UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 CON COEFICIENTES ENTEROS UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN SECUNDARIA

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:
L.E.S Oscar Ascencio Ramírez

Directoras de tesis:
M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara
M.C Mónica del Rocío Torres Ibarra

Zacatecas, Zac., Noviembre 2021

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por su apoyo y patrocinio en la realización de este proyecto de tesis.

Becario: 753381

CVU: 1001061

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 CON COEFICIENTES ENTEROS UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN SECUNDARIA y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. Oscar Ascencio Ramírez de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente

Zacatecas, Zac., a 24 de Noviembre del 2021

____

M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara

____

M.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 24 del mes de noviembre del año 2021, el que suscribe Oscar Ascencio Ramírez alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 32134894; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 CON COEFICIENTES ENTEROS UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN SECUNDARIA bajo la dirección de M.C. Nancy Janeth Calvillo Guevara y M.C Mónica del Rocío Torres Ibarra

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Oscar Ascencio Ramírez

Agradecimientos

A mis padres y hermanos. Sabiendo que jamás existirá una forma de agradecer una vida de lucha, sacrificio y esfuerzo constante, sólo deseo que comprendan que el logro mío, es suyo también, que mi esfuerzo es inspirado en ustedes y que son mi único ideal.

A mis asesores. Por haberme guiado en la elaboración de este proyecto, por sus esfuerzos, enseñanzas y atenciones.

Al Dr. Iván. Por su tiempo, disposición y apoyo en la programación del applet diseñado para esta propuesta.

A mí prometida. Por ser tan buena compañera, mostrar su apoyo durante este proceso y sobre todo soportar mis ratos de locura.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

Este trabajo tiene como finalidad presentar una propuesta de abordaje didáctico para el tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros en el nivel secundaria; está elaborada a partir de la identificación de errores que alumnos de tercer grado cometen al trabajar este contenido algebraico. Se toma como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). El diseño y aplicación se realizan a través del uso de un applet diseñado en el Software GeoGebra como medio de interacción. Se concluye que el uso de esta propuesta permite al estudiante inferir en la justificación del proceso implicado en el método de sustitución para resolver los sistemas de ecuaciones, dejando de lado la práctica tradicional.

Palabras clave: Álgebra, Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2, Errores, Propuesta didáctica, GeoGebra.

Abstract

The purpose of this work is to present a proposal for a didactic approach to the subject of solving systems of 2x2 linear equations with integer coefficients at the secondary school level; It is made from the identification of mistakes that third graders make when working on this algebraic content. The Theory of Didactic Situations (Brousseau, 1986) is taken as a theoretical framework and Didactic Engineering as a research methodology (Artigue, 1995). The design and application is made through the use of an applet designed in the GeoGebra Software as a means of interaction. It is concluded that the use of this proposal allows the student to infer in the justification of the process involved in the substitution method to solve the systems of equations, leaving aside the traditional practice.

Keywords: Algebra, 2x2 Linear Equation Systems, Errors, Didactic proposal, GeoGebra.

Introducción

Los motivos que originaron la elección del tema de investigación que aquí se presenta surgen a partir de identificar a través de la experiencia como alumno y docente de matemáticas la dificultad que tienen los alumnos de secundaria al trabajar contenidos de álgebra. El motivo de incluir un recurso tecnológico en la propuesta, se debe a que se ha identificado en otras investigaciones (Rojano, 2010; Rivera, 2010; Figueroa, 2013; Mosquera, 2014; Cortez, 2016; Carrillo, 2017; Luna, 2018; Anaya, 2020) y de manera personal, que su uso promueve la comprensión y aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos.

Cuando en secundaria se trabaja el contenido algebraico de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros se implementa el método gráfico, método de reducción, de igualación y sustitución (no necesariamente en este orden) para resolverlos. Sin embargo, para la enseñanza de estos tres últimos se ha identificado que el profesor suele recurrir únicamente a la memorización del algoritmo, mientras que para el método gráfico se suelen emplear otras estrategias que evitan trabajarlo de esta manera, pues se ha reconocido la disposición de recursos tecnológicos como GeoGebra por ejemplo que permite visualizar las gráficas de las ecuaciones y determinar el punto solución.

Que en las aulas usualmente se recurra a la memorización de los métodos de reducción, igualación y sustitución como único recurso, conlleva a que los alumnos no doten de significado a este proceso y sólo lo vean de manera mecánica, provocando un fácil olvido. Por esta razón, se busca el desarrollo de una propuesta didáctica que involucre un recurso tecnológico que facilite la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión.

Para ello, se considera como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986) con el propósito de diseñar una secuencia de actividades que faciliten la comprensión y el entendimiento del algoritmo implicado en el método de sustitución y con ello brindar al lector una oportunidad de poder innovar en el tratamiento de este tema. Para lograr lo anterior, el presente trabajo consta de cinco apartados, mismos que se describen a continuación.

El capítulo uno comprende la descripción de los motivos que dieron origen a la elección del contenido resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 como objeto de estudio, también se presentan algunos antecedentes que guardan relación con este tema como la enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, es aquí donde se incluye la problemática, se describe el problema y se plantean los objetivos generales y específicos de este proyecto.

En el capítulo dos se presentan los aspectos que involucran la Teoría de Situaciones Didácticas puesto que como ya se hizo mención fue el marco teórico utilizado para llevar a cabo este trabajo, algunos de los elementos que se abordan al respecto son el trabajo del alumno y del profesor, situación didáctica y situación a-didáctica, devolución, contrato didáctico y tipos de situaciones didácticas. También, este apartado incorpora el marco conceptual matemático, donde se incluyen las definiciones formales de los conceptos involucrados en el tema de estudio. Además, se incluye una sección donde se describen las sugerencias didácticas de dos trabajos para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

El tercer capítulo presenta como metodología de investigación a la Ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995) donde se describen las cuatro fases que la conforman, siendo la primera de análisis preliminares, la segunda de concepción y análisis a priori, la tercera de experimentación y la cuarta de análisis a posteriori y validación.

En el cuarto capítulo se incorpora el desarrollo de la ingeniería didáctica, donde se ponen en práctica el análisis de las cuatro fases mencionadas anteriormente. Respecto a la fase de análisis preliminares se aplicaron cuestionarios para identificar conocimientos previos y errores en los alumnos de secundaria, se analizaron libros de texto y planes y programas de estudio y se indagó sobre la historia del surgimiento de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Con relación a la fase de concepción análisis a priori, se diseñó la propuesta con base en el funcionamiento del applet. Respecto a la fase de experimentación, se lograron aplicar los instrumentos de investigación y recopilar la información de los resultados. En cuanto a la fase de análisis a posteriori y validación, se analizaron los datos obtenidos en la experimentación y se lograron rescatar algunos elementos que nos llevaron a establecer las sugerencias didácticas necesarias para la mejora de la propuesta.

Por último se consideran las reflexiones finales de nuestro trabajo mencionando el alcance obtenido con la implementación de la propuesta con respecto al objetivo general y objetivos particulares, así como algunas recomendaciones para futuros trabajos y la reflexión que queda a partir de haber realizado este trabajo y haber cursado la Maestría en Matemática Educativa.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema de Investigación

En este apartado se describen los motivos personales que originaron la elección del tema involucrado en esta investigación así como algunos trabajos relacionados con el mismo, además se presentan los elementos que conforman el planteamiento del problema de investigación, tales como la problemática, hipótesis y objetivos.

1.1 Motivación

Con la experiencia que se tiene como docente frente a grupo en el nivel secundaria y la trayectoria como estudiante, se ha logrado percibir la dificultad que tienen los alumnos al resolver problemas matemáticos que impliquen el uso del álgebra, pues "aunque el lenguaje algebraico se estructura mediante un sistema muy similar al del lenguaje aritmético, al introducir el uso de letras como variables numéricas aparecen dificultades de aprendizaje que inducen a ciertos errores" (Fuentes, 2016, p. 38). Debido a ello y conscientes de la gran cantidad de contenidos algebraicos que se trabajan en secundaria, se optó por enfocarse en uno sobre el cual las propuestas didácticas que empleen recursos didácticos y/o tecnológicos fueran aún limitados, al menos desde nuestra experiencia.

El contenido matemático que se decidió abordar es el de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando el método de sustitución. Ya que al impartir este contenido como alumno practicante del Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas (CAM), el maestro titular del grupo pidió que se enseñaran estos métodos de manera algorítmica y memorística pues era el modo en el que siempre se había trabajado, lo que permitió notar que cuando se enseña de esta manera los educandos generalmente no entienden por qué funcionan dichas estrategias y al repetirlas sin existir una comprensión, provoca confusión y un fácil olvido.

Asimismo, durante el diseño de la planeación para la práctica no se encontró algún material en los libros de texto u otras investigaciones al alcance que evitaran la enseñanza de este tema de manera algorítmica y memorística y aunque en su momento tal vez no se indagó lo suficiente, se sospecha que esta manera de enseñar el contenido podría deberse a que el plan de estudios 2011 y Aprendizajes Clave 2017 precisan como único aprendizaje esperado que el alumno "resuelva problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011, p. 43) y "resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" (SEP, 2017, p. 179). Por lo que, enseñar al alumno el algoritmo de los métodos de manera memorística puede cumplir con dicho aprendizaje esperado, sin embargo, consideramos importante que los educandos conozcan la razón de su funcionalidad debido a que como se dijo en el párrafo anterior solo reproducen los procedimientos del profesor y al repetirlos sin existir una comprensión provoca confusión entre ellos.

Por último, se considera relevante el diseño de una propuesta didáctica que involucre el uso de algún recurso tecnológico como GeoGebra con el fin de evitar trabajar los métodos de resolución del sistema de ecuaciones de 2x2 de manera tradicional ya que si este contenido se sigue enseñando de manera algorítmica y memorística los errores que cometen los alumnos en secundaria seguirán apareciendo en el nivel medio superior y pueden transcender a niveles superiores.

La definición de GeoGebra que se puede encontrar en el sitio oficial refiere a que es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar que se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering &

Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo (Comunidad GeoGebra, 2021).

El uso de GeoGebra en el diseño de la propuesta se implementará como un material didáctico puesto que, según Villarroel y Sgreccia (2011) los materiales didácticos “son aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases de sus procesos de aprendizaje” (p. 79).

En nuestro caso, el uso de este software pretende ayudar al alumno a entender y reforzar el procedimiento implicado en el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros e inferir sobre el proceso implicado en el mismo.

1.2 Antecedentes

Trigueros (2018) comenta que desde la década de los años 70 del siglo pasado surgieron en distintas partes del mundo, grupos de investigación que estudian las distintas problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y uno de los temas que desde los inicios despertó mucho interés se refiere a las dificultades que entraña el aprendizaje del álgebra elemental.

En este apartado se presentan diferentes investigaciones que reportan aspectos importantes relacionados con el tema algebraico sistema de ecuaciones lineales de 2x2, específicamente se retoman aquellas relacionadas con la transición del pensamiento aritmético al algebraico, errores en contenidos algebraicos, enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales y uso de tecnología en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.2.1 Transición del Pensamiento Aritmético al Algebraico

Según Cortés, Hitt y Saboya (2016) la construcción de un pensamiento aritmético-algebraico sólido permite al alumno validar sus procesos de abstracción y generalización hacía un pensamiento algebraico, desde un reforzamiento ligado al pensamiento aritmético y viceversa. Por ello es de suma importancia la transición entre estos tipos de pensamiento ya que será en este proceso donde el alumno realice cambios que le permitirán generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

Del Río (2014) realizó un análisis de investigaciones que buscan la transición del pensamiento numérico al algebraico y otras que clasifican las dificultades que regularmente tienen los estudiantes para apropiarse de los conceptos del álgebra escolar a efecto de identificar recursos matemáticos que desarrollan el pensamiento algebraico. Con el mismo propósito, diseñó una secuencia didáctica que tomó en consideración las conclusiones de estas investigaciones y la aplicó en una escuela secundaria.

Como resultados de este estudio se pone de manifiesto que en la transición del pensamiento numérico al algebraico, además de los aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del álgebra, surgen otros, como las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrolla en las clases.

Por su parte, Robles (2017) realizó una exploración cuyo objetivo consistió en que los estudiantes de primero de secundaria vieran como alternativa de solución el planteamiento algebraico a problemas expresados en forma verbal. Para llevar a cabo lo anterior, la secuencia se planteó primero a través de un juego que involucraba la simbolización de enunciados mediante expresiones algebraicas que aparecían en tarjetas, posterior a ello se propusieron hojas de trabajo que incluían diferentes problemas contextualizados.

En cuanto a los resultados arrojados por la investigación, se detectó que los alumnos tienden a realizar de manera mecánica las indicaciones del profesor sin reflexionar en torno a la solución. Por esta razón el educando no le da significado a lo que está haciendo, ya que solo trabaja mecánicamente lo que el titular les plantea.

1.2.2 Análisis y Clasificación de Errores en Contenidos Algebraicos

Puesto que la elaboración del recurso tecnológico y la secuencia didáctica estarán diseñados a partir del análisis y clasificación de errores que los alumnos de tercero de secundaria cometen al resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, se consideró importante incorporar algunos estudios respecto al proceso implementado para llevar a cabo un análisis y clasificación de errores.

En primer lugar se revisó la investigación de Ruano, Socas y Palarea (2008) que tuvo como objetivo principal analizar y clasificar los errores cometidos por un grupo de alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. Para ello, diseñaron un cuestionario con 15 preguntas y 43 ítems que se aplicó a 60 estudiantes, en torno a los tres procesos característicos del lenguaje algebraico. Ellos consideran al error de la misma manera que Matz (como se citó en Ruano, Socas y Palarea, 2003) quien lo define como "intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (p. 62).

Los resultados a los que llegaron fueron que los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso, sin embargo hubo algunos que fueron repetidos independientemente del proceso desarrollado, como la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia así como otros que tienen su origen en una ausencia de sentido. También se concluye que para dar sentido a un objeto matemático no es suficiente con mostrar un contraejemplo y que independientemente del origen del error, la superación del mismo requiere una participación activa del estudiante a través del conflicto que debe provocar el docente a partir de la inconsistencia de sus propios errores.

En Caballero (2015) se muestra el análisis de los errores algebraicos detectados en un estudio que abordó la adición de fracciones algebraicas en estudiantes de nuevo ingreso en una universidad pública de Puebla, México. La investigación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario de catorce ejercicios, los cuales tuvieron como objetivo detectar y analizar tales errores. Además, a partir de las respuestas dadas, se realizó una clasificación de los mismos. Posteriormente se realizaron seis entrevistas para proporcionar un acercamiento cualitativo tanto a las respuestas como a los procedimientos dados por los estudiantes.

Con relación a este trabajo, se concluye que los estudiantes que ingresaron a esa universidad tenían un pobre conocimiento del álgebra, es decir, tenían graves problemas al manipular expresiones algebraicas. Además se encontró que los estudiantes pudieron cometer el mismo error que los niños cometen al inicio del aprendizaje de las fracciones, el cual es: sumar directamente los numeradores y denominadores. Otro de los errores que más se cometió es la cancelación indebida de elementos que se encontraban tanto en el numerador como en el denominador. También se identificó que todos los estudiantes entrevistados fueron incapaces de reconocer cuáles temas de álgebra utilizaron en la resolución de los ejercicios.

1.2.3 Enseñanza y Aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales

A continuación se presentan investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales. La finalidad de indagar sobre estos trabajos es conocer sobre las propuestas que ya se han realizado para atender a este contenido algebraico y poder reconocer sus aciertos así como sus oportunidades de mejora.

Segura (2004) realiza una investigación cuyo objetivo consiste en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de calidad que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, dicha secuencia toma como base las investigaciones hechas tanto sobre fenómenos relativos al uso de representaciones semióticas en el aprendizaje, como la explicación de problemas que atañen a la aprehensión de objetos matemáticos.

La propuesta de aprendizaje constituye una sucesión de actividades que ofrece la oportunidad de explorar y argumentar las distintas formas de afrontar los problemas y justificar los resultados. De entre los resultados, se señala que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales. Se concluye además que las dificultades se presentan cuando resuelven el sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución.

En la investigación realizada por Ochoviet (2009) se planteó como primer objetivo estudiar qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas de ecuaciones 2x2. Como segundo objetivo se planteó el diseño de una secuencia de enseñanza y de actividades sobre el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para los estudiantes de 14–15 años, que tiene en cuenta los datos revelados a partir del primer objetivo.

A partir de las dificultades que presentaron los alumnos, la autora sugiere enseñar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, no restringido al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones. Ofrecer a los estudiantes diferentes tareas, donde tengan que enfrentar distintos tipos de situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales. También se recomienda que este tema debería ser presentado en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural. Se señala que diferentes maneras de pensar a los objetos matemáticos permiten a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos.

Las conclusiones referidas al primer objetivo de esta investigación son que el concepto de sistema y de solución de un sistema que los estudiantes construyen, está fuertemente influenciado por el significado que tienen estos conceptos en el ámbito de los sistemas lineales de 2x2.

Cuando los alumnos deben explicitar qué es un sistema de ecuaciones hablan de un conjunto de ecuaciones asociado generalmente con la idea de algo que se resuelve y a condiciones que se deben verificar para los mismos valores de las incógnitas. En general, manifiestan que una solución de un sistema debe verificar todas las ecuaciones del mismo, expresándolo de diferentes maneras y de acuerdo con el vocabulario que el alumno dispone.

Respecto al segundo objetivo, se concluye que la mayoría de los estudiantes alcanzaron un modo de pensamiento estructural en el nivel de escolarización de 14-15 años y que el estudio del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales requiere de avances en este modo de pensamiento. También que la resolución de tareas que ponen en juego diferentes modos de pensamiento contribuye a desarrollar un mejor entendimiento del concepto y posibilita que el estudiante pueda recurrir a diferentes heurísticas para responder a las situaciones.

También, Moll (2011) presenta un estudio que consiste en una investigación educativa acerca de lo que los estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) entienden por solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La principal finalidad de este trabajo fue describir las ideas, imágenes, conceptos y modos de proceder que tienen los alumnos de 2º ESO acerca de la solución de un sistema de ecuaciones lineales tras haber estudiado el tema. Para ello aplicó una secuencia didáctica a 31 estudiantes de segundo año, de donde obtuvo que los alumnos de secundaria consideran, en su mayoría, la solución de un sistema de ecuaciones lineales de tres maneras distintas: como hallar las dos incógnitas de las dos ecuaciones, resolver dos incógnitas que hay en dos ecuaciones por diferentes métodos y la representación de dos igualaciones en un gráfico para saber si tienen o no solución. Además, señala que los alumnos muestran más interés en hacer cosas, en automatizar procedimientos, que en pensar por qué se hacen o a qué les lleva.

Nava (2012) diseñó una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, al percibir que sus estudiantes sólo se limitaban a emitir respuestas obtenidas de cálculos aritméticos simples y no hacían uso de lenguaje algebraico al resolver los problemas de álgebra planteados.

Dicha secuencia se aplicó con un grupo de 22 estudiantes del nivel medio superior y como conclusiones se obtuvo que los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza "tradicional" y a un profesor que generalmente les apoya cuando se lo solicitan. Además se concluye que los alumnos pueden desarrollar e incrementar sus niveles de razonamiento matemático, recorriendo etapas como la de acción, comunicación, discusión y análisis de resultados, es decir a través de la teoría de situaciones didácticas.

1.2.4 Uso de Tecnología en la Enseñanza de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

A continuación se presentan algunas investigaciones que giran en torno a ambientes virtuales de aprendizaje dónde se implementan propuestas de secuencias didácticas que involucran algún tipo de tecnología para atender a la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales.

Carrillo (2017) realiza una investigación que tiene como finalidad diseñar e implementar un ambiente enriquecido con Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para atender al contenido de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, ya que los alumnos de tercero de secundaria no entienden la relación entre los coeficientes y constantes de las expresiones algebraicas que conforman el sistema y las soluciones y representación de los mismos. Dicha investigación tiene un enfoque socio-crítico, sigue una metodología de investigación-acción y para el diseño y desarrollo se basa en el método denominado análisis didáctico. Este trabajo se ha sustentado en el diseño de una propuesta didáctica en la que tiene especial relevancia el uso de distintas aplicaciones de GeoGebra que proporcionan al alumno un apoyo visual, manipulativo, interactivo y tecnológico.

Respecto a la propuesta, se desarrolla alrededor de cuatro focos: las rectas, los sistemas, la clasificación de los mismos y problemas. Como resultados de esta investigación, se identificó la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje al integrar las TIC como herramienta, un aprendizaje significativo y mayor motivación de los alumnos, además de obtener una evaluación positiva al alcanzar los contenidos, estándares y objetivos del currículo.

Anaya (2020) por su parte, presenta en su trabajo un Ambiente virtual de aprendizaje basado en un diseño instruccional para la enseñanza-aprendizaje de Sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución bajo el enfoque de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Para el diseño de las actividades, el autor se orientó por la descomposición genética propuesta por Borja (2015, citado en Anaya, 2020). La principal aportación de su trabajo es la incorporación de tecnología a través de applets desarrolladas en GeoGebra que permiten al estudiante enfrentarse a tareas diseñadas en representaciones múltiples del objeto matemático y que pretenden promover las estructuras y mecanismos mentales sugeridos por la descomposición genética.

La aplicación de las actividades se realizó con alumnos del programa académico de Ingeniería en Biotecnología y aunque en el trabajo se incorpora el link donde se puede encontrar dicho ambiente virtual de aprendizaje ya no está disponible pues la URL no se encuentra en el servidor. Sin embargo, del documento se puede apreciar que el curso constaba de los siguientes contenidos: vectores, sistemas de ecuaciones lineales, aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales y recursos adicionales. Respecto al contenido de sistemas de ecuaciones lineales se trabaja el conjunto solución de una ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales en los reales, tipos de sistemas en los reales, sistemas de ecuaciones sub-determinados, sistemas homogéneos y sistemas no homogéneos.

Como reflexiones finales de su trabajo se identificó que los estudiantes de ingeniería siguen presentando dificultad con el objeto matemático ecuación lineal y mediante un análisis de contenido de las actividades construidas en GeoGebra se mostró que éstas podrían fomentar la construcción de las estructuras y los mecanismos mentales propuestos en una descomposición genética de los conceptos sistemas de ecuaciones lineales y de su conjunto solución elaborada por Borja (2015 citado en Anaya, 2020). El análisis de las producciones de estos estudiantes confirmó que las actividades son adecuadas para promover la comprensión de los conceptos de estudio y el uso de diferentes representaciones de estos conceptos.

En Rojano (2010) se analizan resultados de un estudio con alumnos de secundaria en el que se utiliza un modelo virtual de la balanza -basado en applets- para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado. Los resultados indican que al final del estudio, los alumnos logran extender el método algebraico de resolución a una variedad amplia de modalidades de ecuaciones y que de manera espontánea infieren el método de transposición de términos. Con el fin de investigar los procesos de producción de sentido y de construcción de significado, se adopta una perspectiva semiótica que incorpora al análisis las producciones sígnicas de los estudiantes como parte de la interacción entre los sistemas de signos algebraico, aritmético y el sistema de signos del modelo.

En esta investigación de Rojano se hace mención a que entre los recursos de modelación concreta clásicos y tradicionales en la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado está el modelo de la balanza, en el cual se recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica restringida. Sin embargo menciona que este recurso tiene bondades didácticas como dificultades que enfrentan los estudiantes al utilizarlo.

Respecto a lo anterior, la autora cita a Vlassis (2002) quien en su trabajo concluye que el uso del modelo de la balanza ayudó a los alumnos a aprender el método formal de aplicar la misma operación a los dos miembros de la ecuación, las principales dificultades se presentaron al tratar de que los sujetos generalizaran dicho método a las ecuaciones con enteros negativos. También Radford & Grenier (1996) señalan que la balanza ayuda a los alumnos a comprender la regla de eliminación de términos semejantes, cuando éstos se encuentran en miembros distintos de la ecuación y Filloy & Rojano (1989) identificaron tendencias cognitivas extremas en estudiantes de secundaria, quienes al inicio de su trabajo con la balanza mostraron, en unos casos, un arraigo al uso del modelo y en otros, un desprendimiento muy rápido del mismo para realizar las acciones sólo en el nivel simbólico del álgebra.

Los resultados obtenidos indican que, después de realizar una serie de actividades con esta unidad interactiva y con hojas de trabajo que marcan una ruta didáctica hacia el dominio de la sintaxis, los alumnos son capaces de aprender y usar el método algebraico de resolución para familias amplias de ecuaciones lineales, incluidas las que contienen términos que se sustraen.

Por su parte, Mosquera (2014) realizó una investigación cuyo objetivo fue diseñar una propuesta didáctica utilizando el método *flipped classroom* o aula invertida como una estrategia que propicie el aprendizaje significativo en el proceso de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Guadalupe del municipio de Medellín, en Colombia. Para ello, el docente se apoyó de video tutoriales que les proporcionaba a sus estudiantes mediante una dirección *web*, para que el alumno pudiera acceder al contenido las veces que considerara necesarias, posteriormente los estudiantes guiados por el docente, realizaban en el aula de clase las actividades propuestas.

Las conclusiones a las que llegaron fueron que el método podría ser aplicado en la institución educativa con posibilidades de obtener resultados satisfactorios dependiendo de que los estudiantes cuenten en su casa con el apoyo tecnológico necesario. También podría ayudar a estimular a los alumnos para que se involucren más en su proceso de enseñanza aprendizaje así como tener la posibilidad de relacionarse con la tecnología.

Rivera (2010) realiza una propuesta de intervención pedagógica con el propósito de favorecer la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del uso de GeoGebra con alumnos de segundo grado de secundaria. En su trabajo se incorpora una planeación dada por 6 sesiones, donde se muestra la aplicación de un examen diagnóstico, actividades de trabajo en equipo, actividades para formular el sistema de ecuaciones, actividades de evaluación y confrontación de resultados.

Los resultados obtenidos de esta aplicación fueron en su mayoría favorables y muy motivadores debido a que los alumnos adquirieron habilidad en el manejo de las tecnologías de información y comunicación. Concluyó que GeoGebra es uno de los software de mayor importancia ya que facilita y ayuda al docente a interactuar dinámicamente con contenidos temáticos en el área de matemáticas, así mismo facilita el aprendizaje mediante representaciones virtuales que son representaciones de la realidad y concentra beneficios pedagógicos, también tiene un enorme potencial motivador para el estudiante y el profesor; lo que se traducirá en mejores resultados en un corto plazo.

Por su parte, Figueroa (2013) plantea el diseño de una propuesta didáctica orientada a estimular en los estudiantes de secundaria el desarrollo de la capacidad de resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y contribuir a que superen las dificultades que suelen presentarse. Para ello, considera que una manera de reforzar la resolución de problemas con este tema, es mediante la creación de problemas y el uso del GeoGebra, que es un software dinámico. Como resultados de esta investigación se concluye que GeoGebra además de usarse para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, también se puede utilizar para resolver problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema.

Cortez (2016) presenta una propuesta didáctica para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 utilizando la tecnología digital, la cual estaba dirigida a estudiantes de Nivel Medio Superior del curso Matemáticas 1. El diseño de su propuesta se basa en el enfoque por competencias, de acuerdo con los planteamientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior. Como objetivo, se esperaba que las actividades propuestas desarrollen en los estudiantes habilidades en la formulación y resolución de este tema, poniendo mayor énfasis en el significado gráfico del concepto. Para ello se considera importante el uso de la tecnología digital, de manera que para cada una de las actividades se diseñaron applets con el software GeoGebra en las que es posible coordinar el lenguaje numérico, gráfico y algebraico.

Entre los resultados obtenidos se encuentra el interés y la motivación de los estudiantes al realizar actividades matemáticas utilizando la computadora, al igual que el software GeoGebra facilitó el proceso de planteamiento de las ecuaciones del sistema y la visualización gráfica de la solución. Además, los espacios de trabajo individual, en equipo y grupal permitieron superar algunas dificultades que se presentaron.

Por su parte, Luna (2018) presenta una investigación que se realizó con la finalidad de conocer los procesos que sigue el alumno en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y las dificultades que presenta, así como las condiciones que lo facilitan, tomando como referencia la teoría APOE. Como conclusiones se obtuvo que uno de los principales errores reflejados en los estudiantes al trabajar la transposición de términos en las ecuaciones lineales es precisamente cuando en la variable dependiente se tiene signo negativo, a partir de ello los estudiantes tienden a equivocarse.

Se propone que los métodos de solución estén interconectados con el concepto de interpretación geométrica al igual que con el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2, con la finalidad de que los estudiantes al estar coordinando esta triada de conceptos puedan reconocer a partir de las características de los coeficientes de un Sistema de Ecuación Lineal (SEL) de 2x2 la posible solución del mismo sin necesidad de graficarlos en el plano cartesiano, esto permitirá que los estudiantes adquieran más comprensión del concepto en cuestión.

Aunque en este trabajo se realiza una propuesta con uso de GeoGebra en algunas de las actividades, el autor considera necesario incluir un material didáctico manipulable al iniciar a trabajar este concepto con los estudiantes de secundaria, que tenga como objetivo la representación del par de ecuaciones lineales. También como cierre de actividades se sugiere que los estudiantes diseñen un problema considerando los aprendizajes adquiridos, así como actividades con base en sus conocimientos e intereses con el fin de captar su interés.

Todas las investigaciones anteriores guardan relación con la problemática acerca de la dificultad que tienen los alumnos para entender el álgebra. Las aportaciones y conclusiones de cada estudio analizado en los antecedentes servirán de referente para realizar tanto el análisis y clasificación de errores, como el diseño y aplicación de una secuencia didáctica que involucre algún recurso tecnológico que logre atender de una manera más significativa el contenido de resolución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando el método de sustitución.

1.3 Reflexión

El análisis de los antecedentes (Del Río, 2014; Robles, 2017; Ruano, Socas y Palarea 2003; Caballero, 2015) nos permite identificar y corroborar nuestra experiencia mencionada en la parte de la motivación con respecto al conflicto que tienen los alumnos al trabajar contenidos algebraicos así como también al trabajar específicamente el tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 (Segura, 2004; Ochoviet, 2009; Moll, 2011; Nava, 2012).

Las investigaciones relacionadas con el análisis y clasificación de errores en contenidos algebraicos (Ruano, Socas y Palares; Caballero 2015) nos permiten identificar el proceso a realizar para poder llevar a cabo nuestro propio análisis y clasificación de errores que los alumnos de secundaria cometen al utilizar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y dan cuenta del tratamiento al error, ya que se hace hincapié a que independientemente de su origen, la superación del mismo requiere una participación activa del estudiante a través del conflicto que debe provocar el docente a partir de la inconsistencia de sus propios errores.

El estudio de estos trabajos (Caballero, 2015; Anaya, 2020) nos ha permitido reflexionar acerca de que si los errores no se atienden desde secundaria que es donde se ve por primera vez el contenido de sistemas de ecuaciones lineales, se seguirán presentando incluso en niveles superiores, lo que provocará que los estudiantes de nivel ingeniería, licenciatura o normal sigan presentando dificultad con el objeto matemático en cuestión, además de que podrán cometer los mismos errores que los adolescentes cometen al inicio de su aprendizaje.

Para el diseño de nuestra propuesta, estas investigaciones nos aportan lo siguiente:

- Como el contenido de sistemas de ecuaciones lineales implica que el alumno establezca el sistema a partir de una situación real, se deben prever las dificultades (Segura, 2004) relacionadas con la complejidad de los objetos y de los métodos del álgebra, las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrolla en las clases (Del Río, 2014).

- Para el tratamiento del método de sustitución se debe propiciar un aprendizaje autónomo en los alumnos, ya que según los trabajos analizados (Moll, 2011; Robles, 2017) los educandos muestran más interés en hacer cosas, en automatizar procedimientos y realizar de manera mecánica las indicaciones del profesor sin reflexionar en torno a la solución o pensar por qué se hacen o a qué les lleva a ello.
- Una oportunidad para potencializar el aprendizaje de este contenido es el diseño de actividades con base en la Teoría de Situaciones Didácticas, puesto que los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza "tradicional" y a un profesor que generalmente les apoya cuando se lo solicitan (Nava, 2012). La implementación de esta teoría nos permitirá generar una práctica donde el maestro apoye a los alumnos estratégicamente, fomentando en todo momento que al alumno adopte la responsabilidad de su propio aprendizaje.
- La utilización de un recurso tecnológico favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje (Ochoviet, 2009; Carrillo, 2017; Mosquera, 2014) pues al integrar las TIC como herramienta, podemos fomentar un aprendizaje significativo, mayor motivación, alcanzar los contenidos y objetivos del currículo y mejorar la comprensión de los objetos matemáticos.
- La implementación de applets mediante el uso de GeoGebra como recurso tecnológico es adecuada para promover la comprensión de los conceptos de estudio y el uso de diferentes representaciones de estos conceptos (Anaya, 2020; Carrillo, 2017; Rivera, 2010; Cortez, 2016), ya que facilita y ayuda al docente a interactuar dinámicamente con contenidos temáticos en el área de matemáticas, así mismo facilita el aprendizaje mediante representaciones virtuales de la realidad y concentra beneficios pedagógicos,

también tiene un enorme potencial motivador para el estudiante y el profesor; lo que se traducirá en mejores resultados en un corto plazo.

- La implementación del modelo virtual de la balanza -basado en applets- para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones (Rojano, 2010) puede ser una opción para incorporar en nuestra propuesta como recurso tecnológico, ya que para la resolución de ecuaciones de primer grado los alumnos logran extender el método algebraico de resolución a una variedad amplia de modalidades de ecuaciones y de manera espontánea infieren el método de transposición de términos.

Se puede identificar de estos antecedentes que aquellos que implementan GeoGebra se enfocan en el tránsito entre representaciones, además de que hay dos tendencias en las propuestas; Las bondades en el uso de GeoGebra y el uso de la balanza para trabajar ecuaciones. En ese sentido este trabajo incorpora una propuesta para trabajar ambos y cuya finalidad es que el alumno comprenda el método de sustitución.

En suma, creemos necesario el diseño de una propuesta didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas que implique el uso de un applet diseñado en GeoGebra la cual se fundamente en el modelo virtual de la balanza que permita al alumno comprender el método de sustitución, evitando utilizar como único recurso la mecanización y memorización del algoritmo.

1.4 Planteamiento del Problema de Investigación

1.4.1 Problemática.

A los alumnos se les dificulta trabajar contenidos algebraicos (Ruano, Socas y Palarea 2008; Caballero, 2015; Del Rio, 2014; Robles, 2017), uno de estos es el de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. En las propuestas que atienden a la enseñanza y aprendizaje de este contenido (Segura, 2004; Moll, 2011; Ochoviet, 2009; Nava, 2012) se ha identificado que los alumnos muestran más interés en hacer cosas, en automatizar procedimientos, que en pensar por qué se hacen, pues los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza "tradicional", a raíz de esto los alumnos presentan diversos errores (Luna, 2018; Segura, 2004)

1.4.2 Problema.

Cuando el maestro enseña en secundaria el contenido de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros usualmente recurre como único recurso a la memorización y mecanización de los métodos de reducción, igualación y sustitución, derivado de una práctica tradicional en la que se da mayor énfasis a los algoritmos de solución, más allá de la reflexión de su uso.

1.4.3 Pregunta.

¿Cómo el diseño y aplicación de una secuencia didáctica que involucre un recurso tecnológico puede promover el aprendizaje del método de sustitución para la resolución de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros que se trabaja en secundaria?

1.4.4 Hipótesis.

El diseño e implementación de una secuencia de actividades basada en el modelo virtual de la balanza efectuado a través de GeoGebra permitirá al alumno aproximarse a la justificación del algoritmo que involucra el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

1.4.5 Objetivo General.

Proponer y aplicar una secuencia didáctica que involucre el modelo virtual de la balanza basado en una applet diseñada en GeoGebra, que ayude a los estudiantes de secundaria en la comprensión del método de sustitución al resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

1.4.6 Objetivos Particulares.

- Realizar un análisis y clasificación de los errores que los alumnos de tercero de secundaria cometen al resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando los métodos de reducción, igualación y sustitución.
- Realizar un análisis epistemológico y didáctico del contenido.
- Diseñar e implementar un applet mediante GeoGebra que favorezca la comprensión del método de sustitución.
- Diseñar una secuencia didáctica que atienda los conocimientos previos, incluya el empleo del recurso tecnológico y atienda al método de sustitución.
- Realizar una prueba piloto para poder efectuar las adecuaciones correspondientes.
- Aplicar la propuesta, analizar los resultados obtenidos y realizar recomendaciones para su mejora.

1.5 Justificación

La detección, análisis y clasificación de los diferentes tipos de errores que cometen los alumnos cuando aplican los métodos de reducción, sustitución e igualación para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros es importante para la elaboración de la propuesta didáctica que se va a diseñar ya que "provee de información sobre la forma en que éstos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esta información permitirá al profesor arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores" (Ruano, Socas y Palarea, 2008, p. 62).

A partir del análisis de los errores, se diseñará una secuencia didáctica que involucre el uso de GeoGebra como material didáctico, pues Villarroel y Sgreccia (2011) definen a un material didáctico como todos aquellos objetos usados por el profesor y/o los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática con el fin de lograr ciertos objetivos específicos, que para nuestra investigación el objetivo será facilitar al alumno el entendimiento del método de sustitución, y el uso del recurso tecnológico puede contribuir a tal fin.

Con la aplicación de la propuesta y uso del recurso tecnológico se pretende brindar una alternativa a la forma en que se ha venido impartiendo este contenido algebraico en el aula y evitar así recurrir solamente a una enseñanza algorítmica y memorística de los métodos, la justificación de utilizar el modelo virtual de la balanza para la enseñanza del contenido se debe a que puede tener bondades didácticas, como ayudar a los alumnos a comprender el método para realizar despejes y comprender la regla de eliminación de términos semejantes cuando éstos se encuentran en miembros distintos de la ecuación, además le puede mostrar al alumno a través de una representación gráfica el proceso implicado en el método de sustitución y ver que este proceso no altera las igualdades.

Se considera como principales beneficiaros de este estudio a los alumnos y maestros de secundaria, ya que la propuesta que aquí se hace va encaminada específicamente para ese nivel, sin embargo, posterior a la aplicación de la secuencia didáctica y con el análisis de los resultados, el lector podrá re-definir y hacer propuestas de mejora a la secuencia con el fin de establecer los parámetros necesarios para poder aplicarla en el nivel medio superior o superior.

Capítulo 2. Marco Conceptual

En este capítulo están contenidos el marco matemático donde se incluyen los conceptos y definiciones formales del tema de estudio y el marco teórico, siendo éste la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Guy Brousseau.

Consideramos que esta teoría es la mejor alternativa de sustento teórico debido a que se pretende desarrollar en el alumno un aprendizaje a través de la interacción con el applet.

La TSD "se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea" (Panizza, 2004. p. 60). Respecto a la génesis artificial se refiere a que los conocimientos matemáticos no se construyen de manera espontánea, pues necesitan de una planificación previa que involucre situaciones que permitan al alumno encontrar sentido a lo que está aprendiendo.

Asimismo, se incorpora el marco matemático donde se incluyen las definiciones formales de los conceptos involucrados en el tema de estudio y se incluye una sección donde se describen las sugerencias didácticas de dos trabajos para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, mismas que se consideraron para el diseño de nuestra propuesta didáctica.

2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

Como se sabe, uno de los objetivos de esta investigación es el diseño e implementación de una secuencia didáctica, la razón por la que se decidió utilizar TSD como modelo en este trabajo es porque ya se tenía un antecedente sobre cómo se implementa en el diseño de actividades pues desde la licenciatura ya se habían abordado investigaciones que utilizaban este modelo.

Brousseau (1986) señala en su teoría que el alumno es capaz de obtener su propio saber a partir de sus propias experiencias, de sus interacciones con su medio e incluso si este medio no está organizado para los fines del aprendizaje y que es factor de contradicciones, de dificultades y de desequilibrios. De lo anterior se desprende la definición de situación como un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado.

Con respecto al saber matemático, menciona que debe ser próximo al saber erudito y que para hacer más fácil su enseñanza se deben aislar ciertas nociones y propiedades con la finalidad de transponerlas al contexto escolar. A esta operación se le conoce como Transposición didáctica.

2.1.1 Transposición Didáctica

Chevallard (1998) denomina a la transposición didáctica como el trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, asimismo De Faria (2006) señala que su objeto de estudio es el saber y las transformaciones que sufre éste saber desde su origen hasta su puesta en práctica. Es decir que refiere a las adecuaciones y reorganizaciones que un profesor está obligado a hacer al contenido, con el fin de transponerlo al contexto escolar y hacer más fácil su enseñanza. Por ejemplo una adecuación al contenido sería la siguiente, si se fuera a trabajar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales en secundaria, no sería conveniente utilizar la siguiente definición de Lehmann (2012): Un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas es una colección de las siguientes ecuaciones lineales:

$$
\begin{gathered}
a_1x + b_1y + \cdots + l_1w = k_1,\\
a_2x + b_2y + \cdots + l_2w = k_2,\\
\vdots\\
a_nx + b_ny + \cdots + l_nw = k_n
\end{gathered}
$$

Lo más conveniente sería trabajar con la interpretación de Baldor (2008) quien lo presenta como “la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas”, esta adecuación permitiría que los alumnos de secundaria entendieran mejor lo que es un sistema de ecuaciones, haciendo así más fácil su enseñanza.

2.1.2 El Trabajo del Alumno y el Profesor

Con respecto a esta transposición, Brousseau (1986) establece el trabajo del matemático, del alumno y del maestro, sin embargo, sólo se hará mención a estos dos últimos, ya que para el diseño de la propuesta interesa conocer el papel que debe realizarse como docente y lo que se debe lograr en el estudiante.

Relacionado con el papel del estudiante, Brousseau (1986) señala que el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable a una actividad científica, donde formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc.

Asimismo se indica que para hacer posible una actividad de este tipo, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno puede descubrir. Es decir que "el trabajo del profesor debe ser producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos ya que cada conocimiento debe surgir de la adaptación a una situación específica" (p. 7).

En el tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, esto se ha dado estableciendo las ecuaciones que componen el sistema a partir del planteamiento de situaciones reales o al menos cercanas al contexto de los estudiantes, como por ejemplo: "Con dos camiones cuya capacidad de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera ¿Cuántos viajes realizó cada camión?". De donde se establece el siguiente sistema de ecuaciones: $x + y = 23$, $3x + 4y = 80$. Donde "x" son los viajes del primer camión y "y" son los viajes del segundo camión.

2.1.3 Situación Didáctica y A-didáctica

Dentro de la TSD se incluyen dos tipos de situaciones, la situación didáctica y a-didáctica, mismas que se presentan a continuación:

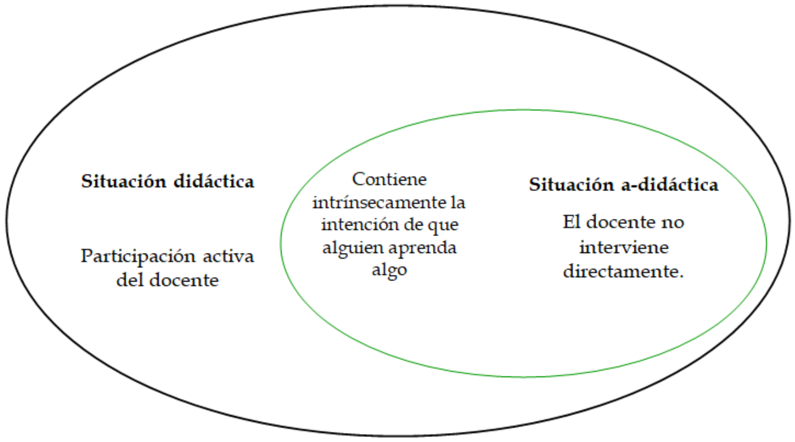
Brousseau (2000) señala que una situación didáctica tiene dos significados:

1. En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar (como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto. (p. 20)
2. Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no. (p. 21)

Se puede decir que una situación de este tipo es generada por el profesor con el fin de enseñarle al alumno el objeto matemático que está en juego, asegurándose de ayudarlo y que se produzca el conocimiento.

Panizza (2004) señala que en las situaciones a-didácticas la enseñanza desaparece al menos de forma explícita, ya que no existe intervención directa del profesor, pues esta situación se da cuando el estudiante y el medio didáctico se fusionan entre sí hasta lograr el aprendizaje. También señala que el profesor no debe estar ausente en esta situación, sino que debe intervenir de manera indirecta, a fin de que ayude al estudiante a encontrar las respuestas por él mismo.

Figura 1
Situación didáctica y a-didáctica



Entonces, podemos establecer la siguiente relación y diferencias entre ambos tipos de situaciones: Las dos tienen la intención de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado, sin embargo, en la situación a-didáctica desaparece la enseñanza de manera explícita ya que el maestro no interviene de manera directa, además “el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo con base en sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución” (Panizza, 2004, p. 63). Esta relación la podemos ver en la

Figura ***1***.

2.1.4 Contrato Didáctico

Brousseau (1986) señala que estas situaciones están regidas por un contrato didáctico entre el profesor y el alumno, y lo define como “la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena” (p. 15). En este contrato se establecen las obligaciones (no necesariamente explícitas) que deben cumplir en el aula los alumnos y maestros en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en este contrato el profesor acepta la responsabilidad de los resultados y debe brindar al alumno los medios efectivos que permitan la adquisición de conocimientos.

Un ejemplo de contrato didáctico se presenta cuando el alumno manifiesta una duda pues el maestro tiene la obligación de resolverla ya que debe asumir esa responsabilidad. Consideramos que la tarea más difícil para el profesor que quiere trabajar con la teoría de situaciones didácticas consiste en saber cómo responder a las preguntas que le hagan los alumnos, pues debe buscar que sus intervenciones no proporcionen la solución, sino que lleven al alumno a encontrarla por sus propios medios.

2.1.5 Devolución

En la situación a-didáctica Brousseau (2007) hace mención al concepto devolución y lo define como “el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctico) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de esta transferencia” (p. 87). La devolución consiste en que el maestro guíe al alumno hacia la búsqueda de la solución al problema planteado a través de indicaciones y preguntas, con el fin de que logre llegar a ella por méritos propios y sin que el maestro otorgue respuestas.

2.1.6 Tipos de Situaciones Didácticas

En esta teoría se presentan cuatro tipos de situaciones didácticas, mismas que define Gálvez (2002) de la siguiente manera:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p. 43)

Un ejemplo de la situación de acción se presentaría cuando se le plantea al alumno una actividad que involucra algún tipo de material y éste comienza a manipularlo. La situación de formulación se presentaría cuando los alumnos conformados en equipo discutan sobre cómo resolver el problema y el uso de la estrategia en sí. Relacionado con nuestro tema se presentaría durante el proceso de selección de un método para resolver el sistema de ecuaciones.

La situación de validación, se puede presentar cuando al identificar que dos alumnos utilizaron dos diferentes procedimientos para llegar a un resultado, el maestro les pida que pasen al pizarrón a explicar a sus demás compañeros lo que hicieron, pretendiendo que cada uno convenza al otro sobre el método planteado, o bien que identifiquen si el procedimiento que les lleve a la solución es adecuado en ambos casos. Por último, la situación de institucionalización se daría cuando el maestro formalizara el saber.

Es importante mencionar que la situación de acción, validación y formulación son a-didácticas pero la situación de institucionalización no, ya que es necesaria la intervención del docente para formalizar el concepto u algoritmo involucrado en la situación. Se espera, que las situaciones didácticas desemboquen en situaciones a-didácticas, es decir que cada vez disminuyan las intervenciones del titular.

