UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN LINEAL DE UNA VARIABLE, PARA ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL. UN ESTUDIO DE CASO.

Tesis para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato

Presenta:

L.M.E Javier Alan Torres Quevedo

Directoras de tesis:

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Solange Roa Fuentes

Zacatecas, Zac., 30 de octubre de 2020

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) POR SU APOYO Y PATROCINIO EN LA REALIZACIÓN DE ESTE PROYECTO DE DESARROLLO PROFESIONAL.

BECARIO Nº 923601

Dedicatoria y Agradecimientos

Un conjunto de elementos diversos enfocados en un mismo objetivo, dan como resultado un trabajo bien hecho. El esfuerzo, constancia y el apoyo de muchas personas hicieron posible otro logro en mi proceso de formación, en este caso para concluir mi etapa como estudiante de maestría.

En primer lugar, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mi familia, mis padres Javier Torres Marceleño y Luz María Quevedo Ramírez; y hermanos Yair y Viridiana, por siempre creer en mí y ser el motor que me impulsa a lograr todas mis metas, que sin su apoyo tanto moral como económico y el amor que me demuestran cada día no hubiese podido completar esta otra de mi vida, este y cada uno de mis logros es por y para ustedes.

Agradecer a Evelyn Escalante por el apoyo en cualquier situación, el tiempo compartido, confianza y todo lo que me ha enseñado a lo largo de este tiempo que tenemos de coincidir en este camino.

A mi asesoras la Dra. Darly Alina Kú Euán y la Dra. Solange Roa Fuentes, por aceptar este compromiso, compartirme su conocimiento en muchos aspectos y dedicarle tiempo a esta investigación, para tener como resultado un buen trabajo.

Además, un agradecimiento al Instituto para Ciegos y Débiles Visuales (IPACIDEVI) por siempre mostrar disposición con el proyecto y las facilidades que nos proporcionaron. De igual forma, a los alumnos que nos apoyaron durante la investigación.

Por último, a mis amigos y profesores del programa de Maestría, que de alguna manera han influido en mí y me han apoyado cuando lo he necesitado.

Este trabajo ha sido posible gracias a ustedes.

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 12 del mes de agosto del año 2020, el que suscribe Javier Alan Torres Quevedo alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 38192758; manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado "Aprendizaje del concepto de Ecuación lineal de una variable, para estudiantes con discapacidad visual. Un estudio de caso" bajo la dirección de la Dra. Darly Alina Kú Euán y la Dra. Solange Roa Fuentes.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Javier Alan Torres Quevedo

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "Aprendizaje del concepto de Ecuación lineal de una variable, para estudiantes con discapacidad visual. Un estudio de caso" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por el C. Javier Alan Torres Quevedo, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 12 de agosto de 2020

Nombre y Firma del o los Asesores

Dra. Darly Alina Kú Euán

Dra. Solange Roa Fuentes

Índice

Índice de Figuras y Tablas

Resumen

El presente documento se enfoca en el aprendizaje del concepto de ecuación lineal, en alumnos con Discapacidad Visual (DV) del nivel medio superior en México, a partir del uso de material didáctico concreto. El interés en realizar esta investigación nace de mí experiencia con alumnos ciegos o con baja visión, que continuamente se enfrentan a retos en el aula de matemáticas, en particular las dificultades al aprender el concepto de ecuación lineal, así como realizar operaciones algebraicas.

Lo anterior sumado con otros aspectos, puede generar la exclusión de estos estudiantes, por lo tanto, el objetivo de esta investigación es describir las construcciones y mecanismos mentales que manifiestan los alumnos con discapacidad visual sobre el concepto de ecuación lineal, a partir del uso de material didáctico concreto. Para llevar a cabo el trabajo de investigación, utilizamos como marco referencial la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) y el conocimiento referente a la Discapacidad Visual. De acuerdo a ello, se realizó un análisis teórico del concepto de interés, después se procedió con el diseño y aplicación de una entrevista, asi como el diseño de una secuencia didáctica y material didáctico concreto, por último se procedió a realizar un análisis de los datos obtenidos de la aplicación de la secuencia didáctica.

Con base en ello, se concluyó que los estudiantes con discapacidad visual pueden aprender el concepto de ecuación lineal de una variable, a partir de una secuencia didáctica en conjunto con un material didáctico que fomente las construcciones mentales necesarias en los alumnos con DV. Asimismo el modelo cognitivo para la comprensión del concepto de ecuación lineal de una variable basado en la teoría APOE, permitió desarrollar actividades y un material concreto, con el fin de que los estudiantes ciegos o con baja visión puedan desarrollar estructuras y mecanismos mentales similares a las de alguien normovisual, y por lo tanto tengan las mismas posibilidades de adquirir el conocimiento esperado.

Palabras clave: Material didáctico concreto, Teoría APOE, Construcciones mentales, Alumnos ciegos y con baja visión.

Introducción

Actualmente, en los diferentes niveles educativos existen generaciones con alumnos ciegos y con baja visión, así como con otras discapacidades (Gobierno del estado de Zacatecas, 2019), esto debido a las actuales políticas educativas las cuales mencionan que todas las personas pueden acceder a las aulas de cualquier institución educativa. Por lo tanto, se les debe brindar educación por igual, como se estipula políticamente en UNESCO (2008), sin embargo, el personal de las escuelas en México no está preparado para brindar atención a todos los estudiantes como se esperaría.

Un ejemplo podría ser el caso en un salón de clases donde hay un alumno sordo, al que no se le ofrece el apoyo educativo que requiere, debido a que el profesor no está preparado para este tipo de retos. Se obtiene como resultado, que el estudiante recurra a buscar instituciones donde se les proporcione una mejor atención o abandone los estudios.

Aunado a eso, los estudiantes deben enfrentarse al aprendizaje de todas las materias, aceptando los retos que cada una trae consigo, por ejemplo, en el área de matemáticas, específicamente en álgebra, en la cual los estudiantes han mostrado tener dificultades cuando buscan adquirir el conocimiento de conceptos referentes a ella (Ruano, Socas y Palarea, 2008). Por lo tanto, puede generar rechazo en algunos estudiantes, además, está el hecho de que los conceptos matemáticos se vuelven más abstractos conforme se accede al siguiente nivel académico.

El trabajo de esta tesis de maestría se ha estructurado en los siguientes capítulos:

En el **Capítulo 1** se plantea la motivación de la investigación, después se realiza una descripción del estudio bibliográfico sobre las aportaciones hechas en torno al pensamiento algebraico, y por otro lado se describen los trabajos que abordan la enseñanza de las matemáticas con estudiantes que tienen discapacidad visual. A partir de eso, se exponen la problemática y problema que se van abordar en este trabajo de investigación, seguido de la pregunta de investigación, objetivo general, objetivos particulares y la justificación.

Posteriormente en el **Capítulo 2** se desarrollan las teorías que sustentan la presente investigación, comenzando con lo referente a la discapacidad visual, tomando en cuenta sus características principales así como lo referente al sistema Braille y sus relaciones e intervenciones en el aprendizaje de los estudiantes. Continuamos con la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE), la cual está enfocada a la parte cognitiva de los estudiantes, es decir, el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Seguidamente, en el **Capítulo 3** se muestran los elementos metodológicos, se precisa el tipo de estudio, la población, los métodos, técnicas e instrumentos, que corresponden a la teoría APOE, generadas por su ciclo de investigación modificado.

Posteriormente en el **Capítulo 4** se desarrollan los componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE: 1) Análisis teórico, del cual surge la descomposición genética; 2) Diseño y aplicación de instrumentos; y 3) Análisis y verificación de los datos.

Por último, en el **Capítulo 5** se presentan las conclusiones de la investigación, tomando en cuenta las construcciones y mecanismos de conocimiento que tiene el estudiante con base en la teoría APOE, asimismo, nos enfocamos en la relevancia de lo realizado en el contexto de la discapacidad visual, entre otros aspectos.

Capítulo 1. Planteamiento del Problema de Investigación

En este capítulo se describe la motivación que llevó a cabo esta investigación, además se plantean los antecedentes del tema de interés, haciendo una clasificación en dos grupos, los primeros enfocados al pensamiento matemático que desarrollan los estudiantes; y el segundo centrado en cómo es que se propone enseñar matemáticas a estudiantes con discapacidad visual. Asimismo, se aborda la problemática, el problema, la pregunta de investigación, los objetivos y la justificación de la misma.

1.1 Motivación

Existen una diversidad de razones que me motivan a llevar a cabo la presente investigación, el mayor detonante fue un acercamiento con personas con Discapacidad Visual, durante un periodo de aproximadamente tres años, en un instituto educativo de educación especial, enfocado en personas ciegas y con baja visión, donde me desempeñé como profesor en los niveles medio superior, secundaria yprimaria con grupos multigrado.

Durante la experiencia desarrollada, es imposible no darse cuenta de las limitaciones que pueden tener los alumnos ciegos o con baja visión al aprender matemáticas, debido a que algunos contenidos se presentan de manera visual o no existe material adaptado para ellos. Asimismo, conocer las historias de algunos que sufrieron de exclusión por pertenecer a instituciones regulares, con docentes que no cuentan con la capacitación suficiente para atender sus necesidades. Es aquí donde surge el interés y la preocupación por contribuir a esta problemática y apoyar tanto a docentes como estudiantes.

En los tres años pudimos notar no sólo las dificultades, sino las potencialidades que tienen estos estudiantes, en ámbitos como el académico y el deportivo. Entonces, surge la idea de que ellos pueden llevar a cabo lo que hace cualquier persona de su edad siempre y cuando se le faciliten herramientas que solventen los obstáculos que la discapacidad visual trae consigo.

Aunado a esto, los estudiantes con discapacidad visual deben aprender a leer y escribir en braille, el cual es un alfabeto donde el espacio utilizado al escribir con la regleta y punzón, es mayor que al escribir con lápiz. Por lo que se agrega al reto de aprender matemáticas, debido a que no pueden borrar al tomar notas de esta materia, apuntar alguna operación aritmética o algebraica, además implica el uso del cálculo mental para realizar operaciones, ya que no les da la oportunidad de escribir sus pasos y el resultado.

Es importante mencionar que esto no sólo beneficia a los estudiantes, pues cuando se intenta brindar apoyo a un alumno con estas características en un aula regular, el docente también se enfrenta a retos, pues es su responsabilidad que todos los alumnos aprendan, por lo que hacer investigaciones al respecto les proporciona material y recomendaciones que ellos pueden utilizar.

Se vuelve necesario que exista un cambio tanto en la sociedad como en las instituciones educativas, no sólo tener a un alumno ciego o con baja visión sentado escuchando la clase, sino que se debe verificar que aprenda como el resto de sus compañeros y que se sienta parte de esa sociedad, por lo que sensibilizar se vuelve una tarea importante.

Cada una de las personas que he conocido en ese periodo de tiempo, se conviertieron en una motivación para hacer esta investigación, por lo que mi objetivo es tratar de brindarles una herramienta que pueda facilitar su aprendizaje en matemáticas, y con la cual se puedan reducir las dificultades a las cuales se enfrentan, y que en algunos casos los orilla a abandonar los estudios.

1.2 Antecedentes

En este apartado se describen los antecedentes relacionados con este trabajo de investigación. En primer lugar se presenta un apartado sobre el pensamiento algebraico, en donde se pretende destacar la importancia del pensamiento algebraico en el aprendizaje de las matemáticas, y las dificultades que trae consigo para los estudiantes. Por último, se muestran los trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en alumnos con discapacidad visual (DV), resaltando las propuestas de enseñanza que se han utilizado para el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes ciegos o con baja visión, así como los efectos que éstas han tenido en el aprendizaje de los estudiantes y sus implicaciones.

1.2.1 Pensamiento algebraico

Palarea y Socas (1994) mencionan que los conceptos matemáticos que están relacionados con el álgebra traen consigo dificultades y conflictos para los alumnos, incluso la propia organización curricular lo evidencia al implicar un orden. Hay errores que son de naturaleza algebraica, por ejemplo, se menciona el significado del signo igual en el tránsito de la aritmética al álgebra. Por otra parte, relacionan el pensar algebraicamente con el ser consciente de procesos y saber operarlos, manejar lo desconocido, ver lo general en lo particular e invertir y deshacer operaciones.

Posteriormente, Socas, Camacho y Hernández (1998) reafirman que el aprendizaje del álgebra da lugar a múltiples dificultades para los estudiantes, las cuales tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, los procesos de pensamiento algebraico y el desarrollo cognitivo, sin embargo, mencionan que estas dificultades son parte de la construcción del conocimiento matemático. De igual manera, afirman que los contenidos matemáticos que forman parte del currículo permiten desarrollar capacidades generales en los alumnos.

Asimismo, Medina (1999) destaca conflictos relacionados con la complejidad de los objetos en álgebra, procesos de pensamiento algebraico y desarrollo cognitivo de los alumnos, lo referente a su enseñanza y lo alusivo a actitudes afectivas y emocionales. También menciona el signo igual como una de las dificultades pues a pesar de que es la misma representación utilizada en la aritmética, en el álgebra puede tomar diferentes significados, por lo tanto, es necesario que haya un reconocimiento de la naturaleza de cada símbolo.

Por su parte, Gavilán (2011) resalta que el álgebra produce un cambio en el pensamiento de los estudiantes, debido a que existen diferencias en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Además, sostiene que en los niveles educativos en donde se comienza a estudiar álgebra es donde hay más fracaso escolar, considerando que existe un desfase entre lo que pueden hacer y lo que se les pide en la materia, tomando en cuenta el planteamiento y solución de ecuaciones como una de las dificultades.

De igual forma, Gerván (2013) hace notar la introducción al álgebra de ecuaciones como uno de los principales desafíos para alumnos que cursan el nivel medio superior debido al cambio de conceptos, tomando en cuenta el contexto histórico y espacial, ya que con base en eso los estudiantes interpretan los objetos matemáticos. Concluye que es necesario que se forme el pensamiento algebraico como una herramienta para poder enfrentarse a diversas situaciones problemáticas.

Es común que los alumnos presenten dificultades en el estudio del álgebra, debido al cambio de procesos y reglas, sin embargo, es importante que se tengan buenos conocimientos previos y de ser posible se inicie con el pensamiento algebraico desde la educación primaria. Fuentes (2016) resalta que estos conflictos parten de procesos cognitivos, pues no hay una relación entre lo que se sabe y lo nuevo que se plantea, tomando como ejemplo el signo igual que es utilizado en diferentes sentidos en el álgebra y la aritmética.

De las investigaciones mencionadas, fijamos nuestra atención en las dificultades que tienen los estudiantes al aprender álgebra, de las cuales se destaca la transición de la aritmética al álgebra, asimismo se destaca el hecho de que los conceptos sean más abstractos o adquieran significados y usos que no se tenían (Palarea y Socas, 1994). También, se menciona que comenzar a aprender álgebra trae consigo un cambio en el pensamiento y en el desarrollo cognitivo, llegando a involucrar actitudes afectivas y emocionales (Medina, 1999).

Aunado a lo anterior, se menciona que en los niveles donde se comienzan a enseñar temas de álgebra hay mayor índice de fracaso escolar (Gavilán, 2011). Asimismo, se mencionan algunos procedimientos y temas que suelen ocasionar dificultades como lo es el signo igual, que adquiere otro enfoque en álgebra que es diferente al que se tenía en aritmética, también está el caso del planteamiento y solución de ecuaciones, considerado como uno de los principales desafíos para los estudiantes de nivel medio superior (Fuentes, 2016; Medina, 1999; Gavilán, 2011; Gerván, 2013).

Conforme a lo descrito anteriormente, en esta investigación nos centramos en la materia de álgebra y en específico del concepto de ecuación lineal de una variable, con estudiantes que tienen DV y que se encuentran cursando el bachillerato.

En la literatura sobre el pensamiento algebraico se plantean dificultades relacionados con estudiantes normovisuales, sin embargo en el caso de los estudiantes ciegos o con baja visión, Fernández (1986) menciona que la DV no afecta en la parte mental y cognitiva a las personas, por lo tanto, pueden aprender álgebra como cualquier otra persona, pero haciendo las modificaciones adecuadas para la enseñanza de la misma. También, destaca que una persona ciega puede crearse imágenes a partir del resto de sus sentidos y que en ocasiones suelen ser más precisas que las obtenidas sólo por la vista.

Las personas ciegas o con baja visión, constantemente se enfrentan a diferentes retos cuando se encuentran en un contexto escolar, Bermejo, Fajardo y Mellado (2002) mencionan que al igual que estudiantes que no tienen DV, muestran complicaciones al aprender matemáticas en general.

Asimismo, resaltan que los estudiantes con DV no perciben de la misma forma que los alumnos normovisuales (sin discapacidad visual), sin embargo, tienen la misma posibilidad de comprender, pero haciendo uso del resto de los sentidos. Por otra parte, hacen hincapié, en la importancia de realizar adaptaciones curriculares pensando en las necesidades y posibilidades de cada alumno, tomando en cuenta diversas características de aprendizaje.

En las investigaciones expuestas anteriormente, los autores describen que los estudiantes con DV, pueden aprender matemáticas con el uso de otros sentidos, sin embargo, no es claro cómo son los procesos cognitivos que siguen los estudiantes para la construcción de un tema matemático, dada la naturaleza de que su conocimiento se genera a partir de las imágenes que se crean a través del uso del resto de sus sentidos, y que en ocasiones suelen ser más precisas que las obtenidas sólo por la vista.

A continuación, se describirán algunos trabajos relacionados con propuestas didácticas para el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes ciegos o con baja visión.

1.2.2 Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en estudiantes con discapacidad visual

Sánchez, Espinoza, Carrasco y Garrido (2012), desarrollaron un modelo de videojuegos para mejorar las habilidades geométricas de alumnos ciegos o débiles visuales en la educación básica. Éste se fundamentó en el uso de la percepción háptica y auditiva como mediadores del aprendizaje en la adquisición de conceptos, a través de audio y material concreto como figuras geométricas. El modelo propuesto integra aspectos de educación, ingeniería de software y cognición para mejorar las habilidades matemáticas en geometría en personas con discapacidad visual. Ellos concluyen que es importante que se potencien las habilidades matemático geométricas en alumnos con discapacidad visual pues son primordiales en lo académico como en la vida cotidiana.

Cabe mencionar que en el trabajo descrito anteriormente, no se dio evidencia de la comprensión que se generó a través del modelo propuesto para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, se dejó como una propuesta a implementar.

Por otra parte, Velasco y Montes (2013) diseñaron una propuesta de enseñanza inclusiva para estudiantes con discapacidad visual, del tema factorización de un trinomio cuadrado perfecto, a través del uso de figuras geométricas. La cual se implementó en tres aulas inclusivas de noveno grado en Colombia, de acuerdo a ello los datos obtenidos destacan, que los estudiantes con discapacidad visual presentan bajos niveles de apropiación conceptual, debido a la forma visual en la que se había enseñado anteriormente. De igual forma, destacan que utilizar material didáctico como el realizado, mejora los procesos de enseñanza aprendizaje debido a que permite un acercamiento y representación del objeto matemático.

Además, las autoras resaltan que en el caso del álgebra, escribir expresiones algebraicas en Braille puede resultar complejo y confuso al momento de leerlas y escribirlas, por la naturaleza del alfabeto, y por ello sugieren el uso de un material inclusivo que facilite su aprendizaje.

Asimismo, Correa y Pulido (2013) realizaron una secuencia didáctica que destaca el uso de material manipulativo tangible para enseñar el concepto de ecuaciones de primero y segundo grado a estudiantes con y sin discapacidad visual, con el uso de figuras geométricas, en específico con cuadrados y rectángulos. Ésta se aplicó a un grupo de octavo grado en Colombia, que contaba con una estudiante que tenía DV, con base en los resultados de la aplicación, los autores concluyen que en su mayoría los alumnos reconocieron la estructura de ecuaciones de primero y segundo grado, incluso, simplifican y despejan la variable en la ecuación. Sin embargo, mencionan que se presentaron dificultades, pues los estudiantes no identificaban la equivalencia entre expresiones ni las operaciones que se debían usar.

Cabe señalar, que en las conclusiones que se presentan en Correa y Pulido (2013) no se describe si la estudiante con DV adquirió el conocimiento referente al concepto de ecuaciones.

Jiménez, Barreto y Funeme (2013) diseñaron un material didáctico concreto para el aprendizaje del concepto algebraico de polinomios, para personas normovisuales, ciegas o con baja visión. El material se implementó en un aula inclusiva que tenía dos estudiantes con discapacidad visual, las edades de los alumnos oscilaban entre los 25 y 40 años, pues era un grupo de adultos que cursaban la secundaria en su modalidad nocturna. Dicho material constaba de un tablero en el cual se colocaban fichas con braille y textura para que los alumnos operaran lo que se les solicitaba. Los resultados de la implementación mostraron que los estudiantes con DV lograron operar de forma correcta el material, permitiendo un mayor acercamiento al concepto de polinomio.

Por otra parte, Tinoco y Suárez (2016) realizaron adaptaciones a situaciones de aprendizaje con base en las características que presentan estudiantes con discapacidad visual, en tópicos como términos semejantes y suma/resta de polinomios, éstas fueron aplicadas a diez estudiantes ciegos y con baja visión, entre los 10 y 15 años de edad. De ello, concluyen que las estrategias didácticas que se utilizan en la construcción del pensamiento matemático en los niños normovisuales, difiere en ocasiones de la que perciben los niños con discapacidad visual, por ejemplo en el trabajo algebraico los algoritmos enseñados convencionalmente son entendibles para los niños sin discapacidad visual, pero para la persona ciega o con baja visión, esto genera un doble esfuerzo ya que hay un problema no solo conceptual si no de notación, pues es muy complicado trabajar algoritmos convencionales en el sistema de lectoescritura braille (p.625).

Por último, los autores también concluyen que las actividades matemáticas que se propongan a los estudiantes ciegos o con baja visión, deben estar dirigidas a propiciar el proceso matemático, a través no solo del tacto y la escritura, sino también a partir de las lecturas y la comunicación que se puede llegar a establecer entre docente- estudiante. Motivar el interés de los estudiantes con discapacidad visual es tanto un reto como una oportunidad para crear espacios en los que la comunicación, la interacción, el cálculo mental y los esquemas mentales se construyan paralelos a los algoritmos y a las explicaciones tradicionales que se dan en el aula de matemáticas (p.625).

Mamcasz, Rutz, Midori & Sebastiao (2016), presentan una propuesta para trabajar con un grupo en educación regular de octavo grado (secundaria) en donde está incluida una estudiante con discapacidad visual. A partir de lo propuesto por Galperin (2009), aspectos de Vigotsky (1998) y la metodología del estudio de caso, se genera material didáctico para los conceptos de área, volumen y productos notables, los cuales son funcionales para todo el grupo. Se hizo una evaluación preliminar para saber los conocimientos previos de los estudiantes y posteriormente se realizó una prueba final para comparar sus avances. De acuerdo a los datos obtenidos se concluye que existen cambios en las respuestas de los estudiantes, se destaca una mejora, y en el caso de la estudiante con DV se describe que estuvo participando activamente en clase pero no pudo hacer las operaciones mentales requeridas así como la parte algebraica que se solicitaba.

Por su parte, Malasaing y Zhang (2016) realizan una revisión de literatura sobre investigaciones con el propósito de resumir y evaluar la efectividad de los métodos existentes para instruir a los estudiantes con diferentes tipos de pérdida de visión. Se encontraron dos formas de intervención: la primera con el uso de tecnología y la segunda a partir de intervenciones cognitivas, relacionadas con la enseñanza tradicional. De la revisión concluyen que existe la necesidad de determinar métodos educativos apropiados para instruir a los estudiantes con discapacidad visual en matemáticas; ya que la literatura revisada mostró que las tecnologías de asistencia no suelen ser más efectivas que los métodos de instrucción tradicionales, es decir, ambos métodos pueden ser efectivos siempre y cuando se pueda mejorar el método. Asimismo, sugiere realizar investigaciones que puedan aportar a las diferencias cognitivas que existen entre las diferentes categorías de pérdida de visión.

Fuentes (2017) propone un material didáctico para los temas de suma, resta, multiplicación y división de polinomios, ecuación lineal y factorización, a partir del uso de figuras geométricas, así como un cambio en color y textura para los negativos, trabajando con estudiantes de nivel medio superior. Además, hace uso de diferentes tablas en donde se colocan las figuras, estas dependen del tema que se quiere trabajar. Concluye que los estudiantes pudieron obtener la solución de ecuaciones con el uso del material propuesto, por lo que pudieron estructurar los pasos para la resolución del mismo, de igual forma, menciona la importancia de que no se deje de lado el Braille, por lo que propone que cada que se resuelva un ejercicio, debe ser apuntado en el cuaderno, además destaca que el tiempo que necesitaron los estudiantes con DV fue el mismo que los estudiantes sin la discapacidad.

Por su parte, Núñez (2017) describe la importancia que tiene el sentido de la vista en el aprendizaje de las matemáticas, pues afecta en el desarrollo de habilidades de coordinación. Además, hace diferencia entre las habilidades que tiene un ciego de nacimiento a alguien que perdió la visión con el tiempo. De igual forma, destaca el alfabeto Braille como una de las dificultades en la materia de matemáticas, debido a su característica de escritura lineal, lo que implica hacer operaciones de manera mental. Por último, propone actividades que fueron aplicadas a un grupo con un alumno ciego, utilizando materiales como el ábaco, plano cartesiano y tangram.

Como ya se ha podido destacar en investigaciones mencionadas, el Braille es identificado como una de las principales dificultades para que los estudiantes puedan hacer operaciones desde aritméticas hasta algebraicas. Martínez y Martín (2017) buscan apoyar a los estudiantes con discapacidad visual del nivel primaria en este aspecto, haciendo una actualización a la caja aritmética, que consta de una caja que se divide en dos, primero en un lado se utilizó una variedad de fichas con números y símbolos matemáticos; en el otro lado se utilizó una cuadrícula en la cual se insertarón las operaciones utilizando las fichas. Al final del artículo, describen que parte importante del estudio, es que tanto los creadores de material como los docentes y los alumnos estén de acuerdo con su aplicación y den su aprobación al respecto, de ser así existe mayor posibilidad de que sean utilizados en clase.

Beal y Rosenblum (2018), hacen uso de la tecnología para facilitar el aprendizaje en los estudiantes ciegos y débiles visuales de nivel básico (primaria y secundaria), a través de un IPAD que tiene contenido matemático (aritmética, fracciones, porcentajes, expresiones con una variable, geometría, ángulos y estadística), haciendo uso del audio en específico para ciegos y el contenido en letra de tamaño mayor para los que tienen baja visión. Además, mencionan que los alumnos con DV tienen resultados notablemente inferiores en matemáticas a los de sus compañeros normovisuales. Concluyen que el uso de tecnologías apoya la posibilidad de dar instrucciones a los alumnos con DV, fomenta su independencia y les es más llamativo trabajar de esta forma que con el uso de un libro.

Una vez que se ha realizado la lectura de la literatura de cómo es que se propone enseñar a estudiantes con discapacidad visual algún tema referente a las matemáticas, podemos destacar que en la mayoría hace uso del tacto como principal medio para trabajar con los alumnos, por lo tanto, en múltiples investigaciones se diseña material didáctico concreto para enseñar a los estudiantes ciegos o con baja visión. Entonces, destacamos que la forma para enseñar matemáticas a estudiantes con DV es a partir del material didáctico concreto, pues de esta forma se potencia el uso del resto de los sentidos, principalmente del tacto.

