

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



**UNIDAD ACADÉMICA DE
MATEMÁTICAS**



**Conocimiento de las características de aprendizaje en
probabilidad condicional que evidencian profesores de
Bachillerato en Zacatecas**

Tesis para obtener el grado de
**Maestro en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel
Bachillerato**

Presenta:
José Miguel León Banguero

Directora de Tesis:
Dra. Leticia Sosa Guerrero

Zacatecas, Zac., México, Agosto/2020

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 28 del mes de Agosto del año 2020, el suscrito, JOSÉ MIGUEL LEÓN BANGUERO, alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 38192762, manifiesta que es el autor intelectual del trabajo de grado intitulado “Conocimiento didáctico de las características de aprendizaje en probabilidad condicional que evidencian profesores en activo de nivel Bachillerato en Zacatecas” dirigido por la Dra. Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo, el suscrito asume la responsabilidad sobre su contenido y el uso debido de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Asimismo, él cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

JOSÉ MIGUEL LEÓN BANGUERO

Nombre y Firma del estudiante

AGRADECIMIENTO

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario No. 929184

AGRADECIMIENTOS

ÍNDICE

RESÚMEN	1
PRESENTACIÓN	3
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	5
1.1 Motivación	5
1.2 Problemática	6
1.3 Definición del problema	10
1.4 Hipótesis	10
1.5 Objetivos de la investigación	10
1.6 Justificación	11
CAPÍTULO II: ANTECEDENTES	14
2.1 Evaluaciones de Conocimiento para la Enseñanza de la Probabilidad	14
2.2 Aprendizaje de la probabilidad en Estudiantes	15
2.3 Enseñanza de la Probabilidad Condicional	16
CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO	21
3.1 Fundamentos Matemáticos	21
3.1.1 Álgebra de Sucesos	21
3.1.2 Probabilidad Condicional	22
3.1.2 Teorema de Bayes	23
3.1.3 Eventos Independientes	23
3.2 Modelos de Conocimiento del Profesor de Matemáticas	24
3.2.1 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT):	25
3.2.2 Cuarteto de Conocimiento (KQ):	27
3.2.3 Conocimiento Didáctico-Matemático	28
3.2.4 Conocimiento de Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)	31
3.2.4.1 Conocimiento Matemático (MK)	32
3.2.4.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	34
3.2.5 Reflexión modelos de conocimiento del profesor	38
3.3 Fundamentos para la Enseñanza de la Probabilidad Condicional:	40
3.3.1 Ideas estocásticas fundamentales para la enseñanza	40
3.3.2 Falacias y confusiones asociados a la probabilidad condicional	42
3.3.3 Resolución de problemas en probabilidad condicional	44
3.3.4 Representaciones y Argumentos asociados a la Probabilidad Condicional	46

CAPÍTULO IV: MARCO METODOLÓGICO	49
4.1 Investigación Cualitativa	49
4.2 Estudio de Caso	51
4.3 Selección de los Casos	52
4.4 Técnicas	53
4.4.1 Instrumentos de recogida de la información	58
4.4.1.1 Cuestionario de Conocimientos Didácticos sobre Probabilidad Condicional	60
4.4.1.2 Entrevista Semiestructurada	67
4.4.1.3 Validación instrumentos recogida de la información	69
4.4.2 Instrumentos de Análisis de la Información	70
CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y RESULTADOS	74
5.1 Análisis de la información	74
5.1.1 Evidencias del Conocimiento Matemático	74
5.1.2 Evidencias del Conocimiento Didáctico	76
5.1.2.1 Análisis Didáctico del Cuestionario: Situación 1 – Parte 2	76
5.1.2.2 Análisis Didáctico del Cuestionario: Situación 2 – Parte 2	78
5.1.2.3 Análisis Didáctico Cuestionario: Situación 3 – Parte 2	82
5.1.2.4 Análisis Didáctico Cuestionario: Situación 4 – Parte 2	85
5.1.2.5 Análisis Didáctico de la Entrevista	88
5.2 Resultados de la investigación	95
5.2.1 Resultados a partir de la perspectiva Bottom-Up	96
5.2.1.1 Cuestionario: Parte 1	96
5.2.1.2 Cuestionario: Parte 2	98
5.2.2 Resultados a partir de la perspectiva Top-Down	99
5.2.3 Propuesta y discusión de nuevos indicadores de conocimiento	103
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES	108
6.1 Conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional.	108
6.2 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas	110
6.3 Formación de profesores	111
6.4 Aportes teóricos y metodológicos al MTSK	112
6.5 Limitaciones y proyecciones de la investigación	113
6.7 Reflexión Final	114
7. REFERENCIAS	116

Índice de Figuras

Figura 1	26
Figura 2	27
Figura 3	29
Figura 4	32
Figura 5	46
Figura 6	47
Figura 7	¡Error! Marcador no definido.
Figura 8	71
Figura 9	72
Figura 10	77
Figura 11	77
Figura 12	78
Figura 13	78
Figura 14	79
Figura 15	80
Figura 16	80
Figura 17	80
Figura 18	81
Figura 19	81
Figura 20	¡Error! Marcador no definido.
Figura 21	83
Figura 22	83
Figura 23	84
Figura 24	84
Figura 25	85
Figura 26	86
Figura 27	86
Figura 28	87
Figura 29	87
Figura 30	87
Figura 31	88
Figura 32	88

Índice de Tablas

Tabla 1.....	37
Tabla 2.....	56
Tabla 3.....	57
Tabla 4.....	59
Tabla 5.....	67
Tabla 6.....	75
Tabla 7.....	76
Tabla 8.....	78
Tabla 9.....	82
Tabla 10.....	85
Tabla 11.....	92

RESÚMEN

A partir de la revisión de literatura referente a la enseñanza de la probabilidad condicional y al conocimiento del profesor con relación al aprendizaje de probabilidad en los estudiantes, nosotros identificamos pocos estudios acerca del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de probabilidad condicional en los estudiantes. Ante esto, nos planteamos la interrogante que dirige este estudio: ¿Qué conocimientos sobre las características de aprendizaje involucra el profesor de matemáticas durante el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional? Entonces el objetivo fue caracterizar el conocimiento sobre las características de aprendizaje involucra el profesor de matemáticas durante el proceso de enseñanza de probabilidad condicional. La caracterización de estos conocimientos se realiza con base en el modelo de conocimiento Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Este es un estudio cualitativo de corte interpretativo en el que se consideraron como casos a siete profesores de nivel bachillerato en Zacatecas que enseñan la asignatura de Estadística II. Como instrumento de análisis se utilizó la perspectiva Bottom-Up y Top-Down para caracterizar a los conocimientos que evidencian los profesores mediante un cuestionario de preguntas abiertas y una entrevista semiestructurada. La caracterización de dichos conocimientos permitió identificar limitaciones en el conocimiento didáctico del maestro con relación a las fortalezas, dificultades e interacción de los estudiantes con la probabilidad condicional. Asimismo, la aportación corresponde a indicadores nuevos sobre el conocimiento de los maestros asociados a las características del aprendizaje de probabilidad condicional en los estudiantes.

ABSTRACT

From the literature review regarding the teaching of conditional probability and teacher knowledge in relation to probability learning in students, we identified few studies about teacher knowledge on students' conditional probability learning characteristics. Given this, we ask ourselves the question that this study addresses: What knowledge about the learning characteristics does the mathematics teacher involve during the conditional probability teaching process? The objective was then to characterize the knowledge about the learning characteristics involved in the mathematics teacher during the conditional probability teaching process. The characterization of this knowledge is carried out based on the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. This is a qualitative study of an interpretive nature, in which seven high school teachers in Zacatecas who teach the subject of Statistics II were considered as cases. As an instrument of analysis, the Bottom-Up and Top-Down perspective was used to characterize the knowledge evidenced by the teachers through an open-ended questionnaire and a semi-structured interview. The characterization of said knowledge allowed identifying limitations in the teacher's didactic knowledge in relation to the strengths, difficulties and interaction of the students with conditional probability. Likewise, the

contribution corresponds to new indicators on the knowledge of teacher's associated with the learning characteristics of conditional probability in students.

PALABRAS CLAVES:

conocimiento especializado del profesor de matemáticas; características de aprendizaje; sesgo, falacias y confusiones; probabilidad condicional.

PRESENTACIÓN

El trabajo de grado está organizado en siete capítulos. A continuación, la estructura se describe con el objetivo de que el lector tenga una visión completa y organizada de la investigación a partir de vislumbrar lo que contiene cada uno de los capítulos.

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema de investigación. En él se realiza una síntesis de las investigaciones relacionadas con la problemática que subyace en el conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de probabilidad condicional por estudiantes de bachillerato. Esta revisión permite plantear problema de investigación, pregunta, objetivos, hipótesis y justificación.

En el segundo capítulo se da continuación a lo mencionado anteriormente. En él se presentan los antecedentes de la investigación desde tres categorías: evaluaciones de conocimiento para la enseñanza de la probabilidad, aprendizaje de la probabilidad en estudiantes y enseñanza de la probabilidad condicional.

En el tercer capítulo se presentan los elementos teóricos básicos de nuestra investigación. Primero, los fundamentos matemáticos que guardan relación con la probabilidad condicional son presentados. Posteriormente, lo que se presenta son los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas que tomamos como referencia y hacemos especial énfasis en el modelo MTSK. Por último, lo que se presenta son los elementos teóricos fundamentales relacionados con la didáctica de la probabilidad; por lo tanto, los campos de problemas, falacias y confusiones asociados a la probabilidad condicional.

En el cuarto capítulo se presentan los métodos usados en la investigación. Lo descrito corresponde a lo que se realiza como estudio de casos. El paradigma interpretativo y las características particulares de los casos de la investigación son descritos. También, los instrumentos de recogida de información son consignados; de facto son un cuestionario de conocimientos y una entrevista semiestructurada. Luego, lo que se menciona son el instrumento de análisis, es decir, las perspectivas de análisis de la información *Bottom-Up* y *Top-Down*.

En el quinto capítulo se comenta el análisis de los resultados de los instrumentos y se describen las evidencias más significativas. Para complementar esto, los resultados de la investigación son expuestos; ellos surgen de la aplicación de los instrumentos de análisis. Por último, lo que se presenta es la discusión de los resultados finales de la investigación y los antecedentes.

En el sexto capítulo se presentan las conclusiones de la investigación. En este apartado destacan las aportaciones principales que ¿se realiza al modelo MTSK en las categorías *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático y formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*? Además, las proyecciones y limitaciones que surgen de este estudio son comentadas. Para terminar, una reflexión personal que surge del desarrollo de esta investigación es expuesta.

CAPÍTULO I

**PLANTEAMIENTO DEL
PROBLEMA DE
INVESTIGACIÓN**

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se mencionan aspectos centrales del problema de investigación. Entre ellos se encuentran motivación, problemática, definición del problema, objetivos, hipótesis y justificación.

1.1 Motivación

Desde pequeño, yo he tenido un gran interés por los juegos de azar, debido a que en el contexto colombiano es común que las familias se reúnan a practicar juegos como lotería, bingo, cartas, dominós y dados. A raíz de la experiencia con estos juegos, me surgió un gran interés por comprender todo lo relacionado con aleatoriedad, riesgo y azar. Yo quería ser un apostador muy bueno.

De forma análoga, yo heredé de mis padres una vocación, una sensibilidad y un respeto profundo por la profesión docente. Yo considero que un profesor bueno debe generar un impacto positivo en la sociedad. De esta manera, el docente podría contribuir en el desarrollo de su comunidad. Por lo tanto, yo estudié la carrera de Licenciatura en Educación Matemática en la Universidad del Valle (Colombia) y la cual cursé de manera exitosa con mucho empeño, amor y dedicación.

Sin embargo, luego de haber terminado mis estudios de pregrado, yo empecé a trabajar en un colegio con estudiantes con problemas de déficit de atención, dislexia e hiperactividad, entre otros. Esta experiencia fue muy frustrante para mí, porque no pude entender realmente lo que piensan los estudiantes con esas características. Entonces, yo no supe que estrategias didácticas usar para lograr que aprendieran matemáticas.

En ese momento, yo decidí realizar una maestría en matemática educativa, porque considero que en ese momento no tenía los conocimientos que requería para desempeñar correctamente mi labor. Durante la búsqueda de una maestría acorde a mis necesidades, me percaté que los temas que me interesaban era la probabilidad y la formación de profesores, porque la probabilidad es un tema poco abordado en investigación y la formación de profesores iba a llevarme a replantear muchos aspectos de mi formación y práctica profesional. Por lo tanto, yo decido realizar una investigación sobre los conocimientos didácticos de profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional.

En el desarrollo de este trabajo de investigación, me he percatado que los juegos de azar son un tema importante abordar desde un punto de vista educativo. La investigación en didáctica de la probabilidad condicional es relativamente nueva. Específicamente, en el campo de formación de profesores, son pocas las investigaciones que analizan el conocimiento de profesores para la enseñanza de la probabilidad. Por tal razón, consideramos que este estudio

aporta elementos teóricos y metodológicos para comprender el conocimiento del profesor en probabilidad condicional.

Yo considero que la realización de esta investigación se ha convertido en un reto personal en muchos sentidos. A continuación, me permito explicar algunas de las razones que me motivan para hacer esta investigación:

- El tema de la formación de profesores en probabilidad es poco explorado en el contexto mexicano.
- El concepto de probabilidad condicional es poco abordado en investigaciones enmarcadas en la didáctica de la probabilidad.
- Los instrumentos más comunes para estudiar el conocimiento de los profesores son observaciones de clases.

En ese sentido, nosotros proponemos caracterizar el conocimiento que los profesores de poseen sobre matemáticas para la enseñanza del concepto de probabilidad condicional. Para ello, nosotros diseñamos un cuestionario de conocimientos didáctico y entrevistas semiestructuradas.

1.2 Problemática

En los últimos tres decenios, las reformas curriculares en diversos países, incluyendo México, muestran la tendencia a incluir contenidos relacionados con la probabilidad en currículos de primaria, secundaria y bachillerato (Sánchez, 2009). Estas tendencias están regidas por recomendaciones de currículos y proyectos internacionales como el National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y Project Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Educations (GAISE). Esas tendencias plantean el razonamiento probabilístico como un elemento importante para la formación de futuros ciudadanos (Batanero, Contreras y Arteaga, 2011).

Asimismo, Gal (2005) señala que la enseñanza de la probabilidad ha cobrado gran relevancia en la formación del ciudadano promedio, dada su utilidad y aplicabilidad en diversos contextos (por ejemplo, juegos de azar y seguros). Vázquez (2018) menciona que es importante desarrollar razonamiento probabilístico desde edades tempranas, puesto que ello brinda herramientas para tomar mejores decisiones ante situaciones permeadas por el azar. Por lo tanto, Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) mencionan que el aprendizaje del concepto de probabilidad contribuye a la formación del ciudadano debido a que permite el tratamiento de fenómenos aleatorios a partir de los fundamentos teóricos de la probabilidad.

Específicamente, la probabilidad condicional se considera como un concepto base en la teoría de probabilidad (Contreras, 2011). Por un lado, la comprensión de este concepto contribuye al aprendizaje de la inferencia desde la perspectiva bayesiana y clásica. Por otra parte, este aprendizaje permite incorporar cambios sustanciales a los grados de creencia en fenómenos aleatorios a medida que se añade nueva información (Heitele, 1975). Así, este concepto se ha convertido en un pilar fundamental para el desarrollo del razonamiento

probabilístico, dado que su comprensión facilita el aprendizaje de conceptos más avanzados de la teoría de la probabilidad (Díaz y De la Fuente, 2007).

En el contexto mexicano, los contenidos en probabilidad se incluyen, por primera vez, en el currículo de educación secundaria de 1975, con el título de “Registros estadísticos y probabilidad (Insulza y Guzmán, 2011). A pesar de ello, estos autores mencionan que, a pesar de llevar de más de 40 años, los avances en didáctica de la probabilidad en México son relativamente pocos. Actualmente, la Secretaría de Educación Pública (2011) plantea, en los propósitos generales de la asignatura de matemáticas, que los estudiantes deben de tener la capacidad de

“expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales (...) utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de la disciplina, de colaboración y de crítica” (p. 9).

Al respecto, Sánchez (2009) señala que existe una intrínseca relación entre los propósitos planteados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) y las “orientaciones didácticas” sobre la introducción de contenidos de estadística y probabilidad realizadas en currículos de España, Australia, Reino Unido y Estados Unidos. Sin embargo, algunas investigaciones soportan que estudiantes y profesores poseen índices mínimos de razonamiento probabilístico México, lo cual influye directamente en los propósitos planteados (Sánchez, García y Medina, 2014; Inzunza y Guzmán, 2010). Por tal razón, nosotros coincidimos con Batanero (2015), quien afirma que este tipo de investigaciones brindan herramientas de método y teóricas para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Sowder (2007) afirma que el principal responsable que se cumplan las reformas y directrices curriculares es el profesor. Dicho así, Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) mencionan que para llevar a cabo exitosamente una reforma curricular para incluir contenidos de probabilidad, lo necesario es asegurar los conocimientos de los profesores en estos temas. En ese orden de ideas, nosotros consideramos que analizar los conocimientos evidentes de los profesores sobre la enseñanza de la probabilidad condicional pueden ser un gran paso para contribuir en este aspecto.

Godino y Pino-Fan (2013) mencionan que la formación del profesor de matemáticas es fundamental para la enseñanza de las matemáticas y que de ella depende el desarrollo correcto del pensamiento y razonamiento de los estudiantes. En ese sentido, Díaz et al. (2012) afirma que la formación de los profesores es fundamental para el desarrollo del razonamiento probabilístico en estudiantes. Batanero, Ortiz y Serrano (2007) consideran que procesos formativos correctos permiten una adecuada selección de herramientas para la enseñanza. En ese orden de ideas, estos autores consideran que la formación en didáctica de la probabilidad influye directamente sobre el aprendizaje de los estudiantes.

A pesar de lo anterior, Sosa y Ribeiro (2014) señalan que los profesores de matemáticas de bachillerato en México carecen de los conocimientos matemáticos y didácticos acordes para desarrollar un pensamiento matemático en los estudiantes. También, Vázquez y Alsina (2015a) sugieren con evidencias que la falta de formación del profesorado repercute directamente sobre la calidad de la enseñanza de la probabilidad, puesto que el desarrollo de competencias acerca de la probabilidad depende directamente de las orientaciones didácticas del profesor. Por lo tanto, nosotros consideramos que es importante y significativo el estudio de los conocimientos que los profesores de matemáticas poseen para la enseñanza de la probabilidad.

En el último decenio, diversos autores han documentado ampliamente que los los profesores poseen un conocimiento muy limitado para la enseñanza de la estadística y probabilidad en primaria, secundaria y bachillerato (Mohamed, 2012; Ortiz, Batanero y Contreras, 2012). Esto ha generado que la enseñanza de contenidos de probabilidad en el aula no incentive una alfabetización estadística y probabilística en estudiantes, dado que su enseñanza se ve reducida a la instrucción de fórmulas y la resolución de problemas con poca demanda cognitiva en estudiantes (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Alsina y Vásquez, 2016). En ese orden de ideas, Vázquez (2018) manifiesta la necesidad de mejorar los procesos formativos inicial y continuos de profesores para la enseñanza de la probabilidad, específicamente en aquellos relacionados con estudiantes.

En relación con lo anterior, Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016) mencionan que la enseñanza de la probabilidad requiere de un conocimiento didáctico particular, debido a que el principio de reversibilidad no se aplica durante la enseñanza de la probabilidad. Sin embargo, a pesar que se reconoce la necesidad de estos contenidos didácticos, algunos autores mencionan que los procesos de formación específica son deficientes (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Vásquez y Alsina, 2015a). Por consiguiente, Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) concluyen que es necesario llevar a cabo investigaciones que establezcan parámetros específicos en relación con la didáctica de la probabilidad.

Las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad también han dado cuenta sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad (Begué, Batanero, Gea & Beltrán, 2017; Acevedo, 2011; García y Sánchez, 2013). Y nosotros concordamos con lo mencionado por Batanero et al. (2007), quienes afirman que existe una intrínseca relación entre el conocimiento del profesor sobre didáctica y matemáticas y las dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Por lo tanto, en esta investigación nos enfocaremos en en los conocimientos de los profesores sobre didáctica en probabilidad.

Vásquez (2018) menciona que las investigaciones sobre la formación inicial y continua de profesores son relativamente pocas. Sin embargo, nuestra indagación ha permitido afirmar que actualmente los profesores en diversos países de América y Europa tienen un conocimiento muy limitado. A continuación, me permito describir algunas investigaciones que analizan el conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad en los niveles primaria, secundaria y bachillerato.

Godino (2009) señala el conocimiento probabilístico de los profesores es necesario mas no suficiente para propiciar el aprendizaje en los estudiantes. Para ello, este autor afirma que se necesitan conocimientos de índole psicológica, tales como: aprendizaje de los estudiantes, dominio afectivo, dificultades, sesgos, falacias, errores, directrices curriculares y recursos para la enseñanza. También, Huerta y Arnau (2014) mencionan que actualmente la enseñanza de la probabilidad omite ideas informales de los estudiantes acerca de la asignación de la probabilidad y consideran importante considerar aspectos como intuición, nociones formales, cognición, concepciones y heurísticas. En ese orden de ideas, ambas investigaciones destacan como un factor importante los conocimientos del profesor y su contribución a la organización de la enseñanza y al desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes.

Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) señalan que el conocimiento de futuros profesores sobre probabilidad es muy limitado, esto se debe a que principalmente poseen dificultades en los conocimientos sobre didáctica. Algunas investigaciones documentan que profesores en activo y en formación poseen dificultades para identificar sesgo, falacias y dificultades presentes en las respuestas de estudiantes (Contreras, 2011; Díaz y de la Fuente, 2007; Díaz et al., 2012). A partir de lo anterior, Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy y Vásquez (2018) consideran necesario que los profesores adquieran conocimientos durante su trayectoria formativa, debido a que las dificultades que presentan en su razonamiento probabilístico se transmiten a sus estudiantes.

Otro aspecto importante a considerar es el conocimiento de los profesores sobre la disciplina para seleccionar adecuadamente los libros de texto. Según Espinoza, Pochulu y Jorge (2013), los libros son el principal recurso de los profesores en el aula de clases. Sin embargo, algunos estudios han documentado que la unidad de probabilidad para secundaria y bachillerato, por lo general, presenta limitaciones y problemáticas para el aprendizaje; entre ellas se encuentran: uso indebido de registros, contextos inapropiados, problemas con poca demanda cognitiva y definiciones incorrectas (Gómez, Ortíz, Batanero y Contreras, 2013; Ortíz, Mohamed, Serrano & Albanese, 2017; Vásquez, 2014;).

En relación con lo anterior, Stylianides (2009) afirma que el conocimiento de los profesores sobre didáctica para la enseñanza de la probabilidad es débil, debido a que utilizan los libros de texto como único recurso para la enseñanza. En este sentido, de acuerdo con lo dicho anteriormente por Gómez, Ortíz, Batanero y Contreras (2013), nosotros afirmamos que la enseñanza de estos contenidos puede generar limitaciones en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.

En síntesis, diversas investigaciones muestran las limitaciones de los profesores en activo y en formación en cuanto a conocimiento para la enseñanza de la probabilidad (Batanero et al., 2015; Batanero, 2015; Vásquez, 2018; Vásquez y Alsina, 2017. Específicamente, otros estudios muestran que existen aspectos específicos del conocimiento del profesor sobre didáctica (recursos, actividades, ejercicios y dificultades) que influyen directamente en la enseñanza de la probabilidad condicional (Gómez et al., 2013; Gómez et al., 2015; Díaz y de la

Fuente, 2007; Contreras, 2011; Díaz et al., 2012). Así, nosotros encontramos que el profesor tiene conocimiento limitado para reconocer el sesgo, falacias y confusiones de los estudiantes durante el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Como consecuencia surge la pregunta de investigación:

- *¿Qué conocimientos sobre las características de aprendizaje involucra el profesor de matemáticas durante el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional?*

1.3 Definición del problema

Poco se sabe acerca de los conocimientos del profesor y las características de aprendizaje de los estudiantes sobre probabilidad condicional.

1.4 Hipótesis

- Los profesores poseen conocimientos matemáticos y didácticos limitados para la enseñanza de la probabilidad condicional. Específicamente, los profesores presentan limitaciones para reconocer fortalezas y dificultades, así como formas de interacción entre los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.5 Objetivos de la investigación

1.5.1 Objetivo General:

- Caracterizar el conocimiento de las características de aprendizaje que el profesor de matemáticas de bachillerato involucra durante el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional.

1.5.2 Objetivos Específicos:

- Diseñar un cuestionario de conocimientos didácticos que evidencie el conocimiento del profesor para analizar las características de aprendizaje de los estudiantes con respecto a probabilidad condicional.
- Analizar el estado actual de conocimiento de los profesores de bachillerato al responder el cuestionario propuesto sobre las características de aprendizaje de las matemáticas.
- Proponer ideas e indicadores de evaluación que permitan reconocer oportunidades de mejora para el desarrollo del conocimiento sobre las características de aprendizaje de probabilidad condicional al involucrar estudiantes de bachillerato.

1.6 Justificación

El conocimiento que poseen profesores en activo y en formación sobre la enseñanza de la probabilidad es muy limitado (Batanero, 2015; Vásquez y Alsina, 2015a). En ese sentido, Batanero et al. (2007) afirma que, hasta el momento, pocas son las investigaciones que se centran en analizar el conocimiento del profesor sobre fortalezas y dificultades de estudiantes para aprender probabilidad condicional. Por tal razón, nosotros consideramos desarrollar una investigación enfocada en indagar los conocimientos que los profesores tienen sobre las características de los estudiantes para el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Moreno (2005) menciona que el profesor es un agente clave para el éxito de la implementación de las reformas curriculares, secuencias o propuestas didácticas que tengan como génesis la investigación educativa. De igual modo, Moreno afirma que estas investigaciones deben llevarse a cabo inicialmente desde el estudio del conocimiento de los profesores. Entonces, nosotros consideramos que para saber si las reformas educativas que consideran contenidos sobre probabilidad son éxito o fracaso, lo necesario es analizar el conocimiento de los profesores de bachillerato.

En países como España, Chile y Turquía, el conocimiento de los profesores sobre probabilidad es deficiente (Mohamed, 2012; Alsina y Vásquez, 2016;). Asimismo, la existencia de sesgos, errores, falacias y confusiones sobre el conocimiento de los profesores es evidente y lo muy probable es que estos factores didácticos sean transmitidos a sus estudiantes durante el proceso de enseñanza (Fernandes, Gea y Batanero, 2016; Danisman y Tanisli, 2017). Por esta razón, Batanero et al (2015) considera importante llevar a cabo investigaciones que permitan describir y caracterizar el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la probabilidad

Específicamente, con respecto a los conocimientos de los profesores sobre el aprendizaje de los estudiantes, Gómez (2014) identifica que los profesores poseen conocimientos limitados sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Asimismo, Gómez identifica que los profesores tienen conflictos para reconocer elementos del razonamiento de los estudiantes al momento de interactuar con los contenidos de probabilidad. Por lo tanto, Batanero et al. (2015) afirma que estas limitaciones afectan notablemente el proceso de enseñanza, porque la omisión de estos factores dificulta el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Por otro lado, Sánchez y Batanero (2011) mencionan que es importante abordar contextos cotidianos para los estudiantes, puesto que estos le permiten visualizar los conceptos de una manera aplicada. También, Batanero (2005) afirma que el razonamiento probabilístico de los estudiantes no se desarrolla inicialmente desde la escuela, sino que comienza a partir de las experiencias que tienen ante fenómenos aleatorios. Así, Batanero (2015) menciona que las experiencias previas pueden generar falacias y confusiones en los estudiantes.

Con base en lo mencionado anteriormente, nosotros consideramos que un estudio del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes en

probabilidad condicional puede contribuir al fortalecimiento del estado actual de conocimiento. Este estudio permitirá reconocer elementos matemáticos y didácticos importantes a considerar en la enseñanza de probabilidad condicional. Y como resultado, nosotros propondremos indicadores que permitan caracterizar al conocimiento para la enseñanza de la probabilidad condicional.

Nosotros consideramos que los resultados están enfocados a la comprensión de los conocimientos del profesor en la enseñanza de la probabilidad. También, nosotros esperamos aportar elementos para reconocer los conocimientos necesarios en la identificación de fortalezas, dificultades y formas de interacción que tienen los estudiantes durante el aprendizaje de probabilidad condicional. De igual modo, la aportación consistirá en elementos para el diseño de secuencias didácticas y cursos de desarrollo profesional, entre otros aspectos, y así apoyar al profesor que enseña probabilidad condicional.

Además, con esta investigación se espera contribuir con elementos teóricos y de método para robustecer al modelo MTSK. También, nosotros estableceremos elementos didácticos para la enseñanza de la probabilidad condicional e indicadores nuevos sobre dos de las categorías de análisis del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de Probabilidad Condicional. Por otro lado, con respecto a aportes de método, este estudio propone el diseño de un cuestionario de conocimientos didácticos.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

CAPÍTULO II: ANTECEDENTES

En este capítulo se describen los antecedentes del problema de investigación. Ellos están divididos en tres grupos de investigación: Evaluaciones de conocimiento para la enseñanza de la probabilidad, Aprendizaje de la probabilidad en estudiantes y Enseñanza de la probabilidad condicional.

2.1 Evaluaciones de Conocimiento para la Enseñanza de la Probabilidad

En los últimos veinte años, la probabilidad ha cobrado un papel importante en la formación de futuros ciudadanos, debido a que brinda herramientas para tomar decisiones ante fenómenos aleatorios (Batanero, Ortíz y Serrano, 2007; Batanero, 2016). Según Gal (2005), esto ha llevado a considerar la enseñanza de la probabilidad como un aspecto fundamental en la formación del ciudadano promedio. Así, la adquisición de conocimientos sobre probabilidad permite al estudiante desarrollar conocimientos, capacidades y actitudes probabilísticas para la comprensión de fenómenos aleatorios (Alsina y Vásquez, 2016).

A raíz de esto, la comunidad en matemática educativa y entidades gubernamentales de educación han incorporado, de manera conjunta, contenidos de probabilidad en el currículo de matemática en todos los niveles (Batanero, 2015). Como consecuencia de dichos cambios, algunos investigadores centran su atención en los conocimientos de los profesores para responder dichos cambios curriculares (Vásquez y Alsina, 2015a). A pesar de esto, lo documentado es que el conocimiento de profesores para la enseñanza de la probabilidad es limitado e insuficiente (Mohamed, 2012; Ortíz, Batanero y Contreras, 2012; Vásquez y Alsina, 2015b). A continuación, nosotros describimos las investigaciones más relevantes que detallan el nivel de conocimiento que poseen profesores de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad.

Mohamed (2012) señala, por medio de una evaluación de conocimientos, que el nivel del conocimiento matemático de profesores es muy limitado. Mohamed considera que esto sucede debido a las dificultades que presentan los profesores para resolver problemas elementales de probabilidad. Resultados semejantes han encontrado Gómez (2014), Vásquez y Alsina (2015a) y Contreras (2011), quienes identifican que el desempeño de profesores en la resolución de situaciones problema que involucran conceptos probabilísticos, como por ejemplo problema de cartas, es muy deficiente.