2.1.7 Variable Didáctica.

Gálvez (2002) señala que “estas variables pueden ser manipuladas por el maestro para hacer evolucionar los comportamientos de los alumnos” (p. 42). Es decir que este tipo de variable permite al docente ajustar y manipular el uso de ciertas estrategias en la resolución de las actividades. Del Río (2014) establece que:

> Puede entenderse como aquella modificación que hace el profesor con la finalidad de que la situación didáctica sea en principio llamativa para los estudiantes (para favorecer la devolución), pero además debe propiciar un reto para ellos, de manera que cuando el problema se convierta en su problema, la solución no sea inmediata, para ello el profesor podrá modificar ciertas variables: números, magnitudes, contextos. (p. 30).

Un ejemplo de variable didáctica relacionado con nuestro tema se puede presentar al identificar que los alumnos ya resuelven sin problema un sistema de ecuaciones con números enteros y les presentamos un sistema de ecuaciones con números racionales en el que el alumno tenga que aplicar diferentes técnicas y estrategias de resolución.

2.2 Sugerencias Didácticas Para la Enseñanza de los Sistemas de Ecuaciones de 2x2 con Coeficientes Enteros

A continuación se presentan las sugerencias didácticas que Rojano (2010) y Luna (2018) proponen en sus investigaciones, mismas que se consideraron con la finalidad de fortalecer nuestra propuesta didáctica.

Como se hizo mención en los antecedentes, Luna (2018) presenta una investigación que se realizó con la finalidad de conocer los procesos que sigue el alumno en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y las dificultades que presenta. Al término de su trabajo, propone una serie de sugerencias didácticas para el aprendizaje de este contenido, considerando que para nuestra propuesta no se implementará el método gráfico, se retomarán las siguientes:

- Al iniciar a trabajar este concepto con los estudiantes de secundaria es necesario considerar trabajar con un material manipulable que tenga como objetivo la representación del par de ecuaciones lineales.
- Una sugerencia didáctica para el trabajo de aplicación de las distintas actividades, es lo referente a la organización grupal, se considera que las actividades deben ejecutarse en un primer momento de manera individual, posteriormente deben reunirse en equipo de trabajo.
- Trabajar con problemas que contengan ecuaciones lineales con signo negativo en la variable dependiente, esto con la finalidad de que el profesor desde un principio pueda reconocer los errores que se puedan presentar en la transposición de términos.
- Que los problemas que se presenten a los alumnos no se transcriban de un libro de texto, si no que estén enfocados en los gustos e intereses de sus alumnos.

Por otro lado y como también ya se mencionó en los antecedentes, en Rojano (2010) se analizan resultados de un estudio con alumnos de secundaria en el que se utiliza un modelo virtual de la balanza -basado en applets- para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado. En esta investigación se menciona que entre los recursos de modelación concreta clásicos y tradicionales en la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado está el modelo de la balanza, en el cual se recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica restringida. En este trabajo se presenta un circuito didáctico con una balanza simple digital para resolver ecuaciones lineales que consiste en lo siguiente:

1. Familiarización con la balanza (pesar objetos);
2. Representación de ecuaciones en la balanza (correspondencia entre los elementos de la ecuación y los del modelo);
3. Resolución de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por eliminación de objetos de los platillos (principios de manipulación que mantienen el equilibrio);
4. Resolución de ecuaciones con la balanza fija, por elección de la operación inversa que se aplica a los términos en la ecuación (recuperación de los principios que mantienen el equilibrio en el nivel sintáctico: noción de equivalencia algebraica).
5. Resolución de ecuaciones sin la balanza, transformando y restableciendo la igualdad en el nivel simbólico del álgebra (automatización de las acciones en el nivel sintáctico).

(Rojano, 2010, p. 9)

La razón de retomar este circuito es porque consideramos que es el antecedente para el diseño de nuestra secuencia didáctica, puesto que lo podemos considerar en el sentido de sugerencias didácticas para darle un tratamiento adecuado al contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros haciendo las siguientes adaptaciones:

1. Familiarización del alumno con una balanza.

1.1. Presentación de un video donde el alumno pueda identificar la utilización de una balanza común de platillos y se muestre la puesta en práctica para encontrar el peso de un objeto.

1.2. Implementación de una balanza digital para resolver ecuaciones de primer grado donde se le explique al alumno el funcionamiento de su interfaz para que pueda representar las ecuaciones (correspondencia entre los elementos de la ecuación y los del modelo).

1.3. Resolución de ecuaciones con la balanza digital, encontrando el peso desconocido por eliminación de objetos de los platillos (principios de manipulación que mantienen el equilibrio).

1.4. Realizar comprobación del peso de los objetos en el cuaderno.

2. Familiarización del alumno con una doble balanza (explicación de los elementos que componen la interfaz del applet).

3. Representación de las dos ecuaciones que componen el sistema en las dos balanzas.

4. Resolución de sistemas de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por el método de sustitución de objetos entre las balanzas (Identificación de que el proceso de sustitución de la ecuación uno en la ecuación dos y viceversa no debe alterar el equilibrio en las balanzas).

4.1. Determinar la ecuación de una de las balanzas que muestre el peso de uno solo de los objetos.

4.2. Determinar la ecuación de la otra balanza en función del peso de uno de los objetos ya encontrado en la balanza anterior (fomentando la sustitución).

4.3. Determinar la ecuación de la balanza anterior que muestre el peso de uno de los objetos.

4.4. Determinar la ecuación en la primera balanza manipulada que muestra el peso del otro objeto.

4.5. Realizar comprobación del peso de los objetos en el cuaderno.

5. Formalizar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones.
6. Resolución de un par de ecuaciones con la balanza.
7. Resolución de un par de ecuaciones sin la balanza, transformando y restableciendo la igualdad en el nivel simbólico del álgebra (automatización de las acciones en el nivel sintáctico).

2.3 Marco Matemático

Este apartado contiene el marco conceptual matemático, donde se incluyen los conceptos y definiciones involucrados en el tema de estudio de este trabajo. Para la definición de dichos conceptos se consideraron los trabajos de Luna (2018) y Fuenlabrada (2004), en cambio, para la interpretación y la manera en que se puede explicar a los alumnos de secundaria se tomó como referencia a Baldor (2008). Algunos de los conceptos abordados en este apartado son el de Ecuación, Sistema de ecuaciones, Resolución de un sistema de ecuaciones y Axioma fundamental de las ecuaciones.

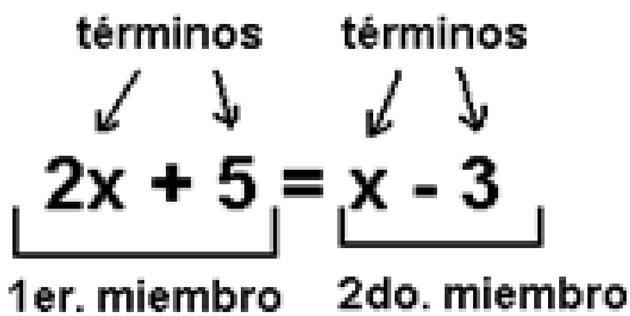
Igualdad. Según Fuenlabrada (2004) "es la expresión de que dos cantidades tienen el mismo valor; esta relación se indica con el símbolo =, el cuál se lee "igual a" o "es igual a"" (p. 121). Respecto al tema de sistemas de ecuaciones y con base en Baldor (2008), en educación secundaria se podría explicar que una igualdad es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor. Así el ejemplo $a = b + c$ representa una igualdad, donde a es igual a la suma de $b + c$.

Fuenlabrada (2004) señala que la igualdad entre dos expresiones algebraicas puede ser de dos tipos: identidades o ecuaciones, donde define que una identidad "es una igualdad que se verifica para cualquier valor que se le asigne a las literales que están en ambas expresiones" (p. 121). Y una ecuación "es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas a las cuales se le llaman incógnitas, y cuyo valor sólo se verifica para determinados valores de ellas" (p. 121).

Para diferenciar estos conceptos, es necesario primero dejar en claro que ambos son igualdades, con la diferencia de que en la identidad cualquier valor que puede tomar x cumplirá con la igualdad, por ejemplo en $2(x + 3) = 6 + 2$x, el valor de x puede ser igual a 1,2,3,4,5 etc.. En cambio, en una igualdad como $x + 1 = 5$ los valores que puede tener x para que se cumpla la igualdad solamente pueden ser cuando $x =$4, por lo que la igualdad $x + 1 = 5$ es una ecuación y no una identidad.

Respecto a las partes de una ecuación o identidad, Baldor (2008) señala que "se llama primer miembro a la expresión que está a la izquierda del signo igual y segundo miembro a la expresión que está a la derecha. Asimismo define que los términos son cada una de las cantidades que están conectadas con otra por el signo + o -, o la cantidad que está sola en un miembro" (p. 124).

Figura 2
Nota. Adaptado de *Miembros y términos de una igualdad* [Fotografía], https://matematicasecundariaguiller.blogspot.com/p/ecuaciones-de-primer-grado-segundo.html



Para ejemplificar cada uno de los términos de una igualdad, es conveniente utilizar una representación como la que se muestra en la Figura 2, que le permita el alumno identificar el miembro que está a la izquierda y la derecha del signo igual, así como identificar cada uno de los términos que los conforman. Respecto al concepto de incógnita, sería importante mencionar que las ecuaciones tienen generalmente una o más letras de las cuales se desconoce su valor y a éstas se les llama incógnitas, que además se indican en minúscula y con las últimas letras del abecedario.

Como la finalidad de la ejecución de los métodos para resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de las incógnitas, es importante también definir el concepto de raíces o soluciones de una ecuación, Fuenlabrada (2004) lo reconoce como el conjunto de números que se ponen en lugar de las incógnitas e iguala los dos miembros satisfaciendo la ecuación se les llama solución o raíces de la ecuación. Los anteriores conceptos se pueden trabajar en secundaria como los valores de las incógnitas que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad.

Otro concepto que sería importante incorporar para cuando se trabajen los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales son las clases de ecuaciones, ya que aunque inicialmente el sistema de ecuaciones esté conformado por ecuaciones enteras, puede que en el proceso del despeje de alguna incógnita, las ecuaciones se conviertan en fraccionarias. Respecto a lo anterior Baldor (2008) presenta las siguientes clases:

"Una ecuación numérica es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas, como donde la única letra es la incógnita *x*". Por ejemplo $4x - 5 = x + 4$.

"Una ecuación es entera cuando ninguno de sus términos tiene denominador, y es fraccionaria cuando algunos o todos sus términos tienen denominador" (p. 124). Por ejemplo $\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{x}{5}$

Es importante que el alumno conozca que estará trabajando con ecuaciones lineales a partir de la definición del grado de una ecuación, Baldor (2008) define que el grado de una ecuación con una sola incógnita "es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación. Así, son ecuaciones de primer grado porque el mayor exponente de *x* es 1" (p. 124).

Figura 3
Grado de ecuaciones

$$5x + 3 = 8x - 7$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 23x - 78 = 0$$

Por ejemplo, en la Figura 3 al identificar que el grado de una ecuación lo determina el exponente de mayor grado de la incógnita, se encuentra que la primera ecuación tiene grado uno, la segunda grado dos y la tercera grado cuatro.

Como en la ejecución de los métodos es necesaria la aplicación de despejes, se debe recordar primero que el despeje es un proceso que consiste en modificar una ecuación hasta que la variable o incógnita deseada quede aislada en cualquiera de los miembros de la igualdad. Fuenlabrada (2004) señala que para despejar una de las literales se utilizan las propiedades de los números reales y de la igualdad, mismas que se enlistan a continuación.

Respecto a las propiedades de los números reales son las siguientes:

1. La suma de dos números reales es cerrada, es decir, si a y $b \in R$, entonces $a + b \in R$.
2. La suma de dos números reales es conmutativa, entonces $a + b = b + a$.
3. La suma de números es asociativa, es decir, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. La suma de un número real y cero es el mismo número; $a + 0 = a$.
5. Para cada número real existe otro número real simétrico, tal que su suma es igual a 0: $a + (-a) = 0$
6. La multiplicación de dos números reales es cerrado: si $a\ y\ b \in R$, entonces $ab \in R$.
7. La multiplicación de dos números es conmutativa, entonces $a * b = b * a$.
8. El producto de números reales es asociativo: $(a * b)c = a(b * c)$
9. En la multiplicación, el elemento neutro es el 1: entonces, $(a)(1) = a$.

10. Para cada número real a diferente de cero, existe otro número real llamado el inverso multiplicativo, tal que: $a * \ a_{-1} = \ 1$.
11. Si $a, b \ y \ c \ \in R,$ entonces $a(b + c) = \ (a * b) \ + \ (a * c)$

Para explicar a los alumnos estas propiedades, sería conveniente adaptarlas a su lenguaje, para ello, se retomará la tabla que incorpora Bermejo (2010) (ver

Figura ***4***) donde se retoman estas propiedades y se incorpora la forma en que el educando puede interpretarlas en su lenguaje.

Figura 4

Interpretación sobre las Propiedades de los números reales. Extraído de Bermejo (2010, p. 97)

Propiedad	Enunciado matemático	Lenguaje del niño	Aplicación
Conmutativa	Para todos los números *a* y *b*: a x b = b x a	Si conozco 3 x 7, entonces también conozco 7 x 3.	La memorización de hechos numéricos se reduce a la mitad.
Asociativa	Para todos los números *a, b, c*: a x(b x c) = a x(b x c).	Si tengo que multiplicar más de tres números no tengo que preocuparme de cuales multiplico primero.	En estrategias de cálculo mental podemos elegir por dónde empezar.
Distributiva	Para todos los números *a, b, c*: a x (b + c) = (a x b) + (a x c)	Lo mismo da sumar y después multiplicar que multiplicarlos por separado y efectuar la suma.	Se puede recordar hechos básicos olvidados a partir de otros conocidos.
Números 0 y 1	0 x a = 0; 1 x a = a	0 veces un número es 0; 1 vez un número es el mimo número	La tabla de multiplicar del 0 es siempre 0. La tabla del 1 es el otro número por el que multiplico.

Como ya se mencionó anteriormente, se considera necesario que el alumno conozca las primeras cuatro reglas que se derivan del Axioma fundamental de las ecuaciones presentado en Baldor (2008): “Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales” (p. 125).

Regla 1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

Por ejemplo. En la ecuación $4x + 5 = 9$ se puede sumar 1 en ambos miembros y la igualdad subsistirá, quedando así $4x + 5 + 1 = 9 + 1$ y obteniendo como resultado $4x + 6 = 10$, dónde $x = 1$.

Regla 2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

Por ejemplo. En la ecuación $4x + 5 = 9$ se puede restar 5 en ambos miembros y la igualdad subsistirá, quedando así $4x + 5 - 5 = 9 - 5$ y obteniendo como resultado $4x = 4$, dónde $x = 1$.

Regla 3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

Por ejemplo. En la ecuación $4x + 5 = 9$ se puede multiplicar por 2 en ambos miembros y la igualdad subsistirá, quedando así $(4x + 5)2 = (9)2$ y obteniendo como resultado $8x + 10 = 18$, dónde $x = 1$.

Regla 4. Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

Por ejemplo. En la ecuación $4x = 16$ se puede dividir entre 4 ambos miembros y la igualdad subsistirá, quedando así $\frac{4x}{4}=\frac{16}{4}$ y obteniendo como resultado $4x = 4$, dónde $x = 1$.

Respecto a la transposición de términos Baldor (2008) menciona que "consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro" (p. 125). Y especifica la siguiente regla "cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo" (p. 125). Esto se puede ejemplificar a los alumnos a través de las reglas del axioma fundamental de las ecuaciones (Regla 2), ya que si se tiene la ecuación $4x + 5 = 9$, restando 5 a ambos lados de la igualdad:

$$4x + 5 = 9$$
$$4x + 5 - 5 = 9 - 5$$
$$4x = 9 - 5$$

O bien, utilizando la transposición de términos, el 5 del primer miembro se puede pasar al segundo miembro cambiándoles el signo a negativo, de tal manera que nos queda:

$$4x + 5 = 9$$
$$4x = 9 - 5$$

Respecto a esto, señala que "los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1, con lo cual la igualdad no varía" (p. 126). Una forma de explicar lo anterior a los alumnos es con un ejemplo como el siguiente: si se tiene la ecuación $4x + 5 = 9$, se puede multiplicar por -1 ambos miembros (regla dos) quedando $(-1)(4x + 5) = 9(-1)$ y obteniendo como resultado -$4x - 5 = -9$

Como se ha presentado líneas atrás, para los alumnos, lo más recomendable podría ser trabajar con la interpretación de Baldor (2008) de un sistema de ecuaciones, quien lo presenta como la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Y para ello se pueden presentar como ejemplo sistemas de ecuaciones como los siguientes:

$$1.\ 2x + 5y = 5 \qquad\qquad 1.\ 5x + 6y = 20$$
$$2. -3x + 7y = 36 \qquad\qquad 2.\ 3x + 8y = 34$$

En Luna (2018) se denomina Solución de un Sistema de Ecuaciones a una "sucesión de n números $(S_1, S_2, \dots S_n)$ tales que sustituyéndolos en las incógnitas, $x_1 = S_1, \dots x_n = S_n$, las ecuaciones se satisfacen" (p. 39). En este sentido, Baldor (2008) señala que "la solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema" (p. 320).

Grossman (2008) considera

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y de la siguiente manera:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \quad (1)$$

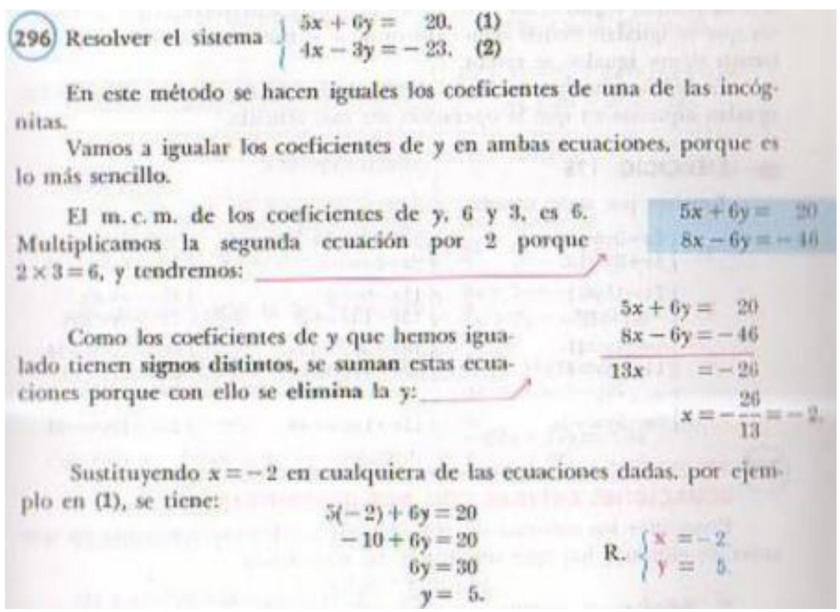
donde $a_{11}, a_{12}, a_{21,} a_{22}, b_1\ y\ b_2$ son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Una solución al sistema (1) es un par de números, denotados por (x, y) que satisface (1). (p. 2)

Con los alumnos, esta definición se puede trabajar como la reunión de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Con relación al procedimiento para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas, Baldor (2008) señala que es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas, una sola ecuación con una incógnita y a esta operación se le llama eliminación. Respecto a lo anterior, los métodos que se trabajan en secundaria es el método por reducción (también llamado adición y sustracción), sustitución e igualación.

Sobre el método de reducción, Fuenlabrada (2004) señala que se igualan los coeficientes de una de las incógnitas, la que sea más sencilla, y a continuación se suman o restan las dos ecuaciones, según convenga, para eliminar una de las incógnitas. En Baldor (2008) podemos encontrar un ejemplo de este procedimiento (ver Figura 5).

Figura 5
Método de reducción. Baldor (2008, p.296)



296 Resolver el sistema $\begin{cases} 5x + 6y = 20. & (1) \\ 4x - 3y = -23. & (2) \end{cases}$

En este método se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas.

Vamos a igualar los coeficientes de y en ambas ecuaciones, porque es lo más sencillo.

El m. c. m. de los coeficientes de y, 6 y 3, es 6. Multiplicamos la segunda ecuación por 2 porque $2 \times 3 = 6$, y tendremos:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 8x - 6y &= -46 \end{aligned}$$

Como los coeficientes de y que hemos igualado tienen **signos distintos**, se **suman** estas ecuaciones porque con ello se **elimina** la y:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 8x - 6y &= -46 \\ \hline 13x \quad &= -26 \\ x = -\frac{26}{13} &= -2. \end{aligned}$$

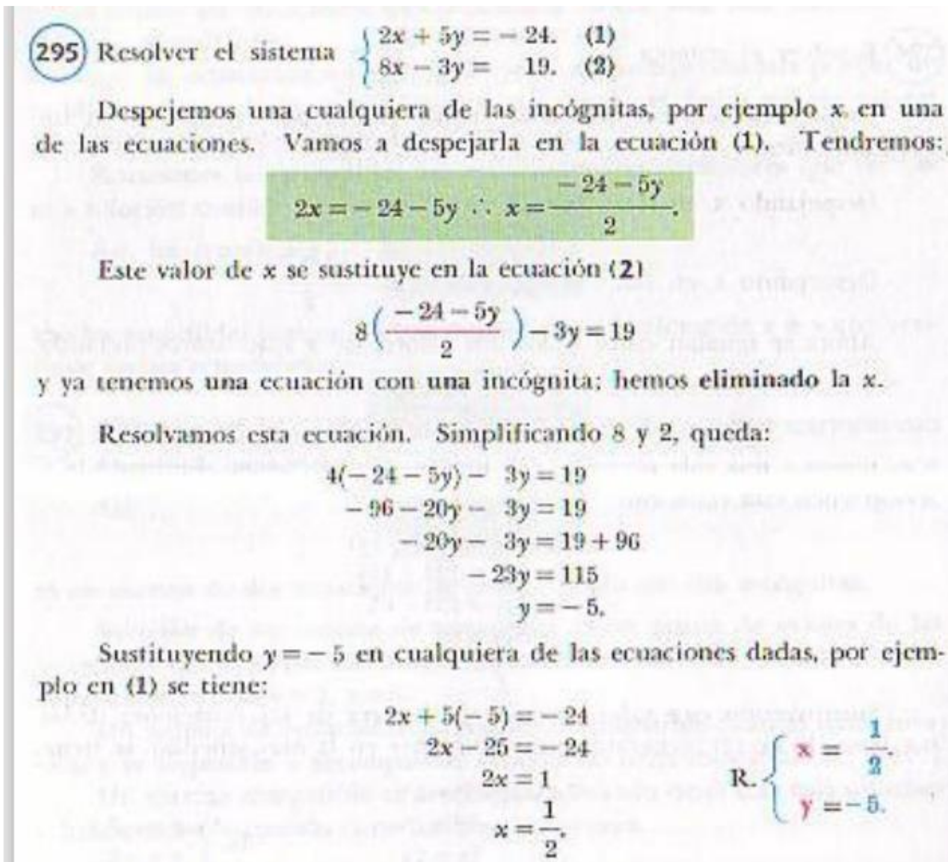
Sustituyendo $x = -2$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} 5(-2) + 6y &= 20 \\ -10 + 6y &= 20 \\ 6y &= 30 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

R. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5. \end{cases}$

Respecto al método de sustitución, en Fuenlabrada (2004) se especifica que primero despejamos cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituimos su valor en la otra ecuación. En Baldor (2008) podemos encontrar un ejemplo de este procedimiento (ver Figura 6).

Figura 6
Método de sustitución. Baldor (2008, p.295)



295 Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 5y = -24. & (1) \\ 8x - 3y = 19. & (2) \end{cases}$

Despejemos una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x en una de las ecuaciones. Vamos a despejarla en la ecuación (1). Tendremos:

$$2x = -24 - 5y \therefore x = \frac{-24 - 5y}{2}.$$

Este valor de x se sustituye en la ecuación (2)

$$8\left(\frac{-24 - 5y}{2}\right) - 3y = 19$$

y ya tenemos una ecuación con una incógnita; hemos eliminado la x.

Resolvamos esta ecuación. Simplificando 8 y 2, queda:

$$\begin{aligned} 4(-24 - 5y) - 3y &= 19 \\ -96 - 20y - 3y &= 19 \\ -20y - 3y &= 19 + 96 \\ -23y &= 115 \\ y &= -5. \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = -5$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} 2x + 5(-5) &= -24 \\ 2x - 25 &= -24 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

R. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}. \\ y = -5. \end{cases}$

Con relación al método de igualación, en Fuenlabrada (2004) se especifica que primero se despeja cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones, a continuación, se igualan entre sí los dos valores de la incógnita que hemos obtenido. En Baldor (2008) podemos encontrar un ejemplo de este procedimiento (ver Los conceptos *y definiciones mostrados en este apartado son los involucrados en el contenido de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando diversos métodos en secundaria. Es fundamental que el maestro tenga dominio de este conocimiento debido a que le brinda una visión más amplia sobre el qué enseñar y cómo enseñar, ya que le permite diseñar una secuencia lógica del contenido* *pretendiendo que valla de lo simple a lo complejo y le permita llevar a cabo de manera adecuada el proceso de enseñanza y aprendizaje.*

Figura 7).

Los conceptos y definiciones mostrados en este apartado son los involucrados en el contenido de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando diversos métodos en secundaria. Es fundamental que el maestro tenga dominio de este conocimiento debido a que le brinda una visión más amplia sobre el qué enseñar y cómo enseñar, ya que le permite diseñar una secuencia lógica del contenido pretendiendo que valla de lo simple a lo complejo y le permita llevar a cabo de manera adecuada el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Figura 7
Método de igualación. Baldor (2008, p.294)

294 Resolver el sistema $\begin{cases} 7x + 4y = 13. & (1) \\ 5x - 2y = 19. & (2) \end{cases}$

Despejemos una cualquiera de las incógnitas; por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

Despejando x en (1): $7x = 13 - 4y \therefore x = \dfrac{13 - 4y}{7}$

Despejando x en (2): $5x = 19 + 2y \therefore x = \dfrac{19 + 2y}{5}$

Ahora se **igualan** entre sí los dos valores de x que hemos obtenido:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

y ya tenemos **una** sola ecuación con **una** incógnita; hemos **eliminado** la x. Resolviendo esta ecuación:

$$\begin{aligned} 5(13 - 4y) &= 7(19 + 2y) \\ 65 - 20y &= 133 + 14y \\ -20y - 14y &= 133 - 65 \\ -34y &= 68 \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) (generalmente se sustituye en la más sencilla), se tiene:

$$\begin{aligned} 7x + 4(-2) &= 13 \\ 7x - 8 &= 13 \\ 7x &= 21 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

R. $\begin{cases} x = 3. \\ y = -2. \end{cases}$

Capítulo 3. Metodología

Es importante mencionar que esta investigación será cualitativa, Álvarez-Gayou (2014) señala que este tipo de estudio "busca la subjetividad, explicar y comprender las interacciones y los significados subjetivos individuales o grupales" (p. 41). En nuestro caso el propósito será indagar acerca de cómo el uso de un recurso tecnológico puede potencializar el aprendizaje de los alumnos de secundaria al trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

En este capítulo se presentan los elementos que conforman la Ingeniería didáctica, puesto que fue la metodología de investigación seleccionada para lograr los objetivos descritos en el planteamiento del problema de este estudio.

3.1 La Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación

> Artigue (1995) expresa que la noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta y se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. (p. 33)

Esta analogía es por la planificación, ya que la ingeniería didáctica se rige por un procedimiento minucioso que involucra una anticipación de tareas, intervenciones docentes, tiempos, etc. Así como lo hace un ingeniero que para construir una casa por ejemplo, debe prever su diseño, considerar el terreno y material de tal modo que pueda anticiparse a las tareas y tiempo para su construcción.

En este mismo sentido, Douady (1995) la designa como un "conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos" (p. 61). Además Artigue *et al.* (1995) menciona que ésta puede significar tanto una metodología de investigación como producciones para la enseñanza.

Respecto a lo anterior, Artigue (1995) señala que "como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Entonces esta metodología permitirá analizar el proceso de construcción, realización y resultados de la secuencia didáctica que implementaremos al tomar como referente la Teoría de Situaciones Didácticas.

Esta metodología consta de cuatro fases, mismas que se presentan a continuación.

3.1.1 Fase 1. Los Análisis Preliminares

Artigue (1995) establece los más frecuentes y señala que se deben realizar teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva (p. 38)

Realizar estos análisis nos permitirán identificar elementos importantes para el diseño de la secuencia didáctica, como la dificultad de los problemas ligados al surgimiento y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales (análisis epistemológico), dificultades y errores (análisis cognitivo), la forma en cómo se ha venido enseñando este tema hasta el día hoy (análisis didáctico) y las limitaciones del contexto dónde se ejecutará la práctica (análisis de campo).

3.1.2 Fase 2. La Concepción y Análisis A-priori

En esta segunda fase el objetivo es "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado" (Artigue, 1995, p. 45). Aquí se distinguen dos tipos de variables de comando sobre las que el investigador actúa según las considere pertinentes con relación al problema estudiado:

- "Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería
- Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase". (p. 42)

Un ejemplo del primer tipo de variable puede ser el número de sesiones que conformarán la secuencia, y del segundo podrían ser el material didáctico involucrado.

Respecto al análisis a priori, Artigue (1995) señala que su objetivo es "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis" (p. 45). Es decir, que es en esta fase donde además de diseñar la secuencia, se debe describir lo que suponemos que puede pasar con su aplicación, mencionando los posibles sucesos que pueden ocurrir.

3.1.3 Fase 3. Experimentación

En esta fase se realiza la aplicación de la secuencia diseñada en la fase anterior, De Faria (2006) señala que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.

- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. (p. 5)

Respecto a lo anterior, Palomino (2016) señala que en esta etapa se manifiesta el lugar en el que se experimentó la situación didáctica, el tipo de escuela, las características generales del grupo, sesiones impartidas, las evidencias, la dinámica que se siguió y el material utilizado, en general todo lo que pasó para poner en marcha la situación didáctica.

3.1.4 Fase 4. Análisis A-posteriori y Validación

Artigue (1995) define al análisis a posteriori como “el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella” (p. 48). Es decir que en este análisis se examinan todos los datos recogidos en la fase de experimentación, como las producciones de los estudiantes, errores presentados, etc.

Respecto a la validación, Artigue (1995) señala que “se basa en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación” (p. 48). Es decir que se hace una comparación entre lo que suponíamos que pasaría con lo que en realidad pasó al aplicar la secuencia, además de certificar si la hipótesis planteada en nuestra investigación se cumplió o no. En nuestro caso se determinará si el abordar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con apoyo del applet diseñado en GeoGebra ayuda a los alumnos en el aprendizaje de los métodos de sustitución, igualación y reducción.

Capítulo 4. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica

En este capítulo se presenta la implementación de las 4 fases de la ingeniería didáctica mencionadas anteriormente, comenzando así con el análisis preliminar.

4.1 Fase 1. Análisis Preliminar

Artigue (1995) señala que este análisis se efectúa distinguiendo las siguientes tres dimensiones:

• La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego. Donde se presenta un resumen histórico del surgimiento de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

• La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Donde se presentan los errores y las dificultades que presentan los alumnos al trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones.

• La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Donde se analiza la manera en la que se ha venido trabajando este contenido.

A continuación, se presentan los análisis realizados en cada una de estas dimensiones.

4.1.1 Dimensión Epistemológica

Este análisis presenta un resumen histórico de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, para ello tomamos como referencia histórica lo descrito en el trabajo de Steward (2008), Ortíz (2005) y Boyer (1987).

Ecuaciones.

Steward (2008) señala que lo que ahora llamamos "solución de ecuaciones", en la que hay que encontrar una incógnita a partir de información apropiada, es casi tan vieja como la aritmética, pues hay evidencia indirecta de que los babilonios ya resolvían ecuaciones bastante complicadas en el 2000 a.C., y evidencia directa de soluciones de problemas más sencillos en forma de tablillas cuneiformes que se remonta alrededor del 1700 a.C.

La porción que sobrevive de la Tablilla YBC 4652 del periodo babilónico Antiguo (1800-1600 a.C.), contiene once problemas para resolver; el texto de la tablilla indica que originalmente había 22 problemas. Una pregunta típica es:

"Encontré una piedra, pero no la pesé. Después pesé 6 veces su peso, añadí 2 gin y añadí un tercio de un séptimo multiplicado por 24. Lo pesé. El resultado era 1 mana. ¿Cuál era el peso original de la piedra?".

Un peso de 1 mana son 60 gin. En notación moderna, llamaríamos x al peso buscado en gin. Entonces la pregunta nos dice que

$$(6x + 2) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} \times 24(6x + 2) = 60$$

Y métodos algebraicos estándar llevan a la respuesta $x = 4\frac{1}{3}\ gin$. La tablilla da esta respuesta, pero no da una indicación clara de cómo se obtiene. Según este autor, podemos estar seguros de que no había sido encontrada utilizando métodos simbólicos como los que ahora utilizamos, porque tablillas posteriores prescriben métodos de solución en términos de ejemplos típicos: "tomar la mitad de este número, sumar el producto de estos dos, tomar la raíz cuadrada..." y así sucesivamente.

Este problema, como los otros en YBC 4652, es lo que ahora llamamos una ecuación lineal, lo que indica que la incógnita x entra sólo en su primera potencia. Todas estas ecuaciones pueden reescribirse en la forma

$$ax + b = 0$$

Con solución

$$x = -b/a$$

Ortíz (2005) explica que los babilonios podían resolver ecuaciones lineales y cuadráticas (por completación del cuadrado o por sustitución). Aunque podían resolver complicados sistemas, como por ejemplo:

$$\begin{cases} x^8 + x^6y^2 = (3{,}200{,}000)^2 \\ xy = 1{,}200 \end{cases}$$

Como es de suponer, los problemas algebraicos se enuncian y se resuelven sin los recursos notacionales de la era moderna. Veamos algunos casos concretos.

Ejemplo. Problema. "Conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870".

Esto equivale a resolver la ecuación $x^2 - x = 870$.

Solución Babilónica. Trabajan en base 60. Toman la mitad de 1, que es 0;30. Luego realizan la multiplicación (0; 30) (0; 30), que es 0;15 (significa 0,15). Luego suman (14; 30 + 0; 15) = 14; 30; 15. Pero, 14; 30; 15 es el cuadrado de 29; 30. Finalmente suman: 0; 30 y 29,30, lo que queda 30 como el lado del cuadrado. Esto coincide con la solución obtenida con los métodos actuales.

Muchos problemas contenidos en los textos babilónicos eran del tipo $x^3 + x^2 = b$, cuya solución se basaba en la utilización de una tabla, en la que se daban las combinaciones de la forma $n^3 + n^2\ para\ 1 < n < 30$.

Los babilónicos tuvieron un buen conocimiento de la solución de diversas clases de ecuaciones, como son,

$$ax = b, x^2 \pm ax = b;\ \ x^3 = a;\ \ x^2(x+1) = a$$

También conocieron sistemas de ecuaciones, como son

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases}$$ entre otras.

Boyer (1987) destina un apartado para hacer mención hacia la historia de los problemas algebraicos, donde menciona que se conocen muchos problemas que aparecen en textos del periodo babilónico antiguo que demuestran que la resolución de la ecuación completa de segundo grado no ofrecía ninguna dificultad importante para los babilonios, dada la flexibilidad de las operaciones algebraicas que habían desarrollado. Así, podían transponer términos en una ecuación sumando igualdades y eliminar fracciones u otros factores multiplicando ambos miembros por cantidades iguales; sumando $4ab$ a $(a-b)^2$ lo podían transformar en $(a+b)^2$, aprovechando los muchos tipos de factorizaciones simples con los que estaban familiarizados. No utilizaban letras para representar las cantidades incógnitas porque no estaba inventado aún el alfabeto, pero las palabras mismas tales como "longitud", "anchura", "área" y "volumen" servían perfectamente para este fin.

El álgebra egipcia se había centrado casi exclusivamente en las ecuaciones lineales, pero los babilonios las consideraron demasiado elementales como para prestarles mucha atención, evidentemente. En un cierto problema se pide el peso x de una piedra si $(x+\frac{x}{7})+\frac{1}{11}(x+\frac{x}{7})$ es igual a una mina; la respuesta se da diciendo simplemente que x es 48; 7, 30 gin, donde 60 gin hacen una mina. En otro problema que aparece en un texto de la época babilónica antigua nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas en dos incógnitas, llamadas respectivamente "el primer anillo de plata" y "el segundo anillo de plata", si llamamos x e y a estas dos incógnitas, las ecuaciones en notación moderna son

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=1 \qquad \frac{6x}{7}=\frac{10y}{11}$$

Y la solución viene expresada lacónicamente por medio de la regla

$$\frac{x}{7}=\frac{11}{7+11}+\frac{1}{72} \quad \text{y} \quad \frac{y}{11}=\frac{7}{7+11}-\frac{1}{72}$$

Sistemas de Ecuaciones.

Ortíz (2005) señala que los babilonios podían resolver sistemas de ecuaciones de varios tipos, con dos incógnitas, que incluían usualmente una ecuación lineal y una ecuación de segundo grado.

Ejemplo. “He sumado el área de mis dos cuadrados, lo que me da 21, 15 y el lado de uno es más pequeño que el lado del otro”.

Solución. Los datos corresponden a las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 21,15 \qquad (\propto)$$

$$y = \frac{6}{7}x \qquad (\beta)$$

La substitución de (β) en $(\propto)$ da (en base 10),

$$x^2 + \frac{36}{49}x^2 = \frac{85}{4}$$

De esta manera, $x^2 = \frac{49}{4}$ y $x = \frac{7}{2}$. [Se tiene $y = 3$ y $\frac{49}{4} + 9 = \frac{85}{4}$, que es 21, 15 en la base 60]

Boyer (1987) presenta otro sistema de ecuaciones que se incluye en el texto de los babilonios donde aparece parte del método de resolución a un sistema de ecuaciones; las ecuaciones son en este caso: $1/4\, anchura + longitud = 7\, manos,$ y $longitud + anchura = 10$ manos. La solución se halla en primer lugar sustituyendo cada “mano” por 5 “dedos”, y observando a continuación que una anchura de 20 dedos y una longitud de 30 dedos satisfacen las dos ecuaciones. A partir de esta comprobación se calcula la solución, no obstante, por un método alternativo equivalente al de la eliminación por medio de una combinación lineal; expresando todas las dimensiones en término de manos, y llamando x e y respectivamente a la longitud y a la anchura, las ecuaciones se convierten en $y + 4x = 28$ y $x + y = 10,$ luego restando la segunda de la primera nos queda $3x = 18$, es decir, $x = 6$ manos ó 30 dedos e $y = 20$ dedos.

La razón de conocer la epistemología del concepto involucrado en este trabajo fue para sustentar el diseño de la secuencia de actividades de manera que nos permita darle un enfoque diferente mediante el uso de la tecnología.

4.1.2 Dimensión Cognitiva

Conocer los errores y dificultades que los alumnos han presentado al trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales es de suma importancia para el diseño de la secuencia didáctica, puesto que nos proveerá de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos (Ruano, Socas y Palarea, 2008). Al considerarlos en el proceso, delimitarán qué elementos incorporar en las actividades con el fin de diseñar actividades que permitan franquearlos o superarlos de manera que no interfieran en el aprendizaje de los educandos.

La definición de error que se considerará en esta investigación será la de Socas (1997), quien señala que "el error va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste" (p. 125). Al respecto, Ruano, Socas y Palarea (2008) sostienen que los errores en contenidos algebraicos tienen origen en una ausencia de sentido o en actitudes afectivas. Con relación al primer tipo, mencionan que se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación y se pueden diferenciar en las siguientes tres etapas distintas:

1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Por ejemplo, si se le pide a un alumno que resuelva la ecuación $10x + 48 = 4x + 30$, podría agrupar acertadamente los

términos semejantes en cada miembro de la ecuación, quedándole así $10x - 4x = 30 - 48$, sin embargo, al reducir factores podría deducir que $6x = 18$, cometiendo un error en la resta de números enteros.

2. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento. Por ejemplo, en la ecuación $-6x = 12$ el alumno podría despejar la incógnita de la siguiente manera $x = \frac{12}{6}$ sin considerar el signo negativo del 6, por lo que obtendría como resultado $x = 2$ lo cual está mal. Este ejemplo permite identificar el error que puede surgir de la mala aplicación de las reglas que se desprenden del axioma fundamental de las ecuaciones.

3. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Por ejemplo, cuando los alumnos visualizan el símbolo de igualdad únicamente de manera unidireccional, es decir que asocian lo que está en el miembro izquierdo como la operación y lo de lado derecho como el resultado. Por ejemplo, en la ecuación $5x + 3 = 0$ los alumnos al despejar la variable x en lugar de hacerla vertical, la realizarían de forma horizontal y cada uno de los pasos los separarían utilizando el signo igual, por ejemplo $5x + 3 = 0 = 5x = -3 = x - \frac{3}{5}$.

En cuanto a los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, mencionan que tienen distinta naturaleza y se avocan a la falta de concentración, excesiva confianza, bloqueos, olvidos etc.

A continuación se presentan algunas de las dificultades y errores identificados por diferentes autores en investigaciones relacionadas con el contenido de sistemas de ecuaciones lineales.

En Segura (2004) se señala que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales, ella concluye que una de las dificultades surge cuando los estudiantes resuelven un sistema de ecuaciones y no verifican la solución.

Filloy, Rojano y Solares (2003) analizan los significados del signo igual generados por los alumnos de entre 13 y 14 años cuando utilizan el método de sustitución e igualación para resolver problemas y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Los autores concluyen que la dialéctica entre la sintaxis y la semántica es el principal obstáculo en la ocurrencia de errores cuando se sigue una regla para la cuál es necesario usar una o más reglas que requieran de competencia previa. Es decir que los alumnos cometen errores de procedimiento e interpretación de símbolos y expresiones al seguir las reglas que rigen los métodos.

Moll (2011) señala que los errores de los alumnos pueden deberse a distracciones, además que los alumnos muestran más interés en automatizar procedimientos que en pensar porqué se hacen o que les lleva a ellos.

También, Luna (2018) destina un apartado a las dificultades y errores encontrados en otras investigaciones cuando se trabaja el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, a continuación se presentan solamente aquellas que creemos se pueden identificar al trabajar el concepto de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros utilizando los métodos de igualación, reducción y sustitución:

- La transición de un lenguaje natural al algebraico (Villanueva, 2015, p. 7)
- Dificultad que va desde la mala o nula utilización de simbología (símbolos de agrupación), mal empleo de la ley de los signos y de jerarquía de operaciones (Villanueva, 2015, p. 56)

- Dificultad en la simplificación de términos semejantes. (Villanueva, 2015, p. 61)
- La comprensión del concepto de igualdad y sus propiedades (Velasco, 2012, p. 74)
- Uso de la jerarquía de operaciones y de los signos de agrupación (Velasco, 2012, p. 74).
- Dificultad en el proceso de comprobación de que en efecto el conjunto encontrado es solución. (Velasco, 2012, p. 139)
- Dificultades para despejar una de las variables para el caso de las ecuaciones lineales con dos variables. (Velasco, 2012, 75)
- Dificultad al identificar incorrectamente los términos semejantes. (Velasco, 2012, 75)
- Dificultad en el procedimiento. (Manzanero, 2007, p. 115)

(pp. 41-42)

En resumen, estas dificultades se pueden agrupar en dificultades derivadas de la falta de conocimientos previos así como de la comprensión y manipulación de expresiones algebraicas al emplear los métodos para resolver el sistema, estas dificultades y errores nos servirán para poder realizar una clasificación de errores cometidos por alumnos en el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros a partir de la cual podremos tomar decisiones oportunas para el diseño de nuestra propuesta.

Errores al Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Cómo se había mencionado anteriormente, uno de los objetivos de este trabajo es el análisis y clasificación de los errores que los alumnos de secundaria cometen al resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando los métodos de reducción, igualación y sustitución. Para realizar este análisis se trabajó con alumnos de tercer grado, la razón de utilizar a ellos como población se debe a que son los más próximos después de que se ve el contenido por primera vez en secundaria, ya que según los planes y programas de estudio el tema se mira a finales de segundo grado así que consideramos que son los indicados para poder recabar la información pertinente sobre los errores.

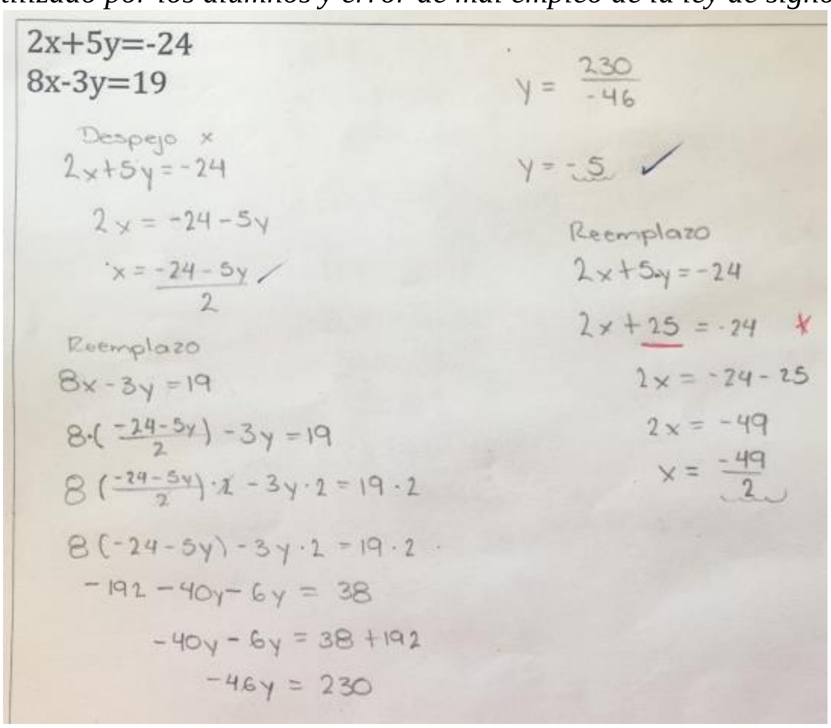
Debido a la situación que se está presentando por el Covid-2019 no se pudo tener acceso a un grupo completo de alumnos para la aplicación del cuestionario que nos permitiera identificar errores y poder llegar a una generalización, sin embargo, se tuvo la oportunidad de aplicarlo con 6 alumnos (4 hombres y 2 mujeres) de la comunidad de Malpaso, Villanueva, Zacatecas, que están cursando el tercer grado en la escuela secundaria Técnica #28 ubicada en el mismo lugar. Dicha aplicación se llevó a cabo en la semana del 2 al 6 de noviembre del año 2020.

La manera en la que se ejecutó fue la siguiente; después de que se obtuvo el contacto con ellos mediante redes sociales y aceptaran realizar el cuestionario, se les llevó impreso hasta su casa y posterior a ello se les pidió que lo resolvieran mientras que yo supervisaba desde una distancia considerable, cada alumno tardó aproximadamente 20 minutos en realizarlo. La razón de no mandárselos por correo se debe a que existía la duda de que no lo contestaran con base en sus propios conocimientos y recurrieran a la consulta de otras fuentes como libros, aplicaciones u otra persona.