Asimismo, se puede hacer la suposición que tanto el material didáctico como las situaciones que se proponen en los trabajos, están realizados con base en la experiencia o en su propia intuición al conocer lo que se menciona como funcional con alumnos con discapacidad visual y considerando que el proceso de aprendizaje es el mismo que el de un estudiante normovisual. Creando, adaptando e implementando con base en sólo las dificultades físicas referentes a la DV, resaltando el uso del álgebra geométrica como un método efectivo para enseñar conceptos algebraicos (Correa y Pulido, 2013; Fuentes, 2017; Velasco y Montes, 2013; Jiménez, Barreto y Funeme, 2013), haciendo uso de diversas formas y texturas.

Entonces, se está dejando de lado una parte crucial en la enseñanza, no se está tomando en cuenta la parte cognitiva de los estudiantes en el aprendizaje, no se presta atención a cómo es que ellos perciben y aprenden las matemáticas, enfocándose completamente en dificultades físicas. Por el momento, no se han encontrado estudios en los cuales se tome en cuenta de igual forma la parte cognitiva de los alumnos para el diseño del material didáctico concreto, ni las situaciones problemáticas que permitan o ayuden a la comprensión de los conceptos matemáticos.

Asimismo, la literatura revisada muestra que el foco de estudio se centra en estudiantes con discapacidad visual que se encuentran en los niveles de secundaria y primaria, resaltando la escasez de estudios de esta índole en el nivel medio superior y superior, dejando de lado temas de álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial, entre otros.

Respecto al aprendizaje del álgebra, se muestra que el cambio de la aritmética al álgebra es un reto para estos alumnos así como para estudiantes normovisuales (Tinoco y Suárez, 2016), debido a que implica conceptos más abstractos a los que estaban acostumbrados en la aritmética. Entonces, los alumnos ciegos o con baja visión enfrentan dificultades con la materia como cualquier otro, pero aunado a los retos que lleva consigo la discapacidad visual.

De igual forma, destacamos que los alumnos con discapacidad visual pueden aprender al igual que el resto de sus compañeros normovisuales, ya que la discapacidad no afecta la parte cognitiva de las personas. Además, que es posible que el estudiante con DV pueda crear imágenes mentales a partir del resto de sus sentidos (Fernández, 1986).

1.4 Problemática

El aprendizaje de la Matemática ha sido un tema que ha arrojado múltiples investigaciones en sus diferentes áreas, buscando dar solución a una diversidad de interrogantes que se generan a partir de ella. En este trabajo de investigación, se aborda el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes con discapacidad visual.

En diferentes trabajos se han hecho diversas propuestas con el uso de material didáctico concreto (Mántica, Götte y Dal Maso, 2014; Velasco y Montes, 2013; Correa y Pulido, 2013; de Jiménez, Barreto y Funeme, 2013; Fuentes, 2017) para atender el aprendizaje de la matemática en estudiantes con discapacidad visual, pero esto ocurre con mayor frecuencia en la educación básica (primaria y secundaria) (Martínez y Martín, 2017). Sin embargo, en el nivel medio superior o superior, se ha realizado poco trabajo al respecto (Reynaga, Hernández, Sánchez, López, Ibargüengoitia e Ibánez, 2014), lo cual se vuelve una dificultad para los estudiantes y docentes implicados, pues no se cuentan con materiales didácticos para el aprendizaje y enseñanza de las diferentes áreas de la ciencia (matemática, química, biología, física).

De igual manera, en la literatura sobre materiales didácticos para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias en el nivel básico con estudiantes con discapacidad visual, se han encontrado trabajos que abordan el diseño y uso de materiales didácticos, pero éstos se han utilizado como una herramienta que sustituye el braille, y que no aborda contenido didáctico con respecto alguna área de las ciencias, como es el caso de las matemáticas (Malasaing y Zhang, 2016).

Aunado a ello, los trabajos que han abordado el aprendizaje de las matemáticas para estudiantes con ceguera o con baja visión en el nivel básico, muestran que los alumnos tienen dificultad al aprender matemáticas, en específico el álgebra, éstas se relacionan con la ansiedad, el temor y el cambio que hay entre la aritmética y el álgebra. Y por otra parte la forma de explicar del profesor se basa únicamente en lo visual y discursivo, por ello se sugiere, el uso de material concreto y aprovechar principalmente los sentidos del tacto y oído para fomentar el aprendizaje en alumnos con DV (Bermejo, Fajardo y Mellado, 2002 y Tinoco y Suárez, 2016).

Asimismo, se percibe que las dificultades en el aprendizaje del álgebra que enfrentan los estudiantes ciegos o con baja visión son de la misma naturaleza que los estudiantes normovisuales pero con dos años de rezago, que a medida que el alumno con discapacidad visual crece va desapareciendo (Mántica, Götte y Dal Maso, 2014), sin embargo, no hay evidencia de cómo se construye este conocimiento matemático en el contexto de estos estudiantes, y en específico en el nivel medio superior.

No cabe duda, que los estudiantes con discapacidad visual requieren de materiales didácticos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, en específico del álgebra, que funjan como herramientas de apoyo, para avanzar en el aprendizaje planteado en los programas de estudio. Consideramos que se requieren marcos de referencia específicos de cómo construyen su conocimiento matemático los estudiantes ciegos o con baja visión, y con ello adecuar los MD a las necesidades de esta población con respecto a la manera en qué construyen su conocimiento y no como meras herramientas que sustituyan el braille.

Cabe mencionar que no es posible establecer un criterio único para la construcción del conocimiento matemático de estos estudiantes, pues tenemos en cuenta la heterogeneidad de esta población.

1.5 Problema

El aprendizaje del concepto de ecuación lineal y en general del álgebra, en estudiantes con Discapacidad Visual, ha presentado dificultades que se relacionan con la poca información que existe sobre los procesos de cómo construyen su conocimiento matemático (Fernández, 1986; Velasco y Montes, 2013; Correa y Pulido, 2013; Fuentes, 2017).

1.6 Pregunta de Investigación

De acuerdo a lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo construyen el concepto de ecuación lineal de una variable los estudiantes con discapacidad visual en el nivel medio superior?

1.7 Objetivo General

Describir las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan los alumnos con discapacidad visual al aprender el concepto de ecuación lineal de una variable, por medio de una secuencia didáctica utilizando material didáctico concreto.

1.7.1 Objetivos Particulares

- Analizar y rediseñar la descomposición genética del concepto de ecuación lineal con una variable propuesta por Velasco (2012), que les permita a los estudiantes con DV desarrollar la comprensión del concepto de estudio.

- Diseñar e implementar una secuencia didáctica y un material didáctico concreto para los estudiantes con discapacidad visual a partir de la descomposición genética sobre el concepto de ecuación lineal de una variable.

- Analizar si el diseño de la secuencia didáctica promueve la construcción del conocimiento de ecuación lineal de una variable.

- Validar si la descomposición genética representa la construcción y comprensión del concepto de ecuación lineal de una variable para los alumnos con DV de esta investigación.

1.8 Justificación

Una vez que se realizó la revisión de literatura, se puede destacar que la mayor parte de las investigaciones están enfocadas en los niveles de educación primaria y secundaria, trabajando con alumnos de a lo más 15 o 16 años, dejando de lado temas de álgebra como el de ecuación lineal, sólo hemos encontrado los trabajos de: Correa y Pulido (2013); Fuentes (2017); y Núñez (2017) en el nivel medio superior.

Respecto al concepto de ecuación lineal, se destaca que el álgebra representa un reto para los estudiantes (Tinoco y Suárez, 2016) y uno de los temas a tratar es el de ecuación lineal, el cual es abordado con material concreto usando álgebra geométrica (Fuentes, 2017), sin embargo, no se mencionan de manera clara si los estudiantes lograron adquirir los aprendizajes esperados, los resultados van encaminados a que se aumentó la participación de los estudiantes.

Asimismo, como ya se mencionó en el apartado de reflexión, autores como Fuentes, (2017), Medina (1999), Gavilán (2011) y Gerván, (2013) mencionan el álgebra como una de las materias que trae mayores dificultades para los estudiantes. Asimismo, destacan que el tema de ecuaciones lineales suele ser un desafío para los alumnos de nivel medio superior, es por eso que nos centraremos en el álgebra y en este concepto en específico para el desarrollo de nuestra investigación.

Otro de los puntos que queremos resaltar es la ausencia de una metodología específica que se pueda seguir para la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas o del álgebra con alumnos con discapacidad visual, por lo que parece que se ha estado trabajando el tema con base en la experiencia y en la intuición. Además, no se han encontrado trabajos de estas características en específico en el área de la Matemática Educativa.

De igual forma, destacamos que, en los estudios mencionados en el apartado de antecedentes, los diferentes materiales didácticos tanto concretos como tecnológicos están realizados con base en las dificultades físicas que se tienen a partir de la discapacidad visual, sin embargo, no se toma en cuenta la parte cognitiva de los estudiantes, no se considera qué es lo que ocurre en los alumnos cuando aprenden un concepto matemático ni cómo se desarrolla su pensamiento algebraico.

Aunado a lo anterior, se centran en el braille como una principal dificultad en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, y parece ser que el material que se propone tiene el fin de sustituir el alfabeto para evitar las confusiones que suele traer por sus características. Pero, consideramos que este no debe ser el fin principal de un material didáctico, sino el fomentar y apoyar el aprendizaje del conocimiento esperado.

Es por eso que consideramos necesario que exista un equilibrio entre las dificultades físicas como cognitivas para el desarrollo de situaciones y material didáctico, por lo tanto, en este trabajo se busca hacer una secuencia didáctica, así como un material didáctico tomando en cuenta esa relación.

Con base en la experiencia, podemos decir que los alumnos con discapacidad visual forman parte de los estudiantes excluidos de las aulas regulares, en ocasiones porque el docente no está lo suficientemente capacitado para atenderlo y no busca opciones para hacerlo, en otros casos se les niega la entrada a ciertas instituciones regulares y por ende, en el mejor de los casos encuentran alguna institución educativa que se especializa en enseñanza a alumnos con DV, el caso contrario es el abandono de los estudios. Es por eso que investigaciones de este corte toman relevancia en la educación actual, pues todos tenemos derecho a educación de calidad y a poder alcanzar los aprendizajes esperados.

Capítulo 2. Marco Referencial

En este capítulo se desarrolla un marco referencial que sustenta la presente investigación, compuesto de dos enfoques teóricos que son el conocimiento sobre la Discapacidad Visual y la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE). Para el desarrollo de la primera parte se hizo una recopilación de información referente a la discapacidad visual; por su parte, la teoría APOE ha sido desarrollada por Ed Dubinsky y sus colaboradores, esta se enfoca en el proceso de construcción del conocimiento matemático en los estudiantes.

2.1 Discapacidad Visual

En este apartado abordamos toda la información referente a la discapacidad visual, dado que es importante tomar en cuenta estos conocimientos para el diseño o adaptación de una descomposición genética, estructuración de entrevistas, la secuencia didáctica e incluso el material didáctico concreto. Además de las consideraciones que implica la discapacidad visual, se tiene que tomar en cuenta sus circunstancias personales, la realidad en la que viven, la parte psicológica de cada uno, ya que la pedagogía de la ceguera no puede estar aislada de las personas que la padecen (Fernández, 1986).

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS) (2018), se estima que aproximadamente 1300 millones son personas tienen alguna discapacidad visual, de los cuales 1885 millones son personas con deficiencia visual moderada, 217 millones con deficiencia visual grave y 36 millones de personas son ciegas.

Alguna vez nos hemos puesto a analizar ¿cómo sería la vida sin el sentido de la vista? ¿Cómo haríamos las actividades diarias a las que estamos acostumbrados? ¿Cómo llegaríamos a la escuela? ¿Qué tanto cambian las clases sin poder ver? ¿Cómo hacer las tareas y trabajos dentro y fuera de clase? Estas y otras cuestiones surgen al pensar en la ausencia de este sentido debido a que es vital para poder ser autónomos, sin embargo, nos queda claro que esta no es una limitante para poder realizar actividades tanto sociales como académicas.

Entonces, podemos decir que la vista es un sentido que tiene gran impacto en nuestra vida, debido a que el 80 % de la información que percibimos en la vida cotidiana implica la visión, por lo tanto, depende del tipo de discapacidad visual la cantidad de información que pueden recibir. Esto trae consigo que una parte de los conocimientos y habilidades que adquirimos las aprendemos y hacemos con base en lo que vemos (ONCE, 2019), un ejemplo es cuando el docente desarrolla un procedimiento en el pizarrón y podemos ver cuáles son los pasos que sigue.

Sin embargo, es importante mencionar que la falta del sentido de la vista no afecta las facultades mentales de las personas ciegas o con baja visión, por lo que se puede lograr un aprendizaje hasta el nivel más alto como en cualquier otra persona. Asimismo, no se cierran las puertas a aspectos matemáticos de la realidad, aunque a partir de la discapacidad se tiene que modificar la vía de acceso al conocimiento (Fernández, 1986). Tomando en cuenta lo anterior, se destaca que las personas con discapacidad visual se ven obligadas al uso del resto de los sentidos para sustituir la vista, utilizando el oído que aporta sucesión y linealidad, y el tacto, que con palpar ofrece información de extensión, configuración, espacio, solidez, incluso con mayor precisión que la vista, llegando a formar esquemas empíricos (Villey, 1946 citado en Fernández, 1986).

Por lo tanto, el tacto se vuelve como la vista para un ciego pero sin color y con la sensación de textura. En el momento en que una persona ciega debe hacer una imagen mental de algún objeto debe de poner a trabajar el resto de sus sentidos, cosa que con los normovisuales no ocurre, pues en primera instancia sólo se trabaja la vista. Entonces, se vuelve comprensible que en algunos sentidos los alumnos con discapacidad visual demuestren algunos retrasos, pero estos pueden ser anulados fomentando el desarrollo de las habilidades ya mencionadas (Fernández, 1986).

2.1.1 Características principales

Según la Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE) (2019) la discapacidad visual es la "consideración a partir de la disminución total o parcial de la vista". Además mencionan que los parámetros para medirla son la capacidad lectora de cerca y a distancia, el campo visual y la agudeza visual.

Fernández (1986) menciona que los tipos de discapacidad visual son medidos con la escala Snellen y la escala de Wecker. Asimismo, la ONCE (2019) destaca el uso de optotipos para medir la agudeza visual, es decir, la capacidad para poder percibir figuras y formas de objetos y la campimetría para el campo visual, definido como la capacidad para observar objetos que están fuera de la visión central.

Con visión central se hace referencia a poder observar los objetos que se encuentran enfrente, mientras que la pérdida de la visión periférica afecta al poder identificar objetos que están en los lados, en la parte de arriba o en la de abajo. Estos factores repercuten en la persona y su capacidad para hacer actividades sociales, académicas y deportivas, teniendo la necesidad de aprender y adaptar técnicas para llevar a cabo lo que necesita hacer, con respecto a alguien sin la discapacidad (ONCE, 2019).

Con base en los parámetros mencionados, dentro de la discapacidad visual se hace distinción entre ceguera y deficiencia visual, esto dependiendo de si la persona no puede ver nada en absoluto o tiene una limitación seria de la visión, que en ocasiones se apoyan de lentes con aumento u otras ayudas ópticas. La ONCE (2019) y Suárez (2011), definen ceguera y deficiencia visual de la siguiente forma:

- Las personas ciegas o con ceguera son aquellas que no ven nada en absoluto o solamente tienen una ligera percepción de luz (pueden ser capaces de distinguir entre luz y oscuridad, pero no la forma de los objetos), correspondiéndole una agudeza visual menor a 20/400.

- Las personas con deficiencia visual (grave o moderada) son aquellas que con la mejor corrección posible podrían ver o distinguir, aunque con gran dificultad, algunos objetos a una distancia muy corta, presentando agudeza visual de 6/18 hasta 3/60 y la presencia de un campo visual menor a 20°. En la mejor de las condiciones, algunas de ellas pueden leer la letra impresa cuando ésta es de suficiente tamaño y claridad, pero, generalmente, de forma más lenta, con un considerable esfuerzo y utilizando ayudas especiales.

Aunado a esto, la Organización Mundial de la Salud (2018), clasifica la discapacidad visual en dos grupos como se muestra en la Tabla 1, dependiendo del tipo de visión.

<table>
<tr><th>Deficiencia de la visión de lejos</th><th>Deficiencia de la visión de cerca</th></tr>
<tr><td>Leve: agudeza visual inferior a 6/12.</td><td rowspan="4">Agudeza visual de cerca inferior a N6 o N8 a 40 cm.</td></tr>
<tr><td>Moderada: agudeza visual inferior a 6/18.</td></tr>
<tr><td>Grave: agudeza inferior a 6/60.</td></tr>
<tr><td>Ceguera: agudeza visual inferior a 3/60.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Discapacidad visual. Obtenido de Organización Mundial de la Salud (2018).

Por otra parte, dentro las principales causas de la discapacidad visual reportadas por la OMS se encuentran los errores de refracción no corregidos, la catarata, retinopatía diabética, las ametropías, el glaucoma, el tracoma, la degeneración macular y las opacidades corneales (Suárez, 2011; Organización Mundial de la Salud, 2018).

En este punto, consideramos importante para los fines de esta investigación diferenciar entre personas que nacen con la discapacidad visual o aquellas que la adquieren a lo largo de su vida, en específico la ceguera. Alguien que es ciego de nacimiento no tiene ciertas nociones, en cambio alguien que adquiere la ceguera durante su vida, tendrá conocimiento totalmente distinto, ejecutará con mayor rapidez ciertas tareas manuales, esto va a condicionar su actitud de aprendizaje, manejo de diferentes herramientas (Fernández, 1986).

2.1.2 Sistema Braille

Un factor de interés al adentrarse en la discapacidad visual es referente al cómo leen y escriben las personas ciegas o con baja visión, debido a que como normovisuales utilizamos la vista para realizar estas actividades. Con respecto a lo mencionado en la sección anterior, se sabe que el tacto tiene un papel importante en desarrollo de diversas tareas, y en este caso no es la excepción.

Entonces, existió un punto en la historia en que las personas normovisuales ya tenían un alfabeto con el cual escribir y a partir de él poder leer diversos textos, mientras que las personas con discapacidad visual no tenían un medio para poder lograrlo, a pesar de que se hicieron algunos intentos. Es hasta el año de 1825 que Louis Braille, un profesor ciego que enseñaba álgebra y geometría, propone su alfabeto táctil para lecto-escritura (Fernández, 2001).

Este alfabeto implica un sistema de puntos en relieve para ser leído con la yema de los dedos, que parte de seis puntos, en dos columnas con tres filas cada una, numerando del uno al tres en la primera columna y del cuatro al seis en la segunda (ONCE, 2019), como se muestra en la Figura 1.

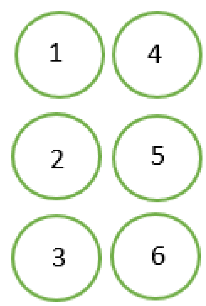

Figura 1. Estructura de filas y columnas para alfabeto Braille. Elaboración propia Torres (2019).

Es así que se proponen los primeros diez símbolos en este alfabeto (letras de la “a” a la “j”), tomando en cuenta únicamente los puntos 1, 2, 4, 5. Después para obtener los siguientes diez símbolos a las combinaciones ya establecidas se les agrega el punto 3, asimismo, el punto seis se agrega a la combinación obtenida en el paso anterior, y por último se añade el punto seis a las primeras diez combinaciones, dando lugar al alfabeto en braille (Figura 2) (Fernández, 2001).

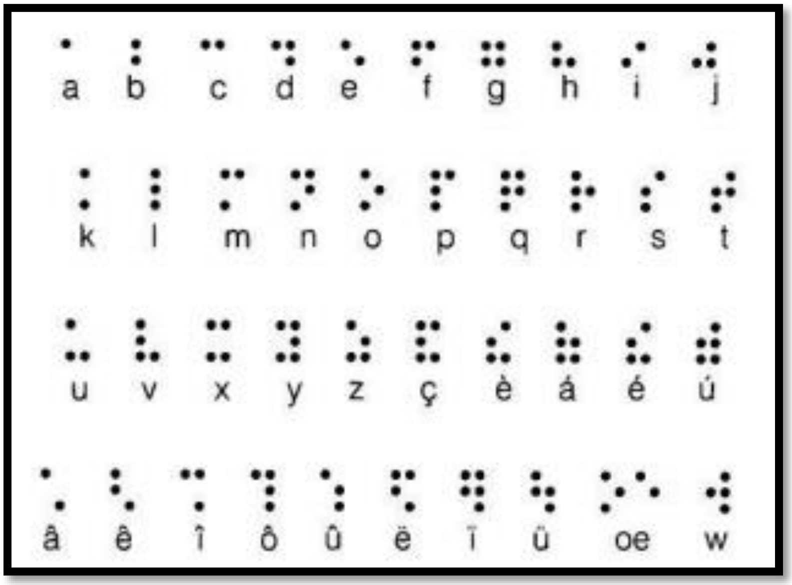

Figura 2. Alfabeto en Braille. Recuperado de Fernández (2001), p.30.

La combinación de los seis puntos disponibles permite obtener 64 combinaciones diferentes, incluyendo aquella en la que se marcan los 6 puntos conocida como signo generador y de igual forma en la que no se marca ningún punto, que es utilizada como un espacio en blanco para separar palabras, números, símbolos, entre otros (ONCE, 2019).

Para realizar los puntos en las hojas se necesitan dos instrumentos que dan la oportunidad a las personas con discapacidad visual de poder plasmar en papel así como lo hacemos los normovisuales. El primero de ellos es la regleta (Figura 3), que es donde se introduce la hoja, la cual consta de 108 espacios o cajetines que contienen los puntos disponibles, en los cuales se puede puntear una combinación de puntos; el segundo es el punzón (Figura 3), que cumple la función de puntuar sobre la regleta para de esta forma marcar los puntos en la hoja. Esta forma de escribir suele ser cansada después de un tiempo, es más lento y se ocupa más espacio que cuando se hace en tinta.

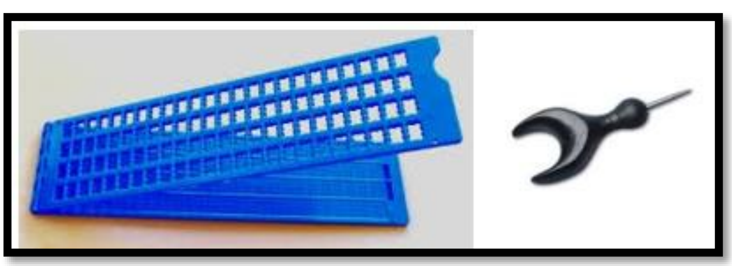

Figura 3. Regleta y Punzón

Una de las características principales del braille es la forma en cómo se lee y cómo se escribe (Figura 4), pues para leer con el tacto lo hacen como los normovisuales, de izquierda a derecha, pero para poder hacerlo así, al momento de escribir se debe hacer de derecha a izquierda, para poder dar la vuelta a la hoja en donde se encuentra el relieve y se pueda leer. Por lo tanto, la numeración de los seis puntos va a cambiar al momento de escribir y al leer, como se muestra a continuación.

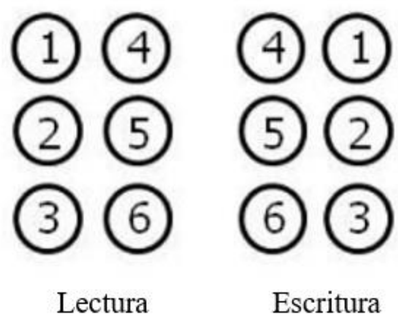

Figura 4. Lectura y escritura en Braille. Elaboración propia Torres (2019).

Con el fin de hacer más completo el alfabeto, se fueron implementando nuevas combinaciones, proponiendo combinaciones para escribir las vocales con tilde, las consonantes, los signos de puntuación y las mayúsculas, que por ejemplo, para hacer diferencia con las minúsculas, es necesario agregar una combinación de puntos (4 y 6) que se debe de poner previo a los puntos de la letra para poder entender que es una mayúscula Fernández (2001), como se muestra en la Figura 5.

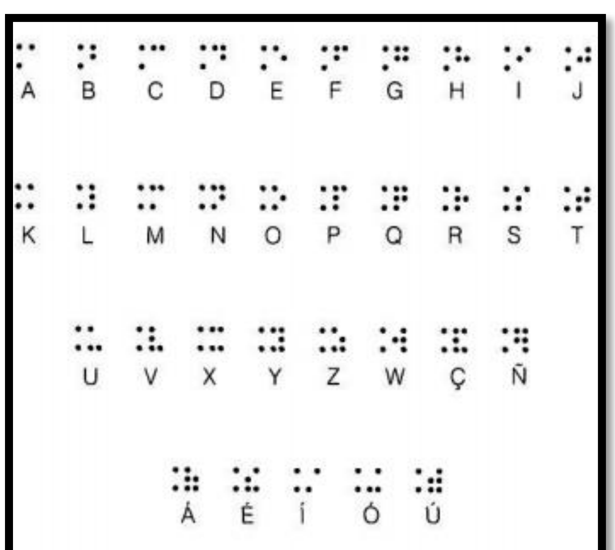

Figura 5. Mayúsculas en Braille. Recuperado de Fernández (2001), p. 37.

Algo similar ocurre en el caso de los números, se utilizan las primeras diez letras del alfabeto pero antes debe escribirse el signo numerador (puntos 3, 4, 5, 6), de esta forma podemos diferenciar entre las letras y los números. De tal forma que si la letra “a” es el punto uno, entonces para escribir el número uno tenemos que escribir en un espacio el signo numerador y después la letra “a”. De esta forma, tendríamos los números del 0 al 9, como se muestra en la Figura 6.

Signo braille	Puntos braille	Significado
⠼⠁	3456-1	1
⠼⠃	3456-12	2
⠼⠉	3456-14	3
⠼⠙	3456-145	4
⠼⠑	3456-15	5
⠼⠋	3456-124	6
⠼⠛	3456-1245	7
⠼⠓	3456-125	8
⠼⠊	3456-24	9
⠼⠚	3456-245	0

Figura 6. Números en Braille. Recuperado de Organización Nacional de Ciegos Españoles (2007), p. 34 y 35.

Así como existen combinaciones de puntos para representar los signos utilizados en matemáticas como la suma, resta, multiplicación, división, raíz, signo igual, integral, derivada, mayor o igual, por mencionar algunos. También, se pueden escribir los símbolos de los diferentes conjuntos numéricos como los naturales, los enteros, los racionales, reales, complejos, irracionales, decimales, entre otros, y por lo tanto, existen las combinaciones para poder trabajar con ellos en el alfabeto Braille.

Por ejemplo, lo números decimales haciendo uso del signo de punto, los números fraccionarios, en los cuales para escribir el numerador se usa la combinación del número pero en una posición baja (utilizando los puntos 2,3 y 5,6), mientras que el denominador se escriba en la posición normal, caso contrario a como escribimos las fracciones en tinta (lápiz y papel) (ONCE, 2007).

Como ya se mencionó, con el Braille se puede trabajar temas que se ven en el nivel medio superior y superior, en el caso del álgebra, donde se utilizan números y letras se debe ser cuidadoso, debido a que recordemos que para escribir números utilizamos letras pero con un símbolo numerador previo, entonces al momento de escribir y leer suele haber confusión, como se dice en múltiples estudios mencionados en la sección de antecedentes. En la Figura 7 se muestra un ejemplo de una expresión algebraica en tinta y en braille.

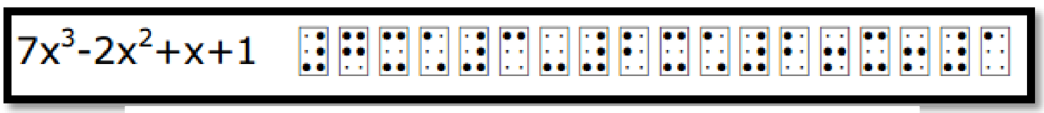

Figura 7. Expresión algebraica en Braille. Recuperado de Organización Nacional de Ciegos Españoles (2007), p. 62.

