UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

Nombre de la tesis:

ENVOLTURAS NO-ESTÁNDAR DE ANILLOS TOPOLÓGICOS

Tesis realizada por *Luguis de los Santos Baños* para obtener el
Grado de Maestro en Matemáticas en la
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, Zac., 2017.

Asesor de la tesis:
Dr. Alexander P. Pyshchev

Índice general

Introducción

En los años 1670's, Leibniz definió la noción de los números infinitesimales. Los cuales son números no cero tales que son menor que cualquier otro número real positivo. Lamentablemente no fue hasta 1961, que Robinson definió de manera rigurosa lo que es un número infinitesimal. Robinson partio de los axiomas de Zermelo y Fraenkel, y del axioma de elección (abreviado ZFC), extendio $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$ aplicando una considereble cantidad de lógica matemática.

Definiciones en análisis no-estándar pueden formularse de manera mas sencilla y los teoremas pueden ser mostrados de manera mas simple. A menudo las simplicaciones son drásticas. Más aún, las definiciones y demostraciones adoptan una apariencia mas natural. Esto puede llevar al descubrimiento de nuevos resultados.

El propósito de esta tesis es establecer un forma alternativa de completación de un anillo y en el camino dar desmotraciones alternativas no-estándar de resultados clásicos.

Asumiremos que el lector tiene conocimientos previos de análisis no-estándar, nociones básicas de topología y de teoría de espacios uniformes.

En el capítulo 1 se empieza definiendo la relación de equivalencia R_X. La cual nos permite construir un espacio uniforme Huasdorff a partir de uno que tal vez no lo sea. Se darán algunos resultados que involucran a el espacio uniforme original y el construido usando R_X. Entre los resultados mas importantes está la completitud.

Para el capítulo 2 empezamos hacer uso de análisis no-estándar demostrando que $\mathscr{U}_{^*X}$ es una uniformidad para ${}^*X$. Se definirá un objeto de analisis no-estándar muy importante, llamado monada. Con la ayuda de la monada podremos definir un encaje uniforme de $(X, \mathscr{U})$ en $(H^*X, \mathscr{U}_{H^*X})$. Además, definiremos una uniformidad en un grupo abeliano topológico tal que te induce la topología original.

En el capítulo 3 se trabaja con un anillo topológico. Haremos uso de los dos capítulos anteriores para encajar a un anillo topológico Hausdorff en un anillo topológico Hausdorff y completo. Para esto se definirá un objeto nuevo llamado envoltura no-estándar. Se darán dos ejemplos sobre este objeto nuevo. Por último se demostrará un teorema usando solo análisis no-estándar.

Capítulo 1

Espacios uniformes Hausdorff asociados con un espacio uniforme

Suponemos que el lector conoce los básicos de la teoría de los espacios uniformes [1].

Definición 1.1. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme. Definamos*

$$R_X := \bigcap_{U \in \mathscr{U}_X} \subseteq X^2.$$

Vamos a llamar a R_X una ***relación de equivalencia asociada con un espacio uniforme*** *$(X, \mathscr{U}_X)$.*

Proposición 1.1. *[1, pág. 174]. Un espacio uniforme $(X, \mathscr{U}_X)$ es Hausdorff (con respecto a la topología inducida por U_X) si y sólo si $R_X = \triangle_X$, dondes $\triangle_X$ es la diagonal en X^2.*

Proposición 1.2. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme. Si $A \subseteq X$ es abierto ó cerrado en $(X, \mathscr{U}_X)$, entonces $R_X[A] = A$.*

Demostración. Supongamos que A es abierto en $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(x, y) \in R_X$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $U[x] \subseteq A$. Como $(x, y) \in U$, tenemos $y \in A$. Se deduce que $R_X[A] = A$.

Si A es cerrado en $(X, \mathscr{U}_X)$, entonces $R_X[X \setminus A] = X \setminus A$ y por eso $R_X[A] = A$. □

Proposición 1.3. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme. Definimos*

$$HX = \frac{X}{R_X}$$

y para cada $U \in \mathscr{U}_X$ *definimos*

$$U^\sharp = \{(p,q) \in (HX)^2 : (p \times q) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Entonces

$$\mathscr{U}_{HX} = \{U^\sharp : U \in U_X\}$$

es una uniformidad Hausdorff en HX*.*

Demostración. Primero mostraremos que $\mathscr{U}_{HX}$ cumple los axiomas de la uniformidad.

1. Como $X^2 \in \mathscr{U}_X$, tenemos

$$(HX)^2 = (X^2)^\sharp \in \mathscr{U}_{HX}.$$

2. Sea $U \in \mathscr{U}_X$. Consideremos $p \in HX$ y escojamos $x \in p$. Tenemos que

$$(x,x) \in \triangle_X \subseteq U$$

   y por eso $(p,p) \in U^\sharp$. Se deduce que $\triangle_{HX} \subseteq U^\sharp$.

3. Sea $U \in \mathscr{U}_X$ y $W \subseteq (HX)^2$ tal que $U^\sharp \subseteq W$. Definimos

$$V = \bigcup_{(p,q)\in W} (p \times q) \subseteq X^2.$$

   Observemos que si $(x,y) \in U$, entonces $([x],[y]) \in U^\sharp \subseteq W$ y por eso

$$(x,y) \in [x] \times [y] \subseteq V.$$

   Así, se tiene que $U \subseteq V$. Como $\mathscr{U}_X$ es una uniformidad, entonces $V \in \mathscr{U}_X$. Demostraremos ahora que $W = V^\sharp$. Sea $(p,q) \in W$. Se sigue que $p \times q \subseteq V$ y por eso $(p,q) \in V^\sharp$. Ahora supongamos que $(p,q) \in V^\sharp$. Existen $x \in p$ y $y \in q$ tales que $(x,y) \in V$. Además, existen $p_1, q_1 \in HX$ tales que $(p_1,q_1) \in W$ y $(x,y) \in p_1 \times q_1$. Se deduce que $p = p_1$ y $q = q_1$ y por eso $(p,q) \in W$. Por lo tanto $W \in \mathscr{U}_{HX}$.

4. Sean $U, V \in \mathscr{U}_X$. Vamos a mostrar que $U^\sharp \cap V^\sharp \in \mathscr{U}_{HX}$. Tenemos que $U \cap V \in \mathscr{U}_X$. Claro que $(U \cap V)^\sharp \subseteq U^\sharp \cap V^\sharp$. Por (3) obtenemos que $U^\sharp \cap V^\sharp \in \mathscr{U}_{HX}$.

5. Sea $U \in \mathscr{U}_X$. Demostraremos que $(U^\sharp)^{-1} \in \mathscr{U}_{HX}$. Se tiene que $U^{-1} \in \mathscr{U}_X$. Si $(p,q) \in (U^{-1})^\sharp$, entonces existen $x \in p$ y $y \in q$ tales que $(x,y) \in U^{-1}$. De esto se sigue que $(U^{-1})^\sharp \subseteq (U^\sharp)^{-1}$. Por (3) se concluye que $(U^\sharp)^{-1} \in \mathscr{U}_{HX}$.

6. Sea $U \in U_X$. Existe $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Además, existe $W \in \mathscr{U}_X$ tal que $W \circ W \subseteq V$. Mostraremos que $W^\sharp \circ W^\sharp \subseteq U^\sharp$. Sea $(p, q) \in W^\sharp \circ W^\sharp$. Existe $r \in HX$ tal que $(p, r), (r, q) \in W^\sharp$. Ahora, existen $x \in p$, $y \in r$, $y' \in r$ y $z \in q$ tales que

$$(x, y), (y', z) \in W.$$

Como $(y, y') \in R_X \subseteq W$, obtenemos

$$(x, y') \in W \circ W \subseteq V.$$

Como $(y', y') \in \triangle_X \subseteq W$, obtenemos que

$$(y', z) \in W \circ W \subseteq V.$$

Se deduce que

$$(x, z) \in V \circ V \subseteq U$$

y por tanto $(p, q) \in U^\sharp$.

Vamos a mostrar ahora que $R_{HX} = \triangle_{HX}$. Claro que $\triangle_{HX} \subseteq R_{HX}$. Supongamos que $(p, q) \in R_{HX} \setminus \triangle_{HX}$. Escogemos que $x \in p$ y $y \in q$. Como $(x, y) \notin R_X$, existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $(x, y) \notin U$. Ahora, existen $V, W \in \mathscr{U}_X$ tales que $V \circ V \subseteq U$ y $W \circ W \subseteq V$. Como $(p, q) \in R_{HX} \subseteq W^\sharp$, existen $x' \in p$ y $y' \in q$ tales que $(x', y') \in W$. Como $(x, x') \in R_X \subseteq W$ y $(y', y) \in R_X \subseteq W$, tenemos $(x, y) \in U$, la contradicción deseada. Por la proposición 1.1, $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ es Hausdorff. □

Definición 1.2. *El espacio $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ se llama **espacio uniforme Hausdorff asociado con** $(X, \mathscr{U}_X)$. (Véase [1, pág. 196], donde se encuentra la construcción alternativa.)*

Proposición 1.4. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme. Entonces la aplicación cociente*

$$q_X : (X, \mathscr{U}_X) \to (HX, \mathscr{U}_{HX})$$

es uniformemente continua. Además, si $A \subseteq X$ es abierto (respectivamente cerrado) en $(X, \mathscr{U}_X)$, entonces $q_X(A)$ es abierto (respectivamente cerrado) en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$.

Demostración. 1. Fijamos $U \in \mathscr{U}_X$. Notemos que si $(x, y) \in U$, entonces $(q_X(x), q_X(y)) \in U^\sharp$. Se deduce que q_X es uniformemente continua.

2. Supongamos que A es abierto en $(X, \mathscr{U}_X)$. Consideremos $p \in q_X(A)$. Existe $x \in A$ tal que $p = q_X(x)$. Como A es abierto, existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $U[x] \subseteq A$. Existe $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Vamos a mostrar que $V^\sharp[p] \subseteq q_X(A)$. Consideremos $p' \in V^\sharp[p]$. Existen $y \in p$ y $x' \in p'$ tales que $(y, x') \in V$. Como $(x, y) \in R_X$, tenemos $(x, x') \in V \circ V \subseteq U$ y por eso $x' \in U[x] \subseteq A$; se deduce que $p' = q_X(x') \in q_X(A)$.

3. Ahora, supongamos que A es cerrado en $(X, \mathscr{U}_X)$. Por la proposición 1.2, $R_X[A] = A$. Se deduce que

$$q_X(A) = HX \setminus q_X(X \setminus A)$$

y por (2) $q_X(A)$ es cerrado en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$.