Vásquez y Alsina (2015a) afirman, a raíz de los resultados y conclusiones de la aplicación de un cuestionario, que los conocimientos de profesores sobre los temas, definiciones, fenomenología y representaciones que involucran la probabilidad condicional es muy reducido. Esos autores encuentran que los participantes poseen dificultades para identificar conceptos matemáticos inmersos en la resolución de un problema en probabilidad. Resultados

semejantes han sido encontrados por Batanero et al. (2015); Danisman y Tanisli (2017) y Mohamed (2012), quienes afirman que el conocimiento matemático de los profesores está asociado a procesos mecánicos, sin dar lugar a la abstracción y comprensión de los procedimientos que se practican. En ese orden de ideas, Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) manifiestan que es necesario llevar a cabo investigaciones que tengan como enfoque principal la mejora de competencias en matemática para la enseñanza de la probabilidad.

En complemento a lo anterior, centrando la atención al conocimiento didáctico para la enseñanza de la probabilidad, Gómez (2014) señala que los conocimientos de los profesores son muy limitados, debido a dificultades para reconocer elementos didácticos como: métodos de enseñanza, características de aprendizaje y estándares curriculares. Asimismo, Batanero et al. (2015) encuentran, a través de evaluaciones de conocimientos didácticos, que los profesores en activo y en formación poseen dificultades para identificar que los estudiantes manifiestan sesgo, obstáculos, falacias y confusiones. En ese orden de ideas, Contreras et al. (2011) menciona que es importante llevar a cabo investigaciones que permitan indagar el conocimiento del profesor para reconocer formas de razonamiento de los estudiantes al involucrar probabilidad condicional.

2.2 Aprendizaje de la probabilidad en Estudiantes

Las investigaciones sobre el razonamiento probabilístico en estudiantes iniciaron en los decenios de 1950 y 1960, de la mano de Piaget e Inhelder. Si bien, su objetivo no era indagar sobre el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes, el método que utilizaron y sus resultados permitieron dilucidar elementos importantes en el aprendizaje de estos contenidos (Penalba, Posadas y Riog, 2010). A partir de entonces, el desarrollo en materia de investigación en el campo de la didáctica de la probabilidad creció exponencialmente. Los hallazgos han permitido distinguir elementos clave que inciden en el aprendizaje de probabilidad, tanto en estudiantes como en profesores.

Según Jones, Langrall y Mooney (2007), el razonamiento probabilístico en estudiantes es uno de los objetivos principales de la matemática educativa. Sin embargo, los estudiantes mexicanos poseen niveles reducidos de razonamiento probabilístico (García y Sánchez, 2013; García, Medina y Sánchez, 2014). Por lo tanto, Batanero, Henry y Parzysz (2005) manifiestan que es importante indagar aspectos relacionados con el aprendizaje de la probabilidad y las causas que provocan esos niveles de aprendizaje en estudiantes.

Para Socas (1997), los obstáculos no son producto de la ignorancia o comprensión errónea de un saber matemático, en cambio, son conocimientos que han sido útiles para el estudiante en la resolución de ciertos problemas, pero que en otros resulta inadecuado y difícil de adaptarse. Brousseau (1983) afirma que los obstáculos pueden tener tres orígenes: epistemológico, didáctico u ontogénico. En ese sentido, Serradó, Cardeñoso y Azcarate (2005) afirman que el aprendizaje de la probabilidad no es ajeno a los obstáculos y mencionan que el

tratamiento que se le da a las matemáticas no debe de ser el mismo que el de la probabilidad, debido a la naturaleza aleatoria de los eventos que lo componen. Por consiguiente, Serradó et al. (2005) establecen los siguientes obstáculos asociados al aprendizaje de la probabilidad:

- Epistemológicos: noción del azar, aleatoriedad y probabilidad.
- Didácticos: uso del lenguaje probabilístico, experimentación y ejemplificación.
- Ontogénicos: estrategias de razonamiento.

Batanero (2015) menciona que es común que un sujeto recurra a experiencias previas cuando se ve enfrentado a situaciones con eventos aleatorios. A pesar de esto, las experiencias ante fenómenos aleatorios pueden provocar dificultades en el razonamiento probabilístico (Batanero et al., 2007). Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) establecen, a partir de un cuestionario de conocimientos didácticos a 277 estudiantes de secundaria en España, las siguientes heurísticas y sesgos asociados a la probabilidad:

- Heurística de representatividad: Es un proceso informal para calcular la probabilidad de un evento condicional.
- Insensibilidad al tamaño de la muestra: Es un tipo de sesgo y ocurre cuando el sujeto considera una muestra sin respetar el tamaño estadísticamente aceptado de esta.
- Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias: El sujeto considera que el orden con que sucede los experimentos no altera la probabilidad de estos.
- El sesgo de equiprobabilidad: El sujeto da igual asignación probabilística a todos los eventos asociados a la situación.
- Enfoque en el resultado aislado: En este sesgo, los sujetos realizan juicios de probabilidad considerando únicamente un resultado aislado a la situación aleatoria.

2.3 Enseñanza de la Probabilidad Condicional

Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) mencionan que el aprendizaje de la probabilidad condicional es fundamental en la formación del ciudadano, debido a que permite incorporar cambios en los grados de creencia de sucesos a medida que se añade información. En ese sentido, Sedlmeier (2002) afirma que el razonamiento probabilístico condicional es fundamental para la alfabetización estocástica, puesto que el tratamiento de nueva información que asociada a eventos probabilísticos permite tomar decisiones fundamentadas en constructos teóricos y no creencias. Por tanto, este es un concepto base en el desarrollo del razonamiento probabilístico (Heitele, 1975).

Hasta el momento, la mayoría de investigaciones en probabilidad se centra en profesores de educación primaria (Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Díaz et al., 2012). Sin embargo, en los últimos años, esta tendencia ha cambiado, debido a que se han llevado a cabo diversas investigaciones que se centran en analizar el conocimiento de profesores para la enseñanza de la probabilidad en secundaria y bachillerato (Batanero, 2015; Estrada y Díaz, 2007). A pesar de ello, el panorama no es alentador, porque se reportan conocimientos limitados en profesores en activo y en formación (Contreras, 2011). Por tal razón, lo importante es llevar a cabo

investigaciones que aporten elementos para la enseñanza de estos contenidos en el aula de clase (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

A continuación, nosotros describimos investigaciones más relacionadas a la didáctica, haciendo especial detenimiento en los aspectos didácticos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de probabilidad condicional.

Los profesores poseen dificultades para la definición de la probabilidad condicional, debido a que consideran otros conceptos como independencia y conjunción (Contreras, 2011). Con base en ese supuesto, Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional que proporcionan 196 futuros profesores y encuentran la existencia de tres factores por los cuales estas dificultades persisten. En consecuencia, Contreras et al. (2013) encuentran que estas limitaciones afectan directamente su quehacer en el aula y que pueden ser un factor para reconocer aspectos didácticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Otros aspectos didácticos que intervienen en la comprensión de la probabilidad condicional son la presencia de sesgos, falacias, confusiones y errores presentes en el razonamiento probabilístico. En ese sentido, Sedlmeier (1999) menciona que la comprensión de las definiciones matemáticas en probabilidad no presenta dificultades en estudiantes y profesores. En cambio, si se analiza desde un punto de vista didáctico, lo posible es que se generen dificultades de razonamiento en la resolución de problemas que involucran la probabilidad condicional (Díaz y de la Fuente, 2007). En este orden de ideas, Tversky y Kahneman (1982), Kelly y Zwiers (1986), Lecoutre (1992) y Falk (1986) caracterizan la existencia de factores didácticos asociados al aprendizaje de la probabilidad condicional, los cuales son descritos con mayor amplitud en el Capítulo 3.

- Falacia de las tasas base.
- Confusión entre sucesos independientes y mutuamente incluyentes.
- Confundir probabilidades conjuntas y condicionales.
- Falacia de la conjunción.
- Falacia de la condicional transpuesta.
- Falacia del eje de tiempo.

A partir de estos factores didácticos, diversas investigaciones han tomado en consideración estos resultados como referente para analizar los conocimientos de los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional. A continuación, nosotros describimos algunas de las investigaciones más relevantes que toman en consideración dichos factores didácticos.

Estrada y Díaz (2007) realizaron un estudio exploratorio con 66 profesores en formación sobre probabilidad simple, conjunta y condicional. En sus hallazgos encuentran que los profesores poseen falacias y confusiones en su razonamiento probabilístico condicional. Con ello resaltan la necesidad de analizar los conocimientos didácticos que los profesores poseen

para la enseñanza de este concepto, puesto que consideran que existe la posibilidad de que se transmitan a sus estudiantes.

Resultados semejantes encontraron Díaz et al. (2012), quienes llevaron a cabo un estudio para evaluar la presencia de sesgos, falacias y confusiones en el razonamiento en probabilidad condicional de 196 futuros profesores en España. Los investigadores diseñaron y validaron un cuestionario de conocimientos matemáticos y didácticos, en el cual se tomaron en consideración situaciones cercanas al contexto de los participantes. Ellos encontraron que los conocimientos matemáticos de los participantes son muy limitados; esto concuerdan con lo reportado por Estrada y Díaz (2007) y Díaz y de la Fuente (2012). También, ellos manifiestan la presencia reiterativa de sesgo, falacia, errores y confusiones asociados al razonamiento probabilístico condicional de los participantes. En este orden de ideas, los participantes deben de reforzar estos contenidos, puesto que tenderán a transmitir estas falacias y confusiones a los estudiantes (Batanero, Contreras y Díaz., 2012, p.12).

Asimismo, Contreras (2011) evalúa los conocimientos sobre recursos didácticos de 183 futuros profesores sobre probabilidad condicional. Para ello, el investigador analiza las respuestas a un cuestionario de conocimientos matemáticos y didácticos. En las respuestas se identifica que el conocimiento del contenido de los participantes es muy limitado, debido a que poseen problemas para reconocer los conceptos y propiedades asociados al problema y también, conflictos para interpretar tablas de contingencia y calcular las probabilidades. Asimismo, con respecto a los conocimientos didácticos, los participantes manifiestan dificultades para identificar variables didácticas que dificultan los problemas propuestos. Con respecto a los recursos para la enseñanza, lo que resalta es la importancia de aspectos relacionados con la historia de la probabilidad, tales como paradojas y problemas clásicos. En conclusión, Contreras (2011) menciona que es importante centrar la mirada en la forma en que los profesores utilizan estos recursos y cómo inciden en el aprendizaje de los estudiantes.

Por su parte, Huerta y Arnau (2014) analizan la percepción de los futuros maestros sobre los usos de recursos didácticos para la resolución de problemas verbales, específicamente aquellos que involucran el concepto de probabilidad condicional. Esta investigación toma como referencia el marco teórico de *Mathematical Proficiency for Teaching* para comprender la forma en que debe de ser la “*proficiency*” del profesor al momento de resolver problemas en probabilidad. Los resultados de esta investigación indican que los participantes no prevén la introducción escalonada de los recursos para la enseñanza de la probabilidad, en función de la complejidad de las situaciones. En conclusión, esta investigación muestra que los futuros profesores tienen preferencias por utilizar determinados recursos, las cuales están fundamentadas en el modelo de enseñanza recibida y no con el tópico matemático.

3.3 Reflexión

A partir de la indagación de bibliografía relacionada con la evaluación de conocimientos para la enseñanza de la probabilidad, nosotros hemos encontrado que el conocimiento matemático y didáctico que los profesores en formación y en ejercicio poseen para su enseñanza es muy limitado. De igual forma, investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad condicional bachillerato muestran que la mayoría de falacias y confusiones que los estudiantes presentan son causados por las malas prácticas de enseñanza. En este sentido, nosotros consideramos que estos indicadores son resultado de una formación profesional inadecuada, en niveles distintos, para la enseñanza de la probabilidad.

Nos hemos dado cuenta, durante la búsqueda bibliográfica, que el campo de investigación de formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad es nuevo. Hasta el momento, los estudios que se han realizado son del tipo descriptivo, en donde se indagan el estado actual de conocimiento profesional para la enseñanza de la probabilidad en países como España, Estados Unidos de América, Portugal y Turquía, entre otros. Sin embargo, en el contexto mexicano, pocas investigaciones de este tipo se han llevado a cabo. En ese orden de ideas, nosotros proponemos, desde un método cualitativo, una caracterización de los conocimientos didácticos que poseen siete casos representativos (profesores) de bachillerato en Zacatecas.

Otro aspecto que resalta de la indagación bibliográfica es la identificación de elementos claves durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional, como son las confusiones y falacias. Con ello, nosotros proponemos diseñar un cuestionario de conocimientos y una entrevista semiestructurada que permita identificar el conocimiento que poseen los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional. Con estos resultados, lo esperable es reconocer aspectos clave en la enseñanza de contenidos probabilísticos. En este orden de ideas, como producto final de esta investigación, nosotros proponemos indicadores de conocimiento para comprender las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional.

Otro aspecto a considerar es que la mayoría de investigaciones, que tienen como fin evaluar los conocimientos didácticos y matemáticos para la enseñanza de la probabilidad, se han llevado a cabo a partir de métodos cuantitativos. Sin embargo, hasta el momento, son pocas las investigaciones que han realizado estudios de caso. En ese sentido, nosotros proponemos la utilización de perspectivas de análisis de la información de la Teoría Fundamentada, denominada Bottom-up y Top-Down, para identificar elementos nuevos de conocimiento del profesor sobre características de aprendizaje de los estudiantes.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

En este capítulo se mencionan aspectos centrales del marco teórico. Entre ellos se encuentran fundamentos matemáticos, modelos de conocimiento del profesor y fundamentos para la enseñanza de la probabilidad condicional.

3.1 Fundamentos Matemáticos

En esta sección se mencionan aspectos básicos de contenidos matemáticos que guardan relación con el concepto de probabilidad. Estos intervienen de manera directa o indirecta en nuestra investigación. Por lo tanto, nosotros consideramos importante mencionarlos, puesto que son los conceptos matemáticos sobre los cuales se lleva a cabo esta investigación.

Es importante mencionar que no se realiza una definición rigurosa de cada uno de estos. El hacer una larga exposición de elementos de la teoría de probabilidad no es cuestión en este trabajo. Por ello, únicamente se hace una exposición elemental que permita que el lector entienda los conceptos matemáticos que se abordan durante la investigación.

3.1.1 Álgebra de Sucesos

Para un experimento aleatorio, el espacio muestral se define como Ω . En él se encuentran todos los eventos o sucesos aleatorios posibles de un experimento aleatorio.

Sea ρ una clase no vacía de conjuntos de Ω , se denominan los sucesos aleatorios a esta clase los cuales se denominarán *suceso aleatorio* A cualquier subconjunto del espacio muestral.

A partir de lo anterior, se consideran las propiedades entre sucesos aleatorios del mismo espacio muestral Ω :

- $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$
- $A' = \{x \in U \wedge x \notin A\}$
- $A - B = \{x \in U \wedge x \notin B\}$

Cabe resaltar que si la operación $A \cap B = \emptyset$, entonces ambos sucesos son mutuamente excluyentes. Dicha particularidad se menciona puesto que en el análisis de los resultados de los participantes se presenta la confusión entre eventos mutuamente excluyentes y sucesos independientes.

3.1.2 Probabilidad Condicional

Definición: Sean A y B dos eventos en donde B es tal que su probabilidad es estrictamente positiva. Para un $P(B) > 0$, la probabilidad condicional del evento A dado el evento B , denotada por $P(A|B)$, se define como (Ortega, 2009):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Esta función $P(X|B)$ definida es una probabilidad, en efecto se menciona que (Rincón, 2014):

1. $P(A|B) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
3. Sean A_1, A_2, \dots, A_i conjuntos disjuntos en \mathcal{A} , entonces

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) &= \frac{P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B) \end{aligned}$$

$P(X|B)$ se llama probabilidad condicional dado B .

Dos propiedades elementales de la probabilidad condicional son las siguientes (Rincón, 2014):

1. Si A y B son disjuntos, entonces $P(A|B) = 0$.

En efecto, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ y $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2. Si $B \subset A$ entonces $P(A|B) = 1$, ya que en este caso $P(A \cap B) = P(B)$.

A continuación, las propiedades fundamentales de la probabilidad condicional se presentan:

Proposición 3.1 Para cualquier colección finita de eventos A_1, \dots, A_n se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) &= \\ \text{siempre que } P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0. & \end{aligned}$$

Demostración:

$$P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$$

Todas las probabilidades condicionales que aparecen están bien definidas. Si nosotros escribimos explícitamente el segundo miembro de la igualdad, lo que se obtiene es (Rincón, 2014):

$$\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

Proposición 3.2 (Ley de la Probabilidad Total): Sea B_1, B_2, \dots, B_n una familia finita o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, cuya unión es Ω . Entonces, para cualquier evento A se tiene que (Rincón, 2014):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

Donde la suma se toma sobre todos los índices i , para los cuales $P(B_i) > 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\cup_i B_i)) \\ &= P(\cup_{i=1}^n (B_i \cap A)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A_i \cap B) \end{aligned}$$

3.1.2 Teorema de Bayes

Otro resultado fundamental sobre probabilidad condicional se conoce como Teorema de Bayes. Este es útil en situaciones en las cuales se conocen probabilidades de la forma $P(A|B_i)$ y $P(B_i)$ y se desea determinar $P(B_i | A)$.

Proposición 3.3 (Teorema de Bayes): Sean A_1, \dots, A_n sucesos incompatibles dos a dos, los únicos posibles y con probabilidades positivas y sea B un suceso con probabilidad positiva, entonces (Mordecki, 2007):

$$P(A_k|B_i) = \frac{P(A_k|B_i)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)P(A_i)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Demostración:

Por la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$P(A_k \cap B) = P(A_k) P(B | A_k) = P(B) P(A_k | B) \text{ para } (k = 1, \dots, n)$$

3.1.3 Eventos Independientes

La relación del concepto de probabilidad condicional con los eventos independientes se ha identificado, visto que, en ciertos casos, cuando la ocurrencia del evento A no aporta información respecto a la ocurrencia o no del evento B (Ortega, 2009):

$$P(B|A) = P(B)$$

En este caso, B es independiente de A . Ahora bien, como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

La relación anterior se puede expresar en la forma siguiente (cuando es simétrica en ambos sucesos):

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Además, la relación es válida aun cuando A o B sean sucesos de probabilidad nula. Esta relación es usada como definición.

Definición 3.2: Dos eventos A y B son independientes.

La verificación de que Ω y \emptyset son independientes en cualquier evento es fácil.

Proposición 3.4: Si A y B son independientes, también lo son:

a) A y B , b) A^c y B^c .

Demostración: Veamos b), la demostración de a) es similar.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

Definición 3.3: Sea $C = \{B_i, i \in I\}$ una familia de eventos. Entonces, los eventos A_i son independientes si para cualquier colección finita de eventos $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_n}$ de C se cumple (Ortega, 2009):

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^n P(A_{i_j})$$

En este caso, también C es una familia de eventos independientes.

3.2 Modelos de Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Desde hace aproximadamente cuatro decenios, profesores e investigadores se han interesado en problemáticas relacionadas con la formación matemática y didáctica de profesores. Este interés emerge a partir de los llamados de atención de la comunidad internacional de investigadores de matemática educativa porque manifiestan que existe un déficit de conocimientos para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles (Pino-Fan, Font y Godino, 2014). En

particular, en el campo de la enseñanza de la probabilidad, investigadores se han interesado en el papel que estos conocimientos de profesores tienen sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes (Batanero et al., 2015).

La comunidad en Educación Matemática ha centrado ha priorizado, entre otros aspectos, la formación de los profesores de matemáticas (Batanero, 2015). Como fruto de ello, The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) ha publicado diversos “handbooks” que permiten evidenciar el estado actual en materia de investigación en el campo de la formación de profesores de matemáticas (Even y Ball, 2009; Pino-Fan Font y Godino, 2014; Batanero, Chernoff, Engel y Sánchez, 2016; Zvi, Makar y Garfield, 2018). Como resultado, el ICMI ha llegado a considerar que es necesario llevar a cabo investigaciones que permitan esclarecer, comprender y profundizar aspectos del conocimiento matemático y didáctico de profesores de matemáticas (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016).

Desde esa perspectiva, con el fin de atender las recomendaciones mencionadas anteriormente, investigadores han usado modelos de conocimiento profesional, tales como el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008), el Cuarteto de Conocimiento (KQ) propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), el Conocimiento Didáctico-Matemático propuesto por Godino y Pino-Fan (2013) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuesto por Carillo et al. (2018). En común, estos modelos tienen como objetivo principal reconocer, de primera mano, los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para desarrollar su labor correctamente.

A continuación, nosotros describimos de manera breve y sucinta cada uno de los modelos de conocimiento mencionados. Por último, nosotros proporcionamos una reflexión para el lector explicando las razones por las cuales se seleccionó uno de estos modelos.

3.2.1 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (K)

El grupo de investigación de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball, analiza la naturaleza de los conocimientos matemáticos de los profesores para la enseñanza de las matemáticas. A partir de ello, el grupo propone un modelo de conocimiento profesional denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge Teaching, MKT). Este modelo se basa en la observación práctica del profesor en su ámbito matemático, identificando así los conocimientos que requiere para su labor de enseñanza (Rojas, 2015). En este orden de ideas, el MKT propone una nueva organización que comprende como dominios centrales a los Conocimientos Matemáticos y Conocimientos Didácticos del Contenido (Ver Figura 1).

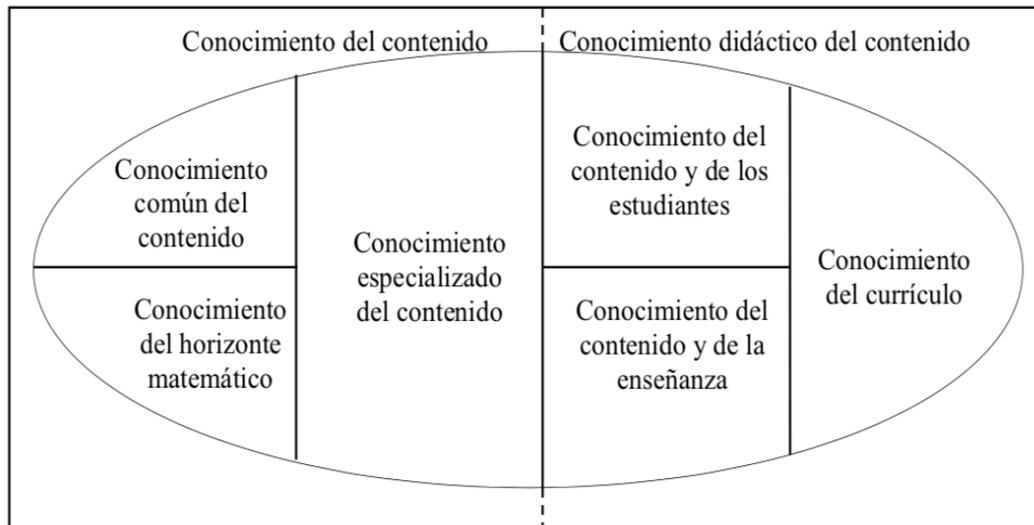


Figura 1
(Sosa, 2011).

El modelo MKT está conformado por dos categorías de conocimiento que, a su vez, poseen otras subcategorías. A continuación, cada una de ellas se describe brevemente:

- i. **Conocimiento del Contenido:** Este dominio incluye el conocimiento y habilidades matemáticas que utiliza el profesor para realizar su labor, elementos no necesariamente son exclusivos para la enseñanza. Este dominio considera tres subdominios:
 - **Conocimiento Común del Contenido (CCK):** Se define como el conocimiento y la habilidad matemática empleada por el profesor para elaborar distintas configuraciones de las matemáticas, es decir, aspectos como la resolución de problemas y emplear correctamente los conceptos matemáticos (Ball et al., 2008).
 - **Conocimiento Especializado del Contenido (SCK):** Se define como los conocimientos y habilidades matemáticas utilizadas para la enseñanza, por ejemplo: el uso de distintas formas de representación y emplear métodos de resolución comunes y poco convencionales (Rojas, 2015).
 - **Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK):** Dicho dominio considera los conocimientos que tiene el profesor sobre las relaciones entre los distintos tópicos matemáticos y la manera en que evoluciona el aprendizaje en los distintos niveles educativos (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).
- ii. **Conocimiento Pedagógico del Contenido:** Este dominio incluye los conocimientos y habilidades didácticas y pedagógicas para la enseñanza de los contenidos. Este está conformado por tres subcategorías de conocimiento:
 - **Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS):** Este subdominio mezcla el conocimiento del profesor sobre los saberes de los estudiantes con el

conocimiento del profesor acerca de las matemáticas. Se espera que el profesor anticipe los diversos tipos de razonamiento de los estudiantes y sus posibles errores (Rojas, 2015).

- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT): Es el conocimiento que utiliza el profesor para elegir o diseñar tareas de instrucción matemática, considerando diferentes formas y procedimientos para su solución. Este subdominio integra los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).
- Conocimiento del Contenido y Currículo (KCC): Es el conocimiento del profesor sobre los documentos oficiales, reformas curriculares y demás elementos que proporcionan las directrices para la enseñanza de las matemáticas en un país (Rojas, 2015).

3.2.2 Cuarteto de Conocimiento (KQ):

El Cuarteto de Conocimiento (The Knowledge Quartet – KQ), ha sido propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005). Este es un modelo teórico y una herramienta de método que permite observar y analizar el conocimiento matemático que pone en evidencia a los profesores para la enseñanza de las matemáticas (Pino-Fan, 2014). El principal enfoque del KQ es la forma en que los profesores transforman los conocimientos y creencias que poseen para lograr mejoras en sus prácticas (Sosa, 2013). Dicho así, el KQ propone cuatro dimensiones de conocimiento (Ver Figura 2):

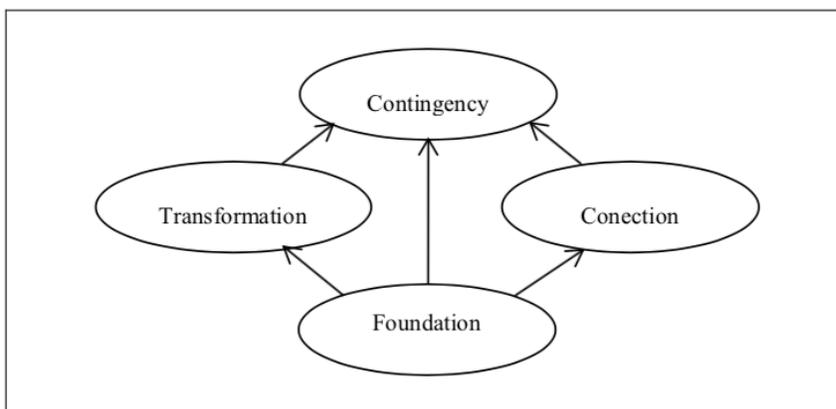


Figura 2

Fuente: Elaboración Propia

A continuación, cada una de las dimensiones consideradas se describe de manera breve y sucinta:

- i. Fundamentos: Considera los fundamentos, conocimientos, antecedentes, creencias y demás elementos de los profesores, los cuales han sido adquiridos antes o durante su formación académica (Pino-Fan, 2014).

- ii. Transformación: Son los conocimientos y capacidades que tiene el profesor para transformar el contenido matemático y hacerlo accesible a los estudiantes. Esta dimensión se ve reflejada en la planificación de clases y en la selección de ejemplos, actividades o modos de representación (Rojas, 2015).
- iii. Conexiones: Se refiere al conocimiento que evidencian los profesores cuando establecen conexiones o relaciones entre las distintas partes del contenido, distintos procedimientos, lecciones o en la coherencia durante la planificación de clases (Pino-Fan, 2014).
- iv. Contingencias: En este dominio se consideran aquellas respuestas de los profesores a situaciones inesperadas que surgen a durante el proceso de enseñanza y que requieren necesariamente de la habilidad del profesor para responder de manera apropiada (Sosa, 2013)

En general, el KQ es un modelo que permite observar, describir y discutir la pertinencia y el papel que juega el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico durante el proceso de enseñanza, así como la manera en que el profesor lo implementa durante su práctica (Rojas, Carrillo y Flores, 2015).

1.2.3 Conocimiento Didáctico-Matemático

El modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) es una herramienta teórica y de método que busca interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor. El CDM surge a partir de la integración de las nociones teóricas del EOS (Godino y Pino-Fan, 2013), la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Shoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Así, este modelo propone dividir los conocimientos del profesor tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión didáctico-matemática (Ver Figura 3).

A continuación, describimos brevemente las facetas de análisis propuestas por el CDM:

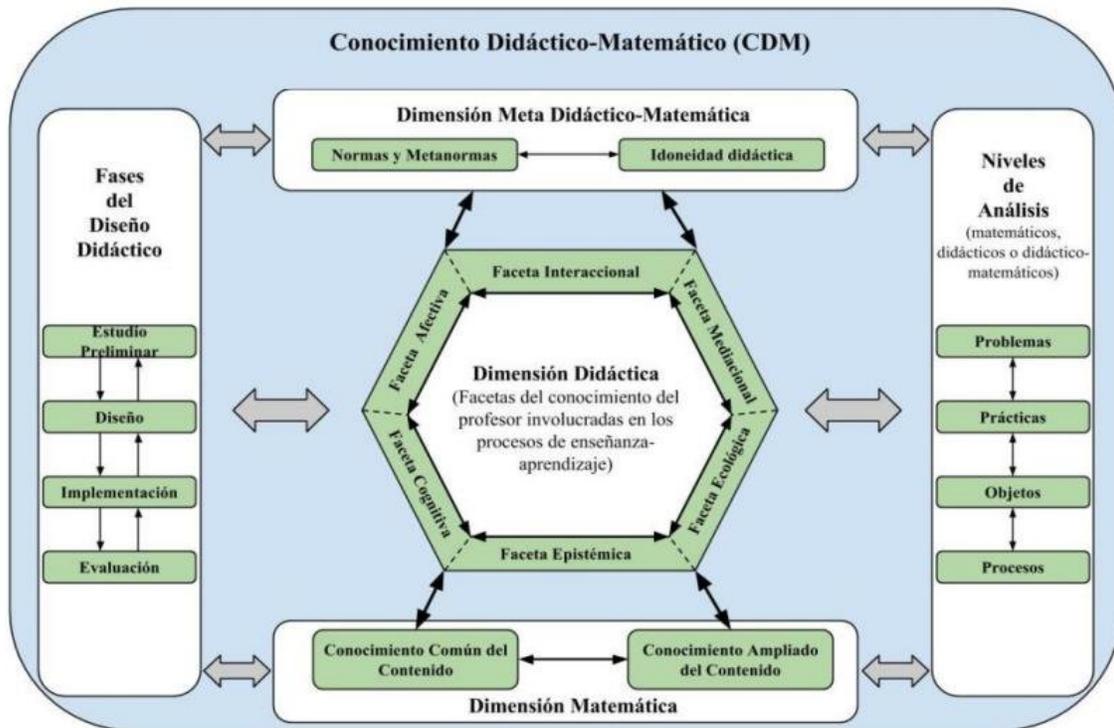


Figura 3
(Pino-Fan y Godino, 2015, p.103)

- **Faceta Epistémica:** Esta incluye los conocimientos y las concepciones escolares en su profundidad, las cuales permiten al profesor resolver problemas cuando moviliza el conocimiento común y ampliado del contenido (representaciones, significados, procedimientos, etc.). De igual modo, en esta faceta se consideran los conocimientos para establecer conexiones de contenidos en diferentes asignaturas y niveles de escolaridad.
- **Faceta Cognitiva:** Esta permite que los profesores reflexionen y evalúen sobre los significados personales (conocimientos de los estudiantes) e institucionales (conocimiento desde el punto de vista de la institución educativa) que se desarrollan en el aula. Asimismo, esta faceta contribuye a que el profesor organice y aplique, en su planeación de clases, las formas en que el estudiante va a llevar a cabo sus producciones. Esta faceta considera elementos como: errores o dificultades esperadas, conflictos, vínculos entre objetos matemáticos, respuestas esperadas, etc.
- **Faceta Afectiva:** Esta proporciona a los profesores de matemáticas un mejor entendimiento sobre la motivación y estados de ánimo de los estudiantes. En esta faceta se encuentran los conocimientos para describir aquellas experiencias, dentro y fuera del aula, de estudiantes con respecto a los contenidos matemáticos.
- **Faceta Interaccional:** Esta involucra los conocimientos necesarios para elaborar y aplicar secuencias de interacciones, es decir, aquellos conocimientos que el profesor tiene para prever, implementar y evaluar momentos en la clase cuando es necesaria la

interacción para desarrollar significados. Cabe resaltar que las interacciones que se proponen en esta faceta no son solamente entre estudiantes, sino también entre estudiantes y profesores.