De lo mencionado en este apartado referente a la discapacidad visual, podemos destacar que como menciona Fernández (1986), estos alumnos pueden aprender igual que el resto de las personas debido a que ser ciego o con baja visión no afecta las capacidades cognitivas, pero se deben hacer algunas modificaciones al respecto, de tal forma que se pueda potenciar el uso del tacto principalmente, para que puedan crear imágenes mentales a partir de ello.

Además, resaltamos lo mencionado referente a los diferentes diagnósticos existentes en la discapacidad visual y lo que esto trae consigo en la parte cognitiva. Nos interesa esta información debido a que esta investigación está centrada en cómo es que los estudiantes aprenden un concepto de interés.

2.2 Teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE)

Las matemáticas son elementales en la educación de todas las personas, se imparte como materia desde la educación básica hasta el nivel superior, por lo tanto, es un constante foco de estudio de los investigadores. Algunos han puesto énfasis en buscar la forma de conocer cómo aprenden los alumnos y a partir de esto mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

En esta investigación nos vamos a centrar en cómo los estudiantes con discapacidad visual aprenden el concepto de ecuación lineal de una variable, para ello utilizaremos un enfoque teórico que se centra en la parte cognitiva de los alumnos, como lo es la teoría APOE. A lo largo de este apartado se explica con más detalle los elementos teóricos que la conforman.

En el año de 1983 Ed Dubinsky influenciado por Piaget y su teoría de la Abstracción Reflexiva, obtiene ideas y fundamento para comenzar a desarrollar la teoría APOE (Dubinstky, 1996). La Abstracción Reflexiva se enfoca en las construcciones mentales que hace una persona cuando desarrolla un pensamiento, poniendo el foco de atención en cómo es que interpreta el conocimiento, a partir del uso de términos como la acción material, interiorización y encapsulación, los cuales son retomados para la teoría APOE (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç Roa, Trigueros y Weller, 2014).

Según Trigueros (2005), las ideas de Piaget consideradas en la teoría APOE son utilizadas para la educación en el nivel superior, pero ahora se agrega el uso de la computadora como una herramienta de apoyo. Para el año de 1995 ya con una idea más formal sobre la teoría APOE, surge el interés de un grupo de investigadores enfocados en el área de las matemáticas, en cambiar el estudio de la educación matemática de pregrado, y forman un grupo llamado Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), los cuales junto a Dubinsky desarrollan y hacen investigación con base en la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Los estudios que desarrollan los investigadores que utilizan la teoría APOE se centran en describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos, a través de la explicación del cómo es que los alumnos construyen y usan ciertas estructuras mentales. Esto toma relevancia al pensar en que los estudiantes cuando interactúan con un nuevo concepto se enfrentan a dos dificultades, adquirir el concepto matemático y saber cómo utilizarlo en alguna situación-problema matemático que así lo requiera (Arnon et al., 2014).

2.2.1 Ciclo de investigación de la teoría APOE

La teoría APOE, así como algunas otras teorías de la Matemática Educativa cuenta con un ciclo de investigación como marco metodológico, en el caso de la teoría APOE se pueden clasificar en dos tipos; el primero compuesto por el Análisis Teórico, Diseño e Implementación de la enseñanza y el Análisis y Verificación de datos; y el segundo, conocido como el ciclo modificado, el cual difiere del primero en el componente de Diseño e implementación de la enseñanza, pues en este caso es Diseño e Implementación de instrumentos (Figura 8). En esta investigación se hace uso del ciclo de investigación modificado.

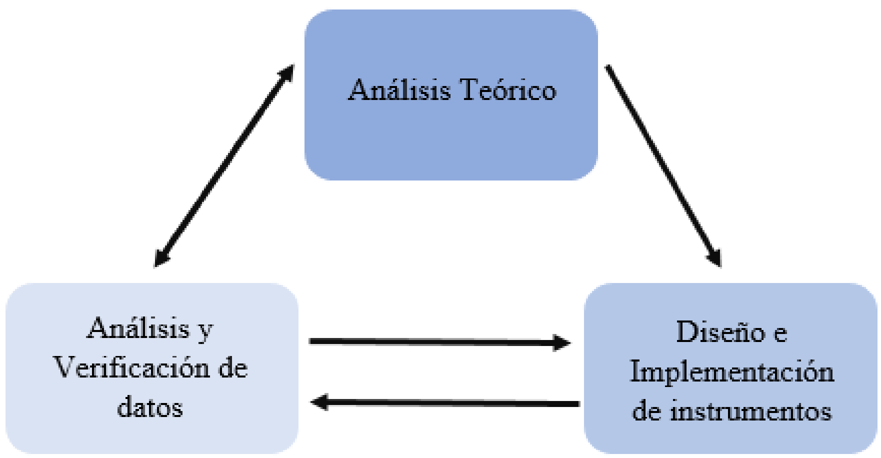

Figura 8. Ciclo de Investigación modificado de la teoría APOE (Arnon et al., 2014)

En el caso de los componentes que conforman un ciclo de investigación tal cual, el análisis teórico permite el desarrollo del diseño de la enseñanza a través de situaciones que permitan las construcciones y mecanismos mentales propuestos en el análisis. Asimismo, la implementación de la enseñanza o instrumentos, brindan elementos empíricos para el análisis y verificación de los datos a través de los elementos teóricos de la teoría APOE, los cuales se llevan a cabo bajo la lente de la descomposición genética preliminar. Por tanto esta última componente nos brinda información sobre las construcciones o mecanismos mentales realizados por los estudiantes, lo cual permite reformular el análisis teórico y/o diseño e implementación de la enseñanza o de los instrumentos, según sea el caso. De esta forma, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apuntan hacia las mismas construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

En los siguientes apartados se describirá en qué consiste cada uno de los componentes del ciclo de investigación.

2.2.1.1 Análisis Teórico

El ciclo parte de un análisis teórico del concepto matemático, y para su diseño se tienen en cuenta, el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores (estudiante y/o profesor), exámenes diagnósticos y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que permitan obtener información sobre cómo se estructura el concepto, para luego determinar un camino posible para su construcción. De este análisis surge una descomposición genética, la cual modela un camino que nos muestra cómo un individuo puede construir un concepto matemático en términos de las construcciones y mecanismos mentales (Gonzáles y Roa-Fuentes, 2015, p.7).

Construcción del conocimiento, estructuras y mecanismos mentales

Como ya se describió, Dubinsky y sus colaboradores fundamentaron la teoría APOE con base en las ideas de Piaget, en torno a la Abstracción Reflexiva, de la cual surgen 4 tipos de abstracción, utilizados para comprender el proceso cognitivo por el cual pasan las personas al aprender conceptos matemáticos, estos fueron retomados como Mecanismos mentales en la teoría APOE, pero con la adaptación de agregar uno más (Velasco, 2012).

La forma en la que interactúan estos mecanismos mentales es dando lugar a la creación de estructuras mentales. De esta forma, los mecanismos mentales tienen una funcionalidad de tipo puente entre cada una de las estructuras mentales. Para la construcción del conocimiento matemático, la teoría APOE se enfoca en estructuras y mecanismos mentales que desarrolla el alumno en el momento que se enseña el tema, en la teoría APOE se definen de la siguiente forma respectivamente:

> Con estructura mental se refiere a "cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina" (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic 2008, p. 98; tomado de Villabona y Roa-Fuentes, 2016).

Mientras que los mecanismos mentales son "el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos" (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic 2008, p. 98; tomado de Villabona y Roa-Fuentes, 2016).

Según la teoría APOE, los individuos se enfrentan a situaciones matemáticas a través de la construcción, transformación y aplicación de estructuras mentales, lo que les permite dar sentido a los conceptos matemáticos. Según Arnon et al. (2014), los estudiantes pueden aprender cualquier concepto sí y sólo sí han construido las estructuras necesarias para comprenderlo.

La construcción del conocimiento no es un procedimiento lineal, sin embargo, es necesario que el individuo pase por cada una de las estructuras mentales para conseguir el conocimiento, la Figura 9 muestra la relación entre mecanismos y estructuras mentales. A continuación, describimos los conceptos ya mencionados.

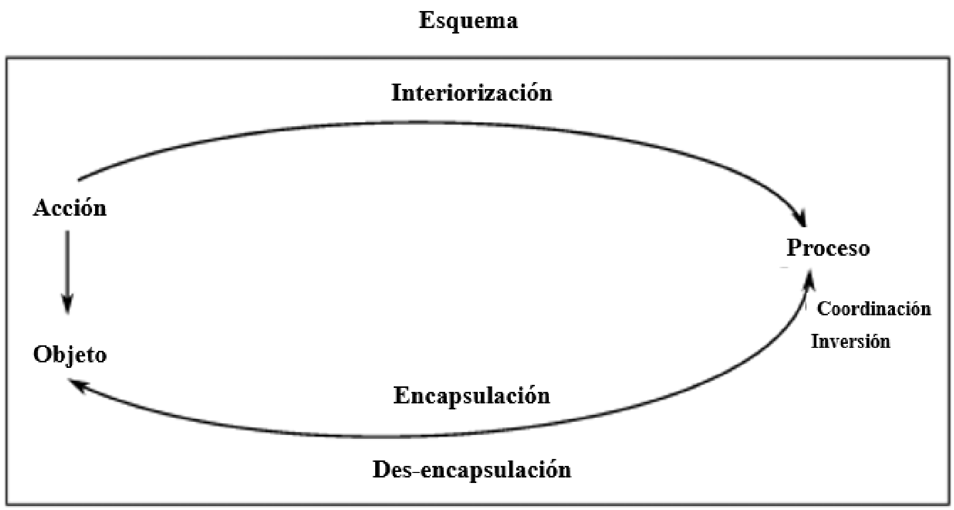

Figura 9. Relación entre estructuras y mecanismos mentales.
Obtenido de: APOS Theory. Dubinsky et al. (2014), p. 18.

Acción

Arnon et al. (2014) señalan que la primera estructura mental que se desarrolla en el individuo es la acción, ya que es a través de ella que se tiene contacto con lo que se le pretende enseñar, en este caso, las matemáticas. Asimismo, mencionan que la acción es externa, debido a que cada paso que efectúan los alumnos necesita ser realizado de forma explícita y siguiendo instrucciones externas, pues no pueden imaginar, ni omitir ninguna instrucción que sea dada por el profesor o cualquier otra persona.

Por ejemplo, cuando se explica por primera vez el tema de área de una circunferencia, se les muestra la fórmula para obtenerla: "$a = \pi * r^2$", y se les enseña a cómo utilizarla a partir de los datos que ofrece la situación-problema. Para ello, multiplicar el valor del radio por él mismo, para obtener el valor del radio al cuadrado y finalmente multiplicarlo por el valor de π. Entonces, cuando al estudiante se le presente una situación-problema similar, él aplicará la misma fórmula, siguiendo cada uno de los pasos mencionados.

Proceso

Para entender con claridad la estructura mental de proceso, tenemos que señalar que la estructura mental Acción se distingue porque el individuo aún necesita de las instrucciones externas y a medida que repite el procedimiento, pasa de depender de las instrucciones externas a tener el control interno sobre ellas, pues reflexiona sobre la acción que repite. A esto se conoce como interiorización y que tiene como resultado un proceso (Arnon et al., 2014).

> "Según la teoría APOE, cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso mental. La interiorización de una acción consiste en construir una estructura mental que hace el mismo trabajo que el de la acción externa; decimos que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él" (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p. 94).

En otras palabras, según Trigueros (2005) el mecanismo mental de interiorización permite que el individuo sea consciente y reflexione sobre una acción, lo que le lleva al proceso, que se caracteriza por la capacidad de realizar los pasos sin necesidad de hacerlos explícitamente, ya que ahora es capaz de realizar los pasos en la mente e incluso saltarse algunos de ellos.

Siguiendo con el ejemplo mencionado en la sección anterior, después de repetir algunos ejercicios donde se aplica la misma fórmula de área, llega el momento en que el alumno la interioriza. En este punto de su actividad, ya no es necesario seguir los pasos uno por uno, pues ahora puede incluso saltarse pasos y llegar al valor del área de un círculo sin tener que escribir todas las multiplicaciones, haciendo el procedimiento de forma directa y siendo más consciente de lo que está realizando.

Además, la interiorización no es el único mecanismo mental que se relaciona con la estructura proceso, pues la coordinación también puede generarlo, a partir de la coordinación de dos o más procesos, estableciendo relaciones entre ellos (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Entonces, dos objetos cognitivos pueden ser des-encapsulados, obteniendo los Procesos que les preceden y estos pueden ser coordinados creando nuevos procesos, para finalmente ser encapsulados y formar nuevos objetos cognitivos.

Por ejemplo, el tema de composición de funciones, tomando en cuenta que las funciones F y G ya son conocidas por el alumno y ha llegado a la estructura mental de objeto en ambos casos. La composición de estas funciones ($F \circ G$ o $G \circ F$) implica que los alumnos tengan que des-encapsular los objetos de cada función, obteniendo los procesos que los preceden, ambos se coordinan dando lugar a un nuevo Proceso coordinado, finalizando con la encapsulación como un nuevo objeto, pero en este caso sobre composición de funciones (Arnon et al., 2014). Asimismo, la inversión es otro mecanismo mental da lugar a nuevos procesos, debido a que una vez que se ha interiorizado una acción en un proceso, este pude ser invertido con el fin de obtener un nuevo proceso.

Objeto

Un mecanismo mental que permite construir la estructura de Objeto es la encapsulación. Esta ocurre cuando se aplica una acción a un proceso, es decir, cuando se tiene conciencia de algún procedimiento en la construcción del conocimiento y a eso es necesario aplicar un nuevo procedimiento (acción), teniendo algo que ya parece familiar y aplicándolo en algo totalmente nuevo, entonces, hablamos de encapsulación. “Dicho mecanismo consiste básicamente en la conversión de una estructura dinámica (el proceso) en una construcción estática (el objeto), que se genera cuando el individuo debe transformar al objeto para resolver una situación” (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p.95).

> Si se es consciente del Proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y puede realmente construir tales transformaciones, entonces decimos que el individuo ha encapsulado el Proceso en un Objeto cognitivo (Arnon et al., 2014, p.21).

De igual forma, la teoría APOE hace mención del mecanismo mental des-encapsulación, que como su nombre lo dice, hace un proceso inverso al de encapsulación. Si recordamos, el proceso de encapsulación es el que lleva un proceso a un objeto cognitivo. Por lo tanto, la des-encapsulación lleva un objeto cognitivo al Proceso que lo precedía. Para la teoría APOE un Proceso que ya fue encapsulado puede ser des-encapsulado cuando sea necesario. Lo anterior dependerá de la exigencia de la situación-problema que se le presente al alumno (Arnon et al., 2014).

Esquema

Según Arnon et al. (2014) y Trigueros (2005) un Esquema es una estructura mental que se construye a partir de otras estructuras mentales: Acción, Proceso y Objeto, que además pueden incluir sub-esquemas y contener la organización de ejemplos y descripciones de las estructuras que el individuo ha construido sobre un concepto matemático. Para que se desarrolle un Esquema, el alumno debe tener conciencia de sus componentes y cómo se relacionan. Otra característica de esta estructura mental es que está en continua reconstrucción, dependiendo de la actividad que el alumno desarrolla.

Además, con esta estructura mental se pueden analizar las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas que desarrolla para comprender el concepto. Si los construye de forma correcta o hay error en alguna estructura, y a partir de esto hacer adecuaciones a la situación-problema, por lo tanto, nos puede decir el porqué de las dificultades de los alumnos en ese concepto. Para la teoría APOE, en el momento en que una persona se enfrenta a una situación-problema matemática recurre a un Esquema, que incluye todo el conocimiento referente al tema (Vizcaíno, 2004).

Para que un esquema pueda formar parte de otro como ya se mencionó, es necesario que ocurra el mecanismo mental de tematización, nuevos objetos pueden ser utilizados para conformar otros esquemas. Ocurre “cuando un individuo reflexiona sobre la comprensión que tiene del esquema viéndolo como un todo, y es capaz de realizar acciones sobre el esquema” (Velasco, 2012, p.49).

Para la teoría APOE, un Esquema pasa por tres etapas, las cuales describen su desarrollo. Cada una implica un desarrollo de relaciones y transformaciones que un alumno puede hacer entre los componentes de un esquema, por lo que se vuelve una herramienta para analizar el pensamiento de los alumnos y su desarrollo. Estas etapas son conocidas como La Tríada: Intra, Inter y Trans (Arnon et al, 2014; Trigueros, 2005).

- Intra: el individuo no tiene mucho conocimiento acerca del concepto está centrado en acciones u operaciones repetibles, por lo que no le es posible relacionar un problema con otro. Implica “la construcción de relaciones entre procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto” (Trigueros, 2005, p.12).
- Inter: debe existir un desarrollo en el conocimiento del tema respecto a la fase anterior, entonces, empiezan a existir relaciones y transformaciones entre las estructuras cognitivas que están formando el Esquema del tema. “Se refiere a éste con la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de las matemáticas” (Trigueros, 2005, p. 12).
- Trans: el alumno sabe si el esquema es aplicable a alguna situación y tiene la capacidad de reconocer las relaciones que existen en el esquema creado, para la teoría APOE esto es conocido como Coherencia. “En éste el estudiante da muestras, en el desarrollo de su trabajo de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo es aplicable a dicha estructura y cuándo no” (Trigueros, 2005, p 12).

Es probable que se crea que estar en una etapa de desarrollo depende completamente de la cantidad de conocimiento que se posea, sin embargo, esto no es así, pues depende de que tan consciente es el alumno sobre el conocimiento matemático.

Descomposición Genética

Una vez que se conocen los mecanismos y estructuras mentales que forman los alumnos durante la construcción de conocimiento matemático, podemos hacer una predicción de cuáles estructuras mentales deben construir para entender un concepto. La teoría APOE lo llama Descomposición Genética, que es: "…un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir, para aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p. 27).

Entonces, en una descomposición genética el investigador describe y explica las acciones que el alumno necesita realizar, los procesos y objetos que utiliza y los que desarrolla, es decir, describe las relaciones que existen entre las estructuras mentales y los esquemas de conocimientos que se necesitan haber construido previamente. De igual manera, explica los resultados que espera obtener. El instrumento en general no es diseñado con base en un estudiante en específico, sino que se piensa en todos los alumnos en general, sin embargo, las construcciones que lleven a cabo los estudiantes dependerán de cada uno. (Villabona y Roa, 2016; Trigueros, 2005; Velasco, 2012).

Para Arnon et al. (2014) una Descomposición Genética puede ser diseñada a partir de diferentes fuentes de información, por ejemplo, de cómo comprende el concepto el investigador, con base en investigaciones sobre el concepto, libros de texto, datos obtenidos (entrevista), incluso basándose en presenciar una clase y ver dónde tiene conflicto el alumno.

Se resalta la importancia de la Descomposición Genética en la investigación, ya que proporciona una hipótesis correcta de la construcción del conocimiento y puede servir de base para el diseño de instrumentos que el profesor utilice en clase, además, puede explicar el porqué de las dificultades de los alumnos.

Para conseguir una buena aproximación de la construcción del conocimiento, es necesario que la Descomposición Genética sea probada empíricamente. Después del análisis de datos es probable que el modelo hipotético no sea acertado, en estos casos es imprescindible que sea Refinada, es por eso que se lleva acabo el ciclo de refinamiento. La primera parte del ciclo es la instrucción o instrumentos según sea el caso, que hace referencia a la actividad y/o instrumentos que se plantean a los alumnos; el Análisis de los datos permite describir cómo resultó la aplicación del instrumento, qué fue satisfactorio y qué es necesario cambiar. Por último, el Refinamiento es hacer las correcciones necesarias en la Descomposición Genética con el fin de que sea una buena aproximación. Este ciclo puede ser repetido hasta que se determine que el Refinamiento describe adecuadamente las construcciones mentales, por lo tanto, una Descomposición Genética se va Refinando a lo largo de la investigación (Arnon et al., 2014; Trigueros, 2005).

2.2.1.2 Diseño y aplicación de instrumentos

La segunda componente del ciclo de investigación tiene que ver con el diseño y la aplicación de instrumentos basados en los análisis teóricos. Después de tener la descomposición genética preliminar necesitamos documentarla para validarla o refinarla. Por ello es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mentales señaladas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluido pero surjan en los procedimientos realizados por los estudiantes (González y Roa, 2015, p.8).

2.2.1.3 Análisis y verificación de los datos

Por último, la tercera componente del ciclo de investigación es el análisis y verificación de los datos. En esta componente se analizan los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los datos obtenidos se analizan desde la descomposición genética preliminar teniendo en cuenta los elementos que no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas en la descomposición genética preliminar no se perciben. Después de este análisis obtenemos una descomposición genética refinada (González y Roa, 2015, p.8).

2.2.2 Uso de la teoría APOE para enseñar matemáticas en escuela elemental

Como ya se mencionó, en sus comienzos la teoría APOE fue desarrollada para ser utilizada en la educación superior, a través del tiempo se han hecho modificaciones en ella hasta lograr poder aplicarla en la educación elemental, en la cual los estudiantes ya aplican operaciones a objetos abstractos más que a concretos. Incluso, han surgido ideas sobre una nueva etapa cognitiva entre la estructura de Proceso y Objeto, algo totalmente distinto a lo que se tenía estructurado en los comienzos de la teoría (Arnon et al., 2014).

A pesar de que nuestro estudio sobre el concepto de ecuación lineal se ubica curricularmente en la educación media superior, hacemos uso de este apartado de la teoría APOE debido a que como ya se mencionó en el apartado de antecedentes, los estudiantes con discapacidad visual hacen uso del material didáctico concreto para aprender matemáticas, la diferencia en este caso es que dicho material será diseñado a partir del análisis teórico y además tomando en cuenta las dificultades físicas de los alumnos.

Al estar basada en las ideas de Piaget sobre que los estudiantes construyen conocimientos basados en sus experiencias, la teoría APOE menciona que los alumnos de escuela elemental están en el estadio de operaciones concretas, por lo que las reflexiones y conceptos sobre los cuales se apliquen acciones deben ser más concretos que abstractos, como lo son en la educación superior. Entendemos por concreto el uso de objetos reales ya sean físicos o imaginarios, mientras que abstracto se refiere al concepto matemático sin ninguna representación del mundo físico. Por lo tanto, los investigadores de la teoría APOE se han dado a la tarea de proponer niveles entre las diferentes estructuras mentales, de acuerdo a los datos experimentales que se han obtenido y analizado (Arnon et al., 2014).

Asimismo, tanto en Piaget como en la teoría APOE se resalta que los individuos que están en la etapa de operaciones concretas pueden desarrollar conceptos mentales abstractos, a partir de la reflexión sobre acciones que se realizan sobre lo concreto, es decir, las acciones aplicadas a los objetos físicos dan lugar a la interiorización en proceso y después a la encapsulación del proceso para lograr un objeto matemático abstracto en la mente de un niño (Arnon et al., 2014). A continuación, en las Figuras 10 y 11 mostramos la relación entre las estructuras y los mecanismos mentales para los estudiantes de escuela elemental y de postsecundaria.

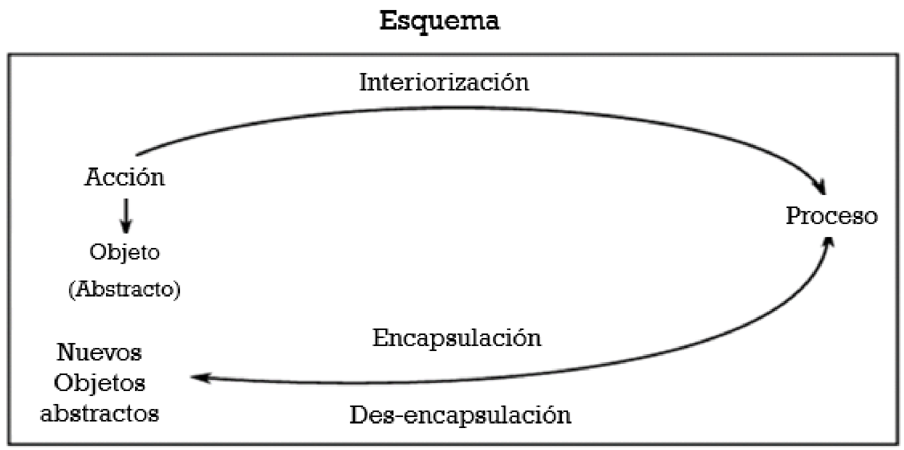

Figura 10. APOE para estudiantes de postsecundaria. Obtenido de: APOS Theory. Arnon et al. (2014), p. 153.

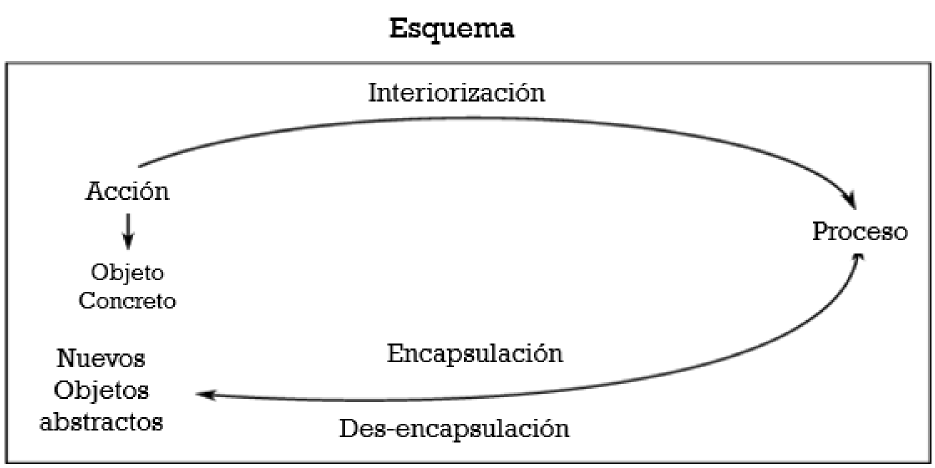

Figura 11. APOE para estudiantes de escuela elemental. Obtenido de: APOS Theory. Arnon et al. (2014), p. 154.

Según Arnon et al. (2014), Piaget distingue diferentes situaciones que se pueden presentar cuando se interactúa con material didáctico concreto: la primera “Ejercicio Simple”, en la que no necesariamente se obtienen conocimientos; la segunda “Experiencia Física” en la cual el estudiante manipula el material concreto abstrayendo propiedades de los objetos que lo conforma; y la tercera “Experiencia Lógico-Matemática” donde a partir de manipular los diversos objetos se construyen propiedades de Acción y de transformaciones que se aplican a los objetos.

La principal evidencia de que se ha llevado a cabo la interiorización se nota cuando el alumno es capaz de describir verbalmente cómo producir lo que ha hecho anteriormente sin el material didáctico concreto, por lo tanto, se sugiere establecer criterios en los cuales se haga distinción del uso que puede dar el estudiante a la imaginación para llevar a cabo una acción sobre objetos concretos imaginarios, es decir, cuando el estudiante ya no cuenta con el material concreto pero utiliza su imaginación para llevar a cabo el mismo procedimiento (Arnon et al., 2014). Sin embargo, en el caso de esta investigación se utilizará dicho material en todo momento debido a las características del contexto en el cual se lleva a cabo.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se describe la metodología utilizada en esta investigación, partiendo de las componentes metodológicas propuestas en la teoría APOE, para continuar con el uso del método de estudio de casos, el cual fue elegido para esta investigación por su interés en uno o varios casos, lo que resulta apropiado por el contexto en el que se hace el estudio.