□

Proposición 1.5. *Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes y $f : X \to Y$ una aplicación uniformemente continua. Entonces existe la única aplicación $Hf : HX \to HY$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ HX \arrow[r, "Hf"] & HY, \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, $Hf : (HX, \mathscr{U}_{HX}) \to (HY, \mathscr{U}_{HY})$ es uniformemente continua.

Demostración. 1. Vamos a mostrar que si $(x, x') \in R_X$, entonces $(f(x), f(x')) \in R_Y$. Fijamos $(x, x') \in R_X$ y consideremos $V \in \mathscr{U}_Y$. Como f es uniformemente continua, existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que para todo $(u, v) \in U$ se cumple $(f(u), f(v)) \in V$. Como $(x, x') \in R_X \subseteq U$, obtenemos que $(f(x), f(x')) \in V$. Se deduce que $(f(x), f(x')) \in R_Y$. Obtenemos que existe la única aplicación $Hf : HX \to HY$ tal que $q_Y \circ f = (Hf) \circ q_X$.

2. Mostraremos ahora que $Hf : HX \to HY$ es uniformemente continua. Consideremos que $V \in \mathscr{U}_Y$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que si $(u, v) \in U$, entonces $(f(u), f(v)) \in V$. Ahora supongamos que $(p, p') \in U^\sharp$. Existen $x \in p$ y $x' \in p'$ tales que $(x, x') \in U$; tenemos $(f(x), f(x')) \in V$ y por eso $((Hf)(p), (Hf)(p')) \in V^\sharp$.

□

Proposición 1.6. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ un subespacio de $(X, \mathscr{U}_X)$, tal que $R_X[Y] = Y$. Entonces $(HY, \mathscr{U}_{HY})$ es un subespacio de $(HX, \mathscr{U}_{HX})$.*

Demostración. 1. Tenemos

$$R_Y = \bigcap_{V \in \mathscr{U}_Y} V = \bigcap_{U \in \mathscr{U}_X} (U \cap Y^2) = R_X \cap Y^2.$$

Como $R_X[Y] = Y$, obtenemos

$$HY = q_X(Y) \subseteq HX.$$

2. Sea $\mathscr{U}'_{HY}$ la uniformidad en HY inducida por la uniformidad $\mathscr{U}_{HX}$; vamos a mostrar que $\mathscr{U}_{HY} = \mathscr{U}'_{HY}$. Como $1_Y : (Y, \mathscr{U}_Y) \to (X, \mathscr{U}_X)$ es uniformemente continua, por la proposición 1.5, $1_{HY} = H1_Y : (HY, \mathscr{U}_{HY}) \to (HX, \mathscr{U}_{HX})$ es uniformemente continua. Se deduce que $\mathscr{U}'_{HY} \subseteq \mathscr{U}_{HY}$. Ahora consideremos $V \in \mathscr{U}_Y$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $V = U \cap Y^2$. Tenemos $U^\sharp \in \mathscr{U}_{HX}$ y por eso $U^\sharp \cap (HY)^2 \in \mathscr{U}'_{HY}$. Además, $U^\sharp \cap (HY)^2 \subseteq V^\sharp$, por que si $(p, p') \in U^\sharp \cap (HY)^2$, entonces existen $x \in p$ y $x' \in p'$ tales que $(x, x') \in U \cap Y^2 = V$ y por eso $(p, p') \in V^\sharp$. Se deduce que $V^\sharp \in \mathscr{U}'_{HY}$. Obtenemos que $\mathscr{U}_{HY} \subseteq \mathscr{U}'_{HY}$.

□

Proposición 1.7. *Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes. Entonces la aplicación*

$$\varphi : (H(X \times Y), \mathscr{U}_{H(X\times Y)}) \to (HX \times HY, \mathscr{U}_{HX\times HY}),$$

$$\varphi(p) = (pr_X(p), pr_Y(p)),$$

es un isomorfismo.

Demostración. 1. Vamos a mostrar que

$$R_{X\times Y} = \{((x, y), (x', y')) : (x, x') \in R_X \text{ y } (y, y') \in R_Y\}.$$

Supongamos que $((x, y), (x', y')) \in R_{X\times Y}$. Como la aplicación

$$pr_X : (X \times Y, \mathscr{U}_{X\times Y}) \to (X, \mathscr{U}_X)$$

es uniformemente continua, por la proposición 1.5,

$$(x, x') = (pr_X(x, y), pr_X(x', y')) \in R_X.$$

Análogamente obtenemos $(y, y') \in R_Y$.

Ahora supongamos que $(x, x') \in R_X$ y $(y, y') \in R_Y$. Consideremos $W \in \mathscr{U}_{X\times Y}$. Existen $U \in \mathscr{U}_X$ y $V \in \mathscr{U}_Y$ tales que $O_{U,V} \subseteq W$, donde

$$O_{U,V} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (x_1, x_2) \in U \text{ y } (y_1, y_2) \in V\}.$$

Como $(x,x') \in U$ y $(y,y') \in V$, obtenemos que

$$((x,y),(x',y')) \in O_{U,V} \subseteq W.$$

Se deduce que

$$((x,y),(x',y')) \in R_{X\times Y}.$$

2. Notemos que la aplicación

$$\varphi : (H(X\times Y), \mathscr{U}_{H(X\times Y)}) \to (HX\times HY, \mathscr{U}_{HX\times HY}),$$

$$\varphi(p) = (pr_X(p), pr_Y(p)),$$

está bien definida y es una biyección. Por la proposición 1.5

$$Hpr_X : H(X\times Y) \to HX,$$

$$Hpr_Y : H(X\times Y) \to HY$$

son uniformemente continuas. Como

$$\begin{array}{rcl} pr_{HX}\circ\varphi & = & Hpr_X, \\ pr_{HY}\circ\varphi & = & Hpr_Y, \end{array}$$

φ es uniformemente continua. Vamos a mostrar ahora que

$$\varphi^{-1} : HX\times HY \to H(X\times Y),$$

$$\varphi^{-1}(p,q) = p\times q,$$

es uniformemente continua. Consideremos $W \in \mathscr{U}_{X\times Y}$. Existen $U \in \mathscr{U}_X$ y $V \in \mathscr{U}_Y$ tales que $O_{U,V} \subseteq W$. Definimos

$$O_{U^\sharp,V^\sharp} = \{((p_1,q_1),(p_2,q_2)) : (p_1,p_2) \in U^\sharp \text{ y } (q_1,q_2) \in V^\sharp\}$$

y notemos que $O_{U^\sharp,V^\sharp} \in \mathscr{U}_{HX\times HY}$. Ahora supongamos que

$$((p_1,q_1),(p_2,q_2)) \in O_{U^\sharp,V^\sharp}.$$

Existen $x_1 \in p_1$, $x_2 \in p_2$, $y_1 \in q_1$ y $y_2 \in q_2$ tales que $(x_1,x_2) \in U$ y $(y_1,y_2) \in V$. Tenemos

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in O_{U,V},$$

$$(x_1,y_1) \in p_1\times q_1 = \varphi^{-1}(p_1,q_1),$$

$$(x_2,y_2) \in p_2\times q_2 = \varphi^{-1}(p_2,q_2),$$

y por eso

$$(\varphi^{-1}(p_1,q_1), \varphi^{-1}(p_2,q_2)) \in (O_{U,V})^\sharp \subseteq W^\sharp.$$

Como φ y φ^{-1} son uniformemente continuas, φ es un isomorfismo de espacios uniformes.

$\square$

Proposición 1.8. *Un espacio uniforme $(X, \mathscr{U}_X)$ es completo si y sólo si $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ es completo.*

Demostración. 1. Supongamos que $(X, \mathscr{U}_X)$ es completo. Sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$. Definimos

$$\mathscr{H} := \{B \subseteq X : \exists A \in \mathscr{F} \text{ tal que } q_X^{-1}(A) \subseteq B\}$$

y notemos que $\mathscr{H}$ es un filtro en X.

Mostraremos ahora que $\mathscr{H}$ es un filtro de Cauchy en $(X, \mathscr{U}_X)$. Sea $U \in \mathscr{U}_X$. Existe $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$. Como $V^\sharp \in \mathscr{U}_{HX}$ y $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A^2 \subseteq V^\sharp$. Consideremos $(x, y) \in (q_X^{-1}(A))^2$. Tenemos

$$(q_X(x), q_X(y)) \in A^2 \subseteq V^\sharp$$

y por eso existen $x' \in q_X(x)$ y $y' \in q_X(y)$ tales que $(x', y') \in V$. Por lo tanto $(x, y) \in U$. Se deduce que

$$(q_X^{-1}(A))^2 \subseteq U.$$

Como $A \in \mathscr{F}$, tenemos $q_X^{-1}(A) \in \mathscr{H}$. Por eso $\mathscr{H}$ es un filtro de Cauchy.

Como $(X, \mathscr{U}_X)$ es completo, existe $x_0 \in X$ tal que $\mathscr{H}$ converge a x_0. Vamos a mostrar que $\mathscr{F}$ converge a $p_0 = q_X(x_0)$. Sea O una vecindad de p_0 en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $U^\sharp[p_0] \subseteq O$. Como $U[x_0]$ es una vecindad de x_0 en $(X, \mathscr{U}_X)$ y $\mathscr{H}$ converge a x_0, se cumple que $U[x_0] \in \mathscr{H}$. Obtenemos que existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $q_X^{-1}(A) \subseteq U[x_0]$. Ahora consideremos $p \in A$. Tenemos $p \subseteq q_X^{-1}(A)$. Escogemos $x \in p$ y notemos que $(x_0, x) \in U$; se deduce que $(p_0, p) \in U^\sharp$ y por eso $p \in O$. Obtenemos que $A \subseteq O$. Como $A \in \mathscr{F}$, tenemos $O \in \mathscr{F}$. Se deduce que $\mathscr{F}$ converge a p_0.

2. Supongamos que $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ es completo. Sea $\mathscr{H}$ un filtro de Cauchy en $(X, \mathscr{U}_X)$. Definimos

$$\mathscr{F} = \{q_X(B) : B \in \mathscr{H}\}$$

y notemos que $\mathscr{F}$ es un filtro en HX.

