento, a diferencia de la forma tradicional donde la CC se agrega a mano en la ecuación de Friedmann. Por supuesto, esos problemas que afectan a la CC se transferirán a la interpretación de la geometría n-dimensional y, como consecuencia, al surgimiento del término n del tensor de energía-momento. Por lo tanto, la idea es interpretar y conocer la topología global de nuestro Universo para generar una solución para el problema de DE y la aceleración actual del Universo.

También analizamos 2 modelos dinámicos de energía oscura: los modelos CPL y JBP donde la ecuación de estado de la energía oscura está en forma paramétrica, y se permite que evolucione en el tiempo en términos del corrimiento al rojo. Para constreñir estos modelos se usó la compilación de lentes gravitacionales fuertes mencionada anteriormente (detalles de los sistemas pueden encontrarse en A.4 y en [156]). Probamos los modelos usando los mismos casos que en el modelo  $\omega$ CDM. Primero considerando todos los sistemas, segundo excluyendo los sistemas con  $D^{obs} > 1$  (sistemas no físicos), y finalmente usando la muestra completa con un nuevo parámetro  $f$  que toma en consideración algunos sistemáticos que podrían afectar los observables, además de las submuestras de los SLS, separándolas según sus valores para  $D^{obs}$ ,  $\sigma$  y  $z_l$ . Descubrimos que la muestra completa de SLS proporciona valores similares para el parámetro  $\omega_0$  para los dos modelos. Sin embargo,  $\omega_1$  es muy sensible a cada caso presentado en este trabajo, pero la mayoría siendo consistentes a  $1 \sigma$  de nivel de confianza. El parámetro  $f$  muestra consistencia entre los dos modelos (con un error de 5%), con valores similares a los reportados por [56, 101]. Encontramos que algunas de las submuestras consideradas en este trabajo proporcionan valores para los parámetros cosmológicos que son inconsistentes con otras observaciones (SNe Ia, CMB). Sin embargo, las mejoras en las constricciones para los modelos se reflejan en el valor  $\chi_{red}^2$  cuando excluimos los sistemas en la región de  $D^{obs} > 1$ . Esta región no física (también encontrada por Leaf y Melia [61]) parece estar relacionada con aquellos sistemas con diferentes tipos de incertidumbres (por ejemplo, lentes no totalmente confirmadas, arcos múltiples, desplazamientos al rojo inciertos, subestructura de lente compleja). Por lo tanto, como un subproducto de nuestro análisis, los resultados con  $D^{obs} > 1$  apuntan hacia aquellos sistemas con parámetros observados no confiables o aquellos que se apartan

de nuestra hipótesis de distribución de masa esférica isotérmica. Con respecto a la dispersión de velocidades, algunas de las regiones seleccionadas proporcionan constricciones más débiles (valores más grandes en la función  $\chi_{red}^2$ ):  $\sigma < 210 \text{ km s}^{-1}$  y  $\sigma > 276 \text{ km s}^{-1}$ . Chen et al. [64] también encontró constricciones débiles para los parámetros del modelo lente asumiendo diferentes regiones en la dispersión de velocidades.

Comparando los tres diferentes modelos cosmológicos que se analizaron con lentes gravitacionales, descubrimos que nueve sistemas que se encuentran en la región  $D^{obs} < 0.5$  no pueden ser modelados adecuadamente por la ecuación teórica de la lente en ningún modelo, obteniendo doubles contornos de confianza estadística para los parámetros cosmológicos. Finalmente, el valor más bajo de  $\chi_{red}^2$  para cada modelo se logra en la región  $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$ , con valores para los parámetros cosmológicos ( $-1.653 \leq \omega_0 \leq -0.735$  y  $-4.202 \leq \omega_1 \leq -3.921$ ) en buen acuerdo con los que se espera obtener de otras observaciones astrofísicas. Por otro lado, los criterios de selección de modelo muestran que se prefiere el modelo CPL en la región  $0.5 \leq D^{obs} \leq 1$  (T5), es decir, los datos de SLS apuntan hacia un comportamiento dinámico de energía oscura para la región recomendada en este trabajo, consistente con los tres criterios diferentes presentados en la tabla 4.8, obteniendo  $\omega_0 = -0.735_{-0.395}^{+0.319}$  y  $\omega_1 = -4.202_{-0.592}^{+1.208}$  para esta región. Cabe destacar que aunque el modelo CPL es preferido para esta submuestra, no existen suficientes evidencias para descartar el modelo  $\omega$ CDM. Suponiendo  $f$  como un parámetro libre e independiente en cada SLS, la dispersión (en comparación con las estimaciones de Ofek) del valor de  $f$  parece ser mayor para algunos sistemas medidos. Para estudiar esta desviación, analizamos un catálogo simulado de 788 SLS, que imita la distribución de los datos compilados en este trabajo. Cuando el radio de Einstein de la muestra simulada se compara con el obtenido de un ajuste SIE, encontramos que el error es inferior al 10 % para la mayoría de los objetos (ver Amante et al. [156]). Ya que la mayoría de los datos en nuestra compilación de SLS provienen de modelos que suponen SIE, esto admite el rango utilizado en nuestro trabajo. Además, suponiendo una ley de potencias en la distribución de masa para la galaxia lente para el catálogo simulado, encontramos una mayor dispersión (35 % o menos), sin embargo, incluso para estos modelos lentes más complejos, no encontramos una ecuación de la

lente observacional con características no físicas, es decir con valores ( $D^{obs} > 1$ ). Sin embargo, un análisis más profundo debería hacerse, en particular para considerar los sesgos sistemáticos, que nos ayuden a estimar con mayor precisión los parámetros cosmológicos y mejorar nuestro método.

Por último, construimos un modelo de mundo brana que produce un universo en expansión acelerada sin un componente de DE. Presentamos una nueva forma de construir modelos RS utilizando una VBT  $\lambda(z)$ , llamada crono-brana. Utilizamos el ansatz  $\lambda(z) = (z + 1)^n$ , inspirado en potenciales de campo escalar, que surgen de la estructura del espacio-tiempo. Para constreñir el exponente  $n$ , y los parámetros del modelo utilizamos observaciones de SN Ia, BAO,  $H(z)$ , CMB y SLS (vea Garcia-Aspeitia et al. [135] para los detalles en las observaciones de BAO y CMB). Encontramos valores medios consistentes para los diferentes parámetros utilizando cada conjunto de datos. Del análisis en conjunto (usando todas las observaciones excepto SLS) estimamos  $n \sim 6.19 \pm 0.12$ , es decir, proporciona un término en la ecuación de Friedmann que imita la dinámica de la DE muy cerca de una CC a tiempos tardíos. Además,  $\Omega_{m0}$  y  $h$  están en excelente acuerdo con los valores esperados del modelo estándar. Nuestro modelo también alivia la tensión entre las constricciones para  $\lambda_0$  obtenidas de los datos cosmológicos y las del régimen de altas energías. Por ejemplo, obtenemos del análisis conjunto  $\lambda = 8.35 \times 10^{40} \text{eV}^4$  en  $z \sim 3 \times 10^8$  para la época de nucleosíntesis, sin afectar los procesos primordiales ya establecidos. Para la época actual  $z = 0$ , tenemos  $\lambda = 2.81 \times 10^{-12} \text{eV}^4$ .

Todas nuestras constricciones cosmológicas se ajustan bien a los datos y predicen una fase de expansión acelerada a  $z \sim 0.6$ . Nuestros resultados sobre la evolución del factor de escala exhiben una singularidad futura para el caso del modelo VBT. Reconstruimos el comportamiento cosmológico de una EoS efectiva y descubrimos que el Universo acelera cuando  $\omega_{eff} < 0.00025$  a  $z < 0.65$ , obteniendo  $q(0) \simeq -0.60$ . Estudiamos el parámetro de densidad para cada componente y recuperamos valores muy cercanos al modelo estándar. Este es un resultado clave porque el modelo VBT reproduce con éxito el modelo de concordancia y proporciona pistas sobre la naturaleza de la DE y la aceleración cósmica tardía. Sugiriendo al modelo VBT como un excelente candidato ha tomar en cuenta en un futuro cercano.

Un análisis más detallado de las perturbaciones de los diferentes modelos proporcionaría información viable acerca de cual podría ser un modelo prometedor para describir la energía oscura junto con la formación de estructura en el Universo. Sin embargo, para evaluar el impacto de las perturbaciones, en las constricciones se debe llevar a cabo un análisis completo del CMB, que está más allá del alcance de este trabajo. La principal finalidad de este trabajo, ha sido entender las diferentes ventanas que pueden permitirnos acercarnos al entendimiento de nuestro Universo, sin duda las mediciones de cronómetros cósmicos, supernovas de tipo Ia y lentes gravitacionales seguirán mostrándonos un camino hacia la comprensión del Universo. Los resultados no muestran un camino claro y el análisis estadístico será fundamental para discernir entre el modelo que más se adapte para explicar la realidad. Algunos de los logros más importantes en este trabajo, ha sido la recopilación de dos muestras, las cuales son las más grandes del mundo en la actualidad, la primera conformada de sistemas lentes gravitacionales fuertes utilizando galaxias elípticas como lentes, con un total de 204 mediciones, así como la muestra más grande de mediciones de datos observacionales de Hubble con un total de 51 mediciones. Por el lado teórico, el resultado más sobresaliente ha sido la inclusión de un modelo proveniente de mundos brana que es capaz de reproducir una expansión acelerada del Universo, sin la necesidad de incluir un fluido (energía oscura) con propiedades extrañas. La pequeña aportación de este trabajo ha sido, proporcionar las herramientas que nos ayudan a tener un panorama del estudio del Universo utilizando diversos frentes. La inclusión del análisis bayesiano en el área de cosmología será fundamental para una comprensión más detallada sobre los posibles modelos que permitan dar solución a los problemas del presente.



# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Compilación de datos observacionales de Hubble

En la tabla A.1 presentamos la compilación de mediciones para el parámetro de Hubble más grande en la actualidad. Contiene 31 puntos provenientes de mediciones de cronómetros cósmicos y 20 puntos que han sido obtenidos mediante mediciones de oscilaciones acústicas de bariones. Además, presentamos el valor de  $H_0$  medido con SN Ia.

#### A.1.1. Muestra homogénea de datos provenientes de BAO

La tabla A.2 muestra los datos homogeneizados provenientes de mediciones de oscilaciones acústicas de bariones, para ello se asumieron dos diferentes valores para el horizonte de sonido  $r_d$  en los 20 puntos, de acuerdo con las mediciones de Planck 2015 y WMAP9. Se han considerado distintas fuentes de errores que podrían afectar a  $r_d$  debido a asumir una cosmología diferente, hemos propagado estos errores en cuadratura para obtener una muestra homogeneizada e independiente del modelo.