El cuestionario (ver Anexo 1) constaba de tres ejercicios que implicaban tres sistemas de ecuaciones diferentes en los cuales se pedía a los alumnos que los resolvieran utilizando el método de sustitución, igualación y reducción. Los resultados fueron los siguientes:

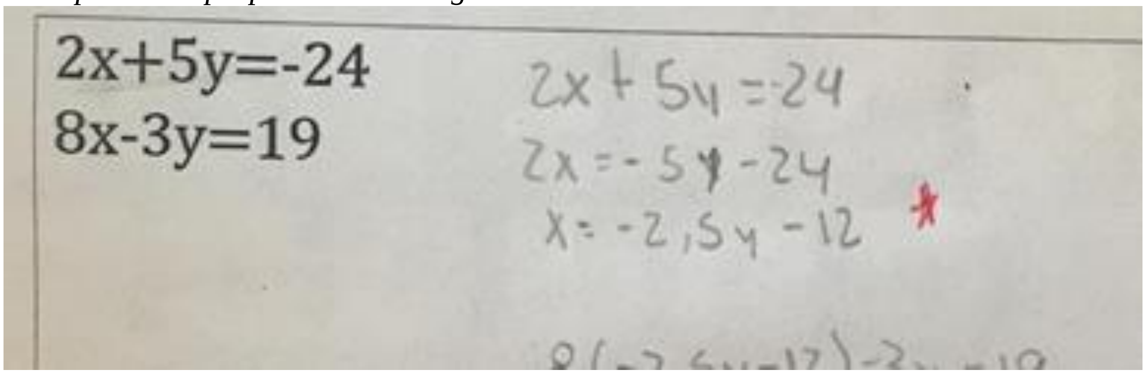
Respecto a la utilización del método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones planteado, 4 alumnos demostraron tener conocimiento del procedimiento ya que primero realizaron el despeje de una incógnita en una de las ecuaciones y después realizaron la sustitución en la otra, una vez obtenido el valor de esta incógnita, sustituyeron el valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial para calcular el valor de la otra incógnita (ver Figura 8). Sin embargo, a pesar de ello hubo algunos errores presentes en el proceso, como el que se presenta en esta misma Figura ***8***donde el alumno al realizar el remplazo de la incógnita encontrada en una de las ecuaciones del sistema original comete un error al deducir que $5y$ es igual a 25 dónde $y = -5$, mostrando dificultad relacionada con el mal empleo de la ley de los signos (Villanueva 2015, como se citó en Luna 2018), también, este error se puede asociar con los errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética (Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Figura 8
Procedimiento utilizado por los alumnos y error de mal empleo de la ley de signos



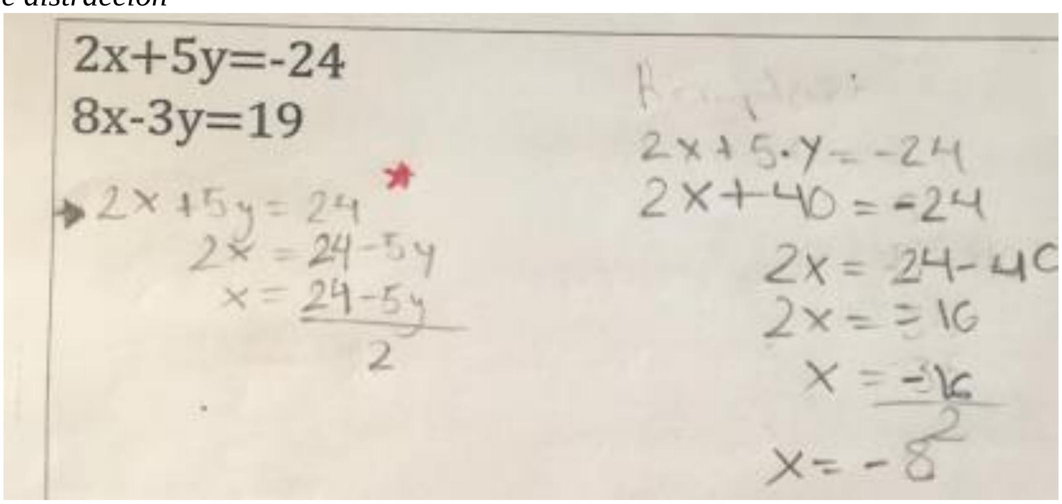
Otro error que los alumnos cometieron se presenta en la Figura 9 donde el alumno realiza erróneamente la transposición de términos, puesto que para eliminar el factor dos que multiplica a x en el primer miembro de la ecuación uno, resta dos en el segundo miembro. Este error se asocia con la dificultad de comprensión del concepto de igualdad y sus propiedades (Velasco 2012, como se citó en Luna 2018).

Figura 9
Error al aplicar las propiedades de la igualdad



Otro tipo de error identificado es el que se muestra en la Figura 10, donde el alumno no copia bien la ecuación del sistema en la que despejará la incógnita, pues la ecuación que toma del sistema es la de $2x + 5y = -24$ y el alumno la escribe como $2x + 5y = 24$, lo que provoca que al despejar de x el resultado no sea correcto y por consiguiente lo demás también sea erróneo. Este tipo de error puede deberse a una distracción tal como lo señala Moll (2011).

Figura 10
Error de distracción

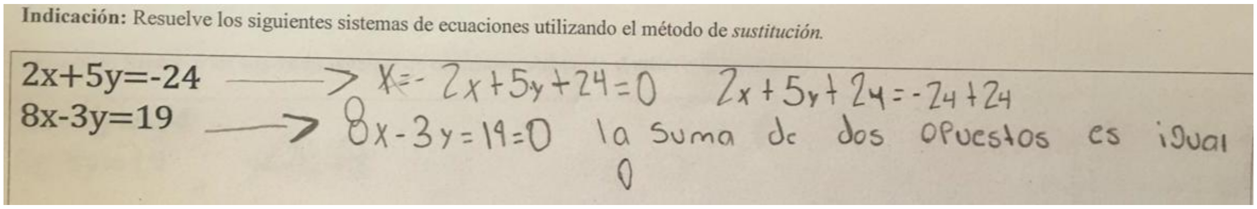


Por último, sobre este método, la

Figura ***11*** da evidencia de lo que hicieron aquellos alumnos que no mostraron tener dominio del procedimiento sobre el método de sustitución, lo que se puede asociar a dificultades en el procedimiento (Manzanero, 2007, como se citó en Luna 2018).

Figura 11

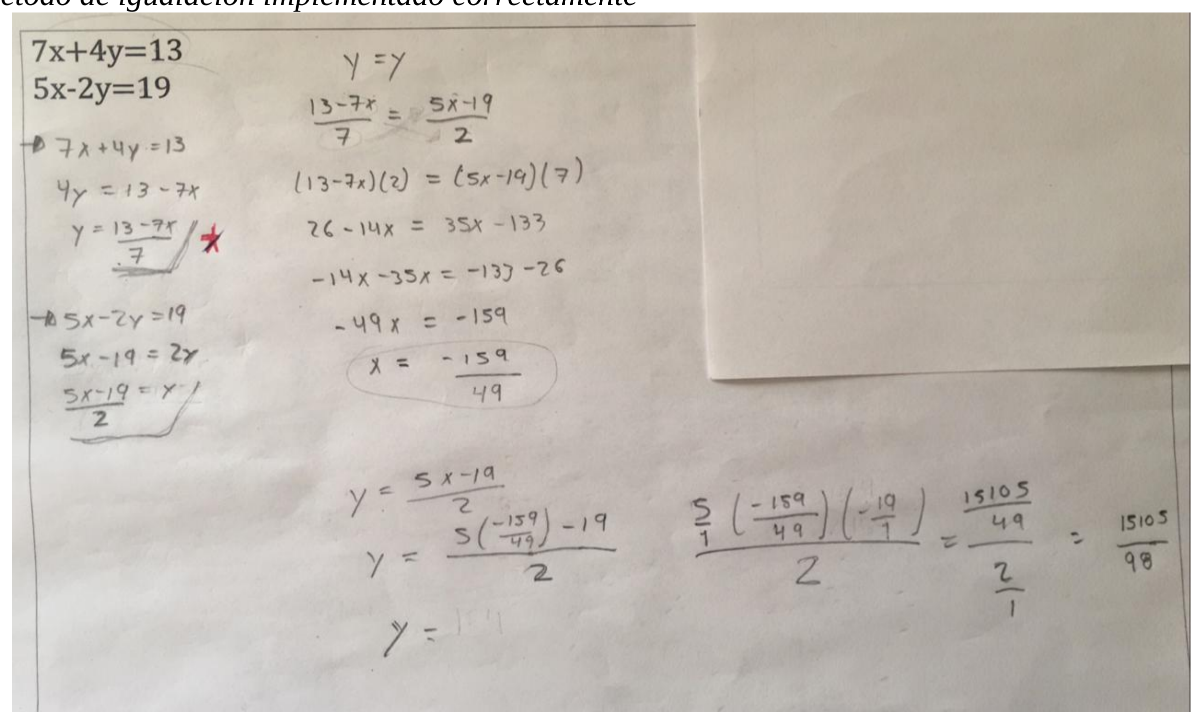
Los alumnos no muestran dominio del método



Respecto a la utilización del Método de igualación, también 4 alumnos demostraron tener conocimiento del procedimiento implicado en este método ya que primero despejaron la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualaron las expresiones resultantes para después resolver la ecuación de primer grado con una incógnita y sustituir este valor en alguno de los despejes realizados (ver Figura 12). Sin embargo, al igual que en el método de sustitución los alumnos cometieron errores que pueden deberse a las mismas razones que en el método anterior.

Figura 12

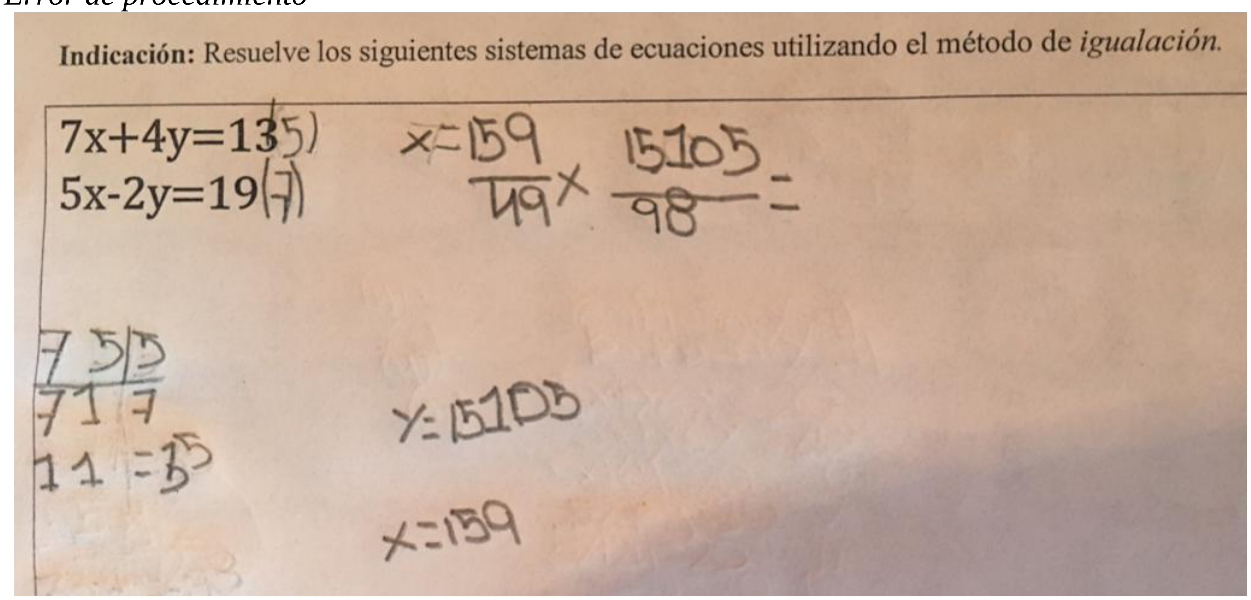
Método de igualación implementado correctamente



Otro error que se presentó es el que se muestra en la Figura 13 donde el alumno intenta utilizar el procedimiento implicado en el método de reducción para resolver el sistema que se pidió resolver mediante el método de igualación, este tipo de error tiene relación con los errores de procedimiento (Ruano, Socas y Palarea, 2008) ya que el alumno utiliza de manera inapropiada el procedimiento para resolver el sistema por el método indicado.

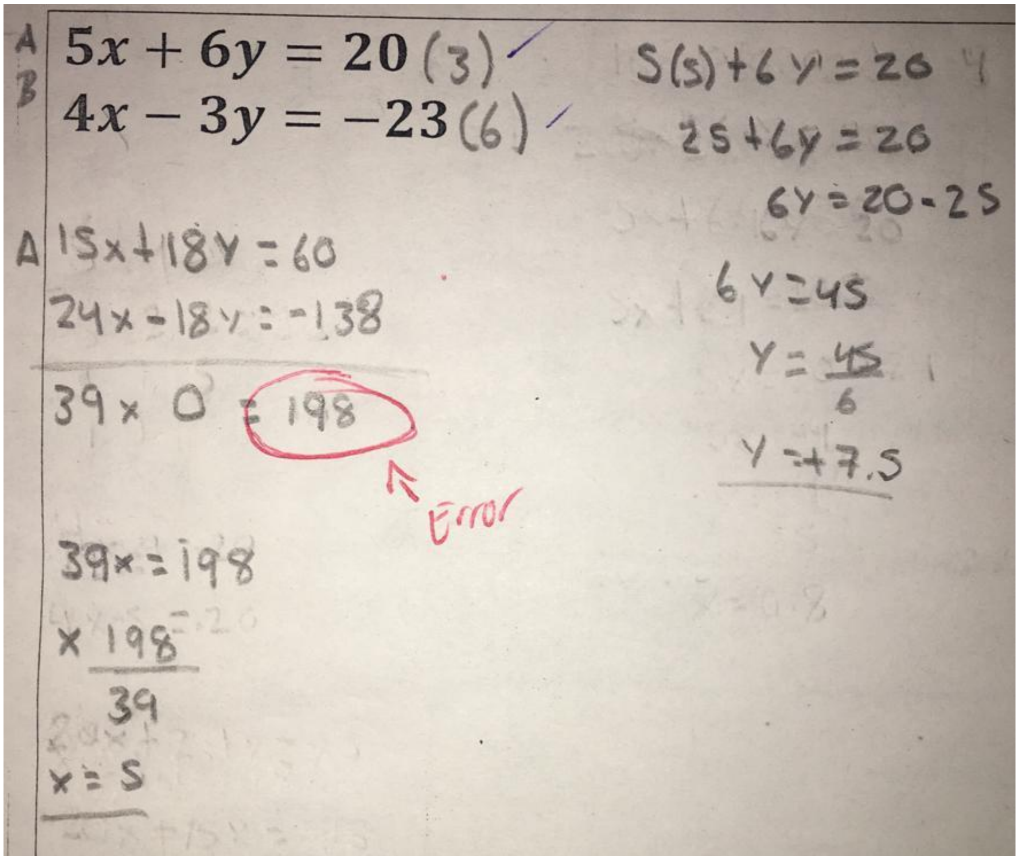
Respecto a la utilización del método de reducción, 5 alumnos mostraron evidencia de conocer el algoritmo ya que para resolver el sistema comenzaron multiplicando ambos miembros de las dos ecuaciones por los números que les convenía para que una de las incógnitas tuviera el mismo coeficiente en ambas, después restaron las dos ecuaciones resultantes para eliminar una incógnita y la resolvieron para encontrar el valor de la que les había quedado, por último sustituyeron este valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para calcular la segunda incógnita.

Figura 13
Error de procedimiento



Al igual que en los otros dos métodos, también se presentaron algunos errores similares, como el que muestra la Figura 14, que hace alusión a un error del álgebra que tiene su origen en la aritmética (Ruano, Socas y Palarea 2008) pues el alumno al restar los segundos miembros de las dos ecuaciones deduce que 60-138=198.

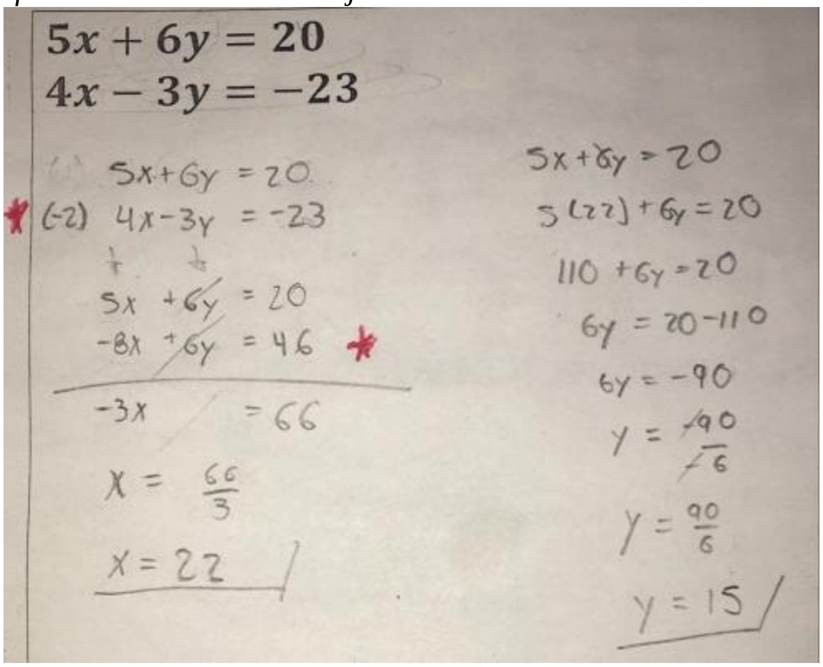
Figura 14
Error de cálculo



Cuatro de los cinco alumnos que mostraron tener conocimiento de este método, no mostraron dificultad para identificar por qué factor multiplicar ambos miembros de las dos ecuaciones para hacer que una de las incógnitas de ambas ecuaciones tuviera el mismo coeficiente, el error que el otro alumno mostró es el que se presenta en la Figura 15 donde se identifica que el alumno multiplica por -2 la segunda ecuación con la intención de igualar el coeficiente de la incógnita y de la primera ecuación, lo que provoca que obtenga como resultado $-8x + 6y = 46$. Después de este proceso se identifica que el alumno comete un error en la reducción de términos debido a una dificultad en la simplificación de términos semejantes (Villanueva 2015, como se citó en Luna 2018).

Figura 15

Error en la simplificación de términos semejantes



Como se puede ver en todas las evidencias donde los alumnos de tercero de secundaria respondieron al cuestionario, ninguno realizó la comprobación de los valores obtenidos en las incógnitas, lo que no les permitió darse cuenta si los valores encontrados eran correctos. Esto puede deberse a una dificultad en el proceso de comprobación de que en efecto el conjunto encontrado es solución (Segura 2004; Velasco 2012, como se citó en Luna 2018).

Conocimientos Previos.

Otro elemento que incorpora el análisis didáctico y que nos permitirá tomar decisiones sobre el diseño de las actividades, es la consideración de los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes, para ello, la aplicación de un cuestionario diagnóstico nos permitió recabar información sobre qué tanto saben los alumnos de secundaria respecto a las partes de una expresión algebraica, partes de una ecuación, despejes y transición de un lenguaje natural al algebraico. Puesto que estos son los conocimientos previos necesarios para introducir el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

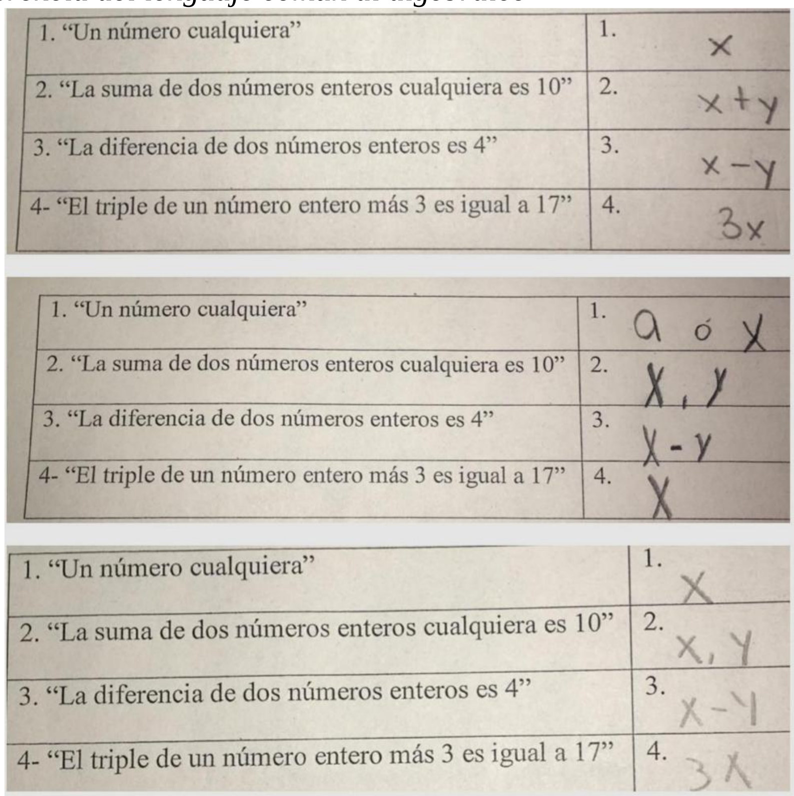
Este cuestionario (ver Anexo 2) se implementó únicamente a 5 alumnos de segundo grado de secundaria pertenecientes a la escuela secundaria técnica #28 ubicada en la comunidad de Malpaso, Villanueva, Zacatecas, el día 5 de noviembre del año en curso y se aplicó de la misma manera que el cuestionario anterior tomando todas las medidas de prevención necesarias. Es importante mencionar que estos mismos alumnos conformarán parte de la población a la cual se aplicará la propuesta diseñada en este trabajo. Los resultados fueron los siguientes:

- Los cinco alumnos saben las partes de una expresión algebraica
- Los alumnos consideran a una ecuación como una igualdad entre dos expresiones y como dos expresiones que tienen una o más variables.
- Los cinco alumnos identifican las partes de una ecuación
- Cuatro alumnos mostraron evidencia de saber realizar el despeje de una incógnita, el otro alumno no mostró evidencia de haberlo intentado.
- Tres alumnos tienen dificultad en la transición de un lenguaje natural al algebraico (Villanueva, 2015 como se citó en Luna 2018).

Sobre este último punto, la Figura 16 muestra las respuestas de estos 3 alumnos, donde se puede observar que sí representan un número cualquiera de manera adecuada, sin embargo, en los demás ejercicios no establecen la igualdad, aunque en el primer caso se percibe que el alumno identifica lo que es la suma, diferencia de dos números e incluso el triple de un número. Con respecto a ello, Segura (2004) señala que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje verbal al algebraico y Del Rio (2014) argumenta que estas dificultades pueden deberse a aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del álgebra, a las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrolla en las clases.

Figura 16

Errores en la transferencia del lenguaje común al algebraico



1. "Un número cualquiera"	1. x
2. "La suma de dos números enteros cualquiera es 10"	2. x+y
3. "La diferencia de dos números enteros es 4"	3. x−y
4- "El triple de un número entero más 3 es igual a 17"	4. 3x

1. "Un número cualquiera"	1. a ó x
2. "La suma de dos números enteros cualquiera es 10"	2. X, Y
3. "La diferencia de dos números enteros es 4"	3. X - Y
4- "El triple de un número entero más 3 es igual a 17"	4. X

1. "Un número cualquiera"	1. X
2. "La suma de dos números enteros cualquiera es 10"	2. X, Y
3. "La diferencia de dos números enteros es 4"	3. X-Y
4- "El triple de un número entero más 3 es igual a 17"	4. 3X

En suma, los principales errores cometidos por los alumnos y que se tomarán en cuenta para el diseño de la secuencia son los que se derivan de la falta de conocimientos previos, ya que en su mayoría los educandos presentaron errores en el proceso de despeje, en la ley de los signos y en la reducción de términos.

4.1.3 Dimensión Didáctica.

Este análisis presenta la manera en que se ha llevado a cabo el proceso de enseñanza del contenido matemático en cuestión, analizando los diferentes recursos didácticos y herramientas utilizados en el proceso. El estudio se llevó a cabo en cuatro partes, primero se realizó un análisis de cómo está siendo la dinámica de enseñanza y aprendizaje con los alumnos donde se aplicará la propuesta, después se realizó un análisis de dos diferentes libros de texto propuestos por la SEP, también se revisaron dos diferentes planes y programas de estudios y por último se analizó un recurso tecnológico disponible en la red de internet para la enseñanza de sistemas de ecuaciones.

La pandemia por el Covid-19 ha inducido a que las clases se realicen a través de una modalidad en línea, lo que ha provocado que la dinámica para la enseñanza y aprendizaje que se está llevando con los alumnos de la Secundaria Técnica #28 sea de la siguiente manera:

Debido a que no todos los alumnos de la comunidad de Malpaso tienen acceso a internet y no tienen la posibilidad de trabajar mediante plataformas como Meet, Moodle, Clasroom o Zoom el maestro va y entrega personalmente cuadernillos de trabajo en las papelerías que dispone la comunidad para que los alumnos vayan y les saquen copia para poder trabajar en casa, también utilizan los libros de texto y las clases que se transmiten por tv como recurso para el aprendizaje.

Los alumnos argumentan que se les dio la indicación de que aquellos que tienen acceso a internet pueden ver videos en YouTube o buscar información en la red para resolver sus dudas y con ello apoyar a sus compañeros. Asimismo, para aquellos que no tienen esta posibilidad, se les pidió que se apoyaran de sus familiares para resolver las actividades. Es importante destacar que la comunicación entre maestro-alumno se mantiene a través de mensajes vía *WhatsApp* y llamadas telefónicas ya que según los alumnos de esta manera se les facilita.

Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) de 2x2 con Coeficientes Enteros en los Libros de Texto.

La Secretaría de educación pública ofrece un gran catálogo de libros de texto de los cuales los docentes pueden elegir para implementarlos en clase. A continuación se presenta el análisis a dos de estos libros, con el fin de poder identificar la manera en la que se da tratamiento al contenido matemático en cuestión. El criterio para elegir estos libros es que en un primer análisis se identificaron dos diferentes métodos para atender al contenido.

Libro 1.

El primer libro analizado lleva por título “Matemáticas 2. Secundaria. Conect@ estrategias” (García y Block, 2018). En este libro los autores abordan el contenido de sistemas de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros en el bloque 5, y se trabaja después de atender la representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2x2 con coeficientes enteros donde se reconoce al punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.

El aprendizaje esperado que marca este libro con respecto al contenido se sistemas, es que el alumno resuelva problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, al inicio de la lección 91 (p.230) se menciona que el alumno conocerá varias técnicas para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sin graficar, donde todas las técnicas buscarán lo mismo; manipular las ecuaciones con dos incógnitas para obtener una nueva ecuación con una sola.

La primera lección que lleva por nombre “técnicas para resolver sistemas de ecuaciones” comienza pidiendo al alumno que resuelva un sistema de ecuaciones sin graficar y verifique que la solución satisfaga a ambas. El sistema que se presenta es el siguiente:

$$\begin{gathered} 3a + 2b = 9 \\ 2a + b = 5 \end{gathered}$$

Posterior a ello, se pregunta al alumno ¿cómo se puede obtener una ecuación con una incógnita, ya sea a o b?, es decir ¿cómo se puede eliminar una de las incógnitas? Y a partir de esto se presenta la técnica de la sustitución (ver Figura 17) dónde se especifica que la clave es sustituir, en una de las ecuaciones, una de las incógnitas por su valor en términos de la otra.

Figura 17

Técnica de sustitución, en García y Block (2018, p.230)

Paso	Qué queremos	Transformación de las ecuaciones	Qué logramos
1	Queremos expresar el valor de una incógnita en términos de la otra. Para ello se escoge cualquiera de las ecuaciones y se "despeja" una incógnita. En este caso, escogeremos la segunda y despejaremos b, porque es más sencillo.	$2a + b = 5$ ↓ $b = 5 - 2a$	Ya conocemos el valor de b, expresado en términos de a. Es $5 - 2a$.
2	En la ecuación que no hemos usado sustituimos b por su valor: $5 - 2a$.	$3a + 2b = 9$ ↓ $3a + 2(5 - 2a) = 9$	Hemos obtenido una ecuación con una incógnita.
3	Resolvemos la ecuación con una incógnita.	$3a + 10 - 4a = 9$ ↓ $a = 1$	Encontramos que a vale 1.
4	Conocer el valor de b será fácil ahora que sabemos, gracias al paso 1, que $b = 5 - 2a$. Sustituimos a por su valor, que es 1.	$b = 5 - 2a$ ↓ $b = 5 - 2(1) = 3$	Encontramos que b vale 3.
5	Entonces $a = 1$ y $b = 3$. Falta verificar que los valores satisfagan las dos ecuaciones.	$3(1) + 2(3) = 9$ $2(1) + 3 = 5$	Los valores $a = 1$ y $b = 3$ sí resuelven las dos ecuaciones.

Después en el ejercicio siguiente se hace mención a que cuando una técnica se ha comprendido hay que practicarla para dominarla, por lo que se le solicita al alumno que se reúna con un compañero y apliquen la técnica anterior para resolver 4 sistemas de ecuaciones.

Para finalizar esta lección se le pide al alumno que plantee dos ecuaciones para cuatro diferentes problemas presentados en lenguaje algebraico. Y los resuelva utilizando el método gráfico, la técnica de sustitución o por ensayo y error.

La siguiente lección llamada "técnicas para resolver sistemas de ecuaciones ll" comienza pidiendo al alumno que reunido con un compañero completen las siguientes sumas, dando la indicación de que sumen los dos miembros izquierdos de las igualdades y verifiquen si el resultado coincide con el que se obtiene al sumar los dos miembros derechos:

$$l. 9 + 3 = 5 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$ll. 1 + 10 = 7 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$III. 9 + 3 + 1 + 10 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Cuando el alumno concluye este ejercicio, se les presenta la siguiente información y se pide que le den lectura: Cuando se suman “miembro a miembro” dos igualdades se obtiene siempre una nueva igualdad:

$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{\quad c = d \quad} \\ a + c = b + d \end{array}$$

Enseguida, se les pide que verifiquen si sucede lo mismo si se restan miembro a miembro dos igualdades. Posterior a ello se les dice que la técnica para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas llamada “de suma o resta” se basa en el principio anterior. Donde la idea es sumar o restar miembro a miembro las dos ecuaciones de manera que se “elimine” una incógnita, quedando una nueva ecuación con una sola.

Para aplicar lo anterior se le pide al alumno que resuelva un sistema de ecuaciones donde las ecuaciones tienen términos opuestos, es decir que al sumarse alguna de las incógnitas daba como resultado cero. Además se daba otro ejemplo donde las ecuaciones del sistema no tenían términos opuestos. Posterior a ello, se le pide al alumno que completen la resolución de un sistema de ecuaciones utilizando esta misma técnica, donde además se describe el procedimiento (ver Figura 18).

Para finalizar esta lección, se le pide al alumno que resuelva 5 sistemas de ecuaciones utilizando la técnica de suma o resta.

En la siguiente lección titulada “Problemas diversos y una técnica más” se pide al alumno que reunido con un compañero formulen para tres problemas diferentes (presentados en libro en lenguaje común) un sistema de ecuaciones y lo resuelvan en su cuaderno utilizando la técnica que prefieran. Posterior a ello se pide que con ayuda del profesor comparen el sistema de ecuaciones que formularon para cada problema y en caso de no coincidir con el de los demás compañeros, identificar si hay algún error.

Figura 18

Aplicación de suma y resta, en García y Block (2018, p.233)

Técnica de suma y resta	
Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por −5.	$2x + 3y = 8$ $-5(2x + 3y) = -5(8)$ $-10x - 15y = -40$
Multiplicamos los dos miembros de la segunda por 2.	$5x + 2y = 9$ $2(5x + 2y) = 2(9)$ $10x + 4y = 18$
Sumamos miembro a miembro las ecuaciones obtenidas.	$-10x - 15y = -40$ $\underline{10x + 4y = 18}$ $0 - 11y = -22$
Resolvemos la ecuación que obtuvimos con una incógnita.	$y =$ ____
Sustituimos y por su valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Resolvemos la ecuación con incógnita x que obtenemos.	Ecuación de incógnita x: ____ $x =$ ____

Posteriormente se menciona el aprendizaje de una tercera técnica analítica, llamada “de igualación”, donde su principio es despejar una misma incógnita en las dos ecuaciones. Para ello se pide al alumno que completen en la tabla de la Figura 19 la resolución del siguiente sistema:

$$2x + y = 6$$
$$x + y = 3$$

Figura 19

Técnica de igualación en García y Block (2018, p.235)

Técnica de igualación	
Pasos a seguir	Ejecución de los pasos
Paso 1. Se despeja x o y en ambas ecuaciones. En este caso es más sencillo despejar y.	Despeje de y en la primera ecuación: $2x + y = 6$ $y = 6 - 2x$ Despeje de y en la segunda ecuación: $x + y = 3$ $y =$ ____
Paso 2. Se “igualan” los valores de y obtenidos en el paso 1. Así se obtiene una ecuación con una sola incógnita.	$6 - 2x =$ ____
Paso 3. Se resuelve la ecuación anterior para obtener el valor de x.	$x =$ ____
Paso 4. Se usa el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el de y.	$y =$ ____

A continuación, se pide al educando que en su cuaderno resuelvan cuatro sistemas utilizando la técnica anterior.

Para finalizar esta lección, se incluye un problema donde se pide al alumno que encuentren la solución y verifiquen que cumpla con las condiciones del problema. Por último, se proporciona un sistema de ecuaciones y se pide que con base en él, escriban el problema representado por este sistema y lo resuelva para después con ayuda del profesor compararlo con los otros equipos.

Libro 2.

El segundo libro analizado lleva por título “Matemáticas 2” (Escareño y López, 2017). Al igual que el libro anterior, el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con dos incógnitas se presenta en el bloque 5, sin embargo, en este segundo libro la graficación de un sistema de ecuaciones se ve después y no antes de los métodos de sustitución, igualación y reducción..

La lección que lleva por título “sistemas de ecuaciones con dos incógnitas” (p. 222) introduce al contenido planteando el siguiente problema: En una papelería, la vendedora cobró $155 por 4 cuadernos y 5 lápices. Luego cobró $100 por 2 cuadernos y 4 lápices. De acuerdo con esta información, se le pregunta al alumno cuales de las afirmaciones son ciertas y cuales falsas, además de que corrijan la que sean falsas. Las opciones son las siguientes:

l. 2 cuadernos y 1 lápiz cuestan $55
ll. 8 cuadernos y 10 lápices cuestan $310
lll. 6 cuadernos y 9 lápices cuestan $255
lV. 2 cuadernos y 3 lápices cuestan $90

Para la exploración y discusión se hacen la siguientes preguntas: ¿Es cierta la afirmación l, ll, lll y lV? ¿De qué manera verificas tu respuesta? Después se pide al alumno que compare sus respuestas con sus compañeros y en caso de no coincidir explicar las razones en que se basaron para llegar a un acuerdo. Después, para establecer el sistema de ecuaciones se designa con la literal x el precio de un cuaderno y con la literal y el precio de un lápiz y se le pregunta al alumno ¿qué ecuación puede representar cada una de las dos ventas que hizo la papelería?

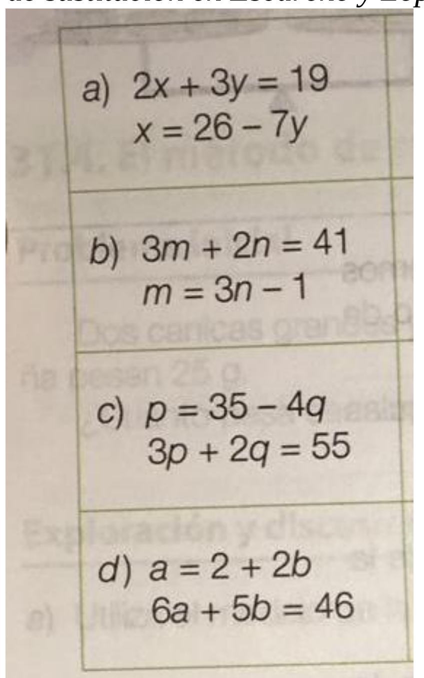
Después de que el alumno establece el sistema de ecuaciones aparece la siguiente definición: Al par de ecuaciones con que se representan las dos ventas se le llama sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Posterior a ello se le pide que indique las operaciones que deben efectuar en las ecuaciones para calcular el precio de un cuaderno y un lápiz. Coordinados por el docente deben explicar el proceso de resolución y responder a las siguientes preguntas ¿Qué propiedades de la igualdad se aplicaron en la resolución de este sistema de ecuaciones? y ¿Cómo pueden comprobar la solución que encontraron? Para finalizar esta primera parte, se incluyen dos actividades adicionales donde se pide al alumno que escriban y solucionen el sistema de ecuaciones a partir de la situación dada.

En la segunda parte se introduce el método de sustitución, para ello, se propone el siguiente problema inicial: Determina la medida de los lados de un triángulo isósceles de 50 cm de perímetro, si sabemos que el lado desigual mide 5 cm más, que cada uno de los lados iguales. Para la exploración y discusión se le pide al alumno que represente con la literal x la medida de los lados iguales y con la literal y la del lado desigual. Y se le pregunta al alumno ¿Qué ecuación representa el perímetro del triángulo? ¿Con que ecuación representas la medida del lado desigual en términos de la medida del lado desigual? ¿Cómo reduces las dos ecuaciones con dos incógnitas anteriores, a una sola ecuación con una incógnita?

Más adelante se formaliza que esta forma de resolver un sistema de ecuaciones recibe el nombre de método de sustitución. Además, después de preguntarle al alumno ¿Cuánto miden los lados iguales del triángulo isósceles? ¿El lado desigual?, se le pide que escriban en sus cuadernos en qué consiste este método, para que junto al profesor determinen cuál de las redacciones es más clara y eficaz. Como actividades adicionales se pide que resuelvan los sistemas de ecuaciones presentados en la **¡Error! La autoreferencia al marcador no es válida.** y otros problemas donde es necesario establecer el sistema a partir del problema presentado en lenguaje común.

Figura 20
Sistema para trabajar el método de sustitución en Escareño y López (2017, p.225)



a) $2x + 3y = 19$
$x = 26 - 7y$

b) $3m + 2n = 41$
$m = 3n - 1$

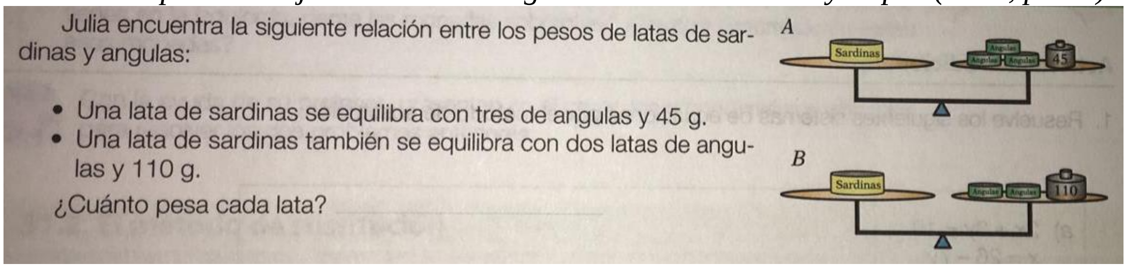
c) $p = 35 - 4q$
$3p + 2q = 55$

d) $a = 2 + 2b$
$6a + 5b = 46$

Para introducir el método de igualación, se propone el problema presentado en la Figura 21. Y para su exploración y discusión se pregunta al alumno ¿Qué acciones deben realizarse en las balanzas para que, al final nos quedemos con una sola balanza en la que podamos ver el peso de una lata de sardinas o de una de angulas? ¿Qué sucede si sustituyes la lata de sardinas de la balanza B por tres de angulas y 45g? ¿Seguirá en equilibrio la balanza B? ¿Qué otras acciones puedes realizar en la balanza B para dejar en el platillo de la izquierda una lata de angulas, y que además la balanza siga en equilibrio? ¿Cuánto pesa cada lata de angulas? ¿Cuánto pesa cada lata de sardinas?, si x representa el peso de una lata de angulas y y el de una lata de sardinas ¿Qué ecuaciones representan las situaciones de las balanzas A y B? ¿Cómo representas algebraicamente las acciones que realizas en las balanzas para hallar el peso de cada lata?

Figura 21

Problema inicial para trabajar el método de igualación en Escareño y López (2017, p.226)



Julia encuentra la siguiente relación entre los pesos de latas de sardinas y angulas:

- Una lata de sardinas se equilibra con tres de angulas y 45 g.
- Una lata de sardinas también se equilibra con dos latas de angulas y 110 g.

¿Cuánto pesa cada lata?

Posterior a que el alumno responda a estas interrogantes, se formaliza que la representación algebraica de las ecuaciones realizadas en las balanzas para hallar los valores desconocidos del problema (el peso de una lata de sardinas y el de una lata de angulas), recibe el nombre de método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones. Después coordinados por el profesor se le pide al alumno que escriba en su cuaderno en qué consiste el método de igualación. Cómo actividades adicionales se proponen 6 sistemas de ecuaciones y dos problemas para resolverlos aplicando este método.

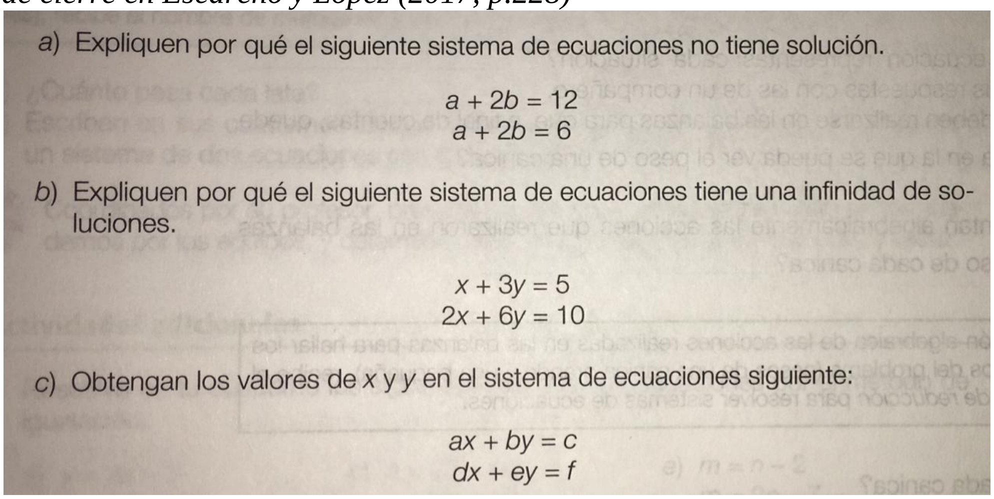
Para introducir al método de reducción se propone el siguiente problema inicial: Dos canicas grandes y tres pequeñas pesan 60g; una canica grande y una pequeña pesan 25g. ¿Cuánto pesa cada canica? Para su exploración y discusión se pide al alumno que utilice el modelo de la balanza para representar cada situación y se pide que responda a las siguientes preguntas ¿Con qué ecuación representas cada situación? ¿Qué acciones deben realizarse en las balanzas para que, al final de cuentas, quede una sola balanza en la que se pueda ver el peso de una canica? ¿Cómo representan algebraicamente las acciones que realizaron en las balanzas para hallar el peso de cada canica?

Después de que el alumno responda a estas interrogantes, se formaliza la representación algebraica de las acciones realizadas en las balanzas para hallar los valores desconocidos del problema (peso de una canica grande y una pequeña), recibe el nombre de método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones.

Enseguida de esto, se pregunta al alumno ¿Cuánto pesa cada canica? Y se pide que coordinados por el maestro escriban en su cuaderno el procedimiento que se puede seguir para resolver un sistema de ecuaciones mediante este método. Como actividades adicionales se pide al alumno que resuelva 6 sistemas de ecuaciones y 3 problemas aplicando el método de reducción.

Como cierre de este contenido, se pide al alumno contesten las actividades incorporadas en la Figura 22.

Figura 22
Actividad de cierre en Escareño y López (2017, p.228)



a) Expliquen por qué el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución.

$$a + 2b = 12$$
$$a + 2b = 6$$

b) Expliquen por qué el siguiente sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones.

$$x + 3y = 5$$
$$2x + 6y = 10$$

c) Obtengan los valores de x y y en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Del análisis de estos dos libros podemos establecer las siguientes principales similitudes y diferencias:

- En el libro uno se trabaja el método gráfico antes de los métodos de sustitución, igualación y reducción. En el libro dos es al revés.
- El libro 1 da al alumno la serie de pasos a seguir en cada uno de los métodos para luego proponer problemas donde se apliquen dichos procedimientos.
- El libro dos fomenta que el alumno descubra a través de situaciones problemáticas el procedimiento necesario para cada método y después lo formaliza para enseguida proponer diferentes problemas para su aplicación.

- El libro dos fomenta el uso de la balanza para establecer las igualdades.

Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 con Coeficientes Enteros en los Planes y Programas.

El programa de Aprendizajes Clave 2017, especifica que para secundaria además de la utilización de las herramientas aritméticas, son fundamentales las herramientas algebraicas, por un lado, para generalizar y expresar simbólicamente las propiedades de los números y sus operaciones; y por otro, para representar situaciones y resolver problemas que requieren de la comprensión de conceptos y dominio de técnicas y métodos propios del álgebra.

En este nivel escolar, según el programa 2017 se busca que los estudiantes aprendan álgebra a través del uso flexible de sus elementos fundamentales, a saber, números generales, incógnitas y variables en expresiones algebraicas, ecuaciones y situaciones de variación; en estas últimas, tanto en su expresión simbólica como en su representación por medio de tablas y gráficas cartesianas. En términos generales, se concibe a la aritmética y al álgebra como herramientas para modelar situaciones problemáticas —matemáticas y extramatemáticas—, y para resolver problemas en los que hay que reconocer variables, simbolizarlas y manipularlas.

Como se mencionó en la parte de la motivación, el plan de estudios 2011 y 2017 para secundaria precisan como aprendizaje esperado para el contenido de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, que el alumno "resuelva problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011, p. 43) y "resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" (SEP, 2017, p. 179). Sin embargo, el enfoque pedagógico que se menciona en el plan 2017 especifica (entre otros aspectos) que mediante actividades que utilizan herramientas tecnológicas es posible promover en los estudiantes la exploración de ideas y conceptos matemáticos, así como el análisis y modelación de fenómenos y situaciones problemáticas, para ello propone el uso del software libre GeoGebra que permite trabajar con distintas representaciones dinámicas de conceptos y situaciones, como la representación gráfica, la numérica y la algebraica.

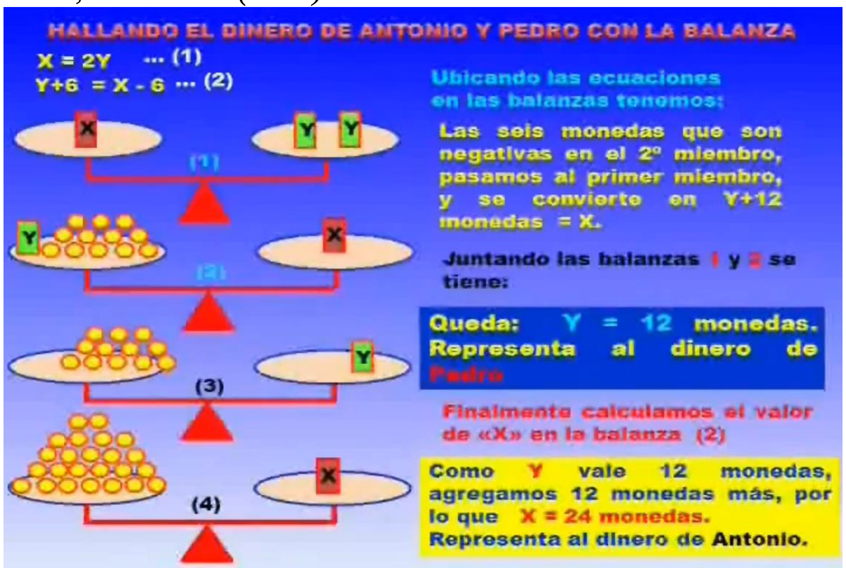
Por otro lado, como se pudo apreciar en la parte de los antecedentes, gran parte de las propuestas que se hacen para atender al contenido de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizan tecnología que tiene que ver con el uso de GeoGebra y lo usan para hacer transiciones entre representaciones, sin embargo, al indagar en la red de internet pudimos encontrar un video de Paucar, en el canal Divertimat (2014) en la plataforma de YouTube, donde se enseña este contenido a través del modelo de la balanza tal como lo muestra Rojano (2010) en enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado.