Mostraremos ahora que $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$. Consideremos $U \in \mathscr{U}_X$. Como $\mathscr{H}$ es filtro de Cauchy, existe $B \in \mathscr{H}$ tal que $B^2 \subseteq U$. Supongamos que $(p, q) \in (q_X(B))^2$. Existe $(x, y) \in B^2$ tal que $p = q_X(x)$ y $q = q_X(y)$. Se deduce que $(p, q) \in U^\sharp$. Por lo tanto

$(q_X(B))^2 \subseteq U^\sharp$. Como $B \in \mathscr{H}$, $q_X(B) \in \mathscr{F}$. Obtenemos que $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy.

Como $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ es completo, existe $p_0 \in HX$ tal que $\mathscr{F}$ converge a p_0. Escogemos $x_0 \in p_0$ y mostraremos que $\mathscr{H}$ converge a x_0. Sea W una vecindad de x_0 en $(X, \mathscr{U}_X)$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $U[x_0] \subseteq W$. Consideremos $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$. Como $V^\sharp[p_0]$ es una vecindad de p_0 en $(HX, \mathscr{U}_{HX})$ y $\mathscr{F}$ converge a p_0, obtenemos $V^\sharp[p_0] \subseteq \mathscr{F}$. Se deduce que existe $B \in \mathscr{H}$ tal que $q_X[B] = V^\sharp[p_0]$. Ahora consideremos $x \in B$. Tenemos $q_X(x) \in V^\sharp[p_0]$ y por eso existen $x' \in q_X(x)$ y $x'_0 \in p_0$ tales que $(x'_0, x') \in V$. Se deduce que $(x_0, x) \in U$ y por eso $x \in W$. Obtenemos que $B \subseteq W$. Como $B \in \mathscr{H}$, tenemos $W \in \mathscr{H}$. Se deduce que $\mathscr{H}$ converge a x_0.

$\square$

Capítulo 2

Extensiones no-estándar de los espacios uniformes

Desde este momento vamos a trabajar en un universo no-estándar κ-saturado fijo $(V(S), V(S'), *)$, donde κ es un cardinal no numerable. [2, pág. 266].

El objetivo de esta sección es presentar los resultados básicos asociados con la operación de la extensión no-estándar de un espacio uniforme [6, pág. 117].

Proposición 2.1. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme, $X \in V(S)\backslash S$. Entonces*

$$\mathscr{U}_{^*X} := \{V \subseteq (^*X)^2 : \exists U \in \mathscr{U}_X \text{ tal que } ^*U \subseteq V\}$$

es una uniformidad en $^*X$.

Demostración.

1. Tenemos $X^2 \in \mathscr{U}_X$ y por eso $(^*X)^2 \in \mathscr{U}_{^*X}$.
2. Consideremos $V \in \mathscr{U}_{^*X}$. Por la definición existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $^*U \subseteq V$. Tenemos
$$\triangle_{^*X} = {^*\triangle_X} \subseteq {^*U} \subseteq V.$$
3. Claro que si $V \in \mathscr{U}_{^*X}$ y $V \subseteq W \subseteq (^*X)^2$, entonces $W \in \mathscr{U}_{^*X}$.
4. Supongamos que $V_1, V_2 \in \mathscr{U}_{^*X}$. Existen $U_1, U_2 \in \mathscr{U}_X$ tales que $^*U_1 \subseteq V_1$ y $^*U_2 \subseteq V_2$. Tenemos $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}_X$ y $^*(U_1 \cap U_2) = {^*U_1} \cap {^*U_2} \subseteq V_1 \cap V_2$; se deduce que $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{U}_{^*X}$.
5. Consideremos $V \in \mathscr{U}_{^*X}$. Existe $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $^*U \subseteq V$. Tenemos $U^{-1} \in \mathscr{U}_X$ y $^*(U^{-1}) = (^*U)^{-1} \subseteq V^{-1}$; se deduce que $V^{-1} \in \mathscr{U}_{^*X}$.

6. Consideremos $V \in \mathscr{U}_{*X}$. Escogemos $U \in \mathscr{U}_X$ tal que ${}^*U \subseteq V$. Existe $W \in \mathscr{U}_X$ tal que $W \circ W \subseteq U$. Tenemos ${}^*W \in \mathscr{U}_{*X}$ y ${}^*W \circ {}^*W = {}^*(W \circ W) \subseteq {}^*U \subseteq V$.

$\square$

Definición 2.1. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un espacio uniforme, $X \in V(S) \setminus S$. Vamos a llamar a un espcacio uniforme $({}^*X, \mathscr{U}_{*X})$* ***la extensión no-estándar*** *de $(X, \mathscr{U}_X)$.*

Proposición 2.2. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ un esapcio uniforme, $V(S) \setminus S$. Entonces la aplicación*

$$i_X : (X, \mathscr{U}_X) \to ({}^*X, \mathscr{U}_{*X}),$$
$$i_X(x) = {}^*x,$$

es un encaje uniforme.

Demostración. 1. Claro que i_X es una biyección entre X y ${}^\sigma X = \{{}^*x : x \in X\} \subseteq {}^*X$.

2. Vamos a mostrar que i_X es uniformemente continua. Sea $V \in \mathscr{U}_{*X}$. Existe $\mathscr{U}_X$ tal que ${}^*U \subseteq V$. Notemos que si $(x, y) \in U$, entonces

$$(i_X(x), i_X(y)) = {}^*(x, y) \in {}^*U \subseteq V.$$

3. Vamos a verificar ahora que $i_X^{-1} : {}^\sigma X \to X$ es uniformemente continua. Sea $\mathscr{U}_{\sigma X}$ inducida por la uniformidad $\mathscr{U}_{*X}$. Sea $U \in \mathscr{U}_X$. Tenemos ${}^*U \in \mathscr{U}_{*X}$ y por eso ${}^*U \cap ({}^\sigma X)^2 \in \mathscr{U}_{\sigma X}$. Supongamos que $(a, b) \in {}^*U \cap ({}^\sigma X)^2$. Existen $x, y \in X$ tales que $a = {}^*x$ y $b = {}^*y$. Tenemos ${}^*(x, y) = (a, b) \in {}^*U$ y por eso $(i_X^{-1}(a), i_X^{-1}(b)) = (x, y) \in U$.

$\square$

Proposición 2.3. *Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes, $X, Y \in V(S) \setminus S$, y $f : (X, \mathscr{U}_X) \to (Y, \mathscr{U}_Y)$ una aplicación uniformemente continua. Entonces*

$${}^*f : ({}^*X, \mathscr{U}_{*X}) \to ({}^*Y, \mathscr{U}_{*Y})$$

es uniformemente continua y tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ {}^*X \arrow[r, "{}^*f"] & {}^*Y, \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. 1. Por el principio de transferencia, para cada $x \in X$ tenemos ${}^*f({}^*X) = {}^*(f(x))$. Se deduce que $i_Y \circ f = {}^*f \circ i_X$.

2. Vamos a verificar que ${}^*f : ({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X}) \to ({}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*Y})$ es uniformemente continua. Sea $W \in \mathscr{U}_{{}^*Y}$. Existe $V \in \mathscr{U}_Y$ tal que ${}^*V \subseteq W$. Como $f : (X, \mathscr{U}_X) \to (Y, \mathscr{U}_Y)$ es uniformemente continua, existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que si $(x_1, x_2) \in U$, entonces $(f(x_1), f(x_2)) \in V$. Tenemos ${}^*U \in \mathscr{U}_{{}^*X}$ y por la transferencia si $(\xi_1, \xi_2) \in {}^*U$, entonces $({}^*f(\xi_1), {}^*f(\xi_2)) \in {}^*V \subseteq W$.

□

Proposición 2.4. *Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes, $X, Y \in V(S) \setminus S$. Entonces*

$$\mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)} = \mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y},$$

donde $\mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}$ es la uniformidad en ${}^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y$ inducida por la uniformidad producto $\mathscr{U}_{(X\times Y)}$ y $\mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y}$ es la uniformidad producto inducida por las uniformidades $\mathscr{U}_{{}^*X}$ y $\mathscr{U}_{{}^*Y}$.

Demostración. 1. Notemos que como

$$pr_X : (X \times Y, \mathscr{U}_{X\times Y}) \to (X, \mathscr{U}_X)$$

es uniformemente continua, por la proposición 2.3

$$pr_{{}^*X} = {}^*pr_X : ({}^*X \times {}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}) \to ({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X})$$

es uniformemente continua. Análogamente,

$$pr_{{}^*Y} = {}^*pr_Y : ({}^*X \times {}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}) \to ({}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*Y})$$

es uniformemente continua. Se deduce que

$${}^*1_{{}^*X\times{}^*Y} : ({}^*X \times {}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}) \to ({}^*X \times {}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y})$$

es uniformemente cotinua y por eso $\mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y} \subseteq \mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}$.

2. Mostraremos ahora que $\mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)} \subseteq \mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y}$. Consideremos $T \in \mathscr{U}_{{}^*(X\times Y)}$. Existe $W \in \mathscr{U}_{X\times Y}$ tal que ${}^*W \subseteq T$. Además, existen $U \in \mathscr{U}_X$ y $V \in \mathscr{U}_Y$ tales que $O_{U,V} \subseteq W$, donde

$$O_{U,V} = \{((x_1, y_1)(x_2, y_2)) : (x_1, x_2) \in U \text{ y } (y_1, y_2) \in V\}.$$

Tenemos que

$${}^*O_{U,V} = \{((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) : (\xi_1, \xi_2) \in {}^*U \text{ y } (\eta_1, \eta_2) \in {}^*V\}.$$

Adamás, tenemos ${}^*U \in \mathscr{U}_{{}^*X}$ y ${}^*V \in \mathscr{U}_{{}^*Y}$ y por eso ${}^*O_{U,V} \in \mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y}$. Como ${}^*O_{U,V} \subseteq {}^*W \subseteq T$, obtenemos que $T \in \mathscr{U}_{{}^*X\times{}^*Y}$.

□

El teorema siguiente era esencialmente mostrado por W.A.Y. Luxemburg [7, Theorem 3.15.1].

Teorema 2.1. *Sea* $(X, \mathscr{U}_X)$ *un espacio uniforme,* $X \in V(X)\setminus S$*. Supongamos que la uniformidad* $\mathscr{U}_X$ *tiene la base de tamaño menor que* κ*. Entonces* $({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X})$ *es completo.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ una base de la uniformidad $\mathscr{U}_X$ tal que $|\mathscr{B}| < \kappa$. Sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en $({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X})$. Para cada $U \in \mathscr{B}$ tenemos ${}^*U \in \mathscr{U}_{{}^*X}$ y por eso existe $A_U \in \mathscr{F}$ tal que $A_U^2 \subseteq {}^*U$. Para cada $U \in \mathscr{B}$ escogemos $\xi_U \in A_U$ y definimos

$$T_U := {}^*(U \circ U)[\xi_U] \subseteq {}^*X.$$

Notemos que cada T_V es interno.