Este trabajo de investigación utiliza una metodología de corte cualitativo, el cual se caracteriza por no seguir un proceso definido, es decir, va de lo particular a lo general y no se efectúa una revisión numérica ni un análisis estadístico (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Desde un punto de vista más específico, Garrido (2009) menciona que la investigación cualitativa en educación implica valorar lo subjetivo, lo centrado en la vivencia y en las experiencias de las personas, pues son ellas las protagonistas de lo que sucede en las instituciones educativas, y es por esto que se ha elegido un enfoque cualitativo para este estudio, pues se empareja de buena forma con las características del contexto en el que nos enfocamos.

Asimismo, la investigación es de tipo exploratorio y descriptivo, según Hernández, Fernández y Baptista (1998), el primero implica que "…el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes" (p.58), mientras que los descriptivos "buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis" (p. 60).

Estos tipos han sido elegidos con base en el tema de esta investigación, pues después de la revisión de la literatura podemos darnos cuenta de que existen pocas investigaciones al respecto, más en la educación media superior. De igual forma buscamos especificar las construcciones mentales en los estudiantes con discapacidad visual al aprender el concepto de ecuación lineal.

Por otra parte el estudio tendrá una temporalidad transversal, es decir, se presentará un panorama sobre la construcción de un concepto matemático en un grupo de estudiantes con DV en un determinado momento (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Respecto al estudio de casos, puede ser único o múltiple, depende del número de casos que se estudian, para ilustrar, representar o generalizar una teoría, es decir, los resultados que se obtienen de un estudio de casos se pueden generalizar a otros que se lleven a cabo en condiciones teóricas similares. En esta investigación nos enfocaremos a un caso, siendo este una muestra teórica de la comunidad de personas con discapacidad visual, siendo una muestra teórica aquella que se puede replicar o extender (Carazo, 2006).

De igual forma retomamos de la metodología del estudio de caso el principio de triangulación, el cual tiene el fin de corroborar la relación que existe entre la información de diversas fuentes. En nuestro caso las fuentes de información son la literatura revisada en torno a la enseñanza de las matemáticas a personas ciegas o con baja visión, aprendizaje del concepto de ecuación lineal; los datos obtenidos a partir de las entrevistas a alumnos y docente; y la información referente a la discapacidad visual.

3.1 Descripción de la población

En este apartado se describe el contexto en el cual se aplicaron los instrumentos de investigación, se acudió a un instituto especializado en brindar educación a personas con alguna discapacidad visual, así mismo, se incluye información sobre los estudiantes que realizaron las actividades, así como a un profesor del instituto.

3.1.1 Instituto Para Ciegos y Débiles Visuales (IPACIDEVI) “Ezequiel Hernández Romo”

El IPACIDEVI (Figura 12) fue fundado por el Lic. Alejandro Fernández Montiel, lleva más de 22 años brindando a las personas con discapacidad visual la oportunidad de estudiar en todos los niveles educativos, formarse en lo deportivo y además poder tener una integración laboral. De igual forma, se da atención personal y concienciación social a niños, jóvenes y adultos con la discapacidad. Este instituto tiene como misión: “Lograr la integración armónica del ciego y débil visual en los ámbitos educativo, social, laboral, cultural, artístico y deportivo, de tal forma que su inclusión sea el reconocimiento tanto de sus derechos como de su formación integral” (IPACIDEVI, 2020).

Figura 12. IPACIDEVI

Referente a lo educativo, el IPACIDEVI ofrece Intervención temprana, preescolar, primaria, secundaria, preparatoria en línea, preparatoria abierta y carrera técnica en masoterapia. Sobre la parte formativa se brindan clases de braille, orientación y movilidad donde se enseña a los estudiantes a ubicarse, cruzar y caminar en las calles, computación, inglés, actividades de la vida diaria, música, cocina, teatro, taller de lectura y redacción y educación física que implica las disciplinas paralímpicas como gol bol, atletismo y fut bol sala 5. Por último, se abarca la integración laboral y educativa, contando con un departamento de psicología y pedagogía, siendo el instituto para personas con discapacidad visual que brinda la atención integral más completa a nivel nacional.

Es importante mencionar que la educación que se ofrece en los niveles de primaria y secundaria pertenece al Sistema Educativo Estatal Regular (SEER), por lo cual se hacen llegar al instituto los libros en carácter común y en el sistema braille para los estudiantes ciegos y macro libros para los que tienen baja visión.

Respecto al nivel medio superior como ya se mencionó se divide en preparatoria abierta en la cual un profesor del instituto imparte clases que se solicitan para acreditar el nivel, por su parte, para la preparatoria en línea existe una alianza con el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) campus San Luis Potosí para inscribir a los alumnos en el sistema PrepaNet [1], con lo cual se cuenta con el apoyo del ITESM que como parte de una acción social sus alumnos acuden al IPACIDEVI como tutores, siendo ellos quienes explican los temas a los alumnos de PrepaNet y los apoyan en la realización de actividades y evaluaciones.

Respecto a los estudiantes, se reciben de diferentes partes de la república como Ciudad de México, Guanajuato, Zacatecas, Tabasco, Guerrero, Estado de México, Veracruz entre otros. Por lo tanto, el IPACIDEVI cuenta con casa hogar para asistir a los estudiantes foráneos que llegan en busca de una mejor opción de educación, en la actualidad son alrededor de 80 alumnos en todos los niveles educativos. Finalmente, es importante considerar que es una institución que sobrevive con base en donaciones, por lo tanto, no se pueden adquirir materiales didácticos que existen para personas con discapacidad visual que sean de costo elevado.

PrepaNet[1]: Es **una Preparatoria en línea del Tecnológico de Monterrey, diseñada con flexibilidad de horarios. Se compone de 25 materias, que el alumno podrá cursar en periodos tetramestrales, inscribiendo un mínimo de 2 y un máximo de 4 materias en cada uno (ITESM, 2020).**

3.2 Métodos, técnicas e instrumentos para alcanzar los objetivos específicos

Para alcanzar los objetivos específicos se utilizaran los métodos, técnicas e instrumentos que se propone en la teoría APOE.

- En el caso del objetivo particular 1 "Analizar y rediseñar la descomposición genética del concepto de ecuación lineal propuesta por Velasco (2012), que les permita a los estudiantes con DV desarrollar la comprensión del concepto de estudio" se utilizaron los siguientes métodos, técnicas e instrumentos.

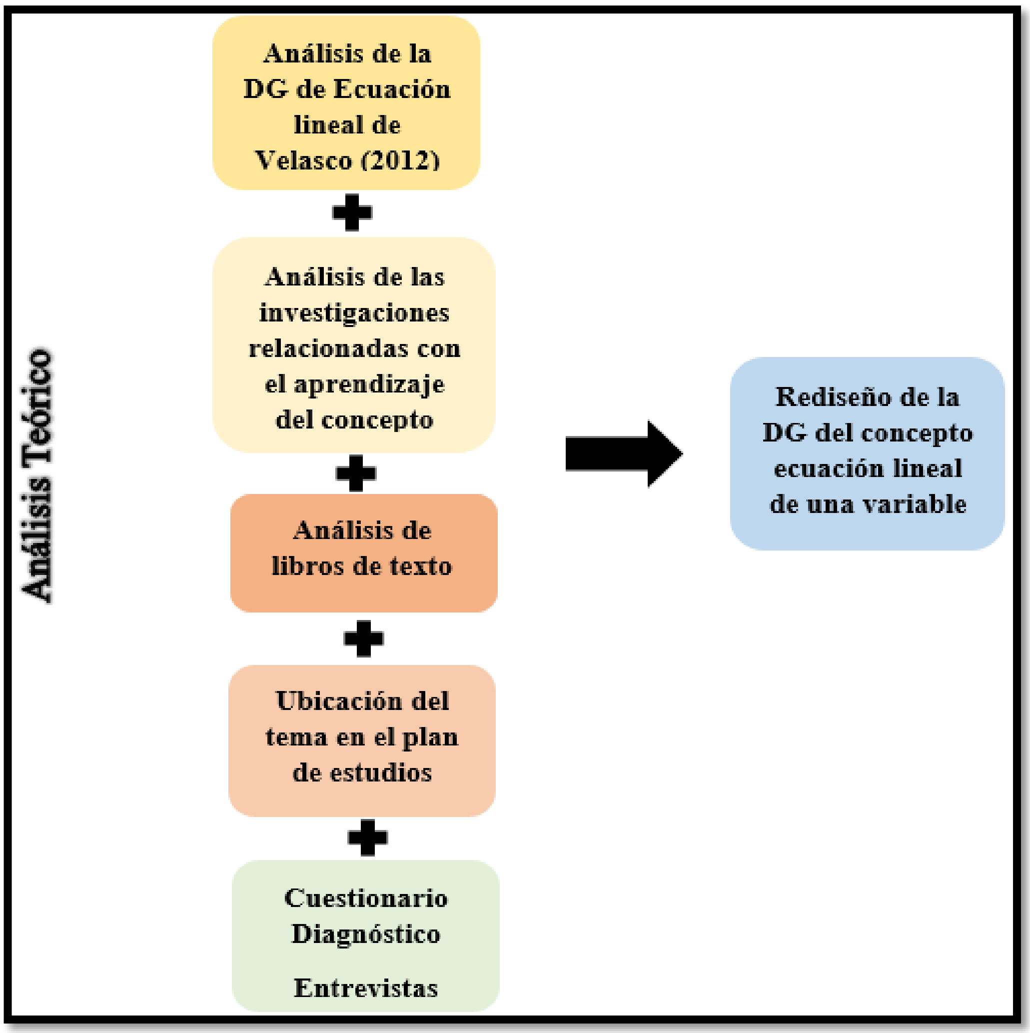

Figura 13. Análisis Teórico. Elaboración propia, Torres (2020).

- Para los objetivos 2 "Diseñar e implementar una secuencia didáctica y un material didáctico concreto para los estudiantes con discapacidad visual a partir de la descomposición genética" se planteó lo siguiente:

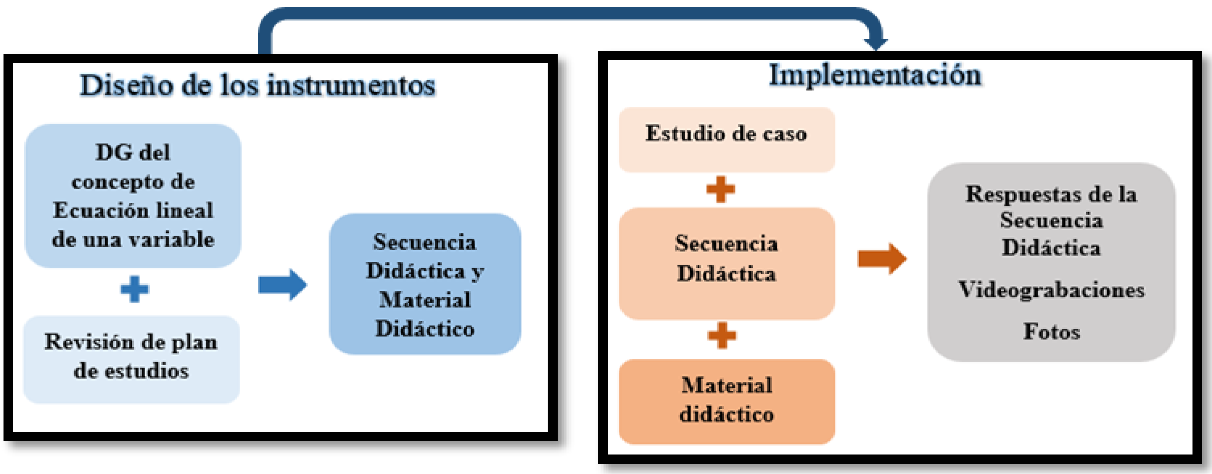

Figura 14. Diseño de instrumentos e Implementación. Elaboración propia, Torres (2020).

- Y por último para los objetivos específicos 3 y 4 "Analizar si el diseño de la secuencia didáctica promueve la construcción del conocimiento de ecuación lineal de una variable" y "Validar si la descomposición genética representa la construcción y comprensión del concepto de ecuaciones lineales de una variable para los alumnos con DV de esta investigación" se planteó lo siguiente:

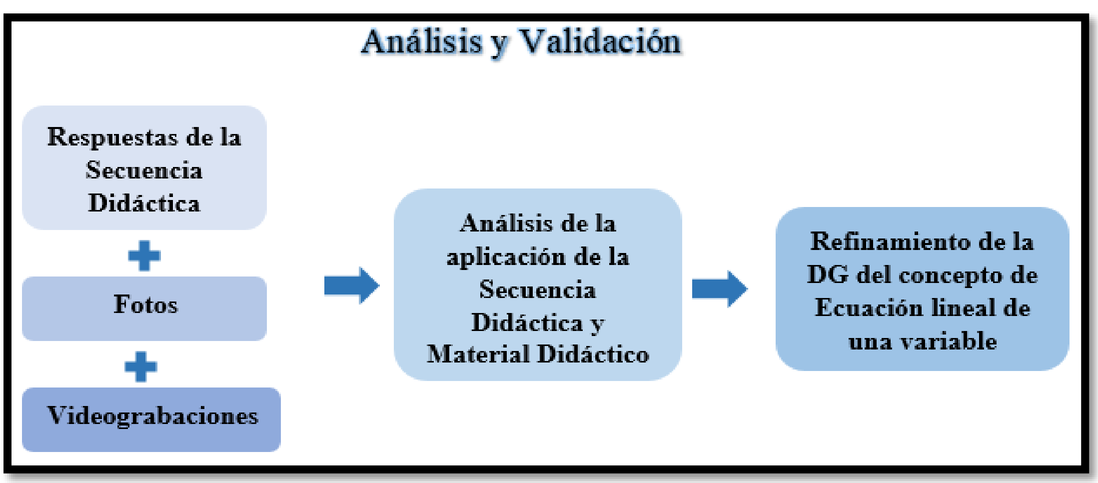

Figura 15. Análisis y Validación. Elaboración propia, Torres (2020).

Capítulo 4. Desarrollo del ciclo de investigación APOE

En este capítulo se desarrollan los tres componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE, es importante agregar que hacemos uso de un ciclo de investigación modificado 1) Análisis teórico del concepto de ecuación lineal retomando una descomposición genética (Velasco, 2012) para hacer adecuaciones según el contexto de interés; 2) Diseño y Aplicación de la secuencia didáctica en conjunto con el material didáctico; y 3) Análisis de los datos.

4.1 Análisis Teórico del concepto ecuación lineal

En este apartado presentamos el análisis teórico del concepto matemático, que en nuestro caso es el concepto de ecuación lineal de una variable, por lo que tomaremos en cuenta nuestra experiencia como alumnos y profesores, así como los resultados reportados de otras investigaciones. En este apartado presentamos la ubicación del concepto en el plan de estudios de bachillerato, cómo es presentado el tema en libros de texto, la aplicación de un cuestionario diagnóstico con los conocimientos que se necesitan previo al aprendizaje del concepto, su estructura matemática y la propuesta de rediseño de la descomposición genética de Velasco (2012).

4.1.1. Ubicación en plan de estudios y en libros de texto del concepto de ecuación lineal

A continuación, mostramos la ubicación del concepto en el programa de estudios de bachillerato y cómo se presenta el conocimiento de ecuación lineal en dos libros de texto, los cuales son los sugeridos por el Programa de estudios del primer semestre de Matemáticas I. Cabe señalar que se asume este programa en la investigación, debido a que el instituto se rige por éste, en el caso de la prepa abierta y de manera similar en prepanet.

Según el programa de estudios, realizado por la Secretaria de Educación Media Superior y la Dirección General de Bachillerato, ubica el contenido de Ecuación lineal en el Bloque VI, en la materia de Matemáticas I, al cual se le dedican 14 horas. A continuación, en la Figura 16 y 17 mostramos la tabla de contenido de dicho bloque.

Bloque	VI

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Ecuaciones lineales.	14

Propósito del Bloque
Resuelve modelos lineales que representan fenómenos de la vida cotidiana.

Interdisciplinariedad	Ejes Transversales
Química I. Taller de Lectura y Redacción I. Informática I. Ética I.	Eje transversal Social. Eje transversal Ambiental. Eje transversal de Salud. Eje transversal de Habilidades Lectoras.

Figura 16. Tabla de contenido. Recuperado de: Programa de Matemáticas I. Secretaría de Educación Pública (2018), p. 23.

CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 1.1 CG 4.1 CG 5.1 CG 5.6 CG 6.4	CDBM 1 CDBM 2 CDBM 4 CDBM 5	Ecuaciones lineales. • Una variable. • Dos variables. • Tres variables.	Representa las variables de un problema en su contexto. Deduce alternativas de solución a problemas reales. Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales. Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).	Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución. Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.

Figura 17. Tabla de contenido. Recuperado de: Programa de Matemáticas I. Secretaría de Educación Pública (2018), p. 24.

En el programa, se puede observar que el concepto funge como una herramienta para la interpretación de problemas que involucran ecuaciones lineales, por lo tanto, en un caso ideal los estudiantes tendrían una concepción de esquema del concepto de ecuación lineal. Por otra parte, se podría considerar que los alumnos han construido el concepto de ecuación lineal, en al menos una concepción acción, ya que los estudiantes han llevado este concepto desde el nivel secundaria.

4.1.2 Análisis de los libros de texto

En el programa de estudios se dan sugerencias sobre los libros de texto que puede utilizar el profesor para la enseñanza del concepto de ecuación lineal y de otros temas matemáticos. Por tanto, de los libros que se sugieren, se seleccionaron dos, siendo estos los que generalmente utilizan en el instituto: Sullivan (2006) y Colegio Nacional de Matemáticas (2009). El objetivo del análisis de los libros de texto fue saber el cómo es que se presenta el concepto de ecuación lineal de una variable en ellos.

- **Álgebra y Trigonometría,** Capítulo 1. Ecuaciones y Desigualdades. 1.1 Ecuaciones lineales (Sullivan, 2006).

En el comienzo del capítulo el autor define ecuación en una variable de la siguiente forma

> "Una ecuación en una variable es una proposición en la que dos expresiones, donde al menos una contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja de otra manera, los valores admisibles de la variable son los del dominio de la variable. Los valores admisibles de la variable, si los hay, que proporcionan una proposición verdadera se llaman soluciones o raíces de la ecuación. Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones" (p. 84).

Asimismo, se resalta que una ecuación lineal se puede llamar de primer grado cuando el lado izquierdo es un polinomio de grado uno. También, señala que una ecuación lineal en una variable es equivalente a una de la forma $ax + b = 0$ donde a y b son reales y a diferente de cero.

Después, define qué es la ecuación identidad y las equivalentes, siendo las primeras aquellas en las que se satisface para todos los valores de la variable y ambos lados están definidos. Respecto a las equivalentes, menciona que son las que tienen el mismo conjunto solución (Sullivan, 2006).

De igual forma, menciona que hay cuatro pasos para resolver una ecuación (p.86) y cuatro para establecer problemas aplicados (p. 92):

1. Enumere cualesquiera restricciones sobre el dominio de la variable.
2. Simplifique la ecuación sustituyendo la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes siguiendo los procedimientos enumerados.
3. Si el resultado del paso 2 es un producto de factores iguales a 0, use la propiedad del producto cero e iguale cada factor a 0.
4. Verifique su solución o soluciones.

Establecer problemas aplicados

1. Lea el problema con cuidado, quizá dos o tres veces. Ponga atención especial en la pregunta que se hace con el fin de identificar lo que busca. Si puede, determine las posibilidades reales para la respuesta.
2. Asigne una letra (variable) para representar lo que busca y, si es necesario, exprese cualesquiera cantidades desconocidas en términos de esta variable.
3. Haga una lista de todos los hechos y tradúzcalos en expresiones matemáticas. Éstas toman la forma de una ecuación (o, más adelante, de una desigualdad) que involucra la variable. Si es posible, dibuje un diagrama con las etiquetas adecuadas como ayuda. En ocasiones una tabla o gráfica será útil.
4. Resuelva la ecuación para la variable y luego responda la pregunta, por lo general, usando una oración completa. PASO 5: Verifique la respuesta con los hechos del problema. Si concuerdan, ¡felicitaciones! Si no concuerdan, intente de nuevo.

Sullivan (2006) en su libro presenta una definición del concepto de ecuación lineal, describiendo desde lo que implica como las expresiones que la forman y los lados de la igualdad, hasta el encontrar la o las soluciones, sin embargo, a pesar de que en el proceso de resolución menciona las ecuaciones equivalentes, deja de lado conceptos como equivalencia e igualdad, lo cual puede traer complicaciones para los estudiantes pues si no mantienen la equivalencia entre los lados de la igualdad no se podrán encontrar las ecuaciones equivalentes del segundo paso para la resolución de la ecuación lineal. Asimismo, se hace mención del término variable, pero no se específica cuál de sus tres usos se está utilizando en este concepto.

- Por otro lado, el libro **Álgebra** del Colegio Nacional de Matemáticas (2009), en el Capítulo 6. Ecuaciones de primer grado, 132. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

El capítulo comienza con las definiciones de Igualdad, Ecuación, Solución de una ecuación, Grado de una ecuación y ecuaciones de primer grado con una incógnita (p.352).

- **Igualdad**: Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.
- **Ecuación:** Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.
- **Solución de una ecuación:** La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.
- **Grado de una ecuación:** El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).
- **Ecuaciones de primer grado con una incógnita:** Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

Después, hace una clasificación de tipos de ecuaciones lineales, haciendo diferencia entre las que implican signos de agrupación, las fraccionarias, aquellas que incluyen el uso del valor absoluto y las que utilizan literales. Por último menciona los problemas de aplicación.

En el caso del libro Álgebra del Colegio Nacional de Matemáticas, encontramos definiciones en específico de términos relevantes en el tema, en este caso sí se presenta una definición de igualdad, pero al igual que en el libro de Sullivan (2006), sigue haciendo falta lo referente a la equivalencia. Posteriormente, complementa bien el tema mostrando los diferentes tipos de ecuaciones que se pueden presentar.

Finalizado el análisis de los libros de texto, en específico de cómo es que se presenta el tema de ecuación lineal de una variable, se toma en cuenta en torno al rediseño de la descomposición genética de Velasco (2012). Asimismo, retomaremos la definición que se presenta en Sullivan (2006) para formar parte de la secuencia didáctica.

4.1.3 Entrevistas

En este apartado se muestra la entrevista realizada a un profesor de matemáticas del Instituto para Ciegos "Ezequiel Hernández Romo", de igual forma se presenta la entrevista de tres estudiantes que participaron en el estudio. El objetivo de estas entrevistas es conocer sobre el docente y cuáles son las dificultades que él encuentra en los estudiantes del Instituto; asimismo conocer las características que tienen los estudiantes que participaron en el estudio.

4.1.3.1 Profesor de Matemáticas del IPACIDEVI

- **Nombre del docente de Matemáticas en secundaria y de preparatoria abierta:** Feliciano
- **Título Profesional**: Licenciado en Psicología y Maestría en Psicoterapia.
- **Experiencia docente con estudiantes con DV:** Alrededor de 25 años impartiendo clase en el instituto.
- **Recursos Didácticos que utiliza en la clase de Matemáticas:** libros de texto de nivel básico y medio superior, uso de ábaco, calculadora parlante y algunos materiales con los que cuenta el instituto.
- **Dificultades encontradas en los estudiantes (según el profesor):** Los estudiantes no tienen los algoritmos de ciertos conceptos, lo cual trae consigo dificultades en su aprendizaje.

4.1.3.2 Alumnos del IPACIDEVI

- **Nombre del estudiante:** Flor
- **Edad:** 18 años
- **Institución Educativa:** Instituto Para Ciegos y Débiles Visuales, nivel medio superior en preparatoria abierta. Llegó a los 13 años para ingresar a secundaria, antes estudiando telesecundaria regular.
- **Ciudad de nacimiento:** Guanajuato
- **Grado:** Segundo año en preparatoria abierta
- **Tipo de discapacidad visual:** Ciega de nacimiento
- **¿Ha reprobado algún grado escolar?** No se ha reprobado ningún grado escolar. Reprobó la materia de inglés
- **¿Cuál y motivo o causas de la pérdida de año escolar?** No hubo perdida de año
- **¿Te gustan las matemáticas? ¿Por qué?** No me gustan las matemáticas, se me complican mucho. Me tardo mucho en entender pero sí les entiendo.
- **¿Qué temas de matemáticas se te dificultan? ¿Por qué?** No hubo respuesta clara debido a que no recordaba los temas.

- **Nombre del estudiante:** Napoleón
- **Edad:** 17 años
- **Institución Educativa:** Instituto para Ciegos y Débiles Visuales, inscrito en el Bachillerato en línea, programa PrepaNet. Alumno del IPACIDEVI desde aproximadamente 12 años.
- **Ciudad de nacimiento:** Guanajuato
- **Grado:** Quinto tetramestre
- **Tipo de discapacidad visual**: Ciego de nacimiento
- **¿Ha reprobado algún grado escolar?** No reprobó ningún grado escolar, y sólo ha reprobado la materia de Ética.
- **¿Cuál y motivo o causas de la pérdida de año escolar?** No hubo perdida de año
- **¿Te gustan las matemáticas? ¿Por qué?** Sí me gustan porque creo que es una herramienta que se ocupa en la vida diaria, se me dificulta el multiplicar rápido, sumar y restar rápido. En matemáticas sacaba 7 por no preguntar y en examen le batallaba.
- **¿Qué temas de matemáticas se te dificultan? ¿Por qué?** Le batallaba, que yo me acuerde con la ecuaciones, pero se me dificulta aprenderme las fórmulas y los procesos que se hacen, para cuando haga un ejercicio no preguntar o esperar a que alguien me diga, que ya se me quede grabado el proceso.

- **Nombre del estudiante**: David
- **Tipo de Discapacidad:** Ciego total de nacimiento
- **Institución Educativa:** IPACIDEVI desde los 2 años. Secundaria incorporada al Sistema Educativo Estatal Regular (SEER)
- **Grado:** Tercer grado
- **¿Ha reprobado algún grado escolar?** No reprobó ningún grado escolar
- **¿Te gustan las matemáticas? ¿Por qué?** A mí las matemáticas me gustan mucho porque me mantienen despierto y pensando con el cerebro al mil, me entretienen mucho. Porque te agiliza el pensamiento y hace que tu mente trabaje más rápido, yo pienso que entre más estudies matemáticas se te hace mucho más fácil la vida.
- **¿Qué temas de matemáticas se te dificultan? ¿Por qué?** Las ecuaciones con dos incógnitas, me cuesta un poco de trabajo resolverlas pero me entretiene porque me hacen pensar mucho.

4.1.4 Cuestionario Diagnóstico

En este apartado se presenta el cuestionario diagnóstico que se aplicó a dos estudiantes del IPACIDEVI, y posteriormente los resultados que se obtuvieron.

El cuestionario diagnóstico (Anexo 1), tuvo como objetivo indagar sobre los conocimientos previos que debe tener el estudiante antes del aprendizaje del concepto de ecuación lineal de una variable, de igual forma identificar cómo es que resolvían las ecuaciones lineales y con ello tener evidencia de cómo proceden cognitivamente, con el objetivo de considerarlo en el rediseño de la descomposición genética preliminar y en el diseño de la secuencia didáctica. Cabe mencionar que este cuestionario se basó en la DG del concepto de ecuación lineal propuesto por Velasco (2012) (Anexo 3).

El cuestionario diagnóstico tuvo una duración de aproximadamente una hora, en la cual los estudiantes podían hacer uso de su cuaderno, regleta, punzón y un material didáctico (Figura 19). Constó de 4 ítems, los cuales se irán describiendo con su objetivo y su análisis de los resultados obtenidos con el estudiante.