$z$	$H(z)$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	$\sigma_H$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	Referencia	Método
0	73.24	1.74	[83]	SN Ia/Cepheid
0.07	69	19.6	[73]	ED
0.1	69	12	[76]	ED
0.12	68.6	26.2	[73]	ED
0.17	83	8	[76]	ED
0.1791	75	4	[72]	ED
0.1993	75	5	[72]	ED
0.2	72.9	29.6	[73]	ED
0.24	79.69	2.65	[79]	Clustering
0.27	77	14	[76]	ED
0.28	88.8	36.6	[73]	ED
0.3	81.7	6.22	[163]	Clustering
0.31	78.17	4.74	[164]	Clustering
0.35	82.7	8.4	[165]	Clustering
0.3519	83	14	[72]	ED
0.36	79.93	3.39	[164]	Clustering
0.38	81.5	1.9	[166]	Clustering
0.3802	83	13.5	[75]	ED
0.4	95	17	[76]	ED
0.4004	77	10.2	[75]	ED
0.4247	87.1	11.2	[75]	ED
0.43	86.45	3.68	[79]	Clustering
0.44	82.6	7.8	[167]	Clustering
0.4497	92.8	12.9	[75]	ED
0.47	89	34	[168]	Clustering
0.4783	80.9	9	[75]	ED
0.48	97	62	[76]	ED
0.51	90.4	1.9	[166]	Clustering
0.52	94.35	2.65	[164]	Clustering
0.56	93.33	2.32	[164]	Clustering
0.57	92.9	7.8	[78]	Clustering
0.59	98.48	3.19	[164]	Clustering
0.5929	104	13	[72]	ED
0.6	87.9	6.1	[167]	Clustering
0.61	97.3	2.1	[166]	Clustering
0.64	98.82	2.99	[164]	Clustering
0.6797	92	8	[72]	ED
0.73	97.3	7	[167]	Clustering

Tabla A.1: 52 mediciones del parámetro de Hubble  $H(z)$  (en  $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ) y sus errores,  $\sigma_H$ , a un corrimiento al rojo  $z$ . El primer punto no fue incluido en el análisis montecarlo (MCMC), solo fué considerado como prior gaussiano en algunas pruebas. La columna método se refiere a como fué obtenido el valor de  $H(z)$ : ED indica el método de edad diferencial, y clustering indica que provienen de mediciones de oscilaciones acústicas de bariones (BAO).



$z$	$H(z)$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	$\sigma_H$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	Referencia	Método
0.7812	105	12	[72]	ED
0.8754	125	17	[72]	ED
0.88	90	40	[76]	ED
0.9	117	23	[76]	ED
1.037	154	20	[72]	ED
1.3	168	17	[76]	ED
1.363	160	33.6	[74]	ED
1.43	177	18	[76]	ED
1.53	140	14	[76]	ED
1.75	202	40	[76]	ED
1.965	186.5	50.4	[74]	ED
2.33	224	8	[169]	Clustering
2.34	222	7	[170]	Clustering
2.36	226	8	[171]	Clustering

$z$	$H(z) \pm \sigma_H(r_{\text{dpl}})$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	$H(z) \pm \sigma_H(r_{\text{dw9}})$ $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$
0.24	$82.37 \pm 3.94$	$79.69 \pm 4.28$
0.3	$78.83 \pm 6.58$	$76.26 \pm 6.63$
0.31	$78.39 \pm 5.46$	$75.83 \pm 5.60$
0.35	$88.10 \pm 9.45$	$85.23 \pm 9.37$
0.36	$80.16 \pm 4.37$	$77.54 \pm 4.63$
0.38	$81.74 \pm 3.40$	$79.08 \pm 3.81$
0.43	$89.36 \pm 4.89$	$86.44 \pm 5.18$
0.44	$85.48 \pm 8.59$	$82.69 \pm 8.55$
0.51	$90.67 \pm 3.66$	$87.71 \pm 4.13$
0.52	$94.61 \pm 4.20$	$91.52 \pm 4.63$
0.56	$93.59 \pm 3.96$	$90.54 \pm 4.42$
0.57	$96.59 \pm 8.76$	$93.44 \pm 8.78$
0.59	$98.75 \pm 4.66$	$95.53 \pm 5.07$
0.6	$90.96 \pm 7.04$	$87.99 \pm 7.14$
0.61	$97.59 \pm 3.97$	$94.41 \pm 4.47$
0.64	$99.09 \pm 4.53$	$95.86 \pm 4.97$
0.73	$100.69 \pm 8.03$	$97.40 \pm 8.12$
2.33	$223.99 \pm 11.12$	$216.69 \pm 11.97$
2.34	$222.105 \pm 10.38$	$214.85 \pm 11.31$
2.36	$226.24 \pm 11.18$	$218.86 \pm 12.05$

Tabla A.2: DOH homogeneizados e independientes del modelo provenientes de BAO (en  $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ) y sus errores,  $\sigma_H$ , a diferentes corrimientos al rojo  $z$ . Los valores de  $H(z)$  fueron obtenidos usando el horizonte de sonido en la época drag medidos por Planck y WMAP respectivamente.

## A.2. Muestra comprimida JLA

La tabla A.3 muestra 31 módulos de distancia que han sido ajustados a la muestra total de 740 SN Ia medidas por el catálogo JLA. Esta muestra nos permite ahorrar tiempo de cómputo sin obtener diferencias notables en comparación a la muestra completa, permitiéndonos ser más eficientes en constreñir modelos cosmológicos.

## A.3. Compilación de sistemas lentes gravitacionales

A continuación se presenta en la tabla A.4 nuestra compilación de sistemas lentes gravitacionales, la cual consta de 205 puntos, donde se han considerado solo galaxias de tipo temprano actuando como lentes que abarcan el intervalo del redshift entre  $0.0625 < z_l < 0.958$  para la lente y  $0.196 < z_s < 3.595$  para la fuente. Es la compilación de SLS más grande en la actualidad.

### A.3.1. SLS con valores para la ecuación de la lente ( $D^{obs} > 1$ )

En la tabla A.5 se muestran los 32 sistemas que presentan un valor para la ecuación teórica de la lente con  $D^{obs} > 1$ . Muchos de estos sistemas aparecen marcados ( $\dagger$ ), lo que significa que la fuente pueden tener estructuras complejas con múltiples arcos, o la lente puede estar compuesta de diferentes componentes, o tiene mediciones inciertas del corrimiento al rojo o los arcos o anillos no están formados fuera de la galaxia lente. Para más detalles visite las referencias proporcionadas en la tabla A.4. Sugerimos que estos sistemas no deben ser usados en la estimación de parámetros cosmológicos.

$z_b$	$\mu_b$
0.010	32.953886976
0.012	33.8790034661
0.014	33.8421407403
0.016	34.1185670426
0.019	34.5934459829
0.023	34.9390265264
0.026	35.2520963261
0.031	35.7485016537
0.037	36.0697876073
0.043	36.4345704737
0.051	36.6511105942
0.060	37.1580141133
0.070	37.4301732516
0.082	37.9566163488
0.097	38.2532540406
0.114	38.6128693372
0.134	39.0678507056
0.158	39.3414019038
0.186	39.7921436157
0.218	40.1565346033
0.257	40.5649560582
0.302	40.9052877824
0.355	41.4214174356
0.418	41.7909234574
0.491	42.2314610669
0.578	42.6170470706
0.679	43.0527314851
0.799	43.5041508283
0.940	43.9725734093
1.105	44.5140875789
1.300	44.8218674621

Tabla A.3: Muestra comprimida JLA la cual contiene 31 módulos de distancia bineados ajustados a la muestra completa JLA por Betoule et al. [71]. La primera columna es el  $z$  bineado y la segunda columna es el módulo de distancia bineado.

Tabla A.4: Compilación de 204 mediciones de sistemas lentes fuertes.

Nombre del sistema	Colaboración	$z_l$	$z_s$	$\theta_E(\prime)$	$\sigma_0$ (Km s <sup>-1</sup> )	Referencia
SDSSJ0819+4534	SLACS	0.194	0.446	0.85	225 ±15	[103]
SDSSJ0959+4416	SLACS	0.237	0.531	0.96	244 ±19	[102]
SDSSJ1029+0420	SLACS	0.104	0.615	1.01	210 ±11	[102]
SDSSJ1103+5322	SLACS	0.158	0.735	1.02	196 ±12	[102]
SDSSJ1306+0600	SLACS	0.173	0.472	1.32	237 ±17	[103]
SDSSJ1313+4615	SLACS	0.185	0.514	1.37	221 ±17	[103]
SDSSJ1318-0313	SLACS	0.240	1.300	1.58	213 ±18	[103]
SDSSJ1420+6019	SLACS	0.063	0.535	1.04	205 ±10	[102]
SDSSJ1443+0304	SLACS	0.134	0.419	0.81	209 ±11	[102]
SDSSJ1614+4522	SLACS	0.178	0.811	0.84	182 ±13	[102]
SDSSJ1644+2625	SLACS	0.137	0.610	1.27	229 ±12	[103]
SDSSJ1719+2939	SLACS	0.181	0.578	1.28	286 ±15	[103]
HE0047-1756	CASTLES	0.408	1.670	0.80	190 ± <b>27</b>	[172]
HE0230-2130	CASTLES	0.522	2.162	0.87	240 ± <b>34</b>	[172]
J0246-0825	CASTLES	0.723	1.686	0.53	265 ± <b>37</b>	[173]
HE0435-1223	CASTLES	0.454	1.689	1.22	257 ± <b>36</b>	[174]
MG0751+2716	CASTLES	0.350	3.200	0.41	320 <sup>+170</sup> <sub>-110</sub>	[175]
SDSSJ092455.87+021924.9	CASTLES	0.393	1.523	0.88	230 ± <b>32</b>	[176]
LBQS1009-0252	CASTLES	0.871	2.739	0.77	245 ± <b>34</b>	[177]
J1004+1229	CASTLES	0.950	2.640	0.83	240 ± <b>34</b>	[178]
SDSSJ115517.35+634622.0	CASTLES	0.176	2.888	0.76	190 ± <b>27</b>	[179]
FBQ1633+3134	CASTLES	0.684	1.518	0.35	160 ± <b>22</b>	[180]
MG1654+1346	CASTLES	0.254	1.740	1.05	200 <sup>+120</sup> <sub>-80</sub>	[181]
DES J2146-0047	DES	0.799	2.38	0.68	215 ± <b>21</b>	[105]
SDSSJ0151+0049	BELLS	0.517	1.364	0.68	219 ±39	[182]
SDSSJ0747+5055	BELLS	0.438	0.898	0.75	328 ±60	[182]
SDSSJ0747+4448	BELLS	0.437	0.897	0.61	281 ±52	[182]
SDSSJ0801+4727	BELLS	0.483	1.518	0.49	98 ±24	[182]
SDSSJ0830+5116	BELLS	0.53	1.332	1.14	268 ±36	[182]
SDSSJ0944-0147	BELLS	0.539	1.179	0.72	204 ±34	[182]
SDSSJ1159-0007	BELLS	0.579	1.346	0.68	165 ±41	[182]
SDSSJ1215+0047	BELLS	0.642	1.297	1.37	262 ±45	[182]
SDSSJ1221+3806	BELLS	0.535	1.284	0.7	187 ±48	[182]
SDSSJ1234-0241	BELLS	0.49	1.016	0.53	122 ±31	[182]
SDSSJ1318-0104	BELLS	0.659	1.396	0.68	177 ±27	[182]
SDSSJ1337+3620	BELLS	0.564	1.182	1.39	225 ±35	[182]
SDSSJ1349+3612	BELLS	0.44	0.893	0.75	178 ±18	[182]
SDSSJ1352+3216	BELLS	0.463	1.034	1.82	161 ±21	[182]
SDSSJ1522+2910	BELLS	0.555	1.311	0.74	166 ±27	[182]
SDSSJ1541+1812	BELLS	0.56	1.113	0.64	174 ±24	[182]
SDSSJ1542+1629	BELLS	0.352	1.023	1.04	210 ±16	[182]
SDSSJ1545+2748	BELLS	0.522	1.289	1.21	250 ±37	[182]
SDSSJ1601+2138	BELLS	0.544	1.446	0.86	207 ±36	[182]
SDSSJ1631+1854	BELLS	0.408	1.086	1.63	272 ±14	[182]