Vamos a mostrar ahora que la familia $(T_U)_{U\in\mathscr{B}}$ es centrada. Consideremos $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{B}$. Definimos $V = U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathscr{U}_X$. Como $\mathscr{B}$ es una base de $\mathscr{U}_X$, existe $W \in \mathscr{B}$ tal que $W \subseteq V$. Notemos que para cada i, $1 \leq i \leq n$, tenemos

$$A_{U_i} \cap A_W \in \mathscr{F}$$

y por eso existe

$$\eta_i \in A_{U_i} \cap A_W;$$

se deduce que

$$\begin{array}{rcccl} (\xi_{U_i}, \eta_i) & \in & A_{U_i} \times A_{U_i} & \subseteq & {}^*U_i, \\ (\eta_i, \xi_W) & \in & A_W \times A_W & \subseteq & {}^*W \subseteq {}^*U_i \end{array}$$

y por eso

$$(\xi_{U_i}, \xi_W) \in {}^*U_i \circ {}^*U_i = {}^*(U_i \circ U_i)$$

y $\xi_W \in {}^*(U_i \circ U_i)[\xi_{U_i}] = T_{U_i}$. Como el universo no-estándar es κ-saturado, existe

$$\varsigma \in \bigcap_{U\in\mathscr{B}} T_U.$$

Vamos a mostrar ahora que $\mathscr{F}$ converge a ς. Sea O una vecindad de ς en $({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X})$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que ${}^*U[\varsigma] \subseteq O$. Consideremos $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$ y $V^{-1} = V$. Escogemos $W \in \mathscr{B}$ tal que $W \subseteq V$. Ahora consideremos $\theta \in A_W$. Notemos que

$$(\xi_W, \theta) \in A_W^2 \subseteq {}^*W \subseteq {}^*V.$$

Como

$$\varsigma \in T_W = {}^*(W \circ W)[\xi_W],$$

Obtenemos
$$(\xi_W, \varsigma) \in {}^*(W \circ W) \subseteq {}^*V \circ {}^*V.$$
Como $V^{-1} = V$, tenemos $({}^*V)^{-1} = {}^*V$ y por eso $(\varsigma, \xi_W) \in {}^*V \circ {}^*V$. Se deduce que
$$(\varsigma, \theta) \in {}^*V \circ {}^*V \circ {}^*V = {}^*(V \circ V \circ V) \subseteq {}^*U$$
y por eso
$$\theta \in {}^*U[\varsigma] \subseteq O.$$
Obtenemos que $A_W \subseteq O$ y como $A_W \in \mathscr{F}$, tenemos $O \in \mathscr{F}$. □

Definición 2.2. *Sea (X, Γ_X) un espacio topológico, $X \in V(S) \setminus S$. Para cada $x \in X$ definimos* ***la monada de*** *x*
$$\mu_X(x) = \bigcap\{{}^*O : x \in O \in \Gamma_X\}.$$

Proposición 2.5. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ espacio uniforme, $X \in V(S) \setminus S$. Entonces para cada $x \in X$*
$$R_{{}^*X}[{}^*x] = \mu_X(x).$$

Demostración. Fijamos $\xi \in R_{{}^*X}[{}^*x]$ y consideremos $O \in \Gamma_X$ tal que $x \in O$. Existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que $U[x] \subseteq O$. Tenemos
$$({}^*x, \xi) \in R_{{}^*X} \subseteq {}^*U$$
y por eso $\xi \in {}^*U[{}^*x] \subseteq {}^*O$. Se deduce que $\xi \in \mu_X(x)$.

Ahora consideremos $\xi \in \mu_X(x)$. Fijamos $V \in \mathscr{U}_{{}^*X}$. Notemos que existe $U \in \mathscr{U}_X$ tal que ${}^*U \subseteq V$. Como $U[x]$ es una vecindad de x, se cumple
$$\xi \in \mu_X(x) \subseteq {}^*(U[x]) = {}^*U[{}^*x]$$
y por eso
$$({}^*x, \xi) \in {}^*U \subseteq V.$$
Obtenemos que $({}^*x, \xi) \in R_{{}^*X}$ y por eso $\xi \in R_{{}^*X}[{}^*x]$. □

Proposición 2.6. *Sea $(X, \mathscr{U}_X)$ espacio uniforme Hausdorff, $X \in V(S) \setminus S$. Entonces la aplicación*
$$j_X : (X, \mathscr{U}_X) \to (H^*X, \mathscr{U}_{H^*X}),$$
$$j_X(x) = \mu_X(x),$$
es un encaje uniforme.

Demostración. Por la proposición 2.5 para cada $x \in X$ se cumple

$$\mu_X(x) = R_{^*X}[^*x] \in \frac{^*X}{R_{^*X}} = H^*X.$$

Vamos a mostrar ahora que j_X es inyectiva. Supongamos que $x, y \in X$ y $x \neq y$. Como $(X, \mathscr{U}_X)$ es Hausdorff, existen $O, W \in \Gamma_X$ tales que $x \in O$, $y \in W$ y $O \cap W = \emptyset$. Obtenemos

$$\mu_X(x) \cap \mu_X(y) \subseteq {}^*O \cap {}^*W = {}^*(O \cap W) = \emptyset$$

y por eso $j_X(x) \neq j_X(y)$. Ahora consideremos $\mathscr{U}_{j_X(X)}$ la uniformidad en $j_X(X) = \{\mu_X(x) : x \in X\}$ inducida por $\mathscr{U}_{H^*X}$ y mostraremos que

$$j_X : (X, \mathscr{U}_X) \to (j_X(X), \mathscr{U}_{j_X(X)})$$

es un isomorfismo de espacios uniformes.

Por la proposición 2.2

$$i_X : (X, \mathscr{U}_X) \to ({}^*X, \mathscr{U}_{^*X}),$$

$$i_X(x) = {}^*x,$$

es uniformemente continua. Por la proposición 1.4

$$q_{^*X} : ({}^*X \mathscr{U}_{^*X}) \to (H^*X, \mathscr{U}_{H^*X}),$$

$$q_{^*X}(\xi) = R_{^*X}[\xi],$$

es uniformemente continua. Se deduce que

$$j_X = q_{^*X} \circ i_X : (X, \mathscr{U}_X) \to (H^*X, \mathscr{U}_{H^*X})$$

es uniformemente continua y por eso

$$j_X : (X, \mathscr{U}_X) \to (j_X(X), \mathscr{U}_{j_X(X)})$$

es uniformemente continua.

Ahora consideremos $U \in \mathscr{U}_X$. Existe $V \in \mathscr{U}_X$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$. Tenemos ${}^*V \in \mathscr{U}_{^*X}$ y por eso $({}^*V)^\sharp \in \mathscr{U}_{H^*X}$ y

$$W := (j_X(X))^2 \cap ({}^*V)^\sharp \in \mathscr{U}_{j_X(X)}.$$

Supongamos ahora que $x, y \in X$ son tales que

$$(j_X(x), j_X(y)) \in W.$$

Existen $\xi \in j_X(x)$ y $\eta \in j_X(y)$ tales que $(\xi, \eta) \in {}^*V$. Como

$$({}^*x, \xi), (\eta, {}^*y) \in R_{{}^*X} \subseteq V,$$

Obtenemos

$$({}^*x, {}^*y) \in {}^*V \circ {}^*V \circ {}^*V \subseteq {}^*U$$

y por eso $(x, y) \in U$. Se deduce que

$$j_X^{-1} : (j_X(X), \mathscr{U}_{j_X(X)}) \to (X, \mathscr{U}_X)$$

es uniformemente continua. $\square$

Proposición 2.7. *Sean $(X, \mathscr{U}_X)$ y $(Y, \mathscr{U}_Y)$ espacios uniformes, $X, Y \in V(S) \setminus S$, y $f : X \to Y$. Supongamos que la uniformidad $\mathscr{U}_X$ tiene la base de tamaño estrictamente menor que κ. Entonces*

$$f : (X, \mathscr{U}_X) \to (Y, \mathscr{U}_Y)$$

es uniformemente continua si y solo si para todo $(\xi, \eta) \in R_{{}^*X}$ se cumple $({}^*f(\xi), {}^*f(\eta)) \in R_{{}^*Y}$.

Demostración. Supongamos que

$$f : (X, \mathscr{U}_X) \to (Y, \mathscr{U}_Y)$$

es uniformemente continua. Por la proposición 2.3

$${}^*f : ({}^*X, \mathscr{U}_{{}^*X}) \to ({}^*Y, \mathscr{U}_{{}^*Y})$$

es uniformemente continua. Por la proposición 1.5 obtenemos que para todo $(\xi, \eta) \in R_{{}^*X}$ se cumple $({}^*f(\xi), {}^*f(\eta)) \in R_{{}^*Y}$.

Para la otra dirección, supongamos que $V \in \mathscr{U}_Y$. Consideremos

$$W := \{(x, y) \in X^2 : (f(x), f(y)) \in V\}$$

y notemos que

$${}^*W = \{(\xi, , \eta) \in ({}^*X)^2 : ({}^*f(\xi), {}^*f(\eta)) \in {}^*V\}.$$

Para todo $(\xi, \eta) \in R_{{}^*X}$ tenemos

$$({}^*f(\xi), {}^*f(\eta)) \in R_{{}^*Y} \subseteq {}^*V$$

y por eso $R_{{}^*X} \subseteq {}^*W$. Sea $\mathscr{B}_X$ una base de la uniformidad $\mathscr{U}_X$ tal que $|\mathscr{B}_X| < \kappa$. Tenemos

$$\bigcap\{{}^*U : U \in \mathscr{B}_X\} = R_{{}^*X} \subseteq {}^*W$$

y por κ-saturación existen

$$U_1, \dots, U_n \in \mathscr{B}_X$$

tales que

$$^*U_1 \cap \dots \cap {}^*U_n \subseteq {}^*W.$$

Definimos

$$U = U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathscr{U}_X$$

y notemos que como $U \subseteq W$, para todo $(x, y) \in U$ se cumple que $(f(x), f(y)) \in V$. Se deduce que

$$f : (X, \mathscr{U}_X) \to (Y, \mathscr{U}_Y)$$

es uniformemente continua. □

Definición 2.3. *[1] Sea (G, Γ) un grupo abeliano topológico. Para cada vecindad abierta O de 0 definimos*

$$U_O := \{(x, y) \in G^2 : x - y \in O\}.$$

*La familia $\mathscr{U}_\Gamma := \{U \subseteq G^2 : \exists O$ vecindad abierta de 0 tal que $U_O \subseteq U\}$ es una uniformidad en G que se llama la **uniformidad canónica** de un grupo abeliano topológico (G, Γ). Notemos que $\mathscr{U}_\Gamma$ induce la topología Γ.*

Proposición 2.8. *Sea (G, Γ) un grupo abeliano topológico, $G \in V(S) \setminus S$. Consideremos la uniformidad $\mathscr{U}_\Gamma$ en G inducida por Γ y una uniformidad $\mathscr{U}^\Gamma_{^*G}$ en $^*G$ inducida por $\mathscr{U}_\Gamma$. Entonces*

$$R^\Gamma_{^*G} = \{(\xi, \eta) \in (^*G)^2 : \xi - \eta \in \mu_G(0)\}.$$

Demostración. Supongamos que $(\xi, \eta) \in R^\Gamma_{^*X}$. Sea $O \in \Gamma$ una vecindad abierta de 0. Tenemos $U_O \in \mathscr{U}_\Gamma$ y por eso

$$^*U_O = \{(\xi, \eta) \in (^*G)^2 : \xi - \eta \in {}^*O\} \in \mathscr{U}^\Gamma_{^*G}.$$

Obtenemos que

$$(\xi, \eta) \in R^\Gamma_{^*G} \subseteq {}^*U_O$$

y por eso $\xi - \eta \in {}^*O$. Se deduce que $\xi - \eta \in \mu_G(0)$.