Este video inicia presentando una situación problema en lenguaje común a partir del cual se establece el sistema, luego de esto, se realiza el método de sustitución de manera algebraica para encontrar el valor de las dos incógnitas. Posterior a ello se realiza la demostración concreta del sistema de ecuaciones lineales mediante la utilización de la balanza, para ello se realiza lo siguiente:

1. Se ubican las dos ecuaciones del sistema en dos balanzas realizando previamente la transposición de términos necesaria para poder representar cada término de forma positiva en los platillos de la balanza (Ver Figura 23).
2. En una tercera balanza se juntan los platillos de las balanzas 1 y 2 y se eliminan los elementos comunes, dejando en la balanza solamente una incógnita para determinar su valor.
3. Finalmente se calcula el valor de la otra incógnita al sustituir los valores en una de las primeras balanzas.

Figura 23

Método de la balanza, Divertimat (2014)



En este video también se trabajan sistemas de ecuaciones lineales de 3x3 utilizando el mismo método de la balanza, sin embargo, se puede apreciar que en ningún momento se ilustran en los platillos de las balanzas términos negativos o bien la utilización del método de igualación y reducción.

4.1.4 Reflexión de los Análisis Preliminares

A manera de reflexión, los análisis preliminares nos permitieron dar sustento al diseño de nuestra propuesta didáctica. Respecto a la dimensión epistemológica, al conocer el origen de los sistemas de ecuaciones pudimos dar cuenta que aunque hoy en día contamos con toda una herramienta matemática para su solución, seguimos utilizando los mismos métodos para resolver ecuaciones que fueron descubiertos por los babilonios en la antigüedad y que la mayoría de las matemáticas que se enseñan hoy en día en las aulas tienen más de 200 años, por lo que es de nuestro interés darle un enfoque diferente al tratamiento de este contenido pretendiendo el empleo de los avances tecnológicos que tenemos a nuestro alcance hoy en día.

Respecto a la dimensión cognitiva pudimos apreciar que los alumnos de la Escuela Secundaria Técnica #28 después de trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros cometen errores y tienen dificultades en el empleo de los métodos, tales como errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética y dificultad de comprensión del concepto de igualdad y sus propiedades. La identificación de estos elementos así como el análisis de los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre este tema nos permitió tomar un referente para el diseño de las actividades que conformarán nuestra secuencia didáctica así como definir un punto de partida para su elaboración.

Por último sobre la dimensión didáctica, el análisis de los libros de texto nos permitió identificar los diferentes procesos que podemos seguir para darle tratamiento al contenido en nuestra propuesta, sin embargo creemos conveniente seguir el tratamiento que se le da al contenido en el libro 2 (Escareño y López, 2017), donde se fomenta que el alumno descubra a través de situaciones problema e indicaciones y preguntas el procedimiento necesario para aplicar el método. Esto debido a que identificamos que con la secuencia del libro 1 (García y Block, 2018) no se estaría atendiendo la problemática presentada en este trabajo.

Como se mencionó en el apartado del planteamiento del problema, el diseño de nuestra propuesta pretende la implementación de un applet diseñado en GeoGebra donde se utilice una balanza digital como recurso tecnológico. El análisis del video nos permitió identificar la manera en la que podemos atender al método de sustitución desde esta perspectiva, así como pensar que una manera de representar los términos negativos en la balanza puede ser mediante globos que "estiren" los platillos de la balanza hacia arriba. Asimismo, para el diseño de la propuesta se retomará el circuito de Rojano (2010) adaptado para atender al sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros y las sugerencias didácticas de Luna (2018).

En general, estos análisis preliminares nos permitieron prever acciones y elementos a incorporar en las actividades de la secuencia con el fin de presentar una manera diferente e interactiva de trabajar los sistemas.

4.2 Fase 2. Concepción y Análisis A-priori

Como se mencionó anteriormente, en esta segunda fase el objetivo es "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado" (Artigue, 1995, p. 45). Por lo que es en esta fase donde se presenta el diseño de la secuencia didáctica que ayudará en el proceso de construcción del conocimiento, misma que fue elaborada considerando los análisis preliminares.

4.2.1 La Secuencia Didáctica

Para llevar a cabo nuestra secuencia se consideraron dos sesiones de 90 minutos cada una (ver Anexo 3), para la primera sesión se presentan el momento uno y dos, cuyos propósitos son la atención a los conocimientos previos y la formulación de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros. Para la segunda sesión se plantean los momentos tres y cuatro, cuyos propósitos son que el alumno aprenda y reflexione sobre el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante la utilización del applet diseñado en Geogebra y evaluar los aprendizajes alcanzados.

Como en el análisis cognitivo se identificó que gran parte de los errores y dificultades cometidos por los alumnos se debían a la carencia de conocimientos previos, para el diseño de esta secuencia se optó por darles un tratamiento extenso al inicio de la actividad con la finalidad de asegurarnos que todos los alumnos los tuvieran y que al momento de introducir el nuevo contenido no les representara conflicto.

Atendiendo a la sugerencia didáctica de Luna (2018) con respecto a que se debe trabajar con problemas que contengan ecuaciones lineales con el signo negativo, en el rescate de los conocimientos previos se incorporó una ecuación donde al resolverla todos los términos quedan negativos, con la intención de prevenir errores y poder socializar que todos los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1, con lo cual la igualdad no varía.

Todos los momentos están diseñados con base en la Teoría de situaciones didácticas, el tercero de ellos, que atiende al contenido matemático en cuestión, es donde se espera que el alumno logre aprender el método de sustitución mediante el empleo del recurso tecnológico propuesto.

Asimismo, para atender a cada momento de esta secuencia, se diseñaron seis diferentes hojas de trabajo (ver

Anexo 4) cuya finalidad es atender al propósito descrito en cada uno de ellos. Considerando una de las sugerencias didácticas de Luna (2018), la manera en la que se pretenden trabajar las actividades en un primer momento es de manera individual para posteriormente reunirse en parejas, considerando un distanciamiento adecuado.

Para el momento cuatro de esta secuencia, se espera que a través de las fases de acción, formulación, validación e institucionalización el alumno logre resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando el método de sustitución y sin la utilización del applet.

Como se puede identificar, la práctica se llevará a cabo de manera presencial debido a las necesidades de la población con la que se trabajará y a los recursos tecnológicos que se requieren. Es importante mencionar que se tomarán todas las medidas preventivas como el uso de cubre bocas, mascarilla, distanciamiento físico, desinfectante de manos a base de alcohol, entre otras.

Considerando otra de las sugerencias didácticas de Luna (2018), para iniciar a trabajar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales con los estudiantes de secundaria, se considerará utilizar una balanza algebraica en el software libre GeoGebra con el objetivo de que el alumno pueda representar en los platillos el par de ecuaciones y pueda apreciar las igualdades. Por otro lado, los problemas que se les presentarán a los alumnos no se transcribirán de un libro de texto sino que estarán enfocados en un contexto real.

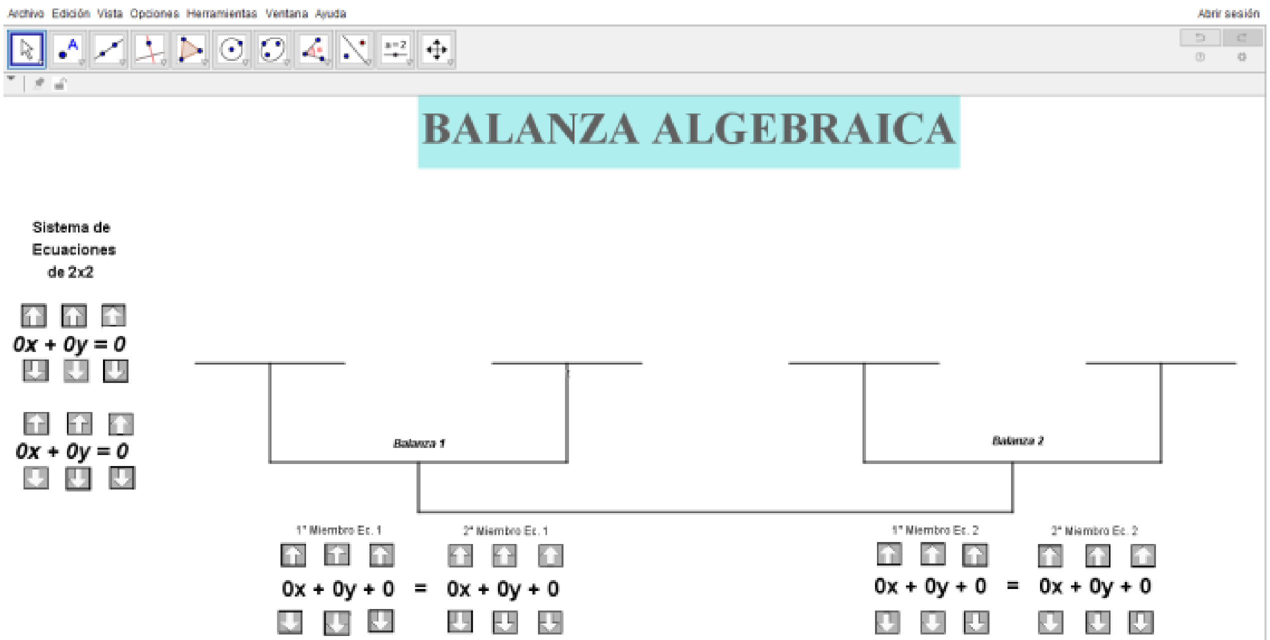
4.2.2 Circuito Didáctico Para el Funcionamiento del Applet

Recordemos que en el análisis didáctico, se hizo mención a que el enfoque pedagógico del plan de estudios 2017 propone el uso del software libre Geogebra como una herramienta tecnológica que permite trabajar con distintas representaciones dinámicas de conceptos y situaciones. Para nuestra propuesta, contamos con el apoyo de un Docente perteneciente a la

Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Zacatecas quién nos ayudó con la programación del applet en GeoGebra.

La implementación e interfaz del applet diseñado (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) para nuestra secuencia tiene el propósito de generar en el alumno una comprensión del concepto de igualdad y sus propiedades, puesto que al utilizar la analogía de una balanza le permite apreciar cómo el proceso de un despeje no debe alterar el equilibrio de la misma. Esto también ocurre cuando se aplica el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2, ya que al utilizar el applet el alumno podrá apreciar cómo la sustitución del valor de una de las incógnitas en la otra ecuación no debe alterar el equilibrio de la balanza y que en caso de que no exista equilibrio, el valor de las incógnitas despejada debe ser erróneo.

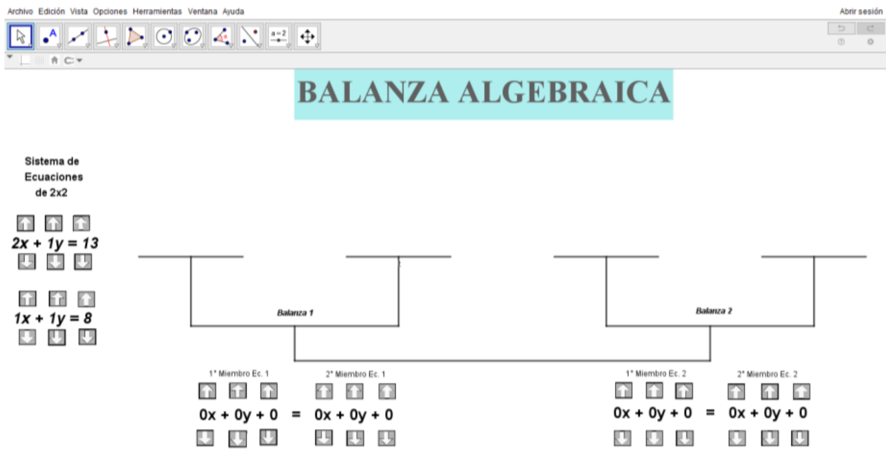
Figura 24
Interfaz del applet.



Considerando los elementos del circuito didáctico presente en Rojano (2010), se diseñaron los lineamientos para el funcionamiento del applet como recurso tecnológico, mismos que se presentan a continuación:

1. Familiarización del alumno con una balanza doble. Una vez establecido el sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros a partir del problema dado, el alumno deberá reproducirlo en la parte izquierda debajo del título "Sistema de ecuaciones de 2x2" utilizando los botones que están encima y debajo de las expresiones "$0x + 0y = 0$" (ver Figura 24**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) ya que esto establecerá el equilibrio en las balanzas al modificar las cantidades en los platillos. Para mostrar un ejemplo del uso del applet se mostrará cómo resolver el sistema de ecuaciones ya establecido en la Figura 25.

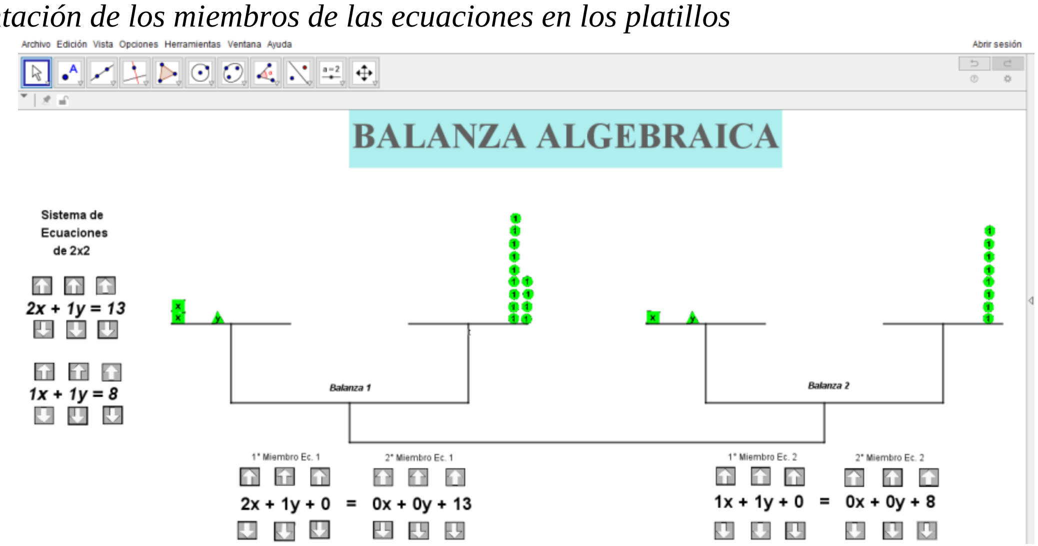
Figura 25
Establecer sistema de ecuaciones



2. Representación de las dos ecuaciones que componen el sistema en las dos balanzas. Luego de que se tenga representado en el applet el sistema de ecuaciones a resolver, el alumno deberá representar cada miembro de las dos ecuaciones en los platillos de las dos balanzas utilizando los botones de la parte inferior. Como se puede apreciar en la Figura 26, el platillo uno de la balanza 1 representa el primer miembro de la ecuación uno, el platillo dos de la balanza 1 representa el segundo miembro de la ecuación uno, el primer platillo de la balanza 2 representa el primer miembro de la ecuación dos y el segundo platillo de la balanza dos representa el segundo miembro de la ecuación dos.

Figura 26

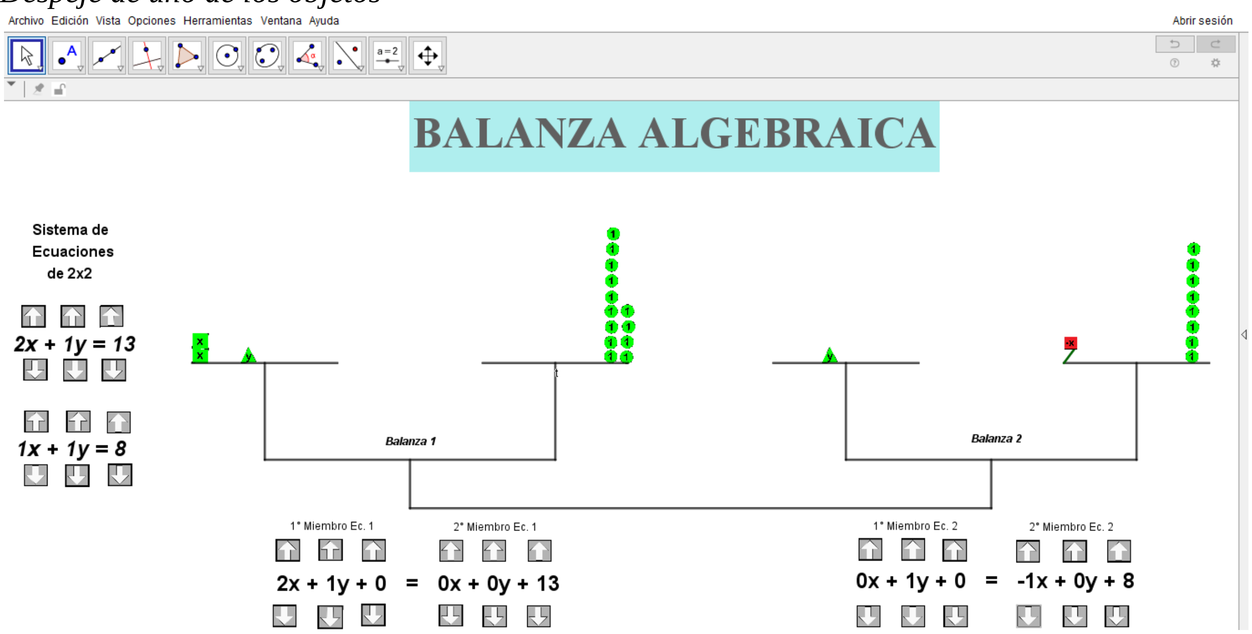
Representación de los miembros de las ecuaciones en los platillos



3. Resolución de sistemas de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por el método de sustitución de objetos entre las balanzas. Cuando ya se tenga en los platillos la representación de los miembros de las ecuaciones, el alumno deberá manipular los platillos de la balanza 1 o balanza 2 para poder apreciar el peso de uno de los objetos. La Figura 27 muestra el resultado de manipular la balanza 2 y muestra el peso del objeto *y*, nótese que en la segunda balanza se representa el despeje de la incógnita *y* pues en el primer platillo de la balanza 2 queda únicamente *y* y en el segundo platillo de la balanza 2 queda su equivalencia (determinar la ecuación de una de las balanzas que muestre el peso de uno solo de los objetos).

Figura 27

Despeje de uno de los objetos

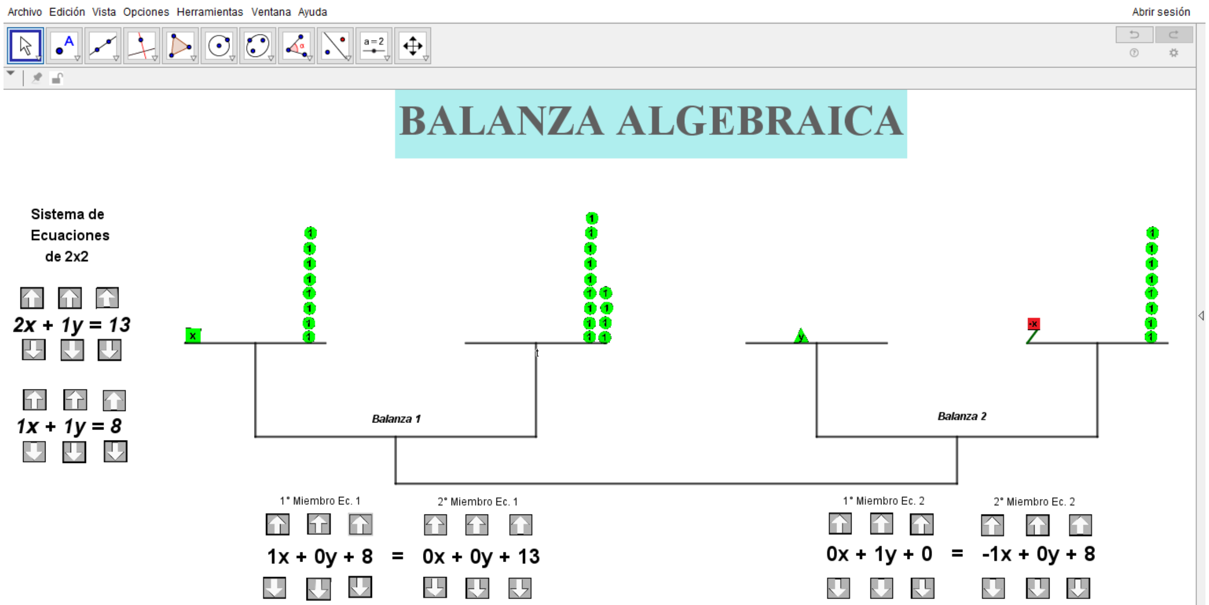


4. Determinar la ecuación de la otra balanza en función del peso de uno de los objetos ya encontrado en la balanza anterior (fomentando la sustitución). Una vez que el alumno pueda ver el peso de alguno de los objetos, deberá manipular los platillos de la otra balanza utilizando sólo el peso de uno de los objetos. En este caso, la Figura 28 muestra que lo que se hizo fue sustituir en la balanza 1 el peso del objeto *y* encontrado en la balanza 2 anteriormente. Nótese que en la

balanza 1 se sustituyó la y por su equivalencia por lo que en el primer platillo en lugar de tener $2x + y$ se obtuvo como resultado $x + 8$ despues de la sustitución.

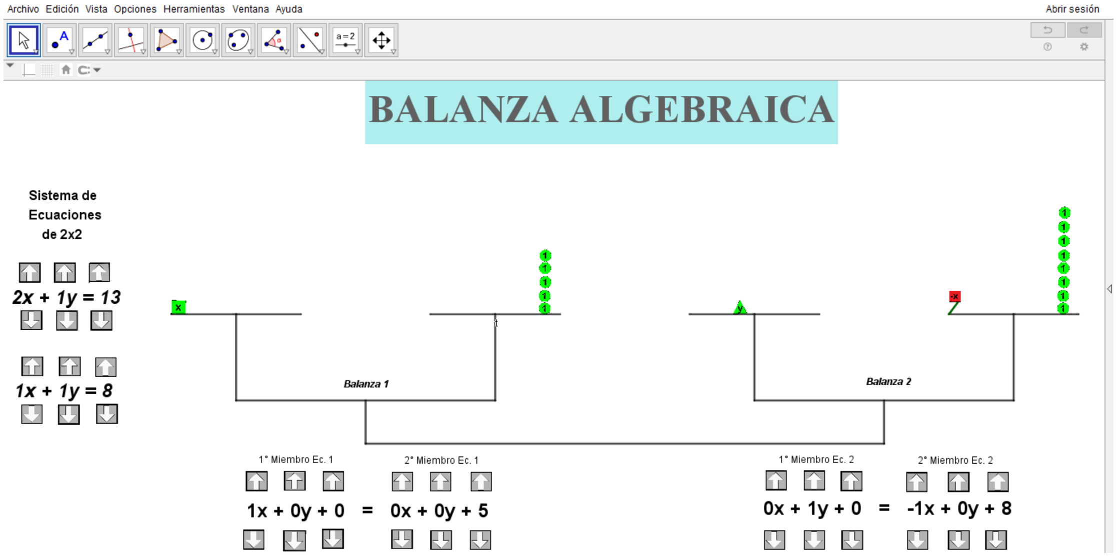
Figura 28

Sustitución de la otra balanza utilizando el peso del objeto encontrado



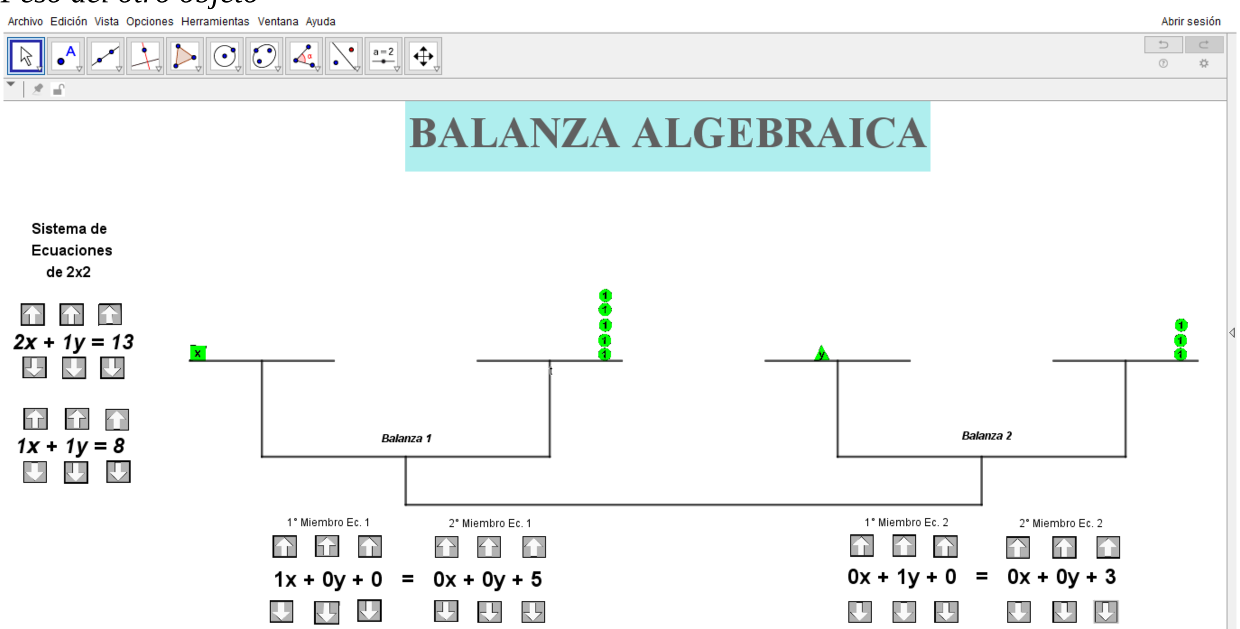
5. Determinar la ecuación de la balanza anterior que muestre el peso de uno de los objetos. Posteriormente cuando ya se tenga una de las balanzas en función del peso de uno solo de los objetos, deberá encontrar el peso de ese otro objeto manipulando los platillos. Para nuestro ejemplo, la Figura 29 muestra que lo que se modificó fue la balanza 1 para poder encontrar el peso del objeto x a partir de la sustitución realizada anteriormente. Nótese que en la balanza 1 se puede apreciar que $x = 5$.

Figura 29
Peso de un objeto



6. Determinar la ecuación en la primera balanza manipulada que muestra el peso del otro objeto. Luego que se tenga el peso de uno de los objetos, deberá encontrar el peso del otro objeto realizando la sustitución en la ecuación despejada en el paso 3. Así, observe que en la Figura 30 lo que se hizo en el ejemplo fue sustituir en la balanza 2 el valor del objeto encontrado anteriormente en la balanza 1, por lo que en la balanza 2 se puede apreciar que $y = 3$.

Figura 30
Peso del otro objeto



7. Realizar comprobación del peso de los objetos en el cuaderno. Al tener los pesos de los objetos el alumno deberá comprobar en su cuaderno si estos valores satisfacen el sistema.

En suma, el uso de esta herramienta permitirá trabajar los métodos de una manera dinámica, ya que le brindará al alumno la oportunidad de poder manipular la balanza y apreciar el método algebraico involucrado de una manera más ilustrativa. Como menciona Rojano (2010) una de las bondades didácticas de este recurso es que con el uso de la balanza se recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica.

4.2.3 Variables Didácticas

Recordemos que Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando sobre las que el investigador actúa según las considere pertinentes con relación al problema estudiado: Las variables macro didácticas y las variables micro-didácticas.

Para el diseño de esta propuesta se tomaron en cuenta las siguientes variables macro-didácticas concernientes a la organización global:

- La secuencia didáctica está organizada en cuatro momentos, mismos que se llevarán en dos sesiones.
- Debido a las necesidades de los alumnos, la práctica se llevará de manera presencial, para ello se tomarán todas las medidas preventivas como el uso de cubre bocas, mascarilla, distanciamiento físico, desinfectante de manos a base de alcohol, entre otras.
- La organización de los alumnos para trabajar las actividades será individual y en parejas.
- La entrega de las hojas de trabajo se realizará conforme se vaya avanzando en los momentos.

- Cada alumno tendrá la oportunidad de interactuar con el applet de manera individual, se puede implementar en cualquier computadora descargando la aplicación de GeoGebra previamente.
- Se deberá contar con un proyector o pantalla que permita la buena visibilidad al momento de la explicación del uso del applet.
- Se le dará mucho énfasis al tratamiento de los conocimientos previos.
- Cada una de las fases llevadas a cabo en el momento 3 se realizará en 15 minutos.
- Para el buen manejo del applet, es fundamental una explicación previa del interfaz que le permita al alumno comprender el uso de los botones y su funcionamiento en la balanza.

En cuanto a las variables micro-didácticas concernientes a la organización de la secuencia se tomaron en cuenta las siguientes:

- En la resolución del primer sistema de ecuaciones lineales de 2x2 utilizando el applet se apoyará al alumno en todo momento puesto que el uso del Software posiblemente sea algo nuevo para ellos, sus dudas se responderán a maneras de ejemplos utilizando el applet.
- Para el segundo sistema de ecuaciones el maestro fungirá como guía y dejará al alumno que lo resuelva por sus propios medios, si existen preguntas o dudas, más que dar soluciones se realizarán intervenciones adecuadas que lleven al alumno a encontrar por méritos propios la respuesta.
- Los sistemas de ecuaciones planteados para utilizar en el applet no deberán utilizar coeficientes enteros tan grandes con la finalidad de no saturar los platillos de la balanza.

- Para establecer las ecuaciones, se utilizarán las literales x e y debido a que estas son las que se involucran en el applet.
- Los tipos de problemas involucrados en la utilización del applet estarán ligados al peso de objetos debido a que el uso de la balanza implica dicha magnitud.
- Se buscará que las respuestas a los sistemas de ecuaciones sean números enteros ya que el contenido en secundaria así lo requiere, además el applet no permite trabajar con fracciones.

4.2.4 Análisis A-priori

Como se hizo mención en párrafos anteriores, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis donde se debe describir lo que suponemos que puede pasar con la aplicación de la propuesta, por lo que a continuación se describirán los momentos de la secuencia didáctica cuya organización está en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas (ver Anexo 3).

Sobre el contrato didáctico, en los cuatro momentos el profesor asumirá la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos por lo que a cada pregunta o duda que tengan alrededor del proceso de enseñanza se le dará tratamiento, procurando en todo momento fomentar su aprendizaje con respecto al contenido. En cuanto a la devolución, para hacer que el alumno acepte la responsabilidad de su propio aprendizaje durante las actividades que implican las hojas de trabajo, se tratará de guiarlo a través de preguntas sin dar respuestas concretas sobre las dudas que tengan, de manera que se le ayude a encontrar sus propias respuestas.

Momento 1.

Propósito: Atender y reforzar en los alumnos los conocimientos previos necesarios para introducir al contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

Material: Hojas de trabajo #1 y #2 (Ver Anexo 4).

Situación de acción. Para trabajar los sistemas de ecuaciones es necesario que el alumno posea algunos conocimientos previos como el de expresión algebraica, ecuación y cada una de las partes que las conforman así como el proceso implicado en un despeje, para atender a ello se comenzarán planteando las hojas de trabajo #1 y #2 donde se espera que la situación de acción se dé cuando los alumnos comiencen a resolverlas y tomen las decisiones que hagan falta para transferir los enunciados dados en lenguaje común al algebraico y resolver las ecuaciones de primer grado con un incógnita.

Para comenzar con la hoja de trabajo #2 será necesario (con el fin de optimizar tiempo) primero explicar que el despeje es un proceso que consiste en modificar una ecuación hasta que la variable o incógnita deseada quede aislada en cualquiera de los miembros de la igualdad. Otra manera de darle tratamiento sería verificar lo que los alumnos saben a través de la resolución de algunos ejercicios y apoyarse de ellos para que mediante sus participaciones llegar a formalizar el proceso de despeje.

Situación de formulación. Una vez que los alumnos hayan contestado individualmente por partes las actividades implicadas en las dos hojas de trabajo como se tiene previsto en la planeación, se espera que esta situación se dé cuando se pida a los educandos que en parejas comuniquen sus estrategias utilizadas y resultados, dialogando sobre si son las mismas o si varían, determinen a qué se debe, puesto que el objetivo de esta situación es la comunicación de informaciones.

La Figura 31 muestra las respuestas a las que se espera que lleguen los alumnos al resolver la hoja de trabajo #1.

Entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pueden cometer al resolver esta actividad se encuentran los siguientes:

- Error en la transición de un lenguaje natural al algebraico, puesto que el alumno puede confundir la diferencia con una división, o el triple de un número con una potencia.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, por ejemplo se le puede olvidar como representar un número cualquiera en álgebra.
- Dificultad en la comprensión del concepto de igualdad, por ejemplo al no saber cómo establecer la igualdad entre dos expresiones pues están acostumbrados a ver solo números del lado derecho del igual.

Figura 31

Respuestas esperadas en la hoja de trabajo #1

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico
"Un número cualquiera"	x	"Un número más dos es igual a ocho"	$x+2=8$
"La suma de dos números diferentes"	$x+y$	"Un número menos cuatro es igual a 20"	$x-4=20$
"La diferencia de dos números diferentes"	$x-y$	"La diferencia de dos números más 8 es igual a 22"	$x-y+8=22$
"La multiplicación de dos números diferentes"	xy	"La suma de dos números diferentes menos tres es igual a diez"	$x+y-3=10$
"El triple de un número más tres"	$3x+3$	"El triple de un número más tres es igual a este número más siete"	$3x+3=x+7$

La Figura 32 muestra las respuestas a las que se espera que lleguen los alumnos al resolver la hoja de trabajo #2.

Figura 32

Respuestas esperadas en la hoja de trabajo #2

Indicación: Resuelve las siguientes ecuaciones. No olvides comprobar.

$a+2=8$	$b-4=20$	$2c+3=18$	$2y-15=0$
a=8-2 a=6	b=20+4 b=24	2c=18-3 2c=15 C=15/2 C=7.5	2y=15 y=15/2 y=7.5

Indicación: Resuelve las siguientes ecuaciones

$5x=3x+40$	$x+30+x+25=7x$	$9x-10x=-7$
5x-3x=40 2x=40 x=40/2 x=20	2x-7x=-25-30 -5x=-55 x=-55/-5 x=11	-1x=-7

Entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pueden cometer al resolver esta actividad se encuentran los siguientes:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Por ejemplo, al resolver la ecuación $x+30+x+25=7x$ el alumno puede cometer un error al agrupar las constantes del primer miembro. Lo que también refiere a una dificultad en la simplificación de términos semejantes.
- Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento. Por ejemplo los alumnos pueden utilizar de manera inapropiada el procedimiento para despejar las incógnitas.
- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Por ejemplo, cuando los alumnos visualizan el símbolo de igualdad únicamente de manera unidireccional, es decir que asocian lo que está en el miembro izquierdo

como la operación y lo de lado derecho como el resultado. Lo que también refiere a la dificultad en la comprensión del concepto de igualdad y sus propiedades.

- Dificultad en el empleo de la ley de los signos, por ejemplo en la última ecuación cuando el alumno quiera cambiar la ecuación $-x = -7$ a $x = 7$.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, por ejemplo al no recordar el proceso implicado en una sustitución. Lo que puede propiciar una dificultad en el proceso de comprobación.

Situación de validación. Como en esta situación se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen, posterior a que los alumnos hayan discutido en parejas, se les preguntará a cada uno el procedimiento empleado y la respuesta que obtuvo en los ejercicios que incluyen las hojas de trabajo y se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado.

Situación de institucionalización. Dado que esta situación está destinada a establecer convenciones sociales posteriores a las situaciones de formulación y validación, una vez que se verifiquen las respuestas de los alumnos y se asegure que sean correctas se les dirá para la segunda columna de la tabla en la hoja de trabajo #1 que lo que acaban de escribir son expresiones algebraicas pues están representando matemáticamente una cantidad utilizando literales y operaciones entre las mismas y se definirán las partes de una expresión como se tiene previsto en la planeación (Ver Anexo 3).

Para la cuarta columna de la hoja de trabajo #1 posterior a que se verifique que los resultados son correctos, se les dirá que lo que acaban de formular son ecuaciones y se les preguntará ¿qué partes tiene una ecuación? esperando que señalen las partes de la expresión algebraica o la expresión algebraica en sí.

También se realizará la pregunta ¿en la ecuación hay la presencia de expresiones algebraicas? ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una expresión algebraica? esperando que los alumnos señalen el símbolo igual, de ser así a partir de ello se les dirá que en efecto existe una igualdad lo que refiere a la expresión de que dos cantidades tienen el mismo valor, con base en lo anterior se les preguntará ¿cómo podrías definir una ecuación algebraica? esperando en que la definan como la igualdad entre dos expresiones algebraicas donde se complementará diciendo que se definen como una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que hay una o varias cantidades desconocidas a las cuales se le llaman incógnitas, y cuyo valor sólo se verifica para determinados valores de ellas.

Para cada caso se presentarán las partes que las conforman mediante una ilustración proyectada en la pantalla, pretendiendo que así sea más fácil para los educandos identificarlas.

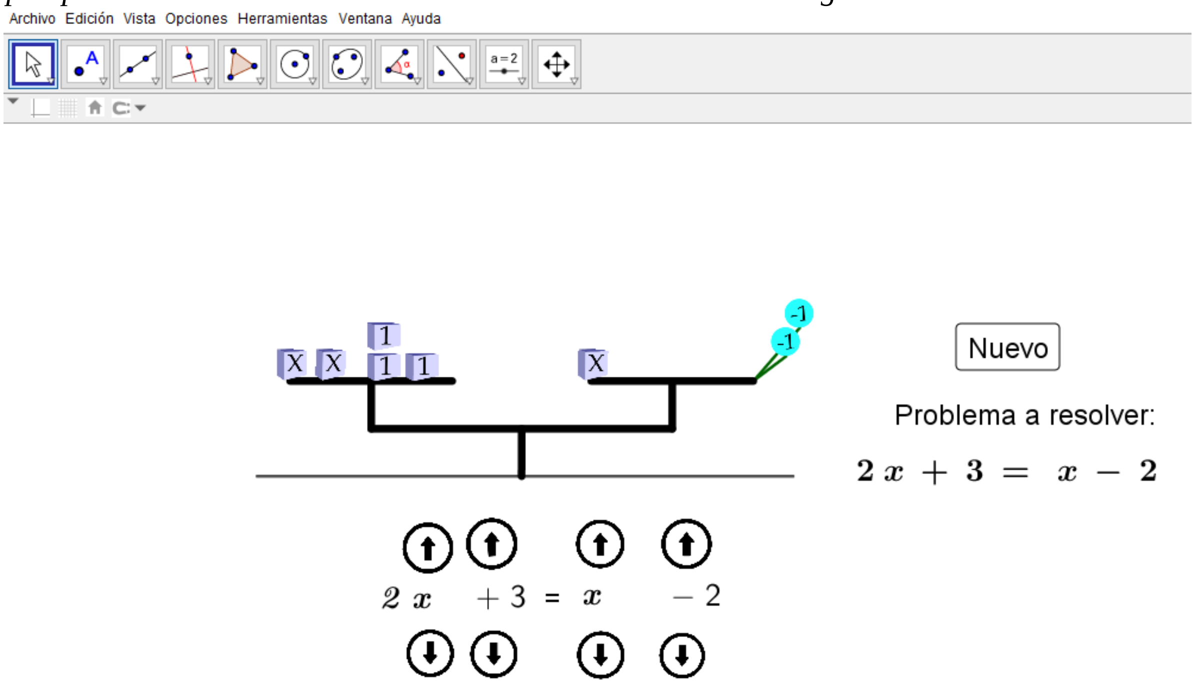
Para la hoja de trabajo #2 se formalizará que para realizar despejes es necesario realizar una transposición de términos que consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro y que cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo y se dirá que más delante se presentará con más detalle la justificación de ello.

En este mismo momento uno es donde se tiene planeado introducir a los alumnos en la utilización de una balanza digital, para ello se presentará primero un video retomado del canal Gaildiel (2014) en YouTube donde se espera que los alumnos conozcan e identifiquen lo que es una balanza y su funcionamiento, posterior a ello se trabajará con el applet para resolver ecuaciones lineales con una incógnita de la siguiente manera.

Situación de Acción. Se espera que esta situación se genere cuando exista la interacción entre el alumno y la balanza digital, para ello, los educandos deberán tomar las decisiones que hagan falta para primero ilustrar en cada platillo de la balanza los miembros de la ecuación generada aleatoriamente y después resolverla utilizando los botones que muestra la interfaz de este applet. La Figura 33 presenta la interfaz de esta balanza digital.

Figura 33

Applet para resolver sistemas de ecuaciones lineales con una incógnita



Situación de Formulación. Una vez que tengan representada la ecuación en los platillos de la balanza se espera que esta situación se dé cuando se pida que en parejas busquen la manera en cómo hacer que todas las literales de la ecuación estén en un solo platillo de la balanza y los números en el otro, cuidando que la balanza se mantenga en equilibrio. Para lograr esto los alumnos deberán modificar su lenguaje adecuándolo a la información que deberán comunicar, una vez que ya tengan en un solo platillo las literales se les pedirá que pasen a su cuaderno la ecuación resultante y determinen el valor de la incógnita.

Para esta actividad se espera que los alumnos no tengan complicaciones al utilizar el applet puesto que hoy en día están muy familiarizados con la tecnología, además en el video se explica detalladamente una ejemplo sobre cómo emplear una balanza para poder resolver una ecuación lineal con una incógnita.

De entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pueden tener al resolver las ecuaciones con el uso del applet son los siguientes:

- Errores de procedimiento, en virtud de que olviden la transposición de términos formalizado en la hoja de trabajo #2.
- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Por ejemplo al contar mal los objetos presentados en los platillos.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, por ejemplo que el alumno tenga un bloqueo al ya no saber cómo utilizar los botones que presenta el interfaz del applet
- Dificultad en la simplificación de términos semejantes, en virtud de que el applet no permite ver cuáles son los términos que se habían eliminado de los platillos puesto que al realizar la transposición de términos los objetos sólo desaparecen y no permiten ver lo que había anteriormente en el platillo.

Por otro lado, se espera que la dificultad en el proceso de comprobación de que en efecto el número encontrado es solución no se presente, ya que al observar si la balanza está en equilibrio el alumno podrá interpretar que en efecto el número encontrado es solución.

Situación de Validación. Después de que los alumnos encuentren el valor de las incógnitas mediante sus propios métodos, se pedirá a uno de ellos que utilice frente al grupo la balanza digital y resuelva una ecuación mediante el procedimiento que emplearon. Una vez que lo haga se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferencias se confrontarán ambos puntos de vista para así determinar lo correcto.

Situación de Institucionalización. De los procesos implicados en las situaciones anteriores se formalizará que la transposición de términos se justifica en las primeras cuatro reglas que se derivan del Axioma fundamental de las ecuaciones, se mostrarán en la pantalla y se explicará cada una de ellas mediante un ejemplo que implique un despeje.

Momento 2.

Propósito: Que los alumnos formulen un sistema de ecuaciones a partir de una situación problema.

Material: Hoja de trabajo #3 (Ver Anexo 4).

Situación de acción. Para que a los alumnos les sea más sencillo establecer el sistema de ecuaciones, se retomará desde el planteamiento de una ecuación con dos incógnitas. Para ello, se espera que esta situación se dé al presentar la hoja de trabajo #3 y los alumnos comiencen a resolverla tomando las decisiones que hagan falta para establecer el sistema y utilizar el procedimiento adecuado.

Situación de Formulación. Para el problema se plantearán las siguientes preguntas, mismas que tendrán que discutir en parejas:

- ¿Qué es lo que se desconoce en este problema? Aquí se espera que los alumnos rápido identifiquen que lo que se desconoce es el peso de una tuerca
- ¿Cómo representarías matemáticamente este enunciado? Donde se espera que los alumnos asocien la situación del problema con una ecuación tal como se trabajó en la hoja de trabajo #1

- ¿Qué puede ser la incógnita x y qué puede ser la incógnita y? A partir del problema, se espera que los alumnos asocien los tornillos con la incógnita x y la tuerca con la incógnita y, si hay algún alumno que lo asocie al revés no habrá ningún problema puesto que también se puede llegar a la solución del sistema, y,
- ¿Cómo acomodarías los datos en una sola operación para lograr llegar al resultado? En la cual se espera que no tengan ninguna complicación puesto que la transferencia del lenguaje común al algebraico es algo que ya se atendió en el momento uno.

La Figura 34 muestra las respuestas a las que se espera que lleguen los alumnos al resolver la hoja de trabajo #3.

De entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pueden cometer al resolver esta hoja de trabajo son los siguientes:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Por ejemplo al restar $20 - 14$ en el procedimiento para el despeje de y.
- Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada el proceso para un despeje.
- Error en la transición de un lenguaje natural al algebraico, por ejemplo al establecer el sistema de ecuaciones.
- Dificultad en el proceso de comprobación de que en efecto el conjunto encontrado es solución.

Figura 34

Respuestas esperadas en la hoja de trabajo #3

- **Problema 1.** Dos tornillos y una tuerca pesan 20 gramos. Si cada tornillo pesa 7 gr. ¿cuánto pesa la tuerca?

<table>
<tr><td>¿Quién puede ser la incógnita x?
Tornillo</td><td rowspan="2">Ecuaciones
$2x+y=20$
$x=7$</td><td rowspan="2">Procedimiento
$2(7)+y=20$
$14+y=20$
$y=20-14$
$y=6$</td></tr>
<tr><td>¿Quién puede ser la incógnita y?
tuerca</td></tr>
<tr><td colspan="3">Comprobación:
$2(7)+6=20$
$14+6=20$
$20=20$</td></tr>
</table>

Situación de Validación. Para que los alumnos traten de convencer a sus compañeros de la validez de las afirmaciones que hacen, se le preguntará acerca de la ecuación, el procedimiento y resultado que obtuvieron en cada problema y se cuestionará a los demás si están de acuerdo, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que elaboren pruebas para demostrar sus afirmaciones.

Situación de Institucionalización. Después de socializar las respuestas y procedimientos, se les dirá a los alumnos que hasta ahora se había trabajado con ecuaciones, sin embargo, hay situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se define como la reunión de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma $Ax + By = C$ y $Dx + Ey = F$, donde A, B, C, D son constantes, mientras que x y y son incógnitas.

Es importante mencionar que los alumnos ya deben conocer estos temas, sin embargo se quieren retomar en la práctica para asegurarse de que sí los posean con la finalidad de evitar mayores complicaciones al introducir el nuevo contenido, para esto, se sabe que no basta con definir cosas pues se preparó el medio de manera que sean los propios alumnos quienes vallan cayendo en cuenta sobre la transferencia del lenguaje común al algebraico, las partes de una expresión algebraica y resolución de ecuaciones de primer grado.

Momento 3.

Propósito: Que el alumno aprenda el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

Material didáctico: Se utilizará como recurso tecnológico el applet diseñado en el Software libre GeoGebra (ver Figura 24).

Situación de acción (15 minutos). Previo a trabajar esta situación, se presentará la interfaz y se explicará el funcionamiento del applet diseñado en GeoGebra para nuestra propuesta, una vez que esto se realice, se planteará el problema de la hoja de trabajo #4 que presenta lo siguiente: Dos tornillos y una tuerca pesan 13g. Un tornillo y una tuerca pesan 8g. ¿Cuánto pesa cada tornillo y cada tuerca?

Una vez que se analice el problema, primero se pedirá al alumno de manera individual que establezca un sistema de dos ecuaciones para la situación anterior, una vez que se verifique que el sistema es correcto, se pedirá que utilizando los botones del lado izquierdo de la interfaz del applet lo reproduzca en la parte de “Sistema de ecuaciones de 2x2” y que además represente en cada platillo de la balanza cada miembro de ambas ecuaciones según corresponda utilizando los botones de la parte inferior y asegurándose de que quede en equilibrio.