- Faceta Mediacional: Esta considera los conocimientos del profesor para usar y evaluar la pertinencia y potencialidad de los materiales didácticos y recursos tecnológicos. Estos son utilizados durante la clase para el aprendizaje de un contenido matemático específico. También, la planeación de cómo, cuándo y de qué manera estos se utilizan es considerada.
- Faceta Ecológica: Esta se refiere a los conocimientos que el profesor tiene sobre el currículo de la institución y las orientaciones curriculares propuestas por organismos de control. En ese sentido, Esta faceta menciona que, para desarrollar una visión vertical y horizontal del contenido, lo necesario es tomar en consideración la ubicación de los contenidos en el currículo, los contextos educativos y propósitos de la educación

A partir de la delimitación de las facetas de análisis, Pino-Fan y Godino (2015) consideran seis tipos de conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza:

1. Conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica).
2. Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva).
3. Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales (faceta afectiva)
4. Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional).
5. Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional)
6. Conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos que influyen en la gestión de los aprendizajes (faceta ecológica).

Con respecto a los conocimientos sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Este modelo propone este dominio con base en el dominio del Contenido y Estudiantes, propuesto por Ball et al. (2008). Godino (2009) establece que la reflexión sistemática del aprendizaje está dada por conexiones entre la faceta cognitiva y afectiva. Él propone cuatro consignas que son relevantes para analizar el conocimiento del profesor con respecto al aprendizaje de los estudiantes:

- Configuraciones cognitivas: Esta describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos desarrollaron durante el proceso de resolución de una actividad. En esta se consideran todas aquellas estrategias, representaciones, enunciados y demás que desarrollan cognitivamente los estudiantes.
- Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje y concepciones: En esta consigna se describen los conflictos más frecuentes que evidencian los estudiantes durante la resolución de actividades.
- Evaluación de aprendizajes: Esta se encarga de formular preguntas que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver un determinado tipo de tareas.

- Actitudes, emociones, creencias y valores: Esta describe ampliamente las estrategias que implementa el profesor para promover que los alumnos se interesen e involucren por sí mismos, en la solución de tareas o estudio del tema.

Con respecto a aspectos de método, Godino (2009) afirma que para llevar a cabo evaluaciones de conocimiento para profesores es necesario realizar dos pasos fundamentales:

- La selección de una tarea matemática cuya solución ponga en juego aspectos del contenidos o competencias más importantes a estudiar o desarrollar.
- Formular consignas para la prueba. Estas consignas cubran las facetas y niveles de análisis didáctico del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas. Con estas se espera solucionar el problema, identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución, describir razonamientos de los alumnos al resolver una tarea y analizar categorías de idoneidad didáctica.

3.2.4 Conocimiento de Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (en inglés, MTSK) propone analizar y caracterizar, desde la especificidad, la enseñanza de contenidos por parte del profesor a través de dominios y subdominios de conocimiento. El MTSK es una propuesta dual, es decir, modelo teórico y una herramienta analítica (Carrillo et al., 2018). Este modelo se centra en comprender el conocimiento específico que un profesor de matemáticas posee para realizar su labor desde un punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje (Carrillo et al., 2018). En ese sentido, el MTSK propone analizar y caracterizar, desde la especificidad, la enseñanza de contenidos por parte del profesor a través de dominios y subdominios de conocimiento (Escudero, 2015).

Esta propuesta es generada a partir de las dificultades de carácter específico y de la delimitación de subdominios de conocimientos detectadas en modelos de conocimiento de profesores, tales como el MKT (Ball et al., 2008) y el PCK (Shulman, 1987). De igual forma, el MTSK toma en consideración las potencialidades de los modelos de conocimiento profesional de profesores de matemática y los direcciona en un contexto específico de enseñanza; además considera importante no tomar en cuenta referencias externas a conocimientos relacionados con otras profesiones (biólogos, matemáticos puros, ingenieros, etc.). A partir de ello, el MTSK presenta una nueva propuesta de organización, la cual considera dos categorías *Conocimiento Matemático (MK)* y *Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)*. Asimismo, propone para cada uno de los dominios, tres subdominios de conocimiento de distinta naturaleza (Ver Figura 4).

A continuación, cada uno los dominios y subdominios de conocimiento se explicita con mayor precisión.

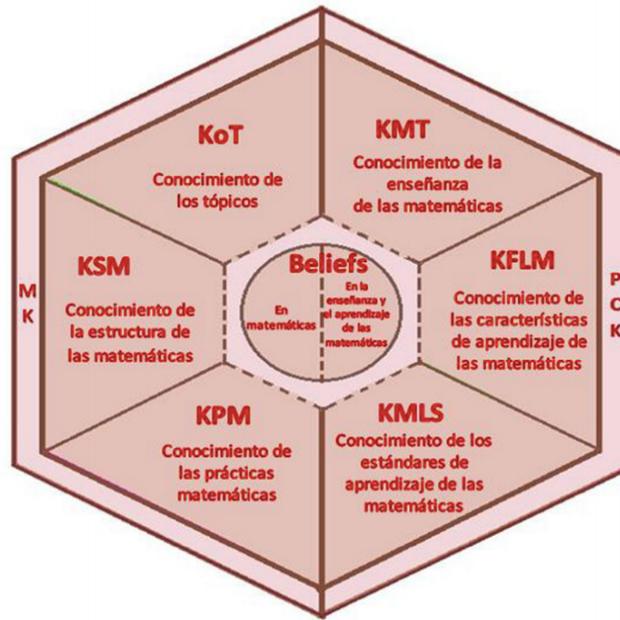


Figura 4
(Carrillo et al., 2018, p.6)

3.2.4.1 Conocimiento Matemático (MK)

Lo importante es que el profesor de matemáticas conozca y entienda la disciplina que enseña. En ese sentido, el conocimiento de las matemáticas es un factor esencial en la enseñanza de las matemáticas, debido a que permite relacionar el saber *qué* enseña y *por qué* lo enseña (Escudero, 2015). En particular, en este dominio se consideran los componentes importantes de la disciplina que enseña, tales como: objetos, conceptos y sus relaciones, fenomenología, campos de problemas, procedimientos, estructuras matemáticas, etc. Por tanto, el MTSK propone que el MK esté subdividido en tres dominios de conocimiento: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) y Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM).

A continuación, cada uno de estos se describe con mayor detalle.

3.2.4.1.1 Conocimiento de los Temas (KoT)

Este subdominio de conocimiento se centra en comprender cómo el profesor conoce, trabaja y maneja los contenidos desde una perspectiva matemática amplia y profunda (Escudero, 2015). En ese sentido, el KoT comprende los conocimientos de los contenidos y procedimientos relacionados con la matemática como disciplina científica (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). Así, para este subdominio se consideran las siguientes categorías de conocimiento:

- Fenomenología: Esta categoría posee un carácter dual. Por un lado, el conocimiento que posee el profesor acerca de los fenómenos matemáticos en los que emergen los

conceptos y las matemáticas en general. Por otro lado, el conocimiento acerca de la aplicación y uso que tienen los temas o conceptos que se trabajan en clase (Flores-Medrano et al., 2014).

- **Propiedades y Fundamentos:** Esta considera el conocimiento que el profesor tiene sobre las propiedades y fundamentos que permiten definir un concepto matemático, así como las diversas formas que el profesor da su significado (Escudero, 2015).
- **Registros de Representación:** Esta categoría considera el conocimiento sobre las distintas formas de representación semiótica que tiene un objeto matemático (Duval, 2004). Asimismo, esta retoma aspectos importantes del discurso del profesor como el vocabulario y sintaxis asociada a las representaciones (Flores-Medrano et al., 2014).
- **Definiciones:** Esta categoría considera el conocimiento del profesor sobre las definiciones de conceptos, así como las propiedades de estos mismos que utiliza el profesor para definirlos (Flores-Medrano et al., 2014).
- **Procedimientos:** En esta categoría se considera el conocimiento acerca de los aspectos prácticos de los temas, es decir, los momentos de la clase en los cuales un profesor sabe cómo, cuándo y por qué emplear uno u otro procedimiento para resolver una situación o ejercicio.

3.2.4.1.2 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

Este subdominio se define como el conocimiento que posee el profesor sobre las formas de proceder en matemática en el aula y su sintaxis (Flores-Medrano et al., 2014). En este sentido, el KPM considera la manera en que se genera y explora el conocimiento matemático, las relaciones y correspondencias entre conceptos y los distintos tipos de argumentación, razonamiento y generalización (Escudero, 2015). Dicho así, este subdominio está conformado por dos categorías de análisis:

- **Prácticas ligadas a la Matemática en General:** Esta categoría considera *cómo* se desarrollan las matemáticas de manera aislada a los conceptos abordados. Particularmente, este tipo de conocimiento es utilizado para trabajar las matemáticas de manera genérica, a partir de las estructuras lógicas de pensamiento que permiten comprender la perspectiva funcional de las matemáticas (Flores-Medrano et al., 2014)
- **Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas:** Esta categoría considera el *cómo* se desarrolla la matemática, pero con la diferencia que toma en consideración únicamente un concepto o temática específica (Escudero, 2015).

3.2.4.1.3 Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM)

Este subdominio considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de las relaciones matemáticas que se pueden realizar entre distintos contenidos. En este sentido, lo importante es que el profesor reconozca los temas como elementos que pertenecen a una misma red teórica.

Esto con el objetivo de relacionar, por medio de conexiones, un mismo objeto matemático y así permitir la comprensión de contenidos matemáticos anteriores o posteriores (Sosa et al., 2016). Este subdominio posee cuatro categorías de análisis, las cuales están asociadas a los tipos de conexiones que se pueden establecer en la estructura matemática de un contenido:

- **Conexiones de Complejización:** Esta categoría relaciona los contenidos enseñados en un grado escolar con contenidos de cursos de niveles posteriores. Se reconoce que el profesor realiza una proyección de los contenidos enseñados para poder potenciar contenidos en un futuro (Flores-Medrano et al., 2014)
- **Conexiones de Simplificación:** En esta se consideran aquellas conexiones entre contenidos que se imparten en ese momento con contenidos de cursos anteriores (Flores-Medrano, 2014).
- **Conexiones de Contenidos Transversales:** Son aquellas que se establecen entre los contenidos de diversas disciplinas. En esta categoría se reconocen las propiedades y características matemáticas en tienen en común y los distintos tipos de pensamiento asociados a los contenidos (Escudero, 2015).
- **Conexiones Auxiliares:** Esta categoría toman en consideración las conexiones entre los conceptos y sus relaciones. Por ejemplo, la función lineal y la ecuación lineal. Cabe aclarar que este tipo de conexiones no se clasifican como intraconceptuales, debido a que sus relaciones no se atribuyen a propiedades matemáticas.

3.2.4.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio considera aspectos del conocimiento profesional del profesor y de la didáctica específica del contenido. El PCK permite visión didáctica amplia del contenido al profesor, dado que toma en consideración aspectos como: la enseñanza, el aprendizaje y el currículo de matemáticas (Escudero, 2015). A pesar de que el PCK depende esencialmente del MK, este dominio de conocimiento es naturaleza diferente, debido a que posee una estructura y naturaleza informal, cual está dirigida únicamente a la a la enseñanza de las matemáticas, tomando como principal fundamento la Didáctica de las Matemáticas (Rojas et al., 2015).

Según Azcárate (1998), este dominio de conocimiento facilita o dificulta el entendimiento de un tema por parte de los estudiantes, debido a que se espera que el profesor relacione las concepciones, preconcepciones y conocimientos previos que tienen los estudiantes de distintas edades. También, el reconocimiento de las relaciones permitirá al profesor elegir técnicas adecuadas de secuenciación y presentación de los contenidos. En este orden de ideas, el PCK es quien le permite al profesor convertir el conocimiento teórico en enseñado (Shulman, 1987).

El enfoque principal del PCK es la didáctica específica, es decir, los aspectos didácticos que están directamente ligados con los contenidos matemáticos y no a la disciplina en general (Flores-Medrano et al., 2014). Según Carrillo et al. (2018), este dominio de conocimiento no

considera aspectos estructuradores de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, en el PCK intervienen los contextos educativos, tales como aspectos socioculturales, psicosociales y humanos, debido a que estos están asociados a la pedagogía general y no a la didáctica específica. En conclusión, el MTSK propone que el PCK esté subdividido en tres dominios de conocimiento: Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (MKT), Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KFLM) y Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

A continuación, cada uno de estos se describe con mayor detalle.

3.2.4.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)

Este subdominio considera el conocimiento del profesor sobre las características propias del contenido matemático y sus recursos (materiales o tecnológicos) para la enseñanza en el aula (Escudero, 2015). Asimismo, este comprende el conocimiento del profesor para la selección de representaciones instruccionales, actividades, ejemplos, ejercicios, tareas, teorías que contribuyen a la enseñanza de un contenido (Sosa et al., 2016). Dicho así, el KMT considera tres categorías de análisis, las cuales describimos a continuación:

- Conocimiento de las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático: En esta categoría se consideran aquellas teorías de enseñanza que contribuyen a la enseñanza de los contenidos, dado que condicionan la forma de proceder del profesor. Dichas teorías pueden ser fruto de la investigación o de la reflexión y observación de un profesor durante su práctica en el aula de clases (Flores-Medrano et al., 2014).
- Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático: En esta se consideran los conocimientos de los profesores sobre los recursos materiales (físicos o virtuales), los cuales permiten mediar el aprendizaje de los estudiantes (Escudero, 2015).
- Conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido: En esta categoría se consideran los conocimientos sobre todas aquellas potencialidades y limitaciones que se pueden presentar al implementar secuencias didácticas, propuestas de aula, tareas, etc. Asimismo, esta considera el conocimiento sobre la gestión de la ayuda que el profesor brinda al estudiante durante la clase (Escudero, 2015).

3.2.4.2.2 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS)

Este subdominio se define como el conocimiento que tiene el profesor acerca del nivel de conocimiento matemático que debe o puede alcanzar el estudiante en un curso escolar (Flores-Medrano et al., 2014). Este subdominio considera al profesor como un individuo crítico y reflexivo, que reconoce los estándares de aprendizaje propuestos por el currículo de matemáticas para un estudiante en un determinado nivel educativo (Sosa et al., 2016). Dicho así, el KMLS comprende el conocimiento del profesor acerca de las capacidades conceptuales,

procedimentales y de razonamiento matemático que se desarrollan en determinados niveles o momentos educativos (Flores-Medrano et al., 2014).

Esta subcategoría de conocimiento está conformada por tres categorías de análisis:

- Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico: Esta considera el conocimiento del profesor sobre la expectativa de aprendizaje que el estudiante puede alcanzar en un nivel escolar determinado.
- Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un momento escolar determinado: Esta categoría considera el conocimiento del profesor sobre el nivel de profundidad con que se aborda un contenido en el aula de clases, en relación con el ciclo escolar de los estudiantes.
- Conocimiento de la secuenciación de los temas anteriores y posteriores a un momento escolar determinado: Esta categoría considera el conocimiento del profesor sobre las capacidades previas que tiene un estudiante para el aprendizaje de un nuevo contenido específico, en términos de las indicaciones curriculares. Asimismo, esta toma en cuenta la aportación de este conocimiento sobre las capacidades previas del estudiante en el abordaje de temas posteriores (Escudero, 2015).

3.2.4.2.3 Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM)

Este subdominio considera los conocimientos del profesor para interpretar las respuestas de los estudiantes, anticipar distintos tipos de razonamientos al resolver una actividad o tarea y asociar distintos contextos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes. En ese sentido, el KFLM comprende el conocimiento del profesor sobre los procesos de aprendizaje que está llevando a cabo el estudiante (Escudero, 2015). El KFLM se centra en saber cuáles son los conocimientos didácticos que ponen en juego el profesor para enfrentar dichas situaciones y en cómo las utiliza para desarrollar habilidades específicas en los estudiantes (Escudero, 2015). En este orden de ideas, este subdominio engloba los conocimientos derivados de la interacción del estudiante con el contenido matemático y las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje (Sosa et al., 2016).

Este subdominio de conocimiento está conformado por cuatro categorías de análisis, las cuales se describen a continuación:

- Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático: Esta categoría considera al conocimiento del profesor sobre las distintas maneras en que los estudiantes aprenden un contenido matemático. Esta categoría abarca el conocimiento sobre las teorías de desarrollo cognitivo institucionales o personales (provenientes de la reflexión de su propia práctica) que influyen en el aprendizaje de un contenido en particular o de las matemáticas en general (Flores-Medrano et al., 2014).

- Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático: En esta se engloba el conocimiento del profesor sobre los errores, obstáculos, dificultades frecuentes o no, asociados al aprendizaje temas específicos en matemáticas (Sosa, 2011). Este tipo de conocimiento está asociado a un contexto específico en el cual los estudiantes aprenden, de manera tal que pueda reconocer diversas particularidades de las características de aprendizaje de los estudiantes (Flores-Medrano et al., 2014).
- Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático: Esta categoría comprende el conocimiento del profesor sobre las maneras en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático. En ese sentido, esta abarca los procesos, estrategias, gestos y lenguaje de los estudiantes para abordar un contenido matemático determinado (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013).
- Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático: Esta categoría considera los conocimientos del profesor sobre las expectativas e intereses de los estudiantes con un contenido matemático. De igual forma, considera las concepciones y preconcepciones que tienen los estudiantes sobre la facilidad o dificultad que tiene el aprendizaje de un contenido matemático (Flores-Medrano et al., 2014).

Asimismo, algunos investigadores identifican indicadores de análisis asociados a dos categorías de análisis del KFLM (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015) (Ver Tabla 1).

Tabla 1
Indicadores de Conocimiento KFLM

Categoría de Análisis	Indicador
Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	I1. Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
	I2. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).
	I3. Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas.
	I4. Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.
	I5. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer

	operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.
	I6. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.
Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	I7. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático mezcla del lenguaje común con el matemático).
	I8. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.
	I9. Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.

3.2.5 Reflexión modelos de conocimiento del profesor

A partir de lo mencionado en los apartados anteriores, nosotros consideramos pertinente mencionar las razones por las cuales se toma en cuenta para esta investigación el modelo MTSK y no otros modelos de conocimiento del profesor como el MKT, KQ o CDM.

El objetivo de esta investigación está orientado a comprender los conocimientos que pone en juego el profesor de matemáticas sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes con respecto a la probabilidad condicional. Para ello, este trabajo busca caracterizar el conocimiento de siete profesores al momento de realizar un cuestionario y una entrevista sobre fortalezas, dificultades y formas de interacción que tienen los estudiantes con el contenido de probabilidad condicional. Por ende, consideramos que el modelo MTSK es el idóneo para realizar esta investigación.

Además de lo expuesto anteriormente, otras razones más puntuales existen; a continuación se exponen:

- El carácter especializado que se le asigna al conocimiento del profesor permite analizar de manera más precisa y profunda el conocimiento que posee un profesor. Para esta investigación, este carácter permite caracterizar el conocimiento que pone en evidencia el profesor de matemáticas para la resolución de un cuestionario de conocimientos didácticos y la entrevista semiestructurada.
- La delimitación que se propone al subdominio Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM) es semejante a los objetivos de la investigación, dado que engloba los conocimientos derivados de la interacción del estudiante con el

contenido matemático y las características específicas del contenido matemático como objeto de aprendizaje.

- No se limita únicamente a comprender las situaciones que enfrenta un profesor en el aula de clases. Va más allá, en el sentido de que busca establecer los conocimientos didácticos que pone en manifiesto el profesor de matemáticas para desarrollar habilidades específicas en sus estudiantes.

En complemento con lo anterior, consideramos importante mencionar las razones por las cuales no se tomarán en consideración los otros modelos de conocimiento del profesor:

- El modelo MKT considera superficialmente los conocimientos sobre fortalezas, dificultades e interacción que tienen los estudiantes con el contenido matemático. Específicamente, la delimitación que hacen Ball et al. (2008) del subdominio Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) considera únicamente el conocimiento del profesor en la anticipación de los diversos tipos de razonamiento de los estudiantes y sus posibles errores.
- El modelo KQ considera en dos de sus fases (fundamentos y transformación) aspectos relacionados con los conocimientos sobre dificultades, fortalezas e interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Sin embargo, este modelo analiza a los estudiantes únicamente desde la perspectiva práctica del profesor de matemáticas y cómo utiliza estos conocimientos para la enseñanza. En cambio, nuestra investigación busca analizar estos conocimientos del profesor sobre las características aprendizaje de los estudiantes con respecto a los contenidos matemáticos, desde el conocimiento que posee.
- El modelo CDM menciona en su faceta cognitiva y afectiva, elementos relacionados con el conocimiento de las fortalezas, dificultades y formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático. Sin embargo, consideramos que este modelo deja abiertas incógnitas sobre la manera en que se analiza, desde un punto de vista cualitativo, el conocimiento que pone en evidencia el profesor de matemáticas.

A pesar de lo dicho anteriormente, se debe de resaltar que no se tomarán única y exclusivamente elementos teóricos del MTSK para la comprensión de los conocimientos del profesor. También, se considerarán elementos teóricos y metodológicos de los otros modelos de conocimiento del profesor (MKT, KQ y CDM) que contribuyan al cumplimiento de los objetivos de la investigación. Por ejemplo, se retomarán algunos aspectos metodológicos que propone el CDM para el diseño del cuestionario de conocimientos didácticos.

3.3 Fundamentos para la Enseñanza de la Probabilidad Condicional

En este apartado se mencionan aspectos teóricos relacionados con la enseñanza de la probabilidad condicional. Entre los cuales se encuentran: las ideas estocásticas fundamentales para la enseñanza; falacias y confusiones; tipos de problemas; y representaciones y argumentos asociados a la probabilidad condicional.

3.3.1 Ideas estocásticas fundamentales para la enseñanza

Heitele (1975) fue el primero en proponer las ideas fundamentales para la enseñanza de la estadística y probabilidad. Éste autor se basó en el enfoque epistemológico-pragmático para establecer diez pensamientos que los estudiantes desarrollan desde niveles educativos básicos hasta niveles formales. Para Heitele, una idea fundamental proporciona al individuo modelos explicativos para cada etapa del aprendizaje de un concepto estocástico. Por tanto, estas ideas fundamentales permiten caracterizar el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional.

I. Normando las expresiones de nuestras creencias

Comúnmente, los sujetos utilizan expresiones como “creo que sí”, “es más seguro”, “es imposible”, etc., debido a que el hombre no asigna número a la realidad que está a su alrededor (Rivera, 2012). A partir de ello, norma estas ideas y afirma que los eventos imposibles tienen una probabilidad de cero y a los eventos seguros uno (Heitele, 1975). Y así, entre estos dos números (0 y 1), se asignan las probabilidades a eventos inciertos, a lo cual Heitele le llama probabilidades intermedias.

II. El campo de probabilidad

Otra de las ideas fundamentales es la asignación del espacio muestral a experimentos casuales. Esta consiste en asignar un campo de conjuntos a un campo de eventos observables (Heitele, 1975). Este autor menciona que tal idea es elemental en la resolución de problemas, debido a que en algunos problemas no es necesario encontrar la probabilidad cuantitativa de cada uno de los eventos y basta con realizar un campo comparativo de probabilidades (ej. diagramas de árbol en juegos de apuestas).

III. Combinación de Probabilidades: Regla de adición

La construcción de modelos es una de las principales características de las matemáticas. Este tipo de modelos pueden ser simples o complejos, dependiendo exclusivamente de las situaciones (Heitele, 1975). Desde el punto de vista estocástico, los procesos también se pueden modelar de acuerdo a los fenómenos aleatorios y las evaluaciones subjetivas que realiza el individuo. En términos operativos, la regla de adición es uno de las ideas fundamentales que permiten la modelación de fenómenos aleatorios, puesto que permite ver nuevas probabilidades, además de las iniciales (Steinbring, 2005).

IV. Combinación de Probabilidades: Independencia

Con los modelos estocásticos permanece abierta la idea de composición y descomposición de estos mismos. En ese sentido, la idea de independencia de eventos está intrínsecamente relacionada con el concepto de probabilidad condicional. Se considera fundamental para el individuo estar en la capacidad de considerar experimentos casuales sin vínculo causal físico, como eventos estocásticamente independientes (Heitele, 1975).

V. Equidistribución y simetría

Una idea heurística es descubrir y utilizar simetrías en la resolución de situaciones problema. Estas ideas están relacionadas con la geometría y la física básica, en las cuales un cuerpo posee morfológicamente una simetría, haciendo que su resultado no esté afectado por otros factores físicos (Steinbring, 2005). En probabilidad pasa el mismo fenómeno, ordenado por el principio de la razón, el individuo realiza una suposición (no física) de que cada uno de los eventos aleatorios del espacio muestral poseen igual asignación probabilística, por tal razón son equiprobables entre sí (Heitele, 1975).

VI. Combinatoria

Los diagramas de árbol son una de las principales representaciones icónicas utilizadas en probabilidad, dado que permite estructurar todos los resultados posibles de un experimento y permite visualizar el comportamiento del fenómeno aleatorio (Heitele, 1975). En situaciones en donde no hay una visión directa o icónica del espacio muestral es necesario utilizar procesos para calcular el número de arreglos o combinaciones que hay entre los eventos aleatorios. En este orden de ideas, la combinatoria es necesaria para la visualización y tratamiento del fenómeno aleatorio (Steinbring, 2005).

VII. Modelo de urna y simulación

Una de las únicas formas de describir fenómenos que poseen elecciones aleatorias es el modelo de urna. Esta es una idea heurística muy útil para simular un fenómeno desde un experimento casual y comprender lo que sucede con cada uno de los eventos aleatorios (Heitele, 1975). Por lo tanto, esta idea contribuye a la asignación probabilística de cada uno de los eventos, si la situación lo requiere.

VIII. La idea de variable aleatoria

La concepción de variable aleatoria dio el estatus formal a la teoría estocástica. Esta permitió realizar una aplicación convincente de todos los procesos que involucraban esta variable. En la antigüedad, este tipo de procesos fueron criticados por la existencia de la paradoja de San Petersburgo (Heitele, 1975). Sin embargo, las variables estocásticas son fundamentales en la modelización de fenómenos aleatorios, puesto que permitieron comprender aspectos de la vida cotidiana, juegos de azar, seguros, entre otros. De igual manera, este tipo de variable juega un papel importante en tres aspectos: la distribución de una variable estocástica,

su expectativa y la composición de variables estocásticas para obtener otras nuevas (Rivera, 2012).

IX. La ley de los números grandes

En situaciones en donde el número de ensayos es un número muy grande se utiliza la ley empírica de los grandes números o principio de números grandes. Esta ley está asociada a la estabilidad de la frecuencia relativa de un suceso aleatorio dentro de un fenómeno. Lo fundamental es su comprensión para reconocer y estimar el comportamiento de un fenómeno aleatorio que posee un número de ensayos muy grande, en donde la libertad individual está bajo una restricción colectiva.

X. La idea de muestra

Esta idea es fundamental para los procesos de argumentación críticos con base a una muestra. Esta idea permite encontrar buenos resultados en estadística, en el sentido de que la selección de una muestra debe de cumplir ciertos parámetros de representatividad. Lo cual hace que las conclusiones estadísticas que sean obtenidas puedan ser generalizadas para todo el conjunto de datos (Heitele, 1975). Así, Heitele centra sus ideas y las asocia con el desarrollo psicológico de los estudiantes y menciona que deben de ser la base para el desarrollo del currículo de estadística y probabilidad, en la cual se considera la visión de un currículo en espiral. Esto conducirá a que el proceso de enseñanza tenga la capacidad de cambiar las definiciones y temas de estudio de manera constante y pueda obtener el desarrollo del razonamiento estocástico de forma gradual y continua (Rivera, 2012).

3.3.2 Falacias y confusiones asociados a la probabilidad condicional

Antes de mencionar aquellos sesgos, falacias y confusiones asociados a la probabilidad condicional, nosotros consideramos pertinente definir el término ‘razonamiento probabilístico’, el cual ha sido utilizado a lo largo de esta investigación. Dicho así, éste es la forma en que los sujetos toman decisiones en ambientes de incertidumbre, las cuales pueden estar amparadas en conceptos de la teoría de probabilidad o heurísticas (Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares, 2005)

Con relación con lo anterior, investigadores han documentado la relación intrínseca que posee el concepto de probabilidad condicional con el razonamiento probabilístico, dado que se considera como un concepto base en el desarrollo de este tipo de razonamiento (Contreras, 2011). El aprendizaje de este concepto permite que el sujeto incorpore cambios sustanciales a los grados de creencia en sucesos aleatorios (Heitele, 1975). Por tal razón, este concepto es uno de los más importantes en la formación del ciudadano, debido a que contribuye a la toma de decisiones ante situaciones de incertidumbre (Batanero, Contreras y Díaz, 2012)

A pesar de la importancia de la probabilidad en el desarrollo del pensamiento probabilístico, diversas investigaciones dan cuenta sobre las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de probabilidad condicional (Guerrero, 2015; Batanero et al., 2015). Fruto de dichas investigaciones, lo importante es centrar la mirada en aspectos

específicos de la enseñanza de la probabilidad condicional, dado que es uno de los conceptos que más genera dificultades en estudiantes (Contreras, 2011). En este orden de ideas, Díaz et al. (2012) mencionan que estudiantes y profesores dan cuenta sobre la presencia de sesgos, falacias, confusiones asociados a la probabilidad condicional.

Para esta investigación, nosotros adoptamos la definición de Pérez-Echeverría (1990) quien describe la heurística como “mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos a la complejidad de estímulos ambientales” (p.51). Asimismo, Salcedo y Mosquera (2008) consideran que los sesgos, asociados a heurísticas, surgen a partir de un razonamiento práctico y funcional de la vida cotidiana. Por otro lado, los errores, falacias o confusiones tienen otro origen, como por ejemplo la percepción lógica o de una interpretación idiosincrática incorrectas (Sánchez, 2010).

Estos factores didácticos son como un punto importante en el desarrollo del razonamiento probabilístico condicional. Esto se debe a que están presentes en el pensamiento matemático de estudiantes y profesores, de manera indistinta (Contreras, 2011). De igual forma, de acuerdo con los objetivos de este trabajo de investigación, la determinación de la incidencia de estos factores en la enseñanza de la probabilidad se considera como un aspecto clave para comprender el conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes en la probabilidad condicional. En ese orden de ideas, investigadores encuentran los principales sesgos, falacias y confusiones presentes en el aprendizaje de la probabilidad condicional, los cuales han sido descritos por Tversky y Kahneman (1982), Kelly y Zwiers (1986), Lecoutre (1992) y Falk (1986).