Ahora supongamos que $(\xi, \eta) \in (^*G)^2$ y $\xi - \eta \in \mu_G(0)$. Consideremos $V \in \mathscr{U}^\Gamma_{^*G}$. Existe $U \in \mathscr{U}_\Gamma$ tal que $^*U \subseteq V$. Además, existe O una vecindad abierta de 0 tal que $U_O \subseteq U$. Tenemos

$$\xi - \eta \in \mu_G(0) \subseteq {}^*O$$

y por eso

$$(\xi, \eta) \in {}^*U_O \subseteq {}^*U \subseteq V.$$

Se deduce que $(\xi, \eta) \in R^\Gamma_{^*G}$. □

Vamos a necesitar la siguiente proposición estándar.

Proposición 2.9. *Sea G un grupo abeliano y $\mathscr{U}_G$ una uniformidad en G tal que las aplicaciones*

$$\begin{array}{lcl} + & : & (G^2, \mathscr{U}_{G^2}) \to (G, \mathscr{U}_G), \\ - & : & (G, \mathscr{U}_G) \to (G, \mathscr{U}_G) \end{array}$$

son uniformemente continuas. Sea Γ una topología en G inducida por la uniformidad $\mathscr{U}_G$. Entonces $\mathscr{U}_G = \mathscr{U}_G^\Gamma$, donde $\mathscr{U}_G^\Gamma$ es la uniformidad canónica de un grupo abeliano topológico (G, Γ).

Demostración. Podemos suponer que $G \in V(S) \setminus S$, donde $(V(S), V(S'), *)$ es un universo no-estándar κ-saturado, y las uniformidades $\mathscr{U}_G$ y $\mathscr{U}_G^\Gamma$ tienen bases de tamaño estrictamente menor que κ. Vamos a verificar que las aplicaciones

$$\begin{array}{lcl} 1_G & : & (G, \mathscr{U}_G) \to (G, \mathscr{U}_G^\Gamma), \\ 1_G & : & (G, \mathscr{U}_G^\Gamma) \to (G, \mathscr{U}_G) \end{array}$$

son uniformemente continuas. Por la proposición 2.7 es suficiente mostrar que $R_{^*G} = R^\Gamma_{^*G}$, donde $R_{^*G}$ y $R^\Gamma_{^*G}$ son relaciones de equivalencia en $^*G$ inducida por las uniformidades $\mathscr{U}_{^*G}$ y $\mathscr{U}^\Gamma_{^*G}$, respectivamente.

Supongamos que $(\xi, \eta) \in R^\Gamma_{^*G}$. Por la proposición 2.8 tenemos

$$\xi - \eta \in \mu_G(0).$$

Por la proposición 2.5 tenemos

$$\mu_G(0) = R_{^*G}[^*0]$$

y por eso

$$(^*0, \xi - \eta) \in R_{^*G}.$$

Por la proposición 2.4 la uniformidad $\mathscr{U}_{(^*G)^2}$ en $(^*G)^2$ inducida por $\mathscr{U}_{G^2}$ coincide con la uniformidad producto inducida por $\mathscr{U}_{^*G}$. Por la proposición 1.7

$$R_{(^*G)^2} = \{((\xi, \eta), (\xi', \eta')) : (\xi, \xi') \in R_{^*G} \text{ y } (\eta, \eta') \in R_{^*G}\}.$$

Notemos que como

$$((^*0, \eta), (\xi - \eta, \eta)) \in R_{(^*G)^2}$$

y la aplicación

$$+ : (G^2, \mathscr{U}_{G^2}) \to (G, \mathscr{U}_G)$$

es uniformemente continua, por la proposición 2.7

$$(\eta, \xi) = (\ ^* + (^*0, \eta), ^* + (\xi - \eta, \eta)) \in R_{^*G}.$$

Ahora supongamos que $(\xi, \eta) \in R_{^*G}$. Como $- : (G, \mathscr{U}_G) \to (G, \mathscr{U}_G)$ es uniformemente continua,

$$(-\xi, -\eta \in R_{^*G}).$$

Como

$$((\xi, -\xi), (\xi, -\eta)) \in R_{(^*G)^2},$$

obtenemos

$$(^*0, \xi - \eta) = (\,^* + (\xi, -\xi), ^* + (\xi, -\eta)) \in R_{^*G}$$

y por eso

$$\xi - \eta \in R_{^*G}[^*0] = \mu_G(0).$$

Se deduce que $(\xi, \eta) \in R^{\Gamma}_{^*G}$. $\square$

Capítulo 3

Envolturas no-estándar de anillos topológicos

Definición 3.1. *Sea A un anillo (asociativo y no necesariamente con 1) y Γ una topología en A. Se dice que (A, Γ) es un* ***anillo topológico*** *si las aplicaciones*

$$\begin{array}{ccl} + & : & A \times A \to A, \\ - & : & A \to A \ y \\ \cdot & : & A \times A \to A \end{array}$$

son continuas. Como (A, Γ) es un grupo abeliano topológico, en A existe la uniformidad canónica $\mathscr{U}_A$ inducida por Γ. (Véase la definición 2.3.)

Definición 3.2. *Sea (A, Γ) un anillo topológico, $A \in V(S) \setminus S$. Definimos*

$$\mathrm{ns}^*A := \bigcup_{x \in A} \mu_A(x),$$

$$\mathrm{fin}^*A = \{\xi \in {}^*A : \ \forall \ \eta \ \in \mu_A(0) \text{ se cumple que } \eta\xi, \xi\eta \in \mu_A(0)\}.$$

Proposición 3.1. *Sean (X, Γ_X) y (Y, Γ_Y) espacios topológicos, $X, Y \in V(S) \setminus S$ y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces para toda $x \in X$*

$$^*f(\mu_X(x)) = \mu_Y(f(x)).$$

Demostración. Sea O una vecindad abierta de $f(x)$. Como $f^{-1}(O)$ es una vecindad abierta de x, obtenemos

$$\mu_X \subseteq {}^*(f^{-1}(O)) = ({}^*f)^{-1}({}^*O)$$

y por eso

$$^*f(\mu_X(x)) \subseteq {}^*O.$$

Se deduce que

$$^*f(\mu_X(x)) \subseteq \mu_Y(f(x)).$$

□

Proposición 3.2. *Sean* (X, Γ_X) *y* (Y, Γ_Y) *espacios topológicos,* $X, Y \in V(S)\setminus S$. *Sea* $\Gamma_{X\times Y}$ *la topología producto en* $X\times Y$. *Entonces para toda* $(x, y) \in X\times Y$ *se cumple*

$$\mu_{X\times Y}(x, y) = \mu_X(x) \times \mu_Y(y).$$

Demostración. Como las proyecciones

$$\begin{array}{rcl} pr_X & : & (X \times Y, \Gamma_{X\times Y}) \to (X, \Gamma_X), \\ pr_Y & : & (X \times Y, \Gamma_{X\times Y}) \to (Y, \Gamma_Y) \end{array}$$

son continuas, por la proposición 3.1

$$\begin{array}{rcl} pr_{^*X}(\mu_{X\times Y}(x, y)) & \subseteq & \mu_X(x), \\ pr_{^*Y}(\mu_{X\times Y}(x, y)) & \subseteq & \mu_Y(y). \end{array}$$

Se deduce que

$$\mu_{X\times Y}(x, y) \subseteq \mu_X(x) \times \mu_Y(y).$$

Ahora consideremos O una vecindad abierta de (x, y). Existen U y V vecindades abiertas de x y y, respectivamente, tales que $U \times V \subseteq O$. Tenemos

$$\mu_X(x) \times \mu_Y(y) \subseteq {}^*U \times {}^*V \subseteq {}^*O.$$

Se deduce que

$$\mu_X(x) \times \mu_Y(y) \subseteq \mu_{X\times Y}(x, y).$$

□

Proposición 3.3. *Sea* (A, Γ) *un anillo topológico. Entonces* ns^*A *y* fin^*A *son subanillos de* $^*A$*, Además,*

$$\mathrm{ns}^*A \subseteq \mathrm{fin}^*A$$

y $\mu_A(0)$ *es un ideal bilateral en* fin^*A.

Demostración. Por la transferencia $^*A$ es un anillo y la aplicación

$$i_A : A \to {}^*A,$$

$$i_A(x) = {}^*x,$$

es un homomorfismo inyectivo de anillos.

Mostraremos que $\mu_A(0)$ es un subanillo de ${}^*A$. Tenemos ${}^*0 \in \mu_A(0)$. Consideremos $\xi, \eta \in \mu_A(0)$. Como la aplicación

$$- : (A, \Gamma_A) \to (A, \Gamma_A)$$

es continua, obtenemos

$$-\eta = {}^*(-)(\eta) \in \mu_A(-0) = \mu_A(0).$$

Como la aplicación

$$+ : (A^2, \Gamma_{A^2}) \to (A, \Gamma_A)$$

es continua y

$$(\xi, -\eta) \in (\mu_A(0))^2 = \mu_{A^2}(0,0),$$

obtenemos

$$\xi - \eta = {}^* + (\xi, -\eta) \in \mu_A(0).$$

Además, como

$$\cdot : (A^2, \Gamma_{A^2}) \to (A, \Gamma_A)$$

es continua y

$$(\xi, \eta) \in (\mu_A(0))^2 = \mu_{A^2}(0,0),$$

se cumple

$$\xi\eta = {}^* \cdot (\xi, \eta) \in \mu_A(0).$$

Mostraremos ahora que $\mu_A(0) \subseteq \text{fin}^*A$. Sea $\xi \in \mu_A(0)$. Consideremos $\varepsilon \in \mu_A(0)$. Tenemos que $\varepsilon\xi, \xi\varepsilon \in \mu_A(0)$. Se deduce que $\xi \in \text{fin}^*A$.