Nombre del sistema	Colaboración	$z_l$	$z_s$	$\theta_E(\prime)$	$\sigma_0$ (Km s <sup>-1</sup> )	Referencia
SDSSJ2122+0409	BELLS	0.626	1.452	1.58	324 ±56	[182]
SDSSJ2125+0411	BELLS	0.363	0.978	1.2	247 ±17	[182]
SDSSJ2303+0037	BELLS	0.458	0.936	1.02	274 ±31	[182]
SDSSJ0008-0004	SLACS	0.44	1.192	1.16	193 ±36	[103]
SDSSJ0029-0055	SLACS	0.227	0.931	0.96	229 ±18	[103]
SDSSJ0037-0942	SLACS	0.196	0.632	1.53	279 ±10	[103]
SDSSJ0044+0113	SLACS	0.12	0.196	0.79	266 ±13	[103]
SDSSJ0109+1500	SLACS	0.294	0.525	0.69	251 ±19	[103]
SDSSJ0157-0056	SLACS	0.513	0.924	0.79	295 ±47	[103]
SDSSJ0216-0813	SLACS	0.332	0.524	1.16	333 ±23	[103]
SDSSJ0252+0039	SLACS	0.28	0.982	1.04	164 ±12	[103]
SDSSJ0330-0020	SLACS	0.351	1.071	1.1	212 ±21	[103]
SDSSJ0405-0455	SLACS	0.075	0.81	0.8	160 ±7	[103]
SDSSJ0728+3835	SLACS	0.206	0.688	1.25	214 ±11	[103]
SDSSJ0737+3216	SLACS	0.322	0.581	1	338 ±16	[103]
SDSSJ0808+4706	SLACS	0.219	1.025	1.23	236 ±11	[103]
SDSSJ0822+2652	SLACS	0.241	0.594	1.17	259 ±15	[103]
SDSSJ0841+3824	SLACS	0.116	0.657	1.41	225 ±8	[103]
SDSSJ0903+4116	SLACS	0.43	1.065	1.29	223 ±27	[103]
SDSSJ0912+0029	SLACS	0.164	0.324	1.63	326 ±12	[103]
SDSSJ0936+0913	SLACS	0.19	0.588	1.09	243 ±11	[103]
SDSSJ0946+1006	SLACS	0.222	0.608	1.38	263 ±21	[103]
SDSSJ0956+5100	SLACS	0.24	0.47	1.33	334 ±15	[103]
SDSSJ0959+0410	SLACS	0.126	0.535	0.99	197 ±13	[103]
SDSSJ1016+3859	SLACS	0.168	0.439	1.09	247 ±13	[103]
SDSSJ1020+1122	SLACS	0.282	0.553	1.2	282 ±18	[103]
SDSSJ1023+4230	SLACS	0.191	0.696	1.41	242 ±15	[103]
SDSSJ1100+5329	SLACS	0.317	0.858	1.52	187 ±23	[103]
SDSSJ1106+5228	SLACS	0.096	0.407	1.23	262 ±9	[103]
SDSSJ1112+0826	SLACS	0.273	0.63	1.49	320 ±20	[103]
SDSSJ1134+6027	SLACS	0.153	0.474	1.1	239 ±11	[103]
SDSSJ1142+1001	SLACS	0.222	0.504	0.98	221 ±22	[103]
SDSSJ1143-0144	SLACS	0.106	0.402	1.68	269 ±5	[103]
SDSSJ1153+4612	SLACS	0.18	0.875	1.05	269 ±15	[103]
SDSSJ1204+0358	SLACS	0.164	0.631	1.31	267 ±17	[103]
SDSSJ1205+4910	SLACS	0.215	0.481	1.22	281 ±13	[103]
SDSSJ1213+6708	SLACS	0.123	0.64	1.42	292 ±11	[103]
SDSSJ1218+0830	SLACS	0.135	0.717	1.45	219 ±10	[103]
SDSSJ1250+0523	SLACS	0.232	0.795	1.13	252 ±14	[103]
SDSSJ1330-0148	SLACS	0.081	0.712	0.87	185 ±9	[103]
SDSSJ1402+6321	SLACS	0.205	0.481	1.35	267 ±17	[103]
SDSSJ1403+0006	SLACS	0.189	0.473	0.83	213 ±17	[103]
SDSSJ1416+5136	SLACS	0.299	0.811	1.37	240 ±25	[103]
SDSSJ1430+4105	SLACS	0.285	0.575	1.52	322 ±32	[103]
SDSSJ1436-0000	SLACS	0.285	0.805	1.12	281 ±19	[103]
SDSSJ1451-0239	SLACS	0.125	0.52	1.04	223 ±14	[103]

Nombre del sistema	Colaboración	$z_l$	$z_s$	$\theta_E(\prime)$	$\sigma_0$ (Km s <sup>-1</sup> )	Referencia
SDSSJ1525+3327	SLACS	0.358	0.717	1.31	264 ±26	[103]
SDSSJ1531-0105	SLACS	0.16	0.744	1.71	279 ±12	[103]
SDSSJ1538+5817	SLACS	0.143	0.531	1	189 ±12	[103]
SDSSJ1621+3931	SLACS	0.245	0.602	1.29	236 ±20	[103]
SDSSJ1627-0053	SLACS	0.208	0.524	1.23	290 ±14	[103]
SDSSJ1630+4520	SLACS	0.248	0.793	1.78	276 ±16	[103]
SDSSJ1636+4707	SLACS	0.228	0.674	1.09	231 ±15	[103]
SDSSJ2238-0754	SLACS	0.137	0.713	1.27	198 ±11	[103]
SDSSJ2300+0022	SLACS	0.228	0.464	1.24	279 ±17	[103]
SDSSJ2303+1422	SLACS	0.155	0.517	1.62	255 ±16	[103]
SDSSJ2321-0939	SLACS	0.082	0.532	1.6	249 ±8	[103]
SDSSJ2341+0000	SLACS	0.186	0.807	1.44	207 ±13	[103]
Q0047-2808	LSD	0.485	3.595	1.34 ±0.01	229 ±15	[106]
CFRS03-1077	LSD	0.938	2.941	1.24 ±0.06	251 ±19	[68]
HST14176+5226	LSD	0.81	3.399	1.41 ±0.08	224 ±15	[68]
HST15433	LSD	0.497	2.092	0.36 ±0.04	116 ±10	[68]
SL2SJ021247-055552	SL2S	0.75	2.74	1.27 ±0.04	273 ±22	[63]
SL2SJ021325-074355	SL2S	0.717	3.48	2.39 ±0.07	293 ±34	[63]
SL2SJ021411-040502	SL2S	0.609	1.88	1.41 ±0.04	287 ±47	[63]
SL2SJ021737-051329	SL2S	0.646	1.847	1.27 ±0.04	239 ±27	[63]
SL2SJ021902-082934	SL2S	0.389	2.15	1.30 ±0.04	289 ±23	[63]
SL2SJ022346-053418	SL2S	0.499	1.44	1.22 ±0.11	288 ±28	[63]
SL2SJ022511-045433	SL2S	0.238	1.199	1.76 ±0.05	234 ±21	[63]
SL2SJ022610-042011	SL2S	0.494	1.232	1.19 ±0.04	263 ±24	[63]
SL2SJ023251-040823	SL2S	0.352	2.34	1.04 ±0.03	281 ±26	[63]
SL2SJ084847-035103	SL2S	0.682	1.55	0.85 ±0.07	197 ±21	[63]
SL2SJ084909-041226	SL2S	0.722	1.54	1.10 ±0.03	320 ±24	[63]
SL2SJ084959-025142	SL2S	0.274	2.09	1.16 ±0.04	276 ±35	[63]
SL2SJ085019-034710	SL2S	0.337	3.25	0.93 ±0.03	290 ±24	[63]
SL2SJ085540-014730	SL2S	0.365	3.39	1.03 ±0.04	222 ±25	[63]
SL2SJ085559-040917	SL2S	0.419	2.95	1.36 ±0.10	281 ±22	[63]
SL2SJ090407-005952	SL2S	0.611	2.36	1.40 ±0.04	183 ±21	[63]
SL2SJ095921+020638	SL2S	0.552	3.35	0.74 ±0.02	188 ±22	[63]
SL2SJ135949+553550	SL2S	0.783	2.77	1.14 ±0.03	228 ±29	[63]
SL2SJ140454+520024	SL2S	0.456	1.59	2.55 ±0.08	342 ±20	[63]
SL2SJ140546+524311	SL2S	0.526	3.01	1.51 ±0.05	284 ±21	[63]
SL2SJ140650+522619	SL2S	0.716	1.47	0.94 ±0.03	253 ±19	[63]
SL2SJ141137+565119	SL2S	0.322	1.42	0.93 ±0.03	214 ±23	[63]
SL2SJ142031+525822	SL2S	0.38	0.99	0.96 ±0.14	246 ±23	[63]
SL2SJ142059+563007	SL2S	0.483	3.12	1.40 ±0.04	228 ±19	[63]
SL2SJ220329+020518	SL2S	0.4	2.15	1.95 ±0.06	213 ±21	[63]
SL2SJ220506+014703	SL2S	0.476	2.53	1.66 ±0.06	317 ±30	[63]
SL2SJ221326-000946	SL2S	0.338	3.45	1.07 ±0.03	165 ±20	[63]
SL2SJ221929-001743	SL2S	0.289	1.02	0.52 ±0.13	189 ±20	[63]
SL2SJ222012+010606	SL2S	0.232	1.07	2.16 ±0.07	127 ±15	[63]
SL2SJ222148+011542	SL2S	0.325	2.35	1.40 ±0.05	222 ±23	[63]