- Falacia de las tasas base: Ha sido identificada por Tversky y Kahneman (1982) y esta sucede cuando el sujeto se deja llevar de ideas preconcebidas e ignora la probabilidad de un suceso, en situaciones que involucran el cálculo de la probabilidad a posteriori (Díaz y de la Fuente, 2007). Asimismo, se considera que la aparición de este sesgo se debe a que el sujeto posee una incorrecta percepción de la dependencia de los sucesos implicados (Díaz et al., 2012)
- Sesgo de equiprobabilidad: este ha sido descrito por Lecoutre (1992) y se define como la creencia de que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio son igualmente probables. Es importante mencionar que consideramos el sesgo como una variación de la falacia de la condicional transpuesta, en el sentido que se le asigna igual probabilidad a cada una de los eventos aleatorios que lo componen.
- Confusión de la probabilidad conjunta y condicional: esta ha sido reportada por Tversky y Kahneman (1982) y en esta el sujeto manifiesta una confusión en la interpretación de los enunciados que utilizan la conjunción se tiende a representar incorrectamente la probabilidad conjunta o condicional.
- Confusión de sucesos independientes y mutuamente excluyentes: esta ha sido identificada por Kelly y Zwiers (1986) y la asocian con la confusión del significado del

término “independiente”, dado que, en el lenguaje cotidiano, este término puede hacer referencia, en algunas ocasiones, al término “separado”.

- Falacia de la conjunción: esta ha sido reportada por Tversky y Kahneman (1982b) y la definen como la percepción incorrecta de la probabilidad en la intersección de dos eventos, puesto que el sujeto concibe la intersección más probable que considerar la probabilidad de cada uno de los eventos por separado.
- Falacia de la condicional transpuesta: esta ha sido identificada por Falk (1986) y la define como la incorrecta discriminación que hace el sujeto al momento de simbolizar la probabilidad condicional en un problema de palabras, puesto que no discrimina las direcciones o condiciones de los eventos de manera correcta, es decir, afirmar que la probabilidad de el evento A dado el evento B es igual a la probabilidad del evento B dado el evento A.

$$P(A|B) = P(B|A).$$

- Falacia de eje de tiempo: esta ha sido descrita por Falk (1986) y la define como la creencia de que un evento aleatorio no puede condicionar a otro que ocurra anteriormente. Según Díaz et al. (2012), los sujetos asocian el condicionamiento entre sucesos aleatorios con su orden temporal y no consideran que naturalmente un suceso puede estar condicionado con otro, si este ocurre con anterioridad.

3.3.3 Resolución de problemas en probabilidad condicional

Desde hace tres decenios, investigadores han reportado que los estudiantes poseen dificultades para calcular, razonar e interpretar las probabilidades (Díaz et al., 2012). En ese sentido, Huerta y Arnau (2014) mencionan que los estudiantes poseen dificultades para la resolución de problemas asociados a la probabilidad condicional, debido a que éstos consideran variables como el contexto, representaciones, frecuencias, estructuras gramaticales y relaciones entre cantidades, la cuales hacen que su resolución sea compleja. También, Cañadas, Díaz, Batanero, y Estepa (2013) mencionan que en la enseñanza de la probabilidad condicional predominan la utilización de problemas con poca demanda cognitiva, en los cuales su resolución está enfocada a la utilización de técnicas basadas en la memorización y aplicación de las fórmulas. Por lo tanto, investigadores mencionan la importancia de utilizar contextos cercanos a los estudiantes para que estos tengan una perspectiva aplicada de estos contenidos (Huerta, 2018)

A continuación, nosotros mencionamos algunas investigaciones que dan cuenta de los factores que propician las dificultades de los estudiantes, específicamente para la resolución de problemas en probabilidad condicional.

Contreras (2011) menciona que una de las principales razones por las cuales el aprendizaje de este concepto es complejo en los estudiantes es debido a que involucra en su definición otros conceptos probabilísticos como lo son: probabilidad simple, probabilidad conjunta e independencia de eventos, entre otros. Por otra parte, Huerta y Arnau (2017) afirman

que los enunciados que se relacionan con la probabilidad condicional y la probabilidad, respectivamente, poseen una notoria similitud semántica, la cual propicia la confusión entre conceptos probabilísticos; por ejemplo, las expresiones: “la probabilidad de que una mujer que sufre cáncer obtenga un resultado positivo en un examen diagnóstico” y “la probabilidad de que una persona que haya obtenido un resultado positivo en un examen diagnóstico”. A pesar de que se está abordando el mismo fenómeno, el significado de ambas expresiones es casi el mismo, pero su simbolización es totalmente diferente.

Otro aspecto importante a considerar en la enseñanza de la probabilidad condicional es la relación que tiene este concepto con otros en probabilidad. Específicamente, Huerta y Arnau (2017) mencionan que los estudiantes no reconocen la relación y necesidad de la probabilidad conjunta y simple para calcular e interpretar la probabilidad condicional. Asimismo, Huerta y Arnau (2014) afirman que profesores y estudiantes, por lo general, confían más en unos registros de representación que en otros. Este predominio está relacionado con intereses personales y puede ocasionar dificultades en la comprensión del concepto e interpretación de los resultados. Sin embargo, la elección del registro de representación debe estar asociada a las ventajas y propiedades de los registros y no a factores personales (Duval, 2004). Así, Duval afirma que las operaciones de *formación*, *tratamiento* y *conversión*, entre los distintos registros de representación de un concepto, propicia su comprensión y significación en distintos contextos.

Según Díaz (2005), la probabilidad condicional es un concepto que está relacionado con la resolución de problemas, puesto que es ahí donde cobra significado y sentido para el estudiante. En ese sentido, Contreras (2011) considera importante utilizar diversos tipos de problemas en el abordaje de este concepto, pues esto permite la significación en el aula de clase. Díaz y De la Fuente (2007) analizan los tipos de problemas, en libros de texto de secundaria y bachillerato, que están relacionados con el concepto de probabilidad condicional. A partir de ello, ellos identifican las siguientes categorías:

- Dentro de un experimento con eventos o sucesos simples, calcular una probabilidad condicional.
- En un experimento compuesto, calcular la probabilidad condicional a un evento aleatorio dado que sucede otro. Cabe resaltar que este tipo de problemas suelen tener muestreos con o sin reposición.
- Dado dos sucesos, determinar si son dependientes o independientes.
- Empleando la regla del producto, calcular la probabilidad condicional. Cabe resaltar que este tipo de ejercicios pueden contener eventos dependientes o independientes.
- A partir de probabilidades conjuntas y simples, calcular la probabilidad condicional.
- Determinar la diferencia entre sucesos mutuamente excluyentes e independientes.
- Dado un experimento aleatorio, calcular la probabilidad total asociada a este. Cabe resaltar que este tipo de problemas está relacionado con el teorema de Bayes.

- Resolución de problemas del tipo Bayesiano, es decir, problemas que se pueden abordar por medio del teorema de Bayes.
- Dados experimentos compuestos de diversos experimentos simples, calcular la probabilidad conjunta y condicional.
- Por medio de la simulación, calcular la probabilidad conjunta y condicional.

3.3.4 Representaciones y Argumentos asociados a la Probabilidad Condicional

Una gran variedad de representaciones y argumentos asociados a las matemáticas existen. Éstas son fundamentales en el abordaje de problemas matemáticos, representar los conceptos y brindar justificaciones o argumentos para la solución de un problema. Con respecto a la probabilidad condicional, Contreras (2011) ha clasificado las siguientes:

- Las expresiones algebraicas hacen parte del conjunto de representaciones que están asociadas a la probabilidad condicional. Estas sirven para proporcionar argumentos del tipo deductivo, por ejemplo, $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. De igual modo, este tipo de expresiones también son utilizadas para argumentar algunos teoremas o proposiciones; por ejemplo, para el desarrollo de la fórmula del teorema de Bayes:

$$P(A_k|B_i) = \frac{P(A_k|B_i)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)P(A_i)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

- Otras representaciones que se consideran importantes en la probabilidad condicional son los gráficos. Estos son medios elocuentes y explícitos que permiten comunicar ideas, representar relaciones, cuestionar los datos y precisar la información. Específicamente, en el aprendizaje de la probabilidad condicional es común encontrar diagramas de árbol (Ver Figura 5), dado facilitan la resolución de problemas de probabilidad. De igual modo, los diagramas de Ven (Ver Figura 6) permiten una visión espacial del experimento aleatorio, el comportamiento de uniones, intersecciones y condicionamiento entre conjuntos.

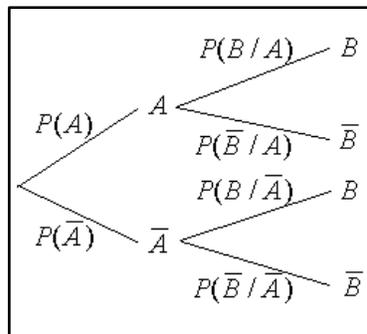


Figura 5

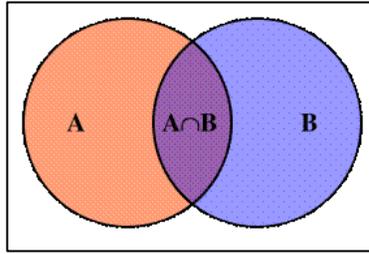


Figura 6

- La simulación, según Contreras (2011), se considera como un elemento aparte que genera representaciones visuales de un fenómeno aleatorio, dado que permite reemplazarlo por otro isomorfo. La simulación juega un papel fundamental en la enseñanza de la probabilidad, al propiciar la exploración y descubrimiento de principios y conceptos.

CAPÍTULO IV

**MARCO
METODOLÓGICO**

CAPÍTULO IV: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describen los métodos de la investigación. Este está dividido en cinco apartados: investigación cualitativa, estudio de caso, selección de los casos, técnicas de recolección y técnica de análisis.

4.1 Investigación Cualitativa

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), la metodología de investigación debe ser considerada como un elemento importante y sustancial que guiará la investigación para el abordaje del problema y cumplimiento de los objetivos planteados. En ese sentido, Kaplan (1973, citado por Cohen, Manion y Morrison, 2007), afirma que el planteamiento de un método correcto permite al investigador y al lector comprender, en términos extensos, los procesos de la investigación científica, dado que se describe el enfoque y paradigmas de investigación que se van a tomar en consideración para su realización. En este capítulo se presentan: los fundamentos de método (corte y tipo de investigación); parámetros ¿o variables? ¡Nota: los parámetros son valores que no cambian! para la selección de los casos y la técnica (instrumentos de recolección y análisis de la información)

Según Rodríguez, Gil y García (1999), la investigación cualitativa “estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (p.1). Desde esa perspectiva, este tipo de investigación permite un acercamiento explicativo y naturalista de los sujetos observados (Denzin y Lincoln, 2005). Dicho así, la investigación cualitativa permite estudiar desde una perspectiva cualitativa agentes educativos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Bisquerra, 2004)

Por otro lado, la investigación cualitativa en educación se define como “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento.” (Sandín, 2003, p.123, citado por Bisquerra, 2004). En ese sentido, la utilización de este tipo de métodos en el ámbito de la investigación en educación considera la existencia de los siguientes rasgos comunes (Eisner, 1998):

La investigación cualitativa en educación se define como una actividad sistemática que está orientada a la comprensión y transformación en profundidad de los fenómenos educativos.

- Son estudios centrados en contextos específicos.

- Los investigadores participan de la investigación y son el principal instrumento de medida.
- Tienen una naturaleza interpretativa por un doble motivo.
- El uso del lenguaje es importante.
- La atención a lo concreto.

A partir de lo mencionado anteriormente, el uso de este tipo de investigación permitirá comprender de manera inherente la realidad educativa y los fenómenos que se presentan en ella. Por esta razón, de acuerdo a las características del problema de investigación y los objetivos planteados, el método que se acomoda a este estudio es cualitativo. Lo importante es resaltar que nuestro interés no está en utilizar un método cuantitativo, debido a que no se busca aplicar modelos estadísticos que nos lleven a explicar, controlar y predecir fenómenos a partir de una muestra grande de participantes.

En esta investigación se plantea como objetivo general comprender el conocimiento del profesor asociado a las características de aprendizaje del estudiante con relación a la probabilidad condicional. Por ende, para su cumplimiento, nosotros buscamos aproximar a la comprensión del conocimiento del profesor por medio de la interpretación de los datos obtenidos del instrumento de recolección de información, lo cual nos lleva a elegir el paradigma interpretativo como el más apropiado para esta investigación. Es importante mencionar que nos referimos a comprensión como a la construcción del propio investigador para interpretar el fenómeno, que surge a partir de la observación y análisis de las características del conocimiento que los profesores ponen en evidencia al responder un cuestionario de conocimientos (Bisquerra, 2004). En conclusión, el método que empleado en este estudio es de tipo cualitativo y se emplea el paradigma interpretativo (Bassegy, 2003), permitiendo abordar la pregunta de investigación, la cual es:

¿Qué conocimientos sobre las características de aprendizaje involucra el profesor de matemáticas durante el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional?

El enfoque es el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad. Por ello, sin intención de generalizar, la opción es elegir un estudio de caso como diseño de investigación (Stake, 2010). Asimismo, nosotros proponemos como técnica de recolección de la información un cuestionario de conocimientos didácticos y una entrevista semiestructurada, los cuales están enfocados en comprender los conocimientos del profesor con respecto a las características de aprendizaje de la probabilidad condicional que poseen profesores de bachillerato. Nosotros esperamos identificar elementos que favorezcan su enseñanza y la construcción de indicadores de evaluación para el conocimiento didáctico del contenido.

4.2 Estudio de Caso

Según Walker (1985), el estudio de caso es un ejemplo de la acción, dado que se analizan los sucesos y hechos específicos que suceden alrededor de un caso. Esto desde una perspectiva organizada que permite reconocer los elementos de interés que dan significado y relevancia a una situación. En ese sentido, este tipo de investigación aborda lo singular y lo complejo de un caso específico. Por lo tanto, este tipo de estudio se encamina a la comprensión de la actividad del caso a partir de coincidencias encontradas (Stake, 2007).

Desde esa perspectiva, Stake (2010) afirma que la investigación a través de estudios de casos es de gran importancia para el desarrollo de una disciplina, puesto que los participantes que toma en consideración son, en cierta forma únicos. En ese sentido, los casos pueden representar colectivamente una población o evidenciar un caso especial. De acuerdo a esto, concordamos con la definición que presenta Smith (2007), quien afirma que es un “sistema acotado, siendo un caso de un objeto más que un proceso” (citado por Stake, 2007). Dicho así, Stake (2010) menciona la existencia de la clasificación de casos, en los cuales menciona tres tipos:

- **Intrínseco:** Este se desarrolla con fines de mejorar la comprensión y entendimiento de un determinado caso. En esta propuesta no se retoma un participante específico, debido a su representatividad. Por el contrario, este tipo de caso resulta de interés para el investigador, ya sea por una característica en particular u otro aspecto.
- **Instrumental:** Toma en consideración un caso particular para formular una generalización u obtener más información relacionada de un tema en específico. Este caso permitirá aportar nuevos elementos al marco teórico o disciplina.
- **Colectivo:** En esta clasificación se considera un conjunto de casos representativos de la población, esto para estudiar de forma conjunta un determinado fenómeno. Cabe resaltar que se trata de un estudio extendido a una variedad de casos.

Con respecto a esta investigación, los casos significativos para abordar los objetivos y problema de investigación son del tipo instrumental. Estos pueden proporcionar información del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes sobre probabilidad condicional desde una perspectiva particular y permitirán reconocer nuevos elementos al modelo MTSK. Lo importante es resaltar que, en estudios del tipo cualitativo, el objetivo de la selección del caso no es la comprensión de otros casos, sino, comprender de manera profunda un fenómeno determinado (Stake, 2010). En la investigación educativa, en específico en la formación de profesores, la selección de un profesor como un caso no necesariamente va a determinar las características de su población, en cambio, ello permitirá identificar, comprender y analizar a profundidad cómo se llevan a cabo sus prácticas de enseñanza.

4.3 Selección de los Casos

En la educación, los casos que son de interés los conforman en su gran mayoría personas o grupos de personas las cuales se asemejan, en cierto modo, a otras personas o poseen características particulares que los hacen únicos ante una población determinada. En este estudio en particular, los casos que son de interés son los profesores de matemáticas, debido a que se supone que poseen una comprensión profunda del conocimiento de los contenidos y relacionan éstos con ideas principales de la materia y entre los temas para su enseñanza (Sosa, 2011). Desde esa óptica y de acuerdo con los objetivos de esta investigación, los casos que toman relevancia son profesores en ejercicio que hayan impartido la materia de probabilidad y estadística. A continuación, las características que posee el caso que se estudiará se mencionan con mayor precisión.

Un caso representativo en la investigación es un profesor de matemáticas que tenga como mínimo tres años de experiencia frente a grupo en el nivel Bachillerato, en los cuales haya impartido el contenido de probabilidad condicional. Con respecto a los contenidos matemáticos, el caso debe de tener un dominio de los conocimientos matemáticos sobre la teoría de probabilidad. Específicamente en tópicos como: definición de probabilidad simple, conjunta y condicional; definición de independencia, dependencia de eventos y eventos mutuamente excluyente y, por último, definición del teorema de Bayes.

Los casos que se consideraron en esta investigación son Alberto, Edgar, Fabiola, Gabriel, Mario, Ricardo y Sara (pseudónimos). Estos son profesores en tres instituciones de educación públicas del nivel bachillerato ubicadas en Zacatecas (México). Para esta selección se consideraron dos variables importantes:

- Experiencia. Todos los casos seleccionados tienen entre 3 y 14 años consecutivos enseñando, como profesores titulares, la asignatura de Estadística II en el nivel Bachillerato. Esta asignatura considera en su programa de estudios el tema de probabilidad condicional.
- Académico. Todos los participantes de este estudio poseen el grado de maestros (el 42% en Educación Matemática y el otro 68% en economía, administración o ingeniería) y con frecuencia manifiestan tener un amplio dominio de contenidos de probabilidad en bachillerato.

Con base en lo mencionado anteriormente, enseguida nosotros mostramos de manera particular las características de los casos. Cabe resaltar que por ética se manejan pseudónimos.

Tabla 2
Características de los casos

Seudónimo	Formación profesional	Años de experiencia docente
Alberto	• Licenciado en Economía	7 años

	<ul style="list-style-type: none"> • Maestría en Ciencias Sociales 	
Mario	<ul style="list-style-type: none"> • Licenciado en Contaduría • Maestría en Enseñanza de la Lengua Materna • Maestría en Matemática Educativa • Doctorado en Tecnología Educativa (En proceso) 	7 años
Ricardo	<ul style="list-style-type: none"> • Ingeniero Industrial • Maestría en Diseños Productivos 	3 años
Sara	<ul style="list-style-type: none"> • Licenciada en Administración • Maestría en Mercadotecnia • Maestría en Educación Continua 	7 años
Fabiola	<ul style="list-style-type: none"> • Licenciada en Contaduría • Maestría en Administración de Negocios 	8 años
Edgar	<ul style="list-style-type: none"> • Ingeniero industrial • Maestría en Matemática Educativa (En proceso) 	4 años
Gabriel	<ul style="list-style-type: none"> • Licenciado en Economía • Maestría Política Pública y en Social • Doctorado en Política Pública y Social 	13 años

4.4 Técnicas

Durante los últimos 30 años se han llevado a cabo reformas curriculares en matemáticas en diversos países, incluyendo México. Las reformas proponen la inclusión de contenidos de probabilidad en secundaria (Sánchez, 2009). A partir de ello, investigadores manifiestan la necesidad de desarrollar competencia profesional para la enseñanza de la probabilidad en distintos niveles, puesto que, hasta ese momento, la enseñanza de estos contenidos se veía reducida a la instrucción de fórmulas y la resolución de problemas con poca demanda cognitiva. Esta metodología mecanizada y algorítmica ha generado un limitado desarrollo en el razonamiento probabilístico en los estudiantes (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Vázquez y Alsina, 2015a).

A raíz de esta necesidad, el Grupo de Investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada (GEEUG), liderado por la Dra. Batanero, ha llevado a cabo investigaciones que buscan identificar el estado actual de conocimiento que poseen los profesores de matemáticas en activo y en formación para la enseñanza de la probabilidad (Batanero et al., 2015). La mayoría de investigaciones que se encuentran adscritas al GEEUG toman en consideración como marco teórico el Modelo del Conocimiento Matemático del Profesor (MKT) o el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y utilizan instrumentos de recogida de la información como evaluaciones de conocimiento y entrevistas semiestructuradas. A partir de ello, la conclusión es que el conocimiento matemático y didáctico de los profesores para la enseñanza de la probabilidad es muy reducido (Mohamed, 2012; Ortiz, Batanero y Contreras, 2012; Vázquez, 2018)

A partir de lo expuesto y de acuerdo con el objetivo general de investigación, los considerados fue realizar un cuestionario de conocimientos didácticos como el instrumento de recogida de la información más idóneo para esta investigación. Los cuestionarios se consideran como las técnicas más utilizadas para la recolección de datos y consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o varias variables a medir (Hernández et al., 2006). Según Meneses y Rodríguez (2011):

“el cuestionario es una herramienta que permite al científico social plantear un conjunto de preguntas para recoger información estructurada sobre una muestra de personas, utilizando el tratamiento... para describir la población a la que pertenecen o contrastar estadísticamente algunas relaciones entre variables de su interés”. (p.9)

Para esta técnica en particular, existen dos tipos de preguntas, las cuales van a estar relacionadas con el tipo de información que se quiera obtener:

- Abiertas: Este tipo de preguntas no delimitan con anterioridad las alternativas de respuestas, por ello, el número de respuestas consideradas es grande. Este tipo de preguntas se consideran de gran utilidad cuando no se posee información alguna sobre las posibles respuestas de los casos o cuando esta información no es la suficiente.
- Cerradas: Este tipo de preguntas contienen en sí una delimitación de las categorías o alternativas de respuesta. Para formular estas preguntas, es fundamental que se anticipen todos los tipos de alternativas de respuesta a la situación.

La selección de preguntas depende estrictamente de los objetivos y problema de investigación el cual se quiere abordar (Hernández et al., 2006). El tipo de pregunta idóneo es son las abiertas. En ese sentido, este tipo de interrogantes poseen algunas características particulares, las cuales Rojas (1981) describe:

- Deben ser claras y comprensibles para los participantes; por lo cual se debe de evitar utilizar términos ambiguos o confusos.
- La redacción de las preguntas debe procurar no incomodar a los participantes.

- Las preguntas deben procurar referirse únicamente a un solo aspecto o relación lógica.
- En la redacción de las preguntas no se deben incluir las respuestas.
- En la redacción de las preguntas no deben estar implícitas ideas respaldadas socialmente, institucionalizadas o evidencia comprobada.
- El orden en que se organicen las preguntas puede afectar las respuestas de los participantes; por lo tanto, las preguntas en donde haya alternativas o categorías de respuestas deben estar organizadas de manera aleatoria.
- El lenguaje que se utilice en la redacción de las preguntas debe ser acorde al contexto y nivel formativo de los participantes.

En complemento a lo anterior, un cuestionario es el instrumento de recogida de la información más apropiado para esta investigación. A continuación, algunas de las razones por la cual tomar en consideración esta técnica se exponen de manera detallada.

- Realizar un cuestionario permite estudiar el conocimiento del profesor que posee a través de su formación y experiencia profesional. En ese sentido, se reconocen por medio de esta técnica aspectos como: concepción de la naturaleza de las variables puestas en juego, los tipos de procedimientos asociados a la situación, las definiciones personales que posee cada profesor estudiado y las representaciones que utiliza para comunicar.
- En términos del conocimiento didáctico del contenido, esta técnica permite identificar y analizar el conocimiento que tiene del profesor sobre los estudiantes, debido a que permite indagar el conocimiento que posee el profesor sobre los errores, dificultades, falacias y sesgos presentes en las respuestas de los estudiantes, entre otros aspectos didácticos. Es importante mencionar que esta técnica utiliza preguntas que están elaboradas de tal manera que el profesor realice un “análisis didáctico” de cada una de las respuestas de los estudiantes hipotéticos.

Asimismo, esta investigación considera a la entrevista como segunda técnica de recolección de datos. Bisquiera (2004) afirma que esta técnica posee una identidad propia y a la vez es complementaria a otras técnicas. En ese sentido, Meneses y Rodríguez (2011) hacen mención sobre las principales características que se le atribuyen a las entrevistas:

- La entrevista es un tipo de procedimiento que ha sido diseñado para adquirir información oral.
- La entrevista posee una dinámica interactiva, en donde el entrevistador cuestiona y el entrevistado responde. Cabe mencionar que existe la posibilidad de cierto grado de reajuste en las preguntas y respuestas (esto está condicionado al tipo de entrevista).
- Las entrevistas siguen un estilo “relativamente” no formal, con el objetivo que pueda definirse como una conversación con un propósito explicativo.

- Las preguntas deben estar elaboradas de modo que el participante pueda expresar su propia respuesta.
- El entrevistador debe procurar hacer uso de técnicas de persuasión, con el fin de motivar al participante proporcione una respuesta adecuada y completa.
- El entrevistador debe procurar generar el contexto adecuado para la entrevista, de manera tal que las respuestas del entrevistado sean situadas en el contexto.
- El objetivo principal de la entrevista no es propiciar un contraste de ideas entre el entrevistador y el entrevistado, sino aproximarse y comprender las ideas, creencias y supuestos de este.
- La entrevista debe quedar registrada por medio de diversos recursos.

Según Bizquerra (2004), distintos tipos de entrevistas para una investigación existen. Dos categorías se distinguen: entrevistas que se efectúan según el momento (iniciales, seguimiento y finales) y entrevistas de acuerdo con su diseño y estructura (no estructuradas, semiestructuradas y estructuradas). A continuación, una descripción de cada una de estas entrevistas.

Tabla 3
Tipo de entrevista según el momento.

	Entrevista Inicial	Entrevista de Desarrollo	Entrevista Final
Objetivo	Examinar y sustentar los aspectos más característicos de una situación. Esto con el propósito de tener un primer acercamiento y visualización de la misma.	Describe el desarrollo de una situación dentro de un contexto determinado. Así mismo, permite conocer de manera detallada, las variables relacionados con el sujeto (vida, acontecimientos, percepciones y relaciones)	Contrastar la información recolectada, esto con el fin de informar aspectos más relevantes de la investigación y así contribuir al su desarrollo.
Estructura	Depende de las intenciones del investigador, pueden ser del tipo estructurada, semiestructurada o no estructurada.	Posee una estructura acorde al participante, dado que está centrada en conocer sus formas de vida, sucesos y relaciones.	Su estructura está en función de los objetivos de la investigación.
Ventajas	Permite que el investigador se sitúe en contexto y elabore un	Permite reconocer, con mayor precisión, la forma de vida de los sujetos, debido a que se centra en aspectos	Los resultados que se obtienen son fruto de la elaboración paralela a

	marco de actuaciones posteriores.	relacionados con su quehacer.	partir las respuestas al entrevistado.
--	-----------------------------------	-------------------------------	--

Tabla 4
Tipo de entrevista de acuerdo con su diseño y estructura.

	Estructurada	Semiestructurada	No Estructurada
Estructura	Las preguntas que se realizan están planteadas con anterioridad, estas suelen ser cerradas y permiten que el participante haga afirmaciones o bien responda específicamente lo que se cuestiona.	Se parte de un guion determinado, el cual delimita la información necesaria a obtener. Sin embargo, el guion está abierto a modificaciones durante la marcha, de modo tal que permita obtener información más rica en matices.	Se realizan sin un guion previamente elaborado, el único referente para el entrevistador son los temas. En este tipo, la entrevista se va construyendo simultáneamente a las respuestas del entrevistado.
Ventajas	El entrevistador tiene un control de la entrevista, dado que deja un margen limitado para comentarios o apreciaciones.	Permite enlazar los temas para construir conocimiento holístico y comprender la realidad. Por medio de preguntas, se establece conexiones entre los distintos temas que se abarcan.	Permite estudiar de manera detallada y profunda sobre un tema determinado, esto determinado por las respuestas del entrevistado.
Objetivo	Cuestionar de manera controlada, secuenciada y dirigida sobre un tema específico.	Cuestionar de un tema o situación determinada. Si bien los objetivos están inicialmente planteados, la flexibilidad en las preguntas permite obtener información no considerada.	Cuestionar de manera libre sobre un tema o temas, con la profundidad que lo permitan los conocimientos o disposición del entrevistado.

El tipo de entrevista que se considera para esta investigación es semiestructurada. Dado que, lo que se pretende es indagar de manera profunda los conocimientos que tienen los profesores sobre las características de aprendizaje de la probabilidad condicional. Para ello, nosotros realizamos un guión, en el cual se busca cuestionar sobre algunas de las respuestas proporcionadas en el cuestionario de conocimientos didácticos; pero que está dispuesto a modificaciones durante la entrevista.

Esta técnica se realiza con la intención de solicitar información que no se encuentra consignada en las respuestas que proporciona el caso. De igual manera, esta permitirá conocer de manera detallada el conocimiento didáctico que tiene el profesor sobre las formas en que los estudiantes interactúan con el contenido. La información que se obtenga en la entrevista busca estar relacionada con los acontecimientos vividos en el aula de clases y aspectos subjetivos de los estudiantes (Bisquerra, 2004). En este orden de ideas, con las preguntas se pretende dar cuenta de los conocimientos del profesor en dos aspectos: (a) la manera los estudiantes interactúan con los contenidos; (b) las fortalezas o dificultades de los estudiantes con respecto a la probabilidad condicional.

4.4.1 Instrumentos de recogida de la información

El instrumento de recogida de la información que se propone es un cuestionario de conocimientos didácticos para evaluar el conocimiento del profesor con respecto a las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional. Cabe resaltar que los contextos de las situaciones son retomados de cuestionarios validados de razonamiento probabilístico condicional validados (Batanero y Díaz, 2007; Díaz y De la Fuente, 2007). Por tanto, con este instrumento esperamos analizar el conocimiento de los profesores sobre fortalezas, dificultades y formas de interacción asociadas al aprendizaje de la probabilidad condicional

Para este instrumento, una nueva estructura con respecto a los anteriormente mencionados se considera, es decir, dos momentos se consideran (Ver Figura 7). El primero proporciona la situación y la pregunta asociada; y en un segundo, el caso recibe una instrucción, la cual es: *describe el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo* y posteriormente se brinda las respuestas de estudiantes hipotéticos asociados a la situación.

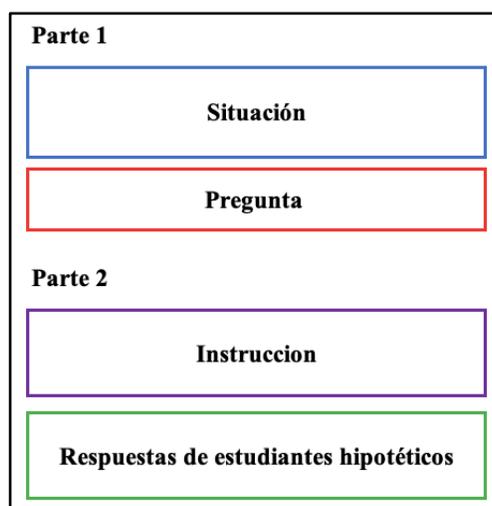


Figura 7. Estructura del Cuestionario de conocimientos Didácticos
Fuente. Elaboración propia

Con respecto a la estructura del cuestionario, nosotros incluimos respuestas de estudiantes hipotéticos a cada una de estas situaciones. Lo esperado es que el profesor utilice su conocimiento didáctico para describir las respuestas. Con los resultados que se obtengan, nosotros esperamos reconocer explícitamente aspectos del conocimiento del profesor con respecto a sesgo, falacias y confusiones de los estudiantes en probabilidad condicional.