Mostraremos ahora que fin^*A es un subanillo de ${}^*A$. Tenemos

$${}^*0 \in \mu_A(0) \subseteq \text{fin}^*A.$$

Ahora consideremos $\xi, \eta \in \text{fin}^*A$. Fijamos $\varepsilon \in \mu_A(0)$. Tenemos

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon(\xi - \eta) & = & \varepsilon\xi - \varepsilon\eta & \in & \mu_A(0), \\ (\xi - \eta)\varepsilon & = & \xi\varepsilon - \eta\varepsilon & \in & \mu_A(0), \\ \varepsilon(\xi\eta) & = & (\varepsilon\xi)\eta & \in & \mu_A(0), \\ (\xi\eta)\varepsilon & = & \xi(\eta\varepsilon) & \in & \mu_A(0). \end{array}$$

Se deduce que $\xi - \eta, \xi\eta \in \text{fin}^*A$. De la definición de fin^*A obtenemos que $\mu_A(0)$ es un ideal bilateral de fin^*A.

Ahora mostraremos que

$$i_A(A) \subseteq \text{fin}^*A.$$

Fijamos $x \in A$ y consideremos $\varepsilon \in \mu_A(0)$. Tenemos

$$({}^*x, \varepsilon) \in \mu_A(x) \times \mu_A(0) = \mu_{A^2}(x, 0)$$

y por eso

$${}^*x\varepsilon \in \mu_A(0).$$

Análogamente,

$$\varepsilon{}^*x \in \mu_A(0).$$

Se deduce que ${}^*x = i_A(x) \in \mathrm{fin}^*A$.

Vamos a mostrar ahora que

$$\mathrm{ns}^*A = i_A(A) + \mu_A(0).$$

Consideremos $\xi \in \mathrm{ns}^*A$. Existe $x \in A$ tal que $\xi \in \mu_A(x)$. Tenemos

$$-{}^*x \in \mu_A(-x),$$

$$(\xi, -{}^*x) \in \mu_A(x) \times \mu_A(-x) = \mu_{A^2}(x, -x),$$

y por eso

$$\xi - {}^*x \in \ {}^* + (\xi, -{}^*x) \in \mu_A(0).$$

Se deduce que

$$\xi = {}^*x + (\xi - {}^*x) \in i_A(A) + \mu_A(0).$$

Ahora consideremos $x \in A$ y $\varepsilon \in \mu_A(0)$. Como

$$({}^*x, \varepsilon) \in \mu_{A^2}(x, 0),$$

obtenemos

$${}^*x + \varepsilon \in \mu_A(x) \subseteq \mathrm{ns}^*A.$$

Como $i_A(A)$ y $\mu_A(0)$ son subanillos de fin^*A y $\mu_A(0)$ es un ideal bilateral en fin^*A,

$$\mathrm{ns}^*A = i_A(A) + \mu_A(0)$$

es un subanillo de fin^*A. $\square$

Definición 3.3. *Sea (X, Γ) un espacio topológico. Para cada $x \in X$ definimos*

$$\chi_X(x) = \{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ es una base en } x\}.$$

Proposición 3.4. *Sea (G,Γ) un grupo abeliano topológico, $G \in V(S) \setminus S$. Consideremos en*

$$H^*G = \frac{^*G}{\mu_G(0)}$$

la topología inducida por la uniformidad en H^*G. Entonces H^*G es un grupo abeliano topológico. Si G es Hausdorff, entonces la aplicación

$$j : G \to H^*G,$$

$$j(g) = \mu_G(g),$$

es un encaje de grupos topológicos. Además, si $\chi_G(0) < \kappa$, entonces H^*G es un grupo topológico completo.

Demostración.

1. Por la proposición 2.8 tenemos

   $$R_{^*G} = \{(\xi,\eta) \in (^*G)^2 : \xi - \eta \in \mu_G(0)\}.$$

   Notemos que $\mu_G(0)$ es un subgrupo de $^*G$ (véase la demostración de la proposición 3.3). Se deduce que

   $$H^*G = \frac{G}{\mu_G(0)}$$

   tiene la estructura de un grupo abeliano.

2. Vamos a mostrar ahora que las aplicaciones

   $$\begin{aligned} + &: H^*G \times H^*G \to H^*G, \\ - &: H^*G \to H^*G \end{aligned}$$

   son uniformemente continuas. Como la aplicación

   $$+ : G \times G \to G$$

   es uniformemente continua, por la proposición 2.3, la aplicación

   $$^*+ : {}^*(G \times G) \to {}^*G$$

   es uniformemente continua. Por la proposición 2.4, la uniformidad en

   $$^*(G \times G) = {}^*G \times {}^*G$$

   coincide con la uniformidad producto inducida por la uniformidad de $^*G$. Por la proposición 1.7, existe un isomorfismo canónico

   $$H^*G \times H^*G \to H^*(G \times G),$$

$$(\xi + \mu_G(0), \eta + \mu_G(0)) \mapsto (\xi + \mu_G(0)) \times (\eta + \mu_G(0)).$$

Por la proposición 1.5 la aplicación

$$H^*(G \times G) \to H^*G,$$

$$(\xi + \mu_G(0)) \times (\eta + \mu_G(0)) \mapsto \xi + \eta + \mu_G(0),$$

es uniformemente continua. Se deduce que la composición

$$+ : H^*G \times H^*G \to H^*G,$$

$$(\xi + \mu_G(0), \eta + \mu_G(0)) \mapsto \xi + \eta + \mu_G(0),$$

es uniformemente continua.

Como la aplicación

$$- : G \to G$$

es uniformemente continua, la demostración análoga nos da que

$$- : H^*G \to H^*G,$$

$$\xi + \mu_G(0) \mapsto -\xi + \mu_G(0),$$

es uniformemente continua.

3. Consideremos en H^*G la topología inducida por la uniformidad en H^*G. Por la proposición 3.4, H^*G es un grupo abeliano topológico. Además, la uniformidad inducida por la topología de un grupo abeliano topológico H^*G coincide con la uniformidad original.

4. Ahora supongamos que G es Hausdorff. Usando la proposición 2.5, obtenemos que para todo $g \in G$ se cumple

$$\mu_G(g) = R_{{}^*G}[{}^*g] = {}^*g + \mu_G(0).$$

Como G es Hausdorff, si $g, h \in G$ y $g \neq h$, entonces

$$\mu_G(g) \cap \mu_G(h) \neq \emptyset.$$

Se deduce que la aplicación

$$G \to H^*G,$$

$$g \mapsto \mu_G(g),$$

es un encaje de grupos. Además, por la proposición 2.6, esta aplicación es un encaje de espacios uniformes.

5. Vamos a mostrar ahora que $\chi_G(0) < \kappa$. Sea $\mathscr{B}$ una base en 0 tal que $|\mathscr{B}| < \kappa$. Para cada $O \in \mathscr{B}$ definimos

$$U_O := \{(g,h) \in G^2 : g - h \in O\}$$

y notemos que

$$\mathscr{W} := \{U_O : O \in \mathscr{B}\}$$

es una base de la uniformidad de G tal que $|\mathscr{W}| < \kappa$. Por el teorema 2.1, ${}^*G$ es un espacio uniforme completo. Por la proposición 1.8, H^*G es completo también. Se deduce que H^*G es completo como un grupo abeliano topológico.

$\square$

Proposición 3.5. *Sea* (A, Γ_A) *un anillo topológico,* $A \in V(S)\backslash S$ *y* $\chi_A(0) < \kappa$. *Entonces* fin^*A *es cerrado en* ${}^*A$.

Demostración. Vamos a mostrar que ${}^*A \setminus \mathrm{fin}^*A$ es abierto en ${}^*A$. Escogemos $\xi \in {}^*A \setminus \mathrm{fin}^*A$. Existe $\varepsilon \in \mu_A(0)$ tal que $\xi\varepsilon \notin \mu_A(0)$ ó $\varepsilon\xi \notin \mu_A(0)$. Supongamos que $\xi\varepsilon \notin \mu_A(0)$. Existe $V \in \mathscr{U}_A$ tal que $({}^*0, \xi\varepsilon) \notin {}^*V$. Consideremos $W \in \mathscr{U}_A$ tal que $W \circ W \subseteq V$. Ahora, verificaremos que existe $U \in \mathscr{U}_A$ tal que para todo $\eta \in {}^*U[\xi]$ se satisface $\eta\varepsilon \notin {}^*W[{}^*0]$. Supongamos que no existe tal $U \in \mathscr{U}_A$. Como $\chi_A(0) < \kappa$, existe $\mathscr{B}$ una base de 0 tal que $|\mathscr{B}| < \kappa$ y por eso existe $\mathscr{W}$ una base de $\mathscr{U}_A$ tal que $|\mathscr{W}| < \kappa$.

Ahora para cada $U \in \mathscr{W}$ definimos

$$T_U := \{\eta \in {}^*U[\xi] : \eta\varepsilon \in {}^*W[{}^*0]\}$$

y notemos que cada T_U es interno. Verifiquemos ahora que la familia $(T_U)_{U \in \mathscr{W}}$ es centrada. Sean $U_1, \ldots U_n \in \mathscr{W}$. Como $\mathscr{W}$ es una base de $\mathscr{U}_A$, existe $U \in \mathscr{W}$ tal que

$$U \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

Observemos que

$$T_{U_1} \cap \cdots \cap T_{U_n} \supseteq \{\eta \in {}^*U[\xi] : \eta\varepsilon \in {}^*W[{}^*0]\} = T_U \neq \emptyset.$$

Por κ-saturación existe

$$\zeta \in \bigcap_{U \in \mathscr{W}} T_U.$$

Tenemos que para todo $U \in \mathscr{W}$ se cumple $\zeta \in {}^*U[\xi]$ y por tanto $\zeta - \xi \in \mu_A(0)$. Tenemos que $(\zeta - \xi)\varepsilon \in \mu_A(0)$ y por tanto

$$(\zeta\varepsilon, \xi\varepsilon) \in {}^*W.$$

Sea sigue que
$$({}^*0, \xi\varepsilon) \in {}^*W \circ {}^*W \subseteq {}^*V,$$
la contradicción deseada.