1. Realiza las siguientes operaciones:

- $15 - 34 + 18$
- $(-5)(1)(-2)$
- $-11x + 8x - 2x + 14x$
- $(-x)(6x)$
- $-24 \div 8$
- $-(5x + 10x) + (-18 + 5x - 6x)$

2. Simplifica las expresiones suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.

- $2x - [x + 2x - (3x + 2x)]$
- $2(3x + 18)$

El objetivo de los ítems 1 y 2, es identificar si el alumno cuenta con los conocimientos referentes a las operaciones con los números reales, propiedades de los números reales, jerarquía de operaciones, propiedades de la igualdad viendo al signo igual como resultado y realizar operaciones que afecten a la variable (como número general). De acuerdo a Velasco (2012) estos conocimientos son necesarios para la construcción del concepto de ecuación lineal. Es decir, con estos ítems identificaremos si el estudiante cuenta con un proceso de operaciones con números reales, cuándo puede identificar y utilizar las diferentes operaciones que se pueden realizar con los números reales (suma, resta, multiplicación y división), asimismo identificar el proceso de propiedades de los números reales cuando utiliza e identifica el neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo, etc. Ambos procesos se coordinan para dar respuesta a los incisos que se solicitan en los ítems 1 y 2.

En el caso del ítem 2, además de coordinar los procesos de operaciones con los números reales y el proceso de propiedad de los números reales, se pretende identificar la concepción proceso de la jerarquía de operaciones, lo cual se evidenciará cuando el estudiante aplique la ley de la jerarquía de operaciones.

3. Calcula el valor numérico de la expresión, para el valor que se indica:

- $2x + 3$; cuando $x = 5$
- $-4x + 18$; cuando $x = 7$

Con el ítem 3 el objetivo fue identificar si los estudiantes evidenciaban el esquema del concepto de variable, éste incluye que el estudiante utilice los tres usos de la variable, aunque en este caso se quiere evidenciar el uso de la variable como incógnita.

4. Indica en los siguientes incisos si alguno es una ecuación.

a) $3x^2 + 2x + 16$
b) $2x + 6 = 0$
c) $2x^2 + 2 = 4$
d) $15x + 12$
e) $10 - 13x = x$
f) $(x + 2)^2$
g) $12 = 2x + 2$
h) $x^2 + 2x + 1$

Y por último con el ítem 4, tiene el objetivo de indagar sobre lo que el estudiante sabe acerca del concepto de ecuaciones lineales, en particular si el estudiante puede hacer diferencia de lo que es una ecuación y una expresión. Lo cual permite identificar su concepción proceso sobre el concepto de ecuación lineal, es decir, si identifica cuándo es una ecuación lineal de una variable o de dos variables, o bien si es una ecuación cuadrática.

4.1.4.1 Evidencia de la aplicación del cuestionario Diagnóstico

Resaltamos que el cuestionario diagnóstico fue de tipo exploratorio, fue aplicado con dos estudiantes con discapacidad visual (Napoleón y Flor), pertenecientes al IPACIDEVI que ya han cursaron el nivel secundaria, llevando las materias de matemáticas con el mismo docente que el resto de sus compañeros en la institución, y que continúan el bachillerato en el mismo instituto, sólo que Flor (Figura 19) en preparatoria abierta y Napoleón (Figura 18) en preparatoria en línea. Lamentablemente por causas ajenas a nosotros y al instituto para ciegos no se pudo llevar a cabo la aplicación con más alumnos.

En el caso del ítem 1, ambos estudiantes mostraron dificultad en el dominio de leyes de los signos, operaciones con los números reales debido a que no podían efectuar una operación en la que a un número positivo se le restara uno negativo y el resultado fuera negativo, por lo tanto, se da una evidencia de que el estudiante no cuenta con el proceso de propiedades de los números reales, ya que no identifica cómo utilizar la ley de los signos en la suma de operaciones (tomando como referencia la DG de Velasco (2012)).

Figura 18. Cuestionario diagnóstico de Napoleón. Elaboración propia (Torres, 2020).

En el caso del ítem 2, ambos estudiantes no hacen uso de paréntesis para representar una multiplicación. Se destaca que pueden operar con términos semejantes siempre y cuando no implique un resultado negativo, sin embargo, no se identifica la incógnita como uno de los usos de la variable, ya que al efectuar una multiplicación por ejemplo $(2)(3x)$, ambos estudiantes no podían obtener el resultado porque no sabían cuál era el valor de la x, buscando una constante como resultado. Esto nos hace suponer que los estudiantes manejan sólo la variable como número general, tal vez a una estructura de proceso.

En el caso del ítem 3 en donde el objetivo era comprobar si el estudiante es capaz de sustituir y evaluar números reales en la variable, pudimos notar que se pudieron resolver los dos ejercicios, confirmamos que el estudiante sabe utilizar correctamente la variable como número general, dando más evidencia de lo que ya se había mencionado respecto a que tiene el proceso de ese conocimiento y puede utilizarlo en estos casos.

Por último en el ítem 4, en el caso de Napoleón no se obtuvieron respuestas debido a que no sabía identificar una ecuación, por lo tanto, al parecer el estudiante no tiene conocimiento sobre el concepto en general, ni sobre la solución de ecuaciones de primer grado con una variable. En cambio Flor (Figura 19) pudo dar información al respecto, respondiendo que aquellos incisos que contenían el signo igual eran ecuaciones debido a estaban más completas respecto a las expresiones, de igual forma se le cuestionó cuál era la diferencia entre una operación y una ecuación, haciendo referencia a una expresión algebraica con lo de operación, identificando que existe una diferencia aunque concretamente no sabía cuál es, por lo tanto es posible que la estudiante tenga nociones del concepto de ecuación, sin embargo, no es el conocimiento suficiente, además, no tiene conocimiento referente a la resolución de ecuaciones.

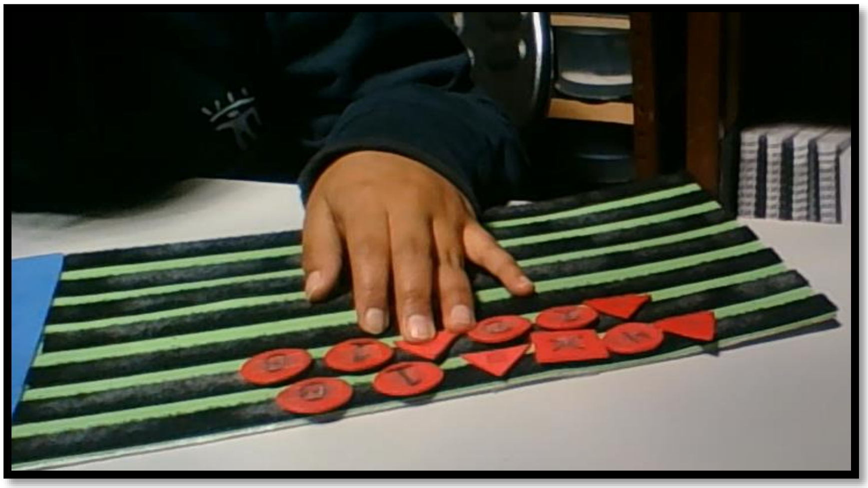

Figura 19. Cuestionario diagnóstico de Flor. Elaboración propia (Torres, 2020)

Es importante destacar que en parte de la aplicación del cuestionario diagnóstico los estudiantes estuvieron limitando sus respuestas, debido a que creían que el resultado de este afectaría de alguna forma sus calificaciones o que sería evidenciado dentro de la escuela, por lo tanto, no daban a conocer lo que en realidad pensaban creyendo que lo que contestaban siempre estaba erróneo. A pesar de que se aclaró que esto no tenía repercusión en su desempeño académico, se continuó notando cierta restricción al responder.

De acuerdo a esta aplicación del cuestionario diagnóstico, notamos que había aspectos que deberían ser tomados en cuenta para la descomposición genética y por consecuente en el cuestionario.

Partiendo de que a pesar de que el estudiante identifica los números reales, parece que no tiene el proceso de las operaciones de los números reales pues tiene dificultad para aplicarlas, de igual forma el proceso de ley de los signos y el proceso de jerarquía de operaciones, pues van resolviendo desde la primera operación que pueden leer en el ejercicio hasta la última, no se toma en cuenta la jerarquía para elegir qué se debe operar primero. Además, no distinguen los diferentes usos de la variable, utilizando sólo el de número general, realizando operaciones algebraicas sustituyendo la variable por cualquier número para obtener un resultado.

Otro aspecto importante es que no se tenía en cuenta las propiedades del signo igual, destacando que los alumnos sólo lo reconocían como símbolo del resultado. De igual forma, resaltamos que sin la presencia del material, el estudiante tiene dificultad al simplificar expresiones ya sea numéricas o algebraicas, debido a que es difícil de memorizar e ir reduciendo los términos. Es por ello que consideramos que el material que utilizamos puede promover que el estudiante logre desarrollar las operaciones necesarias para la comprensión del concepto de ecuación lineal.

Por otra parte, consideramos que aunque el programa de estudios solicita que el estudiante utilice el concepto de ecuación lineal como herramienta para la solución de los problemas, la aplicación del cuestionario diagnóstico mostró que los estudiantes no tienen construido el concepto de ecuación lineal, y de igual forma algunos conocimientos previos que se sugieren en la DG de Velasco (2012) como por ejemplo, el proceso de propiedades de operaciones con los números reales o bien el proceso de jerarquía de operaciones.

4.1.5 Conocimientos previos para el aprendizaje del concepto de Ecuación Lineal de una variable

En este apartado se describen los conocimientos necesarios que debe tener un estudiante para la construcción del concepto de ecuación lineal de una variable, comenzando con el concepto de número real, a tal grado de que el estudiante pueda diferenciar entre números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir, manejar los números reales en una concepción de esquema, sin embargo en este trabajo nos centraremos en los números enteros. Además, se debe tener el proceso de operaciones con los números reales, para poder formar expresiones numéricas.

El alumno debe poseer el proceso de propiedades de los números reales: neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo e inverso multiplicativo. Este proceso en coordinación con el de operaciones con los números reales brindará a los estudiantes la posibilidad de construir procesos en torno a formar ecuaciones equivalentes.

Otro conocimiento necesario es el de igualdad, que en el caso ideal debería estar en una concepción de esquema, involucrando el proceso de propiedades del signo igual: la propiedad aditiva, la propiedad multiplicativa y la propiedad reflexiva, que van a promover en los alumnos la construcción del proceso de ecuaciones equivalentes, en la cual como su nombre lo dice podrán formar ecuaciones equivalentes a una original.

También, los estudiantes deben poder comprender los diferentes usos del signo igual, por ejemplo el proceso del signo igual como indicador del resultado o el proceso en el que el signo igual indica si dos expresiones son equivalentes.

Dentro del esquema de igualdad, el proceso de miembros de la igualdad, con el cual se debe ser consiente que una igualdad consta de dos miembros, en los cuales los estudiantes podrán colocar expresiones numéricas o algebraicas y así formarán ecuaciones.

El objeto de variable también es relevante para el desarrollo del concepto de ecuación lineal, pues de él es de donde surge el proceso de expresión algebraica. Por lo tanto, el estudiante debe ser consciente de que la variable es un objeto al cual se le pueden aplicar operaciones y que puede ser utilizada de tres formas distintas:

- Incógnita, "un número cuyo valor o valores específicos se pueden determinar a partir de las restricciones de un problema dado" (Trigueros, Reyes, Ursini, y Quintero, 1996, p.353).
- Número general, "representación de un número cualquiera en expresiones algebraicas tales como tautologías y expresiones abiertas" (Trigueros et al., 1996, p.353).
- Relación funcional, "en la que la relación se concibe como la correspondencia punto por punto entre dos conjuntos de valores" (Trigueros et al., 1996, p.353).

Aún en el objeto de variable, se debe tener el conocimiento referente al proceso de evaluación o sustitución de variable, en el cual los estudiantes deben ser capaces de evaluar números reales, esto para desarrollar en ellos procesos en torno a la comprobación del resultado para corroborar que se cumpla la igualdad en una ecuación.

Por último, referente al concepto de polinomios, los estudiantes deben saber al menos realizar operaciones con monomios, para ser utilizados mientras se hace operaciones con expresiones algebraicas.

4.1.6 Descomposición Genética del concepto de Ecuación lineal de una variable

En este apartado, presentaremos la DG modificada del concepto de ecuación lineal de una variable, propuesta por Velasco (2012).

Para el desarrollo de la descomposición genética se tomó en cuenta lo obtenido de la revisión de literatura sobre el aprendizaje del concepto, la aplicación del cuestionario diagnóstico y las entrevistas aplicadas a estudiantes del IPACIDEVI, asimismo el análisis de libros de texto y su ubicación en el programa de estudio.

Además, en esta DG se hicieron modificaciones con base en la población en la que enfocamos la investigación, obteniendo un rediseño de la misma.

Las modificaciones realizadas a la descomposición genética de Velasco (2012) implicaron sólo tomar en cuenta lo referente a la resolución de ecuaciones de primer grado con una variable, partiendo desde la construcción del concepto de ecuación como tal, hasta la resolución y comprobación de la solución de la ecuación de primer grado. Con esto, se deja fuera lo referente a las ecuaciones lineales con dos incógnitas, llevando de la mano el uso de la variable como relación funcional y por lo tanto la tabulación y graficación, debido a las características de la discapacidad, sin embargo, esto no quiere decir que el estudiante ciego o con baja visión no pueda hacer estas actividades, pero llevarlas a cabo implican el uso, creación o adaptación de diversos materiales.

A continuación se describe la descomposición genética preliminar del concepto de ecuación de primer grado de una variable (Figura 20).

Si el estudiante tiene una concepción de esquema del concepto de número real, el objeto de número real se desencapsula en el **proceso de número real** y se coordina con el **proceso de operaciones de número real**, esta coordinación da como resultado el **proceso de expresión numérica abierta** (se nombra abierta porque el estudiante conoce los pasos que se pueden aplicar en la expresión para simplificarla pero no necesariamente la simplifica) cuando el estudiante identifica la relación entre números, signos de operación $(+, -, *, \div)$, paréntesis, corchetes y/o llaves.

Posteriormente el **proceso de expresión numérica abierta** se coordina con el **proceso de igualdad**, esta coordinación implica las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales, y el uso de paréntesis, corchetes y/o llaves. Esta coordinación, se da cuando el estudiante manipula y simplifica diferentes expresiones numéricas haciendo uso de las operaciones y además escribe un signo igual para indicar el resultado en alguno de los miembros de la igualdad. Cabe señalar que en esta coordinación se refleja el uso correcto de la regla de los signos para las operaciones, así como el orden de las operaciones. De igual forma, esa coordinación da origen al **proceso de tautología (**que a su vez puede ser encapsulado en el objeto tautología), en esta repetición de colocar el símbolo de igual, el estudiante puede poner el resultado de la operación en alguno de los dos miembros de la igualdad.

Cuando se generaliza el **proceso de expresión numérica abierta** y se toma algún número real que la conforma y sustituirlo por una variable, se estará haciendo la acción de construir una expresión algebraica con una variable. En este punto se está trabajando con la variable como número general, al evaluar una expresión algebraica, es decir, sustituir un número real en cada variable que contenga la expresión, lo cual genera el **proceso de expresión algebraica**.

Si el estudiante tiene una concepción de **objeto del concepto de igualdad** puede tomar el **proceso de miembros de la igualdad** y lo coordina con el **proceso de expresión algebraica**, esto cuando se escribe una expresión algebraica en cada uno de los miembros de la igualdad, obteniendo el **proceso de ecuación**. Es necesario destacar que las ecuaciones pueden ser de diferentes tipos, dependiendo del tipo de expresión numérica o algebraica que se coloqué en los miembros de la igualdad.

Como ya se mencionó, el alumno puede generar diferentes ecuaciones y aplicar acciones sobre ellas con el fin de encontrar ecuaciones equivalentes y por lo tanto su solución. Entonces, el estudiante puede construir un esquema de ecuación tomando una colección de acciones, objetos y procesos que puede coordinar con los procesos de miembros de la igualdad y de expresión algebraica abierta.

Respecto a la solución de una ecuación, se requiere que el estudiante trabaje sobre la igualdad, lo cual implica el uso de las propiedades de la igualdad y las operaciones con los números reales, los cuales pueden ser interiorizados como procesos. La solución de la ecuación puede ser encapsulada en objeto sobre el cual se pueden aplicar nuevas acciones, como lo es sustituir la solución en la ecuación original.

Por otra parte, cuando el estudiante identifica que en la ecuación sólo hay una variable de grado uno y sabe que esta puede estar en un miembro de la igualdad o en ambos, al repetir esta acción y reflexionar sobre ella construye el proceso de ecuación lineal con una variable.

Comenzando con el proceso de solución, el estudiante debe tomar el proceso de ecuación de lineal de una variable para identificar en qué miembro de la igualdad se encuentra la variable de la que se requiere conocer el valor.

Se continúa con la coordinación del proceso de ecuación lineal de una variable con el proceso de jerarquía de operaciones y el de operaciones de los números reales, construyendo el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación.

Con la coordinación de los procesos de ecuaciones lineales con una variable junto con el de identificación de las operaciones que debe aplicar para encontrar la solución de una ecuación lineal y el proceso de ecuaciones equivalentes, se está realizando lo que es conocido como despeje de la variable al buscar la solución de la ecuación.

Una vez que se ha llegado a la solución es necesario desencapsular el objeto de ecuación para considerar el proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad, de esta forma se corrobora que la solución es la correcta.

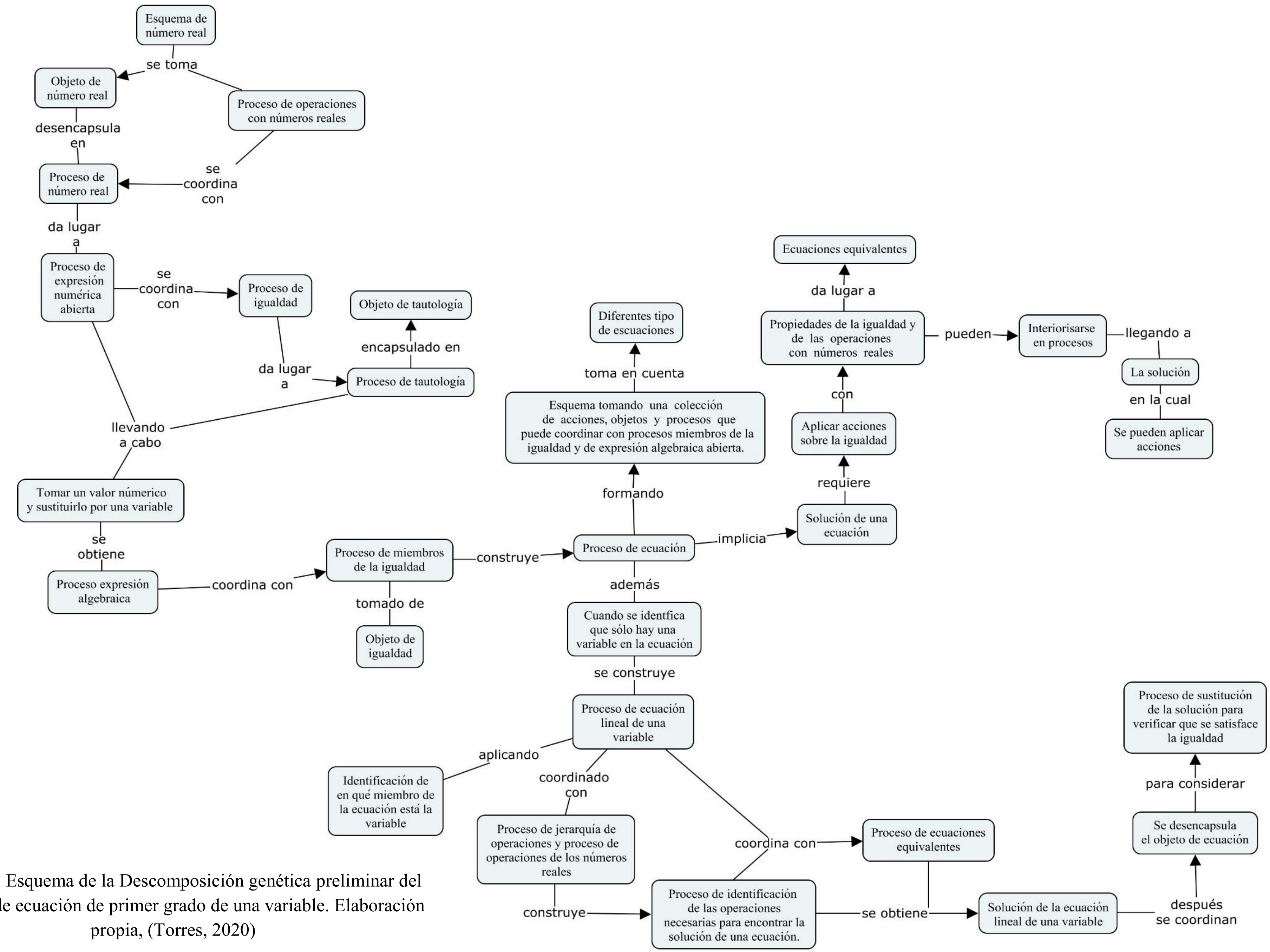

Figura 20. Esquema de la Descomposición genética preliminar del concepto de ecuación de primer grado de una variable. Elaboración propia, (Torres, 2020)

4.2 Diseño y aplicación de instrumentos

Como ya se mencionó anteriormente, la segunda parte del ciclo de investigación es donde se describe el diseño de los instrumentos que fueron implementados con el estudiante con discapacidad visual a partir del análisis teórico, con el fin de validar u obtener una descomposición genética refinada.

4.2.1 Diseño de Material didáctico "Ecuación lineal para todos"

En este apartado se describe el material didáctico diseñado para que los estudiantes realizarán las actividades que se planean en la secuencia didáctica. Con base en lo mencionado en la literatura referente a la enseñanza de las matemáticas con alumnos que tienen discapacidad visual, es necesario el uso de una herramienta o material concreto por el cual ellos puedan acceder y de alguna forma manipular aspectos de un concepto matemático.

Aunado a lo mencionado en el apartado 2.2.2 Uso de la teoría APOE para enseñar matemáticas en escuela elemental, referente al aplicar acciones a un objeto concreto y la posibilidad de generar conceptos mentales abstractos a partir de ello, buscamos que a partir de la secuencia didáctica los alumnos apliquen acciones con el material concreto "Ecuación lineal para todos" (objeto concreto) para generar el conocimiento mental abstracto de Ecuación lineal de una variable.

El material concreto fue diseñado a la par de la Descomposición Genética, por lo que consideramos desde un inicio que debería tener ciertas características que pudieran permitir la construcción del concepto ecuación lineal.

"Ecuación lineal para todos" es una herramienta destinada a propiciar el aprendizaje del concepto de ecuación lineal, éste puede ser utilizado tanto en el nivel básico (secundaria) como en el nivel medio superior.

Consideramos que puede brindar al alumno con discapacidad visual la oportunidad de manipular las operaciones referentes al tema. Por otra parte, debido a la discapacidad visual y al tipo de enseñanza, la mayoría de los estudiantes recurren al uso de cálculo mental y la memoria, por lo cual suelen recurrir a errores en la resolución de situaciones matemáticas. Estos no son visibles para los profesores que imparten la materia, por tanto con este material se pretende que el profesor cuente con una herramienta que le permita visualizar las operaciones que hace el estudiante y así poder darle tratamiento a los errores que cometen. Por ejemplo, cuando se enseña el concepto de ecuación lineal a una persona normovisual, generalmente el profesor escribe lo siguiente:

$$2x + 3 = 13$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Por lo que los estudiantes generalmente copian la resolución de la ecuación de la misma forma en la que fue escrita por el profesor. Pero en el caso de un alumno con discapacidad visual no suele ser de esta forma, porque en el sistema braille se vuelve complejo hacerlo pensando en que deben de colocar la regleta y puntear, y después voltear la hoja para leer, aunado a lo complicado que se vuelve corregir y volver a escribir en la misma zona; de lo anterior surge el diseño de la herramienta "Ecuación lineal para todos".

A continuación describimos el material concreto:

- **Tablero:** Rectángulo de papel cascaron cubierto con foami de 15 cm de altura y 64 cm de largo, dividido a la mitad por una tira del mismo material (puede ser distinto color) de 4 cm de ancho y 15 cm de largo. Además, tiras de velcro a lo largo del tablero simulando los renglones, la cantidad de ellos depende de las medidas que se dé a la herramienta (Figura 21). El objetivo de poner las tiras de velcro es porque pretendemos que el estudiante pueda manipular las ecuaciones de la siguiente forma:

$$2x + 3 = 13$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

De acuerdo a Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006), se describe que cuando los estudiantes desarrollan escalonadamente la ecuación lineal, se promueve la comprensión de equivalencia, y por ello consideramos la importancia de que los estudiantes con discapacidad visual puedan manipular a la ecuación de esa manera para la comprensión de ecuaciones equivalentes.

Figura 21. Tablero Ecuación lineal para todos.
Elaboración propia (Torres, 2020)

- **Variable:** Fichas cuadradas de foami de 5 cm de lado, con velcro en el reverso de la ficha para colocarla en el tablero y una muesca para indicar la orientación del punteo del sistema braille, deberán contener la representación de la variable en carácter común así como en sistema braille (Figura 22).
- **Constante:** Fichas circulares de foami de 2 cm de radio, con velcro en el reverso y muesca, deberán contener la representación de los números del 0 al 9 en carácter común así como en sistema braille (Figura 22). La idea de tener la escritura para normovisuales y en sistema braille es con el objetivo que el profesor pueda observar qué es lo que el alumno está resolviendo o en qué está pensando según los procedimientos que escriba. Además, el estudiante con DV no deja de lado el uso del sistema braille como ocurre con otros materiales concretos, por lo tanto se apropia las combinaciones de puntos que son utilizadas en matemáticas.

Figura 22. Fichas variable y constante. Elaboración propia (Torres, 2020).

- **Signos más y menos:** Fichas en forma de triángulo equilátero con altura entre los 4 y 5 cm con velcro en el reverso y muesca, además utilizando foami sencillo y rugoso, siendo el primero para el más y el segundo para el menos. De igual forma cuentan con la simbología en braille de los signos (Figura 23).
- **Paréntesis:** Fichas en forma de óvalo con eje mayor entre los 5 cm y eje menor de 1cm con velcro al reverso y muesca. Debe contar con su representación en sistema braille (Figura 23).

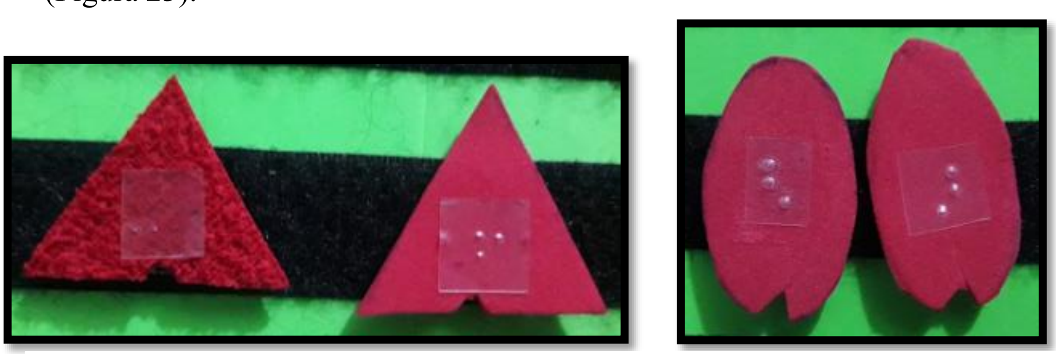

Figura 23. Fichas signo menos, más y paréntesis. Elaboración propia (Torres, 2020).

- **Caja organizadora:** Contenedor con divisiones para organizar las fichas, de tal forma que su ubicación sea sencillo de ubicar por el estudiante (Figura 24).

Figura 24.Caja organizadora. Elaboración propia (Torres, 2020).