Como se menciona anteriormente, en el cuestionario se proponen respuestas de estudiantes hipotéticos. Estas respuestas están asociadas a sesgo, falacias y confusiones de estudiantes en probabilidad condicional propuestas por Tversky y Kahneman (1982), Kelly y Zwiers (1986), Lecoutre (1992) y Falk (1986), los cuales describimos en el apartado 3.3.2. En la Tabla 4 se presenta de manera resumida cuáles de las respuestas están asociadas a cada uno de estos factores didácticos en probabilidad condicional.

Tabla 5
Factores Didácticos en las respuestas de estudiantes hipotéticos

Situación	Estudiante Hipotético	Sesgos, Falacias o Confusiones
S1	E1	Respuesta Correcta
	E2	Falacia de la Conjunción
	E3	Sesgo de Equiprobabilidad
S2	E1	Respuesta Correcta
	E2	Falacia de la condicional transpuesta
	E3	Sesgo de Equiprobabilidad
	E4	Falacia del eje de tiempo
S3	E1	Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes
	E2	Falacia eje de tiempo
	E3	Respuesta Correcta
S4	E1	Falacia de las tasas base
	E2	Falacia de las tasas base
	E3	Confusión probabilidades conjuntas y condicionales
	E4	Respuesta Correcta

Lo importante es reconocer también la incidencia que han tenido los modelos de conocimiento del profesor MKT, KQ y CDM en el diseño y análisis del cuestionario de conocimientos didácticos. Estos modelos fueron importantes en el complemento y fortalecimiento de una mirada especializada al conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional. En este orden de ideas, los principales aportes que realizan estos modelos a la construcción y análisis del cuestionario son:

Uno de los grandes aportes del MKT es la intrínseca relación e incidencia bidireccional del Conocimiento Matemático y el Conocimiento Didáctico del Contenido. En ese sentido, este

modelo nos permite dar cuenta sobre la importancia del conocimiento matemático del profesor para comprender y caracterizar el conocimiento didáctico del contenido. Dicho así, el MKT nos permitió ver la necesidad de evaluar inicialmente el conocimiento matemático de los casos.

Por otro lado, El modelo KQ contribuyó notablemente en el diseño y análisis del cuestionario. Específicamente, este modelo propone una mirada práctica del conocimiento del profesor y como este es empleado en el aula de clase. En ese sentido, el diseño del cuestionario buscó plasmar esas experiencias prácticas del profesor con respecto a las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional. Por tal razón, nosotros decidimos implementar las respuestas de los estudiantes hipotéticos, buscando lograr mirada especializada como lo propone el MTSK.

Por último, el modelo CDM aportó elementos metodológicos en el diseño del cuestionario. Específicamente, numerosas investigaciones enmarcadas en este modelo han implementado el diseño de este instrumento (Días, 2005; Contreras; 2011; Guerrero, 2015; entre otros.). A pesar de ello, en el modelo MTSK no se reportan investigaciones que consideren instrumentos de recogida de la información de este tipo. Por tal razón, el CDM nos permite organizar y estructurar el diseño del cuestionario de conocimientos, eso sí, adoptando una perspectiva especializada del conocimiento del profesor

4.4.1.1 Cuestionario de Conocimientos Didácticos sobre Probabilidad Condicional

En esta sección, se presentan el cuestionario de conocimientos didácticos sobre probabilidad condicional. Dicho así, presentamos las situaciones que se van a aplicar, los factores didácticos que considera (sesgos, falacias y confusiones); los conceptos matemáticos primarios y secundarios; los tipos de problemas y los análisis a priori de las respuestas de estudiantes hipotéticos.

4.4.1.1.1 Situación 1: La Selección Mexicana en la Copa de Oro

Enunciado: Supón que la Selección Mexicana de fútbol alcanza la final de la Copa de Oro en 2019. Para ganar la copa, hay que ganar cinco partidos. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

- México pierde el primer partido.
- México gana la Copa de Oro, pero pierde el primer partido.

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas a la Situación 1, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** Es más probable que la Selección de México pierda el primer partido, dado que es un suceso que puede ocurrir con mayor probabilidad.
- E2.** Es más probable que México gane la Copa de Oro, aun perdiendo el primer partido, dado que México es el máximo ganador histórico de la Copa de Oro. Por ello, es más probable que vuelva a ser campeón.
- E3.** Ambos sucesos son igual de probables.

El propósito con el que se plantea esta situación es evaluar el conocimiento didáctico que tienen los profesores para reconocer la *falacia de la conjunción* y *sesgo de equiprobabilidad*. Asimismo, para esta situación, Contreras (2011) menciona que los contenidos matemáticos primario (P) y secundario (T) que abarca son:

- P1. Comparación entre la probabilidad de la intersección de dos eventos con la probabilidad de cada evento por separado.
- T1. Distinción entre probabilidad conjunta, condicional y simple.

En lo referente a la clasificación de situaciones, la cual ha sido elaborada por Contreras (2011), consideramos que esta cumple parcialmente con el tipo “*Dados experimentos compuestos de diversos experimentos simples, calcular la probabilidad conjunta y condicional*”. Esta afirmación se realiza debido a que la situación hace referencia a la percepción de la probabilidad y no requiere realizar cálculos para hallar su solución.

A continuación, lo que se presenta de manera detallada son las respuestas y los razonamientos de los estudiantes hipotéticos (**E1**, **E2** y **E3**) asociados a la situación:

La respuesta de **E1** es la correcta. Esto se debe a que la probabilidad conjunta asociada a la situación puede descomponerse como el producto de dos probabilidades simples. Ambos eventos son de naturaleza simples, dado que éstos son mutuamente independientes. Por lo cual, a partir de la idea fundamental IV (combinación de probabilidades: independencia) de Heitele,

se afirma que la probabilidad de considerar cada evento por separado es mayor que considerar ambos eventos conjuntamente.

En la respuesta de **E2** es incorrecta. En esta respuesta se considera mayor la probabilidad conjunta de eventos que están en la situación (ganar el campeonato y perder un partido) y no a la probabilidad de considerar cada uno de los eventos por separado. Por lo cual, esta respuesta evidencia la falacia de la conjunción.

Por último, en la respuesta de **E3** también es incorrecta. En esta se considera como equiprobables todos los eventos asociados a la situación. Este razonamiento erróneo, descrito por Lecoutre (1992), lleva a que el estudiante considere que todos los eventos aleatorios que están en la situación poseen igual estimación de probabilidad. Por lo cual, este estudiante presenta en su razonamiento el sesgo de equiprobabilidad.

4.4.1.1.2 Situación 2: Una prueba diagnóstica y un paciente enfermo...

Enunciado: Una prueba de diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿En cuál de las siguientes predicciones tienes más confianza?

- Una persona que tiene cáncer ha dado positivo en la prueba de diagnóstico.
- Una persona que ha dado positivo en la prueba de diagnóstico realmente tiene cáncer.

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas a la Situación 2, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** Es más probable la primera predicción, puesto que al realizar los estudios es más probable encontrar resultados positivos en una persona con cáncer.
- E2.** Es más probable la segunda predicción, puesto que es más probable diagnosticar el cáncer en una persona que haya dado positivo en la prueba.
- E3.** Tengo la misma confianza en ambas predicciones.

Esta situación se propone con el objetivo de evaluar el conocimiento didáctico del profesor sobre la *falacia de la condicional transpuesta* y la *falacia de eje de tiempo*. Para esta situación, Contreras (2011) menciona que el contenido matemático primario (P) y secundario (T) que abarca son:

P1. Falacia de la probabilidad condicional transpuesta.

S1. Distinción entre la probabilidad condicional y su inversa.

En lo referente a la clasificación de situaciones, la cual ha sido elaborada por Contreras (2011), consideramos que esta situación se relaciona de manera parcial con la categoría “*Dentro*

de un experimento con eventos o sucesos simples, calcular una probabilidad condicional". Esta afirmación se realiza debido a que la situación hace referencia a la percepción de la probabilidad y no requiere realizar cálculos numéricos para hallar su solución.

A continuación, nosotros presentamos de manera detallada las respuestas y los razonamientos de los estudiantes hipotéticos (**E1**, **E2** y **E3**) asociados a la situación:

La respuesta de **E1** es la correcta, debido a que el test para detectar una cierta enfermedad (cáncer) está diseñado para ese fin únicamente. Por ello, la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado positivo en la prueba es muy poco probable, pero no imposible (en el campo de la medicina este tipo de resultados se denominan como *falso positivo*). De igual forma, la gran cantidad de personas sanas en una población hace que la probabilidad de estar enfermos, si el resultado dio positivo, no sea muy alta.

Por otro lado, en la respuesta de **E2** se presenta la *falacia de la condicional transpuesta* (Eddy, 1982), debido a que el estudiante en su respuesta manifiesta una confusión entre los eventos que forman la condición, es decir, confunde la condición con el condicionado (estar enfermo con dar positivo en la prueba)

Por último, en la respuesta de **E3**, este presenta el *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992), debido a que considera como equiprobables todos los eventos asociados a la situación, es decir, afirmar que la probabilidad que tenga cáncer, dado que el test dio un resultado positivo es igual a la probabilidad de resultar positivo en el test, dado que tiene cáncer: $P(A|B) = P(B|A)$. De igual modo, también se identifica en su respuesta la falacia de la condicional transpuesta (Eddy, 1982). Es importante mencionar que, si la afirmación que realiza el estudiante hipotético resultara cierta, el test tendría una fiabilidad del 100% y no ocurrirían "falsos positivos" (Contreras, 2011).

4.4.1.1.3 Situación 3: Jugando a las cartas... ¿Qué sucederá después?

Enunciado: Una carta al azar se extrae de una baraja de 52 cartas, en las cuales hay 4 tipos (diamantes, corazones, picas y tréboles), cada tipo tiene 13 cartas (números del 1 al 10, príncipe, reina y rey). Sea A el suceso “se extrae una carta de corazones” y B el suceso “se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas a la Situación 3, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** No son independientes porque en la baraja hay un rey de corazones, es decir, tiene ambas características y eso relaciona los sucesos, por ello son dependientes.
- E2.** Solo serán independientes si después de sacar la carta de la baraja y ver si es rey, se devuelve a la baraja y posteriormente se procede a sacar una segunda carta, para ver si es de corazones.
- E3.** Si son independientes. Esto se debe a que la probabilidad de obtener un rey dado que se ha extraído una carta de corazón es $\frac{1}{13}$ y es igual a la probabilidad de obtener un rey “a secas” es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Por ello, ser una carta de corazones "no afecta" la probabilidad de obtener un rey.

El propósito con el que se plantea esta situación es evaluar el conocimiento que tienen los profesores para reconocer la *confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes* y la *confusión de la probabilidad conjunta y condicional*. Asimismo, para esta situación, Contreras (2011) menciona que el contenido matemático primario (P) y secundario (T) que abarca son:

P1. Distinción entre eventos mutuamente excluyentes e independientes

T1. Resolución de problemas que involucran la probabilidad compuesta haciendo uso de la regla del producto en eventos independientes.

Con respecto a la clasificación de situaciones, la cual ha sido elaborada por Contreras (2011), consideramos que esta situación es del tipo “*Determinar la diferencia entre sucesos mutuamente excluyentes e independientes*”, debido a que en la situación requiere que se establezca si un suceso es o no independiente.

A continuación, se presenta de manera detallada son las respuestas y los razonamientos de los estudiantes hipotéticos (**E1**, **E2** y **E3**) asociados a la situación:

La respuesta de **E3** es la correcta. En esta respuesta, el estudiante hipotético considera que el resultado de cada carta extraída de la baraja no condiciona la siguiente carta, por ello se considera a estos eventos independientes entre sí. El estudiante menciona explícitamente en su

respuesta “la probabilidad de obtener un rey dado que se ha extraído una carta de corazón es $\frac{1}{13}$ y es igual a la probabilidad de obtener un rey “a secas” es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ”. Por tanto, la extracción de un rey no está condicionada por la extracción de una carta de corazones y viceversa.

La respuesta de **E1** es incorrecta. El estudiante hipotético no emplea correctamente la definición de independencia de eventos. Esta afirmación se realiza a partir de que el estudiante infiere en su respuesta que ambos eventos están condicionados entre sí. Por tanto, E1 presenta en su razonamiento probabilístico la confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes.

La respuesta de **E2** es incorrecta. En su razonamiento evidencia dificultades para reconocer la independencia de sucesos en un mismo espacio de tiempo, es decir, sucesos sincrónicos. Por tanto, el estudiante hipotético presenta en su razonamiento la falacia de eje de tiempo.

4.4.1.1.4 Situación 4: ¡Alerta! Un taxi se ha accidentado

Enunciado: Un taxi se ve implicado en un accidente nocturno. Hay dos compañías de taxis en Zacatecas, el Rojo y el Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Rojos y el 15% Azules. Un testigo identificó al taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo en las mismas circunstancias de la noche del accidente y concluyó que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

Parte 2: De acuerdo con las respuestas a la Situación 4, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.**

- E1.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 80%, puesto que, si se da por hecho que el testigo lo vio, esa es la probabilidad con que identifica correctamente los colores del auto.
- E2.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 15%, dado que ese es el porcentaje de taxis de ese color en la ciudad.
- E3.** La probabilidad que el taxi implicado sea azul es del 12%, por el principio de la multiplicación, se hace el producto de la probabilidad que sea azul con la probabilidad que el testigo haya visto correctamente el color del auto.

$$\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{1200}{10000} = 12\%$$

- E4.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 41%, porque aplicando el teorema de Bayes, dividimos la probabilidad de que el carro sea azul y el testigo lo vio

El propósito de esta situación es indagar el conocimiento sobre la *falacia de las tasas base* y la *confusión de la probabilidad conjunta y condicional*. Asimismo, para esta situación, Contreras (2011) menciona que el contenido matemático primario (P) y secundarios (T) que abarca son:

- P1. Falacia de las tasas base.
- S1. Teorema de Bayes.
- S2. Cálculo de la probabilidad condicional a partir de probabilidades simples y conjuntas.
- S3. Cálculo de la probabilidad condicional cuando se invierte el eje de tiempos.
- S4. Distinción de la probabilidad condicional e inversa.
- S5. Resolución de problemas en situaciones sincrónicas.

Con respecto a la clasificación de los tipos de situaciones asociadas a la probabilidad condicional, mencionada por Contreras (2011), consideramos que esta situación es del tipo “*bayesiano*”. Por lo cual, para resolver esta situación se debe de utilizar el teorema de Bayes. De igual modo, consideramos que la situación es del tipo “*Dado un experimento aleatorio, calcular la probabilidad total asociada a éste*”, puesto que requiere para su solución reconocer la probabilidad total (siniestros con taxis verdes y azules).

A continuación, se presenta de manera detallada son las respuestas y los razonamientos de los estudiantes hipotéticos (**E1**, **E2**, **E3** y **E4**) asociados a la situación:

E3 proporciona la respuesta correcta a la situación. En su respuesta correctamente el teorema de Bayes, lo cual le permite calcular la probabilidad condicionada de un evento A dado que sucede un evento B , con $P(B)$ distinto de cero. Por definición de probabilidad condicional se entiende que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

En este caso $P(B)$ es la probabilidad total de la situación y se calcula mediante la fórmula:

$$P(B) = P(B|A) P(A) + P(-B|-A) P(-A)$$

E3 interpreta que para calcular la probabilidad de que el taxi que esté relacionado con el accidente fuera, en efecto, azul, se debe de calcular la probabilidad de que el taxi sea azul condicionada a la fiabilidad del testigo. Para ello se tiene:

Sea A el evento de que el taxi sea azul e I el evento en donde el testigo identifica correctamente el color. Por tanto, la probabilidad condicionada está dada por la siguiente expresión:

$$P(A|I) = \frac{P(I|A) P(A)}{P(I|A) P(A) + P(-I|-A) P(-A)}$$

$$P(A|I) = \frac{(0,8)(0,15)}{(0,8)(0,15) + (0,2)(0,85)}$$

$$P(A|I) = 0,41$$

Las respuestas de **E1** y **E2** son incorrectas. En estas respuestas, ambos estudiantes ignoran la probabilidad a priori al suceso aleatorio. Por tanto, los estudiantes poseen en su razonamiento probabilístico la *falacia de las tasas base*.

La respuesta de E4 es incorrecta, debido a que presenta la confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Específicamente, el estudiante confunde la probabilidad de que el taxi sea azul dado que el testigo identificó el color correctamente $P(A|I)$ con la probabilidad de que el taxi sea azul y que el testigo identifique el carro correctamente $P(A \cap I)$. Por tanto, le da igual asignación probabilística a ambos eventos probabilísticos.

4.4.1.2 Entrevista Semiestructurada

Para esta investigación se propone una entrevista estructurada. Específicamente, esta técnica se utiliza para complementar la información recolectada con el cuestionario. A continuación, se mencionan los propósitos, las intenciones y las preguntas propuestas para el guion base de la entrevista semiestructurada (Ver Tabla 5).

Tabla 6
Guion Entrevista Semiestructurada

Guion Entrevista Semiestructurada		
Propósito	Pregunta	Intención
T1. Indagar el conocimiento del profesor sobre la inclusión de sucesos de naturaleza aleatoria en el pensamiento matemático de los estudiantes.	P1. Teniendo en cuenta la naturaleza aleatoria de conceptos en probabilidad ¿Considera usted que este factor incide en el aprendizaje de estos conceptos? ¿Por qué?	I1. Indagar el conocimiento del profesor sobre el papel que tienen la naturaleza aleatoria de los conceptos en el aprendizaje de la probabilidad.
	P2. Describa en sus palabras cómo es el acercamiento, en un primer momento, del estudiante ante sucesos aleatorios. ¿Es igual al acercamiento que tiene con sucesos deterministas? ¿Por qué?	I2. Examinar el conocimiento del profesor con respecto al primer acercamiento que tienen los estudiantes con situaciones que involucran eventos aleatorios.
	P3. Tomando en cuenta el razonamiento empleado por los estudiantes ante situaciones-	I3. Analizar el conocimiento que tiene el profesor sobre las formas de razonamiento que

	<p>problemas que involucra sucesos deterministas o sucesos aleatorios. ¿Considera usted que existe alguna diferencia en el razonamiento empleado en cada uno de los tipos de sucesos? ¿Por qué?</p>	<p>tienen los estudiantes al resolver una situación con eventos aleatorias, en comparación con situaciones que poseen eventos deterministas.</p>
<p>T2. Analizar el conocimiento que manifiesta el profesor sobre la incidencia que tiene las experiencias previas de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad.</p>	<p>P4. ¿Considera usted que las experiencias previas ante fenómenos aleatorios inciden en el aprendizaje de la probabilidad? ¿Por qué?</p>	<p>I4. Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el papel que tienen las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad</p>
	<p>P5. ¿Qué ventajas o desventajas trae para el aprendizaje de la probabilidad haber tenido experiencias previas ante fenómenos aleatorios?</p>	<p>I5. Examinar el conocimiento que tiene el profesor sobre las ventajas o desventajas que trae las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos de incertidumbre.</p>
	<p>P6. ¿Las experiencias previas ante fenómenos aleatorios pueden ocasionar falacias, confusiones y sesgos en el aprendizaje de la probabilidad condicional? ¿Por qué?</p>	<p>I6. Indagar el conocimiento del profesor sobre las falacias, confusiones y sesgos que se generan durante el aprendizaje de la probabilidad.</p>
<p>T3. Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el papel del lenguaje en el aprendizaje de la probabilidad.</p>	<p>P7. ¿Existe una diferencia en los usos del lenguaje en probabilidad con respecto a otros contenidos matemáticos? ¿Por qué?</p>	<p>I7. Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre la diferencia en el lenguaje que se utiliza en probabilidad con respecto a otros contenidos en matemáticas.</p>
	<p>P8. ¿Considera usted que el lenguaje en probabilidad es un factor que incide en el aprendizaje de estos conceptos? ¿De qué forma?</p>	<p>I8. Estudiar el conocimiento del profesor sobre cómo incide el lenguaje utilizado en probabilidad para el aprendizaje de estos conceptos.</p>
	<p>P9. ¿Considera usted que los estudiantes poseen dificultades en la interpretación de las respuestas en situaciones en probabilidad? ¿Qué factores propician dicha dificultad?</p>	<p>I9. Indagar el conocimiento del profesor sobre las dificultades que tienen los estudiantes sobre la interpretación de resultados en situaciones problema en probabilidad</p>

T4. Indagar el conocimiento del profesor sobre los conflictos cognitivos en los estudiantes que puede ocasionar añadir condiciones a situaciones que involucran conceptos de probabilidad.	P10. ¿Considera usted que el hecho de añadir nuevas condiciones a una situación en probabilidad cambia la percepción que tiene éste sobre los eventos aleatorios? ¿Por qué?	I10. Analizar el conocimiento que tienen los profesores sobre las dificultades y conflictos que genera en el estudiante añadir nueva información a un suceso aleatorio
	P11. El añadir nuevas condiciones a situaciones en probabilidad disminuye o aumenta el espacio muestral asociado a cada uno de los eventos. Describa cómo esto influye en el aprendizaje de la probabilidad condicional en los estudiantes?	I11. Indagar el conocimiento del profesor sobre cómo influye en la percepción de eventos probabilísticos en estudiantes añadir nueva información a un suceso aleatorio.

4.4.1.3 Validación de instrumentos recogida de información

Para esta investigación se consideraron el cuestionario y la entrevista semiestructurada. Estos instrumentos, descritos anteriormente, han sufrido dos procesos de validación: una prueba piloto y revisión por expertos. Para este apartado, mencionaremos de manera breve los cambios más significativos que se llevaron a cabo en cada uno de estos procesos.

La validación por medio de la prueba piloto se realizó dos veces. Primero, la prueba se aplicó a 9 estudiantes de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Zacatecas, entre los cuales se encontraban 5 profesores en activo. Segundo, la prueba se aplicó a 3 profesores de bachillerato que han impartido la asignatura de Estadística II en Zacatecas. Con respecto a la validación por expertos, se consultaron 4 docentes investigadores que desempeñan cargos en la Universidad Autónoma de Zacatecas, en el Centro de Investigación en Estudios Avanzados del IPN o en la Universidad de los Lagos (Chile).

Estos procesos de validación arrojaron interesantes resultados que permitieron refinar ambos instrumentos. El instrumento que más sufrió cambios a partir de los procesos de validación fue el cuestionario de conocimientos didácticos. A continuación, algunos de los cambios o modificaciones más profundos se mencionan:

- Cada situación se dividió en dos partes. Esta modificación se realizó debido a que los participantes de la prueba piloto seleccionaban primero la respuesta del estudiante que consideraban correcta y con base en ella solucionaban el problema planteado.
- El contexto de la Situación 1 se cambió porque era muy lejano a los participantes, esta modificación se realizó dado que este deporte es poco conocido en México. Por ello, nosotros optamos por un contexto futbolístico, el cual es muy popular en México.

- Hubo cambios en la redacción de algunas de las respuestas de los estudiantes hipotéticos a la Situación 4, por sugerencia de los revisores expertos. Específicamente, aquellas respuestas en las que se hacía alusión a la definición de eventos independientes, puesto que el diseño inicial no proporcionaba una respuesta totalmente correcta y poseía ciertas ambigüedades.
- En un principio, siete situaciones se consideraron. Sin embargo, en las pruebas piloto se encontró que el tiempo promedio que utilizaban para responder cada una de estas eran dos horas y media. Por lo tanto, la opción fue reducir a 4 situaciones, eso sí, incluyendo en su totalidad los sesgos, falacias y confusiones asociadas a la probabilidad condicional.

En el ANEXO 1, el cuestionario rediseñado y validado se puede apreciar.

4.4.2 Instrumentos de Análisis de la Información

La Teoría Fundamentada (TF) o *Grounded Theory* es un método de investigación ampliamente utilizado en el que la “teoría” emerge a partir del análisis de los datos (Glaser y Strauss, 1967). Esta teoría fue desarrollada como respuesta a las corrientes positivistas extremas desarrolladas para la investigación de corte social. Glaser y Strauss se consideran como los precursores de la TF. Ellos criticaron ampliamente los principios dominantes de la “gran teoría”, la cual se fundamentaba en el pragmatismo y el interaccionismo simbólico para afirmar que la verdad científica refleja una realidad externa e independiente (Lora, Cavadias y Miranda, 2017).

A partir de esta nueva postura, Glaser y Strauss afirman que la verdad científica surge a partir de la observación y de los consensos que se creaban en una comunidad de observadores con respecto a los principios que se habían establecido inicialmente para la observación (Páramo, 2015). Glaser y Strauss definen a la TF como: una “*aproximación inductiva en la cual la inmersión en los datos sirve de punto de partida del desarrollo de una teoría sobre un fenómeno*” (Páramo, 2015, p.1). En ese sentido, la TF recurre a la sensibilidad teórica del investigador para analizar los datos recolectados. Dicho análisis se efectúa mediante un método constante de contraste y comparación de los datos, el cual le permite al investigador identificar elementos teóricos fundamentales. En ese orden de ideas, la TF requiere necesariamente que el investigador realice una observación eficaz de los datos, la cual permita identificar diferencias y similitudes de estos y así poder establecer las categorías teóricas que contribuyan a la comprensión el fenómeno estudiado (Páramo, 2015).

La TF ha sido ampliamente utilizada en diversas disciplinas como la ingeniería, medicina, biología, innovación curricular y sociología, entre otras (Cuñat, 2008). La aplicación de este método se debe, en gran parte, a la adopción de una “teorización anclada” en la recolección de los datos y su posterior análisis (Morales, 2015). En ese orden de ideas, la recolección de datos y la indagación de la literatura permite que las categorías emergentes estén

reflejadas de manera natural en los datos recolectados y no se establezcan de manera forzada o sesgada.

Con respecto a la pregunta de investigación y a los objetivos propuestos inicialmente. Nosotros consideramos la utilización de la TF en el análisis de la información recolectada. Cabe mencionar que se propone utilizar únicamente de este marco de método a las estrategias o perspectivas de procesamiento y análisis de la información denominadas *Bottom-Up* y *Top-Down*. A continuación, cada una de estas perspectivas se describe con mayor precisión.

El *Bottom-Up* (de abajo hacia arriba) se centra en la organización de un conjunto de observaciones asociadas a un fenómeno de investigación. En esta perspectiva se categorizan los datos a través de la observación y detección de relaciones y patrones (análisis concreto). Posteriormente, categorías teóricas propias del fenómeno estudiado emergen. Estas surgen a partir de los datos y no desde la teoría (Niss, 2006). Por tanto, el *Bottom-up* busca establecer y realizar “adiciones conceptuales” a los datos para que estos sean aceptados de manera amplia (Merriam, 1988). A continuación, el esquema asociado a esta perspectiva que se propone para la investigación se presenta (Ver Figura 9).

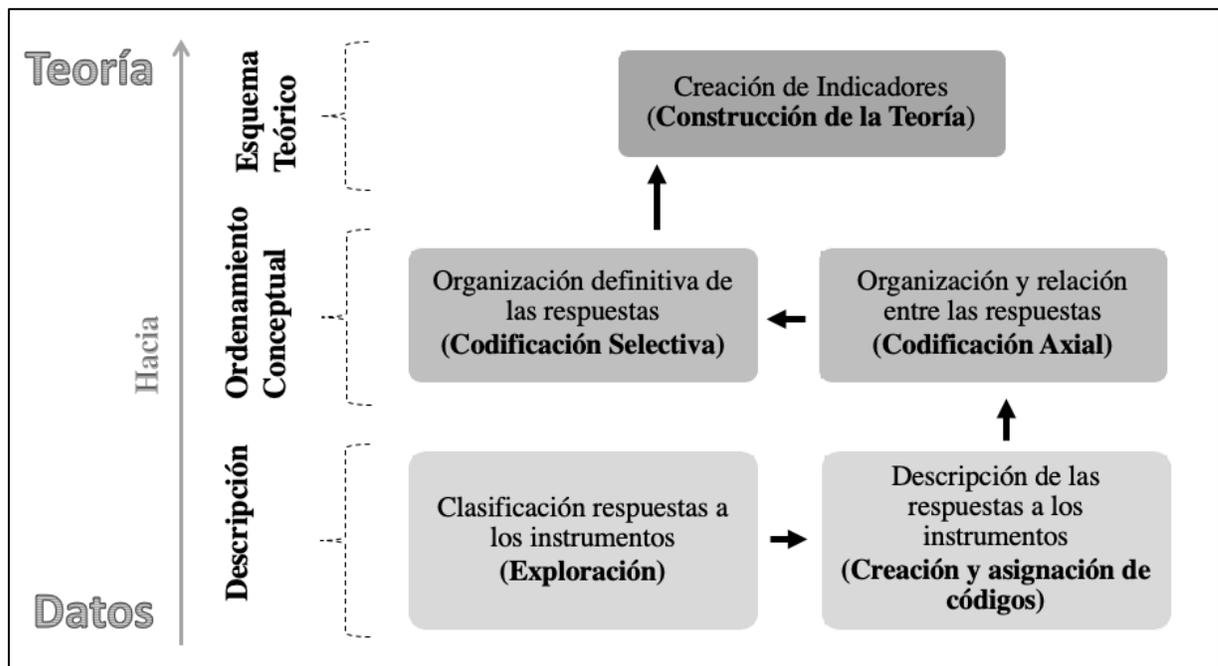


Figura 8
Elaboración propia

El *Top-Down* (de arriba hacia abajo) surge cuando el marco teórico se da antes y fuera de la investigación que se está llevando a cabo. Para esta perspectiva los conceptos son visibles desde el marco teórico (Niss, 2006). Sin embargo, el Top-Down permanece abierta la idea de que los conceptos teóricos pueden desdoblarse o sufrir cambios al momento de la observación de los datos (Merriam, 1988). Por tanto, esta perspectiva se basa en los conceptos fundamentales de la teoría de referencia para identificar situaciones, procesos, objetos, fenómenos en los datos.

A continuación, el esquema asociado a esta perspectiva que se propone la investigación se presenta (Ver Figura 9).