Nombre del sistema	Colaboración	$z_l$	$z_s$	$\theta_E(\prime)$	$\sigma_0$ (Km s <sup>-1</sup> )	Referencia
SL2SJ222217+001202	SL2S	0.436	1.36	1.44 ±0.15	221 ±22	[63]
SDSSJ0029+254401.7	BELLS	0.5869	2.4504	1.34	241 ±45	[104]
SDSSJ0201+322829.6	BELLS	0.3957	2.8209	1.70	256 ±20	[104]
SDSSJ0237-064112.9	BELLS	0.4859	2.2491	0.65	290 ±89	[104]
SDSSJ0742+334148.9	BELLS	0.4936	2.3633	1.22	218 ±28	[104]
SDSSJ0755+344539.5	BELLS	0.7224	2.6347	2.05	272 ±52	[104]
SDSSJ0856+201040.5	BELLS	0.5074	2.2335	0.98	334 ±54	[104]
SDSSJ0918+451856.7	BELLS	0.5238	2.3440	0.77	119 ±61	[104]
SDSSJ0918+510452.5	BELLS	0.5811	2.4030	1.60	298 ±49	[104]
SDSSJ1110+280838.4	BELLS	0.6073	2.3999	0.98	191 ±39	[104]
SDSSJ1116+091503.0	BELLS	0.5501	2.4536	1.03	274 ±55	[104]
SDSSJ1141+221628.8	BELLS	0.5858	2.7624	1.27	285 ±44	[104]
SDSSJ1201+474323.2	BELLS	0.5628	2.1258	1.18	239 ±43	[104]
SDSSJ1226+545739.0	BELLS	0.4980	2.7322	1.37	248 ±26	[104]
SDSSJ2228+120503.9	BELLS	0.5305	2.8324	1.28	255 ±50	[104]
SDSSJ2342-012032.5	BELLS	0.5270	2.2649	1.11	274 ±43	[104]
SL2SJ020457-110309	SL2S	0.609	1.89	0.54 ±0.07	250 ±30	[183]
SL2SJ020524-093023	SL2S	0.557	1.33	0.76 ±0.09	276 ±37	[183]
SL2SJ021801-080247	SL2S	0.884	2.06	1.00 ±0.03	246 ±48	[183]
SL2SJ023307-043838	SL2S	0.671	1.87	1.77 ±0.06	204 ±21	[183]
SDSSJ0143-1006	SLACS	0.2210	1.1046	1.23	203 ±17	[62]
SDSSJ0159-0006	SLACS	0.1584	0.7477	0.92	216 ±18	[62]
SDSSJ0324+0045	SLACS	0.3210	0.9199	0.55	183 ±19	[62]
SDSSJ0324-0110	SLACS	0.4456	0.6239	0.63	310 ±38	[62]
SDSSJ0753+3416	SLACS	0.1371	0.9628	1.23	208 ±12	[62]
SDSSJ0754+1927	SLACS	0.1534	0.7401	1.04	193 ±16	[62]
SDSSJ0757+1956	SLACS	0.1206	0.8326	1.62	206 ±11	[62]
SDSSJ0826+5630	SLACS	0.1318	1.2907	1.01	163 ±8	[62]
SDSSJ0847+2348	SLACS	0.1551	0.5327	0.96	199 ±16	[62]
SDSSJ0851+0505	SLACS	0.1276	0.6371	0.91	175 ±11	[62]
SDSSJ0920+3028	SLACS	0.2881	0.3918	0.70	297 ±17	[62]
SDSSJ0955+3014	SLACS	0.3214	0.4671	0.54	271 ±33	[62]
SDSSJ0956+5539	SLACS	0.1959	0.8483	1.17	188 ±11	[62]
SDSSJ1010+3124	SLACS	0.1668	0.4245	1.14	221 ±11	[62]
SDSSJ1031+3026	SLACS	0.1671	0.7469	0.88	197 ±13	[62]
SDSSJ1040+3626	SLACS	0.1225	0.2846	0.59	186 ±10	[62]
SDSSJ1041+0112	SLACS	0.1006	0.2172	0.60	200 ±7	[62]
SDSSJ1048+1313	SLACS	0.1330	0.6679	1.18	195 ±10	[62]
SDSSJ1051+4439	SLACS	0.1634	0.5380	0.99	216 ±16	[62]
SDSSJ1056+4141	SLACS	0.1343	0.8318	0.72	157 ±10	[62]
SDSSJ1101+1523	SLACS	0.1780	0.5169	1.18	270 ±15	[62]
SDSSJ1116+0729	SLACS	0.1697	0.6860	0.82	190 ±11	[62]
SDSSJ1127+2312	SLACS	0.1303	0.3610	1.25	230 ±9	[62]
SDSSJ1137+1818	SLACS	0.1241	0.4627	1.29	222 ±8	[62]
SDSSJ1142+2509	SLACS	0.1640	0.6595	0.79	159 ±10	[62]
SDSSJ1144+0436	SLACS	0.1036	0.2551	0.76	207 ±14	[62]

Nombre del sistema	Colaboración	$z_l$	$z_s$	$\theta_E(\prime)$	$\sigma_0$ (Km s <sup>-1</sup> )	Referencia
SDSSJ12+29	SLACS	0.09	0.59	1.35	232 ±7	[62]
SDSSJ13+08	SLACS	0.09	0.53	1.00	178 ±8	[62]
SDSSJ13+17	SLACS	0.20	0.37	1.01	250 ±12	[62]
SDSSJ14+33	SLACS	0.06	0.77	1.02	190 ±6	[62]
SDSSJ14+61	SLACS	0.16	0.65	1.00	180 ±15	[62]
SDSSJ14+28	SLACS	0.09	0.41	1.53	230 ±6	[62]
SDSSJ15+36	SLACS	0.14	0.73	1.17	194 ±11	[62]
SDSSJ15+22	SLACS	0.26	0.39	0.78	285 ±16	[62]
SDSSJ15+20	SLACS	0.13	0.35	1.01	243 ±9	[62]
SDSSJ15+30	SLACS	0.16	0.56	0.84	194 ±15	[62]
SDSSJ16+21	SLACS	0.20	0.48	0.57	197 ±16	[62]
SDSSJ16+14	SLACS	0.12	0.58	1.39	231 ±9	[62]
SDSSJ23-00	SLACS	0.29	1.00	1.14	184 ±13	[62]
SDSSJ23+01	SLACS	0.18	0.27	0.59	245 ±15	[62]
Q0142-100	CASTLES	0.491	2.719	1.12	246 <sup>+17</sup> <sub>-47</sub>	[181] [184]
MG0414+053	CASTLES	0.958	2.639	1.19	247 <sup>+10</sup> <sub>-13</sub>	[181] [184]
B0712+472	CASTLES	0.406	1.339	0.71	164±7	[181] [184]
HS0818+1227	CASTLES	0.390	3.115	1.42	246 <sup>+17</sup> <sub>-42</sub>	[181] [184]
B1030+074	CASTLES	0.599	1.535	0.78	257 <sup>+10</sup> <sub>-18</sub>	[181] [184]
HE1104-1805	CASTLES	0.729	2.303	1.595	303 <sup>+11</sup> <sub>-10</sub>	[181] [184]
B1608+656	CASTLES	0.630	1.394	1.135	267 <sup>+6</sup> <sub>-15</sub>	[181] [184]
HE2149-2745	CASTLES	0.603	2.033	0.85	191 <sup>+7</sup> <sub>-9</sub>	[181] [184]
MG1549+304	CASTLES	0.111	1.170	1.15	227±18	[181] [185]



Tabla A.5: 32 sistemas lentes gravitacionales con  $D^{\text{obs}} > 1$ .

Nombre del sistema	$D^{\text{obs}}$	$\theta_E(\prime)$	Marca
SDSSJ1318-0313	1.207548476671243	1.58	
SDSSJ0801+4727	1.7690928325399644	0.49	†
SDSSJ1234-0241	1.234704134938535	0.53	†
SDSSJ1352+3216	2.4345927827771154	1.82	†
SDSSJ0008-0004	1.079816763956848	1.16	†
SDSSJ0252+0039	1.3407639908720494	1.04	†
SDSSJ0405-0455	1.0835693599307283	0.8	†
SDSSJ1100+5329	1.5071867558989571	1.52	
SDSSJ1218+0830	1.0483021267443504	1.45	
SDSSJ2238-0754	1.123259330363861	1.27	†
SDSSJ2341+0000	1.1652751780813544	1.44	†
SL2SJ022511-045433	1.1145194380761674	1.76	
SL2SJ090407-005952	1.4495478313743804	1.40	
SL2SJ220329+020518	1.4903288161448882	1.95	†
SL2SJ221326-000946	1.362770060019399	1.07	†
SL2SJ222012+010606	4.643580764983071	2.16	†
SL2SJ222217+001202	1.022314778682008	1.44	†
SDSSJ091807.86+451856.7	1.8853999737796163	0.77	†
SL2SJ023307-043838	1.4747541461571618	1.77	
SDSSJ0143-1006	1.0349508604157698	1.23	
SDSSJ0757+1956	1.323692987529667	1.62	†
SDSSJ0826+5630	1.318113655499309	1.01	†
SDSSJ0851+0505	1.0303196656712754	0.91	†
SDSSJ0956+5539	1.147828113281079	1.17	†
SDSSJ1048+1313	1.0760178574880814	1.18	
SDSSJ1056+4141	1.0128377643232576	0.72	†
SDSSJ1142+2509	1.0835264989141573	0.79	†
SDSSJ1301+0834	1.094376326151474	1.0	†
SDSSJ1430+6104	1.0701919604254106	1.0	†
SDSSJ1433+2835	1.0028649501362656	1.53	†
SDSSJ1541+3642	1.0779263693220975	1.17	†
SDSSJ2309-0039	1.1675511061635446	1.14	



# Bibliografía

- [1] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018.
- [2] Brian P. Schmidt, Nicholas B. Suntzeff, M. M. Phillips, Robert A. Schommer, Alejandro Clocchiatti, et al. The high- $z$  supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type ia supernovae. *The Astrophysical Journal*, 507(1):46, 1998.
- [3] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae. , 517(2):565–586, June 1999.
- [4] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [5] Ya. B. Zeldovich. The cosmological constant and the theory of elementary particles. *Soviet Physics Uspekhi*, 11, 1968.
- [6] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61, 1989.