Se pretende que esta situación de acción se dé cuando se genere la interacción entre el alumno y el applet, ya que este recurso tecnológico fungirá como el medio físico y será aquí donde los alumnos deberán tomar las decisiones necesarias para resolver el sistema mediante el uso de las balanzas digitales.

Para hacer que el alumno acepte la responsabilidad de su propio aprendizaje durante las actividades que implican las hojas de trabajo, se guiará a través de preguntas sin dar respuestas concretas a las dudas que tengan. Por ejemplo, si en la hoja de trabajo cinco un alumno expresa no saber cómo establecer el sistema de ecuaciones o pregunta si está planteado correctamente, en vez de darle la respuesta se le plantearán otras preguntas tales como; ¿Qué se pide resolver en el problema? ¿Qué datos involucra el problema? ¿Qué literal puede asignarse a cada objeto del problema? ¿Qué cantidad de objetos se involucra en cada enunciado? ¿Qué operación implica cada enunciado? ¿Existe otra manera de representarlo? Estas preguntas se plantearán con la finalidad de que ayuden al estudiante a llegar a la respuesta por méritos propios.

Para esta situación se espera que los alumnos no tengan complicaciones en manipular el applet, ya que hoy en día están acostumbrados al uso de la tecnología y se cree que su interfaz es sencilla, aunque se considera que será necesaria una explicación previa del uso de los botones. En caso de que se presenten dudas sobre su funcionamiento, el maestro podrá resolverlas a través de una explicación de su uso mediante la proyección de su pantalla frente a los alumnos.

También, se espera que los alumnos no tengan complicación en establecer el sistema en la hoja de trabajo #4 debido al tratamiento que se le dio a los conocimientos previos en el momento 1. En caso de que se les dificulte, se establecerá el sistema de manera colaborativa atendiendo a la transferencia del enunciado a un lenguaje algebraico, para ello se les preguntará lo siguiente: Si asignamos con la literal x a los tornillos y con la literal y a las tuercas ¿Mediante que ecuación puedo representar esta situación? Lo que se espera, es que los alumnos lo establezcan como $2x + y = 13$ y $x + y = 8$. Las preguntas de los incisos a y b de la hoja de trabajo cuatro, tienen la finalidad de hacer que el alumno identifique mediante literales los objetos que involucra el problema y así le sea más sencillo establecer el sistema.

El proceso que se espera que realice el alumno para responder a este problema a través de la implementación del applet se puede apreciar en las Figuras del apartado 4.2.2 ya que el ejemplo utilizado para presentar los lineamientos para el funcionamiento del applet es el mismo sistema de ecuaciones implicado en el problema de la hoja de trabajo #4.

Situación de formulación (15 minutos). Para llevar a cabo esta situación primero se dará la indicación de que en parejas manipulen los objetos de los dos platillos que están en la balanza 2 para que, a final de cuentas se pueda ver el peso del objeto y. Para esto es importante mencionar el principio sobre el uso de la balanza presentado en el video visto durante el momento 2; en la balanza siempre se debe quitar o agregar la misma cantidad de elementos en ambos platillos para conservar el equilibrio.

Se pedirá a los alumnos que la ecuación que representa los dos platillos de la balanza 2 deberán anotarla en el inciso d de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación? Una vez despejado "y" se realizará la siguiente pregunta con la finalidad de fomentar una sustitución; ¿Cómo se vería la balanza 1 utilizando sólo el peso de uno de los objetos? Una vez que los alumnos sustituyan este valor en la balanza 1 se espera que la balanza les quedé como en la Figura 28.

Se solicitará a los alumnos que escriban en el inciso e de la hoja de trabajo #4 la ecuación que representa los objetos de la balanza 1 utilizando sólo el peso de uno de los objetos y describa lo que hizo para obtenerla. Una vez que la balanza de la izquierda esté en función de una sola incógnita se dará la indicación de que la manipule para encontrar el peso del objeto, para ello se preguntará ¿cuánto pesa x? esperando que lo realicen como en la Figura 29.

Se pedirá a los alumnos anotar la ecuación de la balanza uno que muestra el peso de un objeto en el inciso f de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación? Una vez que encuentren el valor de una incógnita se le preguntará ¿Cómo puedes encontrar el valor de la otra incógnita? Se le dará la indicación de que manipulen la balanza 2 para encontrarlo como se puede apreciar en la Figura 30.

Se pedirá que la ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto deberán anotarla en el inciso g de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación? Posterior a ello se les solicitará que comprueben en el inciso h de la hoja de trabajo #4 si los pesos obtenidos de los objetos satisfacen el sistema.

Como el objetivo de esta situación es la comunicación de informaciones, ésta se dará cuando trabajando en parejas dialoguen sobre cómo realizar la manipulación de la balanza en cada escenario, además existirá esta comunicación al ir contestando los incisos de la hoja de trabajo cuatro, pues deben de formular juntos la justificación para obtener las ecuaciones.

Las respuestas a las que se espera que lleguen los alumnos durante este momento al resolver la hoja de trabajo #4 se puede apreciar en la Figura 35. Es importante mencionar que se espera que los alumnos no tengan complicación en contestar todos los incisos, a excepción del inciso e.

Entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pueden cometer al resolver esta actividad se encuentran los siguientes:

- Dificultad relacionada con el mal empleo de la ley de los signos, esta dificultad se puede dar al momento de responder el inciso g pues el alumno al conocer que $x = 5$ deberá multiplicarlo por -1 al momento de realizar la sustitución de este valor en la ecuación $y = -x + 8$
- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, estos errores se pueden dar al momento de la comprobación, por ejemplo al realizar equivocadamente operaciones con los números enteros.
- Error de distracción, por ejemplo al momento de realizar las sustituciones el alumno puede cambiar los valores de las incógnitas.

- Dificultad en el procedimiento, por ejemplo al manipular las balanzas mediante el uso de los botones y establecer la sustitución de la ecuación 2 en la ecuación 1 o viceversa.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, por ejemplo que el alumno olvide quitar o poner los mismos elementos en ambos platillos de las balanzas.
- Error en el pasaje del registro verbal al algebraico, por ejemplo al establecer el sistema de ecuaciones a partir de la situación dada.

Figura 35

Posibles respuestas de los alumnos en la hoja de trabajo #4

<table>
<tr><td>a. ¿Quién es x?
El tornillo</td><td colspan="2" rowspan="2">c. Sistema:
Ec1. $2x+y=13$
Ec.2 $x+y=8$</td></tr>
<tr><td>b. ¿Quién es y?
La tuerca</td></tr>
<tr><td></td><td>Ecuación</td><td>¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?</td></tr>
<tr><td>d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto y.</td><td>$y=-x+8$</td><td>Resté en ambos platillos una x para que no se alterara la igualdad</td></tr>
<tr><td>e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos</td><td>$x+8=13$</td><td>Cambié una y por el peso que valía en x y unidades.</td></tr>
<tr><td>f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto</td><td>$x=5$</td><td>Resté en ambos platillos de la balanza 8 para que me quedara la x sola.</td></tr>
<tr><td>g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto</td><td>$y=3$</td><td>Cambié el valor de −x por lo que valía en unidades.</td></tr>
<tr><td colspan="3">h. Comprobación
$2(5)+3=13$ $5+3=8$
$10+3=13$ $8=8$
$13=13$</td></tr>
</table>

Situación de validación (15 minutos). Debido a que en esta situación se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen, para llevarlo a cabo se seleccionará a una pareja de alumnos para que muestre el proceso realizado mediante la utilización del applet para llegar a sus respuestas, se cuestionará a los demás si están de acuerdo con el procedimiento y resultado obtenido por sus compañeros, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado.

Situación de Institucionalización (15 minutos). El objetivo de esta situación es establecer convenciones sociales, por lo que a partir del proceso realizado en el applet y la contestación de la hoja de trabajo #4 ya socializada en la situación anterior, se formalizará el proceso implicado en el método de sustitución de la siguiente manera:

1. Primero se despeja cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye su valor en la otra ecuación.
3. Una vez que se tenga la ecuación con una incógnita se resuelve.
4. Teniendo el valor de una de las literales, se sustituye en una de las ecuaciones que involucre ambas literales y se obtiene la otra literal.
5. Se comprueba si los valores de las incógnitas resuelven el sistema.

Como se pudo dar cuenta, las cuatro diferentes situaciones anteriores están construidas intencionalmente con el fin de que el alumno aprenda el método de sustitución para poder resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

Después de llevar a cabo la resolución de la hoja de trabajo #4, se le pedirá al alumno que resuelva la hoja de trabajo #5 que implica otro sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, en esta situación la enseñanza desaparecerá al menos de forma explícita y se dejará al alumno que lo resuelva de manera autónoma. Para esta actividad se espera que el alumno logre resolver el sistema mediante el uso del applet y recurriendo a los conocimientos construidos en las situaciones previas. Las respuestas a las que se espera que lleguen los estudiantes se pueden apreciar en la Figura 36.

Figura 36

Posibles respuestas de los alumnos en la hoja de trabajo #5

a. ¿Quién es x? Limones	**c. Sistema:** **Ec1.** $2x+2y=10$ **Ec.2** $x-y=1$	
b. ¿Quién es y? Uvas		
	Ecuación	**¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?**
d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto x.	$x=y+1$	Agregué en cada plato de la balanza una y
e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos	$4y+2=10$	Cambié las x por lo que ya sabía que pesaban
f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto	$y=2$	Resté en ambos platillos 2 unidades y me quedó que $4y=8$, entonces una y es igual a 2.
g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto	$x=3$	Cambié la y por lo que ya sabía que pesa.
h. Comprobación $2(3)+2(2)=10$ $6+4=10$ $10=10$	$3-2=1$ $1=1$	

Como esta hoja de trabajo #5 es muy similar a la hoja de trabajo #4, se espera que los tipos de errores y dificultades que los alumnos puedan cometer sean los mismos:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, este error se puede dar en el inciso h al momento de la comprobación, por ejemplo al realizar equivocadamente operaciones con los números enteros.
- Error de distracción, por ejemplo al momento de realizar las sustituciones el alumno puede cambiar los valores de las incógnitas.
- Dificultad en el procedimiento, por ejemplo al manipular las balanzas mediante el uso de los botones y establecer la sustitución de la ecuación 2 en la ecuación 1 o viceversa.
- Error en el pasaje del registro verbal al algebraico, por ejemplo al establecer el sistema de ecuaciones a partir de la situación dada.

Momento 4.

Propósito: Evaluar el aprendizaje de los alumnos.

Materiales: Hoja de trabajo #6.

Para este último momento se aplicará la hoja de trabajo #6 a manera de evaluación con la finalidad de identificar si los alumnos lograron aprender el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros. Para llevar a cabo esta actividad, únicamente se les pedirá que respondan a la hoja de trabajo indicada sin la utilización del applet. Las respuestas a las que se espera que lleguen son las que se pueden apreciar en la Figura 37. Para esta actividad, se espera que los alumnos no tengan complicación en realizar los despejes, aunque posiblemente se presenten errores en la sustitución.

Figura 37

Respuestas esperadas en la hoja de trabajo #6

$x+2y=1$ $2x+y=5$	$2x+y=7$ $3y-2x=5$	$2x+y=8$ $x+3y=9$
x=1-2y 2(1-2y)+y=5 2-4y+y=5 2-3y=5 -3y=3 y=-1 x=1-2(-1) x=1+2 x=3	y=7-2x 3(7-2x)-2x=5 21-6x-2x=5 -8=5-21 -8x=-16 x=-8/-16 x=2 y=7-2(2) y=7-4 y=3	x=9-3y 2(9-3y)+y=8 18-6y+y=8 18-5y=8 -5y=8-18 -5y=-10 Y=-10/-5 Y=2 x=9-3(2) x=9-6 x=3
Comprobación 3+2(-1)=1 3-2=1 1=1 2(3)-1=5 6-1=5 5=5	Comprobación 2(2)+3=7 4+3=7 7=7 3(3)-2(2)=5 9-4=5 5=5	Comprobación 2(3)+2=8 6+2=8 8=8 3+3(2)=9 3+6=9 9=9

4.2.5 Prueba Piloto

Después de haber realizado el diseño de la secuencia didáctica y previo a la experimentación era necesario realizar una prueba piloto cuyo fin es corroborar que la propuesta estuviera en orden y marchara según lo previsto en el análisis a priori. Con este ensayo experimental se pretendía encontrar aspectos a modificar y corregir en la planeación, hojas de trabajo y applet, pretendiendo limitar aspectos negativos.

La aplicación de dicha prueba se programó para el día 10 de marzo del presente año y se consideró a dos alumnos de Malpaso, Villanueva perteneciente a la escuela secundaria técnica #28, mismos que cursan el segundo grado y son extra a los 5 alumnos a los que se les aplicó el cuestionario diagnóstico sobre conocimientos previos. Desafortunadamente sólo uno de ellos acudió al llamado e incluso con el otro alumno se perdió total contacto pues ya no respondió los mensajes ni llamadas. Este percance no permitió llevar a cabo la secuencia tal como se tenía planeado pues era necesario al menos dos educandos para la comunicación de informaciones y confrontar resultados. Las conclusiones fueron las siguientes:

- En la hoja de trabajo #1 cuando se pide la transferencia del lenguaje común al algebraico del enunciado “El producto de dos números diferentes”, el alumno tuvo confusión con la palabra “producto” pues comentaba que jamás había escuchado que se refirieran así a la multiplicación. Para solucionar este suceso sólo se optó por modificar el enunciado por “La multiplicación de dos números diferentes”, de tal manera que no generara conflicto.
- En la planeación se tenía previsto que posterior al término de la hoja de trabajo #1 se debía formalizar el concepto de ecuación mediante preguntas como; ¿Qué partes tiene una ecuación? ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una expresión algebraica?, sin embargo, fue complicado para el alumno definirlo a partir de una expresión algebraica

puesto que con los ejemplos de ecuaciones dados en esta hoja de trabajo no se apreciaba la igualdad de expresiones algebraicas. Debido a esto se optó por incluir un enunciado que al representarlo de manera algebraica le permitiera interpretar a una ecuación como la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

- En la pregunta mencionada anteriormente ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una expresión algebraica?, el alumno daba respuestas como "están más largas" y "tiene más números" ignorando el signo igual. Por lo que sería conveniente anexar una pregunta más del tipo ¿Qué elemento de la ecuación no está en una expresión algebraica?, con la finalidad de hacer énfasis en la igualdad.
- Para el proceso de despeje el alumno utilizaba frases del tipo "Si está sumando se pasa restando" "Si está multiplicando pasa dividiendo", sin embargo no conocía la justificación que hay detrás. Establecer esto es de suma importancia debido a que el principio de la balanza utiliza las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones.
- Al momento de formalizar las partes de una expresión algebraica y ecuación, el alumno preguntó dónde debía anotar eso ya que se les había dado la indicación de que no necesitaban cuaderno, en ese momento se le pidió escribirlo al reverso de la hoja de trabajo #1, sin embargo, sería conveniente adjuntar entre los materiales hojas en blanco para que ahí las realicen.
- Al final de la hoja de trabajo #2 se tenía que resolver la ecuación $-9x + 24 = 7x - 35$, sin embargo el alumno tardó aproximadamente 10 minutos en resolverla correctamente, la razón de esto es que realizaba mal el despeje y al momento de la comprobación, el resultado no satisfacía la ecuación por lo que lo volvía a realizar. Para evitar esto se cambió a la ecuación $9x - 10x = -7$ que es más sencilla, ya que la finalidad de éstas es

mostrar al alumno que los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1.

- Al momento de utilizar la balanza digital, el alumno tuvo dificultad al despejar los objetos utilizando los botones ya que si por ejemplo quería despejar la ecuación $x + 2 = -4$ el alumno para dejar únicamente la incógnita en el miembro izquierdo, presionaba dos veces el botón que agregaba unidades negativas como constantes, lo que eliminaba el 2, sin embargo se los ponía al otro miembro presionando dos veces el botón que agregaba unidades positivas como constantes dándole como resultado la ecuación $x = -2$. Esto se debía a que utilizaba frases del tipo "Si se los quito a este platillo, entonces se los tengo que poner acá en este otro". Aunque el educando al identificar que la balanza no estaba en equilibrio se daba cuenta que tenía un error, lo conveniente sería argumentar en todo momento que para que la balanza siga quedando en equilibrio lo que se le quite o se ponga en uno de los platillos debe quitarse o ponerse lo mismo en el otro, haciendo alusión al axioma mencionado con anterioridad.
- Sobre el uso del applet, el alumno no tuvo ninguna complicación en comprender el interfaz y la función de los botones ya que primero se le dio una explicación de su uso.
- Sobre las respuestas dadas por el alumno en la explicación para resolver los sistemas de las hojas de trabajo #4 y #5, fueron muy similares a las esperadas. Únicamente hubo complicación en comprender el proceso implicado cuando se pedía establecer la ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos.

- Aunque la situación de validación no se dio como se tenía planeado, se podría decir que se llevó parcialmente al pedirle que explicara el proceso implementado en el applet para dar solución al sistema de la hoja de trabajo #4.
- Una vez que se formalizó el método, el alumno no mostró complicación en resolver el sistema de la hoja de trabajo #5 mediante el applet, sin embargo, al resolver los sistemas de la hoja de trabajo #6 sin el applet le resultó más complicado. Analizando este momento, se piensa que una de las razones puede deberse a que se le recogieron las hojas de trabajo #4 y #5 dónde venía el proceso que había realizado para resolver los otros sistemas. Además, como se comentó al inicio, faltó otorgarle una hoja en blanco para que escribiera sus notas.
- En el diseño de esta misma hoja de trabajo, se pudo apreciar la necesidad de asignar un espacio dentro de las columnas para la comprobación, ya que se identificó que si no se está señalado, el alumno no lo realiza.
- Sobre el tiempo, la prueba piloto duró aproximadamente 2 horas. Aunque es importante considerar que no hubo fase de formulación y validación como se tenía previsto.
- Es importante mencionar que los alumnos de la comunidad muestran una falta de disposición por querer realizar actividades de aspecto académico, para solucionarlo e intentar hacer que los alumnos asistan a la experimentación, se intentará motivarlos a través de estímulos (premios) que se entregarán posterior a que se ejecute la práctica.

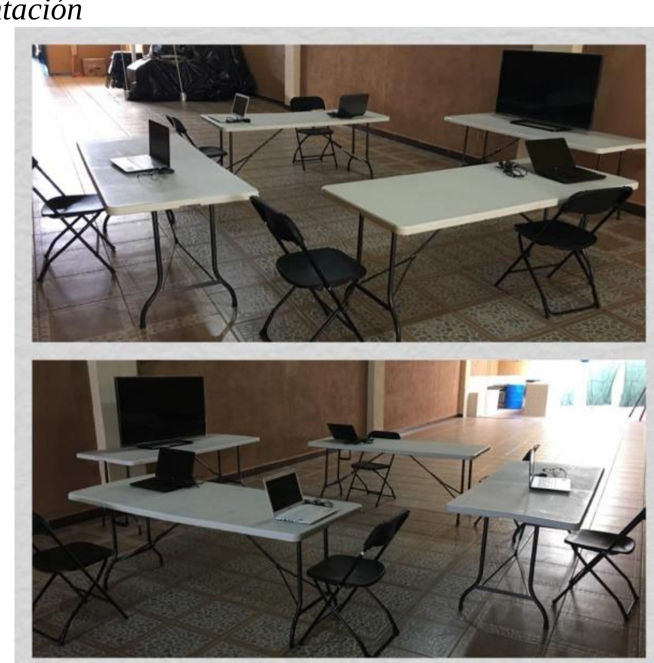
4.3 Fase 3. Experimentación

Recordemos que en esta fase se pone en marcha la propuesta diseñada y se manifiesta lo que pasó durante la aplicación, describiendo aspectos como el lugar, materiales utilizados, la cantidad de alumnos y las formas de tomar evidencias.

La propuesta se llevó a cabo el día 18 de marzo del año en curso de manera presencial en un pequeño salón de eventos ubicado en la comunidad de Malpaso Villanueva, la razón de acudir a este lugar y no a un aula se debe a que no está permitido el acceso a las escuelas debido a la pandemia por el COVID-19.

Para llevar a cabo la práctica se tenían contemplados a siete alumnos de secundaria, desafortunadamente sólo asistieron tres, la verdadera razón por la que no acudieron se desconoce pues se perdió la comunicación con ellos, sin embargo sus compañeros mencionaron que se debía a que los alumnos trabajan. Debido a ello, antes de comenzar la sesión se optó por realizar una distribución como se muestra en la Figura 38, misma que considera un distanciamiento adecuado y buena visibilidad de la pantalla.

Figura 38
Lugar de la experimentación



Es importante mencionar que se tenía planeado realizar la práctica el sábado 13 de marzo sin embargo sólo cuatro alumnos habían confirmado su asistencia, por lo que se optó por cambiarla al jueves 18 no sin antes tratar de incentivar a estos alumnos diciéndoles que se entregarían premios como recargas y balones de futbol por su asistencia.

Además del distanciamiento entre alumnos, las medidas de prevención implementadas para llevar a cabo la secuencia de manera presencial fueron el uso de desinfectante de manos, mascarillas y cubre bocas tal como lo muestra la Figura 39.

Figura 39
Medidas de prevención ante el COVID-19

En la Figura 38 y Figura 39 se puede apreciar que, para la implementación del applet, se utilizaron computadoras portátiles, mismas que se proporcionaron a los alumnos ya con el Software GeoGebra y applet instalados. Cabe mencionar que se habían conseguido 6 laptops puesto que sólo uno de los alumnos había confirmado poder asistir con una.

Como se puede apreciar en la planeación diseñada (Ver Anexo 3) se tenía pensado llevar a cabo la práctica en dos sesiones de noventa minutos, sin embargo los alumnos optaron por realizarla en un mismo día, debido a ello duró doscientos minutos aproximadamente motivo por el cual se optó por asignar tres momentos de cinco minutos para que los alumnos descansaran y se distrajeran un poco. En el primer momento se les puso una actividad de estiramiento, en el segundo se les dio una manzana y un chocolate mismos que se compraron en ese momento y en el tercero se realizó la rifa de regalos que consistió en tomar un papelito al azar donde se indicaba el regalo que le tocaría.

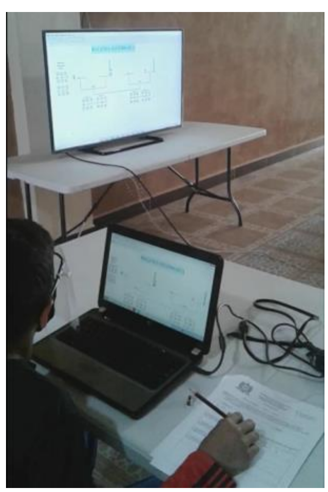
Para la toma de evidencias, se puso un teléfono celular al centro de donde estaban los alumnos para lograr captar el audio de la sesión, asimismo se tuvo el apoyo de una persona extra para grabar los momentos clave de la práctica, también se contó con un diario de campo para realizar anotaciones sobre el comportamiento, aciertos y errores de los alumnos, además se recogieron las hojas de trabajo donde respondieron para poder analizar sus respuestas.

De los videos grabados durante la sesión, se realizaron transcripciones de lo sucedido mediante registros, mismos que consideran la siguiente nomenclatura:

Mo. Maestro.
A1. Alumno 1.
A2. Alumno 2.
A3. Alumno 3.
Aos. Alumnos 1, 2 y 3.
// Para especificar acciones

Es importante mencionar que como no se tenía pizarrón, en todo momento se estuvieron proyectando las hojas de trabajo en una pantalla de 49 pulgadas donde además se iban realizando las anotaciones y procedimientos necesarios para ir explicando los elementos matemáticos de la clase tal como se muestra en la Figura 40.

Figura 40
Uso del monitor



4.4 Fase 4. Análisis A-posteriori y Validación

4.4.1 Análisis A-posteriori

Recordemos que Artigue (1995) define el análisis a posteriori como "el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella" (p. 48). Por lo que en este siguiente apartado se mostrarán los resultados obtenidos en los cuatro momentos que conformaban la propuesta didáctica.

Momento 1.

Para este momento se tenía como propósito el rescate de conocimientos previos, por lo que se les dijo a los alumnos que antes de comenzar a resolver los sistemas de ecuaciones era necesario que tuvieran algunos conocimientos como la definición y partes de una expresión algebraica.

Antes que nada, se les dijo que debido a la pandemia por el COVID-19 estábamos obligados a seguir ciertas recomendaciones, por lo que era necesario que todos utilizaran el cubre bocas y la mascarilla asignada en su lugar, además de que se les estaría proporcionando gel anti-bacterial constantemente.

Una vez que todos los asistentes tomaron estas medidas de prevención, el profesor se presentó ante los tres alumnos diciéndoles su nombre, lugar de origen, edad y ocupación, se les mencionó que actualmente se estaba cursando el cuarto semestre de la maestría en Matemática Educativa con especialidad en el nivel secundaria, razón por la cual se estaba llevando a cabo la práctica, pues era parte del trabajo recepcional. Se les dijo también que se trabajaría el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros de una manera diferente a como se trabaja usualmente en secundaria, pues se implementaría una balanza algebraica digital en una computadora a través del programa GeoGebra.

El tipo de contrato didáctico que se estableció durante los momentos de la planeación ejecutados fue uno en el que el profesor asumió la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos en todo momento, puesto que a cada pregunta o duda que tuvieron sobre el proceso de enseñanza se resolvió dándole el tratamiento adecuado mediante explicaciones y ejemplos, procurando en todo momento fomentar su aprendizaje respecto al contenido.

Sobre la devolución, se trató de guiar al alumno a través de preguntas sin dar respuestas concretas a las dudas que tenían mientras se resolvían las hojas de trabajo, sin embargo esto tuvo complicaciones puesto que al implementarlo de esta manera los alumnos no asumían la responsabilidad de su propio aprendizaje pues no se esforzaban por tratar de llegar a una solución por méritos propios y en ocasiones sólo miraban al maestro esperando que les diera la respuesta.

Este comportamiento es el mismo que se identificó en los estudios de Moll (2011) y Nava (2012) quienes señalan que los alumnos muestran más interés en hacer cosas, en automatizar procedimientos, que en pensar por qué se hacen o a qué les lleva, además de que están acostumbrados a una enseñanza "tradicional" y a un profesor que generalmente les apoya cuando se lo solicitan. Para tratar de evitar esto, se buscó a manera de devolución que los alumnos aprendieran de manera cada vez más autónoma y sin tanta ayuda brindada por el maestro.

Como se hizo mención en el análisis a priori, cada uno de los momentos de la propuesta se diseñó con base en la TSD por lo que este análisis a posteriori se realizará retomando la manera en cómo se llevó a cabo cada una de ellas. Para mostrar lo sucedido, se presentarán registros de momentos importantes, mismos que se redactaron a partir del video, audio y notas de campo.

Situación de acción. Esta situación se dio cuando los alumnos respondieron a las actividades implicadas en las hojas de trabajo #1 y #2 tomando decisiones sobre la manera en cómo representar los enunciados de manera algebraica y cómo resolver las ecuaciones de primer grado.

Para comenzar con esta situación, primero en cada uno de los lugares se les dejó el paquete con las hojas de trabajo que se estarían realizando durante la sesión y una hoja en blanco para que pudieran realizar ahí sus anotaciones. Para comenzar a resolver la hoja de trabajo #1 se pidió a uno de los alumnos que leyera la parte donde se responde a la pregunta ¿para qué sirve un lenguaje algebraico?, posterior a ello se mencionó que a través de un lenguaje algebraico podemos representar valores desconocidos y nos permite traducir a símbolos y números lo que normalmente conocemos como lenguaje natural. La introducción a la primera hoja de trabajo se puede apreciar en el siguiente registro.

Mo. Muy bien, en su hoja de trabajo uno hay una tabla con cuatro columnas, en la primera se presentan enunciados en lenguaje natural que tendremos que transferir a un lenguaje algebraico, ¿Cómo representarían usted /dirigiéndome al alumno A3/ a través de un lenguaje algebraico un número cualquiera?
A3. ¿x?
Mo. Como una x, recordemos que x sería una literal y puede representar cualquier número, puede representar el uno, dos, tres, cuatro, etc. Entonces vamos a poner en la casilla de lenguaje algebraico una letra cualquiera, puede ser x, puede ser z, puede ser cualquier letra /escribo x en la casilla correspondiente mientras proyecto la hoja de trabajo uno en la pantalla/.
Mo. Ahora hijo /dirigiéndome al alumno A2/ ¿Cómo podemos representar mediante un lenguaje algebraico la suma de dos números diferentes?
A2. ¿a más b? /lo dice de manera dudosa/
Mo. Así es, entonces vamos a poner en la segunda casilla de lenguaje algebraico que la suma de dos números diferentes se puede representar como a más b. Ahora, vamos a hacer esto mismo para todas las casillas de la segunda columna /se deja un momento para que los alumnos respondan/.

En este fragmento de registro, se puede identificar que el profesor siguió una práctica de preguntas y respuestas en el que fue preguntando a cada alumno cómo se escribían las expresiones de la tabla, con la finalidad de que supieran cómo responder en los demás ejercicios.

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** refleja el momento del diálogo que se estuvo dando en el registro anterior.

Figura 41

Momento de dialogo

Situación de Formulación-Validación. Estas situaciones fueron dándose a la par, respecto a la primera, Gálvez (2002) menciona que el objetivo en esta situación es la comunicación de informaciones y que para esto, deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar. Una vez que los alumnos contestaron de manera individual la segunda columna de la tabla en la hoja de trabajo #1 se pidió que comunicaran sus resultados obtenidos como se aprecia en el siguiente registro.

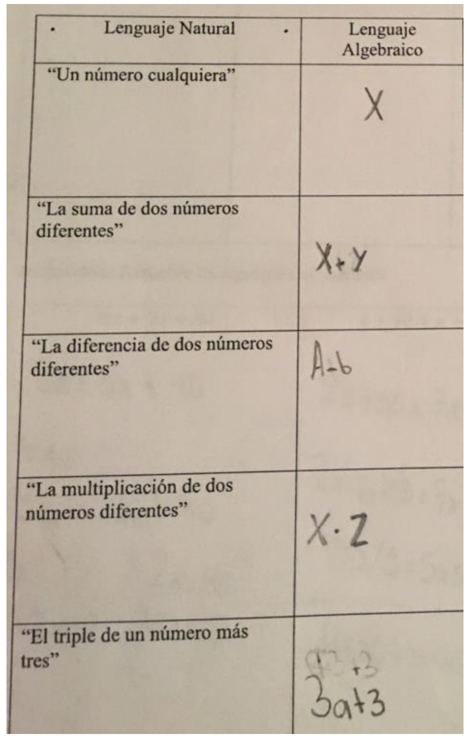
Mo. ¿Listo?, vamos a ir socializando cada una de las respuestas, entonces habíamos dicho que un número cualquiera lo podíamos representar como una x, la suma de dos números diferentes como equis más y, ahora usted /refiriéndome al alumno A1/
Mo. Me podría decir ¿cómo representó la diferencia de dos números?
A1. Por una multiplicación de letras.
Mo. Haber, ojo ahí, la diferencia es otra manera de decir la resta, entonces ¿cómo podemos representar la resta de dos números diferentes? /el alumno no responde/. Si la suma de dos números diferentes se representa como x más y, ¿Cómo sería la resta de dos números diferentes?
A1. ¿Menos?
Mo. El signo sí es de menos, pero ¿cómo sería toda la expresión?
A1. x menos una y
Mo. Correcto. Ahora usted /señalando a la alumna A3/ ¿Cómo representó el triple de un número más tres?
A1. ¿a cúbica más tres?

Mo. Haber, bueno por ahí hay una pequeña confusión. Cuando se nos dice "el triple de un número" nos está diciendo que un número está siendo multiplicado por tres. ¿Entonces cómo sería ahí la expresión?
A1. a por tres más tres.
Mo. Ajá, ¿Y cuánto es a por tres más tres? /Escribo 3a+3 en la casilla correspondiente en la computadora, ya que estaba proyectando la pantalla en un televisor/.

La Figura 42 que se presenta a continuación muestra las respuestas de uno de los alumnos en los enunciados que implicaban expresiones algebraicas en la hoja de trabajo #1. Las respuestas de los demás fueron similares, en lo único que se diferenciaron fue en la utilización de diferentes literales pues utilizaron *a* y *b* en los primeros enunciados.

Como se pudo identificar en el registro anterior dos alumnos tuvieron confusiones, la primera entre la diferencia y multiplicación y la segunda entre el triple de un número con una potencia. En Segura (2004) ya se había señalado que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico, de estos registros se puede asumir que esto puede deberse a una confusión y mala interpretación de las palabras que compone el enunciado.

Figura 42
Respuestas A2 que implican la transferencia del lenguaje común en expresiones algebraicas



Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico
"Un número cualquiera"	X
"La suma de dos números diferentes"	X+Y
"La diferencia de dos números diferentes"	A-b
"La multiplicación de dos números diferentes"	X·Z
"El triple de un número más tres"	3a+3

Al analizar el video se identificó que se omitió la socialización del cuarto enunciado en la primer columna; "la multiplicación de dos números diferentes" y al revisar sus hojas de trabajo se pudo dar cuenta que uno de ellos lo había transferido al lenguaje algebraico como $x * 2$ lo cual es un error. La Figura 42 da muestra de ello.

Sobre la validación. Lo que se hizo para atender a esta situación fue preguntar en cada ejercicio si alguno había llegado a una respuesta diferente a la mencionada por su compañero o si estaban de acuerdo con lo que presentaba, esto con el fin de rescatar diferentes respuestas y confrontar sus procedimientos. Desafortunadamente en el momento y después de que se les preguntaba, los alumnos no manifestaron tener respuestas o haber utilizado diferentes procedimientos.

Creemos que estas dos situaciones se dieron a la par debido al tipo de peguntas planteadas por el profesor al momento de la formulación puesto que al momento de la comunicación de informaciones los alumnos iban validando los procedimientos implementados por sus compañeros.

Institucionalización. Esta situación se dio posterior a socializar las respuestas a las que los alumnos habían llegado. La manera en cómo se realizó se puede apreciar en el siguiente fragmento de registro.

Mo. Entonces todas esas que ustedes acaban de escribir en esta segunda columna se llaman expresiones algebraicas, anteriormente ya se estableció para qué sirve un lenguaje algebraico ahora veremos que en las expresiones algebraicas hay ciertos elementos que podemos rescatar /proyecto en la pantalla la imagen que muestra las partes de una expresión algebraica/.
Mo. Una expresión algebraica está compuesta de un signo, de un coeficiente, de una variable o literal y de un exponente. Entonces, ahí en ese ejemplo de la pantalla la variable representa una cantidad cualquiera en álgebra, el signo puede ser negativo o positivo y es un símbolo que indica una característica de un objeto, el coeficiente sería la parte numérica que acompaña a la variable o la literal, en este ejemplo el 5 es el coeficiente porque está acompañando a esta variable/señalo con el puntero el coeficiente de la ilustración/ y el exponente es el número que nos indica cuantas veces se multiplica la base, pero en nuestro caso únicamente estaremos trabajando con expresiones que tienen exponente uno, es decir que son lineales.

Posterior a realizar esta institucionalización se pidió a los alumnos que escribieran en la hoja en blanco proporcionada los elementos que conforman una expresión algebraica. En la Figura 43 se puede apreciar este momento.

Figura 43
Imagen proyectada de los elementos de una expresión algebraica

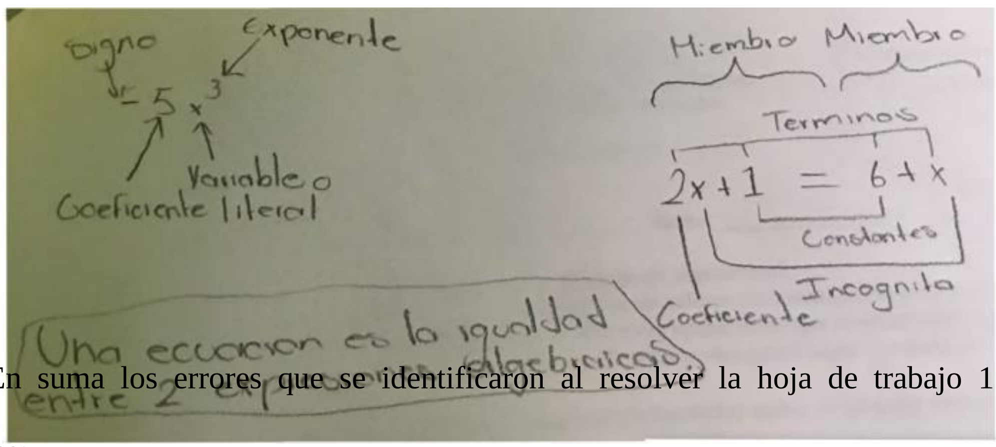
Para trabajar la cuarta columna de la hoja de trabajo #1 se implementó la misma metodología, primero se resolvieron los dos primeros enunciados a manera de ejemplo, después se dejó a los alumnos que respondieran a los otros tres enunciados y después de un momento se les preguntó aleatoriamente la respuesta de cada enunciado para socializarla. Para el último enunciado se le preguntó a la alumna A3, misma que lo representó de manera adecuada a través de una ecuación, de donde se pudo definir y hacer mención a las partes que la conforman de la siguiente manera.

Mo. Ahora, habíamos dicho que esta es una expresión algebraicas /señalo la expresión algebraica $3a + 3$ *de la columna dos/ entonces, ¿esta es una expresión algebraica? /señalo la ecuación de* $3x + 3 = x + 7$ *pero los alumnos no responden/*
Mo. Bueno, podemos ver que ambas tienen coeficientes y literales diferentes. ¿Pero hay algún elemento en esta /señalo la ecuación/ que no tenga la expresión algebraica?
A3. ¿El resultado?
Mo. ¿El resultado?
A3. El igual.
Mo. Así es, ustedes pueden ver que en esta cuarta columna todas tienen el símbolo igual /las señalo en la pantalla con el cursor/ y en las expresiones algebraicas ninguna lo tiene, entonces, todas estas que ustedes acaban de hacer se llaman ecuaciones ¿Cómo podrían definir una ecuación? /los alumnos no contestan/.
Mo. A ver ya dijimos que las que escribimos en la segunda columna son expresiones algebraicas, ¿vemos expresiones algebraicas de este lado? /los alumnos no responden/ ¿qué opinan?
A1. ¿Sí, no?
Mo. A ver, en este último ejemplo de ecuación /señalo la ecuación $3x + 3 = x + 7$*/ ¿cuál sería una expresión algebraica?*
A2. $3x$
Mo. Así es, esto pudiera ser una expresión algebraica /sombreo solamente el $3x$ *de la ecuación/. Ahora observen que en el último ejemplo de las expresiones pusimos que* $3a + 3$ *también era una expresión algebraica por lo que aquí en la ecuación el* $3x + 3$ *también es una expresión y* $x + 7$ *también debe ser una expresión algebraica. Entonces ustedes ya dijeron que en una ecuación hay un signo de igual ¿Cómo pudieran definir a una ecuación?*
A2. Por el signo igual.
Mo. Bueno en las ecuaciones siempre está presente el símbolo igual, por lo que se establece una igualdad. Pero ¿entre qué se establece esta igualdad?
A3. Entre expresiones
Mo. Ahí está, entonces podemos decir que la ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Ahora, en la hoja que tienen en blanco escriban lo que es una ecuación /proyecto la imagen que muestra las partes de una ecuación/.
Mo. Entonces, al igual que en una expresión algebraica, la ecuación tiene diferentes partes. Todo lo que está de lado izquierdo del signo igual se le llama primer miembro de la ecuación, todo lo que está del lado derecho del signo igual se llama segundo miembro de la ecuación /lo señalo en la pantalla/. Cada miembro de la ecuación está compuesto por términos /señalo en la pantalla cuáles son los términos de cada miembro/. En la expresión algebraica ya miramos lo que es un

coeficiente, pueden ver que en la ecuación también tenemos coeficientes al igual que las incógnitas, ya sabemos que una incógnita puede ser la representación de un número cualquiera. Ahora en la hoja que se les proporcionó en blanco, tomen nota de las partes de una ecuación.

Como se pudo apreciar en este anterior registro, los alumnos no se pudieron aproximar por sí solos a la definición de ecuación a partir del signo igual y la definición de expresión algebraica que ya se había dado. Sobre los apuntes que realizaron los alumnos, la Figura 44 muestra las notas que realizaron sobre la definición de ecuación y sus partes, así como las partes de una expresión algebraica.

Figura 44
Apuntes de los alumnos



En suma los errores que se identificaron al resolver la hoja de trabajo 1 fueron los siguientes:

- Error en la transición de un lenguaje natural al algebraico (Segura, 2004). Los alumnos tuvieron confusión entre la diferencia y multiplicación y el triple de un número con una potencia
- Dificultad en la comprensión del concepto de igualdad. Los alumnos mostraron dificultad en interpretar la igualdad entre dos expresiones.

Es importante mencionar que aunque los alumnos ya conocían estos temas, se quisieron retomar en la práctica con la finalidad de evitar mayores complicaciones al introducir el nuevo contenido, para esto, no bastó con definir cosas pues se preparó el medio de manera que fueran los propios alumnos quienes fueran cayendo en cuenta sobre la transferencia del lenguaje común al algebraico, las partes de una expresión algebraica y resolución de ecuaciones de primer grado.

Para trabajar la solución de ecuaciones de primer grado, que corresponde a otro conocimiento previo se trabajó de la siguiente manera.

Situación de acción. Esta situación se pretendía lograr cuando los alumnos resolvieran las actividades de la hoja de trabajo 2 y tomaran las decisiones que hicieran falta para resolver las ecuaciones de primer grado atendiendo el proceso de despeje. Esta acción se dio de la siguiente manera.

> *Mo. Bien, ustedes en ciclos anteriores ya resolvieron ecuaciones lineales con una incógnita, para resolver una ecuación lineal con una incógnita ¿qué es lo que tenemos que hacer?*
> *A3. Encontrar el valor.*
> *Mo. Bien, entonces para resolver una ecuación tenemos que encontrar el valor de la incógnita. Para encontrar el valor de esa incógnita existe un procedimiento ¿en qué consiste?/los alumnos no responden y comienzan a buscar entre lo que habían anotado recientemente/*
> *Mo. Bueno, aquí no lo hemos visto aún pero para poder resolver una ecuación de primer grado con una incógnita tenemos que realizar un procedimiento al cual se le llama despeje que consiste en dejar en alguno de los miembros de la ecuación la incógnita sola. En este caso podemos ver ahí /se proyecta en la pantalla la hoja de trabajo #2/ que para resolver la ecuación* $a + 2 = 8$ *debemos dejar la incógnita* a *sola ya sea en el primer o segundo miembro, que bueno para este caso conviene dejarla sola en el miembro uno.*
> *Mo. Muy bien vamos a ejemplificar este procedimiento con la primera ecuación de la hoja de trabajo dos, tenemos que* $a + 2 = 8$ *y ya dijimos que queremos dejar la incógnita a sola en el primer miembro ¿cómo quitamos ese 2 que está ahí?*
> *A1. Lo pasamos abajo*
> *Mo. Mmm ¿abajo? bueno lo que queremos es quitarlo, entonces si ahí a la incógnita* a *se le están sumando dos unidades ¿Qué tenemos que hacer para quitar esas dos unidades?*
> *A3. Restarlas*
> *Mo. Restar las dos unidades ¿verdad?, ok entonces sería* $a + 2$ *que es lo que está arriba menos 2 /escribo en la computadora* $a + 2 - 2$ *debajo de la ecuación* $a + 2 = 8$ */. Ahora, si la ecuación nos representa una igualdad, al restarle dos en el primer miembro ¿Qué tenemos que hacer en el otro miembro? /los alumnos no responden/ Si de un lado ya le quitamos dos unidades ¿qué tenemos que hacer del otro lado del igual?*
> *A1. Sumarle dos.*
> *Mo. A ver, ya habíamos dicho que una ecuación es una igualdad, o sea, que lo que hay en el primer miembro debe ser igual a lo que hay en el segundo miembro, entonces si de un lado ya le quitamos dos, que tenemos que hacer del otro lado para que se conserve la igualdad.*
> *A3. Sumarle dos.*

De este anterior registro, se identifica que el profesor está orientando el razonamiento de los alumnos, que aunque se sabe que esto no genera el aprendizaje más significativo, se realizó así con la finalidad de evitar consumir mayor tiempo en el tratamiento de los conocimientos previos. Además, de que se tenía previsto presentar una mejora en el tratamiento de este tipo de presentación cuando los alumnos trabajaran con el applet que permite resolver ecuaciones de primer grado al final del momento 1.

Como se puede dar cuenta los alumnos muestran indicios de querer hacer la operación contraria que es como se les enseña comúnmente, sin embargo, para nuestra práctica fue necesario que los alumnos supieran la justificación de este procedimiento con la finalidad de que al momento de utilizar las balanzas digitales no se les complicaran los despejes. Como los alumnos no llegaban a la respuesta esperada se les dijo que sería igual restarle dos en el segundo miembro porque lo que hacemos de un lado de la igualdad se lo tenemos que hacer del otro lado para que se siga conservando, después de esto se escribió en la computadora $a + 2 - 2 = 8 - 2$ debajo de la ecuación $a + 2 = 8$ y se les preguntó a los alumnos, ¿cuánto valía a? A partir de esto se les dijo lo siguiente.

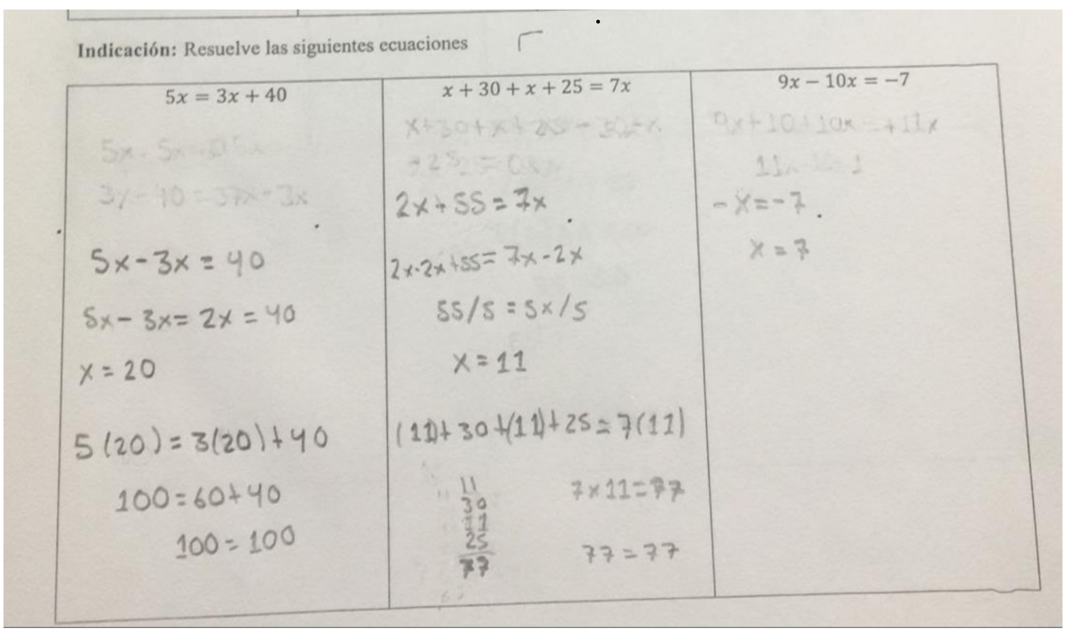
> *Mo. En secundaria lo que se enseña sobre despejes es pasar los términos de un miembro a otro con símbolo contrario de tal manera que si se tiene $a + 2 = 8$ y ese dos está sumando se pasa restando al segundo miembro. ¿Pero cuál es el fundamento matemático que hay detrás de este proceso? precisamente lo que acabamos de realizar hace un momento que fue restar en ambos miembros de la igualdad 2 unidades. Así podemos ver que en el primer miembro desaparece el dos y en el segundo miembro se restan dos. Este fundamento matemático lo vamos a ver de la siguiente manera; lo que hagamos en un miembro ya sea sumarle o restarle también lo tenemos que hacer en el otro miembro. De tal manera que si aquí tenemos $b - 4 = 20$ /señalo con el cursor en la pantalla el segundo ejemplo de la hoja de trabajo dos/ ¿Qué tenemos que hacer para dejar sola la incógnita en el primer miembro?*
> *A3. Sumarle cuatro.*
> *Mo. Sumarle cuatro, eso es cierto. Porque si le sumamos cuatro /escribo en la computadora $b - 4 + 4$ debajo de la ecuación original/ al restarle los cuatro que ya tengo, se harían cero y me quedaría la b sola en este miembro. Ahora vamos con el segundo miembro, si acá le sumamos cuatro ¿qué tenemos que hacer con el 20?*
> *A3. Sumarle 4.*
> *Mo. Así es*

Después de que los alumnos entendieran la justificación de pasar el número con la operación contraria, se atendió a la comprobación diciéndoles que para comprobar los valores de las incógnitas se debía sustituir este valor en la ecuación inicial y si la igualdad se cumplía significaba que era correcto. Las demás ecuaciones de la primera tabla se estuvieron resolviendo de manera grupal. Para atender a las ecuaciones de la hoja de trabajo dos que están en la segunda tabla no se les dio ninguna explicación a los alumnos, solamente se les dijo que las realizaran.