Como ya se mencionó, el material Ecuación lineal para todos, brinda la oportunidad a los alumnos con discapacidad visual de trabajar con ecuaciones lineales de una forma distinta a la que están acostumbrados, dando relevancia al signo igual y a las ecuaciones equivalentes. Aunado a esto, brinda la oportunidad para que el docente pueda observar qué es lo que el alumno está resolviendo o en qué está pensando según los procedimientos que escriba, por otro parte, es accesible al docente que no domine el sistema braille al incluir el carácter común en las piezas. Un ejemplo de cómo sería una representación en el material es el siguiente, si se le pide al alumno escribir $-(3x-17)=9(x+6)$ queda expresado como se muestra en la Figura 25.

Figura 25.Uso del material didáctico Ecuación lineal para todos. Elaboración propia (Torres, 2020).

4.2.2 Diseño de instrumento

En esta sección se describe una secuencia didáctica, que tiene como objetivo obtener información sobre las construcciones y mecanismos mentales que tiene un estudiante sobre el concepto de ecuación lineal de una variable al dar solución a cada una de las actividades; ésta fue diseñada con base en la descomposición genética preliminar. Constó de dos sesiones de una hora y media cada una, con un total de seis actividades repartidas en tres por sesión. A continuación se presenta la secuencia didáctica.

- Primera sesión (Una hora y media)

Actividad 1 (30 minutos)

En esta actividad buscamos reforzar los conocimientos que ya debería tener el estudiante, en el proceso de operaciones con números reales (específicamente en los números enteros), proceso de expresión, proceso de propiedad de los números reales y su coordinación con el proceso de signo igual.

En primer lugar los estudiantes escribirán una expresión numérica inventada por ellos en uno de los lados del tablero y con el uso del signo igual (propiedad reflexiva y de simetría) proceden a encontrar el resultado. Por ejemplo:

$$5 + 12 - 8 =$$
$$17 - 8 = 9$$
$$9 = 9$$

Posteriormente el docente pregunta:

a) ¿Qué número tendría que sumar a -10 para que el resultado sea -15?

b) ¿Qué número tendría que sumar a -5 para que el resultado sea 2?

c) ¿Qué número tendría que sumar a 6 para que el resultado sea -3?

d) ¿Qué número tendría que restar a 8 para que el resultado sea -2?

Para continuar el docente solicita que resuelva las siguientes operaciones y que justifique su respuesta:

- $25 + (-12) + 8 =$
- $28 - (13 + 16) =$
- $30 - 8 + 2 - 24 =$

En el caso de los incisos a, b, c y d, y los que solicita posteriormente el docente, se busca que el estudiante coordine el proceso de propiedad de los números reales, proceso de expresión númerica abierta y el proceso de igualdad. Poniendo énfasis en el uso correcto de la regla de los signos para las operaciones, así como interpretar al signo igual como un símbolo que indica el resultado de la operación que se encuentra en alguno de los miembros de la igualdad, en este caso el símbolo igual sirve para indicar el resultado de una operación. Asimismo con este ejercicio se busca que el estudiante empiece a generalizar el proceso de expresión numérica abierta.

Actividad 2 (25 minutos)

Con la actividad 2 se pone en juego el proceso de expresión numérica. Es decir, en este caso el objetivo es poner en juego los procesos expresión, igualdad y propiedad de los números reales, con ello se intenta la generalización del proceso de expresión numérica. En otras palabras, se espera que el estudiante identifique que los incisos propuestos son tautologías, es decir, que los miembros de la igualdad representan al mismo número. De igual forma, que los alumnos comiencen a familiarizarse con la estructura de una ecuación y comprueben la equivalencia que debe de existir en cada uno de los miembros de la igualdad.

En esta actividad, se solicita a los estudiantes que resuelva cada una de las expresiones numéricas en su respectivo miembro de la igualdad.

- $2 + 3 = 4 + 1$
- $12 - 6 = 3 + 3$
- $25 - 16 = 27 - 18$

En este inciso el profesor debe preguntar ¿se mantuvo la igualdad al realizar las operaciones numéricas? ¿Por qué? Si observan que en cada miembro de la igualdad los valores numéricos son diferentes y aun así se conserva la igualdad. Posterior a ello, los estudiantes deben reescribir en su tablero el primer inciso

$$2 + 3 = 4 + 1$$

Luego se les debe dar la indicación de que agreguen el número 2 en el miembro izquierdo, una vez realizado lo solicitado se le pregunta ¿la igualdad se mantiene? (Se espera que se den cuenta que no se mantiene la igualdad) ¿por qué? (deben responder que porque en un lado se vuelve 6 y en el otro lado es 5). Entonces se les pregunta qué se debe hacer para que tenga la misma igualdad (sin quitar el número 2).

Actividad 3 (35 minutos)

La actividad 3 busca que el alumno haga la acción de sustituir un valor numérico por una variable, por lo tanto se propicie la construcción del proceso de expresión algebraica, para ser coordinado con el proceso de miembros de la igualdad y así construir el proceso de ecuación. Además, que distingan las diferentes formas en las que se puede presentar una ecuación lineal de primer grado con una variable, poniendo en juego el proceso de identificar el tipo de variable. En otras palabras, el estudiante agrega una variable a una expresión numérica formando una expresión algebraica, asimismo utiliza el signo igual y sus dos miembros para colocar expresiones en cada uno. Además identifica el uso de la variable como incógnita, debido a que busca un número en específico que satisfaga lo que se le plantea

También se pretende que los estudiantes retomen la actividad 2, por ejemplo ¿qué número tendría que sumar a -18 para que el resultado sea -29? Y se les pida que escriban ¿cómo expresan esa situación?

$$-18 \quad + \qquad = -29$$

Entonces el estudiante debe escribir la ecuación anterior, entonces allí se le pide que el valor que desconoce puede llamarle x o cualquier otra letra.

Asimismo, se pedirá a los estudiantes que encuentren los valores faltantes ya utilizando x para hacer referencia al valor faltante.

- $-8 = 12 - x$
- $12 = -3x$
- $-12 + x = 12$

Al finalizar se retoma la definición de ecuación de Sullivan (2006) que dice que "Una ecuación en una variable es una proposición en la que dos expresiones, donde al menos una contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja de otra manera, los valores admisibles de la variable son los del dominio de la variable. Los valores admisibles de la variable, si los hay, que proporcionan una proposición verdadera se llaman soluciones o raíces de la ecuación. Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones" (p. 84).

- Segunda sesión (Una hora y media)

Actividad 4 (20 minutos)

Con esta actividad queremos propiciar la construcción del proceso de ecuación lineal de una variable, esta construcción se da cuando el estudiante aplica la acción de identificar que sólo hay una variable en la ecuación, que es de grado uno y la acción de identificar en qué miembro de la ecuación está la variable. Es decir, de una lista de ecuaciones de primero y segundo grado, expresiones numéricas y algebraicas, los alumnos identificarán cuáles de ellas son ecuaciones de primer grado de una variable y las diferencien del resto, por sus características.

Se les pedirá a los estudiantes que indiquen cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones son de primer grado con una variable.

a) $x + 3 = 2x - 2$
b) $2x + 5 = 10 - 3x^2$
c) $20 + 15 = 12x$
d) $10 + 35 = 45$

Actividad 5 (40 minutos)

En esta actividad buscamos promover la construcción de proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación, el cual surge a partir de la coordinación del proceso de ecuación lineal de una variable que se puso en juego en la actividad pasada, el proceso de jerarquía de operaciones y el proceso de operaciones de los números reales, de la construcción de conocimientos previos del estudiante. Además, motivar la construcción del proceso de ecuaciones equivalentes y su coordinación con el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación para formar el proceso solución de la ecuación lineal con una variable.

También buscamos que los alumnos comprendan que no es factible resolver todas las ecuaciones al tanteo, por lo tanto, deben comprender el proceso de solución a partir de obtener ecuaciones equivalentes haciendo uso de las propiedades de la igualdad, las propiedades de los números reales, jerarquía de operaciones y operaciones con números reales.

Encontrar el valor de *x* en las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 4$

b) $2x + 5 = 15$

Posterior a ello, si dan la respuesta, preguntar ¿cómo obtuvo el resultado? Si dicen al tanteo, sería bueno pregunta ¿cómo lo harían sin el tanteo? Recordarles como lo hicieron en lo numérico (¿se mantuvo la igualdad al realizar las operaciones numéricas? ¿Por qué?). Con ello se pretende que el estudiante analice la equivalencia, así que sería bueno mirar cómo realizan la equivalencia con ecuaciones sencillas para posteriormente presentarles la ecuación de abajo.

Ahora, los estudiantes escribirán la siguiente expresión $12 + 3x - 4 = 12 - x$, y buscarán resolverla al tanteo, dando valores a la variable, respetando que debe ser el mismo en ambos lados y debe cumplir la igualdad. (Antes de esto hay que esperar a que ellos intenten ver la equivalencia por sí solos. Y eso se logra por medio de las preguntas sobre la equivalencia numérica que hicieron en la sesión pasada y con sus conjeturas intenten hacer las ecuaciones que propones, por último explicar el método.)

En este momento el profesor explica el uso de la propiedad de la igualdad aditiva y multiplicativa, encontrando ecuaciones equivalentes según sea el caso. (¿Se mantuvo la igualdad al realizar las operaciones numéricas? ¿Por qué?)

Utilizando el mismo método del ejercicio anterior, se resolverán las siguientes ecuaciones.

- $5x + 16 = 10x + 6$
- $2x - 19 = 5(2x + 1)$
- $-9x + 5 = -2(5 + 6)$
- $4x - 28 = -4(x - 3)$

Actividad 6 (30 minutos)

Para la actividad 6 pretendemos que además de poner en juego las construcciones mentales propiciadas de las actividades anteriores, se construya el proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad. Es decir, que además de que se les pide a los estudiantes encontrar la solución de una ecuación lineal de una variable, deben sustituir el valor encontrado en la ecuación para corroborar que se cumple con la igualdad.

A partir de lo anterior, los alumnos resolverán la siguiente ecuación y comprobarán si el resultado encontrado satisface la igualdad inicial:

- $5x - 9 = 6x - 2$

4.3 Aplicación de la Secuencia Didáctica y Material didáctico Ecuación lineal para todos

En esta sección mostramos cómo fue la aplicación de la secuencia didáctica en conjunto con el material didáctico concreto diseñado para el estudiante David, que como ya se mencionó en su entrevista es un alumno ciego total de tercer grado de secundaria, es decir, se encuentra a meses de ingresar al nivel medio superior, es por eso que su participación en esta investigación se vuelve relevante.

En la aplicación de la Primera sesión (Figura 26) se contó con un tiempo de una hora y media en el cual se concluyeron con las tres actividades previstas, el tiempo de cada una fue aproximadamente el que se tenía estipulado. La aplicación fue realizada en la biblioteca de la escuela, estando presente sólo el estudiante, utilizando una mesa de trabajo para colocar la herramienta.

Primero se familiarizó al estudiante con el material concreto, por lo que pudo manipular correctamente las fichas e identificar el braille en ellas, además de aprenderse la localización de cada una en la caja organizadora, continuando con la escritura de expresiones. Para así proceder con la ***actividad 1***, en la cual se le solicitaba resolver operaciones con números positivos y negativos, como por ejemplo "**¿Qué número tendría que sumar a -10 para que el resultado sea -15?**" y " $\mathbf{25 + (-12) + 8 =}$", dicha actividad tomó 20 minutos para ser desarrollada.

Posteriormente, en la ***actividad 2*** David comenzó a trabajar igualando dos expresiones, con ejercicios del tipo $\mathbf{2 + 3 = 4 + 1}$, en donde se le cuestionó sobre si el resultado era una igualdad, asimismo, se agregó constantes en los miembros de la igualdad para que el estudiante fuera consiente del proceso que se tiene que seguir para mantener la equivalentes los dos miembros y así poder llegar a una igualdad encontrando el resultado final. Esto en alrededor de 25 minutos.

La ***actividad 3*** demoró aproximadamente 30 minutos, en ella se le pidió a David que introdujera una variable formando la estructura de una ecuación lineal de una variable. Después se plantearon ecuaciones como $\boldsymbol{-12 + x = 12}$ para que el estudiante las resolviera, para lo cual utilizó el tanteo. Para finalizar la actividad 3 y la primera sesión, se lee al alumno una definición de ecuación Sullivan (2006) y a su vez se identifica qué características la conforman.

Figura 26. Primera sesión. Elaboración propia (Torres, 2020).

La aplicación de la Segunda sesión (Figura 27), estaba prevista para ser realizada en una hora y media, sin embargo, tomó media hora más de lo esperado. En la ***actividad 4*** David no tuvo ninguna dificultad al identificar cuáles de los incisos dados eran ecuaciones lineales de una variable y explicar por qué lo eran y por qué se descartaba el resto. Incluso le tomó menos tiempo del que se tenía planeado.

Sin embargo, la ***actividad 5*** abarcó más tiempo del que tenía asignado, pues implica el proceso de resolución de ecuaciones lineales de una variable a partir de ir formando ecuaciones equivalentes más simplificadas a la anterior. En esta actividad sólo se resolvieron dos ejercicios en aproximadamente una hora.

Por lo tanto, la **a*ctividad* 6** tuvo que reducirse a sólo un ejercicio, que implicó la resolución de una ecuación lineal, para proceder con la corroboración del resultado sustituyendo el valor obtenido en la ecuación general.

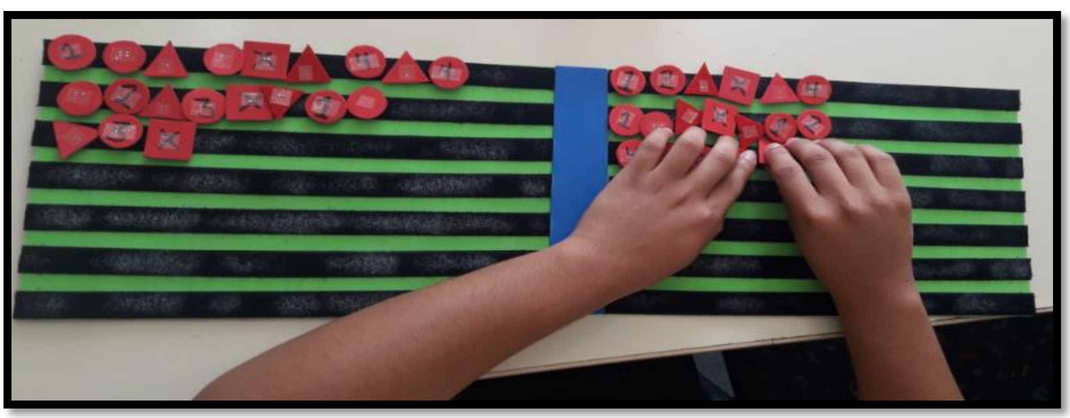

Figura 27. Segunda sesión. Elaboración propia (Torres, 2020).

4.4 Análisis de los datos

En este apartado se presenta el análisis de los datos obtenidos de la aplicación de la secuencia didáctica que permitieron validar la descomposición genética.

4.4.1 Análisis de la aplicación

Respecto a la ***actividad 1***, al inicio David mostró una situación similar a lo ocurrido con el cuestionario diagnóstico aplicado a Flor y Napoleón (p. 52), debido a que el mismo tipo de operaciones causaron conflicto en él, es decir, los conocimientos que poseían los estudiantes eran similares, sin llegar a las estructuras que se espera que se tengan en ese nivel. Por lo tanto se procedió a dar una explicación del cómo proceder en estas situaciones y se recordó lo referente a las leyes de los signos. Por ejemplo en $12 - 15 =$, los alumnos daban como resultado 3, inclusive una representación de tipo $-10 + 15 =$, resultaban complejas o confusas (Figura 28), debido a que están acostumbrados a que no se presente el número negativo primero. Esto nos muestra que el estudiante no ha coordinado su proceso de expresión numérica abierta y su proceso sobre la propiedad de la igualdad, según la DG preliminar del concepto.

Para resolver los últimos ejercicios de esta actividad "$\mathbf{25} + (-\mathbf{12}) + \mathbf{8} =$" y "$\mathbf{28} - (\mathbf{13} + \mathbf{16}) =$" se buscó que el alumno utilizará el tablero, debido a que resolvía las operaciones de manera mental, en ocasiones cayendo en errores debido a eso. Además, intentaba recordar la operación que se le pedía en cada momento, aún si la tenía escrita en el tablero no la revisaba cuando tenía duda sobre qué era lo que se le pedía, dando a notar la costumbre de memorizar y operar con cálculo mental, por lo cual constantemente se le recordaba que podía usar el tablero para facilitar algunos procedimientos.

En dichos ejercicios el estudiante pudo encontrar el resultado con la guía del profesor, respondiendo a cuestiones en el primero y segundo ejercicio como:

> *Profesor: Respecto al primer ejercicio ¿Cómo se puede simplificar* $+(-12)$*?*
> *David: El resultado tiene que ser de acuerdo a los signos. Queda 13, porque el 25 es un número positivo y -12 es negativo, y como 25 es más grande entonces es 13. Y 13 + 8 son 21*
>
> *Profesor: ¿Qué pasa con lo que está dentro del paréntesis (13+16)?*
> *David: El resultado va a ser negativo. Primero hay que restarle 13 al 28, no es cierto, este se puede hacer de forma diferente, el pasado lo hice así porque sólo había un número dentro del paréntesis, aquí hay dos, primero hay que resolver lo que está adentro del paréntesis y ya al final lo que está afuera. Queda menos 1. Sí entretiene esto, sí es entretenido.*

En el extracto anterior, se puede observar que el estudiante David, ha reflexionado sobre los procesos de operaciones con los números reales, y más aún muestra una coordinación del proceso de expresión numérica abierta y el proceso de igualdad, al simplificar la expresión numérica abierta, esta reflexión se da a través de las preguntas que plantea el profesor y por el uso del material didáctico. Al inicio recurría a la memorización, sin embargo al empezar a utilizar el material empieza a reflexionar sobre las operaciones que está realizando con los números reales.

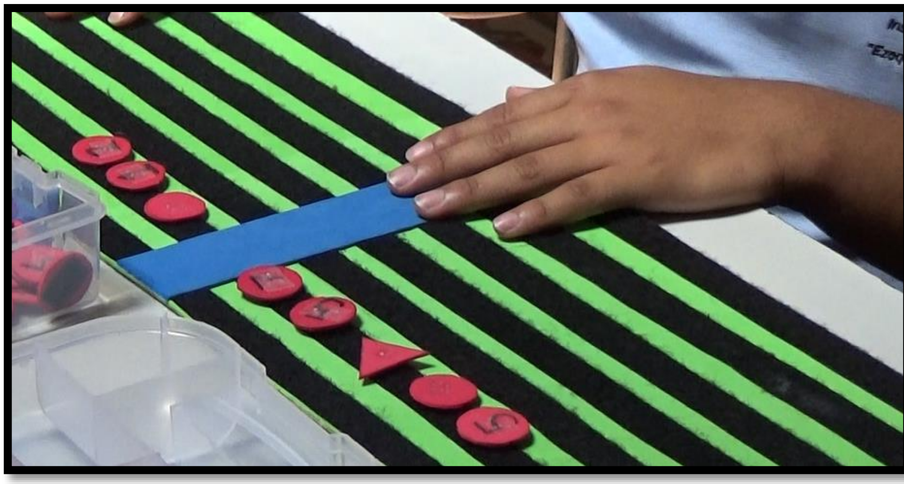

Figura 28. Análisis de actividad 1. Elaboración propia (Torres, 2020).

Posteriormente en la ***actividad 2*** se solicita al estudiante que resuelva cada una de las expresiones numéricas en su respectivo miembro de la igualdad, cuestionando sobre si es igual lo que está en la parte derecha a la izquierda del tablero (Figura 29), a lo que David en el primer caso respondió:

> *David: No, no sí es lo mismo porque 2 más 3 es 5 y 4 más 1 es 5 y el resultado es lo mismo, sólo que en el que está de este lado se utiliza una cantidad un poco más grande de números, son de unos valores más grandes.*

Demostrando que el resultado de resolver en ambos lados de la igualdad lleva al mismo resultado que es 5, es decir, a una tautología. Sin embargo, añade que de un lado hay valores más grandes (4 más grande que 3 y 2), haciendo referencia a que son diferentes los valores en los miembros de la igualdad, pero que llevan al mismo resultado. En este punto, el estudiante demuestra poner en juego su conocimiento referente a los significados del signo igual, viéndolo no sólo como expresión de resultado, sino como expresiones que son equivalentes.

En este momento se aprovechó para reforzar su conocimiento sobre equivalencia, por ejemplo en el caso de $2 + 3 = 4 + 1$ se tienen dos expresiones equivalentes, a pesar de que ambas expresiones llevan al mismo resultado, no se observa la equivalencia hasta que obtiene $5 = 5$, por lo tanto el resto de los incisos pudo contestar sin mayor dificultad. De igual forma, en la segunda parte de la actividad en donde se agrega una constante a un miembro del tablero y se cuestiona sobre si sigue siendo equivalente y qué hay que hacer para que se mantenga la igualdad, David contesta de forma correcta que se debe agregar una constante igual en el otro miembro, construyendo procesos en torno al signo igual como símbolo de relación de equivalencia. Lo cual refleja que David esta camino a la construcción del proceso de expresión algebraica.

En la actividad 2, David mostró tener el proceso de expresión numérica, sin embargo, lo referente al concepto de igualdad no estaba desarrollado en la misma estructura, por lo que el estudiante a lo largo de la sesión estuvo trabajando en la construcción del proceso de igualdad y asimismo el proceso de tautología. Cabe señalar que al darnos cuenta que el estudiante, no contaba con las estructuras necesarias del concepto de igualdad, en parte de ello por las características del sistema braille, es decir, para un estudiante con DV no resulta sencillo el operar como lo hace un normovisual con lápiz y papel, difícilmente con regleta y punzón se puede estar operando entre diferentes renglones y después desmontar la regleta para leer lo que escribió y volverla a montar para seguir escribiendo, no es factible hacerlo. Es por eso que dentro de la actividad 2 también se trabajó en la construcción del proceso de miembros de la igualdad, pues el estudiante sólo veía el signo igual para obtener un resultado, una vez que había resuelto la operación de forma mental.

Entonces el alumno no operaba entre los miembros de la igualdad, asimismo, desconocía las propiedades de la igualdad, para lo cual el uso del material concreto fue benéfico para construir el proceso de propiedades de la igualdad, ya que da la posibilidad al estudiante de trabajar en ambos miembros de la igualdad como un normovisual, agregando y quitando en esta caso constantes, cosa que hacerlo en braille no es nada práctico, por lo cual, parte importante de nuestra herramienta es la división que simboliza el signo igual en la ecuación, pues para poder hacer manipulaciones en una ecuaciones es necesario comprender que el signo igual representa una relación de equivalencia (Knuth, McNeil & Alibali, 2006). Además, fue posible explicar con el ejemplo de la balanza lo referente al equilibrio (Figura 29), de esta forma se comenzó con la construcción de nuevos procesos en él, pues al finalizar la actividad el estudiante ya hacía distinciones entre equivalencias e igualdades. Lo cual reflejaba que tenía una concepción proceso de igualdad y tautología.

Figura 29. Análisis actividad 2. Elaboración propia
(Torres, 2020).

En la ***actividad 3*** comienza con el profesor cuestionando **¿Qué número tendría que sumar a -18 para que el resultado sea -29?** Y que en el tablero se estructurara de la form**a** $\mathbf{-18 \quad + \qquad = -29,}$ obteniendo como respuesta:

David: Es igual 29, lo que hice fue buscar un número que sumado a 18 me dé 29 y es 11, entonces el valor de la equis es menos 11.

En este punto se destaca que el procedimiento utilizado para llegar a la solución es el tanteo, pues no efectuó ningún procedimiento para obtener en específico el valor buscado, sino que fue probando con números hasta llegar al 29. Sin embargo se puede apreciar en el extracto de David, que empieza a construir el proceso de expresión algebraica, al sustituir el valor faltante por una *x*. Esta misma idea la extrapola en la resolución de la ecuación de una variable, es decir, David utiliza el tanteo para dar respuesta a lo que se le está pidiendo, por lo que aún no ha construido el concepto de proceso de una ecuación lineal de una variable, por ejemplo en el ejercicio $\mathbf{12 = -3}\boldsymbol{x}$ responde:

David: Es cuatro, pero es -12, pero acá tenemos 12 positivo, entonces tendría que ser -4. La equis vale 4 negativo y el resultado es 12.

En la actividad 3 (Figura 30) David, realizó las acciones de tomar un número real y sustituir para determinar un valor exacto para construir el proceso de expresión algebraica. Esto lo realizó de nuevo con los ejercicios de la actividad 2, en ellas él sustituyó el número por la incógnita. Posteriormente, el estudiante realizó las ecuaciones de la actividad 3 de la misma forma que realizó la actividad 2, es decir, remplazando un número que satisfaga la ecuación al azar.

Figura 30. Análisis actividad 3. Elaboración propia
(Torres, 2020).

Al comenzar la segunda sesión, se empezó con la ***actividad 4*** (Figura 31), en la cual se plantean diferentes incisos y se le pide al estudiante que identifique aquellas que son ecuaciones lineales de una variable, respondiendo lo siguiente:

David:

$\boldsymbol{x+3=2x-2}$ *Sí, porque no tiene más símbolos, más incógnitas, sólo tiene una incógnita que es la x*

$\boldsymbol{2x+5=10-3x^2}$ *No, ya trae una elevación*

$\boldsymbol{20+15=12x}$ *Sí es de primer grado, porque igual sólo tiene una equis y no está elevada.*

$\boldsymbol{10+35=45}$ *No, pues como se ve no es una ecuación porque no tiene incógnita ni nada.*

De esta forma corroboramos lo realizado un día anterior, además de un cambio en el conocimiento de David, pues ahora sabe cuáles son las características que conforman una ecuación lineal de una variable. De igual forma aplicó correctamente las acciones de identificar en qué miembro de la igualdad se encontraba la variable y saber de qué grado era. Por lo tanto, comienza con la construcción del proceso de ecuación lineal de una variable, pues identifica cuando se trata de una ecuación lineal, pero no es suficiente para determinar que cuenta con dicho proceso.

Figura 31. Análisis actividad 4. Elaboración propia (Torres, 2020).

Posteriormente se continuó con la ***actividad 5***, esta actividad representó ser la de mayor demanda de ambas sesiones, pues fue en donde se abarcó el método para encontrar la solución a partir de formar ecuaciones equivalentes cada vez más simples, dejando de lado el tanteo como método de resolución. En el segundo ejercicio $\mathbf{2x+5=15}$ sólo se tuvo dificultad al identificar que *2x* es un solo término que significa 2 veces el valor de *x*, pues el estudiante resolvía de la siguiente forma:

> *David: La equis vale 8, porque 2+5 es 7 y si le sumas 8 es 15*

Tomando en cuenta a la variable por separado, mostrando no tener el proceso de variable como objeto al cual se le aplican operaciones, por lo tanto el profesor da una explicación al respecto hasta que se vuelve a plantear el mismo ejercicio, pero ahora se responde:

> *David: Entonces el 5 igual, porque 5 + 5 son 10 más 5 es 15*
>
> *Profesor: ¿Cómo obtuviste ese resultado?*
>
> *David: Igual haciendo la multiplicación de 2 x 5, busqué un número que multiplicado me diera un número aproximado al 15, pude haber hecho la multiplicación de 3 x 5 pero ya era 15, hice mejor 2 x 5 más 5.*

A pesar de haber obtenido el resultado correcto del ejercicio, aún David hace uso del cálculo mental y del tanteo para encontrar la solución a las ecuaciones.