- [7] B. Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. , 37:3406–3427, June 1988.
- [8] C. Wetterich. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, 302(4):668 – 696, 1988.
- [9] Takeshi Chiba, Takahiro Okabe, and Masahide Yamaguchi. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev.*, D62:023511, 2000.
- [10] R. R. Caldwell. A Phantom menace? *Phys. Lett.*, B545:23–29, 2002.
- [11] S. Chaplygin. On gas jet. *Sci. Mem. Mosc. Univ. Math. Phys*, 21(1), 1904.
- [12] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An Alternative to quintessence. *Phys. Lett.*, B511:265–268, 2001.
- [13] Neven Bilic, Gary B. Tupper, and Raoul D. Viollier. Unification of dark matter and dark energy: The Inhomogeneous Chaplygin gas. *Phys. Lett.*, B535:17–21, 2002.
- [14] Michel Chevallier and David Polarski. Accelerating universes with scaling dark matter. *Int. J. Mod. Phys.*, D10:213–224, 2001.
- [15] Eric V. Linder. Cosmic shear with next generation redshift surveys as a cosmological probe. *Phys. Rev.*, D68:083503, 2003.
- [16] H. K. Jassal, J. S. Bagla, and T. Padmanabhan. WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 356:L11–L16, 2005.
- [17] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.
- [18] M. Li, X.-D. Li, S. Wang, and Y. Wang. Dark Energy. *Communications in Theoretical Physics*, 56:525–604, September 2011.

- [19] Miguel Angel García-Aspeitia and Tonatiuh Matos. The Universe Dynamics from Topological Considerations. *Gen. Rel. Grav.*, 43:315–329, 2011.
- [20] M. A. García-Aspeitia, J. Magaña, A. Hernández-Almada, and V. Motta. Probing dark energy with braneworld cosmology in the light of recent cosmological data. *International Journal of Modern Physics D*, 27:1850006, 2018.
- [21] H. A. Buchdahl. Non-linear lagrangians and cosmological theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 150(1):1–8, 1970.
- [22] A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91(1):99 – 102, 1980.
- [23] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(R) Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, 2010.
- [24] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, Nov 1961.
- [25] Andrei Galiautdinov and Sergei M. Kopeikin. Post-Newtonian celestial mechanics in scalar-tensor cosmology. *Phys. Rev.*, D94(4):044015, 2016.
- [26] David Langlois, Ryo Saito, Daisuke Yamauchi, and Karim Noui. Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817. *Phys. Rev.*, D97(6):061501, 2018.
- [27] Alejandro Perez and Daniel Sudarsky. Dark energy from quantum gravity discreteness. 2017.
- [28] Miguel A. García-Aspeitia, C. Martínez-Robles, A. Hernández-Almada, Juan Magaña, and V. Motta. Cosmic acceleration in unimodular gravity. , 99(12):123525, June 2019.
- [29] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485:208–214, 2000.

- [30] Miguel A. Garcia-Aspeitia, Juan Magaña, Alberto Hernandez-Almada, and V. Motta. Probing dark energy with braneworld cosmology in the light of recent cosmological data. *IJMPD*, 27:18560006, 2018.
- [31] J. M. Hoff da Silva. Two-branes with variable tension model and the effective Newtonian constant. *Phys. Rev.*, D83:066001, 2011.
- [32] Eduardo Guendelman, Alexander Kaganovich, Emil Nissimov, and Svetlana Pacheva. String and brane tensions as dynamical degrees of freedom. In *Proceedings, 1st Adv. Res. Workshop on Grav., Astro.*
- [33] Laszlo A. Gergely. Eotvos branes. *Phys. Rev.*, D79:086007, 2009.
- [34] Rodrigo Aros and Milko Estrada. Study of branes with variable tension. *Commun. Theor. Phys.*, 68(5):595, 2017.
- [35] D. Bazeia, J. M. Hoff da Silva, and Roldao da Rocha. Regular Bulk Solutions and Black Strings from Dynamical Braneworlds with Variable Tension. *Phys. Rev.*, D90(4):047902, 2014.
- [36] R. Casadio, J. Ovalle, and Roldão da Rocha. Black Strings from Minimal Geometric Deformation in a Variable Tension Brane-World. *Class. Quant. Grav.*, 31:045016, 2014.
- [37] Roldao da Rocha and J. M. Hoff da Silva. Black string corrections in variable tension braneworld scenarios. *Phys. Rev.*, D85:046009, 2012.
- [38] M. C. B. Abdalla, J. M. Hoff da Silva, and R. da Rocha. Notes on the two-brane model with variable tension. *Phys. Rev. D*, 80:046003, Aug 2009.
- [39] R. Casadio and R. da Rocha. Stability of the graviton Bose-Einstein condensate in the brane-world. *Physics Letters B*, 763:434–438, December 2016.

- [40] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. , 594:A13, September 2016.
- [41] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, S. F. Anderson, J. Annis, N. Bahcall, J. Brinkmann, S. Burles, F. J. Castander, A. Connolly, I. Csabai, M. Doi, M. Fukugita, J. A. Frieman, K. Glazebrook, J. E. Gunn, J. S. Hendry, G. Hennessy, Z. Ivezić, S. Kent, G. R. Knapp, H. Lin, Y.-S. Loh, R. H. Lupton, B. Margon, T. A. McKay, A. Meiksin, J. A. Munn, A. Pope, M. W. Richmond, D. Schlegel, D. P. Schneider, K. Shimasaku, C. Stoughton, M. A. Strauss, M. SubbaRao, A. S. Szalay, I. Szapudi, D. L. Tucker, B. Yanny, and D. G. York. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. , 633:560–574, November 2005.
- [42] C. Blake, S. Brough, M. Colless, C. Contreras, W. Couch, S. Croom, D. Croton, T. M. Davis, M. J. Drinkwater, K. Forster, D. Gilbank, M. Gladders, K. Glazebrook, B. Jelliffe, R. J. Jurek, I.-h. Li, B. Madore, D. C. Martin, K. Pimbblet, G. B. Poole, M. Pracy, R. Sharp, E. Wisnioski, D. Woods, T. K. Wyder, and H. K. C. Yee. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$ . , 425:405–414, September 2012.
- [43] S. Alam, M. Ata, S. Bailey, F. Beutler, D. Bizyaev, J. A. Blazek, A. S. Bolton, J. R. Brownstein, A. Burden, C.-H. Chuang, J. Comparat, A. J. Cuesta, K. S. Dawson, D. J. Eisenstein, S. Escoffier, H. Gil-Marín, J. N. Grieb, N. Hand, S. Ho, K. Kinemuchi, D. Kirkby, F. Kitaura, E. Malanushenko, V. Malanushenko, C. Maraston, C. K. McBride, R. C. Nichol, M. D. Olmstead, D. Oravetz, N. Padmanabhan, N. Palanque-Delabrouille, K. Pan, M. Pellejero-Ibanez, W. J. Percival, P. Petitjean, F. Prada, A. M. Price-Whelan, B. A. Reid, S. A. Rodríguez-Torres, N. A. Roe, A. J. Ross, N. P. Ross, G. Rossi, J. A. Rubiño-Martín, S. Saito, S. Salazar-Albornoz, L. Samushia, A. G. Sánchez, S. Satpathy, D. J. Schlegel, D. P. Schneider, C. G.

- Scóccola, H.-J. Seo, E. S. Sheldon, A. Simmons, A. Slosar, M. A. Strauss, M. E. C. Swanson, D. Thomas, J. L. Tinker, R. Tojeiro, M. V. Magaña, J. A. Vazquez, L. Verde, D. A. Wake, Y. Wang, D. H. Weinberg, M. White, W. M. Wood-Vasey, C. Yèche, I. Zehavi, Z. Zhai, and G.-B. Zhao. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. , 470:2617–2652, September 2017.
- [44] J. E. Bautista, N. G. Busca, J. Guy, J. Rich, M. Blomqvist, H. du Mas des Bourboux, M. M. Pieri, A. Font-Ribera, S. Bailey, T. Delubac, D. Kirkby, J.-M. Le Goff, D. Margala, A. Slosar, J. A. Vazquez, J. R. Brownstein, K. S. Dawson, D. J. Eisenstein, J. Miralda-Escudé, P. Noterdaeme, N. Palanque-Delabrouille, I. Pâris, P. Petitjean, N. P. Ross, D. P. Schneider, D. H. Weinberg, and C. Yèche. Measurement of baryon acoustic oscillation correlations at  $z = 2.3$  with SDSS DR12 Ly $\alpha$ -Forests. , 603:A12, June 2017.
- [45] D. M. Scolnic et al. The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample. *Astrophys. J.*, 859(2):101, 2018.
- [46] Raul Jimenez and Abraham Loeb. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *Astrophys. J.*, 573:37–42, 2002.
- [47] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, Claudia Maraston, Licia Verde, Daniel Thomas, Annalisa Citro, Rita Tojeiro, and David Wilkinson. A 6% measurement of the Hubble parameter at  $z \sim 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 2016(5):014, May 2016.
- [48] Juan Magaña, Mario H. Amante, Miguel A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta. The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 476(1):1036–1049, 2018.



- [49] Toshifumi Futamase and Shijun Yoshida. Possible measurement of quintessence and density parameter using strong gravitational lensing events. *Prog. Theor. Phys.*, 105:887–891, 2001.
- [50] Marek Biesiada. Strong lensing systems as a probe of dark energy in the universe. *Phys. Rev.*, D73:023006, 2006.
- [51] C. Grillo, M. Lombardi, and G. Bertin. Cosmological parameters from strong gravitational lensing and stellar dynamics in elliptical galaxies. , 477:397–406, January 2008.
- [52] E. Jullo, P. Natarajan, J. P. Kneib, A. D’Aloisio, M. Limousin, J. Richard, and C. Schimd. Cosmological constraints from strong gravitational lensing in clusters of galaxies. *Science*, 329:924–927, Aug 2010.
- [53] Juan Magaña, V. Motta, Víctor H. Cárdenas, T. Verdugo, and Eric Jullo. A Magnified Glance into the Dark Sector: Probing Cosmological Models with Strong Lensing in A1689. , 813(1):69, Nov 2015.
- [54] Juan Magaña, Ana Acebrón, Verónica Motta, Tomás Verdugo, Eric Jullo, and Marceau Limousin. Strong Lensing Modeling in Galaxy Clusters as a Promising Method to Test Cosmography. I. Parametric Dark Energy Models. , 865(2):122, Oct 2018.
- [55] M. Biesiada, A. Piórkowska, and B. Malec. Cosmic equation of state from strong gravitational lensing systems. , 406:1055–1059, August 2010.
- [56] S. Cao, Y. Pan, M. Biesiada, W. Godlowski, and Z.-H. Zhu. Constraints on cosmological models from strong gravitational lensing systems. , 3:016, March 2012.
- [57] Shuo Cao, Marek Biesiada, Rapha Gavazzi, Aleksandra Piórkowska, and Zong-Hong Zhu. Cosmology With Strong-lensing Systems. *Astrophys. J.*, 806:185, 2015.
- [58] Manoj K. Yennapureddy and Fulvio Melia. Cosmological Tests With Strong Gravitational Lenses using Gaussian Processes. *Eur. Phys. J.*, C78(3):258, 2018.