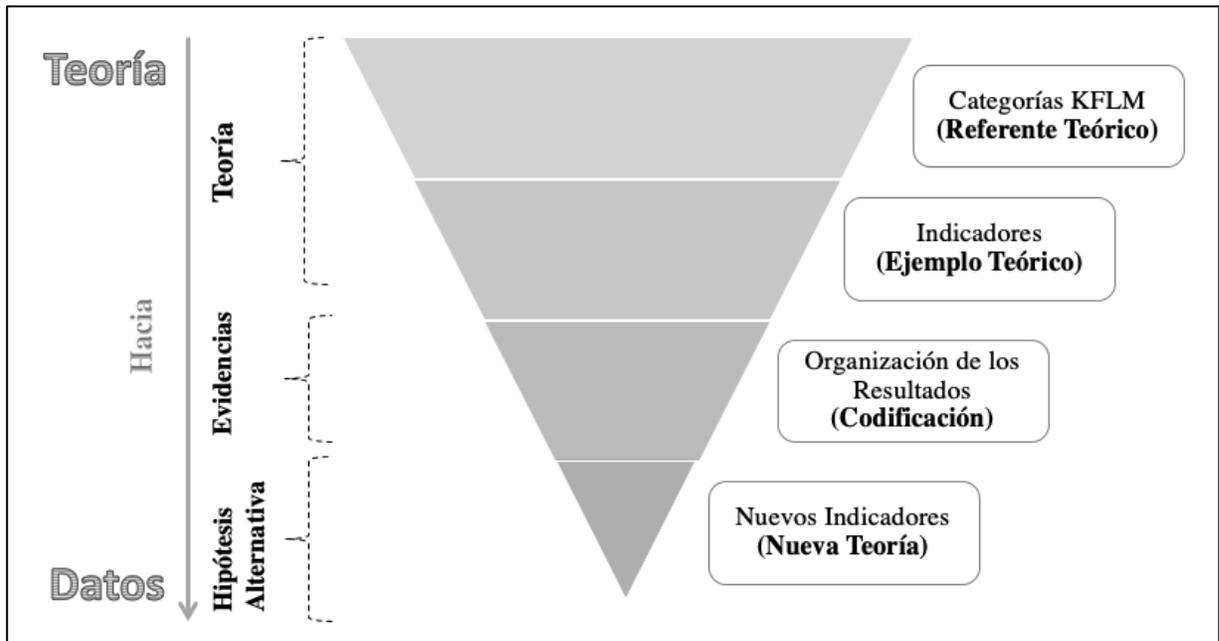


Figura 9
Elaboración propia

Con respecto a esta investigación, lo propuesto es utilizar como perspectiva teórica para el análisis de los datos, indicadores propuestos por Sosa et al. (2016). Estos han sido mencionados en el apartado [3.2.4.2.3](#). Asimismo, se considera que la utilización de las perspectivas de análisis de los datos *Bottom-Up* y *Top-Down* permitirán la construcción de nuevos indicadores de conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes (KFLM).

CAPÍTULO V

**ANÁLISIS Y
RESULTADOS**

CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los análisis y los resultados de la investigación. Con respecto a los análisis, las evidencias de la entrevista y del cuestionario para cada una de las situaciones planteadas se presentan. Con respecto a los resultados, aquellos encontrados por medio de la perspectiva Bottom-up y Top-Down se presentan. Por último, los resultados de la investigación se discuten.

5.1 Análisis de la información

Para presentar el análisis de la información se muestran dos tipos de evidencias: aquellas que guardan relación con el conocimiento matemático de los profesores y aquellas que se relacionan con los conocimientos didácticos de los profesores.

5.1.1 Evidencias del Conocimiento Matemático

Aunque el objetivo de esta investigación no es analizar el Conocimiento Matemático del profesor, nosotros consideramos pertinente mencionar el desempeño de los participantes al responder las primeras partes de las situaciones. Esto con el fin de identificar, con base en las ideas estocásticas fundamentales propuestas por Heitele (1975), el conocimiento matemático de los profesores y algunas particularidades que sólo desde el punto de vista matemático se pueden reconocer.

Nosotros concordamos con lo mencionado por Carrillo et al. (2018), quienes afirma que los conocimientos de los profesores no están totalmente aislados entre sí, están intrínsecamente relacionados en forma de amalgama. Por ello, no consideramos posible realizar un estudio cualitativo de los conocimientos didácticos de los profesores sin incluir aspectos generales de su conocimiento matemático. Nosotros proponemos en un primer momento, la descripción del conocimiento matemático de profesores para la resolución de problemas en probabilidad condicional.

En términos generales, el desempeño de los participantes durante la Parte 1 del cuestionario de conocimientos didácticos fue insuficiente. Esto se debe a que la mayoría de los participantes respondieron incorrectamente las situaciones problema (Ver Tabla 6).

Tabla 7
Desempeños de los participantes en la Parte 1 del Cuestionario.

Cuestionario de Conocimientos– Parte 1				
Caso	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Gabriel	I	I	I	I
Ricardo	I	I	C	I
Alberto	C	I	PC	I
Mario	C	C	C	I
Edgar	I	C	PC	I
Sara	I	C	PC	I
Fabiola	I	C	PC	I

C- Correcta, PC- Parcialmente Correcta, I – Incorrecta.

Las respuestas de los participantes concuerdan con los resultados de Díaz y De la Fuente (2007) y Batanero (2015), quienes mencionan que profesores en activo y en formación poseen confusiones, sesgos y falacias al momento de resolver situaciones que involucran el concepto de probabilidad condicional. Precisamente, el análisis de las primeras y segundas partes del cuestionario de conocimiento, los profesores presentan limitaciones en su conocimiento matemático relacionados con el concepto de probabilidad condicional. En la Tabla 8 se muestran los códigos que se destacan con mayor frecuencia.

Tabla 8
Códigos y Factores matemáticos de los participantes

Código	Factor
D1	Dificultades en la definición de probabilidad simple
D2	Dificultades en la definición de probabilidad compuesta
D3	Dificultades en la definición de probabilidad condicional
D4	Dificultades en la definición de la independencia de eventos
D5	Dificultades en la definición e interpretación de los eventos a la situación.
E1	Errores en la aplicación del teorema de Bayes
F1	Falacia de las tasas base
F2	Falacia condicional transpuesta
F3	Falacia de la conjunción
S1	Sesgo de equiprobabilidad
C1	Confusión probabilidad conjunta y condicional
C2	Confusión entre eventos independientes y mutuamente excluyentes

5.1.2 Evidencias del Conocimiento Didáctico

Para realizar el análisis del KFLM que evidencian profesores al responder el cuestionario de conocimientos didácticos, nosotros consideramos pertinente hacer un balance general y un análisis descriptivo del tipo de respuesta que proporcionó cada uno de los casos. Lo importante es destacar que las descripciones de las repuestas son con base en las justificaciones “ideales”, planteadas en el diseño del cuestionario. Con respecto a la entrevista semiestructurada, el análisis de los resultados se realiza con base en los objetivos planteados para cada una de las preguntas y las ideas fundamentales de Heitele (1975).

5.1.2.1 Análisis Didáctico del Cuestionario: Situación 1 – Parte 2

En la Situación 1-Parte 2 del cuestionario, algunos de los participantes mostraron fortalezas y dificultades en su conocimiento didáctico para reconocer el sesgo y falacia presentes en el razonamiento de los estudiantes hipotéticos. En la Tabla 9 se presentan los resultados.

Tabla 9

Desempeño de los participantes en la Situación 1 – Parte 2.

	Situación 1 – Parte 2		
	E1 (Respuesta Correcta)	E2 (Falacia de la conjunción)	E3 (Sesgo de Equiprobabilidad)
Correcta	-	-	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar • Fabiola • Mario
Parcialmente Correcta	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Fabiola 	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Alberto • Mario • Fabiola • Ricardo • Edgar • Ricardo 	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel
Incorrecta	<ul style="list-style-type: none"> • Mario • Edgar, • Alberto • Ricardo • Sara. 	<ul style="list-style-type: none"> • Sara 	<ul style="list-style-type: none"> • Alberto • Sara • Ricardo
No justifica	-	-	-

En la Tabla 9 se identifican los desempeños de los participantes para la Parte 2 de la Situación 1. Con respecto a la respuesta de E1, ninguno de los participantes justificó los factores didácticos. Para la respuesta de E2, en la cual se presentaba la falacia de la conjunción, ninguno de los participantes identificó este factor didáctico explícitamente. Por último, para la respuesta de E3, la cual contenía el sesgo de equiprobabilidad, los casos Edgar, Fabiola y Mario identificaron correctamente este sesgo.

A continuación, se describen algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación del cuestionario.

S1E3:
Tiene el concepto de experimento aleatorio y de equiprobabilidad.

Figura 10

En la evidencia anterior se identifica un ejemplo correcto para identificar el sesgo de equiprobabilidad (Figura 10). En la respuesta se infiere que el caso Edgar interpreta la asignación probabilística que le da el estudiante a cada uno de los eventos aleatorios, es decir, $P(B|A) = P(A|B)$. Por lo cual, el caso Edgar emplea su conocimiento didáctico para reconocer el sesgo de equiprobabilidad presente en la respuesta de E3 a la Situación 1.

S1E2:
La probabilidad de ganar ya estando en la final es $1/2$ (aquí no existe el empate) pero antes debió de cumplir el haber perdido el primero y haber ganado 5 partidos más lo que hace que al ser condicional la probabilidad sea menor.

Figura 11

En la evidencia anterior (Figura 11) se identifica que Gabriel manifiesta elementos de su conocimiento didáctico para interpretar y brindar un contrargumento la respuesta de E2 a la Situación 1. Específicamente, el caso reconoce que la probabilidad del evento simple es mayor a que la probabilidad del evento compuesto, dado que la segunda está sujeta a la ocurrencia de otros eventos aleatorios previos al experimento. Dicho así, la inferencia es que el caso reconoce indirectamente el sesgo de equiprobabilidad presente en la respuesta del estudiante hipotético.

S1E3:
 Existe una probabilidad mayor de que suceda el primer evento, no pueden ser igual de probables.

Figura 12

En esta evidencia (Figura 12), los errores se identifican por parte del caso para interpretar la respuesta del E3 a la Situación 1. Por lo cual, nosotros inferimos que el caso expresa en sus propias palabras lo que ha dicho el estudiante, lo cual no significa una interpretación del razonamiento empleado este mismo. En los resultados analizados, nosotros identificamos limitaciones en su conocimiento didáctico, al no tener la capacidad de describir el razonamiento del estudiante.

S1E1:
 No es un razonamiento propiamente dicho, sino una percepción cultural. No expresa como llegó a la conclusión. Incluso al inicio de torneo todos tendrían una misma probabilidad de ganar.

Figura 13

En la evidencia anterior (Figura, 13), Mario cometió errores para interpretar la respuesta de E1 a la Situación 1. Lo inferible es que el caso interpreta la respuesta del estudiante hipotético tomando en consideración variables externas a la situación (percepción cultural y espacio de tiempo en el experimento). De igual forma, se cree que el caso deja de lado las probabilidades simples y compuestas asociadas a los eventos aleatorios de la situación. En ese orden de ideas, el caso posee limitaciones de conocimiento matemático y didáctico.

5.1.2.2 Análisis Didáctico del Cuestionario: Situación 2 – Parte 2

En la Situación 2 - Parte 2 del cuestionario, algunos de los participantes mostraron fortalezas y dificultades en su conocimiento didáctico para reconocer el sesgo y falacia presentes en el razonamiento de los estudiantes hipotéticos. En la Tabla 10 se presentan los resultados.

Tabla 10

Desempeño de los participantes de los participantes en la Situación 2 – Parte 2.

Situación 2 – Parte 2		
E1 (Respuesta correcta)	E2	E3 (Sesgo Equiprobabilidad)

		(Falacia de la condicional transpuesta)	
Justificación Correcta	<ul style="list-style-type: none"> • Fabiola • Edgar • Mario 	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar 	<ul style="list-style-type: none"> • Fabiola • Mario
Justificación Parcialmente Correcta	-	<ul style="list-style-type: none"> • Fabiola 	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar • Alberto • Ricardo
Justificación Incorrecta	<ul style="list-style-type: none"> • Sara • Ricardo • Gabriel • Alberto 	<ul style="list-style-type: none"> • Mario • Alberto • Sara • Ricardo • Gabriel 	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Sara
No justifica	-	-	-

En la tabla anterior se identifican los desempeños de los participantes para la Parte 2 de la Situación 2. Con respecto a la respuesta de E1, Fabiola, Edgar y Mario justificaron correctamente los factores didácticos. Para la respuesta de E2, en la cual se presentaba la falacia de la condicional transpuesta, las evidencias muestran que únicamente Edgar la identificó explícitamente, este factor didáctico en la respuesta del estudiante hipotético. Por último, para la respuesta de E3, la cual contenía el sesgo de equiprobabilidad, los casos Fabiola y Mario identificaron correctamente este sesgo.

A continuación, algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación del cuestionario se describen.

S2E1:
 El hecho de que la prueba de positiva, en un paciente pre diagnosticado con cáncer brinda seguridad sobre la efectividad de la prueba diagnóstico. Basa su percepción en una certeza.

Figura 14

En esta evidencia (Figura 14) se identifica que Fabiola emplea su conocimiento didáctico para interpretar correctamente los factores didácticos presentes en la respuesta de E1 a la Situación 2. El caso reconoce elementos del razonamiento del estudiante, como la selección de los eventos condicionante y condicionado y la asignación de probabilidades asociada a los eventos de la situación. Por último, finalmente el caso menciona correctamente que E1 selecciona el evento más probable, es decir, la respuesta correcta.

S2E2:

El alumno cree que la prueba influye en la aparición del cáncer, es decir, el resultado de la prueba "afecta" la aparición del cáncer.

Figura 15

En la evidencia anterior (Figura 15) se identifica que Egdar utiliza su conocimiento didáctico para reconocer la falacia de la condicional transpuesta presente en la respuesta de E2 a la Situación 2. Lo inferible en la respuesta del caso es que el estudiante confunde el evento condicional con el evento condicionante, es decir, que el resultado positivo de la prueba influye directamente en la aparición del cáncer. Por esta razón, el caso infiere que E2 selecciona incorrectamente el evento más probable.

S2E3:

Creo que basó su análisis en diferentes factores, como dije anteriormente, la situación 1 va acompañada de una certeza, la situación dos afirma que el resultado fue positivo y que el paciente realmente tiene cáncer, por lo que llego al resultado de que confía en ambas predicciones.

Figura 16

En esta evidencia (Figura 16) se describe la respuesta de E3 a la Situación 2. Lo inferible es que la interpretación que le da el caso al razonamiento empleado por el estudiante hipotético es la correcta, debido a que reconoce el grado de confianza que le asigna a cada uno de los eventos asociados a la situación. El caso muestra evidencias de su conocimiento didáctico para reconocer el sesgo de equiprobabilidad.

S2E2:

~~La prueba dio positivo, la redacción~~
refleja que es un indicativo de cáncer ~~como~~ afirmación, por lo que hace pensar ~~en~~ en la certeza del diagnóstico.

Figura 17

En la evidencia anterior (Figura 17), lo identificable es una interpretación parcialmente correcta de Fabiola a la respuesta de E2 a la Situación 2. Lo inferible es que el caso reconoce que el razonamiento empleado por el estudiante considera el resultado positivo de la prueba diagnóstica como una certeza, lo cual es correcto. En este orden de ideas, el caso posee limitaciones en su conocimiento al no considerar que la respuesta del estudiante toma en consideración los eventos aleatorios como simples y no como condicionales.

S2E1:

Considero que el estudiante cree que al resultar positivo en el test, es un indicativo final de poseer cancer, sin tenerlo realmente

Figura 18

En esta evidencia (Figura 18) se identifican limitaciones en el conocimiento didáctico de Ricardo para interpretar la respuesta de E1 a la Situación 1. Lo inferible es que el caso menciona, erróneamente, que el estudiante hipotético toma en consideración los eventos asociados a la situación como simples y no como condicionales. Lo importante es mencionar que, la presencia de la falacia de la condicional transpuesta en el razonamiento probabilístico de Ricardo en su respuesta a la Situación 2 se identificó, por ello se afirma que las limitaciones en el conocimiento matemático influyen directamente en el conocimiento didáctico, en este caso específico, generando errores en la interpretación de las respuestas de estudiantes hipotéticos.

S2E1:

Si una persona tiene cancer el resultado de la prueba es positivo, se cumplen las dos condiciones

Figura 19

En esta evidencia (Figura 19) se identifica una limitación en el conocimiento didáctico de Sara para interpretar la respuesta de E1 a la Situación 2. La inferencia es que la participante confunde la probabilidad conjunta y condicional al intentar interpretar la respuesta del estudiante hipotético, dado que ella menciona en su interpretación a la respuesta que «se cumplen las dos condiciones». Sin embargo, esta afirmación es incorrecta, debido a que la respuesta de E1 reconoce ambos eventos aleatorios como condicionales.

S2E2:

El análisis del segundo estudiante parece más acertado ya que considera que hay altas probabilidades de que la persona encuestada tenga cancer

Figura 20

En la evidencia anterior (Figura 20) se identifica limitaciones en el conocimiento matemático del profesor para reconocer la falacia de la condicional transpuesta presente en la respuesta de E2 a la Situación 2. Lo entendible es que a partir de la afirmación del caso «el análisis del segundo estudiante parece el más acertado», el participante presenta en su razonamiento probabilístico la falacia de la condicional transpuesta. Por lo tanto, la afirmación es que las limitaciones de conocimiento matemático repercuten directamente en la identificación de dificultades presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos.

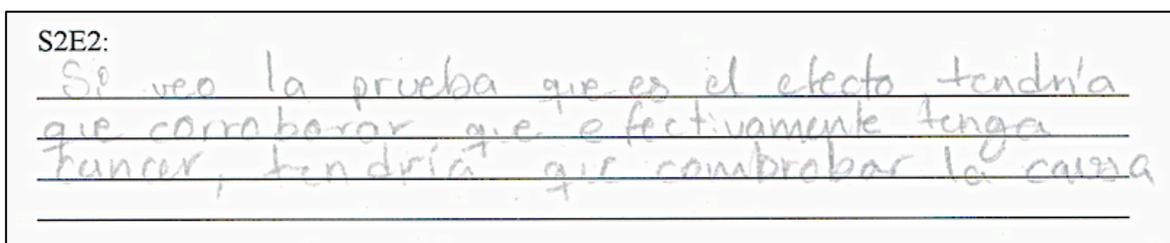


Figura 21

En esta evidencia (Figura 21) se identifica limitaciones en el conocimiento didáctico de Susana para interpretar el razonamiento empleado por E2 a la Situación 2. El caso afirma que «tendría que comprobar la causa», esto permite inferir que el caso trae variables externas a la situación para interpretar de la respuesta del estudiante hipotético. De igual modo, la descripción que brinda el caso a la respuesta de E3, es con base en su propia respuesta a la Situación 2. Por esta razón, nosotros consideramos que las limitaciones en el conocimiento matemático están relacionadas con las limitaciones en el conocimiento didáctico.

5.1.2.3 Análisis Didáctico Cuestionario: Situación 3 – Parte 2

En la Situación 3 - Parte 2 del cuestionario, algunos de los participantes mostraron fortalezas y dificultades en su conocimiento didáctico para reconocer confusiones presentes en el razonamiento de los estudiantes hipotéticos. En la Tabla 11 se presentan los resultados.

Tabla 11

Desempeño de los participantes de los participantes en la Situación 3 – Parte 2.

	Situación 3 – Parte 2		
	E1 (Confusión sucesos independientes y mutuamente excluyentes)	E2 (Falacia de Eje de tiempo)	E3 (Respuesta Correcta)
Justificación Correcta	-	-	-
Justificación Parcialmente Correcta	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar • Ricardo 	<ul style="list-style-type: none"> • Alberto 	-

	<ul style="list-style-type: none"> • Fabiola • Alberto 		
Justificación Incorrecta	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Sara • Mario 	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Edgar • Ricardo • Sara • Fabiola • Mario 	<ul style="list-style-type: none"> • Gabriel • Edgar • Mario • Fabiola • Sara • Ricardo • Alberto
No justifica	-	-	-

En la tabla anterior se puede identificar los desempeños de los profesores para la Parte 2 de la Situación 3. En ella se reconoce que ninguno de los casos estudiados interpretó correctamente las respuestas de los estudiantes hipotéticos E1 (confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes), E2 (Falacia de eje de tiempo) y E3 (respuesta correcta de la situación). A continuación, algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación del cuestionario se describen.

S3E1:

No analiza las características de cada evento y no entiende el concepto de la independencia.

Figura 22

En esta evidencia (Figura 22) se encuentran elementos del conocimiento didáctico de Edgar para reconocer dificultades en el razonamiento de E1 a la Situación 3. Específicamente, el caso interpreta que el estudiante hipotético no comprende el concepto de independencia de eventos. Por tanto, el caso no identifica implícita o explícitamente la confusión entre eventos independientes y mutuamente excluyentes que presenta E1.

S3E2:

Al seguirse la carta al mazo, efectivamente los convierte en eventos independientes, pero al no hacerlo no lo serían.

Figura 23

En esta evidencia (Figura 23) se encuentran limitaciones en su conocimiento didáctico para interpretar la respuesta de E2 a la Situación 3. La inferencia es que el caso posee limitaciones en su conocimiento para reconocer el razonamiento empleado por el estudiante hipotético, debido a que únicamente describe elementos centrales (reposición) que aborda el estudiante hipotético en su respuesta. Por tal razón, el caso no reconoce la falacia de eje de tiempo que presenta E2 en su respuesta.

S3E2:
~~El~~ El razonamiento también es válido, la situación no especifica si el ejercicio es con remplazo por lo que podría considerarse ~~ambas~~ ambas situaciones tal como lo plantea el estudiante ~~do~~. Pero el ejercicio menciona que se saca solo una carta, ~~pero~~

Figura 24

En la evidencia anterior (Figura 24) se reconocen limitaciones en el conocimiento matemático de Fabiola para interpretar la respuesta de E2 a la Situación 3. La inferencia es que el caso posee limitaciones en su conocimiento al afirmar «el razonamiento también es válido». Dicho así, Fabiola posee en su razonamiento probabilístico la presencia de la falacia de eje de tiempo.

S3E3:
Por definición se puede considerar que los eventos son independientes y al ~~no~~ mencionar la situación que se sacan una ~~de~~ carta de la baraja los eventos son independientes.

Figura 25

En esta evidencia (Figura 25) se encuentra limitaciones de conocimiento didáctico de Fabiola para identificar los factores didácticos de la respuesta de E3 a la Situación 3. La inferencia es que el caso posee dificultades para interpretar el lenguaje probabilístico utilizado por el estudiante hipotético, al mencionar -erróneamente- que «por definición se puede considerar que los eventos son independientes». Lo importante es mencionar que el razonamiento empleado por E3 está basado en el teorema de Bayes y no por el factor reposición, por esta razón se considera como incorrecta la interpretación de Fabiola.

S3E3:
 Analiza la probabilidad de los eventos y es el criterio que emplea. si tienen la misma probabilidad de ocurrir los toma como independientes. confunde la condición de afectación de un evento respecto a la ocurrencia del otro

Figura 26

En esta evidencia (Figura 26) se identifica errores y falencias de Edgar para interpretar la respuesta de E3 a la Situación 3. La inferencia es que el caso hace una incorrecta interpretación del lenguaje probabilístico utilizado por el estudiante hipotético, -erróneamente- ya que menciona explícitamente que E3 «confunde la condición afectación de un evento respecto a la ocurrencia de otro». De igual modo, lo identificable es la presencia de la falacia de eje de tiempo en el razonamiento probabilístico del caso, al no considerar la independencia de eventos en situaciones asincrónicas. Por tanto, el caso tiene limitaciones amplias en su conocimiento didáctico y matemático para la enseñanza de la probabilidad condicional.

5.1.2.4 Análisis Didáctico Cuestionario: Situación 4 – Parte 2

En la Situación 4 - Parte 2 del cuestionario, algunos de los participantes mostraron fortalezas y dificultades en su conocimiento didáctico para reconocer confusiones y falacias presentes en el razonamiento de los estudiantes hipotéticos. En la Tabla 12 se presentan los resultados.

Tabla 12

Desempeño de los participantes de los participantes en la Situación 4 – Parte 2.

	Situación 4 – Parte 2			
	E1 (Falacia de las tasas base)	E2 (Falacia de las tasas base)	E3 (Confusión probabilidad conjunta y condicional)	E4 (Respuesta Correcta)
Justificación Correcta	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar • Gabriel • Mario 	<ul style="list-style-type: none"> • Edgar • Gabriel • Sara • Ricardo • Mario 	<ul style="list-style-type: none"> • Ricardo • Alberto • Gabriel 	-
Justificación Parcialmente Correcta	-	-	<ul style="list-style-type: none"> • Mario 	-
Justificación Incorrecta	<ul style="list-style-type: none"> • Sara • Alberto 	<ul style="list-style-type: none"> • Fabiola • Alberto 	<ul style="list-style-type: none"> • Sara • Edgar 	<ul style="list-style-type: none"> • Todos

	<ul style="list-style-type: none"> • Ricardo • Fabiola. 			
No justifica	-	-	• Fabiola	-

En la tabla anterior se puede muestran los desempeños de los participantes para la Parte 2 de la Situación 4. En ella se reconoce que la mayoría de los participantes interpretaron correctamente las respuestas de los estudiantes hipotéticos E1 y E2 (falacia de las tasas base) y la respuesta de E3 (confusión probabilidad conjunta y condicional). Sin embargo, ninguno de los participantes describió correctamente el razonamiento empleado por E4, el cual era la respuesta correcta. En general, la mayoría de los participantes mostraron buenos desempeños en esta actividad para reconocer la falacia de las tasas base.

A continuación, algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación del cuestionario se describen.

S4E1:
 El alumno le da validez al testimonio, ~~de la compañía~~
 Dejando de lado que la probabilidad de accidentes depende
 del ~~hay~~ número de taxis circundado de dicha compañía,
 S4E2:

Figura 27

En la Figura 27, la identificación de la justificación correcta por parte del Mario a los factores didácticos que manifiesta E1 es factible. El caso reconoce que el estudiante hipotético no considera la información a priori a un suceso probabilístico. Por lo cual, el caso infiere correctamente que el estudiante posee la falacia de las tasas base.

S4E1:
 El alumno no toma en consideración la
 probabilidad de fallo

Figura 28

En la Figura 28 se identifica una justificación incorrecta por parte de Alberto. El caso menciona que el estudiante no toma en consideración el evento condicionado (probabilidad de fallo). Sin embargo, en la respuesta de E1, esta sí se considera, lo que no toma en cuenta es el evento condicionante (color de taxi). Por tanto, el caso menciona limitaciones de razonamiento didáctico al no reconocer falacia de la *condicional transpuesta* que posee E3 en su razonamiento.

S4E2:
Solo tengo en cuenta una característica
del evento el evento de la identificación
de colores.

Figura 29

En la Figura 29 se identifica una incorrecta justificación por parte de Mario de los factores didácticos que evidencia E2. El participante toma en consideración la probabilidad de fallo y el color de los carros como un único evento. Por lo cual, el caso manifiesta limitaciones en su conocimiento matemático para definir un evento aleatorio.

S4E3:
Solo considera la probabilidad de la
unión de dos eventos que pueden
suceder

Figura 30

En la Figura 29 se puede identificar una correcta justificación a los factores didácticos que evidencia E3. El participante menciona que el razonamiento del estudiante es incorrecto, debido a que visualiza la probabilidad de la situación como conjunta y no condicional. Dicho así, el caso reconoce correctamente que el estudiante hipotético incurre en la *confusión de probabilidades conjuntas y condicionales*.

S4E3:
El alumno tiene en cuenta tanto el nivel de
confianza como el porcentaje del parque vehicular.

Figura 31

En la Figura 31 se puede reconocer que el participante Edgar identifica superficialmente la respuesta de E3 a la Situación. Debido a que el participante menciona que el estudiante toma en consideración la probabilidad condicional, sin explicitar con mayor detalle. Por tal razón, la descripción que proporciona el caso es parcialmente correcta.

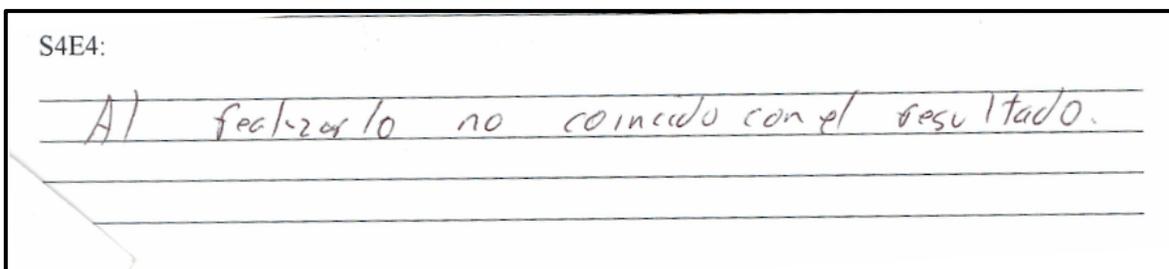


Figura 32

En la Figura 32, una respuesta incorrecta por parte del participante Gabriel se identifica. Su descripción es con base en su propia respuesta, mencionando que su resultado no coincide con el empleado por el estudiante. Dicho así, Gabriel no justifica los factores didácticos que hace esta respuesta de E4 incorrecta. Cabe resaltar que la respuesta de E4 es la correcta a la situación.

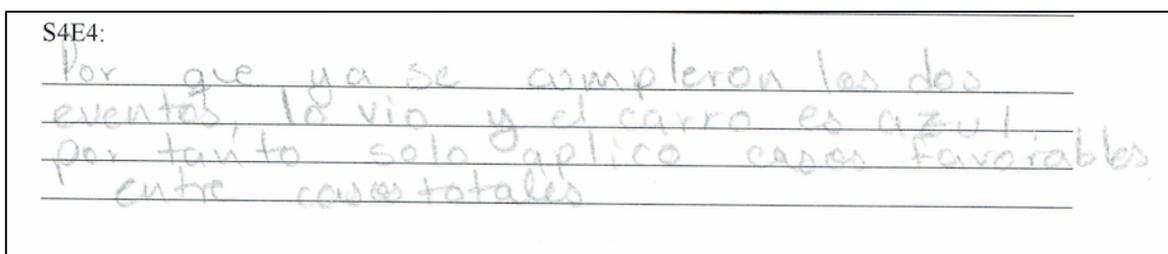


Figura 33

En la Figura 33, la participante Sara describe incorrectamente la respuesta de E4. Su argumento está basado en que el estudiante hipotético no toma en consideración en su respuesta las probabilidades de fallo. Sin embargo, en el diseño del cuestionario de conocimientos didácticos, la respuesta de E4 sí considera dicho factor. Por ende, lo afirmable es que el participante incurre en la incorrecta aplicación del teorema de Bayes.

5.1.2.5 Análisis Didáctico de la Entrevista

La entrevista semiestructurada es el instrumento secundario para esta investigación. Con ella se busca reconocer aspectos específicos del conocimiento didáctico del profesor para la interacción que tienen los estudiantes con el contenido de probabilidad condicional. En ese sentido, describimos algunas de las evidencias más significativas que resultaron de la aplicación de este instrumento.

La organización de esta sección se propone en dos partes. En una primera parte, algunas de los fragmentos más representativos de la entrevista semiestructurada se describen. En la segunda parte, una tabla que compara los propósitos generales y específicos de la entrevista con los resultados presentados por cada uno de los casos se presenta.

Entrevistador: Teniendo en cuenta la naturaleza aleatoria conceptos en probabilidad ¿considera usted que este factor incide en el aprendizaje de estos conceptos? ¿por qué?

Mario: Cuando te hablan de matemáticas, normalmente el estudiante espera que todo tiene un resultado preciso. La percepción de la aleatoriedad genera un conflicto en estudiantes y profesores

En este episodio, nosotros identificamos que Mario evidencia su conocimiento didáctico matemático para reconocer la influencia que tiene la naturaleza aleatoria de los eventos en el aprendizaje de la probabilidad. El participante afirma que «hay un choque, la percepción de la aleatoriedad genera un conflicto en estudiantes y profesores». Con base en esta afirmación, nosotros inferimos que el participante reconoce las dificultades que tienen los estudiantes al abordar, por primera vez, el concepto de probabilidad. La mayoría de casos presentan limitaciones en su KFLM para identificar diferencias epistemológicas de los eventos aleatorios y deterministas y su influencia en el aprendizaje.