Posteriormente, se plantea una ecuación que no es tan trivial resolver con el uso del tanteo, debido a que es el tipo de ecuación con la variable en ambos miembros, algo que no se había presentado en la secuencia hasta este punto $\mathbf{12 + 3x - 4 = 12 - x.}$ Una vez que el estudiante intentó resolverla sin éxito, se le cuestiona cuál es el procedimiento que utiliza al resolver una ecuación, y si sabía qué implicaba hacer un despeje, a lo que respondió respectivamente:

David: Pues iba siguiendo el orden de las operaciones (por orden de aparición conforme está escrita la ecuación, de izquierda a derecha) hasta que me diera el resultado aproximado, sólo que aquí me confundió un poco.

David: Sí, quitar el número o el símbolo que esté estorbando sumando o restando, por ejemplo en el caso del 12x tendríamos que despejar la equis porque no la deja pasar (despejar variable haciendo operaciones con el 12 que tiene como constante). Tiene que pasar de lado de la igualdad y si está sumando tiene que pasar restando.

Con lo anterior David muestra tener poco conocimiento sobre el tema, aunque no sabe aplicarlo del todo en las actividades que se le plantean, entonces procedemos a escribir el primer ejercicio de esta actividad $x + 3 = 4$ para explicar el procedimiento de resolución a partir de ecuaciones equivalentes. Después, se le pidió al estudiante que resolviera $2x + 5 = 15$ como se hizo en la ecuación anterior, dando la iniciativa al estudiante que comenzó agregando un +3 y luego un +2 del lado izquierdo, buscando que quedaran números similares en ambos lados de la igualdad. Por lo tanto, se tuvo que estar interviniendo en cada paso para recordar el proceso de resolución y que utilizará los renglones en el tablero para escribir las ecuaciones equivalentes que iba encontrando y evitar que recurriera a su memoria, lo cual no es malo, pero en el álgebra se requiere reflexionar sobre los procesos involucrados en una situación matemática dada. Además se tuvo que explicar el procedimiento para el despeje de la variable, tomando como base lo realizado en la actividad 2.

Una vez que se concluyó con ese par de ejercicios se retomó la ecuación $12 + 3x - 4 = 12 - x$ para que el estudiante buscara resolverla, aunque aún fue necesario el apoyo para corregir errores al agregar términos en la ecuación, además, siempre recordar el uso de la herramienta para que recordara lo que había hecho pasos anteriores, el estudiante encontró la solución de la ecuación (Figura 32) utilizando ecuaciones equivalentes.

Posteriormente se le cuestiona a David si había trabajado similar a como se estaba haciendo en estas dos sesiones y si ya había visto el tema en su clase a lo que responde:

David: parecidas pero igual buscando el número al tanteo, no había hecho este método. Lo he estado viendo los tres años de secundaria por lo multigrado.

En este punto resaltamos que por las características del sistema braille y la ausencia de un material concreto, el alumno con discapacidad visual no tenía desarrollado el proceso de ecuación lineal de una variable. Esto es un punto crucial en el aprendizaje del concepto, pues según Knuth, McNeil & Alibali (2006) los alumnos que entienden el signo igual como símbolo relacional de equivalencia tienen mayor probabilidad de éxito resolviendo ecuaciones algebraicas.

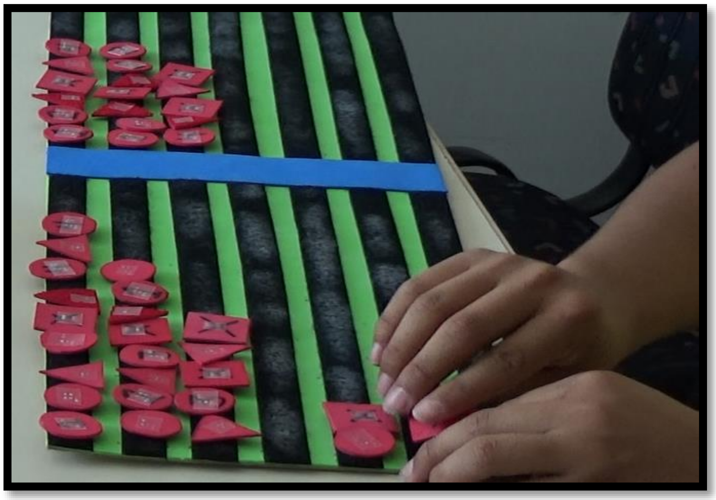

Figura 32. Análisis actividad 5. Elaboración propia (Torres, 2020).

Para la resolución del siguiente ejercicio $\mathbf{5x + 16 = 10x + 6}$ el alumno muestra un mayor dominio del procedimiento de resolución siendo pocas las intervenciones para corregir, asimismo, le tomó menos tiempo encontrar la solución y se tiene una mejor manipulación del material didáctico al utilizarlo para escribir cada procedimiento para llegar a ecuaciones equivalentes hasta obtener la solución de la ecuación planteada, demostrando una interiorización y el desarrollo de nuevos procesos. Una vez que se concluyó, se le cuestiona a David si se mantuvo la equivalencia a lo largo del proceso de resolución, a lo que contestó que sí, pues siempre se fue agregando lo mismo de un lado como del otro. Esto muestra que está generando una concepción proceso del concepto ecuación lineal con una variable.

Al finalizar con esta actividad agregó:

- *David: -Ah, así sí se entiende, es que hace mucho me las explicaron pero no las entendí, fue parecido yo hacía las operaciones y todo pero no sabía diferenciar cuando ya tenía el resultado y era lo que me desesperaba.*
- *David: -He visto que cuando son multiplicaciones muy largas y cuando por ejemplo hacen 2 por 6 y ya luego dicen 6 y lleva 1 y es lo que me revuelve porque no entiendo qué hacen por ejemplo cuando tienen 2 por 5 es 10 y llevamos 1 y no les entiendo y me desespera.*

Este último comentario en referencia a que comúnmente se le explica como a los alumnos normovisuales, teniendo en cuenta la forma en cómo se enseña la operación (Figura 33), destacando que en el caso de alumnos que no tienen la discapacidad basta con ver lo anotado en el pizarrón para poder entender lo que explica el docente. Sin embargo, no es lo mismo sólo escuchar el procedimiento pero no complementarlo con la vista o en este caso el tacto, debido a que por las características del sistema braille no es factible hacerlo con regleta y punzón.

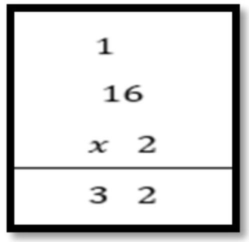

Figura 33. Resolución de multiplicación. Elaboración propia (Torres, 2020).

En este punto, el estudiante ya tiene el proceso de ecuación de primer grado con una variable y los procesos de jerarquía de operaciones y propiedades de los números reales, y los coordinó para dar lugar al proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación, generando el proceso de solución de la ecuación lineal con una variable, pues David ahora es capaz de resolver ecuaciones de primer grado con una variable.

Por último, la ***activad 6*** se comienza cuestionando al estudiante ¿Cómo sabes que el resultado que encontraron satisface la igualdad o la ecuación? A lo que respondió:

> *David: Porque te fijas en la ecuación de hasta arriba, vez como está estructurada y ya una vez revisándola empiezas a hacer operaciones, las mismas, sólo que al revés como si te fueras regresando. No se me ocurre otra forma de corroborarlo*

En otras palabras, David partía de lo obtenido como resultado en proceso inverso buscando llegar a la ecuación original, y si efectivamente se llegaba a eso entonces se comprobaba el resultado. Entonces podemos notar que el alumno no cuenta con el proceso de sustitución de variable como método para corroborar la igualdad, por lo cual el profesor procede a explicarlo, tomando como ejemplo los últimos ejercicios resueltos en la actividad 5, "$\boldsymbol{12 + 3x - 4 = 12 - x}$" y "$\boldsymbol{5x + 16 = 10x + 6}$".

Después, se le pide a David que resuelva la siguiente ecuación $\boldsymbol{5x - 1 = 14}$ (Figura 34) y que corrobore si el resultado satisface la igualdad. Una vez que concluyó se le pidió que explicara cuáles habían sido los procedimientos que utilizó.

> *David: Primero dejo la equis sola, le está estorbando el -1 entonces tengo que poner un +1 de este lado y +1 del otro. Entonces queda de este lado 5x y del otro lado 15. Ahora estorba el 5 y lo quito dividiendo entre 5 y queda la x y del otro lado 15 entre 5 y da 3, x es igual a 3.*
>
> *Profesor: ¿Cómo compruebo que ese valor satisface la igualdad?*

David: Sustituyendo, acá es 5x entonces ponemos el 3 y 5 por 3 es 15 menos 1 es 14 y del otro lado es 14. Entonces sí es una igualdad, entonces es correcto.

En esta actividad, David pone en juego los conocimientos necesarios para resolver una ecuación lineal de una variable, implicando que retomará el proceso de sustitución de variable de sus construcciones referentes al concepto de variable, dando lugar al proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad, y por lo tanto, en este punto David construyó estructuras mentales referentes al concepto de ecuación de primer grado de una variable y lo necesario para dar solución a ella.

Figura 34. Análisis actividad 6. Elaboración propia (Torres, 2020).

A continuación, se muestra la Tabla 2, representativa de la relación entre los ejercicios de la secuencia didáctica, las respuestas del alumno y su interpretación con la teoría APOE.

Número de Actividad	**Tipo de Ejercicios**	**Respuestas del estudiante**	**Interpretación (relación con la teoría)**
1	• Construir expresiones numéricas. • ¿Qué número tendría que sumar -10 para que el resultado sea -15? • $28-(13+16)=$	• La ley de los signos me confunde. Según yo si es -5. • Primero hay que resolver lo que está adentro del paréntesis y ya al final lo que está afuera.	• Proceso de expresión númerica abierta • Tiene proceso de expresiones numéricas abiertas. • No se percibe proceso de operaciones de los números reales • Resuelvan cierto tipo de operaciones limitando su construcción de conocimiento.
2	• $2+3=4+1$ ¿Lo que tienes de lado derecho y lo del lado izquierdo es igual?	• El resultado es lo mismo, sólo que en el que está de este lado se utiliza una cantidad un poco más grande. • Al lado derecho le puedo agregar otro 2 y así queda una equivalencia.	• Deficiencia de conocimiento del concepto de igualdad. • Construcción del proceso de miembros de la igualdad.
3	• $-18 \quad + \qquad =-29$ • $12=-3x$	• Buscar un número que sumado a 18 me de 29 y es 11 (tanteo).	• Uso de proceso de expresión algebraica. • Se da lugar al proceso de ecuación.
4	• $x+3=2x-2$ • $2x+5=10-3x^2$	• Sí, porque no tiene más símbolos, más incógnitas, sólo tiene una incógnita que es la *x*. • No, ya trae una elevación.	• Acciones de identificar en qué miembro de la igualdad se encontraba la variable y saber de qué grado era. • Construcción del proceso de

			ecuación de primer grado con una variable.
5	• $12 + 3x - 4 = 12 - x$ • ¿Qué hacías para resolver una ecuación?	• Ah caray, híjole no le hallo. Pueden ser dos resultados, puede ser 4 o puede ser 10. • Pues iba siguiendo el orden de las operaciones hasta que me diera el resultado aproximado. • No había hecho este método.	• Construcción del proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación. • Proceso de ecuaciones equivalentes. • Proceso de solución de la ecuación lineal.
6	• $5x - 1 = 14$	• Ponemos el 3 y 5 por 3 es 15 menos 1 es 14 y del otro lado es 14. Entonces sí es una igualdad, entonces es correcto.	• Proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad.

Tabla 2. Análisis de la aplicación. Elaboración propia, Torres (2020).

Capítulo 5. Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones a las que se llegaron en esta investigación, comenzando con las conclusiones referentes a la descomposición genética preliminar del concepto, para continuar con las conclusiones en torno a la aplicación del material didáctico concreto y la secuencia didáctica. De igual forma, se mencionan las conclusiones a las que se llegaron sobre el aprendizaje de los estudiantes con discapacidad visual, sugerencias didácticas y una reflexión en torno a trabajos a futuro que se pueden desarrollar.

Conclusiones respecto a la Descomposición Genética de la Ecuación Lineal

Una vez concluido la aplicación de la secuencia didáctica en conjunto con el material didáctico concreto, procedemos con el refinamiento de la descomposición genética preliminar planteada anteriormente en la sección 4.1.6. Pudimos darnos cuenta de que la estructura que platea la DG preliminar es adecuada, sin embargo, era necesario agregar algunas estructuras metales, como se muestra en la Tabla 3.

Descomposición Genética Preliminar	Refinamiento
Comenzando con el proceso de solución, el estudiante debe tomar el proceso de ecuación de primer grado de una variable para identificar en que miembro de la igualdad se encuentra la variable de la que se requiere conocer el valor.	Comenzando con el proceso de solución, el estudiante debe tomar el proceso de ecuación de primer grado de una variable para identificar en que miembro de la igualdad se encuentra la variable de la que se requiere conocer el valor. Asimismo, del objeto del concepto de variable se pone en juego el proceso referente a identificar el tipo de variable, debido a que los estudiantes al trabajar con las ecuaciones de la secuencia didáctica, daban a la variable el uso de número general y no de incógnita.
Se continúa con la coordinación del proceso de ecuación lineal de una variable con el proceso de jerarquía de operaciones y el de operaciones de los números reales, construyendo el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación.	Se continúa con la coordinación del proceso de ecuación lineal de una variable con el proceso de jerarquía de operaciones, el de operaciones de los números reales, el proceso de variable como término al que se le aplican operaciones (cuando hay un coeficiente que afecta a la variable, por ejemplo $2x$, dos multiplicando a la variable x) y el proceso de propiedades de la igualdad, construyendo el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación.
Una vez que se ha llegado a la solución es necesario desencapsular el objeto de	Una vez que se ha llegado a la solución de la ecuación, del objeto de variable tomamos

ecuación para considerar el proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad, de esta forma se corrobora que la solución es la correcta.	el proceso de sustitución de variable y el proceso de operaciones con números reales para ser coordinados y obtener el proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad, de esta forma se corrobora que la solución es la correcta.

Tabla 3. Refinamiento de DG. Elaboración propia, Torres (2020)

Por lo tanto, la descomposición genética refinada del concepto de ecuación lineal de una variable es la siguiente:

Si el estudiante tiene una concepción de esquema del concepto de número real, el objeto de número real se desencapsula en el **proceso de número real** y se coordina con el **proceso de operaciones de número real**, esta coordinación da como resultado el **proceso de expresión numérica abierta** (se nombra abierta porque el estudiante conoce los pasos que se pueden aplicar en la expresión para simplificarla pero no necesariamente la simplifica) cuando el estudiante identifica la relación entre números, signos de operación ($+, -, *, \div$), paréntesis, corchetes y/o llaves.

Posteriormente el **proceso de expresión numérica abierta** se coordina con el **proceso de igualdad**, esta coordinación implica las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales, y el uso de paréntesis, corchetes y/o llaves. Esta coordinación, se da cuando el estudiante manipula y simplifica diferentes expresiones numéricas haciendo uso de las operaciones y además escribe un signo igual para indicar el resultado en alguno de los miembros de la igualdad. Cabe señalar que en esta coordinación se refleja el uso correcto de la regla de los signos para las operaciones, así como el orden de las operaciones. De igual forma, esa coordinación da origen al **proceso de tautología (**que a su vez puede ser encapsulado en el objeto tautología), en esta repetición de colocar el símbolo de igual, el estudiante puede poner el resultado de la operación en alguno de los dos miembros de la igualdad.

Cuando se generaliza el **proceso de expresión numérica abierta** y se toma algún número real que la conforma y sustituirlo por una variable, se estará haciendo la acción de construir una expresión algebraica con una variable. En este punto se está trabajando con la variable como número general, al evaluar una expresión algebraica, es decir, sustituir un número real en cada variable que contenga la expresión, lo cual genera el **proceso de expresión algebraica**.

Si el estudiante tiene una concepción de **objeto del concepto de igualdad** puede tomar el **proceso de miembros de la igualdad** y lo coordina con el **proceso de expresión algebraica**, esto cuando se escribe una expresión algebraica en cada uno de los miembros de la igualdad, obteniendo el **proceso de ecuación**. Es necesario destacar que las ecuaciones pueden ser de diferentes tipos, dependiendo del tipo de expresión numérica o algebraica que se coloqué en los miembros de la igualdad.

Como ya se mencionó, el alumno puede generar diferentes ecuaciones y aplicando acciones sobre ellas con el fin de encontrar ecuaciones equivalentes y por lo tanto su solución. Entonces, el estudiante puede construir un esquema de ecuación tomando una colección de acciones, objetos y procesos que puede coordinar con los procesos de miembros de la igualdad y de expresión algebraica abierta.

Respecto a la solución de una ecuación, se requiere que el estudiante trabaje sobre la igualdad, lo cual implica el uso de las propiedades de la igualdad y las operaciones con los números reales, los cuales pueden ser interiorizados como procesos. La solución de la ecuación puede ser encapsulada en objeto sobre el cual se pueden aplicar nuevas acciones.

Por otra parte, cuando el estudiante identifica que en la ecuación sólo hay una variable de grado uno y sabe que esta puede estar en un miembro de la igualdad o en ambos, al repetir esta acción y reflexionar sobre ella construye el proceso de ecuación lineal con una variable.

Comenzando con el proceso de solución, el estudiante debe tomar el proceso de ecuación de lineal de una variable para identificar en qué miembro de la igualdad se encuentra la variable de la que se requiere conocer el valor. Asimismo, del objeto de variable se pone en juego el proceso referente a identificar el tipo de variable, pues a diferencia de antes con la expresión algebraica la variable tiene el uso de número general, ahora es necesario identificarla como incógnita.

Se continúa con la coordinación del proceso de ecuación lineal de una variable con el proceso de jerarquía de operaciones, el de operaciones de los números reales, el proceso de variable como término al que se le aplican operaciones y el proceso de propiedades de la igualdad, construyendo el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación.

Con la coordinación de los procesos de ecuaciones de primer grado con una variable junto con el de identificación de las operaciones que debe aplicar para encontrar la solución de una ecuación lineal de una variable y el proceso de ecuaciones equivalentes, se está realizando lo que es conocido como despeje de la variable al buscar la solución de la ecuación.

Una vez que se ha llegado a la solución de la ecuación, del objeto de variable tomamos el proceso de sustitución de variable y el proceso de operaciones con números reales para ser coordinados y obtener el proceso de sustitución de la solución para verificar que se satisface la igualdad, de esta forma se verifica si el calor encontrado es la solución o no de la ecuación.

A continuación, en la Figura 35 mostramos un bosquejo de la descomposición genética del concepto de Ecuación lineal de una variable, con las modificaciones antes mencionadas.

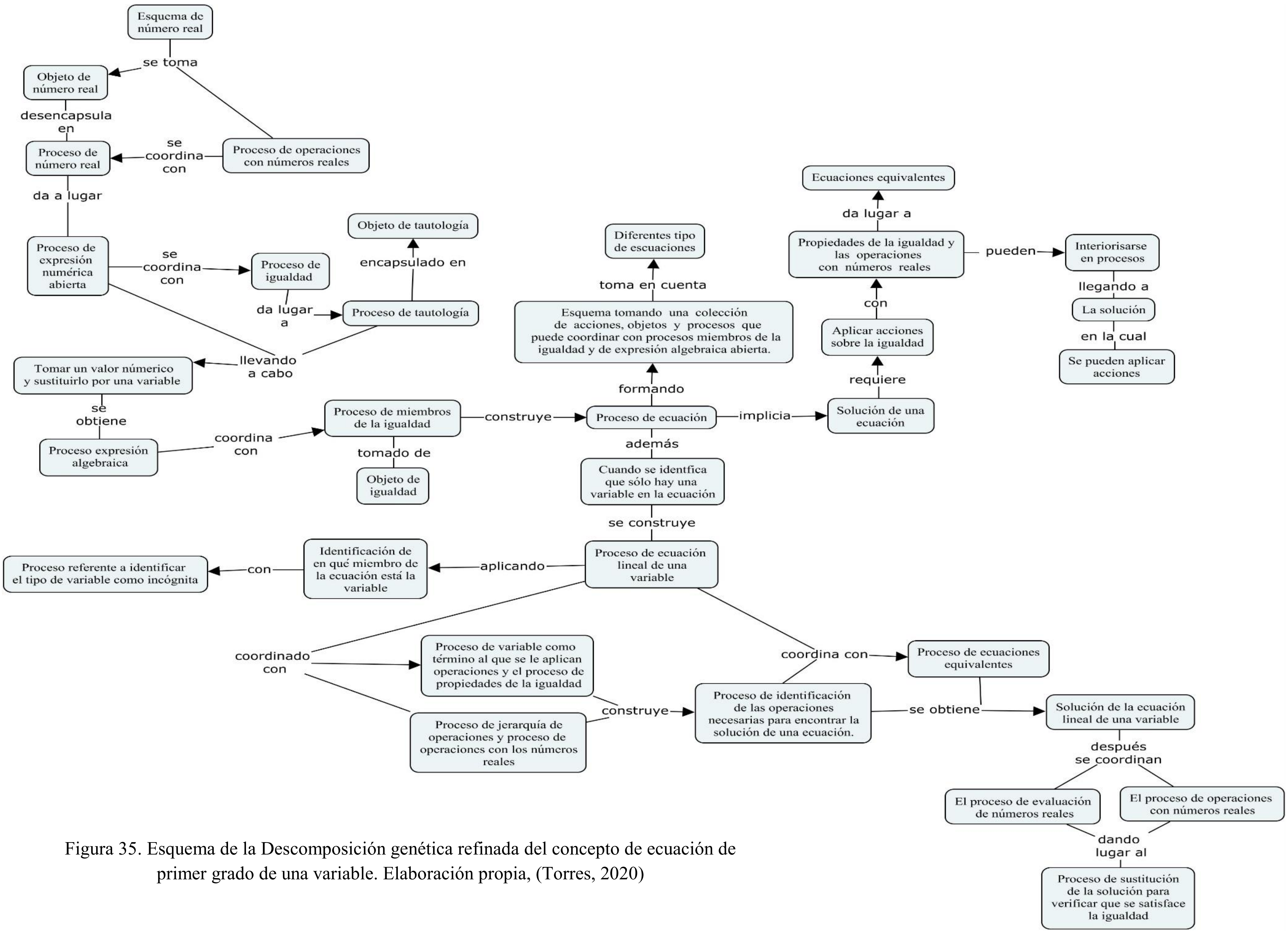

Figura 35. Esquema de la Descomposición genética refinada del concepto de ecuación de primer grado de una variable. Elaboración propia, (Torres, 2020)

Conclusiones respecto al Material Concreto "Ecuación Lineal para todos"

Respecto al material "Ecuación lineal para todos" reconocemos que por ser un estudio exploratorio se comenzó con el trabajo con números enteros, sin embargo, esto se puede trasladar con términos fraccionarios o decimales, haciendo modificaciones al respecto, se pueden agregar más formas que contengan el braille con el carácter común y que los alumnos trabajen con ellos. De igual forma, se pueden agregar renglones de velcro según sea necesario, hay que recordar que todos los estudiantes tienen necesidades diferentes y con base en ello es que nosotros como docentes debemos preparar nuestras clases.

Asimismo, consideramos que el material diseñado tiene una función importante en el aprendizaje del tema, debido a que abona a la construcción del conocimiento a partir de su uso, por ejemplo, el uso de los renglones es necesario para llevar a cabo lo algorítmico pero a su vez fomenta la comprensión de equivalencia, fundamental para el concepto de ecuación (Knuth, McNeil & Alibali, 2006), por tanto consideramos que el material didáctico junto con la secuencia didáctica basada en la DG, potencializó la construcción del proceso de miembros de la igualdad, propiedades de la igualdad, ecuaciones equivalentes y la sustitución para comprobar si se satisface la igualdad. Es en ese sentido que el material didáctico jugo un papel importante en la construcción del concepto de ecuación lineal como un objeto concreto que permitió la construcción del concepto ecuación lineal de una variable. De igual forma, resaltamos que este material no se debe retirar del uso de los estudiantes en ningún momento, debido a que es la herramienta que ellos utilizan para llevar a cabo diferentes operaciones, funcionando en parte como una libreta y lápiz para un alumno normovisual.

Partiendo desde la postura del docente, otro aspecto destacable del uso del material o herramienta recae en que contiene el sistema braille para los estudiantes con discapacidad visual y su representación en carácter común, lo cual da oportunidad al profesor que no domina el sistema braille, pues es imposible estar preparado para todos los retos que se pueden presentar en el aula. Brinda la oportunidad de ver qué es lo que está realizando el alumno y cuáles son los errores que está cometiendo y así obtener información de cómo es que está razonando las cosas, de esta forma se puede intervenir en el momento corrigiendo o en la planeación de clases posteriores partiendo de la información que obtiene. Esto es algo que difícilmente se puede realizar cuando el estudiante con DV realiza todo con cálculos mentales.

Señalamos que el material con esta doble presentación en braille y en carácter común, puede ser utilizado en cualquier aula regular, pues es un material que es funcional con alumnos con y sin la discapacidad visual, pensando en la actualidad y en la meta de tener aulas inclusivas en las cuales los alumnos tengan las mismas oportunidades de aprendizaje, se puede abordar el tema de ecuaciones lineales de una variable con una descomposición genética del concepto y con un material que fomenta las construcciones mentales necesarias para adquirirlo. Además de ofrecer la oportunidad a los estudiantes normovisuales de familiarizarse con el sistema braille y de esta forma aumentar la empatía con sus compañeros con alguna discapacidad y promover su inclusión no sólo al aula sino a la sociedad.

Conclusiones sobre la secuencia didáctica

Como ya se mencionó, la secuencia didáctica utilizada fue realizada con base en una descomposición genética del concepto de ecuación lineal de una variable, por lo tanto, se buscó que en cada una de las actividades se promoviera la construcción de estructuras y mecanismos mentales con el fin de que el estudiante con discapacidad visual pudiera aprender el concepto, tomando en cuenta las limitaciones en sus conocimientos previos, reforzándolos dentro de la misma secuencia didáctica. Esto se pudo corroborar en la aplicación, pues David pudo ir realizando cada una de las actividades mostrando un cambio en su conocimiento y forma de razonar.

A pesar de que creemos que las actividades realizadas abordan los temas suficientes para cumplir con su objetivo, consideramos que el tiempo fue una limitante en la aplicación de la secuencia didáctica, debido a que hubo actividades que pudieron abordar más ejercicios que hubieran sido resueltos en una tercera sesión, buscando una mejor manipulación del material y un mayor dominio del tema.

De igual forma, al realizar la secuencia didáctica fue importante considerar el número de actividades y ejercicios que se iban a realizar por sesión, debido a que si se le plantean una cantidad grande de ejercicios para resolver puede saturar al estudiante, teniendo como resultado un posible rechazo para el resto de las actividades.

Así como el material didáctico, esta secuencia didáctica puede ser utilizada con alumnos sin discapacidad visual.

Cabe señalar que dada la naturaleza del trabajo de corte exploratorio, se determinó desde un inicio trabajar solo con los números enteros por lo cual consideramos que la secuencia didáctica se puede mejorar en términos de entregar otros ejercicios que abarquen lo números racionales, irracionales, etc.

Conclusiones sobre el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes con discapacidad visual. El caso de Flor, Napoleón y David.

Retomando la pregunta de investigación planteada ¿Cómo aprenden el concepto de ecuación lineal estudiantes con discapacidad visual en el nivel medio superior?

Cuya respuesta nos lleva directamente a la descomposición genética, que como se mencionó, fue basada en la propuesta por Velasco (2012), conscientes en que son diseñadas para alumnos en general, por lo que nos dimos a la tarea de ver si en un alumno con DV se desarrollaban las mismas construcciones mentales que en un alumno normovisual.