- [59] Fulvio Melia, Jun-Jie Wei, and Xue-Feng Wu. A Comparison of Cosmological Models Using Strong Gravitational Lensing Galaxies. *Astron. J.*, 149:2, 2015.
- [60] J.-Z. Qi, S. Cao, S. Zhang, M. Biesiada, Y. Wu, and Z.-H. Zhu. A revised test of cosmic curvature at high redshifts: the distance sum rule. *ArXiv e-prints*, March 2018.
- [61] Kyle Leaf and Fulvio Melia. Model Selection with Strong-lensing Systems. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 478(4):5104–5111, 2018.
- [62] Y. Shu, J. R. Brownstein, A. S. Bolton, L. V. E. Koopmans, T. Treu, A. D. Montero-Dorta, M. W. Auger, O. Czoske, R. Gavazzi, P. J. Marshall, and L. A. Moustakas. The Sloan Lens ACS Survey. XIII. Discovery of 40 New Galaxy-scale Strong Lenses. , 851:48, December 2017.
- [63] Alessandro Sonnenfeld, Tommaso Treu, Raphaël Gavazzi, Sherry H. Suyu, Philip J. Marshall, Matthew W. Auger, and Carlo Nipoti. The SL2S Galaxy-scale Lens Sample. IV. The dependence of the total mass density profile of early-type galaxies on redshift, stellar mass, and size. *Astrophys. J.*, 777:98, 2013.
- [64] Yun Chen, Ran Li, and Yiping Shu. Assessing the effect of lens mass model in cosmological application with updated galaxy-scale strong gravitational lensing sample. 2018.
- [65] A. S. Bolton, S. Burles, L. V. E. Koopmans, T. Treu, and L. A. Moustakas. The Sloan Lens ACS Survey. I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Massive Early-Type Lens Galaxies. , 638:703–724, February 2006.
- [66] J. R. Brownstein, A. S. Bolton, D. J. Schlegel, D. J. Eisenstein, C. S. Kochanek, N. Connolly, C. Maraston, P. Pandey, S. Seitz, D. A. Wake, W. M. Wood-Vasey, J. Brinkmann, D. P. Schneider, and B. A. Weaver. The BOSS Emission-Line Lens Survey (BELLS). I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Lens Galaxies at Redshift  $\sim 0.5$ . , 744:41, January 2012.

- [67] J. A. Muñoz, E. E. Falco, C. S. Kochanek, J. Lehár, B. A. McLeod, C. D. Impey, H.-W. Rix, and C. Y. Peng. The Castles Project. , 263:51–54, June 1998.
- [68] T. Treu and L. V. E. Koopmans. Massive Dark Matter Halos and Evolution of Early-Type Galaxies to  $z \sim 1$ . , 611:739–760, August 2004.
- [69] R. A. Cabanac, C. Alard, M. Dantel-Fort, B. Fort, R. Gavazzi, P. Gomez, J. P. Kneib, O. Le Fèvre, Y. Mellier, R. Pello, G. Soucail, J. F. Sygnet, and D. Valls-Gabaud. The CFHTLS strong lensing legacy survey. I. Survey overview and T0002 release sample. , 461:813–821, January 2007.
- [70] T. Treu, A. Agnello, M. A. Baumer, S. Birrer, E. J. Buckley-Geer, F. Courbin, Y. J. Kim, H. Lin, P. J. Marshall, B. Nord, P. L. Schechter, P. R. Sivakumar, L. E. Abramson, T. Anghita, Y. Apostolovski, M. W. Auger, J. H. H. Chan, G. C. F. Chen, T. E. Collett, C. D. Fassnacht, J.-W. Hsueh, C. Lemon, R. G. McMahon, V. Motta, F. Ostrovski, K. Rojas, C. E. Rusu, P. Williams, J. Frieman, G. Meylan, S. H. Suyu, T. M. C. Abbott, F. B. Abdalla, S. Allam, J. Annis, S. Avila, M. Banerji, D. Brooks, A. Carnero Rosell, M. Carrasco Kind, J. Carretero, F. J. Castander, C. B. D’Andrea, L. N. da Costa, J. De Vicente, P. Doel, T. F. Eifler, B. Flaugher, P. Fosalba, J. García-Bellido, D. A. Goldstein, D. Gruen, R. A. Gruendl, G. Gutierrez, W. G. Hartley, D. Hollowood, K. Honscheid, D. J. James, K. Kuehn, N. Kuropatkin, M. Lima, M. A. G. Maia, P. Martini, F. Menanteau, R. Miquel, A. A. Plazas, A. K. Romer, E. Sanchez, V. Scarpine, R. Schindler, M. Schubnell, I. Sevilla-Noarbe, M. Smith, R. C. Smith, M. Soares-Santos, F. Sobreira, E. Suchyta, M. E. C. Swanson, G. Tarle, D. Thomas, D. L. Tucker, and A. R. Walker. The STRong lensing Insights into the Dark Energy Survey (STRIDES) 2016 follow-up campaign - I. Overview and classification of candidates selected by two techniques. , 481:1041–1054, November 2018.
- [71] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568:A22, 2014.

- [72] M. Moresco et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to  $z \sim 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *JCAP*, 1208:006, 2012.
- [73] Cong Zhang, Han Zhang, Shuo Yuan, Tong-Jie Zhang, and Yan-Chun Sun. Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven. *Res. Astron. Astrophys.*, 14(10):1221–1233, 2014.
- [74] M. Moresco. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at  $z \sim 2$ . , 450:L16–L20, June 2015.
- [75] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, Claudia Maraston, Licia Verde, Daniel Thomas, Annalisa Citro, Rita Tojeiro, and David Wilkinson. A 6% measurement of the Hubble parameter at  $z \sim 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *JCAP*, 1605(05):014, 2016.
- [76] Daniel Stern, Raul Jimenez, Licia Verde, Marc Kamionkowski, and S. Adam Stanford. Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I:  $H(z)$  Measurements. *JCAP*, 1002:008, 2010.
- [77] F. Melia and M. López-Corredoira. Alcock-Paczyński test with model-independent BAO data. *International Journal of Modern Physics D*, 26:1750055–265, 2017.
- [78] Lauren Anderson et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring  $D_A$  and  $H$  at  $z = 0.57$  from the baryon acoustic peak in the Data Release 9 spectroscopic Galaxy sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 439(1):83–101, 2014.
- [79] Enrique Gaztanaga, Anna Cabre, and Lam Hui. Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of  $H(z)$ . *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 399:1663–1680, 2009.

- [80] Omer Farooq, Foram Ranjeet Madiyar, Sara Crandall, and Bharat Ratra. Hubble Parameter Measurement Constraints on the Redshift of the Deceleration–acceleration Transition, Dynamical Dark Energy, and Space Curvature. *Astrophys. J.*, 835(1):26, 2017.
- [81] Ming-Jian Zhang and Jun-Qing Xia. Test of the cosmic evolution using Gaussian processes. *JCAP*, 1612(12):005, 2016.
- [82] H. Yu and F. Y. Wang. New model-independent method to test the curvature of the universe. *Astrophys. J.*, 828(2):85, 2016.
- [83] Adam G. Riess et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 826(1):56, 2016.
- [84] K. Leaf and F. Melia. Analyzing  $H(z)$  Data using Two-point Diagnostics. *ArXiv e-prints*, June 2017.
- [85] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.
- [86] C. L. Bennett et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 208:20, 2013.
- [87] J. Neveu, V. Ruhlmann-Kleider, P. Astier, M. Besançon, J. Guy, A. Möller, and E. Babichev. Constraining the  $\Lambda$ CDM and Galileon models with recent cosmological data. , 600:A40, March 2017.
- [88] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. F. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, N. Connolly, K. S. Dawson, A. Dey, M. Doi, M. Donahue, S. Deustua, P. Eisenhardt, E. Ellingson, L. Faccioli, V. Fadeyev, H. K. Fakhouri, A. S. Fruchter, D. G. Gilbank, M. D. Gladders, G. Goldhaber, A. H. Gonzalez, A. Goobar, A. Gude, T. Hattori, H. Hoekstra, E. Hsiao, X. Huang, Y. Ihara, M. J. Jee, D. Johnston, N. Kashikawa,

- B. Koester, K. Konishi, M. Kowalski, E. V. Linder, L. Lubin, J. Melbourne, J. Meyers, T. Morokuma, F. Munshi, C. Mullis, T. Oda, N. Panagia, S. Perlmutter, M. Postman, T. Pritchard, J. Rhodes, P. Ripoche, P. Rosati, D. J. Schlegel, A. Spadafora, S. A. Stanford, V. Stanishchev, D. Stern, M. Strovink, N. Takanashi, K. Tokita, M. Wagner, L. Wang, N. Yasuda, H. K. C. Yee, and T. Supernova Cosmology Project. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above  $z = 1$  and Building an Early-type-hosted Supernova Sample. , 746:85, February 2012.
- [89] Mohan Ganeshalingam, Weidong Li, and Alexei V. Filippenko. Constraints on dark energy with the LOSS SN Ia sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 433:2240, 2013.
- [90] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. G. Riess, and et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, May 2018.
- [91] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco. *Gravitational Lenses*. 1992.
- [92] C. S. Kochanek. Evidence for dark matter in MG 1654+134. , 445:559–577, June 1995.
- [93] J. A. Muñoz, C. S. Kochanek, and C. R. Keeton. Cusped Mass Models of Gravitational Lenses. , 558:657–665, September 2001.
- [94] D. Rusin, M. Norbury, A. D. Biggs, D. R. Marlow, N. J. Jackson, I. W. A. Browne, P. N. Wilkinson, and S. T. Myers. High-resolution observations and mass modelling of the CLASS gravitational lens B1152+199. , 330:205–211, February 2002.
- [95] Tommaso Treu and Leon Koopmans. The internal structure and formation of early-type galaxies: the gravitational-lens system mg2016+112 at  $z=1.004$ . *Astrophys. J.*, 575:87, 2002.
- [96] L. V. E. Koopmans and T. Treu. The Structure and Dynamics of Luminous and Dark Matter in the Early-Type Lens Galaxy of 0047-281 at  $z = 0.485$ . , 583:606–615, February 2003.