Entrevistador: ¿Cómo es el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de probabilidad en el aula de clases? ¿

Ricardo: Considero que es una materia distinta a lo que son las matemáticas. En ocasiones, los estudiantes poseen dificultades para reconocer los eventos aleatorios y poseen problemas para reconocer que un experimento puede suceder cualquiera de estos eventos. Tienen una creencia de que las matemáticas son exactas.

En este episodio, Ricardo posee elementos de conocimiento didáctico matemático para reconocer dificultades que tienen los estudiantes con el aprendizaje de la probabilidad condicional. Específicamente, el caso menciona que la interacción que tienen los estudiantes con los eventos aleatorios genera dificultades en la interpretación de situaciones. Además, Ricardo menciona que los estudiantes poseen dificultades para reconocer la naturaleza epistemológica que tienen los eventos aleatorios, debido a que manifiesta que los estudiantes consideran a las matemáticas como una disciplina exacta.

Entrevistador: ¿Cómo inciden las experiencias previas en el aprendizaje de conceptos probabilísticos?

Ricardo: Yo creo que es positivo. En ocasiones, cuando se habla con estudiantes acerca de fenómenos aleatorios, los estudiantes empiezan a visualizar y analizar los conceptos aleatorios y relacionarlos con experiencias previas. Esto les ayuda a tener de una perspectiva distinta lo que pueda o no suceder y así tomar decisiones.

En este episodio, Ricardo posee elementos de conocimiento para identificar el papel que tienen las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios y su influencia en

el aprendizaje de la probabilidad. Explícitamente, Ricardo menciona que «los estudiantes empiezan a visualizar y analizar los conceptos aleatorios y relacionarlos con experiencias previas». Con esta evidencia, nosotros inferimos que el caso reconoce la influencia positiva que tienen las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad, dado que permite reconocer, desde una perspectiva aplicada, los conceptos probabilísticos. Nosotros encontramos que la mayoría de los participantes estudiados evidenciaron elementos en su conocimiento para identificar la influencia positiva de las experiencias aleatorias en la interacción de los estudiantes con contenidos probabilísticos.

Entrevistador: ¿Cómo inciden las experiencias previas en el aprendizaje de conceptos probabilísticos?

Fabiola: Influyen positivamente, porque ellos [estudiantes] traen un conocimiento empírico, pero no se ponen a analizar cómo es el funcionamiento de los juegos de azar. Este conocimiento que han adquirido [los estudiantes], influye en cómo desarrollan su aprendizaje, porque aquellos que no traen este conocimiento presentan confusiones y dificultades posteriormente.

En este episodio, lo identificable son elementos del conocimiento de Fabiola para reconocer la influencia positiva que tienen las experiencias ante fenómenos aleatorios en el aprendizaje de la probabilidad. Sin embargo, nosotros quisiéramos profundizar en otro aspecto importante. En el fragmento donde Fabiola menciona que «aquellos [estudiantes] que no traen este conocimiento [experiencias previas ante fenómenos aleatorios] presentan confusiones y dificultades». Con base en esta afirmación, lo reconocible es que el caso afirma que poseer este tipo de experiencias es razón suficiente para no presentar dificultades durante el aprendizaje de la probabilidad. Esto permite inferir que el conocimiento didáctico matemático del caso no reconoce que el sesgo, las falacias y las confusiones pueden estar relacionadas con las experiencias previas. Lo destacable es que ninguno de los casos estudiados evidenció elementos en su conocimiento para identificar las posibles dificultades en el aprendizaje relacionadas con las experiencias previas ante fenómenos aleatorios.

Entrevistador: ¿Considera usted que el hecho de añadir nuevas condiciones a un evento aleatorio dificulta la percepción que tienen los estudiantes sobre este mismo?

Alberto: No sabría cómo responderte. Pero sí podría decir que los estudiantes tienen un problema con la naturaleza epistemológica de este tipo de eventos. Esta naturaleza detona una serie de problemáticas en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

En este fragmento, Alberto muestra un limitado conocimiento didáctico para reconocer las formas de interacción que tienen los estudiantes con los eventos aleatorios. Específicamente, el caso menciona que la naturaleza epistemológica genera diversas dificultades. Sin embargo, él no menciona de manera implícita o explícita a qué tipo de

“problemáticas en el aprendizaje” se refiere. En este sentido, lo afirmable es que el conocimiento del caso sobre las características de aprendizaje en probabilidad condicional es muy limitado.

Entrevistador: ¿Existe alguna diferencia entre el razonamiento empleado por los estudiantes cuando se abordan conceptos probabilísticos y cuando se abordan conceptos de álgebra o geometría?

Fabiola: Los estudiantes me han dicho que es una materia confusa para ellos, debido a que están acostumbrados a emplear fórmulas y hallar el resultado exacto. Entonces cuando ellos ven probabilidad su razonamiento tiene que abrirse un poquito más y eso se les dificulta porque son muy cuadrados.

En este fragmento, nosotros encontramos que Fabiola manifiesta limitaciones en su conocimiento didáctico. Específicamente, el caso menciona superficialmente que hay una diferencia en entre el razonamiento matemático y el razonamiento probabilístico. Sin embargo, el caso no reconoce explícitamente las diferencias entre estos tipos de razonamiento. En este orden de ideas, Fabiola no reconoce aspectos característicos del razonamiento probabilístico de estudiantes en probabilidad condicional.

Entrevistador: ¿Cómo es la introducción de la probabilidad condicional en estudiantes de bachillerato?

Sara: Cuando enseñé la probabilidad condicional me tardó un poco más que la probabilidad simple. Esto se debe a que este concepto les “mueve algo” en su aprendizaje que hace que sea más difícil de comprender.

En este fragmento, Sara da evidencias de su limitado conocimiento didáctico del contenido. Específicamente, el caso infiere que la introducción del concepto de probabilidad condicional genera dificultades en los estudiantes. Sin embargo, el caso no menciona aquellos aspectos elementos didácticos que ocasiona dichas dificultades en su comprensión. Por tal razón, nosotros consideramos que el limitado conocimiento didáctico del caso influye notablemente en las respuestas a la entrevista.

Entrevistador: ¿Cómo es el primer acercamiento que tienen los estudiantes a la probabilidad? ¿Es igual a las matemáticas en general?

Adrián: Uno de los primeros temas que se abordan en la asignatura de Matemáticas II es la Teoría de Conjuntos. Luego, al llegar a la asignatura de Matemáticas V, los estudiantes no recuerdan los contenidos relacionados con teoría de conjuntos. Y eso significa un problema para los estudiantes al comprender la probabilidad.

En este fragmento, Adrián manifiesta elementos de su conocimiento didáctico para reconocer posibles factores que inciden en el aprendizaje de la probabilidad. Puntualmente, el caso menciona la distancia de tiempo que hay entre el tema de Teoría de Conjuntos y la probabilidad, lo cual puede generar dificultades en la introducción de estos contenidos. Dicho

así, manifiesta evidencias de su conocimiento para prever las posibles dificultades de los estudiantes.

A continuación, presentamos una tabla con el resumen de los principales resultados de las entrevistas, en relación con los propósitos grupales y específicos de la entrevista semiestructurada.

Tabla 13

Resultados de los participantes en la entrevista semiestructurada

Propósito Grupal	Propósito Específico	Resultado
1. Indagar el conocimiento del profesor sobre la inclusión de sucesos de naturaleza aleatoria en el pensamiento matemático de los estudiantes.	1.1 Indagar el conocimiento del profesor sobre el papel que tienen la naturaleza aleatoria de los conceptos en el aprendizaje de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> • Alberto menciona que la naturaleza aleatoria de la probabilidad hace que los estudiantes no lleguen a establecer relaciones entre los conceptos. • Mario reconoce que el carácter aleatorio de los eventos ocasiona conflictos en el aprendizaje de los estudiantes.
	1.2 Examinar el conocimiento del profesor con respecto al primer acercamiento que tienen los estudiantes con variables y sucesos aleatorios.	<ul style="list-style-type: none"> • Alberto afirma que el primer acercamiento a los conceptos probabilísticos es muy difícil, debido a que no poseen conocimientos previos que se requieren como operaciones entre conjuntos. • Ricardo menciona que la representación gráfica de los eventos probabilísticos es una de las principales dificultades de los estudiantes.
	1.3 Analizar el conocimiento que tiene el profesor sobre las formas de razonamiento que tienen los estudiantes al resolver una situación con variables aleatorias, en comparación con	<ul style="list-style-type: none"> • Mario afirma que existe una notoria dificultad en la resolución de situaciones en probabilidad. Y menciona que los estudiantes únicamente resuelven aquellas que están relacionadas con cartas,

	situaciones que poseen variables deterministas.	<p>datos y monedas porque son las que están en los libros de texto.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fabiola afirma que los estudiantes tienen mecanizar los procesos para la resolución de situaciones en probabilidad y afirma que en algunos casos estos se parecen a las matemáticas.
2. Analizar el conocimiento que manifiesta el profesor sobre la incidencia que tiene las experiencias previas de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad.	2.1 Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el papel que tienen las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • Mario y Ricardo dicen que las experiencias no influyen de ninguna manera en el aprendizaje de conceptos probabilísticos. • Fabiola afirma que las experiencias facilitan el primer acercamiento de los estudiantes a la probabilidad. • Alberto menciona que los estudiantes pueden adquirir un conocimiento empírico de la probabilidad a partir de los juegos de azar.
	2.2 Examinar el conocimiento que tiene el profesor sobre las ventajas o desventajas que trae las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos de incertidumbre.	<ul style="list-style-type: none"> • Mario dice que las experiencias influyen negativamente en el aprendizaje la probabilidad. • Fabiola, Ricardo y Alberto afirman que la experiencia ante fenómenos aleatorios influye positivamente en el aprendizaje de la probabilidad.
	2.3 Indagar el conocimiento del profesor sobre las falacias, errores, dificultades y sesgos que se generan durante el aprendizaje de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> • Mario menciona que los estudiantes poseen dificultades para identificar la condición y el condicionante.

3. Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el papel del lenguaje en el aprendizaje de la probabilidad.	3.1 Indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre la diferencia en el lenguaje que se utiliza en probabilidad con respecto a otros contenidos en matemáticas.	<ul style="list-style-type: none"> • Mario afirma que el lenguaje en probabilidad genera dificultades en el estudiante debido a su léxico.
	3.2 Estudiar el conocimiento del profesor sobre cómo incide el lenguaje utilizado en probabilidad para el aprendizaje de estos conceptos.	
	3.3 Indagar el conocimiento del profesor sobre las dificultades que tienen los estudiantes sobre la interpretación de resultados en situaciones problema en probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • Mario, Alberto, Fabiola y Ricardo mencionan que los estudiantes poseen dificultades para realizar interpretaciones de los enunciados y resultados en probabilidad.
4. Indagar el conocimiento del profesor sobre los conflictos cognitivos en los estudiantes que puede ocasionar añadir condiciones a situaciones que involucran conceptos de probabilidad.	4.1 Analizar el conocimiento que tienen los profesores sobre las dificultades y conflictos que genera en el estudiante añadir nueva información a un suceso aleatorio	<ul style="list-style-type: none"> • Mario menciona únicamente que el añadir condiciones a un suceso probabilístico hace que el estudiante tenga mayor dificultad al simbolizarlo. • Alberto afirma que la probabilidad condicional es mucho más sencilla de trabajar con los estudiantes que la probabilidad simple y compuesta. • Fabiola y Ricardo mencionan que la probabilidad condicional genera dificultades en los estudiantes.
	4.2 Indagar el conocimiento del profesor sobre cómo influye en la percepción de eventos	<ul style="list-style-type: none"> • Mario menciona que algunos contextos son más difíciles de comprender que otros porque los

	probabilísticos en estudiantes añadir nueva información a un suceso aleatorio.	estudiantes no están familiarizados con ellos.
--	--	--

En conclusión, la aplicación de esta entrevista mostró fortalezas y limitaciones en el conocimiento didáctico de los profesores para reconocer las formas de interacción de estudiantes en probabilidad condicional. A continuación, mencionamos de manera puntal aquellos conocimientos que se evidenciaron y aquellos que no:

Encontrados:

- La mayoría de los participantes reconocen la influencia que tiene la naturaleza aleatoria en el aprendizaje de la probabilidad.
- La mayoría de los participantes reconocen el papel de las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad y cómo estos influyen positivamente en la comprensión y significación de este concepto.
- Algunos de los participantes reconocen la incidencia de elementos lingüísticos en el aprendizaje de la probabilidad. Específicamente, los participantes identifican aspectos como la interpretación de enunciados y respuestas a situaciones aleatorias.

No encontrados:

- Los participantes no dan evidencias de su conocimiento didáctico para reconocer que las experiencias previas puede ocasionar sesgos, confusiones y falacias en el razonamiento probabilístico condicional de los estudiantes.
- Los participantes no dan evidencias específicas del conocimiento didáctico para reconocer las formas de interacción que tienen los estudiantes con la probabilidad condicional.

5.2 Resultados de la investigación

La observación a través de las perspectivas de análisis permitió identificar dificultades en el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional. A continuación, se presentan los resultados de la investigación, los cuales están divididos en tres partes: (1) Resultados a partir de la perspectiva Bottom-Up, (2) Resultados a partir de la perspectiva Top-Down y (3) Presentación y discusión de las categorías teóricas emergentes (en términos de indicadores de conocimientos) resultantes de la aplicación de ambas perspectivas de análisis.

5.2.1 Resultados a partir de la perspectiva Bottom-Up

Los resultados encontrados a partir de esta perspectiva surgen de brindar una sensibilidad teórica a la información recogida por el cuestionario y la entrevista semiestructurada. Dicho así, los análisis se efectuaron a partir de cinco pasos:

1. Exploración de las respuestas de los participantes para el cuestionario y entrevista. Este proceso permitió clasificar entre respuestas correctas e incorrectas.
2. Descripción de las respuestas de los participantes a los instrumentos de recogida de la información, esto con el fin de crear y asignar códigos a cada una de estas.
3. Organización de y relación entre los códigos anteriores, esto con el fin de agrupar, en un primer momento, las respuestas de los participantes.
4. Codificación selectiva de las respuestas de los participantes, esto con el fin de establecer u ordenar definitivamente todos los códigos.
5. Construcción de una teoría a partir de las respuestas de los participantes, en la cual se destacan aspectos positivos y negativos del conocimiento de los profesores para responder los instrumentos de recogida. Este paso se presentará en el apartado [5.2.3](#).

5.2.1.1 Cuestionario: Parte 1

Con respecto al análisis de los resultados de la Parte 1 del cuestionario, mediante el cual se solicitó a los casos resolver el problema planteado, nosotros identificamos que los profesores poseen un limitado conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad condicional. Como fruto del análisis cualitativo de las respuestas a la Parte 1 del cuestionario, lo identificado son aspectos generales del conocimiento matemático de los participantes para la enseñanza de la probabilidad condicional. En ese orden de ideas, las siguientes limitaciones se identificaron:

- ***Dificultades en la definición de probabilidad simple, compuesta y condicional:*** el análisis de las respuestas permitió identificar que los participantes manifiestan dificultades para definir el concepto de probabilidad simple, compuesta y condicional. Asimismo, dificultades para la aplicación de estos conceptos en diversos contextos. Estos concuerdan con los encontrados por Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) para profesores en formación.
- ***Dificultades en la definición de eventos independientes:*** en la mayoría de los casos se aprecian dificultades para definir eventos independientes y mutuamente excluyentes. Durante la resolución del cuestionario se encontraron argumentos del tipo: “ambos eventos sin independientes entre sí porque uno tiene mayor probabilidad que otro”, “estos eventos son independientes entre sí porque en la situación hay dos experimentos”. Nuestros resultados son similares a los de Díaz y de la Fuente (2005).
- ***Error en la aplicación del teorema de Bayes:*** durante los análisis, todos los participantes presentan errores para la aplicación del teorema de Bayes, específicamente inconvenientes para calcular la probabilidad total asociada a un fenómeno aleatorio.

Estos resultados concuerdan con los de León-Gómez (2008), quien manifiesta que profesores en formación poseen dificultades en la aplicación de este teorema.

- ***Dificultades en la interpretación de enunciados en probabilidad:*** dificultades en la interpretación de enunciados en probabilidad fueron identificadas. Este resultado se destaca con base en las reiteradas menciones que hacen los participantes a factores externos a las situaciones planteadas en el cuestionario (ej. causa del cáncer, reposición en la extracción de las cartas). Estos resultados guardan relación con los de Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy y Vásquez (2018).

De manera análoga, falacias y confusiones en el razonamiento probabilístico condicional de los profesores fueron encontradas. Estos resultados coinciden con los de Contreras (2011), Vásquez y Alsina (2015), Díaz (2005) y Díaz y de la Fuente (2007).

- ***Falacia de las tasas base:*** el análisis permite identificar la presencia de esta falacia en su razonamiento probabilístico condicional. En las respuestas a las situaciones y justificaciones a respuestas de estudiantes hipotéticos, los participantes no consideran la información que está consignada en el enunciado de la situación.
- ***Falacia de la condicional transpuesta:*** el análisis de las respuestas al cuestionario permitió identificar que los casos presentan limitaciones asociadas a esta falacia. Esta aserción se realiza con base en las respuestas a las situaciones y justificaciones de los factores didácticos, en donde se evidencia una notoria confusión para identificar correctamente la condición y el condicionante en eventos aleatorios.
- ***Falacia de la conjunción:*** el análisis de las respuestas al cuestionario permitió identificar que la mayoría de los casos presentan esta falacia. Con base en sus respuestas a la Parte 1, los participantes poseen dificultades para identificar cuando la situación se refiere eventos simples, compuestos o condicionales. Ello hace que los casos consideren la probabilidad conjunta como la más probable.
- ***Falacia de eje de tiempo:*** En el razonamiento de los participantes, la presencia de esta falacia en el razonamiento probabilístico condicional de los participantes fue encontrada. Esto se debe a que en sus respuestas a la Parte 1 y 2 del cuestionario, los profesores manifiestan que un evento aleatorio no puede condicionar otro que ocurrió anteriormente.
- ***Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes:*** a partir de las respuestas encontramos esta confusión en el razonamiento probabilístico de los participantes. Los resultados muestran que el significado que le dan los participantes a la independencia de eventos aleatorios es igual a la de los eventos mutuamente excluyentes.
- ***Confusión entre la probabilidad conjunta y condicional:*** los resultados del cuestionario arrojaron que los participantes confunden la probabilidad conjunta y condicional reiterativamente; esto se debe a que ellos no reconocen la información a

priori de un suceso aleatorio y su orden cronológico, haciendo que simbolicen la probabilidad condicional como conjunta.

5.2.1.2 Cuestionario: Parte 2

El análisis de los resultados a la Parte 2 del cuestionario permitió encontrar limitaciones sobre el conocimiento didáctico de los profesores con respecto a las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional. Estos resultados coinciden con Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012); Vásquez y Alsina (2015); Huerta (2018); Contreras (2011); y Ortiz, Batanero y Contreras (2012). Como fruto del análisis cualitativo se identifican categorías teóricas asociadas al KFLM de los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional, las cuales, para esta sección, se presentarán en términos de dificultades.

- ***Dificultades para interpretar el razonamiento empleado por los estudiantes en sus respuestas:*** El análisis de las respuestas de los participantes permitió encontrar que estos poseen un limitado conocimiento didáctico para identificar elementos centrales presentes en razonamiento probabilístico de estudiantes hipotéticos. Específicamente, lo destacable es la poca presencia de los conocimientos didácticos relacionados con la interpretación del enunciado que realizan los estudiantes y las variables o elementos (conceptos y objetos probabilísticos) que toma en consideración.
- ***Dificultades para identificar los factores didácticos presentes en las respuestas de los estudiantes (justifica a partir de su propia respuesta):*** Otro de los resultados que se quieren mostrar es la limitación de conocimiento para interpretar el razonamiento empleado por los estudiantes. Esta dificultad radica en que los profesores toman como referencia principal y única su respuesta a la situación y no consideran otros factores. Por tanto, nosotros consideramos este tipo de justificación de factores didácticos como inadecuada, en el sentido de que, si la respuesta del participante fuese incorrecta, las descripciones a los razonamientos de los estudiantes no serían del todo válidas.
- ***Errores en la justificación de factores didácticos (limitación conocimiento matemático):*** En el análisis se encontró que las limitaciones de conocimientos matemáticos afectan directamente los conocimientos didácticos. Específicamente, en las descripciones que realizaban los participantes se encontró la presencia de sesgos, confusiones y falacias en probabilidad condicional. Esto concuerda con lo mencionado por Batanero (2015), quien menciona que estas dificultades se veían replicadas durante el proceso de enseñanza.
- ***Errores en la justificación de factores didácticos (limitación conocimiento didáctico):*** El análisis de las respuestas arrojó limitaciones en el conocimiento didáctico para describir el razonamiento empleado por los estudiantes hipotéticos, debido a que no reconocen las configuraciones cognitivas q estudiantes. Específicamente, los resultados muestran dificultades para reconocer la definición y uso que dan los estudiantes a los conceptos en probabilidad.

- ***Dificultad para identificar los conceptos y objetos probabilísticos que emplean los estudiantes en sus respuestas:*** Otros resultados más explícitos que surgieron durante el análisis fueron las dificultades de los casos para identificar los conceptos y objetos probabilísticos utilizados por los estudiantes hipotéticos en las respuestas a las situaciones.
- ***Dificultades para describir las respuestas correctas de los estudiantes:*** El análisis de las respuestas permitió encontrar que los participantes poseen dificultades para describir el razonamiento empleado por los estudiantes hipotéticos que respondieron correctamente, o las respuestas que consideraban los participantes como correctas. En esta dificultad, lo más común era que los casos hicieran una paráfrasis de las respuestas.

5.2.2 Resultados a partir de la perspectiva Top-Down

Para el Top-Down tomamos como referente teórico los indicadores del *KFLM* propuestos por Sosa et al. (2016) en las categorías: (1) *conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas con el contenido* y (2) *conocimiento de las formas de interacción del estudiante con el contenido matemático*. Dicho así, en esta perspectiva permanece abierta la idea de que los conceptos o elementos teóricos pueden sufrir desdoblamientos durante el proceso de análisis, esto con el fin de identificar nuevas categorías teóricas propias de los datos que surjan de manera natural y no forzada.

El análisis por medio de esta perspectiva siguió los siguientes pasos:

1. El análisis consideró inicialmente todos los indicadores propuestos para el *KFLM*
2. Utilizando cada uno de estos indicadores, la investigación analizó las evidencias del cuestionario y entrevista.
3. Para cada uno de los indicadores se seleccionaron las evidencias que guardaran relación directa y no forzada.
4. Para aquellas evidencias que no se pudieron codificar con base al referente teórico, se proceden a analizar por medio de la perspectiva Bottom-Up.
5. Por último, las nuevas categorías teóricas se establecen.

5.2.2.1 Categoría: fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido

Indicador 1: Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

El análisis de las respuestas permitió reconocer que los participantes identifican la incidencia que tiene la naturaleza aleatoria en el aprendizaje de conceptos probabilísticos. A partir de ello, mencionan que los estudiantes presentan dificultades para simbolizar las

probabilidades de los eventos aleatorios. Otra evidencia de este indicador fue que los casos poseen elementos de su conocimiento didáctico relacionado con las dificultades de los estudiantes para representar gráficamente los eventos aleatorios. Específicamente, ellos mencionan que la ubicación de los contenidos de operaciones entre conjuntos está en la asignatura de Matemáticas II y los de probabilidad están en Matemáticas VI, por esta razón, los participantes consideran que se genera esta dificultad. En términos generales, los participantes afirman que la probabilidad condicional es un concepto que propicia muchas dificultades en los estudiantes. Sin embargo, ellos no mencionan explícitamente a los factores matemáticos y didácticos que propician dichas necesidades y dificultades para el aprendizaje de este concepto.

Indicador 2: Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).

Con respecto a las confusiones matemáticas, son relativamente pocas las evidencias de conocimiento didáctico que reconocen los participantes. A pesar de ello, se rescatan dos aspectos: primero, algunos de los participantes mencionan que existen una confusión en la simbolización de eventos, debido a que el tema de operaciones entre conjuntos no se considera para este nivel. Dicho así, los casos destacan que los estudiantes en la simbolización y asignación de eventos probabilísticos confunden con mucha facilidad el evento condicional y el evento condicionante

Indicador 3: Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas.

El análisis encontró muy pocas evidencias del conocimiento didáctico de los participantes con respecto a este indicador. Los casos brindan descripciones superficiales del razonamiento empleado por los estudiantes hipotéticos y los errores o dificultades que pudieran cometer por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas. Dicho así, los casos estudiados no poseen conocimientos sobre las confusiones que tienen los estudiantes en probabilidad condicional.

Indicador 4: Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.

En el análisis de las respuestas a la Parte 2 del cuestionario, Fabiola y Gabriel dan evidencia de este indicador en su conocimiento didáctico al mencionar que los estudiantes hipotéticos tienden a generar imágenes inadecuadas de los eventos probabilísticos. Específicamente, ellos mencionan que es común encontrar que los estudiantes le dan igual asignación de probabilidad a todos los eventos de una situación (sesgo de equiprobabilidad o

falacia de la condicional transpuesta) o que consideren que todos los eventos aleatorios son de naturaleza simple.

Por otro lado, en la entrevista se ha identificado que los participantes Sara y Gabriel tienen dificultades para definir conceptos probabilísticos. Específicamente, estos casos poseen una idea inadecuada del concepto de probabilidad condicional, dado que afirman que la probabilidad condicional siempre es menor que la probabilidad simple y compuesta. Asimismo, Gabriel, Fabiola y Edgar presentan ideas erróneas sobre lo referente al concepto de independencia de eventos probabilísticos, al afirmar que, si una situación en probabilidad posee repetición, todos los eventos que contiene son independientes entre sí. En este orden de ideas, los casos poseen limitaciones en su conocimiento matemático

Indicador 5: Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.

Las respuestas de Mario a la entrevista semiestructurada permiten identificar que conoce de manera superficial los errores que algunos estudiantes pueden cometer en probabilidad condicional. El caso menciona que es común que los estudiantes perciban el aprendizaje de la probabilidad como la utilización mecánica de las fórmulas. Asimismo, Sara y Ricardo poseen en sus conocimientos estos mismos errores, debido a que aplican incorrectamente el teorema de Bayes. Específicamente, lo identificable son errores para calcular la probabilidad total asociada a las situaciones problema porque que no consideran la probabilidad de fallo. Dicho así, la investigación establece que no existe un dominio del contenido matemático de probabilidad condicional por parte de la mayoría de los participantes.

Indicador 6: Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.

El resultado de la entrevista arroja que los casos identifican dificultades en los estudiantes para reconocer contextos relacionados con la probabilidad condicional. Particularmente, Mario y Ricardo mencionan la necesidad de utilizar contextos cercanos a los estudiantes, debido a que consideran que los libros de texto hacen un uso excesivo de contextos relacionados con juegos de azar y dejan de lado otros contextos significativos para los estudiantes. Dicho así, los profesores reconocen la importancia del uso de contextos y analogías en el aprendizaje de la probabilidad condicional, pero su conocimiento es limitado en este aspecto.

De igual modo, Gabriel, Fabiola y Edgar presentan dificultades para reconocer y aplicar equivalencias en la resolución de problemas. Esto se debe a que los casos afirman que las situaciones aleatorias, como el juego de cartas, deben mencionar explícitamente si hay reposición o no, aún en casos en donde la situación menciona explícitamente que hay una sola

extracción. En este orden de ideas, los participantes poseen dificultades para reconocer cómo los estudiantes interpretan y aplican analogías en probabilidad.

5.2.2.2 Categoría: formas de interacción de los estudiantes con un contenido

Indicador 7: Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático mezcla del lenguaje común con el matemático).

Mario dio evidencias de este indicador en sus respuestas a la entrevista, al mencionar que el lenguaje utilizado por los estudiantes en clase de probabilidad da cuenta sobre el proceso de adquisición del contenido matemático. Asimismo, él reconoce que el profesor debe tomar en consideración este factor para interpretar e el papel de la intuición en el aprendizaje de los estudiantes, pues muchas veces este influye en el aprendizaje de la probabilidad condicional. Por tanto, el caso sabe interpretar el conocimiento o pensamiento matemático de sus estudiantes por medio del lenguaje que emplean

Pese a la evidencia anterior, el resto de participantes evidenciaron limitaciones con respecto a este indicador. Los profesores involucrados, en su gran mayoría, interpretaron las respuestas de los estudiantes hipotéticos a partir de su propia respuesta a la situación problema. Este resultado es una evidencia negativa en su conocimiento, puesto que el considerar únicamente su propia respuesta a la situación, hace que su descripción al razonamiento esté sesgada y no permita identificar errores, sesgos, falacias o dificultades presentes en las respuestas de los estudiantes. Asimismo, este hallazgo permitió identificar con detalle aspectos relacionados con el conocimiento matemático, debido a que los participantes evidenciaron dificultades, falacias y sesgos con respecto a contenidos en probabilidad condicional.

Un caso específico son las evidencias que proporciona Ricardo en sus respuestas al cuestionario. Este participante posee dificultades para interpretar el razonamiento matemático usado por el estudiante, puesto que toma de manera literal las respuestas de los estudiantes hipotéticos y no profundiza en los conocimientos o contenidos matemáticos que estos pudieran utilizar. Dicho así, este caso evidencia limitaciones en su conocimiento didáctico para interpretar las producciones de los estudiantes.

Indicador 8: Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.

El análisis de las respuestas arrojó que Mario menciona como la escritura del problema puede dificultar su resolución. El caso afirma que las situaciones problemas que involucran problemas de probabilidad condicional tienden a confundir a los estudiantes. Dicho así, el caso establece que los conectores que utilizan algunos condicionantes no son del todo explícitos, generando así dificultades para su simbolización y posterior resolución.

Por otro lado, lo evidenciado es que todos los participantes tuvieron errores relacionados con este indicador. Esto se debe a que los detalles de la resolución de las situaciones problema generaron una incorrecta interpretación de las situaciones por parte de los participantes. Este tipo de limitaciones hace que los participantes añadan nuevos eventos que no estaban considerados inicialmente en el fenómeno aleatorio, por ejemplo, el factor “reposición” en la extracción de cartas.

Indicador 9: Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.

El análisis de las respuestas a través de esta perspectiva no identificó la presencia de este indicador en el KFLM de los participantes. Sin embargo, el análisis identificó errores que cometieron los participantes que se relacionan con el déficit de conocimientos matemáticos relacionados con este indicador. Sara, Gabriel y Edgar usan de manera mecánica el principio de la multiplicación, debido a que no considera si los eventos de la situación son dependientes o independientes entre sí. Asimismo, Ricardo hace un uso incorrecto del teorema de Bayes, puesto que no considera inicialmente la probabilidad de fallo asociada a la situación, lo cual permite considerar que el participante no comprende realmente este teorema y sus partes. Por tal razón, los participantes evidenciaron limitaciones en su conocimiento matemático, lo cual propició que no se encontraran indicios de este indicador en su conocimiento.

5.2.3 Propuesta y discusión de nuevos indicadores de conocimiento

Los resultados permitieron identificar nuevas categorías teóricas relacionadas con el conocimiento didáctico del profesor para las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional. Dicho así, nosotros describimos a continuación las categorías teóricas en términos de indicadores de conocimiento que emergieron de esta investigación y su discusión con el estado actual del arte.