Una vez aplicada la secuencia didáctica diseñada con base en la DG preliminar, notamos que el estudiante podía resolver los ejercicios planteados una vez que se explicaron los conceptos previos que aún no tenía. Aunado a esto, nos percatamos de que tanto el alumno con el que se llevó a cabo la aplicación, así como los estudiantes que contestaron el cuestionario diagnóstico, tienen deficiencias en conocimientos similares, pues no sabían resolver tipos específicos de ejercicios, por lo tanto, se puede decir que llegan con más carencia de conocimientos que el alumno normovisual promedio, pues en algunos casos no se tenía noción de lo que se estaba resolviendo, confirmando parte de lo que se menciona en la literatura, pero esto no significa que el alumno con DV no pueda desarrollar este conocimiento sino que no se le ha impartido de la forma adecuada.

La forma que encontramos para compensar en la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos fue el desarrollo del material didáctico “Ecuación lineal para todos”, con él, los alumnos ciegos o con baja visión pueden operar con números reales algebraicos de una forma totalmente distinta a lo que estaba acostumbrados, llegando a la construcción de procesos con los que el alumno no contaba a partir de realizar acciones en un material concreto, apoyando también a esclarecer conceptos que no se tenían en claro.

En este punto podemos conjeturar que sin los materiales adecuados el estudiante difícilmente podría llegar al mismo nivel de aprendizaje que un alumno normovisual, esto se pudo notar en el desarrollo tanto del cuestionario diagnóstico con Flor y Napoleón como en la secuencia didáctica con David, ya que los 3 estudiantes presentaban dificultades al resolver cierto tipo de ejercicios, por ejemplo David estaba acostumbrado a resolver ecuaciones de la forma $ax + b = c$ por el método del tanteo y utilizando el cálculo mental, entonces cuando se presenta una ecuación menos trivial para resolverse como conocía (actividad 5) no puede llegar al resultado porque no sabe cómo proceder en este caso.

Entonces, como respuesta a la pregunta de investigación, proponemos una descomposición genética refinada, la cual no es específica para alumnos con discapacidad visual, puede ser funcional con alumnos con y sin discapacidad utilizando los recursos necesarios para que puedan construir las estructuras y mecanismos necesarios para aprender el concepto.

A partir de los resultados obtenidos en esta investigación podemos reafirmar lo dicho Fernández (1986), que los alumnos ciegos o con baja visión pueden alcanzar el grado de aprendizaje de igual forma que una persona sin la discapacidad, sólo hay que apoyarlos de la forma adecuada, con situaciones de aprendizaje que tomen en cuenta la parte cognitiva de los estudiantes, estableciendo las construcciones que deben realizar para adquirir el conocimiento esperado, en conjunto con un material o herramienta que apoye a dicha construcción. Esto sin olvidar que en el caso de los estudiantes con DV, la herramienta que se use como apoyo es algo que deben utilizar constantemente, pues debido a las características de la discapacidad se vuelve necesaria.

Con los alumnos que participaron tanto en el cuestionario diagnóstico como en la aplicación, pudimos destacar un factor interesante, pues David, quien realizó la secuencia didáctica mostró tener un mejor dominio de conocimientos matemáticos que Flor y Napoleón, que si recordamos en lo mencionado en las entrevistas, tanto Flor como Napoleón llegaron al IPACIDEVI en secundaria, es decir, estuvieron en escuelas regulares previo a esto, mientras que David llegó en una edad muy temprana, recibiendo toda su educación en el instituto, en otras palabras, toda su educación fue planeada y brindada específicamente para personas con discapacidad visual, llegando a la conjetura que Flor y Napoleón al no recibir una educación adecuada en dónde sólo estaban integrados en el aula, no adquirieron conocimientos que tal vez David sí por el tipo de educación que ha recibido toda su vida. Con esto no se pretende establecer que si es mejor la educación de instituciones específicas para la discapacidad que la que se puede brindar en una regular, sino que independientemente de eso, deben existir tanto metodologías como materiales con los cuales se procure el aprendizaje de todos los estudiantes y no sólo de algunos.

Cabe señalar que David si tenía conocimientos de la ecuación lineal pero no como una concepción proceso, sino en una concepción acción, ya que se limitaba a responder en términos de la mecanización, pues podía fácilmente resolver ecuaciones al tanteo. Ello no fue suficiente para resolver ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, y es allí donde el MD jugo un papel importante, y con ello podemos concluir que las construcciones y mecanismos mentales que el estudiante requiere dependen de las imágenes mentales que se puedan desarrollar a través de dicho material didáctico que tome en cuente, en nuestro caso, el análisis teórico.

Por último consideramos que dada la pandemia COVID-19, nos limitó a realizar una entrevista al estudiante posterior a la aplicación de la secuencia, lo cual nos hubiera brindado mayor información sobre sus concepciones posteriores a la aplicación de la secuencia didáctica.

Reflexión

Considerando que el cambio que se busca con la inclusión es evitar que los alumnos abandonen las instituciones educativas por el hecho de que no se les brinda una atención adecuada, teniendo como resultado que no acrediten las materias y por lo tanto dejen inconclusa su educación o en el mejor de los casos encuentren algún instituto de educación especializada para la discapacidad.

Parte de la experiencia de trabajar con alumnos con DV es darse cuenta de que al igual que la mayoría de los alumnos en general, las matemáticas no son la materia más popular y querida por los estudiantes y que conforme se avanza en los niveles educativos y se vuelve más abstracta es más complejo que los alumnos las comprendan y se interesan en ellas, esto se puede ver reflejado en que la mayor parte de ellos elijan licenciaturas donde no formen parte de la curricula de materias. Pero consideramos también el caso de que al no brindarles una educación matemática adecuada, en específico en el nivel medio superior, se les está limitando el poder elegir una carrera que incluya matemáticas porque no se sienten con los conocimientos necesarios o porque por la falta de una enseñanza adecuada no comprendieran múltiples temas.

Entonces, destacamos la importancia de realizar trabajos de este tipo a futuro que involucren el desarrollo cognitivo de los estudiantes con discapacidad visual, en todos los temas que no hayan sido abordados desde educación básica hasta superior, pues como en este caso puede suceder que alumnos no hayan construido el conocimiento del concepto esperado como se espera debido a la forma en la cual se les enseña el tema o por la falta de un material de apoyo que fomente el aprendizaje. En lo personal, considero interesante analizar conceptos como función con estudiantes con DV, ya que en estos temas regularmente la vista toma un papel importante en el aprendizaje del concepto.

Asimismo, qué cambios en el nivel de desarrollo cognitivo existen entre los estudiantes ciegos de nacimiento, ciegos que adquirieron la discapacidad en el transcurso de su vida y alumnos con caja visión, es decir, en qué medida se ha desarrollado la parte cognitiva con respecto al tipo de discapacidad que tiene el estudiante. De igual forma, analizar qué tanto influye en el conocimiento de las personas con DV el haber estado en una escuela regular o en una institución enfocada a la discapacidad como tal.

Por último, resaltamos la importancia que tienen este tipo de investigaciones en donde se brinda conocimiento y opciones de trabajo a docentes que no tienen conocimiento al respecto de alguna discapacidad, que tienen alumnos incluidos en aulas regulares y no saben cómo brindarles una educación como al resto de sus compañeros. De esta forma podremos darles las herramientas necesarias a todos los alumnos para que puedan alcanzar sus metas y puedan elegir su futuro académico sin ninguna limitación de conocimiento.

Referencias

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Barrio, J. G. (2015). El Estudio de Casos. 3º Magisterio Educación Especial. Madrid.

Beal, C. R., y Rosenblum, L. P. (2018). Evaluación de la eficacia de una aplicación informática para tableta con el fin de ayudar a alumnos con deficiencia visual a resolver problemas matemáticos. Integración: *Revista digital sobre discapacidad visual*, 73, 118-14.

Bermejo, M. L., Fajardo, M. I. y Mellado, V. (2002). El aprendizaje de las ciencias en niños ciegos y deficiente visuales: *Integración*, 2002, 38, 25-34.

Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. Pensamiento y Gestión (20), 165-193.

Colegio Nacional de Matemáticas. (2009). *Matemáticas Simplificadas*. México: Pearson Education.

Correa, Y. y Pulido, E. (2013). Adaptación e implementación de recursos didácticos para la enseñanza de ecuaciones de primer y segundo grado a niños con discapacidad visual en un aula inclusiva. *Revista Científica Educación científica y tecnológica,* 568-572.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Fernández, J. (1986). *La Enseñanza de la Matemática a los Ciegos* (Segunda ed.). Madrid, España: Sección de Cultura de la ONCE.

Fernández, J. (2001). *Desafíos Didácticos de la Lectura Braille*. Madrid: Departamento de Recursos Culturales ONCE.

Fuentes, C. (2017). Estrategia didáctica para el aprendizaje de conceptos algebraicos en estudiantes con discapacidad visual. Integración: *Revista digital sobre discapacidad visual,* 71, 137-151.

Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 38-44.

Galperin, P. (2009). La formacion de lãs imágenes sensoriales y los conceptos. En:Rojas LQ, Solovieva Y (2009 a). Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño. México: Trillas.

Garrido, J. M. (2009). *Diseño de Investigación Cualitativa en Educación*. Chile.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la escuela, 73*, 95-106.

Gerván, H. (2013). De la aritmética al Álgebra Escolar. Análisis de actividades desde un punto de vista semiótico peirceano. *Revista de Educación Matemática, 3(28),* 15-32.

Gobierno del estado de Zacatecas (2019). Instituto para la atención e inclusión de las personas con discapacidad. Recuperado de: https://inclusion.zacatecas.gob.mx/

González, E. y Roa, S. (2015). Un Esquema de Transformación Lineal Asociado al Concepto Base. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática,* 1-10.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1998). *Metodología de la Investigación* (Segunda ed.). D.F., México: McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación* (Cuarta ed.). D.F., México: McGraw-Hili Interamericana.

IPACIDEVI. (2020). Instituto para Ciegos y Débiles Visuales "Ezequiel Hernández Romo". San Luis Potosí, México. Obtenido de http://institutoparaciegos.org

Jiménez, R., Barreto, D., y Funeme, F. (2013). Propuesta de un material didáctico para la enseñanza aprendizaje de polinomios para población con limitación visual. *Revista Científica Educación científica y tecnológica*, 559-563.

Knuth, E., McNeil, N. & Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? *Evidence from Solving Equations. National Council of Teachers of Mathematics*, 37(4), 297-312.

Malasaing & Zhang, D. (2016). A Review of Literature: Mathematcs Instructon for Students with Visual Impairments. *Journal of Childhood & Developmental Disorders, 2*(1:2), 1-4.

Mamcasz, L., Rutz, S., Midori, E. & Sebastiao, C. (2016). An approach for the teaching of notable products in an inclusive class: the case of a student with visual disabilities. *European Journal of Special Education Research*, 867-879.

Mántica, M., Götte, M., y Dal Maso, S. (2014). La enseñanza de las matemáticas a alumnos ciegos y disminuidos visuales. El relato de una experiencia. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1023-1030.

Martínez, G. y Martín, M. (2017). Caja aritmética mini. Integración: *Revista digital sobre discapacidad visual*, 71, 68-74.

Medina, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *40*, 3-28.

Núñez, M. (2017). Tesis: Matemáticas para alumnos con problemas de visión. España.

Organización Mundial de la Salud. (2018). *Ceguera y Discapacidad Visual.* Recuperado de: https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/blindness-and-visual-impairment

Organización Nacional de Ciegos Españoles (2019). *ONCE: Por la inclusión de personas ciegas y con discapacidad. España.* Recuperado de: https://www.once.es/

Organización Nacional de Ciegos Españoles. (2007). *Guías de la Comisión Braille Española. Signografía matemática* (Primera ed.). Madrid: Departamento de Recursos Culturales ONCE.

Palarea, M., y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*, 16, 91-98.

Reynaga, C., Hernández, I., Sánchez, E., López, C., Ibargüengoitia, M. e Ibáñez, J. (2014). Experiencias educativas en la enseñanza de las ciencias experimentales a niños y jóvenes con discapacidad visual. En J. Asenjo, O. Macías & J. Toscano (Eds.), *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 2-18). Argentina: OEI.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(1), 89-112.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

Sánchez, J., Espinoza, M., Carrasco, M., y Garrido, M. (2012). Modelo de videojuegos para mejorar habilidades matemático-geométricas en aprendices ciegos. *Memorias del XVII Congreso Internacional de Informática Educativa, TISE*, 97-104.

Secretaría de Educación Pública. (2018). Programa de Matemáticas I. Recuperado de https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/1er-semestre/Matematicas-I.pdf

Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32*, 73-86.

Suárez, J. (2011). Discapacidad visual y ceguera en el adulto: Revisión de tema. *MEDICINA U.P.B., 30*(2), 170-180.

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría*. México: Pearson Education.

Tinoco, E., y Suárez, P. (2016). Apoyando los procesos de aprendizaje y percepción a través de la exploración de los sentidos de una población en condición de vulnerabilidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 618-625.

Torres, E., y Castro, C. (2016). Las regletas de cuisenaire un recurso didáctico favorable en los procesos de inclusión. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*, 352-358.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31. Distrito Federal.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el Álgebra. Enseñanza de las Ciencias, 14(3), 351-363.

UNESCO. (2008). La Educación Inclusiva: El Camino Hacia El Futuro. Conferencia Internacional de Educación, (pp. 1-32). Ginebra.

Velasco, I. y Montes, E. (2013). Propuesta para la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes con discapacidad visual, a través de la adaptación de material inclusivo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 291-298. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Velasco, K. (2012). *Modelación de situaciones reales con ecuaciones de primer grado desde la perspectiva APOE: un estudio a nivel bachillerato* (Tesis). El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

Villabona, D. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción de infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, 28 (2), 119-150. Colombia.

Vizcaíno, O. (2004). Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. México.

Vygotsky, L. (1998). Una formação social da mente. (Vol. 6). São Paulo: Martins Fontes.

Anexos

Anexo 1

Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa

1. Realiza las siguientes operaciones

- $15 - 34 + 18$
- $(-5)(1)(-2)$
- $-11x + 8x - 2x + 14x$
- $(-x)(6x)$
- $-24 \div 8$
- $-(5 + 10x) + (-18 + 5x - 6x)$

2. Simplifica las expresiones suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.

- $2x - [x + 2x - (3x + 2)]$
- $2(3x + 18)$

3. Calcula el valor numérico de la expresión, para el valor que se indica:

- $2x + 3$; cuando $x = 5$
- $-4x + 18$; cuando $x = 7$

4. Indica en los siguientes incisos si alguno es una ecuación.

a) $3x^2 + 2x + 16$
b) $2x + 6 = 0$
c) $2x^2 + 2 = 4$
d) $15x + 12$
e) $10 - 13x = x$
f) $(x + 2)^2$
g) $12 = 2x + 2$
h) $x^2 + 2x + 1$

Anexo 2

Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa

Primera sesión

Actividad 1. Responde las siguientes preguntas.

a) ¿Qué numero tendría que sumar a -10 para que el resultado sea -15?

b) ¿Qué número tendría que sumar a -5 para que el resultado sea 2?

c) ¿Qué numero tendría que sumar a 6 para que el resultado sea -3?

d) ¿Qué número tendría que restar a 8 para que el resultado sea -2?

- Resuelve las siguientes operaciones y que justifique su respuesta:
  - $25 + (-12) + 8 =$
  - $28 - (13 + 16) =$
  - $30 - 8 + 2 - 24 =$

Actividad 2. Resuelva cada una de las expresiones numéricas en su respectivo miembro de la igualdad.

  - $2 + 3 = 4 + 1$
  - $12 - 6 = 3 + 3$
  - $25 - 16 = 27 - 18$

Actividad 3 ¿Qué numero tendría que sumar a -18 para que el resultado sea -29? ¿Cómo se podría expresar esta situación?

- Encuentra los valores faltantes ya utilizando X para hacer referencia al valor faltante.
  - $-8 = 12 - x$
  - $12 = -3x$
  - $-12 + x = 12$

Segunda sesión

Actividad 4. Indica cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones son de primer grado con una variable.

a) $x + 3 = 2x - 2$
b) $2x + 5 = 10 - 3x^2$
c) $20 + 15 = 12x$
d) $10 + 35 = 45$

Actividad 5. Encontrar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 4$

b) $2x + 5 = 15$

- Resuelve la siguiente ecuación $12 + 3x - 4 = 12 - x$

5.1 Utilizando el mismo método del ejercicio anterior, se resolverán las siguientes ecuaciones.

- $5x + 16 = 10x + 6$
- $2x - 19 = 5(2x + 1)$
- $-9x + 5 = -2(5 + 6)$
- $4x - 28 = -4(x - 3)$

Actividad 6. A partir de lo anterior, resuelve n las siguientes ecuaciones y comprobarán si el resultado encontrado satisface la igualdad inicial:

- $5x - 9 = 6x - 2$
- $5x - 1 = 14$

Anexo 3

Descomposición genética preliminar del concepto ecuación lineal.

Karla Velasco (2012)

Si el estudiante cuenta con una concepción esquema de los números reales puede tomar de ella el objeto de número real y el proceso de operaciones con números reales y coordinarlos para generar diferentes expresiones (que se diferencian entre ellos por el tipo de operación y la cantidad de números que contienen).

Si además el estudiante coordina las expresiones con el proceso de jerarquía de operaciones para simplificar la expresión entonces puede obtener un nuevo proceso llamado expresión numérica abierta (le nombramos abierta porque el estudiante conoce los pasos que puede aplicar en cada expresión para simplificarla, pero no precisamente realiza la simplificación).

Si el estudiante toma el proceso de expresión numérica abierta y le escribe el símbolo de igual para escribir el resultado de las operaciones en ella indicada, entonces decimos que el estudiante está coordinando el proceso de igualdad (que se desencapsula de dicho objeto) como indicador del resultado de la operación con el proceso de expresión numérica abierta. La coordinación de este proceso da origen al proceso de tautología y la repetición de este proceso puede ser encapsulado en el objeto de tautología; en esta repetición de la acción de colocar el símbolo de igual el estudiante puede colocar el resultado de la operación en alguno de los dos miembros de la igualdad.

Si el estudiante generaliza el proceso expresión numérica abierta y realiza la acción de tomar de la expresión numérica abierta alguno de los números reales que la forman y lo sustituye por una variable entonces estará haciendo la acción de construir una expresión algebraica abierta. Si el estudiante sólo sustituye un valor numérico por una variable entonces se obtendrá una expresión algebraica abierta con sólo una variable, pero si toma dos valores numéricos y los sustituye por dos variables distintas entonces está construyendo una expresión algebraica abierta con dos variables En ambos casos si el estudiante procede de esta manera al trabajar con la variable entonces creemos que el estudiante está trabajando uno de los tres usos de la variable:

> Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario: G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor (Ursini, et al., 2005, p.36).

Consideramos que el estudiante continúa utilizando a la variable como número general cuando aplica la acción de evaluar una expresión algebraica abierta, dicha acción consiste en sustituir un número real en cada variable que contenga la expresión. Cabe señalar que el estudiante puede evaluar cualquier número real en cualquiera de la o las variables que contenga la expresión algebraica abierta.

Por otro lado si el estudiante toma del esquema de igualdad el proceso de miembros de la igualdad y lo coordina con el proceso de expresión algebraica abierta al escribir en cada miembro de la igualdad una expresión algebraica abierta que pueden ser diferentes o incluso iguales, entonces decimos que está construyendo **el proceso de ecuación.**

La ecuación que construye el estudiante mediante la coordinación anterior no es única, puede generar diferentes y muy distintas ecuaciones. Esto depende del tipo de expresión algebraica abierta que coloque en cada miembro de la igualdad, es decir, cada expresión algebraica abierta puede contener una o más variables e incluso puede colocar en alguno de los miembros de la igualdad una expresión numérica abierta y en el otro miembro una expresión algebraica abierta.

El estudiante puede generar diferentes tipos de ecuaciones y realizar diferentes acciones sobre ellas para encontrar ecuaciones equivalentes y su solución o soluciones (según sea el caso). A través de la construcción de relaciones entre diferentes ecuaciones y su consideración como miembros de una misma clase, el estudiante construye el esquema de ecuación. Es decir, el estudiante puede construir un esquema de ecuación tomando una colección de acciones, objetos y procesos que puede coordinar con los procesos de miembros de la igualdad y de expresión algebraica abierta.

Siendo más específicas decimos que la construcción mental de ecuación construida por el estudiante se trata de un esquema, dado que se pueden generar diferentes tipos de ecuaciones, por ejemplo: si el estudiante coloca el símbolo de igual entre una expresión numérica abierta y una expresión algebraica abierta puede obtener una ecuación que cuente con la variable o variables en sólo uno de los miembros de la igualdad como en el caso de $3+x = 5$. De esta forma se pueden tener ecuaciones con una variable en sólo un miembro de la igualdad, ecuaciones con la misma variable en ambos miembros de la igualdad, ecuaciones racionales (donde la variable aparece en el numerador o en el denominador de una razón), ecuaciones con radicales, ecuaciones con valor absoluto y ecuaciones con diferentes variables en uno o ambos miembros de la igualdad (ecuaciones con dos variables).

El esquema de ecuación puede contener distintas ecuaciones que pueden ser consideradas como proceso o como objeto por el estudiante. La solución de una ecuación requiere que el estudiante aplique acciones sobre la igualdad. Estas acciones, que consisten en el uso de las propiedades de la igualdad, de las operaciones con números reales, leyes de los exponentes, leyes de signos, valor absoluto, así como razones y proporciones, se pueden interiorizar en procesos y el resultado de la aplicación de estos procesos, la solución o el conjunto solución de la ecuación puede ser encapsulado en un objeto, sobre el cual es posible aplicar nuevas acciones.

Dentro del esquema de ecuación si el estudiante toma diferentes ecuaciones como objetos y sobre ellas aplica la acción de diferenciar el tipo de expresión que contiene en cada miembro de la igualdad que contiene, así como la cantidad de variables que la forma, entonces puede interiorizar dichas acciones en dos diferentes procesos como describimos a continuación.

Por un lado si el estudiante identifica que la ecuación contiene sólo una variable cuyo exponente es uno en alguno o incluso en los dos miembros de la igualdad, entonces está construyendo el **proceso de ecuación de primer grado con una variable**. Pero, si el estudiante identifica que en alguno o en ambos miembros de la igualdad se encuentran dos variables y cada una de ellas tiene exponente uno, entonces está construyendo el proceso de ecuación de primer grado con dos variables.

Cabe hacer la aclaración que en ambos procesos puede que la ecuación esté formada por una expresión algebraica abierta en alguno de los miembros de la igualdad y en el otro puede tener una expresión numérica abierta o bien sólo un número real.

El estudiante debe tomar el proceso de ecuación de primer grado con una variable y realizar sobre éste la acción de identificar en qué miembro de la ecuación se encuentra la variable de la cual se necesita conocer su valor.

Al coordinar los procesos de ecuación de primer grado con una y/o dos variables con el de jerarquía de operaciones y el de propiedades de los números reales, el estudiante está construyendo el proceso de identificación de las operaciones necesarias para encontrar la solución de una ecuación.

La coordinación de los procesos de ecuaciones de primer grado con una y/o dos variables junto con el de identificación de las operaciones que debe aplicar para encontrar la solución de una ecuación de primer grado y el proceso de ecuaciones equivalentes es justamente lo que los estudiantes suelen llamar "el despeje" del cual se obtiene la solución de la ecuación que se está resolviendo. Estos procesos dependen del tipo de ecuación al que el estudiante se enfrente. Una vez obtenida la solución de una ecuación es necesario desencapsular el objeto ecuación para considerar el proceso de sustitución de la solución o el conjunto solución encontrado para verificar que la igualdad se satisface.

Mediante el proceso de coordinación de los procesos necesarios para encontrar la solución de una ecuación y para comprobar si efectivamente es la solución de la ecuación planteada, el estudiante construye el proceso de ecuaciones equivalentes. Este proceso incluye la reflexión sobre la equivalencia de las ecuaciones y a su vez la consideración de la solución como solución de cualquiera de ellas. Los procesos anteriores se pueden encapsular en los objetos de ecuaciones equivalentes y en el objeto solución de la ecuación.

Posteriormente el estudiante debe coordinar los procesos de solución de una ecuación con el proceso de conjunto al reconocer que la solución de una ecuación forma parte de un conjunto de números reales o de pares ordenados de números reales que satisfacen la igualdad planteada en la ecuación, de esta manera obtiene el proceso de conjunto solución de una ecuación.

Por otra parte los estudiantes pueden construir con los elementos del proceso conjunto solución de una ecuación un nuevo proceso llamado tabulación que consiste en la acción de colocar en las dos primeras columnas de una tabla los números que integran las soluciones de una ecuación (para el caso de soluciones de ecuaciones de primer caso con dos variables). Además si el estudiante determina que si los números de una de las columnas aumenta, el valor de la segunda columna también aumenta (o análogamente disminuyen), entonces decimos que el estudiante está coordinando los procesos de conjunto solución de una ecuación con los procesos de variación conjunta entre variables y con el proceso de tabulación; dicha coordinación se puede interiorizar en el proceso de relación funcional; entonces diremos que el estudiante por primera vez "de manera no explícita trabaja con una relación funcional" (Ursini et al., 2005, p.13).

La coordinación de los procesos de tabulación con el de variación conjunta y el de relación funcional son importantes ya que forman parte de las características que identifican a una ecuación lineal, es decir si los valores de una variable aumentan los valores de la otra variable también aumentan y a cada valor de una variable le corresponde un solo valor de la otra.

El proceso de conjunto solución de una ecuación puede coordinarse con los procesos de ubicación de puntos en el plano cartesiano (coordenadas), el de tabulación, variación conjunta entre variables y relación funcional; esto sucede al realizar la acción de tomar a las soluciones de las ecuaciones, formar con ellas una tabulación de la que puede tomar los pares ordenados y encapsularlos como objetos que el estudiante ubica en el plano cartesiano que luego une. De esta forma el estudiante construye el proceso de interpretación geométrica de las soluciones de una ecuación.

En particular si se coordina el proceso del conjunto solución de una ecuación de primer grado con una variable con el de la recta numérica (que es un caso particular del proceso ubicación de puntos en el plano cartesiano) se construye el proceso de interpretación geométrica de las soluciones de una ecuación de primer grado con una variable.

También la coordinación de los procesos de tabulación, variación conjunta, relación funcional e interpretación geométrica de las soluciones de una ecuación permite al estudiante construir el proceso de ecuación lineal de dos variables, que se puede encapsular en el objeto ecuación lineal con dos variables. Este proceso y el proceso de ecuación de primer grado con una variable se coordinan en el esquema de ecuación lineal.

La evolución del esquema anteriormente descrito depende de las relaciones que se construyen entre los elementos que lo componen. Estas relaciones se muestran a través de la manera en que cada estudiante lo emplea para resolver flexiblemente situaciones en las que se pueden utilizar ecuaciones de primer grado con una y/o dos variables. En la figura 8 (se encuentra en la siguiente página) presentamos un esquema con el que se puede identificar las partes descritas en la descomposición genética preliminar de nuestro estudio.

Con toda la descripción anterior cumplimos con uno de los objetivos de la investigación, el que corresponde a ofrecer una descomposición genética de la ecuación lineal de primer grado (con una variable y con dos variables) con la cual diseñaremos instrumentos para lograr los objetivos de investigación.

En el siguiente capítulo describiremos el diseño de instrumentos que, siguiendo la descomposición genética que presentamos para esta investigación, hemos creado para documentar las construcciones y mecanismos mentales que llevan a cabo los estudiantes del IEMS que participaron en el estudio. Nos interesa describir las construcciones relativas al contenido matemático que hacen los estudiantes mientras realizan una actividad de modelación con ecuaciones lineales.