- [97] D. Rusin, C. S. Kochanek, and C. R. Keeton. Self-similar Models for the Mass Profiles of Early-Type Lens Galaxies. , 595:29–42, September 2003.
- [98] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018.
- [99] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics Beyond LambdaCDM. *arXiv e-prints*, March 2019.
- [100] Eran O. Ofek, Hans-Walter Rix, and Dan Maoz. The redshift distribution of gravitational lenses revisited: Constraints on galaxy mass evolution. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 343:639, 2003.
- [101] T. Treu, L. V. Koopmans, A. S. Bolton, S. Burles, and L. A. Moustakas. The Sloan Lens ACS Survey. II. Stellar Populations and Internal Structure of Early-Type Lens Galaxies. , 640:662–672, April 2006.
- [102] Adam S. Bolton, Scott Burles, Leon V. E. Koopmans, Tommaso Treu, Raphael Gavazzi, Leonidas A. Moustakas, Randall Wayth, and David J. Schlegel. The Sloan Lens ACS Survey. V. The Full ACS Strong-Lens Sample. *Astrophys. J.*, 682:964–984, 2008.
- [103] M. W. Auger, T. Treu, A. S. Bolton, R. Gavazzi, L. V. E. Koopmans, P. J. Marshall, K. Bundy, and L. A. Moustakas. The Sloan Lens ACS Survey. IX. Colors, Lensing, and Stellar Masses of Early-Type Galaxies. , 705:1099–1115, November 2009.
- [104] Yiping Shu, Adam S. Bolton, Shude Mao, Christopher S. Kochanek, Ismael Pérez-Fournon, Masamune Oguri, Antonio D. Montero-Dorta, Matthew A. Cornachione, Rui Marques-Chaves, Zheng Zheng, Joel R. Brownstein, and Brice Ménard. The BOSS Emission-line Lens Survey. IV. Smooth Lens Models for the BELLS GALLERY Sample. , 833(2):264, December 2016.

- [105] A. Agnello, T. Treu, F. Ostrovski, P. L. Schechter, E. J. Buckley-Geer, H. Lin, M. W. Auger, F. Courbin, C. D. Fassnacht, J. Frieman, N. Kuropatkin, P. J. Marshall, R. G. McMahon, G. Meylan, A. More, S. H. Suyu, C. E. Rusu, D. Finley, T. Abbott, F. B. Abdalla, S. Allam, J. Annis, M. Banerji, A. Benoit-Lévy, E. Bertin, D. Brooks, D. L. Burke, A. Carnero Rosell, M. Carrasco Kind, J. Carretero, C. E. Cunha, C. B. D’Andrea, L. N. da Costa, S. Desai, H. T. Diehl, J. P. Dietrich, P. Doel, T. F. Eifler, J. Estrada, A. Fausti Neto, B. Flaugher, P. Fosalba, D. W. Gerdes, D. Gruen, G. Gutierrez, K. Honscheid, D. J. James, K. Kuehn, O. Lahav, M. Lima, M. A. G. Maia, M. March, J. L. Marshall, P. Martini, P. Melchior, C. J. Miller, R. Miquel, R. C. Nichol, R. Ogando, A. A. Plazas, K. Reil, A. K. Romer, A. Roodman, M. Sako, E. Sanchez, B. Santiago, V. Scarpine, M. Schubnell, I. Sevilla-Noarbe, R. C. Smith, M. Soares-Santos, F. Sobreira, E. Suchyta, M. E. C. Swanson, G. Tarle, J. Thaler, D. Tucker, A. R. Walker, R. H. Wechsler, and Y. Zhang. Discovery of two gravitationally lensed quasars in the Dark Energy Survey. , 454:1260–1265, December 2015.
- [106] L. V. E. Koopmans and T. Treu. The structure and dynamics of luminous and dark matter in the early-type lens galaxy of 0047-281 at  $z=0.485$ . *Astrophys. J.*, 583:606–615, 2003.
- [107] I. Jorgensen, M. Franx, and P. Kjaergaard. Multicolour CCD surface photometry for E and S0 galaxies in 10 clusters. , 273:1097–1128, April 1995.
- [108] I. Jorgensen, M. Franx, and P. Kjaergaard. Spectroscopy for E and S0 galaxies in nine clusters. , 276:1341–1364, October 1995.
- [109] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN; The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, USA, 2nd edition, 1993.
- [110] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The mcmc hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306, 2013.



- [111] Jonathan Goodman and Jonathan Weare. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1):65–80, January 2010.
- [112] H. Akaike. A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:716–723, 1974.
- [113] G. Schwarz. Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics*, 6:461–464, July 1978.
- [114] Ke Shi, Yongfeng Huang, and Tan Lu. A comprehensive comparison of cosmological models from latest observational data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 426:2452–2462, 2012.
- [115] Y. Wang. Figure of merit for dark energy constraints from current observational data. , 77(12):123525, June 2008.
- [116] A. Albrecht, G. Bernstein, R. Cahn, W. L. Freedman, J. Hewitt, W. Hu, J. Huth, M. Kamionkowski, E. W. Kolb, L. Knox, J. C. Mather, S. Staggs, and N. B. Suntzeff. Report of the Dark Energy Task Force. *ArXiv Astrophysics e-prints*, September 2006.
- [117] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [118] D.N. Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology. *Astrophys. J. Suppl.*, 170:377, 2007.
- [119] James M. Bardeen. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev. D*, 22:1882–1905, 1980.
- [120] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, E. L. Wright, J. Aymon, N. W. Boggess, E. S. Cheng, G. de Amici, S. Gulkis, M. G. Hauser, G. Hinshaw, P. D. Jackson, M. Janssen, E. Kaita, T. Kelsall, P. Keegstra, C. Lineweaver, K. Loewenstein, P. Lubin, J. Mather, S. S. Meyer, S. H. Moseley, T. Murdock, L. Rokke, R. F. Silverberg, L. Tenorio, R. Weiss, and D. T. Wilkinson. Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps. , 396:L1, September 1992.

- [121] Eiichiro Komatsu. The Pursuit of Non-Gaussian Fluctuations in the Cosmic Microwave Background. *arXiv e-prints*, pages astro-ph/0206039, June 2002.
- [122] P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, and et al. Planck2013 results. xv. cmb power spectra and likelihood. *Astronomy Astrophysics*, 571:A15, Oct 2014.
- [123] Yun Wang and Shuang Wang. Distance priors from Planck and dark energy constraints from current data. , 88(4):043522, August 2013.
- [124] K. Freese and M. Lewis. Cardassian expansion: a model in which the universe is flat, matter dominated, and accelerating. *Physics Letters B*, 540:1–8, July 2002.
- [125] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571:A16, 2014.
- [126] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:18, 2011.
- [127] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, and M. Peloso. A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos. *Physics Letters B*, 534:8–16, May 2002.
- [128] A. Sen and S. Sen. WMAP constraints on the Cardassian model. , 68(2):023513, July 2003.
- [129] S. Sen and A. A. Sen. Observational Constraints on Cardassian Expansion. , 588:1–6, May 2003.
- [130] P. Gondolo and K. Freese. An Accelerating Universe from Dark Matter Interactions with Negative Pressure. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints*, November 2002.
- [131] P. Gondolo and K. Freese. Fluid interpretation of Cardassian expansion. *Phys. Rev. D*, 68(6):063509, September 2003.

- [132] Y. Wang, K. Freese, P. Gondolo, and M. Lewis. Future Type Ia Supernova Data as Tests of Dark Energy from Modified Friedmann Equations. , 594:25–32, September 2003.
- [133] Chao-Jun Feng and Xin-Zhou Li. Cardassian Universe Constrained by Latest Observations. *Phys. Lett.*, B692:152–156, 2010.
- [134] K. Shi, Y. F. Huang, and T. Lu. A comprehensive comparison of cosmological models from the latest observational data. , 426:2452–2462, November 2012.
- [135] Miguel A. Garcia-Aspeitia, A. Hernandez-Almada, Juan Magaña, Mario H. Amante, V. Motta, and C. Martínez-Robles. Brane with variable tension as a possible solution to the problem of the late cosmic acceleration. *Phys. Rev. D*, 97(10):101301, 2018.
- [136] Laszlo A. Gergely. Friedmann branes with variable tension. *Phys. Rev.*, D78:084006, 2008.
- [137] K. C. Wong, K. S. Cheng, and T. Harko. Inflation and late time acceleration in braneworld cosmological models with varying brane tension. *Eur. Phys. J.*, C68:241–253, 2010.
- [138] T. Shiromizu, K. Maeda, and M. Sasaki. The einstein equations on the 3-brane world. *Phys. Rev. D*, 62:024012, Jun 2000.
- [139] R. Maartens. Cosmological dynamics on the brane. *Phys. Rev. D*, 62:084023, Sep 2000.
- [140] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The MCMC Hammer. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 125:306–312, 2013.
- [141] Andrew Gelman and Donald B. Rubin. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statist. Sci.*, 7(4):457–472, 11 1992.
- [142] J. L. Bernal, L. Verde, and A. G. Riess. The trouble with  $H_0$ . , 10:019, October 2016.
- [143] Lixin Xu. Revisiting Cardassian Model and Cosmic Constraint. *Eur. Phys. J.*, C72:2134, 2012.

- [144] Jun-Jie Wei, Qing-Bo Ma, and Xue-Feng Wu. Utilizing the Updated Gamma-Ray Bursts and Type Ia Supernovae to Constrain the Cardassian Expansion Model and Dark Energy. *Adv. Astron.*, 2015:576093, 2015.
- [145] X.-h. Zhai, R.-h. Lin, C.-j. Feng, and X.-z. Li. Action functional of the Cardassian universe. *ArXiv e-prints*, May 2017.
- [146] Z. Li, P. Wu, and H. Yu. Testing Nonstandard Cosmological Models with SNLS3 Supernova Data and Other Cosmological Probes. , 744:176, January 2012.
- [147] J. Magaña, V. Motta, V. H. Cárdenas, T. Verdugo, and E. Jullo. A Magnified Glance into the Dark Sector: Probing Cosmological Models with Strong Lensing in A1689. , 813:69, November 2015.
- [148] Z. Zhai, M. Blanton, A. Slosar, and J. Tinker. An evaluation of cosmological models from expansion and growth of structure measurements. *ArXiv e-prints*, May 2017.
- [149] Adam G. Riess et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. 2016.
- [150] V. H. Cárdenas and M. Rivera. The role of curvature in the slowing down acceleration scenario. *Physics Letters B*, 710:251–255, April 2012.
- [151] V. H. Cárdenas, C. Bernal, and A. Bonilla. Cosmic slowing down of acceleration using  $f_{gas}$ . , 433:3534–3538, August 2013.
- [152] J. Magaña, V. H. Cárdenas, and V. Motta. Cosmic slowing down of acceleration for several dark energy parametrizations. , 10:017, October 2014.
- [153] S. Wang, Y. Hu, M. Li, and N. Li. A Comprehensive Investigation on the Slowing Down of Cosmic Acceleration. , 821:60, April 2016.