Por tanto, exite $U \in \mathscr{U}_A$ tal que para todo $\eta \in {}^*U[\xi]$ se cumple que $\eta\varepsilon \notin {}^*W[{}^*0]$. Con eso tenemos que ${}^*U[\xi] \subseteq {}^*A \setminus \mathrm{fin}^*A$. Como ${}^*U \in U_{{}^*A}$, ${}^*U[\xi]$ es una vecindad de ξ en ${}^*A$. $\square$

Proposición 3.6. *Sea (A, Γ_A) un anillo topológico, $A \in V(S)\backslash S$ y $\chi_A(0) < \kappa$. Consideremos en*
$$E(A) := \frac{\mathrm{fin}^*A}{\mu_A(0)} \subseteq \frac{{}^*A}{\mu_A(0)} = H^*A$$
la topología inducida por la uniformidad en H^*A. Entonces $E(A)$ es un anillo topológico completo. Si A es Hausdorff, entonces
$$A \to E(A),$$
$$x \mapsto \mu_A(x),$$
es un encaje de anillos topológicos.

Demostración. Por la proposición 3.3, fin^*A es un subanillo de ${}^*A$ y $\mu_A(0)$ es un ideal bilateral de fin^*A. Por la proposición 3.5, fin^*A es cerrado en ${}^*A$. Por la proposición 2.5, $E(A)$ es cerrado en H^*A. Se deduce que $E(A)$ es un subgrupo cerrado de un grupo abeliano topológico completo H^*A y por eso es un grupo abeliano abeliano topológico completo con respecto a la topología inducida.

Vamos a mostrar ahora que la aplicación
$$\cdot : E(A) \times E(A) \to E(A)$$
es continua. Para eso consideremos $\xi, \eta \in \mathrm{fin}^*A$ y verifiquemos que $\cdot$ es continua en
$$(\xi + \mu_A(0), \eta + \mu_A(0)).$$
Sea O una vecindad de
$$\xi\eta + \mu_A(0)$$
en $E(A)$. Existe $U \in \mathscr{U}_A$ tal que $({}^*U)^\sharp[\xi\eta + \mu_A(0)] \cap E(A) \subseteq O$. Definimos
$$T := \{(t, s) \in ({}^*A)^2 : ts \in {}^*U[\xi\eta]\}.$$
Notemos que si
$$t \in \xi + \mu_A(0) \text{ y } \ s \in \eta + \mu_A(0),$$

entonces como $t, \eta \in \mathrm{fin}^*A$, $ts - \xi\eta = (t(s-\eta) + (t-\xi)\eta) \in \mu_A(0)$ y por eso

$$ts \in {}^*U[\xi\eta].$$

Se deduce que

$$(\xi + \mu_A(0)) \times (\eta + \mu_A(0)) \subseteq T.$$

Como T es interno y $\chi_A(0) < \kappa$, por κ-saturación existe W una vacindad abierta de 0 en A tal que

$$(\xi + {}^*W) \times (\eta + {}^*W) \subseteq T.$$

Definimos

$$V := \{(x,y) \in A^2 : x - y \in W\} \in \mathscr{U}_A$$

y consideremos $V_1 \in \mathscr{U}_A$ tal que

$$V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subseteq V.$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl} O_\xi & = & ({}^*V_1)^\sharp[\xi + \mu_A(0)] \cap E(A), \\ O_\eta & = & ({}^*V_1)^\sharp[\eta + \mu_A(0)] \cap E(A) \end{array}$$

son vecindades de $\xi + \mu_A(0)$ y $\eta + \mu_A(0)$ en $E(A)$. Ahora consideremos

$$(\xi_1 + \mu_A(0), \eta_1 + \mu_A(0)) \in O_\xi \times O_\eta.$$

Tenemos que

$$\xi_1 - \xi_1, (\eta_1, \eta) \in {}^*V$$

y por eso

$$\xi_1 - \xi, \eta_1 - \eta \in {}^*W.$$

Se deduce que

$$(\xi_1, \eta_1) \in T$$

y $\xi_1, \eta_1 \in {}^*U[\xi\eta]$. Como $\xi_1, \eta_1 \in \mathrm{fin}^*A$, tenemos

$$\xi_1\eta_1 + \mu_A(0) \in E(A).$$

Además,

$$\xi_1\eta_1 + \mu_A(0) \in ({}^*U)^\sharp[\xi\eta + \mu_A(0)]$$

y por eso

$$\xi_1\eta_1 + \mu_A(0) \in O.$$

Se deduce que

$$O_\xi O_\eta \subseteq O.$$

La segunda afirmación es obvia. □

Definición 3.4. *Sea* (A, Γ_A) *un anillo topológico,* $A \in V(S) \setminus S$ *y* $\chi_A(0) < \kappa$. *Vamos a llamar a* $E(A)$ ***la envoltura no-estándar de*** A.

Proposición 3.7. *Sean* (X, Γ_X) *y* (Y, Γ_Y) *espacios topológicos,* $X, Y \in V(S) \setminus S$. *Supongamos que* $f : X \to Y$ *es una aplicación continua y abierta y* $x_0 \in X$ *es tal que* $\chi_X(x_0) < \kappa$. *Entonces*

$$^*f(\mu_X(x_0)) = \mu_Y(f_{x_0}).$$

Demostración. Como f es continua, ontenemos

$$^*f(\mu_X(0)) \subseteq \mu_Y(f(x_0)).$$

Ahora consideremos $\eta \in \mu_Y(f(x_0))$ y supongamos que

$$\eta \notin {}^*f(\mu_X(x_0)).$$

Definimos

$$T := \{\xi \in {}^*X : {}^*f(\xi) = \eta\}$$

y notemos que T es un conjunto interno tal que

$$T \cap \mu_X(x_0) = \emptyset.$$

Como $\chi_X(x_0) < \kappa$, por κ-saturación existe O una vecindad abierta de x_0 tal que

$$T \cap {}^*O = \emptyset.$$

Como $f : X \to Y$ es una aplicación abierta, $f(O)$ es una vecindad abierta de $f(x_0)$ y por eso

$$\eta \in \mu_Y(f(x_0)) \subseteq {}^*(f(O)) = {}^*f({}^*O).$$

Se deduce que existe $\xi \in {}^*O$ tal que ${}^*f(\xi) = \eta$. Tenemos que $\xi \in {}^*O \cap T$, la contradicción deseada. $\square$

Proposición 3.8. *Sean* (A, Γ_A) *y* (B, Γ_B) *anillos topológicos,* $A, B \in V(S) \setminus S$, $\chi_A(0) < \kappa$ *y* $\chi_B(0) < \kappa$. *Supongamos que* $f : A \to B$ *es un homomorfismo continuo y abierto de anillos. Entonces*

$$\begin{array}{rcl} {}^*f(\mu_A(0)) & = & \mu_B(0), \\ {}^*f(\text{fin}^*A) & \subseteq & \text{fin}^*B \end{array}$$

y la aplicación

$$E(f) : E(A) \to E(B),$$

$$\xi + \mu_A(0) \mapsto {}^*f(\xi) + \mu_B(0),$$

es un homomorfismo continuo de anillos.

Demostración. Por la proposición 3.7 tenemos

$$^*f(\mu_A(0)) = \mu_B(0).$$

Mostraremos la inclusión

$$^*f(\mathrm{fin}^*A) \subseteq \mathrm{fin}^*B.$$

Consideremos $\xi \in \mathrm{fin}^*A$. Sea $\delta \in \mu_B(0)$. Existe $\varepsilon \in \mu_A(0)$ tal que $^*f(\varepsilon) = \delta$. Tenemos

$$\begin{aligned} ^*f(\xi)\delta &= {^*f(\xi)}{^*f(\varepsilon)} \\ &= {^*f(\xi\varepsilon)} \in \mu_B(0). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\delta^*f(\xi) \in \mu_B(0)$$

y por eso $^*f(\xi) \in \mathrm{fin}^*B$. Como $f : A \to B$ es un homomorfismo de grupos abelianos, por las proposiciones 2.5 y 1.5, la aplicación

$$H^*A \to H^*B,$$

$$\xi + \mu_A(0) \mapsto {^*f(\xi)} + \mu_B(0),$$

es un homomorfismo continuo de grupos abelianos. Se deduce que

$$E(f) : E(A) \to E(B)$$

es un homomorfismo continuo de anillos topológicos. □

Ejemplo 1. *Vamos a mostrar que la envoltura no-estándar de un anillo topológico (A, Γ_A) en general depende del universo no-estándar. Sea $A = C[0,1]$ el espacio de todas las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la topología inducida por la norma canónica. Escogemos $N \in {^*\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}$ y para cada n, $0 \leq n \leq N$, sea $f_n \in {^*C}[0,1]$ una función tal que f_n es lineal en cada trozo $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$ $(0 \leq n \leq N)$, $f_n(\frac{n}{N}) = 1$ y $f_n(x) = 0$ si $|x - \frac{n}{N}| \geq \frac{1}{N}$.*

Definimos

$$g_n = f_n + \mu_A(0) \in E(A) \ (0 \leq n \leq N)$$

y notemos que si $0 \leq n \leq m \leq N$, entonces $g_n \neq g_m$. Como el conjunto

$$\{n : 0 \leq n \leq N\}$$

es interno e infinito, por κ-saturación, su cardinalidad es $\geq \kappa$. Se deduce que

$$|E(A)| \geq \kappa.$$

Ejemplo 2. *Sea K un anillo de división, $K \in V(S) \setminus S$ y $\chi_K(0) < \kappa$. Supongamos que A es un valor absoluto en K, es decir, $A : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es tal que para todo $x, y \in K$ se cumplen las propiedades siguientes:*

1. $A(x) = 0$ *si y solo si* $x = 0$;
2. $A(x + y) \leq A(x) + A(y)$;
3. $A(xy) = A(x)A(y)$.

Es fácil verificar que la función

$$d : K \times K \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$d(x, y) = A(x - y),$$

es una métrica en K y K es un anillo topológico con respecto a la topología inducida por la métrica d. (Véase [5]).