Situación de formulación-validación. Consideramos que estas dos situaciones se dieron a la par debido al tipo de peguntas planteadas por el profesor al momento de la formulación puesto que al momento de la comunicación de informaciones los alumnos también iban validando los procedimientos implementados por sus compañeros.

La situación de formulación se dio cuando los alumnos comunicaban las respuestas a las preguntas que se les hacían sobre la posible respuesta y procedimiento a emplear en los despejes de las ecuaciones presentadas en la hoja de trabajo dos. Sobre las producciones de los alumnos, la Figura 45 muestra las respuestas de uno de los alumnos para las ecuaciones de la segunda tabla, la razón de que no se presenten las respuestas para las ecuaciones en la primera tabla se debe a que ninguno de los alumnos las copió de la pantalla cuando se resolvieron de manera grupal.

Figura 45
Respuestas de A3 en la hoja de trabajo #3



Las respuestas de los tres alumnos fueron similares, en los tres ejercicios aislaron la incógnita en el miembro 1 de la ecuación y no cometieron errores en la suma de términos semejantes. Aunque solamente uno de los alumnos no realizó la comprobación, todos pudieron llegar al resultado correcto. Cabe destacar que en la última ecuación los alumnos sólo habían llegado al resultado $-x = -7$.

Una vez que los alumnos resolvieron las ecuaciones de la segunda tabla de la hoja de trabajo dos, para llevar a cabo esta situación, se les preguntó el proceso que se debía seguir para resolver cada una de las ecuaciones y lo descrito se iba proyectando en la pantalla, una vez que se representaba se preguntaba a los demás si estaban de acuerdo con lo que manifestaba su compañero. Desafortunadamente no hubo respuestas o procedimientos diferentes para confrontar.

Situación de institucionalización. A partir de las respuestas de los alumnos se institucionalizó que para realizar despejes es necesario realizar una transposición de términos que consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro y que cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo. Lo que equivale a sumar o restar en ambos miembros de la ecuación las mismas cantidades.

También cuando en la última ecuación los alumnos sólo habían llegado al resultado $-x = -7$, para llegar al resultado de $x = 7$ se les dijo que los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros por menos uno.

En realidad, durante todo el momento uno se fue conduciendo al alumno mediante intervenciones oportunas que permitieran y facilitaran el aprendizaje. Se cree que trabajar los conocimientos previos a través de situaciones didácticas en las que se busca que el alumno aprenda algo, es adecuado, pues no solo se les dieron definiciones a los jóvenes, se les plantearon problemas y a través de la resolución de éstos fue que se institucionalizaron los conceptos y procedimientos.

Momento 2

Después de que se realizara esta segunda hoja de trabajo se tenía planeado introducir a los alumnos en la utilización de la balanza digital mediante la presentación de un video, sin embargo no fue así, ya que primero se resolvió la actividad propuesta en la hoja de trabajo tres que corresponde al momento dos de la planeación, cuyo propósito era que los alumnos formulen un sistema de ecuaciones a partir de una situación problema.

Situación de acción. Esta situación se dio al momento en que los alumnos respondieron a las actividades que involucraba la hoja de trabajo tres y tomaron decisiones sobre cómo establecer el sistema y el procedimiento para resolverlo.

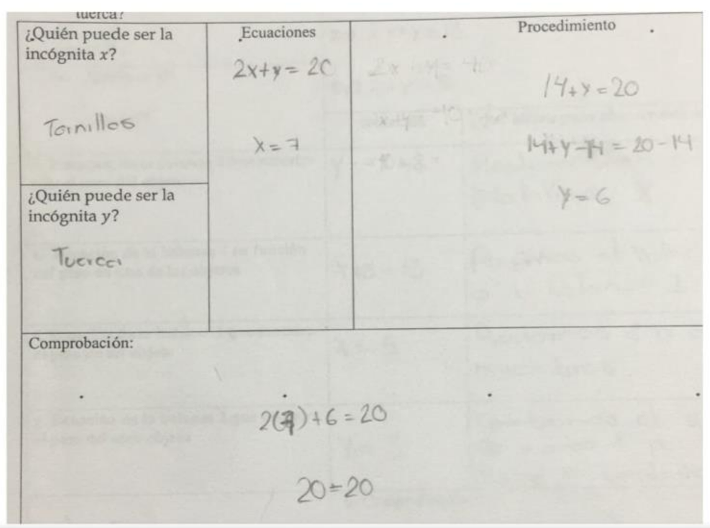
Situación de formulación. Para fomentar la comunicación de informaciones con los alumnos, se fueron planteando diferentes preguntas que permitieron asignar los objetos que implicaba el problema a las incógnitas, establecer el sistema y realizar el procedimiento. El siguiente registro presenta la manera en cómo se dieron estas situaciones.

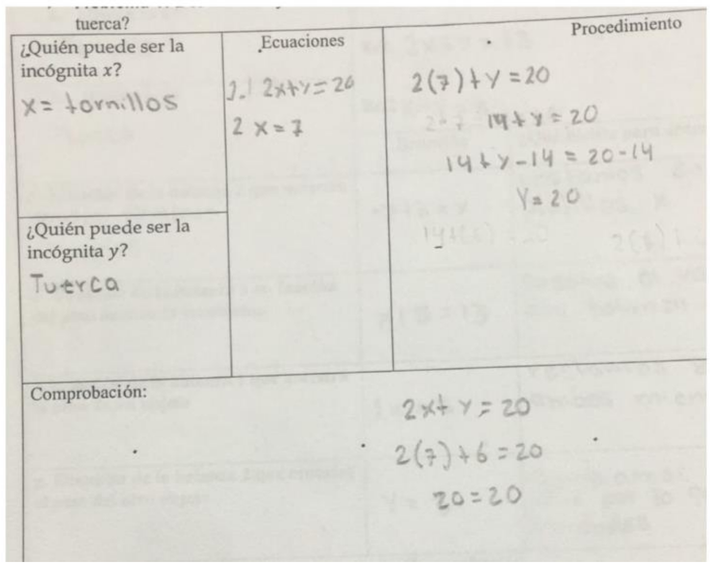
Mo. El problema enuncia lo siguiente; dos tornillos y una tuerca pesan 20 gramos. Si cada tornillo pesa 7 gr ¿Cuánto pesa la tuerca? para poder responder a este problema primero debemos responder a las preguntas que se plantean ahí ¿quién puede ser la incógnita x*?*
A1. Los tornillos /lo escribo en la casilla correspondiente de la hoja de trabajo #3 mientras la proyecto en la pantalla/
Mo. ¿Y quién puede ser la incógnita y*?*
A3. Las tuercas. /lo escribo en la casilla correspondiente de la hoja de trabajo #3/
Mo. Entonces las x *serán los tornillos y las* y *las tuercas.*
Mo. Ahora con base en esto, deberán establecer el sistema conformado por las ecuaciones que implica el problema haciendo una transferencia del lenguaje común al algebraico. Una vez que ya tengan las dos ecuaciones, deberán resolverlas y determinar cuánto pesa la tuerca, o sea cual es el valor de y.

La

Figura 46 que se presenta a continuación muestra las estrategias utilizadas por dos alumnos en la resolución de la hoja de trabajo 3, la primera corresponde al alumno A1 y la segunda al alumno A3, la otra evidencia no se incluyó debido a que realizó el mismo proceso que A1.

Figura 46
Respuestas de A1 y A3 en la hoja de trabajo #3





Como se puede notar en estas dos evidencias, ambos alumnos asignaron como x al tornillo y y a la tuerca, lo que llevó a que establecieran las mismas ecuaciones. Sobre el sistema ambos lo establecieron de manera exitosa aunque se puede ver que A3 enumera las ecuaciones. Respecto al procedimiento, A3 escribe la sustitución del valor de x como $(2(7) + y = 20)$ mientras que A1 sólo escribe el resultado de esta sustitución $(14 + y = 20)$. Para realizar el despeje ambos utilizan la segunda regla que se deriva del axioma fundamental de las ecuaciones, puesto que restan la misma cantidad en ambos miembros de la ecuación. En la evidencia A3 se identifica un error, pues concluye que $y = 20$ cuando $y = 6$, este error se atribuye a un descuido

(Ruano, Socas y Palarea, 2008) ya que no restó en el segundo miembro las 14 unidades sin embargo al momento de la comprobación si utilizó el 6 como el valor de y. En ambos casos la comprobación se realizó de manera exitosa.

Situación de validación. Para socializar esta actividad, se les preguntó a los alumnos sobre las ecuaciones a las que habían llegado a partir del problema y el procedimiento empleado. El siguiente registro da evidencia sobre la manera como se llevó a cabo.

Mo. Muy bien, ¿Cómo nos quedó nuestra primera ecuación?
A2. $2x + y = 20$
Mo. Correcto, y ¿cómo nos quedó la segunda ecuación?
A2. $x = 7$
Mo. Bien, ¿alguno llegó a ecuaciones diferentes? /los alumnos niegan con la cabeza/ ahora con base en estas dos ecuaciones, díganme ¿Qué hicieron para encontrar el peso de una tuerca si ya conocían cuánto pesa cada tornillo?
A3. Primero se tuvo que cambiar el valor de x por 7.
Mo. Ahí está, primero tuvieron que sustituir en la primera ecuación el valor de x así como lo hicimos en las ecuaciones anteriores cuando se hacía una comprobación.
Mo. Bien, ¿cómo les quedó entonces la sustitución de la x *en la primera ecuación para encontrar el valor de la tuerca?*
A3. Dos, luego se abre paréntesis, siete, se cierra paréntesis, mas y*, y eso es igual a catorce más* y*, ¡no! a veinte. /escribo en la casilla de procedimiento de la hoja de trabajo 3 lo siguiente* $2(7) + y = 20$*/*
Mo. Correcto, así nos quedaría la sustitución de x en la primera ecuación ¿Alguno tiene un procedimiento distinto? /los alumnos dicen que no/
Mo. Ahora ¿Qué hiciste después de que tenía la sustitución? /se le pregunta al alumno A1 pero tarda en responder/
A1. Sumar
Mo. ¿Qué sumarías? /no responde/
Mo. Bueno, la sustitución que hizo su compañera nos dice que hay que realizar primero la multiplicación de 7 por 2. /Escribo $14 + y = 20$ *debajo de* $2(7) + y = 20$*/. Ahora queremos dejar la* y *sola en el miembro izquierdo ¿Qué tenemos que hacer para dejarla sola?*
A2. Restar.
Mo. ¿Qué tenemos que restar?
A2. Restarle a veinte los catorce.
Mo. Muy bien. Pero entonces si al segundo miembro ya le restamos catorce, que tenemos que hacer en el primer miembro.
A1. Restarle catorce.
Mo. Así es, entonces nos queda la siguiente ecuación/escribo $14 - 14 + y = 20 - 14$ *debajo de* $14 + y = 20$*/ ¿Cuál sería el valor de* y *entonces? /los alumnos comienzan a realizar los cálculos en la hoja/*
A2. ¿Seis?
Mo. ¿Alguno obtuvo otro valor? /el alumno A3 acentuó con la cabeza el otro alumno aún no terminaba/

Mo. Bien, si obtiene otro valor me dice /refiriéndome al alumno A1/. Entonces, ya sabemos cuánto pesa un tornillo y una tuerca, vamos a hacer una comprobación para saber si estos valores son correctos /se da un tiempo para que realicen la comprobación/.
A3. Sí.
Mo. ¿Qué opinan los demás?
A2. También. /El alumno A1 aunque tarda, concluye en que el valor de la tuerca es correcto/

Como se puede apreciar en este registro, no hubo respuestas diferentes o resultados distintos, por lo que no se confrontaron. Nótese que el maestro trata de fomentar en todo momento mediante preguntas la devolución y que sean los mismos alumnos quienes vayan validando procedimientos y resultados.

Situación de institucionalización. Debido a que en la formulación ya se había referido a un sistema de ecuaciones al pedirle a los alumnos que debían establecer el sistema conformado por las ecuaciones que implica el problema, sólo se les dijo que un sistema de dos ecuaciones lineales es la reunión de dos ecuaciones que se tienen que resolver simultáneamente como en el ejemplo.

Después de atenderse al momento dos de la planeación, se regresó al momento 1 para presentar el video donde se explica lo que es una balanza y su funcionamiento. Aunque el video se retomó de YouTube (Divertimat, 2014), ya se llevaba descargado en la computadora que estaba proyectando la imagen en la pantalla, por lo que no hubo complicaciones para mostrarlo. El tratamiento para el video fue el siguiente.

Mo. Muy bien, ahora, ¿Saben lo qué es y para qué sirve una balanza?
A2. Para pesar.
Mo. Así es, sirve para pesar objetos /proyecto los tipos de balanzas en la pantalla/. En la actualidad hay varios tipos de balanzas y la mayoría ya son digitales. Nosotros estaremos utilizando este tipo de balanza /señalo con el cursor la balanza de platillos/ de tal manera que si ustedes quieren saber el peso de tres naranjas las deben de poner en un platillo y en el otro ir agregando diferentes pesos hasta que esté en equilibrio, cuando la balanza esté en equilibrio eso significa que el peso de las naranjas es igual al peso que está en el otro platillo. A continuación vamos a ver un breve video que nos va a explicar cómo es el uso de una balanza /se proyecta el video y después de un momento lo pauso/
Mo. Entonces en la ecuación que nos da de ejemplo el video, el primer miembro está siendo representado en el primer platillo de la balanza y el segundo miembro de la ecuación está siendo representado en el segundo platillo de la balanza. Noten que la balanza está en equilibrio debido a que existe una igualdad entre los pesos de los objetos /vuelvo a reproducir el video y después de un momento doy pausa/

Mo. Como pudieron darse cuenta, en el video menciona que para mantener en equilibrio la balanza siempre debemos quitar o agregar la misma cantidad de elementos en ambos lados así como nosotros lo hacíamos en los despejes de las primeras ecuaciones, este es el mismo principio que sigue la balanza /vuelvo a reproducir el video hasta que termina/.
Mo. Ok, entonces como pudieron ver, en la balanza una vez que está establecida la igualdad, lo que quitemos o agreguemos en un platillo, lo tendremos que hacer en el otro para que no se altere y la manipulación de los objetos en la balanza nos permitirá encontrar el peso de los objetos. Debemos considerar que si la balanza no está en equilibrio es porque la igualdad establecida al comienzo se ha alterado.

Como se pudo apreciar en este fragmento de registro, antes de reproducir el video se proyectó una imagen que representaba los tipos de balanzas. La imagen utilizada es la mostrada en la

Figura ***47***.

Como se tenía planeado, después de ver el video se trabajó con el applet que involucra una balanza digital algebraica para ecuaciones lineales con una incógnita a través de las situaciones de la TSD. Los resultados se presentan a continuación.

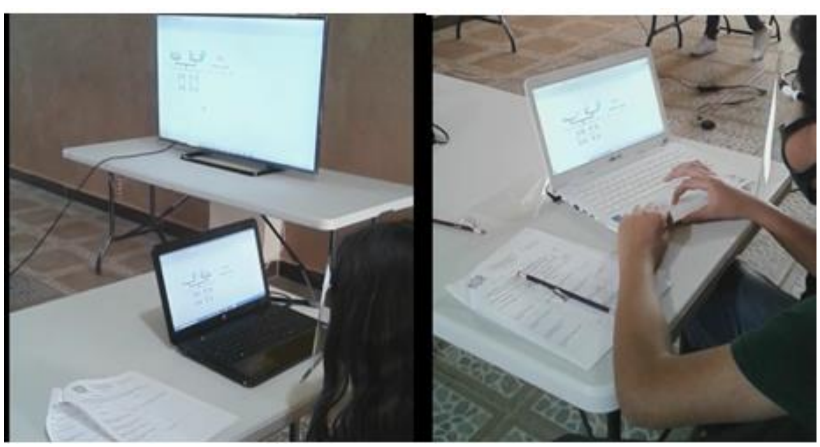
Figura 47
Tipos de balanzas

Situación de acción. Esta situación se generó cuando los alumnos interactuaron con la interfaz del applet que presentaba la balanza digital al momento de pedirles que ilustraran en cada platillo los miembros de la ecuación generada aleatoriamente. El siguiente registro da evidencia sobre cómo se llevó a cabo.

Mo. Así como en el video, vamos a estar trabajando con balanzas digitales, por favor abran todos la computadora que tienen en su lugar, al abrirla debe aparecerles esta ventana/proyecto en la pantalla el interfaz de la balanza digital para resolver ecuaciones de primer grado/, lo que vamos a hacer con ella es resolver ecuaciones de primer grado utilizando la balanza /comienzo a explicar el uso de los botones y el termino que representa en cada miembro de la ecuación/
Mo. Muy bien, ya estamos todos en la ventana que muestra la balanza ¿cierto? /los alumnos asientan con la cabeza/, pueden ver que hay botones con flechas hacia arriba y hacia abajo, estos dos /señalo con el cursor en la pantalla los botones/ sirven para representar el primer término del miembro uno de la ecuación, los botones siguientes sirven para representar el segundo término del primer miembro de la ecuación, los que siguen sirven para representar el primer término del segundo miembro y finalmente estos botones sirven para representar el segundo término del segundo miembro de la ecuación /cada botón se señaló con el cursor/. El botón que dice nuevo permite generar una ecuación nueva cada vez que lo presionan, /se da la indicación de que lo presionen/a lo mejor al presionarlo les dio una ecuación diferente a la que se ve aquí en la pantalla pero el procedimiento será el mismo.
Mo. Lo primero que deben hacer es representar la ecuación que se les da en la balanza utilizando los botones /se ejemplifica con la ecuación $4x+4=5x-5$ *y se pide que realicen lo mismo en la computadora asignada mientras paso por los lugares para verificar que lo hayan realizado bien. /Ninguno de los alumnos mostró dificultad en este paso, aunque tardaron un poco en hacerlo/*

Con relación a los momentos de devolución, se siguió propiciando mediante preguntas que evitaran dar la respuesta al alumno. En este caso cuando el alumno preguntaba acerca de si estaba bien representada la ecuación en la balanza digital se le preguntaba ¿Cómo tú te puedes dar cuenta si está bien representada la ecuación en la balanza? pretendiendo que realizara una interpretación del equilibrio de la balanza. Hasta este momento las instrucciones de las actividades planteadas fueron claras para los alumnos e incluso se identificó un interés al utilizar la balanza digital. La Figura 48 muestra evidencia de este momento.

Figura 48
Uso del applet para resolver ecuaciones lineales



Situación de formulación. Posterior a que los alumnos tenían representada la ecuación en los platillos de la balanza y ya se había explicado el uso de los botones, se les pidió que buscaran la manera en cómo despejar las literales, es decir que buscaran la manera de hacer que todas las literales de la ecuación estuvieran en un solo platillo de la balanza y los números en otro, cuidando que la balanza siguiera en equilibrio. El siguiente registro muestra la manera en cómo se dio esta situación.

> *Mo. Una vez que ya establecieron la igualdad en la balanza, van a tener que encontrar cual es el valor de la incógnita. Ya saben ustedes que para no alterar la balanza, lo que agreguen o quiten en un platillo, lo deben hacer también en el otro /se ejemplifica con la ecuación* $4x + 4 = 5x - 5$ *dejando en el miembro dos las incógnitas y se pide que realicen lo mismo con la ecuación que tienen en su computadora mientras paso por los lugares para ver cómo lo implementan/*

La devolución se fomentó mediante preguntas, por ejemplo mientras los alumnos resolvían la ecuación dada en su applet se realizaron las siguientes interrogantes; ¿De qué lado aislará las incógnitas?, una vez que el alumno decidía por ejemplo que las juntaría en el segundo miembro, le señalaba el término constante de este mismo miembro y le preguntaba ¿Cómo quita este término de ahí para que le queden únicamente las incógnitas?, usualmente el alumno siempre decía “restando” sin considerar si el termino era negativo, cuando esto sucedía se dejaba que lo hiciera, para que se diera cuenta de su error cuando presionaba el botón que aumentaba unidades negativas y en lugar de desaparecer los objetos aumentaban.

Un caso que ejemplifica esta situación fue cuando en la ecuación $4x + 4 = 5x - 5$ el alumno A2 quería aislar el termino $5x$ del segundo miembro y para ello presionó cinco veces el botón que aumenta unidades negativas, pero se dio cuenta de su error al identificar que en lugar de disminuir aumentaban los objetos ya que el otro término del segundo miembro de la ecuación es negativo.

En este momento se puede identificar que la situación misma permite al alumno percibir si lo que está haciendo es correcto y en caso de que no, ver las adecuaciones necesarias. Este tipo de situaciones permitió una evolución en el contrato didáctico puesto que se propició que los alumnos evitaran querer obtener la respuesta del maestro, por otro lado nótese que aunque el maestro identifica que los alumnos caen en errores los deja para que ellos mismos aprendan del error.

Durante este proceso, hubo casos en los que los alumnos alteraban los términos de uno de los miembros de la ecuación y olvidaban hacer lo mismo en el otro miembro, sin embargo, al notar que si la balanza no estaba en equilibrio algo andaba mal con su igualdad, lograban recordarlo. Aquí es importante señalar que la misma actividad permite al estudiante saber si el movimiento es correcto o no.

Una vez que se daban cuenta de estos aspectos por sí mismos, más delante ya no les presentaba conflicto y lograban entender el uso de los botones en la implementación de la balanza gracias al principio del equilibrio que representa la ecuación en los platillos de la balanza.

En realidad sobre el uso del applet no mostraron gran complicación pues el uso de cada botón lo comprendieron al instante de la explicación, en el proceso del despeje fue donde sí tuvieron dificultad en eliminar los coeficientes negativos de los platillos.

Situación de validación. Después de que los alumnos resolvieron individualmente varias ecuaciones utilizando la balanza algebraica digital, se les prestó el mouse de la computadora que estaba proyectando en la pantalla para que resolviera cada uno una ecuación frente al grupo, con la intención de que mostraran su procedimiento empleado y que los demás alumnos lo pudieran validar, sin embargo al preguntar opiniones sobre el proceso que realizaban sus compañeros no respondían o no opinaban nada. El siguiente registro muestra la manera en cómo se llevó a cabo.

Mo. Muy bien ahora cada uno de ustedes va a resolver una ecuación aquí en la pantalla /le presté el mouse a la alumna A3 primero/
Mo. ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación?
A3. ¿Dejar la x sola?
Mo. Pero antes de eso, debemos primero representar la ecuación en la balanza. /la alumna representa en la balanza la ecuación de $3x = 4x + 2$ *utilizando los botones/. Ahí la balanza está en equilibrio, quiere decir que la representación está correcta. ¿Qué es lo que sigue?*
A3. Despejar la x.
Mo. Correcto, entonces ¿qué tiene que hacer?
A3. Restar 3 x.
Mo. ¿Qué opinan? ¿Es correcto? /refiriéndome a los demás alumnos pero no contestan/
Mo. A ver si va a juntar las x en el platillo izquierdo, debe quitar las x del platillo derecho /La alumna quita las x del segundo platillo restando $4x$ *y agrega cuatro x negativas en el primer platillo, quedándole* $-1x = 2$*/, entonces ¿cuál es el valor de equis?*
A3. Menos dos
Mo. ¿Qué opinan los demás? ¿Fue correcto? /los alumnos no contestan/
Mo. Bueno, ahí podemos ver que la balanza está en equilibrio, lo que nos indica que el despeje fue correcto. ¿Alguna duda? /los alumnos dicen que no/ ese es el proceso que tendríamos que hacer para resolver una ecuación mediante el uso de una balanza digital /se realiza un ejercicio de manera similar con los otros dos alumnos y no se identifican complicaciones/.

Como se puede apreciar en este registro, los alumnos fueron proponiendo la manera en cómo resolver la ecuación mediante la utilización del applet, y los compañeros y el titular fueron ayudando a que se resolvieran las tareas. La Figura 49 muestra evidencia del momento.

Figura 49
Solución de ecuación lineal frente al grupo

Situación de institucionalización. Después de la validación se tenía planeado atender a la institucionalización del saber cuándo se formalizara que la transposición de términos se justifica en las primeras cuatro reglas que se derivan del Axioma fundamental de las ecuaciones, sin embargo las dos primeras ya se habían mencionado durante la resolución de las actividades anteriores puesto que ya se les había dicho que para conservar una igualdad, lo que se agregara o quitara en el primer miembro, también debería agregarse o quitarse lo mismo en el segundo miembro. En el momento uno se puede identificar este suceso.

Momento 3.

Para este momento se tenía el propósito de que el alumno aprendiera el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros mediante la utilización del applet diseñado en GeoGebra, como ya se hizo mención, también se implementó la TSD para el diseño de las actividades por lo que los resultados también se presentarán a través de la descripción cómo se ejecutó cada tipo de situación.

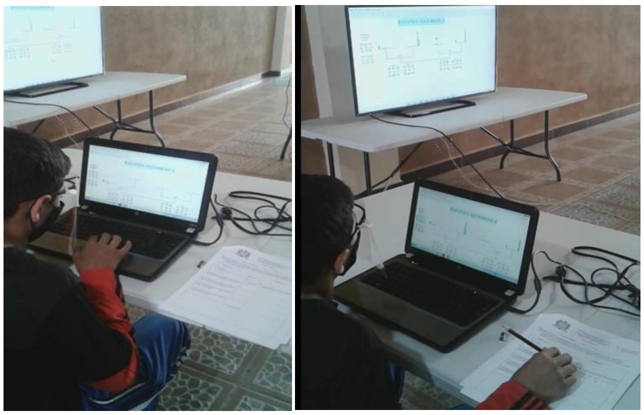
Situación de acción. Como se acababa de trabajar con el applet diseñado para resolver ecuaciones de primer grado esta fase comenzó explicándoles a los alumnos cómo abrir el applet en GeoGebra para resolver los sistemas mientras el maestro proyectaba su laptop en la pantalla. Una vez que cada alumno tenía acceso al applet en su computadora asignada se comenzó dando lectura al problema de la hoja de trabajo cuatro que implicaba el planteamiento de un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros, la forma en la que se atendió fue la siguiente.

Mo. Muy bien, fíjense que ahí tenemos dos balanzas, en la otra solamente teníamos una, estas nos van a servir para resolver un sistema de dos ecuaciones. En la hoja de trabajo que sigue tienen el siguiente problema: Dos tornillos y una tierca pesan 13 gramos. Un tornillo y una tuerca pesan 8 gr. ¿Cuánto pesa cada tornillo y cada tuerca?
Mo. Ahora, para comenzar ¿Quién puede ser la x?
A2. El tornillo
Mo. Vamos a poner todos ahí en la hoja de trabajo que x representará el tornillo. Ahora si x será el tornillo, ¿Quién es y?
A1. La tuerca.

Mo. Escribamos pues todos ahí que la y será la tuerca. Ahora bien, vamos a poner en la parte que dice ecuación 1 la representación algebraica del primer enunciado que nos dice el problema /señalo dónde en la pantalla/. Si el problema nos dice que dos tornillos y una tuerca pesan 13 gr, ¿cómo se representaría de manera algebraica este enunciado? /después de un momento pido al alumno A3 que me diga cómo le quedó esa representación/
A3. Dos equis más y igual a 13 /lo escribo en la hoja de trabajo proyectada en la pantalla/
Mo. Correcto, el dos equis representa los dos tornillos, y la tuerca y juntos pesan 13 gramos. Ahora, la segunda ecuación la vamos a establecer del segundo enunciado que nos dice el problema, un tornillo y una tuerca pesan 8 gramos, esta ecuación la debemos establecer en donde dice segunda ecuación /lo señalo en la pantalla y después de un breve momento le pido al alumno A2 que mencione cómo le quedó la representación de ese enunciado/
A2. x más y igual a 8 /lo escribo en la hoja de trabajo proyectada en la pantalla/

Una vez que ya se tenía establecido el sistema de ecuaciones en la hoja de trabajo, para el uso del applet se les dijo que tendrían que reproducirlo primero en la parte de "sistema de ecuaciones de 2x2" utilizando los botones que incluía la interfaz del applet y una vez que ya lo tuvieran representado deberían reproducirlo en la balanza tal como en la applet anterior para resolver ecuaciones lineales. Para reproducir el sistema en la balanza fue necesario explicar el uso de cada botón ya que a diferencia del applet anterior, este involucraba más. La explicación fue a manera de demostración puesto que al estar proyectando el applet en la pantalla únicamente se ejemplificó como hacerlo una vez para que los alumnos identificaran el uso de cada botón. La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** representa este momento.

Figura 50
Demostración del uso de la balanza para resolver un sistema de ecuaciones



Sobre esto, únicamente uno de los alumnos tuvo una duda, refiriéndose a cuál era el botón que representaba el segundo miembro de la ecuación uno ya que no lo podía representar, pues el presionaba el botón que modificaba las constantes en el primer miembro. Para responder a esta duda, se le dijo que probara todos los botones que estaban debajo del platillo uno y observara lo que ocurría en la balanza, al hacerlo, pudo determinar cuál era por el mismo. Como se pudo apreciar, se trató de guiar al alumno sin dar respuestas concretas sobre lo que preguntaba dando paso a una devolución

Al principio cuando los alumnos vieron la interfaz de la balanza se vieron entre ellos e hicieron expresiones de asombro y preocupación, ya que posiblemente al ver tantos botones y expresiones pensaron que sería complicado utilizarla, sin embargo, bastaron sólo unos minutos y una breve explicación demostrativa de su uso para que le perdieran el miedo. Durante el uso de la balanza, se identificó una actitud de interés hacia resolver los sistemas con ayuda de la tecnología puesto que no se imaginaban que sería así.

Hasta este momento, se siguió respetando el mismo contrato didáctico establecido desde el inicio, donde el profesor asumió la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos al darle el tratamiento adecuado a cada pregunta o duda que tenían alrededor del proceso de enseñanza. Mediante explicaciones a través de ejemplos, fue que se estuvo promoviendo el uso del applet para que los educandos aprendieran a resolver los sistemas de ecuaciones.

Situación de formulación. Para esta fase se trabajó de manera individual debido a qué solo eran tres alumnos y era más sencillo atender sus dudas o asegurarse que no estuvieran teniendo complicaciones durante el proceso. Lo que ocurrió fue lo siguiente.

> *Mo. ¿Ya tenemos todos representado el sistema de ecuaciones en la balanza? /los alumnos acentúan con la cabeza/. Muy bien ahora, si se fijan, en el inciso d nos dice "Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto y". Entonces ustedes tendrán que utilizar los botones de la balanza 2 /los señalo en la pantalla/ para encontrar cual es el valor de y. Ósea que tendrán*

que dejar sola la y en el primer platillo de la balanza dos para decirme cuánto pesa. /Doy un momento para que los alumnos lo hagan/
Mo. ¿Listo? /los alumnos dicen que sí/. Muy bien ¿qué tuvieron que hacer para despejar la y en la segunda ecuación?
A3. Restar una x
Mo. ¿Usted qué hizo? /refiriéndome al alumno A2/
A2. También quité la x.
Mo. Ok, restaron una x en el primer miembro de la ecuación presionando este botón /lo señalo en la pantalla con el cursor/ y al hacerlo se alteró la balanza, ahora ¿qué hicieron para que la balanza volviera a estar en equilibrio?
A2. Restar igual x en el otro platillo.
Mo. ¿Y por qué restaron otra vez x en el segundo platillo? /refiriéndome al alumno A1/
A1. Para que estuviera en equilibrio.
A3. Porque si ya le habíamos quitado una x del lado izquierdo, también teníamos que quitarle una x del lado derecho.
Mo. Así es, si ponemos una x negativa en el segundo platillo la balanza ya se mantiene en equilibrio /lo realizo en el applet proyectado en la pantalla y al preguntar si todos lo realizaron así acentúan con la cabeza/
Mo. Entonces, esa ecuación que está representada en la balanza dos, vamos a escribirla ahí en el inciso d de su hoja de trabajo, debajo de donde dice "ecuación". Ahora, deben de responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener a esa ecuación? Yo les pregunto ¿Qué hicieron para poder obtener esta ecuación? /la señalo en el monitor con el cursor/
A3. Restamos equis
Mo. Así es, recuerden que originalmente teníamos la ecuación $x + y = 8$ y para obtener la ecuación $y = -x + 8$ tuvimos que restar x pero en ambos platillos de la balanza que representan ambos miembros de la segunda ecuación. Entonces lo que hicimos fue restar x en ambos miembros de la igualdad /los alumnos lo escriben en la hoja de trabajo/

Como se pudo dar cuenta, para este momento los alumnos ya no tienen complicación en realizar despejes y aplicar las primeras dos reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones. La dificultad se presentó al momento de sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, ya que con las indicaciones que se les daba no lograban arribar a ello.

Mo. Ahora, en el inciso e, ahí nos dice "Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos". En esta primera balanza ya tienen establecida la ecuación de $2x + y = 13$ pero en la balanza dos ya conocen cuánto pesa una y. Entonces ¿qué modificaciones tienen que hacer en esa primer balanza para trabajar con el peso de y?
A2. ¿Cómo? ¿Cómo?
Mo. Fíjense bien, aquí en esta balanza tiene que $2x + y = 13$, pero usted ya conoce el valor de y, usted ya sabe qué y es igual a menos x más ocho ¿qué tiene que hacer en esta primer balanza para únicamente trabajar con puras x?
A2. Restarle los 8.
Mo. ¿Dónde o a quién? /el alumno no responde/
Mo. A ver, ¿cómo se vería la balanza 1 utilizando solo el peso de uno de los objetos que usted ya conoce? /los alumnos me miran pero no dicen nada/ lo que queremos, es que en lugar de tener esta y /señalo la y de la ecuación uno en el monitor/ tengamos lo que pesa y que ya encontramos acá /señalo la balanza dos en la pantalla/.

A1. Sumarle más x.
Mo. ¿Por qué le sumaría x? /El alumno no contesta/
A3. ¿Restarle una x?
Mo. Haber vamos a hacer lo siguiente. Yo no quiero tener esta y /quito el segundo término del primer miembro de la ecuación uno presionando los botones del applet y la balanza uno se desequilibra/, en lugar de ponerla ¿qué puedo poner en este platillo para que la balanza se equilibre?
A3. ¿Menos x?
Mo. Tengo que poner una menos x /la agrego utilizando los botones del applet mientras los alumnos lo ven en el monitor/ ¿Y qué más por qué aún no está en equilibrio?,
A3. Y quitarle 8
Mo. ¿Se los quito?
A2. Ponerle ocho
Mo. Así es, porque acá en esta ecuación que ya despejamos tenemos que una y es igual a menos x más ocho. Ahora ¿Qué fue lo que hicimos?
A2. Cambiar lo que vale y.
Mo. Así es, entonces vamos a hacer eso todos en su applet /doy un momento para que lo hagan, después de que veo que todos lo tenían vuelvo a explicar/.
Mo. Ahora, esta ecuación que obtuvimos en la primer balanza es la que vamos a poner en el inciso e. /los alumnos escriben la ecuación $x + 8 = 13$ en la hoja de trabajo/. Ahora, ¿Qué hicimos para obtener esa ecuación?
A1. Restamos x.
Mo. Si tuvimos que restar una x para obtener ese resultado, pero antes.
A2. Tuvimos que pasar el valor de x a la balanza 1.
Mo. El valor de y, porque lo que conocíamos en la balanza 1 era el valor de y /lo señalo en la pantalla con el cursor/. Ahora vamos a escribir entonces esto que hicimos en la casilla que corresponde.

En este registro se puede identificar lo complicado que fue para los alumnos interpretar la ecuación de la balanza uno en función del peso del objeto conocido, por lo que se optó por brindarles ayuda y fomentar una sustitución. De este registro se puede identificar que los alumnos tuvieron dificultad en comprender el enunciado del inciso e de la hoja de trabajo #4 incluso no se pudieron aproximar a la respuesta esperada con las indicaciones que dio el profesor. Como el método de sustitución es un aprendizaje nuevo para ellos, se trabajó de manera colaborativa mientras se proyectaba la balanza en la pantalla, por lo que las estrategias implementadas fueron las mismas en todos los casos.

Respecto al uso del applet, se identificó que uno de los alumnos comenzó a realizar la sustitución sin antes quitar la y en el primer platillo de la balanza uno, por lo que al final le había quedado $x + y + 8$, afortunadamente al ver que la balanza no estaba en equilibrio se pudo dar cuenta que había un error y comenzó de nuevo. Antes de su segundo intento se les preguntó a los alumno qué era lo que se esperaba en el inciso e, para lo que respondieron que lo que se quería era que en la balanza uno hubiera puras x, con base en esto, el alumno comenzó omitiendo la y en la balanza uno y al hacer la sustitución la balanza quedó en equilibrio.

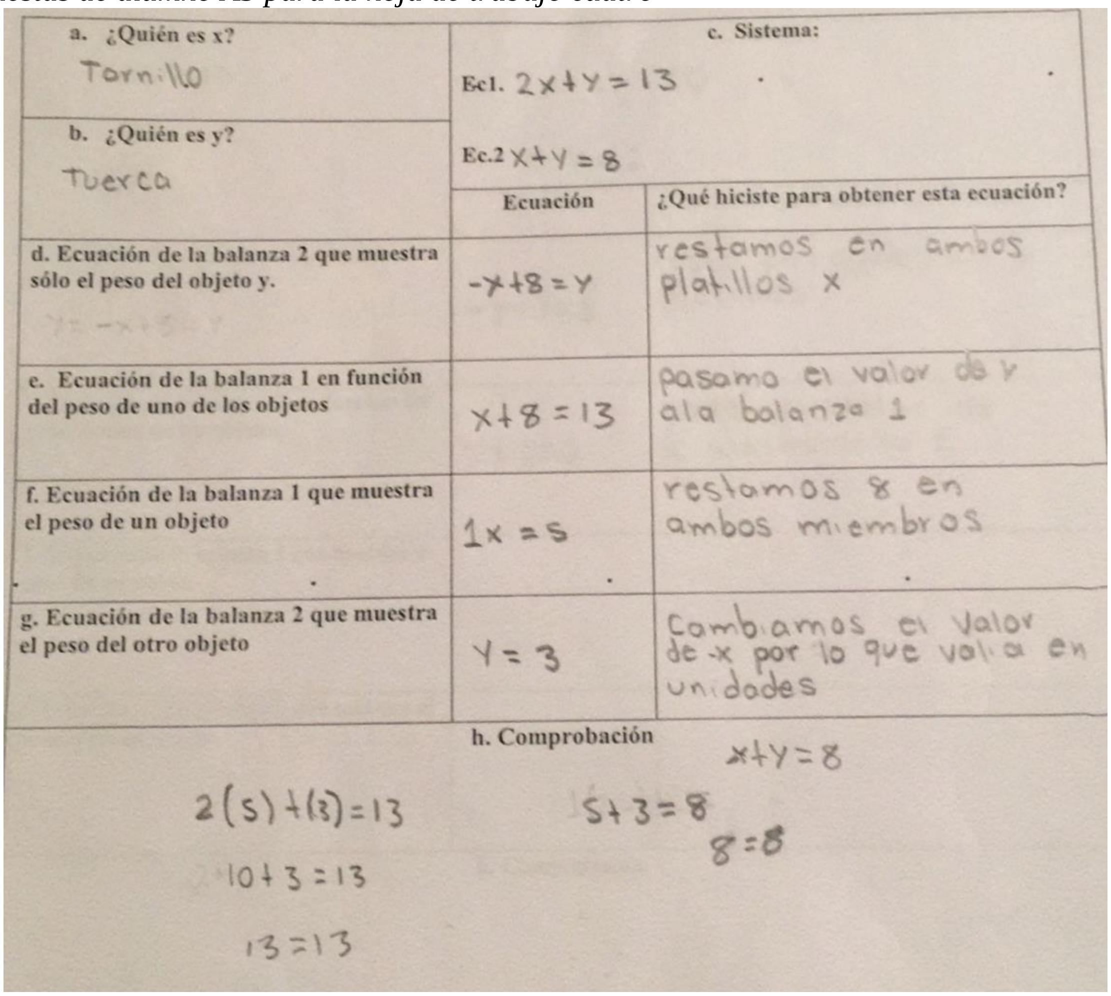
Para responder a los demás incisos no se identificó complicación alguna pues implicaba un proceso más familiar que ya venían haciendo con anterioridad, para muestra el siguiente fragmento de registro donde se atiende al inciso f y se puede identificar momentos de devolución.

Mo. Ahora, el inciso f nos dice "ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto". Ustedes van a utilizar los botones de la balanza 1 para encontrar cuánto pesa una x. Ya saben que lo que pongan o quiten en un platillo de la balanza lo deberán hacer también en el otro. ¿Entonces qué deben hacer primero?
A2. Restar ocho de este lado /refiriéndose al platillo 1/
Mo. Ok, y si ya le quitamos ocho de este lado, ¿qué tengo que hacer del otro lado?
A3. Restar también 8.
Mo. Muy bien pues eso van a hacer en el applet. Cuando ya tengan la ecuación, la van a escribir en su hoja de trabajo. /para asegurarme que los alumnos lo hacen bien me paso por sus lugares e identifico que no muestran conflicto alguno/
Mo. Bien entonces ¿a qué ecuación llegaron?
A3. $x = 5$
Mo. ¿Y los demás?
A2. También.
A1. Si
Mo. Bien, entonces ya conocemos que x es igual a 5. ¿Y qué hicieron para obtener esa ecuación?
A3. Restamos 8 a ambos miembros.
Mo. Así es, entonces vamos a escribir lo que hicieron para obtener esa ecuación ahí en su hoja de trabajo.

Afortunadamente los alumnos no mostraron complicación en reemplazar el valor obtenido de x en la ecuación donde ya tenían despejada y, ni tampoco al realizar la comprobación. Como se pudo dar cuenta en estos fragmentos de registros, los alumnos estuvieron comunicando información acerca del proceso realizado en cada inciso. La Figura 51 muestra las respuestas que uno de los alumnos dio a la hoja de trabajo cuatro, las demás son muy similares puesto que las actividades se estuvieron realizando de manera colaborativa.

Durante la resolución de esta hoja de trabajo, únicamente se identificó que los alumnos tuvieron dificultad en el proceso que implicaba la sustitución de la ecuación dos en la ecuación uno.

Figura 51
Respuestas de alumno A3 para la hoja de trabajo cuatro



a. ¿Quién es x? Tornillo	**c. Sistema:** Ec1. $2x+y=13$	
b. ¿Quién es y? Tuerca	Ec.2 $x+y=8$	
	Ecuación	**¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?**
d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto y.	$-x+8=y$	restamos en ambos platillos x
e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos	$x+8=13$	pasamo el valor de y ala balanza 1
f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto	$1x=5$	restamos 8 en ambos miembros
g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto	$y=3$	Cambiamos el valor de x por lo que valia en unidades

h. Comprobación

$2(5)+(3)=13$ $x+y=8$
$10+3=13$ $5+3=8$
$13=13$ $8=8$

Situación de validación. Como no se trabajó en parejas y el proceso para resolver la hoja de trabajo cuatro se estuvo realizando de manera conjunta, esta fase se llevó de la siguiente manera.

Mo. Muy bien entonces acabamos de resolver ya un sistema de ecuaciones mediante las balanzas digitales. ¿Alguno de ustedes me quiere volver a explicar qué fue lo que hicimos? /ningún alumno se anima/ ¿Qué tal usted? /refiriéndome al alumno A1/
A1. ¡No! mejor ella. /refiriéndose a la alumna A3/
Mo. ¿Lo quiere hacer usted? /señalo a la alumna A3/
A3. Sí, pues si quiere. /le doy el mouse de la computadora que está proyectando en la pantalla el applet para resolver el sistema/

Mo. Bien, entonces explíquenos desde el principio qué fue lo que hicimos para resolver el sistema una vez que ya lo teníamos representado en la hoja de trabajo.
A3. Bueno pues primero tuvimos que poner las ecuaciones en la balanza /aunque tarda un poco lo hace de buena manera pero me doy cuenta que no establece el sistema en el applet/.
A1. Te falta escribirlo ahí en la orilla /refiriéndose a la parte donde se establece el sistema de ecuaciones de 2x2/
A3. Ah, sí, primero eso /lo hace de manera más rápida/. Después se despejó la y en esta balanza /lo hace igual de manera muy rápida/. Y luego…. /tarda un poco en recordar qué seguía/ nos pasamos a la otra balanza y despejamos la otra y.
Mo. ¿Qué opinan los demás? después de que despejamos ye en la primera ecuación ¿Qué sigue?
A2. Quitar la y de acá /señala la segunda ecuación/ y cambiarla por el menos equis más ocho. /La alumna ve sus apuntes de la hoja de trabajo cuatro/
A3. Ah, sí es cierto /Realiza la sustitución acertadamente/. Después que nos queda esto ya ahora si se despeja la x /lo hace de buena manera/. Y luego esto se pone acá /refiriéndose a que se sustituye el valor de x en la ecuación donde se despejó y/ y luego ya se sabe el valor de y /me entrega el mouse/
Mo. ¿Qué opinan, no falta algo?
A1. Ver si sí son los valores correctos ¿no?
Mo. Así es, ya después solo falta realizar la comprobación.

Como se puede apreciar, este es un momento importante de diálogo donde se dieron varias validaciones al momento de que la alumna demostraba el proceso que ella realizó para resolver un sistema de ecuaciones frente a sus compañeros. Una de estas validaciones se presenta cuando a la alumna se le olvida establecer el sistema de ecuaciones antes de representarlo en la balanza y uno de sus compañeros le sugiere hacerlo. Como tal, en este momento las instrucciones del maestro fueron mínimas y se permitió en mayor medida que la alumna tratara de convencer a sus compañeros de la validez de las afirmaciones que hacia respecto al proceso de solución mediante el applet.