- [154] M.-J. Zhang and J.-Q. Xia. Physical condition for the slowing down of cosmic acceleration. *Nuclear Physics B*, 929:438–451, April 2018.
- [155] Juan Magaña, V. Motta, Victor H. Cardenas, and G. Foex. Testing cosmic acceleration for  $w(z)$  parameterizations using  $f_{gas}$  measurements in galaxy clusters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 469(1):47–61, 2017.
- [156] Mario H. Amante, Juan Magaña, V. Motta, Miguel A. García-Aspeitia, and Tomás Verdugo. Testing dark energy models with a new sample of strong-lensing systems. 6 2019.
- [157] Cristiano Germani and Roy Maartens. Stars in the brane world. *Phys. Rev.*, D64:124010, 2001.
- [158] Roy Maartens. Brane world gravity. *Living Rev. Rel.*, 7:7, 2004.
- [159] Gong-Bo Zhao et al. Dynamical dark energy in light of the latest observations. *Nat. Astron.*, 1:627–632, 2017.
- [160] J.-J. Wei, F. Melia, and X.-F. Wu. Impact of a Locally Measured  $H_0$  on the Interpretation of Cosmic-chronometer Data. , 835:270, February 2017.
- [161] Kazuya Koyama. Cosmic microwave radiation anisotropies in brane worlds. *Phys. Rev. Lett.*, 91:221301, 2003.
- [162] H. K. Jassal. Scalar field dark energy perturbations and the integrated Sachs-Wolfe effect. *Phys. Rev. D*, 86(4):043528, August 2012.
- [163] Akira Oka, Shun Saito, Takahiro Nishimichi, Atsushi Taruya, and Kazuhiro Yamamoto. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 439:2515–2530, 2014.

- [164] Y. Wang, G.-B. Zhao, C.-H. Chuang, A. J. Ross, W. J. Percival, H. Gil-Marín, A. J. Cuesta, F.-S. Kitaura, S. Rodríguez-Torres, J. R. Brownstein, D. J. Eisenstein, S. Ho, J.-P. Kneib, M. D. Olmstead, F. Prada, G. Rossi, A. G. Sánchez, S. Salazar-Albornoz, D. Thomas, J. Tinker, R. Tojeiro, M. Vargas-Magaña, and F. Zhu. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: tomographic BAO analysis of DR12 combined sample in configuration space. , 469:3762–3774, August 2017.
- [165] Chia-Hsun Chuang and Yun Wang. Modeling the Anisotropic Two-Point Galaxy Correlation Function on Small Scales and Improved Measurements of  $H(z)$ ,  $D_A(z)$ , and  $\beta(z)$  from the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 435:255–262, 2013.
- [166] Shadab Alam et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Submitted to: Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2016.
- [167] Chris Blake et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: Joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$ . *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 425:405–414, 2012.
- [168] A. L. Ratsimbazafy, S. I. Loubser, S. M. Crawford, C. M. Cress, B. A. Bassett, R. C. Nichol, and P. Väisänen. Age-dating Luminous Red Galaxies observed with the Southern African Large Telescope. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 467:3239–3254, 2017.
- [169] Julian E. Bautista et al. Measurement of BAO correlations at  $z = 2.3$  with SDSS DR12 -Forests. 2017.
- [170] Timothée Delubac, Julian E. Bautista, Nicolás G. Busca, James Rich, David Kirkby, Stephen Bailey, Andreu Font-Ribera, Anže Slosar, Khee-Gan Lee, Matthew M. Pieri, Jean-Christophe Hamilton, Éric Aubourg, Michael Blomqvist, Jo Bovy, Jon Brinkmann, William Carithers, Kyle S. Dawson, Daniel J. Eisenstein, Satya Gontcho A. Gontcho, Jean-Paul Kneib, Jean-

Marc Le Goff, Daniel Margala, Jordi Miralda-Escudé, Adam D. Myers, Robert C. Nichol, Pasquier Noterdaeme, Ross O’Connell, Matthew D. Olmstead, Nathalie Palanque-Delabrouille, Isabelle Pâris, Patrick Petitjean, Nicholas P. Ross, Graziano Rossi, David J. Schlegel, Donald P. Schneider, David H. Weinberg, Christophe Yèche, and Donald G. York. Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS DR11 quasars. , 574:A59, February 2015.

- [171] Andreu Font-Ribera et al. Quasar-Lyman  $\alpha$  Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations. *JCAP*, 1405:027, 2014.
- [172] E. O. Ofek, D. Maoz, H.-W. Rix, C. S. Kochanek, and E. E. Falco. Spectroscopic Redshifts for Seven Lens Galaxies. , 641:70–77, April 2006.
- [173] N. Inada, S. Burles, M. D. Gregg, R. H. Becker, P. L. Schechter, D. J. Eisenstein, M. Oguri, F. J. Castander, P. B. Hall, D. E. Johnston, B. Pindor, G. T. Richards, D. P. Schneider, R. L. White, J. Brinkmann, A. S. Szalay, and D. G. York. SDSS J024634.11-082536.2: A New Gravitationally Lensed Quasar from the Sloan Digital Sky Survey. , 130:1967–1976, November 2005.
- [174] N. D. Morgan, C. S. Kochanek, O. Pevunova, and P. L. Schechter. The Lens Redshift and Galaxy Environment for HE 0435-1223. , 129:2531–2541, June 2005.
- [175] J. Lehar, B. F. Burke, S. R. Conner, E. E. Falco, A. B. Fletcher, M. Irwin, R. G. McMahon, T. W. B. Muslow, and P. L. Schechter. The Gravitationally Lensed Radio Source MG 0751+2716. , 114:48–53, July 1997.
- [176] N. Inada, R. H. Becker, S. Burles, F. J. Castander, D. Eisenstein, P. B. Hall, D. E. Johnston, B. Pindor, G. T. Richards, P. L. Schechter, M. Sekiguchi, R. L. White, J. Brinkmann, J. A. Frieman, S. J. Kleinman, J. Krziesiński, D. C. Long, E. H. Neilsen, Jr., P. R. Newman, A. Nitta, D. P. Schneider, S. Snedden, and D. G. York. SDSS J092455.87+021924.9: An Interesting Gravitationally Lensed Quasar from the Sloan Digital Sky Survey. , 126:666–674, August 2003.

- [177] P. C. Hewett, M. J. Irwin, C. B. Foltz, M. E. Harding, R. T. Corrigan, R. L. Webster, and N. Dinshaw. The close-separation gravitational lens candidate Q1009-0252. , 108:1534–1541, November 1994.
- [178] M. Lacy, M. Gregg, R. H. Becker, R. L. White, E. Glikman, D. Helfand, and J. N. Winn. The Reddest Quasars. II. A Gravitationally Lensed FeLoBAL Quasar. , 123:2925–2935, June 2002.
- [179] B. Pindor, D. J. Eisenstein, N. Inada, M. D. Gregg, R. H. Becker, J. Brinkmann, S. Burles, J. A. Frieman, D. E. Johnston, G. T. Richards, D. P. Schneider, R. Scranton, M. Sekiguchi, E. L. Turner, and D. G. York. SDSS J115517.35+634622.0: A Newly Discovered Gravitationally Lensed Quasar. , 127:1318–1324, March 2004.
- [180] Nicholas D. Morgan, Robert H. Becker, Michael D. Gregg, Paul L. Schechter, and Richard L. White. The gravitational lens candidate fbq 1633+3134. *Astron. J.*, 121:611, 2001.
- [181] D. Rusin, C. S. Kochanek, E. E. Falco, C. R. Keeton, B. A. McLeod, C. D. Impey, J. Lehár, J. A. Muñoz, C. Y. Peng, and H.-W. Rix. The Evolution of a Mass-selected Sample of Early-Type Field Galaxies. , 587:143–159, April 2003.
- [182] Joel R. Brownstein, Adam S. Bolton, David J. Schlegel, Daniel J. Eisenstein, Christopher S. Kochanek, Natalia Connolly, Claudia Maraston, Parul Pandey, Stella Seitz, David A. Wake, W. Michael Wood-Vasey, Jon Brinkmann, Donald P. Schneider, and Benjamin A. Weaver. The boss emission-line lens survey (bells). i. a large spectroscopically selected sample of lens galaxies at redshift  $0.5$ . *The Astrophysical Journal*, 744(1):41, 2012.
- [183] Alessandro Sonnenfeld, Tommaso Treu, Philip J. Marshall, Sherry H. Suyu, Raphael Gavazzi, Matthew Auger, and Carlo Nipoti. The SL2S Galaxy-scale Lens Sample. V. Dark Matter Halos and Stellar IMF of Massive ETGs out to Redshift 0.8. *Astrophys. J.*, 800(2):94, 2015.



- [184] D. Leier, I. Ferreras, P. Saha, and E. E. Falco. Resolving the Baryon-fraction Profile in Lensing Galaxies. , 740:97, October 2011.
- [185] J. Lehar, A. J. Cooke, C. R. Lawrence, A. D. Silber, and G. I. Langston. The Lensing Galaxy in MG1549+3047. , 111:1812, May 1996.



# Publicaciones

A continuación se presenta una lista donde se muestran los artículos que surgieron del trabajo de la presente tesis.

1. **The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data**, *Juan Magaña, Mario H. Amante, Miguel A. Garcia-Aspeitia and V. Motta*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 476 (2018) no.1, 1036-1049.
2. **Brane with variable tension as a possible solution to the problem of the late cosmic acceleration**, *Miguel A. Garcia-Aspeitia, A. Hernandez-Almada, Juan Magaña, Mario H. Amante, V. Motta and C. Martínez-Robles*, Phys.Rev. D97 (2018) no.10, 101301.
3. **Testing dark energy models with a new sample of strong-lensing systems**, *Mario H. Amante, Juan Magaña, V. Motta, Miguel A. Garcia-Aspeitia and Tomás Verdugo*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2760> Published: 12 September 2020
4. **Strong lensing constraints on variable brane tension model**, *Mario H. Amante, Tomás Verdugo, Juan Magaña, Miguel A. García-Aspeitia, A. Hernández-Almada and V. Motta*, En proceso.