Mostraremos ahora que

$$\mathrm{fin}^*K = \{\xi \in {}^*K : {}^*A(\xi) \in \mathrm{fin}^*\mathbb{R}\},$$

donde

$$\mathrm{fin}^*\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} {}^*[-x, x].$$

Supongamos que $\xi \in \mathrm{fin}^*K$ pero ${}^*A(\xi) \notin \mathrm{fin}^*\mathbb{R}$. Tenemos que $\xi \neq 0$ y como ${}^*A(1) = 1$, tenemos

$${}^*A(\xi^{-1}) = \frac{1}{{}^*A(\xi)} \in \mu_{\mathbb{R}}(0).$$

Se deduce que

$${}^*d(\xi^{-1}, {}^*0) \in \mu_{\mathbb{R}}(0)$$

y por eso

$$\xi^{-1} \in \mu_K(0).$$

Como $\xi \in \mathrm{fin}^*K$, obtenemos

$$1 = \xi\xi^{-1} \in \mu_K(0).$$

Pero como K es Haudorff y $1 \neq 0$, tenemos

$$\mu_K(1) \cap \mu_K(0) = \emptyset,$$

la contradicción deseada.

Ahora supongamos que $\xi \in {}^*K$ *es tal que* ${}^*A(\xi) \in \mathrm{fin}^*\mathbb{R}$. *Consideremos* $\varepsilon \in \mu_K(0)$. *Tenemos que*

$$ {}^*A(\varepsilon) = {}^*d(\varepsilon, {}^*0) \in \mu_{\mathbb{R}}(0) $$

y por eso

$$ {}^*A(\varepsilon\xi) = {}^*A(\varepsilon){}^*A(\xi) \in \mu_{\mathbb{R}}(0) $$

y también ${}^*A(\xi\varepsilon) \in \mu_{\mathbb{R}}(0)$. *Se deduce que* $\varepsilon\xi, \xi\varepsilon \in \mu_K(0)$. *Por eso* $\xi \in \mathrm{fin}^*K$.

Notemos que

$$ E(K) = \frac{\mathrm{fin}^*K}{\mu_K(0)} $$

es un anillo de división por que si $\xi \in \mathrm{fin}^*K \setminus \mu_K(0)$, *entonces* ${}^*A(\xi) \in \mathrm{fin}^*\mathbb{R} \setminus \mu_{\mathbb{R}}(0)$ *y por eso* ${}^*A(\xi^{-1}) \in \mathrm{fin}^*\mathbb{R} \setminus \mu_{\mathbb{R}}(0)$ *y* $\xi^{-1} \in \mathrm{fin}^*K$. *Además, la aplicación*

$$ \widehat{A} : E(K) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, $$

$$ \widehat{A}(\xi + \mu_K(0)) = st^*A(\xi), $$

está bien definida y es un valor absoluto en $E(K)$. *(Aquí* $st : \mathrm{fin}^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la aplicación de la parte estándar,* $st(t) = x$ *si* $t \in \mu_{\mathbb{R}}(x)$*).*

Para mostrarlo, notemos que si $\xi, \eta \in \mathrm{fin}^*K$ *y*

$$ \xi + \mu_K(0) = \eta + \mu_K(0), $$

entonces $\eta - \xi \in \mu_K(0)$ *y por eso* ${}^*A(\eta - \xi) \in \mu_{\mathbb{R}}(0)$ *y como*

$$ |{}^*A(\eta) - {}^*A(\xi)| \leq {}^*A(\eta - \xi), $$

tenemos

$$ st({}^*A(\eta)) = st({}^*A(\xi)). $$

Las propiedades (1)-(3) de un valor absoluto se verifican en la manera directa.

Mostraremos ahora que la topología de $E(K)$ *coincide con la topología inducida por el valor absoluto* $\widehat{A}$. *Como* $E(K)$ *es un anillo topológico con repecto a las dos topologías, es suficiente mostrar que los filtros de vecindades de* 0 *son iguales.*

Sea O *una vecindad de* 0 *en* $E(K)$. *Existe* $U \in \mathscr{U}_K$ *tal que*

$$ ({}^*U)^\sharp[\mu_K(0)] \cap E(K) \subseteq O. $$

Como $U[0]$ *es una vecindad de* 0 *en* K, *existe* $r > 0$ *tal que*

$$ \{x \in K : A(x) < r\} \subseteq U[0]. $$

Supongamos ahora que $\xi \in \mathrm{fin}^*K$ *es tal que*

$$\widehat{A}(\xi + \mu_K(0)) < r.$$

Tenemos ${}^*A(\xi) < r$ *y por eso* $\xi \in {}^*U[{}^*0]$*; se deduce que*

$$(\mu_K(0), \xi + \mu_K(0)) \in ({}^*U)^\sharp$$

y por eso

$$\xi + \mu_K(0) \subseteq O.$$

Se deduce que O *es una vecindad de* 0 *en* $E(K)$ *con respecto a la topología inducida por* $\widehat{A}$.

Ahora consideremos $r > 0$ *y*

$$W = \{p \in E(K) : \widehat{A}(p) < r\}.$$

Notemos que

$$U = \{(x, y) \in K^2 : A(x - y) \in \frac{r}{2}\} \in \mathscr{U}_K$$

y por eso

$$O = ({}^*U)^\sharp[\mu_K(0)] \cap E(K)$$

es una vecindad de 0 *en* $E(K)$*. Si* $\xi \in \mathrm{fin}^*K$ *es tal que* $\xi + \mu_K(0) \in O$*, entonces existen* $\varepsilon \in \mu_K(0)$ *y* $\eta \in \xi + \mu_K(0)$ *tales que* $(\varepsilon, \eta) \in {}^*U$*. Se deduce que*

$${}^*A(\eta) \leq {}^*A(\varepsilon) + {}^*A(\eta - \varepsilon) < r$$

y por eso

$$\xi + \mu_K(0) = \eta + \mu_K(0) \in W.$$

Se deduce que W *es una vecindad abierta de* 0 *en* $E(K)$.

Definición 3.5. *[5] Sea* (A, Γ_A) *anillo topológico. Se dice que* $B \subseteq A$ *es* ***acotado*** *si para cada vecindad* O *de* 0 *existe* W *una vecindad de* 0 *tal que*

$$B \cdot W \subseteq O, \ W \cdot B \subseteq O.$$

Definición 3.6. *[5] Sea* K *un anillo de división y* Γ_K *una topología en* K *tal que* (K, Γ_K) *es un anillo topológico Hausdorff. Se dice que* (K, Γ_K) *es un anillo de división* ***localmente retroacotado*** *si para cada vecindad* O *de* 0 *en* (K, Γ) *el conjunto* $(K \setminus O)^{-1}$ *es acotado.*

Proposición 3.9. *Sea* (A, Γ_A) *un anillo topológico,* $A \in V(S)\backslash S$ *y* $\chi_A(0) < \kappa$*. Entonces* $B \subseteq A$ *es acotado si y solo si* ${}^*B \subseteq \mathrm{fin}^*A$.

Demostración. Supongamos que $B \subseteq A$ es acotado pero existe $\xi \in {}^*B$ tal que $\xi \notin \mathrm{fin}^*A$. Existe $\varepsilon \in \mu_A(0)$ tal que $\varepsilon\xi \notin \mu_A(0)$ ó $\xi\varepsilon \notin \mu_A(0)$. Supongamos que $\varepsilon\xi \notin \mu_A(0)$. Existe O una vecindad de 0 en A tal que $\varepsilon\xi \notin {}^*O$. Como B es acotado, existe W una vecindad de 0 tal que $W \cdot B \subseteq O$. Tenemos

$$\varepsilon\xi \in {}^*W \cdot {}^*B = {}^*(W \cdot B) \subseteq {}^*O,$$

la contradicción deseada.

Ahora supongamos que ${}^*B \subseteq \mathrm{fin}^*A$. Sea O una vecindad de 0. Supongamos que para cada W vecindad de 0 se cumple

$$(W \cdot B) \setminus O \neq \emptyset.$$

Sea $\mathscr{B}$ una base de la topología en 0 tal que $|\mathscr{B}| < \kappa$. Para cada $W \in \mathscr{B}$ definimos

$$T_W := \{(\xi, \eta) \in {}^*W \times {}^*B : \xi\eta \notin {}^*O\}.$$

Notemos que cada T_W es un conjunto interno. Mostraremos ahora que la familia

$$(T_W)_{W \in \mathscr{B}}$$

es centrada. Consideremos

$$W_1, \ldots, W_n \in \mathscr{B}$$

y consideremos $(W \cdot B) \setminus O \neq \emptyset$, tenemos

$$T_{W_1} \cap \cdots \cap T_{W_n} \supseteq T_W \neq \emptyset.$$

Por κ-saturación existe

$$(\xi, \eta) \in \bigcap_{W \in \mathscr{B}} T_W.$$

Notemos que $\xi \in \mu_A(0)$ y $\eta \in {}^*B \subseteq \mathrm{fin}^*A$ y por eso $\varepsilon\eta \in \mu_A(0) \subseteq {}^*O$, la contradicción deseada. □

Teorema 3.1. *Sea (K, Γ_K) un anillo de división localmente retroacotado, $K \in V(S) \setminus S$ y $\chi_K(0) < \kappa$. Entonces $E(A)$ es un anillo de división.*

Demostración. Como (K, Γ_K) es Hausdorff, tenemos $1 \notin \mu_K(0)$.

Supongamos ahora que $\xi \in \mathrm{fin}^*K \setminus \mu_K(0)$. Exsite O una vecindad de 0 en K tal que $\xi \notin {}^*O$. Como $(K \setminus O)^{-1}$ es acotado, por la proposición 3.9,

$$\xi^{-1} \in {}^*((K \setminus O)^{-1}) \subseteq \mathrm{fin}^*K.$$

Se deduce que $\xi + \mu_K(0)$ es invertible en $E(K)$. □

Bibliografía

[1] Bourbaki, N. *General Topology, Part 1.* Hermann, 1966.

[2] Chang, C. C., Keisler, H. J. *Model Theory, 3rd ed.* North-Holland, 1990.

[3] Lindstrøm, T. *An invitation to nonstandard analysis.* In: Nonstandard analysis and its applications (ed. N. Cutland), London Mathematical Society Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988, 1 – 105.

[4] Robinson, A. *Non-standard analysis.* North-Holland, 1966.

[5] Warner, S. *Topological rings* North Holland, 1993.

[6] Henson, C. W. *The nonstandard hull of a uniform space.* Pacific J. Math. 43 (1972), 115 – 137.

[7] Luxemburg, W. A. J. *A general theory of monads.* In: Applications of model theory to algebra, analysis, and probability, ed. by W. A. J. Luxemburg, Holt, Rinehart and Winston, 1969.