Institucionalización. Al concluir la validación, se procedió a institucionalizar el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, el siguiente registro muestra la manera como se llevó a cabo:

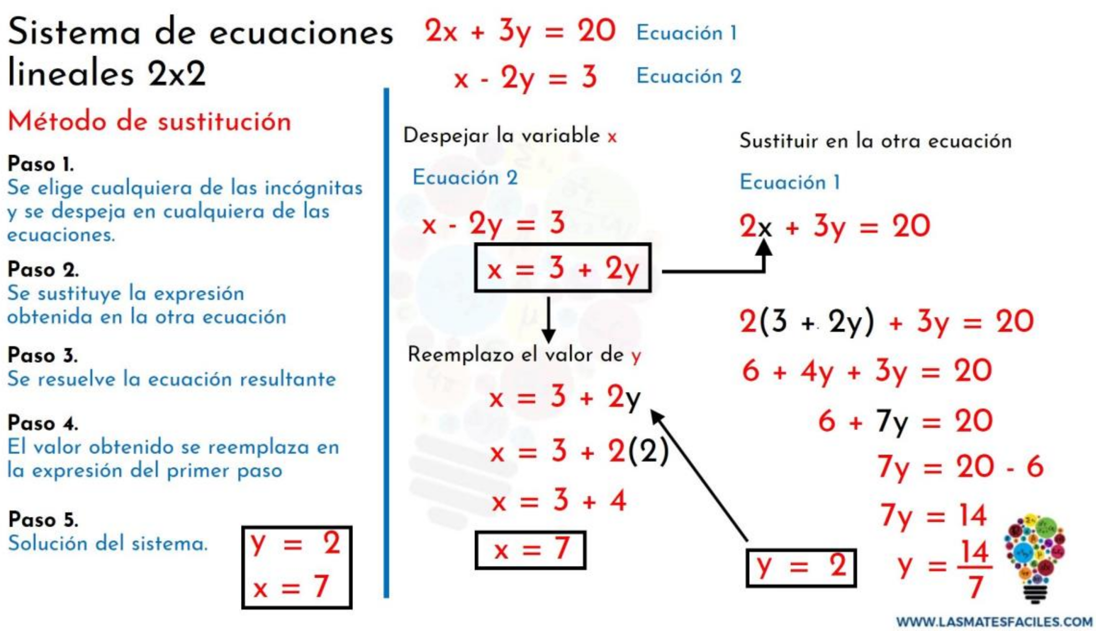
Mo. Bien, ahora vamos a formalizar el proceso para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2. Este método que ustedes acaban de utilizar se llama método de sustitución, entonces en la hoja de trabajo que acabamos de hacer, en los incisos podemos observar que realizamos los siguientes pasos /proyecto la imagen que muestra los pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 a través del método de sustitución y voy señalando los pasos en la imagen mientras los menciono/. Primero, elegimos una de las incógnitas de cualquier ecuación y la despejamos. Después sustituimos este valor en la otra ecuación, luego resolvimos esa ecuación para encontrar

el valor de una incógnita. Cuando ya teníamos el valor de una incógnita, la sustituimos en la otra ecuación donde tenemos despejada la otra incógnita para encontrar su valor y poder darle solución al sistema.
Mo. Entonces fíjense bien. Tenemos aquí /señalo el ejemplo dado en la imagen para resolver un sistema mediante el método de sustitución/ la ecuación uno y la ecuación dos que conforman el sistema, el primer paso en este caso es despejar la variable equis de la ecuación dos, una vez que ya se tiene despejada una de las literales en una de las ecuaciones la sustituimos en la otra ecuación y se resuelve para obtener el valor de ye. Al tener el valor de ye se sustituye en la otra ecuación donde se había despejado equis para obtener el valor de la otra incógnita.
Mo. Como pueden ver estos son los pasos que realizamos en la hoja de trabajo para resolver el sistema. Para resolver esa otra actividad de la hoja de trabajo cinco se pueden apoyar del ejercicio que ya hicimos, de los pasos que se mencionan en esta imagen o de este otro ejemplo mostrado.

Como se pudo dar cuenta, para la institucionalización del proceso implicado en el método de sustitución se optó por recurrir a la imagen presentada en la .

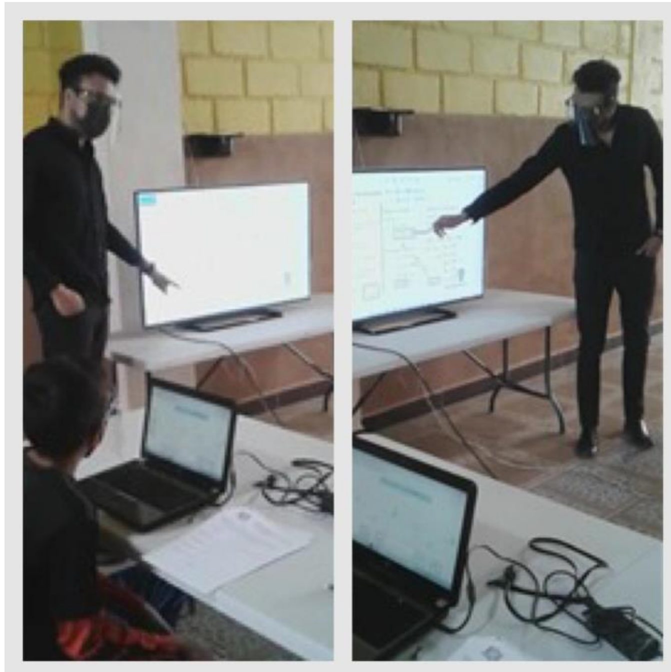
Figura ***52*** que muestra los pasos a seguir y da un ejemplo utilizando este método.

Figura 52
Imagen utilizada para formalizar el método de sustitución



La Figura 53 muestra el momento de la institucionalización en la práctica, en ella se puede notar que durante la explicación de los pasos también se estuvo señalando con el ejemplo que presentaba la misma imagen.

Figura 53
Momento de institucionalización



Una vez que se había formalizado el método de sustitución se les preguntó si querían continuar con la clase o preferían continuar el día siguiente para lo cual optaron por seguir. Sin embargo se pudo notar que ya estaban cansados pues ya teníamos 180 minutos trabajando aproximadamente.

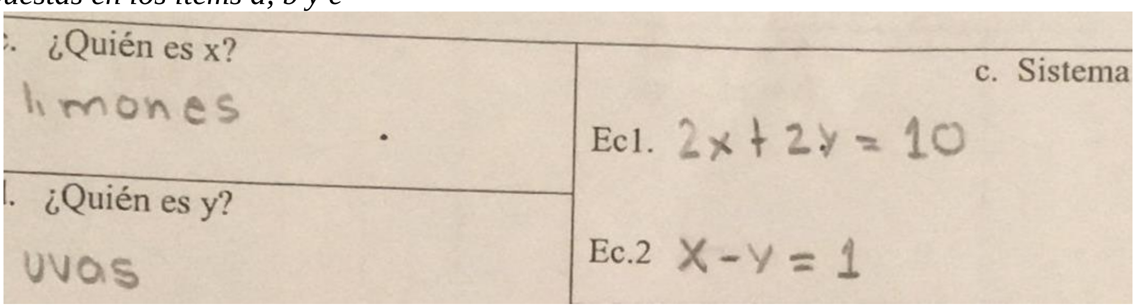
Momento Cuatro.

Este momento debió consistir en evaluar el aprendizaje de los alumnos al resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros sin utilizar el applet, sin embargo no se llevó a cabo debido al tiempo que ya se había trabajado. Por esta razón, se optó por utilizar la hoja de trabajo cinco como evaluación dando la oportunidad de que siguieran utilizando la balanza digital, para resolver la hoja de trabajo no se propició ninguna ayuda. A continuación se presentan las respuestas de los alumnos por cada ítem que conformaba la hoja de trabajo #5 (Anexo 4).

Ítems a. y b. En estos incisos los alumnos tenían que asignar a las literales x y y los objetos que implicaba la situación problema. Respecto a ello, los tres alumnos realizaron la misma asignación puesto que asignaron como x a los limones y como y a las uvas, por lo que se esperaba que de haberlo hecho bien tendrían las mismas ecuaciones.

Ítem c. En este inciso, los alumnos debían conformar el sistema a partir de la situación problema, con relación a ello, no se identificó ningún error ya que todos pudieron establecerlo exitosamente. Como se esperaba, el sistema fue similar en los tres casos. La Figura 54 muestra las respuestas a estos tres ítems.

Figura 54
Respuestas en los ítems a, b y c



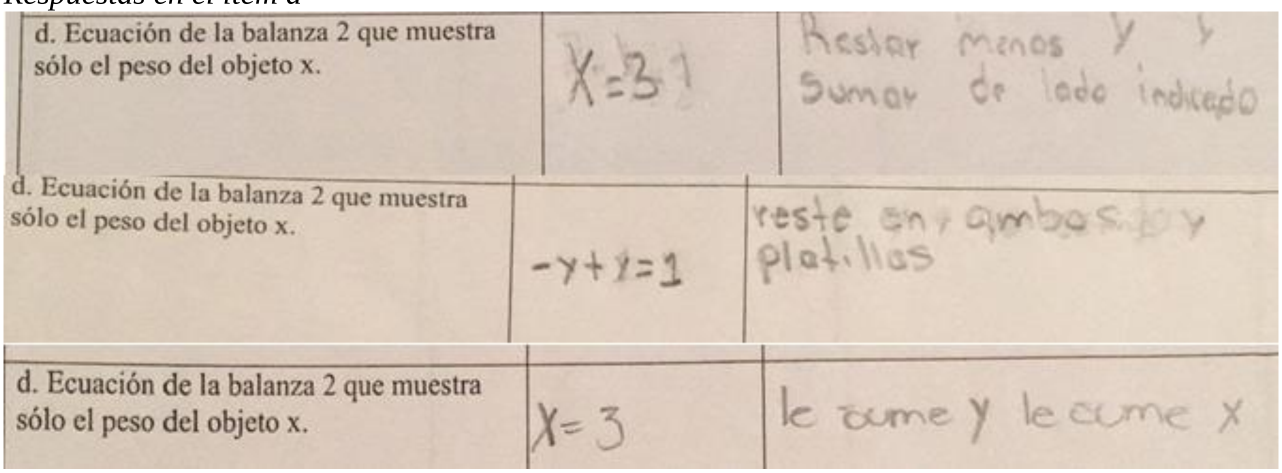
Ítem d. En este inciso, los alumnos tenían que llegar a una ecuación que mostrara solo el peso del objeto x. Para esto, se le daba la indicación de que manipulara la balanza dos. La Figura 55 presenta las tres respuestas de los alumnos en este ítem, la primera corresponde al alumno A1, la segunda al alumno A2 y la tercera al alumno A3.

Como se puede apreciar, ninguno logró llegar a la respuesta correcta, puesto que al despejar x en la segunda ecuación el resultado debió ser $x = y + 1$. El error de A1 se debió a una dificultad en el uso del applet, pues olvidó primero poner en la parte de “sistema de ecuaciones de 2x2” el sistema a trabajar, como se hizo mención en los lineamientos para el uso del applet esto permite el buen funcionamiento de la balanzas al establecer las igualdades.

En la segunda respuesta se identificó que el alumno agregó una y positiva con el fin de eliminar la y negativa y dejar sola la x en el primer miembro, sin embargo faltó agregarla en el segundo miembro, por otro lado, el sumarle x no tiene justificación puesto que si le hubiera sumado x habría obtenido otro resultado. En ambos casos, se desconoce de cómo obtuvieron 3 en el segundo miembro. El tercer alumno manifiesta haber restado en ambos platillos, pero no se especifica qué.

Figura 55

Respuestas en el ítem d

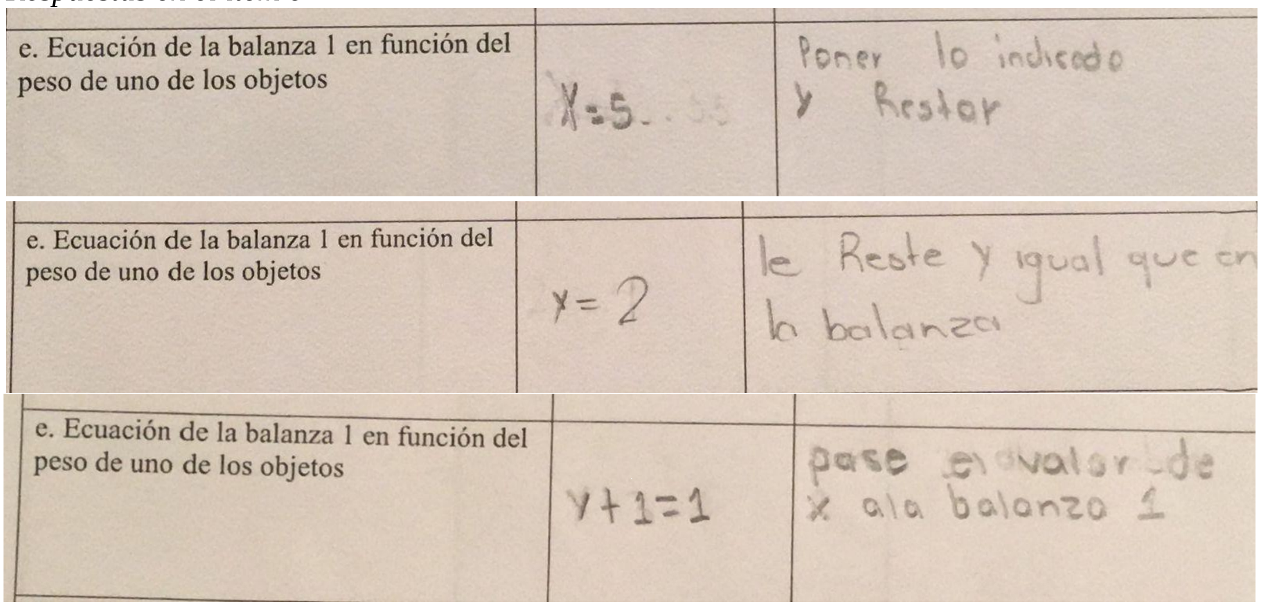


d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto x.	X=3	Restar menos y y Sumar de lado indicado
d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto x.	-y+y=1	reste en ambos y platillos
d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto x.	X= 3	le sume y le sume x

Ítem e. En este inciso, los alumnos debieron utilizar la ecuación despejada en el inciso d para realizar la sustitución en la ecuación uno. Desafortunadamente, como en el inciso d no pudieron despejar de manera exitosa la incógnita x, el resultado para este ítem también fue erróneo. Las respuestas a esta actividad se muestran en la **Figura 56**, donde se puede identificar que los dos primero alumnos pareciera que quisieron obtener los valores de las incógnitas x y y, además la justificación de su procedimiento no da elementos suficientes sobre lo que realizó.

Figura 56

Respuestas en el ítem e

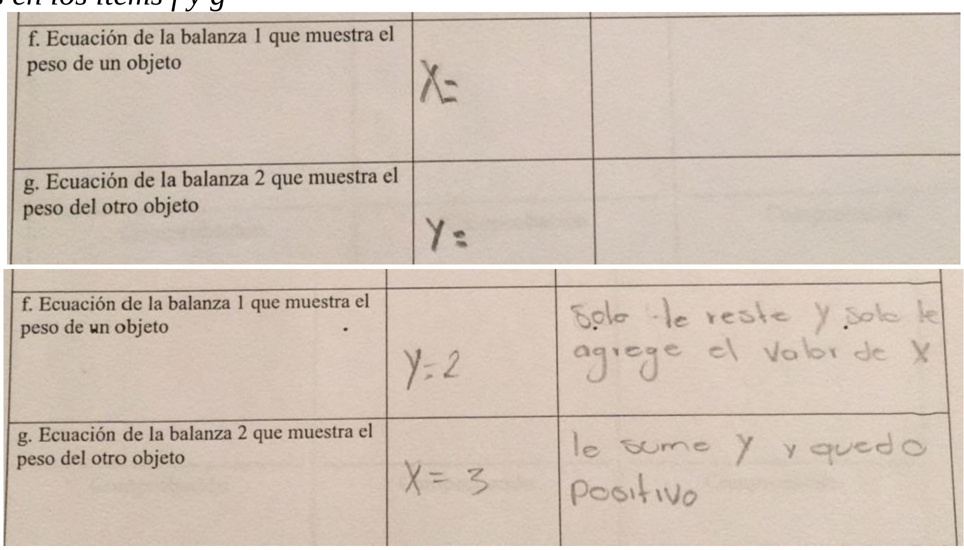


e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos	X=5...	Poner lo indicado y Restar
e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos	y = 2	le Reste y igual que en la balanza
e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos	y+1=1	pase el valor de x ala balanza 1

Ítem f y g. Posterior a realizar la sustitución, en estos ítems debieron de obtener el peso de cada objeto. En la

Figura 57 que muestra las respuestas a esta actividad, pude notar que únicamente uno de los alumnos pudo obtener los valores de las incógnitas que referían al peso de los objetos. Las primeras respuestas corresponden al alumno A1 y las segundas al alumno A, En esta figura se puede identificar que el alumno A1 no pudo encontrar los valores de las incógnitas al igual que el alumno A3 que no respondió nada en estos incisos, respecto al alumno A2 es importante destacar que aunque en los incisos d y e no había mostrado evidencia de un buen procedimiento logró obtener una respuesta acertada mediante la implementación del applet pues en la justificación dice haber manipulado las balanzas.

Figura 57
Respuestas en los ítems f y g

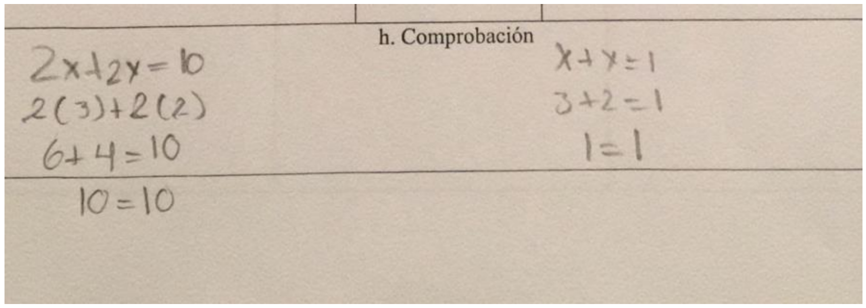


f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto	X=	
g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto	Y=	

f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto	Y=2	Solo le reste y solo le agrege el valor de X
g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto	X = 3	le sume y y quedo positivo

Ítem h. Para este inciso, los alumnos debieron realizar una comprobación de las respuestas obtenidas en los incisos f y g pero como se mencionó anteriormente, los alumnos A1 y A3 no pudieron completarlo, por lo que no se realizó ninguna comprobación. Respecto al alumno A2, la Figura 58 muestra el proceso, en ella se puede identificar que realizó una comprobación acertada y pudo asegurarse que los valores de las incógnitas eran correctos puesto que se cumplían las igualdades.

Figura 58
Respuesta para el ítem h



Como la contestación de esta hoja de trabajo pretendía dar a conocer el nivel de aprendizaje del alumno, se trató de intervenir lo menos posible y que los alumnos realizaran un trabajo individual, razón por la cual posiblemente los alumnos A1 y A3 no pudieron llevar a cabo la actividad satisfactoriamente. Cabe destacar que el alumno A2 tardó 5 minutos aproximadamente en realizar esta última actividad y que a los otros dos fue necesario retirarles la hoja debido a que duraron cerca de 15 minutos intentando contestarla, por lo que el tiempo no fue una razón para que la dejaran inconclusa.

Aquí es importante señalar que la duración de la sesión pudo jugar un papel muy importante en las respuestas de los alumnos, puesto que el cansancio y fatiga pudo propiciar en gran medida la falta de concentración y análisis del problema.

4.4.2 Validación

Respecto a la validación, es en este momento donde se debe hacer una comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, es decir una comparación entre lo que suponíamos que pasaría con lo que en realidad pasó al aplicar la secuencia, además es aquí donde se debe certificar si la hipótesis planteada en nuestra investigación se cumplió. Para presentar la validación se irán retomando los momentos tal como se tenían considerados en la secuencia didáctica (Ver Anexo 3).

Originalmente nuestra propuesta se había diseñado para implementarse en dos sesiones de 90 minutos, en la primera sesión se trabajarían los conocimientos previos y en la segunda se atendería al método de reducción y se evaluaría el aprendizaje, sin embargo los alumnos optaron por realizarla el mismo día. Aunque el tiempo que duró la práctica fue excesivo y propició cansancio en los educandos, por una parte creemos que fue la mejor opción ya que si se citaba a los alumnos otro día existía la posibilidad de que no asistieran debido a la falta de interés por el ámbito educativo que se vive en la comunidad donde habitan.

Inicialmente, se tenía pensado que la organización de los alumnos para trabajar la secuencia sería de manera individual y en parejas, la segunda con la intención de que se apoyaran mutuamente durante la resolución de las actividades propuestas, sin embargo, como únicamente asistieron tres estudiantes se optó por trabajar de manera individual ya que la cantidad de alumnos permitía prestarles una mejor atención y estar más al tanto de sus dudas y procedimientos.

De los cuatro momentos que se tenían considerados en la planeación únicamente no se llevó a cabo el cuatro, cuyo propósito era evaluar el aprendizaje de los alumnos sobre el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, no obstante se implementó la hoja de trabajó #5 para este fin. Sobre los momentos uno y dos sí se le dio el énfasis al tratamiento de los conocimientos previos tal como se tenía ideado puesto que se lograron los propósitos planteados.

Se había considerado también que la entrega de las hojas de trabajo se realizaría conforme se fuera avanzando en cada momento, pero no fue así ya que cuando los alumnos llegaron al lugar donde se llevó a cabo la práctica, ya se tenían en la mesa los paquetes conformados con las seis hojas de trabajo más una en blanco para poder realizar anotaciones. La decisión de hacerlo de esta manera se debe al ahorro en el consumo de tiempo.

Sobre el uso del applet, cada alumno tuvo la oportunidad de interactuar con esta herramienta de manera individual tal como se tenía considerado, pues se llevaron seis computadoras portátiles donde ya estaba descargada la aplicación de GeoGebra previamente. También, para permitir y facilitar la explicación de su uso y las actividades de las hojas de trabajo se hizo uso de una pantalla que permitió proyectar el monitor de la laptop que utilizaba el profesor. Para el buen manejo del applet sí se realizó una explicación previa del interfaz, lo que le permitió a al alumno comprender el uso de los botones y su funcionamiento en la balanza.

Las medidas de prevención que se tenían previstas para poder trabajar de manera presencial se respetaron en todo momento.

En la planeación no se habían considerado momentos de receso, sin embargo como los cuatro momentos se realizaron en una sola sesión, el mismo día, fue necesario considerar al menos 3 breves que permitieran a los alumnos distraerse y descansar un poco.

Sobre el contrato didáctico que se tenía proyectado, sí se llevó de esa manera puesto que en todos los momentos que se implementaron de la secuencia el profesor asumió la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos, por lo que a cada pregunta o duda que tuvieron alrededor del proceso de enseñanza se le dio el tratamiento adecuado, procurando en todo momento fomentar su aprendizaje respecto al contenido.

En cuanto a la devolución, se tenía previsto que para hacer que el alumno aceptara la responsabilidad de su propio aprendizaje durante las actividades que implican las hojas de trabajo, se trataría de guiarlo a través de preguntas sin dar respuestas concretas sobre las dudas que tuvieran, sin embargo esto tuvo complicaciones al inicio puesto que los alumnos no asumían la responsabilidad de su propio aprendizaje pues no se esforzaban por tratar de llegar a una solución por méritos propios y en ocasiones sólo miraban al maestro esperando que les diera la respuesta. Este suceso propició que el maestro interviniera de manera oportuna durante algunos momentos de la práctica para propiciar que la secuencia siguiera en marcha, pretendiendo ayudar al estudiante a encontrar la respuesta por sí mismo mediante preguntas guía que fomentaban a la reflexión y análisis.

Esta situación fue cambiando poco a poco, ya que se fue dando una evolución en la práctica, pues en un principio, los alumnos esperaban que el maestro les diera todas las instrucciones, luego, con el transcurso de la sesión se fue dando la oportunidad en que los jóvenes fueron quienes estuvieron a cargo de su aprendizaje y el profesor pudo fungir más como guía.

Momento 1.

En este momento no se había planeado hacer la presentación del profesor y la justificación de la práctica, sin embargo sí se realizó al inicio porque se consideró importante que los alumnos conocieran al titular y supieran la razón y finalidad de implementar las actividades.

Para este momento se tenía como propósito el rescate de conocimientos previos necesarios para introducir al contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, lo cual se cumplió, ya que se logró atender a las definiciones y partes de una expresión algebraica y una ecuación, así como el despeje de ecuaciones lineales.

Como material para este momento, sí se utilizaron las hojas de trabajo #1 y #2, además de los útiles escolares comunes; lápiz, borrador y sacapuntas.

Situación de acción. Para llevar a cabo esta situación, sí se comenzó planteando la hoja de trabajo uno y esta situación sí se dio cuando los alumnos comenzaron a resolverla tomando las decisiones que hicieron falta para poder transferir los enunciados dados en lenguaje natural a un lenguaje algebraico.

Para comenzar con la hoja de trabajo #2 fue necesario primero explicar que el despeje es un proceso que consiste en modificar una ecuación hasta que la variable o incógnita deseada quede aislada en cualquiera de los miembros de la igualdad, ya que los alumnos no recordaban del todo este procedimiento. De igual manera para esta hoja de trabajo la situación de acción se dio cuando los alumnos comenzaron a resolverla tomando las decisiones que hicieron falta para poder aislar la incógnita de las ecuaciones en el primer miembro de la igualdad.

No se tenía previsto que el maestro debiera explicar el primer ejercicio en cada hoja de trabajo de este momento, sin embargo como se identificó que los alumnos carecían de los conocimientos previos, fue necesario para que pudieran resolver los demás. Para contestar la hoja de trabajo #2 se tenía pensado dejar a los alumnos que la resolvieran solos, utilizando una transposición de términos, no obstante fue necesario resolver de manera grupal los primeros cuatro ejercicios para explicar cómo hacer los despejes, durante este tiempo se atendió a las primeras dos reglas del axioma fundamental de las ecuaciones, acción que no se tenía contemplada.

Situación de Formulación. Esta situación no se dio tal cual como se tenía previsto en el análisis a priori, puesto que se fue dando a la par con la situación de validación. Para llevar a cabo estas situaciones, una vez que los alumnos contestaron de manera individual la segunda y cuarta columna de la tabla en la hoja de trabajo #1 sí se pidió que comunicaran sus estrategias y resultados obtenidos.

Sobre las respuestas a las que se esperaba llegaran los alumnos, en esta hoja de trabajo #1, se esperaba que utilizaran las literales x y y para representar los enunciados puesto que son las más comunes, sin embargo el alumno A3 utilizó las literales a y b en los primeros dos ejercicios y el alumno A2 en los ejercicios 3 y 4 de la segunda columna.

De entre los tipos de errores y dificultades que los alumnos pudieran cometer al resolver esta actividad se identificó error en la transición del lenguaje común al algebraico (Segura 2004) y dificultad en la comprensión del concepto de igualdad (Velasco, 2012, como se citó en Luna 2018), mismos que se esperaban que sucedieran.

Con relación a la hoja de trabajo #2, debido a que los primeros cuatro ejercicios se resolvieron de manera grupal, todos los alumnos tuvieron las mismas respuestas, sobre los ejercicios de la segunda tabla, todos aislaron las incógnitas en el primer miembro como se tenía previsto a excepción del alumno A3 quien en el segundo ejercicio las aisló en el segundo miembro, sobre el resultado esperado, todos lograron llegar al correcto e incluso en el último ejercicio solamente llegaron a la ecuación $-1x = -7$ como se esperaba.

Para resolver los ejercicios de esta hoja de trabajo se tenía previsto que implementaran una transposición de términos, sin embargo no fue así puesto que se les pidió que lo realizaran aplicando las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones con la finalidad de introducirlos al proceso implicado en las balanzas algebraicas.

Sobre los errores esperados, no cometieron ninguno en la suma de términos semejantes, no se identificó alguno en la sustitución para realizar la comprobación, tampoco hubo errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética y la dificultad en el empleo de la ley de los signos para cambiar los signos de los términos en la ecuación $-1x = -7$ no se presentó puesto que ningún alumno intentó hacerla. Solamente al principio se identificó una resistencia en querer seguir utilizando la transposición de términos, sin embargo esta dificultad no se tenía prevista puesto que tampoco se pensaba realizar los despejes utilizando las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones.

Situación de validación. Debido a que esta situación se dio a la par con la situación de formulación, se pueden identificar momentos en donde después de que los alumnos contestan los ejercicios de las hojas de trabajo se les pregunta el proceso que se debía seguir para resolver cada una de las actividades y el proceso descrito se iba proyectando en la pantalla, una vez que se representaba, se preguntaba a los demás si estaban de acuerdo con lo que manifestaba su compañero. Desafortunadamente no hubo respuestas o procedimientos diferentes para confrontar por lo que no se trabajó del todo como se tenía previsto.

Situación de institucionalización. Para este momento sí se institucionalizó la definición y partes de una expresión algebraica posterior a trabajar la segunda columna de la hoja de trabajo #1 tal como se tenía previsto, así como también atender a la definición de ecuación después de que se contestara la cuarta columna de la misma hoja de trabajo. Para esta última sí se retomaron las participaciones que hicieron los alumnos cuando se les preguntó ¿cómo puedes definir una ecuación?, aunque es importante mencionar que los educandos no lograron aproximarse a una definición formal a partir de lo que ya conocían sobre una expresión algebraica como se pensaba. Sobre las partes de una ecuación, se definieron a partir del último ejercicio y se ejemplificaron al proyectar la ilustración en la pantalla.

La institucionalización de las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones se tenía pensado formalizar después de que los alumnos utilizaran el applet para resolver ecuaciones de primer grado, sin embargo no fue así, pues se retomaron cuando se contestaron de manera grupal los primeros cuatro ejercicios de la hoja de trabajo #2.

Momento 2.

En el análisis a priori se tenía contemplado trabajar este momento después de presentar a los alumnos el video que involucraba la utilización de una balanza digital y el uso del applet para resolver ecuaciones lineales. Sin embargo no fue así puesto que primero se trabajó el momento dos y luego se recurrió al ver el video y el uso del applet, lo que modificó la secuencia que se tenía prevista pero no el propósito de la misma.

Para este momento dos se tenía el propósito de que los alumnos formularan un sistema de ecuaciones a partir de una situación problema, mismo que se logró cumplir a través de la resolución de la hoja de trabajo #3 y la implementación de las fases de la TSD.

Situación de acción. Esta situación se presentó como se esperaba ya que sí se dio cuando se presentó la hoja de trabajo #3 y los alumnos comenzaron a resolverla tomando las decisiones que hicieron falta para establecer el sistema y utilizar el procedimiento adecuado para encontrar su solución.

Situación de formulación. Para llevar a cabo esta situación sí se plantearon las preguntas que se tenían previstas referentes al análisis del problema y sí se dieron las respuestas esperadas, por ejemplo en la pregunta ¿qué es lo que se desconoce en este problema? se esperaba que los alumnos rápido identificaran que lo que se desconoce es el peso de la tuerca y así fue.

Con relación a las respuestas esperadas por los alumnos para establecer el sistema, todos asociaron los tornillos con la incógnita x y la tuerca con la incógnita y lo que llevó a que establecieran las mismas ecuaciones como se tenía pronosticado, respecto a ello, uno de los alumnos enumeró las ecuaciones del sistema, algo que no se tenía previsto.

Respecto al procedimiento, se tenía pronosticado que todos los alumnos realizarían la sustitución paso a paso como se les había enseñado, sin embargo uno de los alumnos no lo realizó así puesto que omitió algunos pasos como solo escribir el resultado de la sustitución. Además, para el despeje se esperaba que los alumnos no escribieran como tal el proceso implicado en las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones y solo realizaran la transposición de términos, pero los alumnos sí lo hicieron así, ya que ya se les había explicado la justificación del “pasar con operación contraria”.

Como se sospechaba, ningún alumno tuvo dificultades o cometió errores en establecer el sistema a partir de la situación que presentaba el problema puesto que la transferencia del lenguaje común al algebraico es algo que ya se había trabajado en el momento uno. En cambio, sí se identificó un error en uno de los alumnos al realizar el despeje, consideramos que es un error de procedimiento que se asocia a un descuido (Moll, 2011) puesto que en el paso siguiente logró obtener el valor adecuado. Aunque también se habían pronosticado errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética y dificultades en el proceso de comprobación no se presentaron.

Situación de validación. Esta situación se llevó parcialmente a cabo como se tenía previsto pues para que los alumnos trataran de convencer a sus compañeros de la validez de las afirmaciones que hacían, sí se les preguntó acerca de la ecuación, el procedimiento y resultado que obtuvieron en cada problema. Una vez que lo presentaron, se cuestionó a los demás si estaban de acuerdo, para que en caso de que existieran diferentes respuestas poder confrontarlas y dejar a los mismos alumnos que elaboraran pruebas para demostrar sus afirmaciones.

Situación de institucionalización. Para esta situación se había considerado formalizar un sistema como la reunión de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma $Ax + By = C$ y $Dx + Ey = F$ donde A, B, C, D son números fijos, mientras que x y y son incógnitas. Sin embargo, debido a que en la formulación ya se había referido a ello al pedirle a los alumnos que debían establecer el sistema conformado por las ecuaciones que implica el problema, sólo se les dijo que un sistema de dos ecuaciones lineales es la reunión de dos ecuaciones que se tienen que resolver simultáneamente como en el ejemplo.

Posterior a esta actividad se tenía planeado pasar al momento 3, pero como se comentó anteriormente, se modificó el orden de las actividades por lo que se volvió a retroceder al momento 1 y atender al video y uso del applet para resolver ecuaciones lineales.

Situación de acción. Esta situación sí se llevó a cabo como se esperaba, pues se generó cuando se dio la interacción entre el alumno y la balanza digital y tomaron las decisiones que hicieron falta para resolver la ecuación lineal dada utilizando los botones que mostraba la interfaz del applet.

Situación de formulación. Esta situación se tenía prevista que se diera una vez que tuvieran representada la ecuación en los platillos de la balanza y se pidiera que en parejas buscaran la manera en cómo hacer que todas las literales de la ecuación estuvieran en un solo platillo de la balanza y los números en el otro, cuidando que la balanza se mantuviera en equilibrio, sin embargo esta situación se realizó de manera grupal ya que solo se trabajó con tres alumnos y fue más sencillo atender sus dudas de manera directa.

Los tipos de balanzas no se tenían contempladas en la planeación, sin embargo se consideró importante retomarlas con la finalidad de poder ilustrar el tipo de balanza que se utilizaría en el applet. Sobre el uso del applet se esperaba que los alumnos no tuvieran complicaciones al utilizarlo puesto que hoy en día están muy familiarizados con la tecnología, y esto fue así puesto que solo bastó una explicación a manera de ejemplo para que los alumnos aprendieran la función de cada botón presentado en la interfaz.

De entre los tipos de errores y dificultades que se esperaban para este momento, se tenían considerados errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética y errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, pero no se dieron. El error que se presentó fue de procedimiento (Manzanero 2007, como se citó en Luna 2018) puesto que alteraban los términos de uno de los miembros de la ecuación y olvidaban hacer lo mismo en el otro, sin embargo, al recordarles que si la balanza no estaba en equilibrio algo andaba mal con su igualdad lograban recordarlo.

Situación de validación. Esta situación sí se dio como se tenía previsto, puesto que después de que los alumnos encontraron el valor de las incógnitas mediante sus propios métodos, se pidió a cada uno de ellos que utilizara frente al grupo la balanza digital y resolviera una ecuación mediante el procedimiento que emplearon. Una vez que lo hicieron se cuestionó a los demás si estaban de acuerdo con lo que presentaba su compañero, para que en caso de que existieran diferencias confrontarlas, para así determinar el correcto.

Situación de institucionalización. Después de la validación se tenía planeado atender a la institucionalización del saber cuándo se formalizara que la transposición de términos se justifica en las primeras cuatro reglas que se derivan del Axioma fundamental de las ecuaciones, sin embargo las dos primeras ya se habían mencionado durante la resolución de las ecuaciones en la hoja de trabajo #2 puesto que ya se les había dicho que para conservar una igualdad, lo que se agregara o quitara en el primer miembro, también debería agregarse o quitarse lo mismo en el segundo miembro.

Momento 3.

Para este momento se tenía como propósito que el alumno aprendiera el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros mediante la utilización del applet diseñado en GeoGebra. Respecto a ello, los alumnos sí lograron resolver un sistema de ecuaciones a través del método de sustitución utilizando el applet con ayuda del profesor.

Situación de acción. Para llevar a cabo esta situación, se tenía planeado presentar la interfaz del applet diseñado para la propuesta y realizar una explicación a manera de ejemplo sobre el uso de los botones, sin embargo se comenzó leyendo el problema de la hoja de trabajo #4 y asociando los objetos del problema con las incógnitas x y y. Se tenía previsto también dejar a los alumnos que establecieran el sistema y después lo reprodujeran en el applet de manera individual posterior a la explicación antes mencionada, sin embargo esto no fue así puesto que primero se estableció de manera colectiva el sistema y una vez que se había asegurado que estaba correcto se pidió que los reprodujeran en el applet ejemplificando a manera de demostración cómo hacerlo.

Aunque esta situación no se dio en el orden que se tenía previsto, la situación de acción sí se dio cuando se generó la interacción entre el alumno y el applet, ya que este recurso tecnológico fungió como el medio físico y fue aquí donde los alumnos tomaron las decisiones necesarias para resolver el sistema mediante el uso de las balanzas digitales.

En el análisis a priori se tenía previsto que para hacer que el alumno acepte la responsabilidad de su propio aprendizaje durante las actividades que implican las hojas de trabajo, se guiaría a través de preguntas sin dar respuestas concretas a las dudas que tuvieran, y esto fue así puesto que uno de los alumnos tuvo una duda, refiriéndose a cuál era el botón que representaba el segundo miembro de la ecuación uno ya que no lo podía representar, pues el presionaba el botón que modificaba las constantes en el primer miembro y para responder a esta duda, se le dijo que probara todos los botones que estaban debajo del platillo uno y observara lo que ocurría en la balanza, al hacerlo, pudo determinar por él mismo, cuál era el indicado.

Sobre el contrato didáctico, sí se siguió respetando el mismo establecido desde el inicio, donde el profesor asumiría la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos al darle el tratamiento adecuado a cada pregunta o duda que tenían alrededor del proceso de enseñanza.

Situación de formulación. Para esta fase se tenía planeado dar la indicación de que en parejas manipularan los objetos de los platillos de la balanza dos para que pudieran determinar el peso del objeto y, sin embargo se trabajó de manera individual. Respecto a la contestación de los incisos de la hoja de trabajo #4 se trabajaron de manera grupal ya que el método de sustitución era un aprendizaje nuevo para ellos y así sería posible asegurarse que no estuvieran teniendo complicaciones durante el proceso.

Para comenzar a atender a la hoja de trabajo se tenía planeado dar la indicación de que en parejas manipulen los objetos de los dos platillos que están en la balanza 2 para que, a final de cuentas se pueda ver el peso del objeto y. Para esto, se tenía considerado mencionar el principio sobre el uso de la balanza presentado en el video visto durante el momento 2; en la balanza siempre se debe quitar o agregar la misma cantidad de elementos en ambos platillos para conservar el equilibrio. Sin embargo no fue necesario, puesto que los alumnos ya no tuvieron complicación en realizar despejes y aplicar las primeras dos reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones. Sobre el despeje de una incógnita mediante el uso del applet, no tuvieron complicación alguna así como para dar la justificación a este proceso.

Una vez despejado y se tenía considerado realizar la siguiente pregunta con la finalidad de fomentar una sustitución; ¿Cómo se vería la balanza 1 utilizando sólo el peso de uno de los objetos? pero al hacerlo, los alumnos no lograron entender lo que se quería, por lo que se optó por decirles otras preguntas e indicaciones pretendiendo que llegaran a la respuesta esperada sin tener que dársela. Respecto a ello, fue más complicado de lo que se esperaba que los educandos lograr entender lo que se quería, razón por la cual se optó por brindarles ayuda y fomentar la sustitución.

Realmente esta situación se dio de manera grupal y no en parejas como se tenía pronosticado al dialogar sobre cómo realizar la manipulación de la balanza en cada escenario e ir contestando los incisos de la hoja de trabajo cuatro.

Sobre el proceso implicado para utilizar el applet y responder a la hoja de trabajo #4, sí se llevó a cabo el que se esperaba y que se puede apreciar en las figuras del apartado 4.2.2. Sobre el proceso, se identificó un alumnos que comenzó a realizar la sustitución sin antes quitar la y en el primer platillo de la balanza uno, por lo que al final le había quedado $x + y + 8$, afortunadamente al ver que la balanza no estaba en equilibrio se pudo dar cuenta que había un error y comenzó de nuevo.

Con relación a las respuestas a las que se esperaba que llegaran los alumnos, sí se identificó que tuvieron las mismas en todos los incisos, pero cabe recordar que se estuvo trabajando de manera grupal en casi todo momento, por lo que era de esperarse que las obtuvieran. Como se esperaba, los educandos solamente presentaron dificultades al contestar el inciso e que implicaba la sustitución de la ecuación despejada en la otra ecuación que conformaba el sistema.

De entre los errores y las dificultades pronosticados, no se identificó dificultad relacionada con el mal empleo de la ley de los signos, errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética ni tampoco errores en el pasaje del registro verbal al algebraico. Sí se identificó una dificultad en el procedimiento (Manzanero 2007, como se citó en Luna 2018) debido a que el alumno olvidó aplicar de manera adecuada las reglas del axioma fundamental de las ecuaciones, además del inciso e ya mencionado donde la dificultad se presentó al momento de sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación ya que con las indicaciones que se les daba no lograban arribar a ello.

Situación de validación. Para llevar a cabo esta situación, se tenía planeado seleccionar a una pareja de alumnos para que mostrara el proceso realizado mediante la utilización del applet para llegar a sus respuestas y se cuestionaría a los demás si estaban de acuerdo con este procedimiento y resultado obtenido, para que en caso de que existieran diferentes respuestas confrontarlas y dejar a los mismos alumnos que trataran de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado.

Esta situación no se llevó de esta manera puesto que no se trabajó en parejas y el proceso para resolver la hoja de trabajo #4 se estuvo realizando de manera grupal. Para llevarla a cabo, se le pidió a uno de los alumnos que volviera a reproducir y explicar en la pantalla el método para resolver el sistema mediante el uso del applet. En esta situación sí hubo dos intervenciones de los alumnos cuando se les preguntó la opinión sobre el proceso que presentaba su compañero, mismos que refirieron a pasos faltantes en el procedimiento, como reproducir las ecuaciones en la parte de sistema y realizar la comprobación una vez que se tengan los valores de las incógnitas.

Situación de institucionalización. Para esta situación se tenía planeado que a partir del proceso realizado en el applet y la contestación de la hoja de trabajo #4 ya socializada en la situación anterior, se formalizaría el proceso implicado en el método de sustitución retomando los siguientes pasos:

1. Primero se despeja cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye su valor en la otra ecuación.
3. Una vez que se tenga la ecuación con una incógnita se resuelve.
4. Teniendo el valor de una de las literales, se sustituye en una de las ecuaciones que involucre ambas literales y se obtiene la otra literal.
5. Se comprueba si los valores de las incógnitas resuelven el sistema.

Sin embargo, la manera en cómo se formalizó fue un poco diferente, puesto que se recurrió a una imagen que se dividía en dos partes, en la primera se presentaban estos mismos cinco pasos y en la segunda se mostraba un ejemplo dónde se aplicaba este proceso a un sistema de ecuaciones diferente al utilizado en las hojas de trabajo. Para dar una explicación de estos cinco pasos se estuvo mencionando uno por uno y recurriendo al ejemplo involucrado en la misma figura.

Momento 4.

Este momento tenía el propósito de evaluar el aprendizaje de los alumnos al resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros sin utilizar el applet, sin embargo no se llevó a cabo debido al tiempo que ya se tenía trabajando. Asimismo, como cierre del momento 3 se tenía planeado aplicar la hoja de trabajo #5 que implicaba resolver otro sistema de ecuaciones con el uso del applet, sin embargo ésta se utilizó como evaluación del aprendizaje, por lo que se evitó propiciar ayuda durante el proceso.

Sobre las respuestas a las que se esperaba que llegaran los alumnos al responder la hoja de trabajo #5 solamente fueron idénticas las de los incisos a, b y c puesto que los tres alumnos asignaron como x a los limones y como y a las uvas, por lo que también tuvieron los mismos sistemas de ecuaciones. En el inciso d, se esperaba que los alumnos pudieran despejar de buena manera la incógnita que se les pedía llegando a la ecuación $x = y + 1$ puesto que implicaba un proceso familiar, desafortunadamente no fue así y obtuvieron ecuaciones como $x = 3$ y $-y + y = 1$. Como en este inciso los alumnos no lograron realizar el despeje satisfactoriamente, los demás incisos también estuvieron incorrectos e incluso uno de ellos no contestó nada. De igual manera como las ecuaciones estaban mal, las justificaciones también lo estaban e incluso no mostraron indicios de haber implementado las reglas del axioma fundamental de las ecuaciones o bien la transposición de términos.

Aunque no fue así, realmente se creía que los alumnos llegarían a las respuestas esperadas en la hoja de trabajo #5 puesto que ya se había realizado la institucionalización del método además de que implicaba un proceso muy similar a la hoja de trabajo #4.

Aunque en los incisos d y e ninguno de los alumnos logró llegar a las ecuaciones esperadas, el alumno A2 logró hacerlo para los incisos f y g donde se obtenía el peso de los objetos, aunque en la justificación sus respuestas si fueron diferentes. De la justificación se puede identificar que sí utilizó las balanzas pues manifiesta haber realizado movimientos en los platillos. Sobre el inciso h, también solo el alumno A2 logró llegar a la respuesta esperada.

En cuanto a los errores y dificultades esperados para esta hoja de trabajo, se esperaba que los alumnos cometieran errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética al momento de la comprobación cuando realizaran operaciones con números enteros, sin embargo el único alumno que lo hizo no lo presentó pues desarrolló la comprobación sin problema. También, ningún alumno mostró errores en el pasaje del registro verbal al algebraico pues todos lograron establecer el sistema correctamente.

Respecto a los alumnos A1 y A3 se identificó una dificultad en el procedimiento al manipular las balanzas, puesto que no supieron cómo desarrollar las sustituciones de las ecuaciones (Velasco 2012 como se citó en Luna 2018). Aunque el alumno A2 no logró justificar el proceso que realizó en la implementación del applet, sí logró obtener correctamente la solución al sistema de ecuaciones lineales de 2x2. En cuanto a las respuestas, no se obtuvieron las esperadas.

Adaptación del Circuito de Rojano.

La adaptación del circuito de Rojano para el diseño de la secuencia didáctica permitió seguir una estructura lógica y coherente en el tratamiento del contenido. A continuación se presentará la manera en cómo se llevaron a cabo cada elemento de este circuito adaptado al tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2.

En primer lugar, la familiarización del alumno con una balanza se retomó desde 2 actividades tal como se tenía planeado; la primera cuando se le presentó al alumno la imagen con los tipos de balanzas así como el video donde se explica lo que es y su funcionamiento y la segunda cuando se les presentó el applet “balanza algebraica para ecuaciones lineales con una incógnita” y se les pidió que resolvieran varias ecuaciones implementándola.

La familiarización del alumno con una doble balanza se dio como se tenía previsto cuando en el momento tres se le presentó la interfaz del applet diseñado y se le explicó los elementos de los cuales se componía. Además, la representación de las dos ecuaciones que componen el sistema en las dos balanzas se dio después de que contestaran el inciso c de la hoja de trabajo #4 y se pidiera que utilizando los botones del applet representaran en cada platillo los miembros de las ecuaciones. De la misma manera, se pretendía que el alumno pudiera determinar la ecuación de una de las balanzas que muestre el peso de uno solo de los objetos cuando atendiera al inciso d de la hoja de trabajo #4 y así fue.

Lo que no se dio como se esperaba fue al momento de que el alumno determinara la ecuación de la otra balanza en función del peso de uno de los objetos ya encontrado en la balanza anterior, puesto que tuvo muchas complicaciones en interpretar lo que se pedía en el inciso e de la hoja de trabajo #4 "Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos".

El inciso f de la hoja de trabajo antes mencionada tenía como objetivo que el alumno pudiera determinar la ecuación de la balanza que muestre el peso de uno de los objetos con lo que se obtuviera el valor de x y así fue ya que posterior a la sustitución el alumno pudo encontrar el peso de los tornillos mediante el uso de la balanza. De la misma manera, el inciso g tenía como objetivo que el alumno determinara la ecuación en la primera balanza manipulada que mostrara el peso del otro objeto con lo que se obtuviera el valor de y y así fue, puesto que al tener el valor de los tornillos pudo obtener el peso de la tuerca mediante el uso del applet. Por último, la comprobación del peso de los objetos se tenía planeada que se diera cuando el alumno atendiera al inciso h de la hoja de trabajo #4 y así se dio.

El siguiente elemento que conforma la adaptación del circuito de Rojano es la formalización del método de sustitución y este se dio tal como se tenía previsto al finalizar esta hoja de trabajo y se retomara el proceso implicado en cada inciso. También, la resolución de un par de ecuaciones con la balanza se pretendió atender cuando se pidiera al alumno que resolviera la hoja de trabajo #5 lo cual se dio al final de la clase y a manera de evaluación y sin ayuda del profesor.

Por último, la resolución de un par de ecuaciones sin la balanza se tenía planeado implementar cuando el alumno atendiera a la resolución de la hoja de trabajo #6, sin embargo no se llevó a cabo por lo que la implementación de la adaptación del circuito didáctico quedó incompleto.

Creemos que el considerar los elementos del circuito didáctico de Rojano como sugerencias didácticas nos permitió delimitar el funcionamiento del applet diseñado para nuestra propuesta y que las actividades implicadas en las hojas de trabajo permitieran recurrir a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica.

Reflexiones Finales

Después del diseño y aplicación de una secuencia didáctica que involucre un recurso tecnológico y analizar lo ocurrido en la experimentación, se concluye que:

El uso de recursos tecnológicos en el aula puede promover el aprendizaje del método de sustitución para la resolución de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros. Al transitar por las situaciones de acción, formulación y validación, el alumno fue capaz de desarrollar un aprendizaje respecto al tema implicado pues se fomentó a través de los momentos didácticos el tratamiento adecuado del contenido y un acercamiento a la justificación del método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.

El uso de la balanza algebraica digital permitió recurrir a la metáfora de la preservación de equilibrio para enseñar la noción de igualdad de la misma manera que Rojano (2010) lo menciona en su investigación cuando utiliza una balanza digital para trabajar ecuaciones lineales, además de que se observó en el alumno una mayor motivación e interés por trabajar este contenido mediante GeoGebra.

Sobre el cumplimiento de nuestro objetivo, creemos que el diseño e implementación de una secuencia de actividades basada en el modelo virtual de la balanza implementado a través de GeoGebra permite al alumno aproximarse a la justificación del algoritmo que involucra el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, puesto que le permite reconocer e identificar a través de la representación de los platillos que las sustituciones entre las ecuaciones que conforman un mismo sistema no altera las igualdades cuando se hacen adecuadamente.

La Teoría de Situaciones Didácticas nos permitió generar las condiciones necesarias para una génesis artificial. La implementación de esta teoría como marco teórico para el diseño de nuestra propuesta proporcionó las bases para poder diseñar una secuencia de actividades organizada y lógica que involucrara situaciones contextuales que permitieran al alumno encontrar sentido a lo que estaba aprendiendo.

Establecer un contrato didáctico desde el diseño de la planeación permite prever los comportamientos y obligaciones del maestro y los alumnos alrededor del proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que delimitará las acciones a realizar durante la clase. Somos conscientes en que hacer que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje es lo más conveniente, sin embargo, ahora sabemos que tratar de guiarlo hacia la búsqueda de la solución a través de indicaciones y preguntas con el fin de que logre llegar a ella por méritos propios se complica, puesto que hoy en día los estudiantes están acostumbrados a una práctica donde el profesor siempre les otorga respuestas. A pesar de esto, se lograron algunos pasos en la evolución del contrato didáctico pues algunas situaciones didácticas desembocaron en situaciones a-didácticas, es decir que fueron disminuyendo las intervenciones del titular.

Es fundamental que el maestro tenga dominio del contenido matemático en cuestión, puesto que al tener bien establecidos los conceptos y definiciones involucrados en cada tema brindará una visión más amplia sobre el qué enseñar y permitirá pensar en diferentes estrategias sobre el cómo enseñar. En nuestro caso por ejemplo, nos permitió diseñar una secuencia lógica pretendiendo que fuera de lo simple a lo complejo. También el dominio de este conocimiento permitió realizar en el momento justo la formalización del contenido.

Respecto al uso de la Ingeniería Didáctica como Metodología, nos permitió lograr los objetivos particulares descritos en el planteamiento de nuestro problema. A través de los análisis preliminares del objeto matemático en cuestión pudimos justificar y dar sustento al diseño de nuestra propuesta didáctica, respecto al análisis epistemológico, nos permitió reforzar el interés por darle un enfoque diferente al tratamiento del contenido, pretendiendo el empleo de los avances tecnológico que tenemos a nuestro alcance hoy en día.

La atención a la fase uno de la ingeniería didáctica nos facilitó el cumplimiento del primer y segundo objetivo particular planteado en este trabajo, ya que el análisis cognitivo nos permitió identificar y realizar un análisis y clasificación de los errores que los alumnos de tercero de secundaria cometen al resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros utilizando los métodos de reducción, igualación y sustitución. Este análisis cognitivo en combinación con el análisis didáctico nos permitió tomar un referente para poder prever acciones y elementos a incorporar para el diseño de las actividades, así como definir un punto de partida para su elaboración.

También logramos alcanzar el tercer objetivo particular que consistía en el diseño de un applet mediante GeoGebra que favoreciera la comprensión del método de sustitución.

Con respecto a ello, la implementación e interfaz del applet diseñado para nuestra propuesta logró el propósito de generar en el alumno una comprensión acerca del concepto de igualdad y sus propiedades, puesto que al utilizar la analogía de la balanza le permitió apreciar cómo el proceso de un despeje no debe alterar el equilibrio de la misma. Para trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones con el uso de la balanza es de suma importancia explicar al educando la justificación que hay detrás de la transposición de términos, haciendo alusión a las reglas que se derivan del axioma fundamental de las ecuaciones ya que esto le permitirá interpretar el procedimiento que implica el despeje de los objetos en los platillos.

Además, logramos cumplir el cuarto objetivo particular que consistía en diseñar una secuencia didáctica que atendiera a los conocimientos previos, incluya el empleo del recurso tecnológico y atienda al método de sustitución. Respecto a ello, el tratamiento extenso y estructurado de los conocimientos previos al inicio de nuestra propuesta nos permitió asegurar que todos los alumnos tuvieran las bases necesarias y que al introducir el nuevo contenido no les presentara conflicto, debido a ello, se pudieron prevenir parte de los errores y dificultades que se habían identificado en otras investigaciones como el error al establecer el sistema a partir de una situación dada. Como se sabe, es importante mencionar que para el tratamiento de cualquier contenido no basta con definir cosas, pues se debe preparar el medio de manera que sean los propios alumnos quienes vayan cayendo en cuenta.

Asimismo, diseñar e implementar hojas de trabajo propias nos permitió incorporar y estructurar de manera adecuada los elementos que consideramos necesarios para la práctica y cuya finalidad fue atender a los propósitos establecidos, no obstante, es importante que durante este diseño se considere en todo momento al alumno y se piense en los posibles escenarios que podrían suceder ante su resolución.

Sobre el quinto objetivo particular que refiere a la implementación de una prueba piloto, también conseguimos alcanzarlo, respecto a ello creemos que en las investigaciones de esta índole, son muy importantes pues permite corroborar que la propuesta esté en orden y que marche según lo previsto en el análisis a priori. De su implementación pudimos identificar aspectos a modificar y corregir en la planeación, hojas de trabajo y applet, con la finalidad de evitar aspectos negativos que obstaculizaran el alcance de los propósitos establecidos en cada momento de la secuencia.

Por último sobre los objetivos particulares, también se logró cumplir el sexto, puesto que sí se aplicó la propuesta y logramos analizar los resultados obtenidos. Como se presentó en el apartado cuatro, la Ingeniería Didáctica consta de 4 diferentes fases, su implementación para nuestro trabajo nos permitió profundizar en la concepción, ejecución, observación y análisis de los efectos que tuvo el diseño y aplicación de nuestra propuesta didáctica. Algo muy importante, es que la implementación de la última fase que corresponde a la validación nos permitió identificar las adecuaciones necesarias para mejorar nuestra secuencia didáctica, mismas que se presentan más delante.

A partir de los resultados obtenidos en la experimentación podemos asegurar que:

Se lograron llevar a cabo todas las etapas de la ingeniería didáctica para el diseño y la validación de la propuesta.

Logramos proponer y aplicar una secuencia didáctica que involucra el modelo virtual de la balanza basado en una applet diseñada en GeoGebra, que ayuda a los estudiantes de secundaria a tener un acercamiento diferente al método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros, permitiendo enseñar el contenido de una manera diferente a la tradicional y evitando recurrir a la memorización y mecanización del método.

Una de las bondades más sobresalientes sobre el uso del applet es que permite al alumno corroborar al instante el despeje que ha realizado puesto que, si después de concluirlo los platillos no están en equilibrio, el estudiante puede inferir en que hay algún error en el proceso. En realidad sobre el uso del applet la única complicación recurrente que se identificó fue en la que el alumno intentaba omitir un objeto negativo presionando el botón que agregaba objetos negativos pero esto se solucionaba al instante en que identificaban el comportamiento de los platillos.

En suma, se confirma el hecho de que mediante actividades que utilizan herramientas tecnológicas es posible promover en los estudiantes la exploración de ideas y conceptos matemáticos, así como el interés y la motivación hacia el aprendizaje, puesto que son herramientas esenciales en el proceso de construcción de conocimientos y están al servicio de la enseñanza. Con el uso del software libre GeoGebra pudimos trabajar el contenido algebraico mediante una representación gráfica que permitió al alumno inferir el proceso implicado en el método de sustitución para resolver los sistemas de ecuaciones.

De entre las limitaciones de esta propuesta y el applet, se consideran las siguientes:

Para comprender los lineamientos que se presentan en este trabajo sobre el funcionamiento del applet como recurso tecnológico es necesario que el docente tenga un dominio básico sobre el uso de GeoGebra.

La secuencia didáctica que aquí se presenta se realizó para trabajar sistemas de ecuaciones lineales (SEL) de 2x2 con coeficientes enteros, si el profesor deseara aumentar el nivel a la secuencia, el trabajo con fracciones se puede hacer posterior al trabajo con el applet, cuando ya los alumnos puedan resolver un SEL sin la herramienta tecnológica aquí propuesta.

En el applet sólo se pueden representar 17 objetos para cada término de las ecuaciones por lo que no se deberá trabajar con coeficientes tan grandes.

La interfaz del applet no permite ver con detalle el proceso completo al despejar o sustituir un objeto de alguna de las balanzas puesto que no deja ver el paso anterior que se había realizado.

Se necesitan equipos de cómputo para poder implementar el applet, ya que se intentó utilizar en Smartphone y Tabletas y no funcionó debido a las características del mismo.

Trabajar con el applet implica un mayor tiempo que si sólo se trabajara de la manera tradicional.

Sugerencias didácticas para la mejora de la propuesta:

Con relación a las sugerencias para la mejora de este trabajo, consideramos importante respetar los tiempos planteados de 2 sesiones de 90 minutos o bien adecuarla para 3 sesiones de 60 minutos de modo que se evite generar cansancio y desinterés en los alumnos.

Aunque el uso del applet tiene bondades didácticas como verificar en el momento los despejes a través del comportamiento de las balanzas, es importante que el alumno no dependa de ella para poder resolver los sistemas de ecuaciones puesto que la idea es que las simulaciones sean una especie de andamiaje, que se retira eventualmente. Para ello sugerimos trabajar colaborativamente más actividades como la implicada en la hoja de trabajo #4 y #5 antes de dejar que el alumno trabaje de manera individual.

Utilizar elementos que permitan contextualizar las situaciones puede permitir al alumno interpretar sin mayores problemas lo que el problema requiere.

Para obtener evidencia de los procedimientos utilizados por los alumnos en el uso del applet, sugerimos utilizar la función o descargar algún programa que permita grabar la pantalla de la computadora que se utilice, esto con la finalidad de permitir un mejor análisis del proceso utilizado al momento de darle solución al sistema o bien, llevar una especie de bitácora que eventualmente se convierta en una explicación algebraica de la resolución.

Aunque esta propuesta se diseñó para atender al método de sustitución, si se quiere trabajar el método de igualación o reducción es posible implementarla tal y como está hasta el momento 3 y utilizarla junto a los momentos 1 y 2 para el tratamiento de los conocimientos previos. La razón de esto se debe a que el método de sustitución funciona como base para trabajar los otros dos. Respecto al uso del applet, es posible implementarla para estos métodos realizando las adecuaciones correspondientes sobre el proceso implicado para cada método en las hojas de trabajo #4 y #5. Con relación a ello, sólo bastaría con cambiar las indicaciones de los incisos d y e y agregar alguno intermedio si se considera necesario.

Puesto que el uso de las balanzas no permite identificar al alumno cuando un sistema tiene una solución o infinitas soluciones se sugiere acompañar la secuencia con la graficación de las mismas dentro del mismo software libre GeoGebra.

Reflexión Acerca de mi Paso por la Maestría

Aunque el desarrollo de la práctica profesional depende de cada docente, todos deberíamos mostrar responsabilidad hacia la profesión y tratar de realizar las acciones necesarias que nos permitan encaminarnos hacia la mejora de la enseñanza y aprendizaje. En lo particular, cuando egresé de la Licenciatura no me sentía lo suficientemente preparado para pararme frente a un grupo y tener la seguridad de que mi enseñanza sería ejemplar, pero ahora posterior a la maestría me siento con una mayor capacidad de poder aproximarme a ello.

Al respecto, me queda que el dominio del conocimiento matemático y didáctico del contenido son fundamentales para la enseñanza y ninguno debe ser más importante que el otro pues deben de ir de la mano y ser trabajados de manera conjunta, derivado de mi experiencia considero que la articulación entre ambos conocimientos puede fomentar en el profesor una mejor visión acerca de qué enseñar y cómo enseñar, lo que permitirá que los estudiantes aprecien de una mejor manera la actividad matemática y le encuentren mayor significado y utilidad a lo que están aprendiendo.

Mi paso por la maestría también me permitió desarrollar una actitud más crítica hacia mi práctica pues ahora puedo interpretar de una mejor manera lo que sucede en el aula y poder delimitar las acciones necesarias para su mejora.

En general, la maestría en Matemática Educativa, me deja un gran sentimiento de satisfacción al saber que logré adquirir grandes conocimientos, actitudes y habilidades que me permitirán seguir mejorando como profesional. A pesar de que he adquirido gran aprendizaje, sé que aún no ha terminado puesto que sé que siempre puedo y debo seguir obteniendo conocimiento que permita aproximarme cada vez más a una enseñanza ejemplar.

Referencias

Álvarez-Gayou, J.L. (2014). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Paidós Educador.

Anaya, F (2020). *Ambiente virtual de aprendizaje para la construcción del concepto sistema de ecuaciones lineales fundamentado en la teoría APOE* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L Moreno & P. Gómez. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica.

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2 ed.). Patría.

Bermejo, F. V. (2010). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. CCS.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. Alianza Editorial

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2002). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. (*9ª Reimpresión) (65-94). Paidós.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Editorial Libros del Zorzal.

Caballero, J., y Juárez, L. (2006). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Números*, 91, 33-56.

Carrillo, M. (2017). *Enseñanza de los sistemas lineales en Secundaria: Una propuesta de mejora a través de la integración de tecnologías* [Tesis doctoral, Universitat de les Illes Belears, Palma].

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Cortés J., Hitt F., y Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Scielo, 30*(54), 240-264.

Cortez, M. (2016). *Actividades didácticas con uso de tecnología digital para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2* [Tesis de maestría, Universidad de Sonora].

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1* (2), Costa Rica.

Del Río, J. A. (2014) *El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas].

Divertimat [Paucar, A.]. (2014, Junio 14). Sistemas de ecuaciones con una balanza [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=65SfYyR4PDw&ab_channel=divertimat

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica.

Escareño, F. y López O. (2017). *Matemáticas 2*. Trillas.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2003). Two meanings of the \`equal´ sign and senses of comparison and substitution methods. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 223-229.

Fuenlabrada, S. (2004). *Aritmética y Álgebra.* McGraw-Hill Interamericana.

Gaildiel (2014, Abril 8). 019 La balanza [Archivo de video]. https://www.youtube.com/channel/UC2Zar5yHgBYLVeD3EefCfqA/about

Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Sainz (comps.) *Didáctica de las Matemáticas, aportes y reflexiones* (pp.39-50). Paidós Educador.

García, S. y Block, D. (2018). *Matemáticas 2. Secundaria. Conect@ estrategias.* SM. Comunidad GeoGebra. (25 de septiembre de 2021). *¿Qué es GeoGebra?* https://www.GeoGebra.org/about

Grossman, S. (2008). Álgebra Lineal. McGraw-Hill Interamericana.

Lehmann, C. (2012). *Álgebra.* Limusa.

Luna, L. A. (2018). *Sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. Un estudio desde la teoría APOE en el nivel secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas].

Moll, M. (2011). *Comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por alumnos de 2° ESO.* (Tesis de Maestría, Universidad de Granada].

Mosquera, W. (2014). *Diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método "Flipped Classroom" o aula invertida. Estudio de caso en el grado noveno de la Institución Educativa Guadalupe del municipio de Medellín* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].

Nava, P. (2012). *La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales a través de las situaciones didácticas: Un estudio con alumnos de bachillerato* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* [Tesis de doctorado, Centro de investigaciones en Ciencia Aplicada y

Tecnología avanzada. México].
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ochoviet_2009.pdf

Ortíz, A. (2005). *Historia de la matemáticas. Volumen 1. La matemática en la antigüedad*. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Ed.) *Enseñar Matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.; análisis y propuestas.* (pp. 59-71). Paidós.

Rivera, P. (2010). *Uso de tecnología en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Aguascalientes].

Robles, M. (2017). *De lo verbal a lo algebraico: Las ecuaciones lineales en alumnos de primero de secundaria* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas].

Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones, y sistemas matemáticos de signos. *Números*, 75, 5-20.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Segura, S. (2004). Sistema de inecuaciones lineales. Una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), 49-78. http://dialnet.unirioja.es/servlet/et/articulo?codigo=2095347

Secretaria de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, guía para el maestro, educación básica, secundaria.*

Secretaria de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y programas de estudios, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.*

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Martín, L. Puig, M. Sierra, M. M. Socas (Ed.). *La Educación Matemática en la Secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años.* Crítica.

Trigueros, M., y Ursini, S. (2018). La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. En A. Ávila, (coord.), *Rutas de la educación matemática* (pp.262-281). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Valenzuela, A. (2013). *Binomios al cuadrado: una secuencia didáctica con alumnos de nivel bachillerato* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas].

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de secundaria. *Números*. 78, 73-94. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf

Anexos

Anexo 1

VERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
IDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:________________

Indicación: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de *reducción.*

$$\mathbf{5x+6y=20}$$
$$\mathbf{4x-3y=-23}$$

Indicación: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de *sustitución.*

2x+5y=-24
8x-3y=19

Indicación: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de *igualación.*

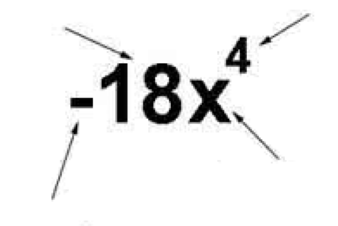
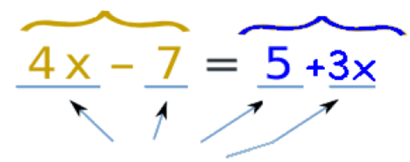
$7x+4y=13$
$5x-2y=19$

Anexo 2

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa
con Orientación en el Nivel Secundaria

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

Indicaciones: Responde lo que se pide a continuación.

Escribe las partes de una expresión algebraica	¿Qué es una ecuación?	Escribe las partes de una ecuación
		

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $2x = 12$	2. $5x = 3x + 40$	3. $-9x + 24 = 7x - 35$

Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

1. "Un número cualquiera"	1.
2. "La suma de dos números enteros cualquiera es 10"	2.
3. "La diferencia de dos números enteros es 4"	3.
4- "El triple de un número entero más 3 es igual a 17"	4.

Anexo 3

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

PLANEACIÓN

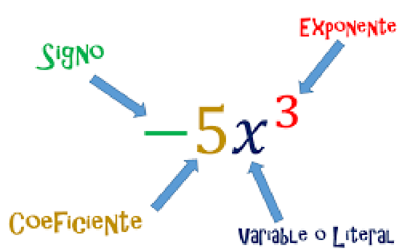
Fecha: Marzo 2021	**Núm. De Sesiones: 2**	**Tiempo: 90 min por sesión**

Enfoque Pedagógico	La resolución de problemas contextualizados se utilizará como medio para enseñar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio. En el primer caso, se fomentará que los estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general aprendidos previamente, tales como las partes de una ecuación y resolución de ecuaciones de primer grado. En un segundo momento, los estudiantes desarrollarán procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad, siendo estos los métodos de sustitución, igualación y reducción para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros. En ambos casos, los estudiantes analizan, comparan y obtienen conclusiones con ayuda del profesor; defienden sus ideas y aprenden a escuchar a los demás; relacionan lo que saben con nuevos conocimientos, de manera general; y le encuentran sentido y se interesan en las actividades que el profesor les plantea, es decir, disfrutan haciendo matemáticas. Mediante actividades que utilizan herramientas tecnológicas es posible promover en los estudiantes la exploración de ideas y conceptos matemáticos, así como el análisis y modelación de fenómenos y situaciones problemáticas. Para lograr esto se utilizará como recurso tecnológico el software de uso libre GeoGebra que permite trabajar con distintas representaciones dinámicas de conceptos y situaciones, como la representación gráfica, la numérica y la algebraica.
Propósitos Generales	1. Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos. 2. Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas. 3. Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.
Contenido	Sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con coeficientes enteros.
Aprendizajes Esperados	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Eje	Número, Álgebra y Variación
Propósito	Resolver problemas que impliquen el uso de sistemas de ecuaciones.

Momento 1

Propósito: Rescate de conocimientos previos atendiendo a los elementos de una expresión algebraica así como a la representación, partes y resolución de una ecuación lineal con una incógnita.

ACTIVIDADES	TIEMPO APROX.	RECURSOS

➢ Para trabajar este contenido es necesario que el alumno conozca una expresión algebraica, la definición de ecuación y cada una de las partes que las conforman, para ello se comenzará planteando enunciados en lenguaje común para que los alumnos los pasen a un lenguaje algebraico, no sin antes explicar que *un lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente conocemos como lenguaje natural y que de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar expresiones, formular ecuaciones y permite el estudio de cómo resolverlas.* ➢ **Situación de Acción.** Para trabajar este primer conocimiento previo se planteará la hoja de trabajo #1 dando la indicación que contesten únicamente hasta dónde se presenta el enunciado "El triple de un número más tres" ya que hasta este punto sólo implica formular expresiones algebraicas y no ecuaciones /posiblemente sea necesario que el profesor ejemplifique el primer enunciado/. ➢ **Situación de Formulación.** Una vez que los alumnos hayan contestado individualmente se les pedirá que en parejas comuniquen sus estrategias utilizadas, resultados obtenidos y dialoguen sobre sus respuestas, si son las mismas o si varían determinen a qué se debe. ➢ **Situación de Validación.** Posterior a que los alumnos hayan discutido en parejas, para socializar la actividad se les preguntará a cada uno la respuesta que obtuvo y se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado. ➢ **Situación de Institucionalización** Después de que se verifiquen las respuestas de los alumnos y se asegure que sean correctas se les dirá que lo que acaban de escribir son expresiones algebraicas pues están representando matemáticamente una cantidad utilizando literales y operaciones entre las mismas. Por ejemplo $x + y$, es la representación matemática de la suma entre dos cantidades y la x y y son las literales. A continuación, se presentará a los alumnos las partes de una expresión algebraica, dónde se definirán los siguientes conceptos a partir de la ilustración: ***Variable:*** *Es una letra que representa una cantidad en algebra.* ***Coeficiente:*** *Es el factor numérico de un término. Es decir, es un número que multiplica a una literal.* ***Signo:*** *Símbolo que indica una característica de un objeto. En matemáticas puede indicar una operación o la naturaleza del objeto (positivo o negativo).* ***Exponente:*** *Es el número que indica cuantas veces se multiplica la base*  	15 Min	Hoja de trabajo #1.

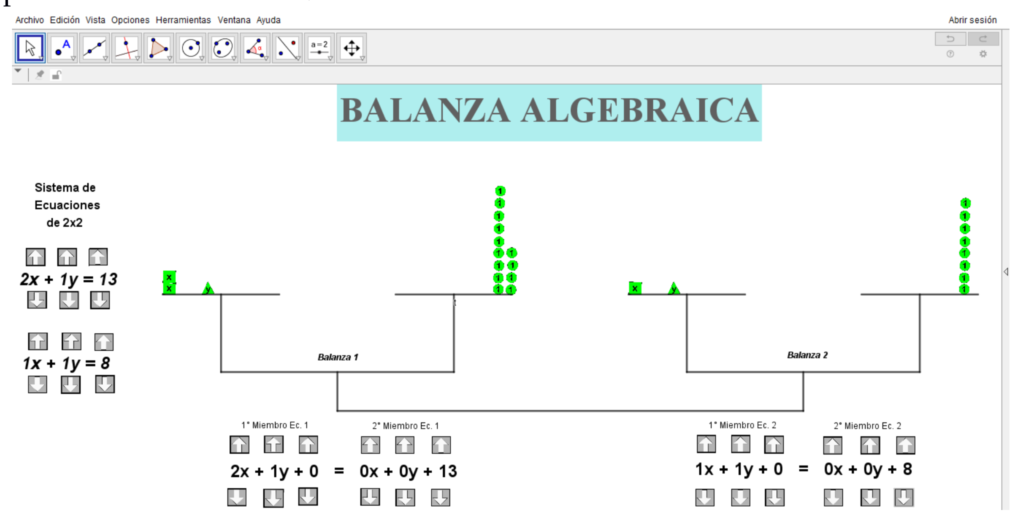
➢ **Situación de Acción.** Se pedirá a los alumnos que contesten los demás ejercicios de la hoja de trabajo #1 que implica formular ecuaciones con una y dos incógnitas. ➢ **Situación de Formulación.** Una vez que los alumnos representen estos enunciados se pedirá que los comparen con alguno de sus compañeros y dialoguen sobre sus respuestas, si son las mismas o si varían determinen a qué se debe. ➢ **Situación de Validación.** Posterior a que los alumnos hayan discutido en parejas, para socializar la actividad se les preguntará a cada uno la respuesta que obtuvo y se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado. ➢ **Situación de Institucionalización.** Posterior a que se verifique que los resultados son correctos se les dirá que lo que acaban de formular son ecuaciones y se les preguntará ¿Qué partes tiene una ecuación? /Se espera que señalen partes de la expresión algebraica o la expresión algebraica en sí/ ¿En la ecuación hay la presencia de expresiones algebraicas? ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una expresión algebraica?/Se espera que los alumnos señalen el símbolo igual, de ser así a partir de ello se les dirá que en efecto existe una igualdad lo que refiere a la expresión de que dos cantidades tienen el mismo valor/ Con base en lo anterior ¿Cómo podrías definir una ecuación algebraica? /se espera que la definan como la igualdad entre dos expresiones algebraicas/. A partir de sus participaciones se formalizará que *una ecuación es la igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que hay una o varias cantidades desconocidas a las cuales se le llaman incógnitas, y cuyo valor sólo se verifica para determinados valores de ellas.* Posterior a ello se presentarán las partes de una ecuación mediante la siguiente representación:  A partir de esta representación se definirá lo siguiente: ***Miembro:*** *Se llama primer miembro a la expresión que está a la izquierda del signo igual, y segundo miembro, a la expresión que está a la derecha.* ***Término:*** *Son cada una de las cantidades que están conectadas con otra por el signo + o -, o la cantidad que está sola en un miembro.* ***Incógnita:*** *Las ecuaciones tienen generalmente una o más letras de las cuales se desconoce su valor y a éstas se les llama incógnitas* ***Constante:*** *Expresión matemática que no cambia de valor*	15 Min.	Hoja de trabajo #1
➢ Un conocimiento previo fundamental para trabajar el contenido de sistemas de ecuaciones son los despejes de ecuaciones de primer grado. Para trabajar este	20 min	Hoja de trabajo #2

contenido se le pedirá al alumno que resuelva las ecuaciones con una incógnita presentadas en la hoja de trabajo #1. Pero antes de ello se preguntará ¿Qué es resolver una ecuación de primer grado con una incógnita? /Se espera que los alumnos mencionen que es encontrar el valor de la incógnita/ ¿Qué procedimiento se puede implementar para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita?/Se espera que asocien el procedimiento con un despeje visto en primer grado, de ser así se formalizará que *el despeje es un proceso que consiste en modificar una ecuación hasta que la variable o incógnita deseada quede aislada en cualquiera de los miembros de la igualdad*/. Para ejemplificar este proceso se tomará la siguiente ecuación; $$4x + 5 = 9$$ ➢ **Situación de Acción.** Después de esta explicación, se proporcionará la Hoja de trabajo #2 dónde ya se incluyen además de las ecuaciones formuladas en la hoja de trabajo #1 otras que implican la suma de términos semejantes para que el alumno resuelva. Como en la última ecuación es muy probable que los términos de la ecuación queden negativos, se les dirá *que los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1, con lo cual la igualdad no varía.* Para esto se ejemplificará con otra ecuación. ➢ **Situación de Formulación.** Una vez que los alumnos hayan contestado individualmente se les pedirá que en parejas comuniquen sus, resultados obtenidos y dialoguen sobre sus respuestas, si son las mismas o si varían determinen a qué se debe. ➢ **Situación de Validación.** Cuando los alumnos terminen se les pedirá que en parejas muestren y expliquen el proceso realizado para resolver cada una de las ecuaciones y se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado. ➢ **Situación de institucionalización.** Una vez que se socialicen las respuestas se mencionará que para realizar despejes es necesario realizar *una transposición de términos que consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro y que cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo*/Más delante se verá la justificación de ello/		
➢ Para introducir a los alumnos a la utilización de la balanza se les presentará el siguiente video dónde se explica lo que es una balanza y su funcionamiento: https://www.youtube.com/watch?v=7Vff2-JMYNs&ab_channel=gaildiel ➢ **Situación de Acción.** Se les presentará una balanza en GeoGebra que genera una ecuación aleatoriamente y se le pedirá que ilustre cada miembro de la ecuación en cada platillo de la balanza utilizando los botones que muestra la interfaz del applet "Balanza algebraica para ecuaciones lineales con una incógnita", misma que se puede encontrar en el sitio https://www.geogebra.org/m/fat8krsm ➢ **Situación de Formulación.** Se les pedirá que en parejas busquen la manera en cómo hacer que todas las literales de la ecuación estén en un solo platillo de la balanza y los números en el otro, cuidando que la balanza se mantenga en equilibrio. Una vez que ya tengan en un solo platillo las literales se les pedirá que pasen a su cuaderno la ecuación resultante y determinen el valor de la	20 min	Balanza algebraica para ecuaciones lineales con una incógnita

<table>
<tr><td>incógnita.
➢ Situación de Validación. Se pedirá a un alumno que utilice frente a el grupo la balanza y resuelva una ecuación mediante el procedimiento que él empleo para poder obtener el valor de la incógnita. Una vez que lo haga se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferencias se confrontarán ambos puntos de vista para así determinar lo correcto.
➢ Situación de Institucionalización. De este proceso, se formalizará que la transposición de términos se justifica en las primeras cuatro reglas que se derivan del Axioma fundamental de las ecuaciones:
Regla 1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
Regla 2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
Regla 3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
Regla 4. Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento 2
Propósito: Que los alumnos formulen el sistema de ecuaciones a partir de una situación.</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>TIEMPO APROX.</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td>➢ Situación de Acción. Para que a los alumnos les sea más sencillo establecer el sistema de ecuaciones, se retomará desde el planteamiento de una ecuación con dos incógnitas. Para ello, se le presentará al alumno la hoja de trabajo #3 y se pedirá que resuelva el problema planteado.
➢ Situación de Formulación. Para el problema se plantearán las siguientes preguntas, mismas que tendrán que discutir en parejas; ¿Qué es lo que se desconoce en este problema?¿Cómo representarías matemáticamente este enunciado? ¿Qué puede ser la incógnita x? ¿Qué puede ser la incógnita y? ¿Cómo acomodarías los datos en una sola operación para lograr llegar al resultado?
➢ Situación de Validación. Para socializar estos problemas se le preguntará a los alumnos la ecuación, el procedimiento y resultado que obtuvo en cada problema y se cuestionará a los demás si están de acuerdo con lo que presenta su compañero, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado.
➢ Situación de Institucionalización. Después de socializarlo y se verifique que sus respuestas son correctas se le dirá al alumno que hasta ahora se había trabajado con ecuaciones, sin embargo hay situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que se define como la reunión de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma
$Ax+By=C$
$Dx+Ey=F$
Donde A, B, C, D son números fijos, mientras que x y y son incógnitas.</td><td>15</td><td>Hoja de trabajo #3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento 3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Propósito: Que el alumno aprenda el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros</th></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES</th><th>TIEMPO APROX.</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>

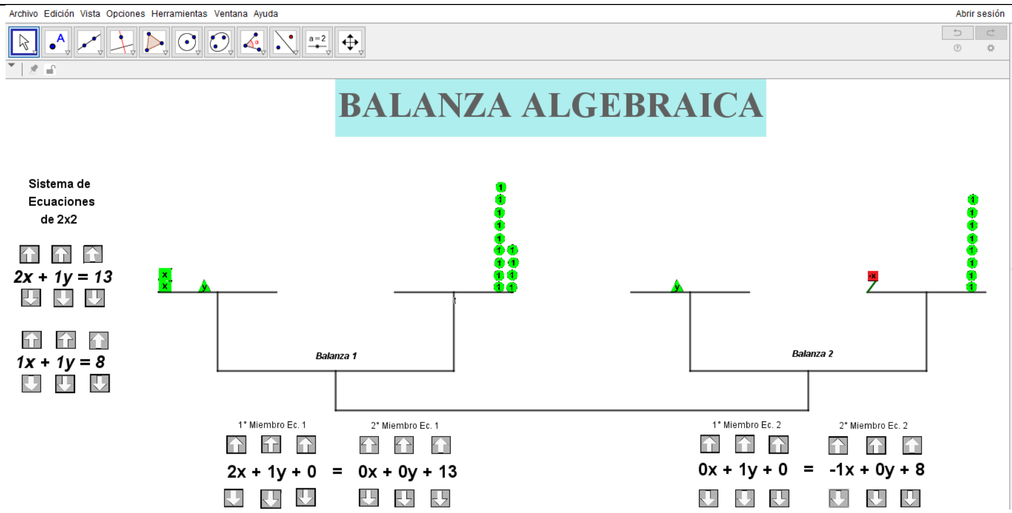
- Como anteriormente ya presentó el uso de la balanza para resolver ecuaciones de primer grado, ahora se presentará el interfaz y se explicará el funcionamiento del applet diseñado en GeoGebra (ver Balanza para sistemas de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros) para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.
- **Situación de Acción:** Se planteará el primer problema de la hoja de trabajo #4 que implica el planteamiento de un sistema de ecuaciones de 2x2 con coeficientes enteros, se dará lectura al problema grupalmente y se pedirá a los alumnos que establezcan el sistema, una vez que se verifique que es correcto se pedirá que utilizando los botones ubicados en la parte izquierda del applet lo reproduzca debajo del título “Sistema de ecuaciones de 2x2” y que además represente en cada platillo de la balanza cada miembro de ambas ecuaciones según corresponda asegurándose de que quede en equilibrio tal como se presenta a continuación:



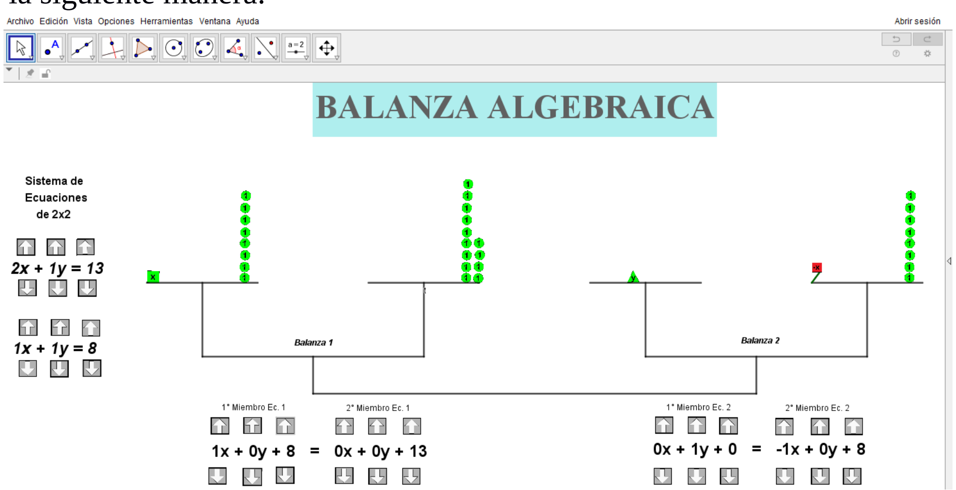
- **Situación de Formulación:** Se dará la indicación de que en parejas manipule los objetos de los dos platillos de la balanza 2 para que, a final de cuentas se pueda ver el peso del objeto *y*. /Es importante mencionarle el principio del uso de la balanza que en la balanza siempre debemos quitar o agregar la misma cantidad de elementos en ambos lados para que se mantenga en equilibrio tal como se apreció en el video/
- Una vez que los alumnos manipulen la balanza 2 para que puedan ver el peso del objeto *y*, la balanza se debe ver de la siguiente manera:

</td><td>15 min

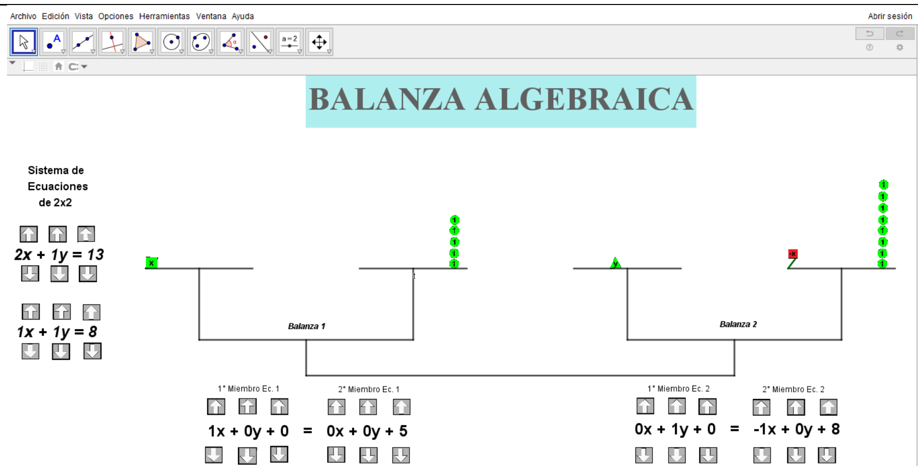
15 min</td><td>Hoja de trabajo #4</td></tr>
</table>



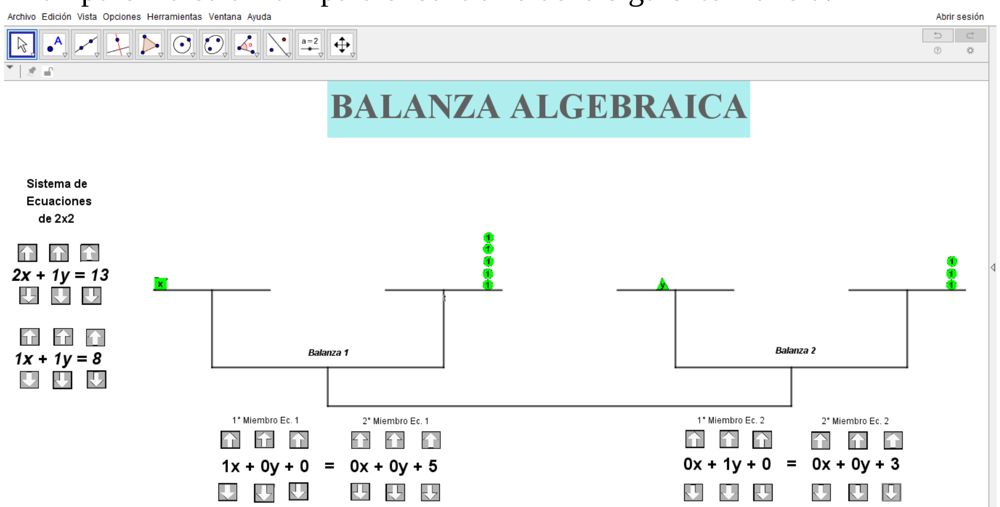
- Se pedirá a los alumnos que la ecuación que representa los dos platillos de la derecha deberán anotarla en el inciso **d** de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?
- Una vez despejado "y" se preguntará lo siguiente: ¿Cómo se vería la balanza 1 utilizando sólo el peso de uno de los objetos? /Fomentando la sustitución/
- Una vez que los alumnos sustituyan este valor en la balanza 1 se deberá mirar de la siguiente manera:



- Se pedirá a los alumnos que escriban en el inciso **e** de la hoja de trabajo #4 la ecuación de la balanza 1 utilizando sólo el peso de uno de los objetos y describa lo que hizo para obtenerla.
- Una vez que la balanza 1 esté en función de una sola incógnita se dará la indicación de que la manipule para encontrar el peso del objeto, para ello se preguntará ¿cuánto pesa x? esperando que lo realicen de la siguiente manera:



- Se pedirá a los alumnos que la ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto deberán anotarla en el inciso **f** de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?
- Una vez que encuentren el valor de una incógnita se le preguntará ¿Cómo puedes encontrar el valor de la otra incógnita? Se le dará la indicación de que manipulen la balanza 2 para encontrarlo de la siguiente manera:



- Se pedirá que la ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto deberán anotarla en el inciso **g** de la hoja de trabajo #4 así como responder a la pregunta ¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?
- Posterior a ello se le pedirá a los alumnos que comprueben en el inciso **h** de la hoja de trabajo #4 si los valores obtenidos de los objetos satisfacen el sistema.

- **Situación de Validación**: Se seleccionará a una pareja de alumnos para que muestre el proceso realizado mediante la utilización del Applet para llegar a sus respuestas, se cuestionará a los demás si están de acuerdo con el procedimiento y resultado obtenido por sus compañeros, en caso de que existan diferentes respuestas se confrontarán y se dejará a los mismos alumnos que traten de convencer a los demás mediante la explicación del procedimiento empleado.

15 min

- **Situación de institucionalización**: A partir del proceso realizado en el applet y la contestación de la hoja de trabajo #4, se formalizará el proceso implicado en el Método de sustitución de la siguiente manera:

15 min

<table>
<tr><td>Primero se despeja cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones.
Se sustituye su valor en la otra ecuación.
Una vez que se tenga la ecuación con una incógnita se resuelve.
Teniendo el valor de una de las literales, se sustituye en una de las ecuaciones que involucre ambas literales y se obtiene la otra literal.
Se comprueba si los valores de las incógnitas resuelven el sistema.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>➢ Una vez que se formalice el método, se pedirá a los alumnos que sigan este proceso para el otro problema de la hoja de trabajo #5.</td><td>20 min</td><td>Hoja de trabajo #5.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento 4
Propósito: Evaluar el aprendizaje de los alumnos</td></tr>
<tr><td>➢ Por último, se les dejará 3 sistemas para que los resuelvan utilizando el método de sustitución sin la utilización de la balanza.
<table><tr><td>x+2y=1
2x+y=5</td><td>$2x + y = 7$
$3y - 2x = 5$</td><td>2x+y=8
x+3y=9</td></tr></table></td><td>30 min-</td><td>Hoja de trabajo #6.</td></tr>
<tr><td>OBSERVACIONES</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Anexo 4

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Hoja de trabajo #1

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

¿Para qué sirve un lenguaje algebraico?

El lenguaje algebraico es utilizado para la representación de valores desconocidos, la principal función es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. Ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir a + b.

Indicaciones: Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados dados en lenguaje natural.

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico
"Un número cualquiera"		"Un número más dos es igual a ocho"	
"La suma de dos números diferentes"		"Un número menos cuatro es igual a 20"	
"La diferencia de dos números diferentes"		"La diferencia de dos números más 8 es igual a 22"	
"La multiplicación de dos números diferentes"		"La suma de dos números diferentes menos tres es igual a diez"	
"El triple de un número más tres"		"El triple de un número más tres es igual a este número más siete"	

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Hoja de trabajo #2

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:________________

Indicación: Resuelve las siguientes ecuaciones. No olvides comprobar.

$a+2=8$	$b-4=20$	$2c+3=18$	$2y-15=0$

Indicación: Resuelve las siguientes ecuaciones

$5x=3x+40$	$x+30+x+25=7x$	$9x-10x=-7$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Unidad Académica de Matemáticas

Hoja de trabajo #3

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

Indicación: Establece la ecuación que enuncia el problema y resuélvelo utilizando un procedimiento Algebraico.

- **Problema 1.** Dos tornillos y una tuerca pesan 20 gramos. Si cada tornillo pesa 7 gr. ¿cuánto pesa la tuerca?

¿Quién puede ser la incógnita x?	Ecuaciones	Procedimiento
¿Quién puede ser la incógnita y?		
Comprobación:		

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Hoja de trabajo #4

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

Indicación: Establece un sistema de dos ecuaciones para la situación que se presenta a continuación y resuélvelo utilizando la balanza digital, escribe el proceso implementado en las casillas de más abajo.

- **Problema 1:** Dos tornillos y una tuerca pesan 13g. Un tornillo y una tuerca pesan 8g. ¿Cuánto pesa cada tornillo y cada tuerca?

<table>
<tr><td>a. ¿Quién es x?</td><td colspan="2" rowspan="2">c. Sistema:
Ec1.

Ec.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b. ¿Quién es y?</td></tr>
<tr><td>Ecuación</td><td>¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?</td></tr>
<tr><td>d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto y.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">h. Comprobación</td></tr>
</table>

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"Francisco García Salinas"
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Hoja de trabajo #5

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

Indicación: Establece un sistema de dos ecuaciones para la situación que se presenta a continuación y resuélvelo utilizando la balanza digital, escribe el proceso implementado en las casillas de más abajo.

- **Problema 2:** Dos limones y dos uvas pesan 10 gramos, pero si al peso de un limón le quitamos el peso de una uva da un total de 1 gramo. ¿Cuánto pesa cada limón y cada uva?

<table>
<tr><td>a. ¿Quién es x?</td><td colspan="2" rowspan="2">c. Sistema:
Ec1.
Ec.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b. ¿Quién es y?</td></tr>
<tr><td>Ecuación</td><td>¿Qué hiciste para obtener esta ecuación?</td></tr>
<tr><td>d. Ecuación de la balanza 2 que muestra sólo el peso del objeto x.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e. Ecuación de la balanza 1 en función del peso de uno de los objetos</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f. Ecuación de la balanza 1 que muestra el peso de un objeto</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g. Ecuación de la balanza 2 que muestra el peso del otro objeto</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">h. Comprobación</td></tr>
</table>

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“Francisco García Salinas”
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
Maestría en Matemática Educativa

Hoja de trabajo #6

Número de alumno:____ Edad:_____ Fecha:_______________

Indicación: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante método de sustitución sin utilizar la balanza.

$x + 2y = 1$ $2x + y = 5$	$2x + y = 7$ $3y - 2x = 5$	$2x + y = 8$ $x + 3y = 9$

Comprobación	Comprobación	Comprobación