***KFLM10:** Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgos, falacias y confusiones.*

Los resultados de este estudio dan cuenta de valores reducidos de los índices de conocimiento de las características de aprendizaje para identificar fortalezas y dificultades de estudiantes asociadas a la probabilidad condicional. Específicamente, nosotros identificamos dificultades para reconocer falacias y confusiones presentes en las respuestas de estudiantes a problemas de probabilidad condicional. Los casos han utilizado estrategias erróneas para interpretar y describir el razonamiento de los estudiantes, entre las cuales se destacan: uso de variables externas a la situación; paráfrasis de las respuestas de los estudiantes; descripción de

la respuesta del estudiante hipotético con base en la solución del participante a la situación. A partir ello, nuestra propuesta es el indicador *KFLM10*.

Con relación a estos hallazgos, Vázquez (2014) encuentra que profesores en formación poseen limitaciones de conocimiento didáctico para interpretar y describir las configuraciones cognitivas presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos a situaciones en probabilidad. De igual modo, Ortiz, Batanero y Contreras (2012) identificaron dificultades para establecer el origen de dichos factores en las respuestas de estudiantes. Los resultados de nuestra investigación permiten detallar y matizar el conocimiento del profesor con respecto a la identificación falacias y confusiones presentes en el razonamiento probabilístico condicional de estudiantes de bachillerato.

KFLM11: Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos).

Otro de los resultados que destacamos son las limitaciones de conocimiento didáctico de los profesores para reconocer las expresiones lingüísticas que utilizan los estudiantes hipotéticos cuando se refieren a conceptos en probabilidad. Específicamente, numerosas dificultades de los profesores para interpretar las expresiones lingüísticas de los estudiantes a conceptos como probabilidad simple, compuesta, condicional, teorema de Bayes e independencia de eventos son notablemente evidentes. En consecuencia, los participantes interpretan incorrectamente las respuestas de los estudiantes, debido a que confunden las asignaciones que éstos realizan a cada uno de los eventos aleatorios simples, compuestos y condicionales. Con base ello, proponemos el indicador *KFLM11*.

Con relación a estos resultados, Huerta (2018) afirma que, desde la lingüística, el concepto de probabilidad condicional es difícil de identificar en situaciones en contexto, debido a que posee similitudes semánticas para cada uno de los eventos que contiene. Por su parte, Vázquez y Alsina (2015a) destacan la importancia de reconocer elementos lingüísticos en el aprendizaje de la probabilidad, dado que las expresiones verbales “comunes” que utilizan la mayoría de los estudiantes provienen de significados intuitivos en probabilidad. Nuestros resultados permiten esclarecer, desde un punto de vista específico de la probabilidad condicional, el valor de considerar elementos lingüísticos en el conocimiento del profesor para comprender las características de aprendizaje, específicamente en la interpretación de las producciones de estudiantes.

KFLM12: Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes.

Por otra parte, la mayoría de los casos poseen los conocimientos para identificar la influencia epistemológica que tienen los eventos aleatorios en el desarrollo del razonamiento

probabilístico, debido a que mencionan que la naturaleza de los eventos aleatorios genera dificultades para la interpretación de enunciados en problemas de probabilidad. A partir de lo anterior, nosotros proponemos el indicador *KFLM12*.

Con relación a estos resultados, Contreras (2011) afirma que los profesores de matemáticas poseen limitaciones en su conocimiento para identificar contenidos y variables didácticas que dificultan la resolución de problemas en probabilidad. Asimismo, Huerta (2018) menciona que el conocimiento de profesores sobre la resolución de problemas es muy limitado, debido que éstos no reconocen la influencia que tiene la naturaleza aleatoria de la probabilidad en la construcción de conocimiento en los estudiantes. Nuestros resultados concuerdan con estos hallazgos y permiten esclarecer y particularizar, en relación con el conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional, que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad influye negativamente en la resolución de problemas.

***KFLM13:** Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.*

***KFLM14:** Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.*

Finalmente, nuestros resultados dan cuenta de limitaciones del conocimiento de los profesores para identificar fortalezas y dificultades de los estudiantes en el concepto de probabilidad condicional. Encontramos que los casos reconocen las fortalezas posibles que trae, para el aprendizaje de la probabilidad, la consideración de las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios porque contribuyen a los procesos significación en el aula. Sin embargo, nosotros encontramos limitaciones en el conocimiento para reconocer las posibles dificultades que podrían causar estas experiencias durante el aprendizaje de la probabilidad condicional. Así, nosotros proponemos los indicadores *KFLM13* y *KFLM14*.

Con relación a estos resultados, Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) mencionan que los profesores presentan en su razonamiento probabilístico la presencia de falacias, sesgos y confusiones asociadas a la probabilidad condicional. Por su parte, Vásquez y Alsina (2015b) mencionan que los profesores poseen limitaciones en su conocimiento para interpretar y describir las configuraciones cognitivas presentes en las respuestas de estudiantes en problemas de probabilidad. Los resultados de esta investigación concuerdan con estos hallazgos; de igual modo, los resultados permiten avanzar en la distinción, desde un punto de vista específico, de las limitaciones de conocimiento del profesor para identificar confusiones, falacias y sesgo presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos a problemas de probabilidad condicional.

De esta manera, en la Tabla 12 se presentan los indicadores que se hallaron para las categorías de análisis del KFLM: *Conocimiento de fortalezas y dificultades de los estudiantes*

con un contenido matemático y Conocimiento de formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático.

Tabla 12

Indicadores de conocimiento propuestos para el KFLM

Indicadores de Conocimiento del KFLM	Categoría
<i>KFLM10.</i> Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgos, falacias y confusiones.	<i>Conocimiento de fortalezas y dificultades de los estudiantes con un contenido matemático</i>
<i>KFLM11.</i> Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos).	<i>Conocimiento de formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático</i>
<i>KFLM12.</i> Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes.	<i>Conocimiento de fortalezas y dificultades de los estudiantes con un contenido matemático</i>
<i>KFLM13.</i> Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.	<i>Conocimiento de formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático</i>
<i>KFLM14.</i> Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.	<i>Conocimiento de fortalezas y dificultades de los estudiantes con un contenido matemático</i>

Tabla 14

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, las cuales pretenden dar respuesta a la pregunta de investigación y objetivos planteados en el Capítulo 1. Cabe destacar que la forma en que se organizarán las conclusiones va a ser a través de seis apartados, los cuales son: Conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes con el contenido matemático, Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, formación de profesores, aportes teóricos y de método al MTSK, limitaciones y protecciones de la investigación y, por último, la reflexión de la investigación.

6.1 Conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional

El subdominio de conocimientos que es eje rector de esta investigación es el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de los Estudiantes. Éste considera el conocimiento que pone en juego el profesor para comprender las acciones que realiza el estudiante para resolver un determinado ejercicio o problema. Al respecto, Sosa (2011) menciona que el profesor utiliza este conocimiento para desarrollar habilidades específicas en los estudiantes. En específico, para esta investigación, se tomaron como referencia dos categorías de análisis:

- Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de contenido matemático
- Interacción de los estudiantes con el contenido matemático

Con base en los resultados, lo afirmable es que el Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM) que ponen en juego los participantes para responder el cuestionario y una entrevista semiestructurada es muy limitado. Esta afirmación guarda relación con la hipótesis de investigación y lo mencionado por García, Azcárate y Moreno (2006), quienes mencionan que el conocimiento del profesor está relacionado con la formación que tuvo como estudiante, se basa en lo empírico, los libros de texto y la propia experiencia. Enseguida, las razones que hacen llegar a esa afirmación se mencionan explícitamente:

En primera medida, los resultados del estudio de caso permiten inferir que los profesores de bachillerato poseen dificultades para identificar las falacias y confusiones relacionadas con el aprendizaje de la probabilidad condicional. Lo importante es mencionar que estos resultados guardan relación con los encontrados por Contreras (2011), Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) y Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012). En este orden de ideas, para esta investigación, dificultades de los profesores en su conocimiento para detectar las siguientes falacias y confusiones se identificaron:

- Falacia de eje de tiempo (Falk, 1989)

- Falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982)
- Confusión de sucesos independientes y mutuamente excluyentes (Kelly y Zwiers, 1986)
- Confusión de la probabilidad conjunta y condicional (Tversky y Kahneman, 1982)

En Vásquez (2018) se destaca el papel que tiene las experiencias previas de situaciones permeadas por el azar y su importancia en el desarrollo de una alfabetización probabilística en estudiantes. Asimismo, Vásquez y Alsina (2015a) señalan que este factor puede contribuir positivamente en la enseñanza de contenidos en probabilidad. A pesar de lo anterior, y con base en los resultados de la investigación, nosotros afirmamos que el conocimiento común de los profesores posee dificultades para identificar las posibles potencialidades y limitaciones que tienen las experiencias ante fenómenos aleatorios para el aprendizaje de los estudiantes.

Con respecto con la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad, Serradó, Cardeñoso & Azcarate (2005) mencionan que el tratamiento que se le debe brindar a la naturaleza de los conceptos probabilísticos debe de ser diferencial al de las matemáticas. Debido a que la naturaleza aleatoria incide fuertemente en el aprendizaje y puede propiciar dificultades en el desarrollo del razonamiento probabilístico (Batanero, 2005). En ese sentido, con base en los hallazgos de esta investigación, nosotros inferimos que los profesores poseen limitaciones para reconocer las dificultades que podría generar la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad.

Con relación a los campos de problemas asociados a la probabilidad, Gómez, Ortíz y Gea (2014) mencionan la importancia que tiene proponer contextos cotidianos en durante la enseñanza de la probabilidad. En ese sentido, Batanero (2006) menciona que una de las fortalezas de la probabilidad condicional es su aplicabilidad en diversos contextos cercanos a los estudiantes. A pesar de lo anterior y con base en los resultados de la investigación, nosotros consideramos que la mayoría de profesores que enseñan este tipo de contenidos poseen limitaciones para realizar una asociación entre los contextos cercanos a los estudiantes, experiencias previas y el concepto probabilidad condicional, lo cual se considera un punto clave en el aprendizaje de este concepto, por ejemplo, contextos de seguros.

En lo referente a la traducción del lenguaje natural a registros simbólicos, utilizada en la enseñanza de la probabilidad condicional. Batanero, Contreras y Díaz (2012) mencionan que éstos poseen similitudes semánticas que pueden propiciar en estudiantes errores en la interpretación y simbolización. En ese sentido, los hallazgos de la investigación permiten inferir que la mayoría de los casos no posee la experiencia y conocimientos didácticos para identificar en las producciones del estudiante cuándo éste posee dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

6.2 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Aun cuando el objetivo de esta investigación no es indagar, en términos generales, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para enseñar probabilidad. Concordamos con la visión de Carrillo et al. (2018), quien afirma que la delimitación que propone el modelo MTSK considera relaciones entre los subdominios, puesto que el conocimiento del profesor analógicamente está en forma de amalgama. En esta investigación fue pertinente mencionar subdominios del conocimiento del profesor que han sido identificados en los resultados.

Con respecto al conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy y Vásquez (2018) mencionan que este dominio de conocimiento es fundamental para el quehacer del profesor y el desarrollo de una alfabetización probabilística en los estudiantes. Sin embargo, los resultados de esta la investigación han mostrado diversas limitaciones en el conocimiento de los casos estudiados. A continuación, aquellos resultados que nos hacen llegar a tal afirmación de manera puntual.

En primer lugar, a partir de los resultados de la investigación se infiere que los profesores en activo poseen limitados conocimientos matemáticos para la definición de conceptos como independencia de eventos y probabilidad simple, compuesta y condicional. Estos mismos resultados han sido reportados por Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013), con la diferencia que 196 profesores en formación en España fueron involucrados.

Penalba, Posadas y Roig (2010) destacan la importancia que tienen los contextos para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional y el teorema de Bayes. Paralelo a lo anterior, los resultados de la investigación muestran que los profesores en activo únicamente identifican la probabilidad condicional en el contexto de los juegos de azar. Nosotros concluimos que los profesores poseen limitados conocimientos para reconocer aspectos relacionados con la fenomenología asociados al concepto de probabilidad condicional.

Escudero (2015) menciona que es fundamental que el conocimiento del profesor esté en la capacidad de reconocer las distintas conexiones que posee un contenido matemático con otros contenidos ubicados en distintos niveles educativos. Ello permite que el profesor comprenda los contenidos avanzados desde una perspectiva elemental y a su vez contribuya al desarrollo de herramientas avanzadas para la enseñanza de conceptos elementales. En ese sentido, con base en los resultados de la aplicación de los instrumentos de investigación, lo afirmable es que los profesores poseen limitados conocimientos para reconocer las conexiones matemáticas que posee el concepto de probabilidad condicional.

Con respecto al conocimiento didáctico, en el apartado anterior se han mencionado de manera explícita algunas conclusiones con respecto al Conocimiento de las Características de Aprendizaje de los estudiantes con la probabilidad condicional. Sin embargo, los hallazgos de la investigación han permitido identificar otros elementos didácticos del conocimiento del

profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional que consideramos importante mencionar. A continuación, cada uno de ellos se señala.

Ortíz, Mohamed, Serrano & Albanese (2017) mencionan que los libros de texto de matemáticas poseen limitaciones y genera problemáticas para el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes. Análogamente, los resultados de la investigación dan cuenta que el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional toma como referencia principal los libros de texto. Por esta razón, el conocimiento evidenciado por los participantes de los recursos asociados a este concepto es muy limitado.

Batanero et al. (2015) mencionan la importancia de que el profesor reconozca los conocimientos previos en el aprendizaje de la probabilidad. En ese sentido, los hallazgos de la investigación evidencian que los participantes reconocen conceptos previos importantes en el aprendizaje de la probabilidad condicional (Contreras, 2011; Díaz y De la Fuente, 2007; Díaz et al. 2012). En ese orden de ideas, el conocimiento de los profesores sobre los estándares curriculares asociados a la probabilidad condicional es el adecuado, debido a que identifican conceptos previos y posteriores de los estudiantes.

6.3 Formación de profesores

Con respecto a la disciplina de la formación de profesores, la investigación permite emitir conclusiones referentes a sus procesos formativos inicial y continuo de los profesores para la enseñanza de la probabilidad condicional.

En primera medida, los casos estudiados presentaron limitaciones de los participantes con respecto a los conocimientos matemáticos para la enseñanza de la probabilidad condicional. Específicamente, algunas relacionadas con la fenomenología, definiciones y conexiones entre conceptos (probabilidad simple y compuesta) se destacan. Por esta razón, la urgencia corresponde a la necesidad de mejorar los procesos de formación inicial y continua, enfatizando en el fortalecimiento de los conocimientos matemáticos por parte de los profesores.

En segunda medida, los casos permiten inferir que el conocimiento didáctico que poseen los profesores está asociado únicamente con a los libros de texto. A pesar de ello, nosotros consideramos que la interpretación de las respuestas de los estudiantes con respecto a las fortalezas, dificultades y formas de interacción que tienen los estudiantes con la probabilidad condicional, permite el diseño de estrategias didácticas que propician el aprendizaje de este concepto. Dicho así, esta investigación manifiesta la necesidad centrar la mirada en los procesos de formación del conocimiento didáctico, enfatizando en el conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes.

En tercera medida, la evaluación de conocimientos didácticos como punto de partida para el diseño de cursos de desarrollo profesional se considera. La implementación de este instrumento permitió identificar aspectos por mejorar los conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza de la probabilidad condicional de los participantes. En ese sentido,

nosotros consideramos que con los resultados obtenidos se pueden estructurar cursos de capacitación para los profesores.

6.4 Aportes teóricos y de método al MTSK

Desde una **perspectiva teórica**, los resultados de esta investigación han permitido identificar que existen múltiples relaciones del KFLM con los otros subdominios de conocimiento propuestos por el MTSK. Enseguida, aquellas relaciones identificadas se mencionan de manera puntual:

- **KoT.** Los aspectos fenomenológicos del contenido permiten identificar aspectos clave en la interacción del estudiante con el contenido.
- **KSM.** Las conexiones de simplificación guían al profesor a establecer si las dificultades de los estudiantes con el contenido matemático están relacionadas con un concepto anterior, por ejemplo, la probabilidad simple o compuesta.
- **KMT.** La adecuada selección de tareas, ejercicios y actividades permite que el estudiante interactúe ante el contenido matemático desde múltiples contextos cercanos a su cotidianidad.
- **KMLS.** El profesor debe de identificar el nivel de desarrollo conceptual y procedimental de los estudiantes en un determinado nivel educativo y como este debe verse reflejado en las respuestas de los estudiantes durante su aprendizaje.
- **KPM.** Con respecto a este subdominio no se encontraron implícita o explícitamente relaciones.

De igual modo, los resultados de la investigación han permitido identificar aspectos del conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes que no se toman en consideración en la delimitación de las categorías de análisis. En consecuencia, proponemos la ampliación o modificación de las categorías:

Para la categoría de *Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*, consideramos que es importante que reconozca el papel que juega la naturaleza de los eventos aleatorios o deterministas en el aprendizaje del concepto matemático y como éste puede generar dificultades o fortalezas en los estudiantes.

Asimismo, para la categoría *Conocimiento de las formas de interacción del estudiante con el contenido matemático*, proponemos considerar el factor de las experiencias previas de los estudiantes ante situaciones en contexto que integran el concepto matemático y como esto puede incidir positivamente o negativamente en la interacción de los estudiantes con la probabilidad condicional.

Desde una **perspectiva de método**, los resultados de la investigación han permitido concluir lo siguiente:

En los últimos decenios, las reformas curriculares han propuesto, entre otras cosas, la inclusión de contenidos de estadística y probabilidad en el currículo de matemáticas (Batanero, 2015). A raíz de estos cambios, investigadores se han cuestionado sobre los procesos formativos inicial y continuo de los profesores de matemáticas para la enseñanza de estos contenidos. Como consecuencia de lo anterior, esta investigación buscó centrarse en caracterizar el conocimiento que poseen profesores en activo para la enseñanza de la probabilidad condicional, utilizando como instrumento principal un cuestionario y como instrumento de análisis las perspectivas *Bottom-Up* y *Top-Down*.

Luego de implementar los métodos de investigación considerados en el Capítulo 4, nosotros consideramos pertinente mencionar algunos aportes, en términos de método, que permite realizar esta investigación al modelo MTSK. Según Montes, Aguilar, Escudero-Ávila, Moriel-Junior, Contreras y Climent (2017), este modelo considera desde sus bases la utilización de cuestionarios para comprender las creencias y conocimientos de los profesores ligados a cada concepto matemático. Sin embargo, la indagación bibliográfica que hemos realizado ha permitido identificar que son pocas las investigaciones que, hasta el momento, han utilizado este instrumento desde un enfoque cualitativo. Dicho así, brindamos un ejemplo del diseño y análisis de un cuestionario para comprender el conocimiento que posee un profesor de matemáticas en la enseñanza de la probabilidad condicional. Por lo tanto, este instrumento innovador permite reconocer indicadores nuevos del conocimiento del profesor, los cuales serían difíciles de identificar con otros instrumentos como las videograbaciones de clases, entrevistas o cuestionarios con preguntas cerradas.

El modelo MTSK considera en sus bases de método a la Teoría Fundamentada como unos enfoques para el análisis de la información más especializado. Específicamente, MTSK considera las perspectivas *Bottom-Up* y *Top-Down*, debido a su capacidad para analizar desde un enfoque dual los datos obtenidos. A raíz de esto, diversas investigaciones asociadas al grupo de investigación SIDM, han tomado como referencia ambas perspectivas para analizar las videograbaciones de clase y entrevistas semiestructuradas (Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017; Rosales-Ángeles, Flores-Medrano y Escudero-Ávila, 2018). A pesar de lo anterior, la indagación bibliográfica sugiere que no se han analizado los resultados de un cuestionario de conocimientos didácticos especializados del profesor por medio de las perspectivas de análisis *Bottom-Up* y *Top-Down*. Por esta razón, nosotros consideramos que esta investigación puede mostrar ejemplo de la utilización de estas perspectivas metodológicas para el análisis de las respuestas a los instrumentos y posterior reconocimiento de nuevos indicadores de conocimiento especializado.

6.5 Limitaciones y proyecciones de la investigación

Estudios como el nuestro contribuyen a la vinculación investigación-práctica y permiten conceptualizar teóricamente elementos subyacentes a la práctica del profesor. Sin embargo, nosotros consideramos que aún faltan estudios que permitan comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad, en particular

la condicional, y otros que indaguen el impacto que tienen estos conocimientos en su propia práctica.

En ese sentido, a continuación, mencionamos las proyecciones y limitaciones de esta investigación:

- Esta nueva propuesta de indicadores puede ser el primer paso para desarrollar una nueva corriente especializada de conocimientos de profesores para la enseñanza de la probabilidad.
- Los resultados encontrados en la investigación con respecto al conocimiento de las fortalezas y dificultades de los estudiantes en la probabilidad condicional pueden verse replicados en el diseño de planeaciones, situaciones didácticas o propuestas de aula para la enseñanza de este concepto en el aula de clases.
- Lo posible es realizar una nueva investigación del conocimiento del profesor utilizando tres instrumentos de recolección de información: videgrabaciones, cuestionario de conocimientos didácticos y entrevistas semiestructuradas. La triangulación de la información de estas tres técnicas y un correcto análisis didáctico permitirá identificar un panorama completo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.
- Resultaría significativo llevar a cabo una investigación que tome en consideración los conceptos de probabilidad simple, compuesta y condicional; esto permitiría tener un panorama global del conocimiento matemático y didáctico del profesor en la enseñanza de la probabilidad condicional.
- Con base en los resultados encontrados y los instrumentos de recolección de la información diseñados, lo posible es llevar a cabo investigaciones que estén enfocadas el diseño cursos de desarrollo profesional que permitan indagar el estado actual de conocimiento de los profesores e identificar oportunidades de mejora.
- Otro aspecto sobre el cual se podría profundizar y que no se abordó en la investigación son las creencias de los profesores para la enseñanza de la probabilidad. Este es un nuevo camino que se puede trabajar desde distintos puntos de vista y que aportaría significativamente al quehacer del profesor para la enseñanza de la probabilidad.

6.7 Reflexión Final

Antes de realizar este trabajo de investigación, yo tenía la creencia de que los conocimientos didácticos necesarios para los profesores estaban orientados a los métodos de enseñanza, currículo y recursos materiales o virtuales. También, yo creía que conocer los errores más frecuentes de los estudiantes conlleva a planificar correctamente clases de matemáticas y lograr el aprendizaje en los estudiantes del tema de la clase. Dicho así, la experiencias y conocimientos que había adquirido eran más que suficientes para desempeñar mi labor como profesor.

Después de realizar esta investigación, muchas son las enseñanzas y conocimientos que me han quedado. Con respecto al subdominio KFLM, ya cambié mi perspectiva del

conocimiento didáctico, puesto que el conocimiento de los profesores sobre la manera en que los estudiantes resuelven una determinada tarea o actividad en matemáticas, no era algo que considerara con la debida importancia. Ya me di cuenta de la importancia de reconocer, para el conocimiento del profesor, las fortalezas y dificultades de los estudiantes durante el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional y la forma en que estos interactúan con los contenidos probabilísticos.

Una de las enseñanzas que quisiera resaltar fue que me di cuenta de la gran incidencia que tiene la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad en la enseñanza y aprendizaje de estos contenidos. Yo considero de suma importancia hacer un especial tratamiento a esta característica epistemológica en los conocimientos de los profesores porque es causante de numerosos errores, sesgos, dificultades, falacias y confusiones en los estudiantes. Por esta razón, la enseñanza de estos contenidos de probabilidad debe recibir un tratamiento diferencial al de las matemáticas, dado que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con eventos aleatorios.

Otra de las enseñanzas que deja esta investigación es la fuerte incidencia que tienen las experiencias previas en la enseñanza de la probabilidad condicional. Esto cambió mi percepción sobre la enseñanza de los contenidos, porque de una u otra manera, los estudiantes ya cuentan con este tipo de experiencias y es nuestro deber desarrollar y corregir estos razonamientos probabilísticos que han surgido de manera empírica e independiente al aula de clases. Desde mi experiencia investigativa considero que este es uno de los aspectos que se ha dejado un poco de lado en la formación de los profesores y debe de retomarse en la formación inicial y continua.

Hoy, estando a punto de terminar esta maestría profesionalizante, me doy cuenta que no es posible que un docente sea capaz de tomar en cuenta todos los conocimientos para la enseñanza que engloba el tema de probabilidad. Esto se debe a que el profesor debe apegarse al currículo de matemáticas de su institución, por lo cual debe de encargarse de la enseñanza de otros temas en matemáticas, que también son muy importantes. Sin embargo, el darme este tipo de particularidades en la enseñanza de estos temas, me da un gran baño de humildad, al reconocer que son muchísimas cosas que debo mejorar para ser un buen profesional.

Para finalizar, el conocimiento del profesor para las características de aprendizaje de la probabilidad condicional me permitió reconocer diversos aspectos de la enseñanza de estos contenidos en el aula de clase. Mi esperanza es haber generado, con esta investigación, una pequeña pero significativa contribución a la enseñanza de este contenido, el cual ha sido un tema poco trabajado en la disciplina. Específicamente, los indicadores que hemos propuesto, pueden abrir nuevos caminos para el desarrollo de un nuevo modelo de conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad, cursos de desarrollo profesional de profesores en probabilidad y métodos, secuencias y recursos para la enseñanza de la probabilidad condicional.

7. REFERENCIAS

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado*. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
- Alsina, A. y Vásquez, C. (2016). Análisis de los conocimientos probabilísticos del profesorado de Educación Primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 16(1), 1-20.
- Azcárate, P. (1998). Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas. En L. Rico, & M. Sierra (Eds.). *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-33). Zamora: SEIEM.
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Maidenhead, Philadelphia: Open University Press.
- Batanero, C., Henry, M., y Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. En G.A Jones (Ed.), *Exploring Probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). New York, USA: Springer.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. Johannesburgo, Sudáfrica: International Commission on Mathematical Instruction.
- Batanero, C., Ortiz, J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44, 7-16.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. *Educação Matemática e Pesquisa*, 8(2), 197-223.
- Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA. *Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), 55-61.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10(1), 56, 71.

- Batanero, C. (2015). Investigación en didáctica de la probabilidad. En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante, España: Universidad de Alicante.
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. En CUREM 6, *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*. Uruguay: Montevideo.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J. Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Topical Survey series. Springer.
- Begué, N., Batanero, C., Gea, M., & Beltrán, P. (2017). Comprensión del Enfoque Frecuencial de la Probabilidad por Estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, J. Carrillo, *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.137-146). España: SEIEM.
- Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 12(2).
- Bizquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Brousseau, G. (1983), 'Les obstacles 'epistemologies et les problèmes en mathématiques'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Cañadas, G., Díaz, C., Batanero, C y Estepa, A. (2013). Precisión de los Estudiantes de Psicología en la Estimación de la Asociación. *Boletim de Educação Matemática*, 27(7), 759-778.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 136-253.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM
- Cuñat, R. (2008). Aplicación de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) al Estudio del Proceso de Creación de Empresas. *Memorias XX Congreso anual de AEDEM*, 1 (2), 44-56.

- Danisman, S., y Tanisli, D. (2017). Examination of Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Probability. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5 (2), 16-34.
- Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research*. London, Inglaterra: Sage.
- Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Revista Suma*, 48 (1), 45-50.
- Díaz, C. y De la Fuente, I. (2007) Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Revista REMA*, 12(1), 1-15.
- Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de Educación Secundaria. *BOLEMA*, 26(44), 1207-1225.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Eddy, D. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En Kahneman, D.; Slovic & Tversky, P. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press. 249-267.
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.
- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Espinoza, R., Pochulu, M. y Jorge, M. (2013). El análisis didáctico de textos escolares ¿qué herramientas proveen las diferentes líneas y enfoques en educación matemática?. En CIBEM (Eds.) *VII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Uruguay: Montevideo.
- Estrada, A. y Díaz, C. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO*, 44 (1), 48-58.
- Even, R. & Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics*. New York, NY: Springer.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En ICMI (Eds.), *Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Canada: International Statistical Institute.
- Fernandes, J., Gea, M., y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En C. Fernández,

- J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 178-187). Malaga: SEIEM.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, & M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, (pp. 39-63). New York: Springer.
- García, L., Azcárate, C., Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *RELIME*, 9(1), 85-116.
- García, J. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución. En J. M. Contreras, G., R. Cañadas, M., M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 417-424). Granada, España: Universidad de Granada.
- García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 5- 23.
- Glaser, B. & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory*. Chicago: Aldine Press.
- Glaser, B.G. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Mill Valley, California: Sociology Press.
- Godino, J.D., Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M. (Ed.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Gómez, E., Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, J. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91

- Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5(1), 49-71.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Guerrero, H. (2015). *Evaluación de conocimientos sobre esperanzamatemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Huerta, M. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 415-424). Salamanca, España: SEIEM.
- Huerta, M. y Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87-106.
- Huerta, M. (2018). Preparing teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, Advances in probability education research* (pp. 293-311). Hamburg: Springer.
- Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (909–955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Kelly, I. y Zwiers, F. (1986). Mutually exclusive and independence: Unraveling basic misconceptions in probability theory. En *International Conference on Teaching Statistics. Proceedings*. Victoria: International Statistical Institute, 96-100.
- Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Revista Educational Studies in Mathematics*, 23, 557–568.
- León-Gómez, N. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes: Un Caso con Futuros Profesores de Matemática. *Paradigma*, 29(2), 187-219.

- Lora, A., Cavadias, L., y Miranda, A. (2017). La teoría fundamentada en el marco de la investigación educativa. *Saber, ciencia y libertad*, 12(1), 10.
- Meneses, J., y Rodríguez, D. (2011). *El cuestionario y la entrevista*. Barcelona, España: Editorial UOC.
- Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Montes, M., Aguilar-González, A., Escudero-Avila, D., Moriel, J. Jr., Contreras, L.C., y Climent, N. (2017) (2017). Problemas de la Educación Matemática donde la contribución de MTSK puede ser relevante. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (pp. 68-70). Huelva: CGSE.
- Mordecki, E. (2007). *Notas de Probabilidad*. México: CIMAT.
- Morales, D. (2015). La teoría fundamentada (Grounded theory), metodología cualitativa de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 39, 119-146.
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. En memorias *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Córdoba, España.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma 05* (pp. 97-110). Trondheim, Noruega.
- Ortega J. (2009). *Elementos de Probabilidad y Estadística*: Notas de curso. México: CIMAT.
- Ortiz, J., Mohamed, N., Serrano, L., Albanese, V. (2017). La estimación de la media: análisis del lenguaje en libros de texto de bachillerato. En J. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. Callejo, J. Carrillo, C. León-Mantero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.
- Ortiz, J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 63-91
- Penalva, M. C., Posadas, J. A., y Roig, A. I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, 22(3), 23-54.

- Páramo, D. (2015). La teoría fundamentada (Grounded Theory), metodología cualitativa de investigación científica. *Pensamiento y gestión* 39, 119-146.
- Pérez-Echeverría, M. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.
- Pino-Fan, L., Font, V. y Godino, J.D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En Dolores, C., García, M., Hernández, J., Sosa, L. (Ed.). *Matemática Educativa: La formación de profesores*. México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero, 2014, p. 137-151.
- Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L. R., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rincón, L. (2014). *Introducción a la Probabilidad*. México: Las prensas de ciencias.
- Rivera, M. (2012). *Comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos en el Bachillerato*. Alemania: Editorial Académica Española.
- Rodríguez, G., Metodología de la investigación educativa. Málaga: Aljibe
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D. y Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos*, 44(1), 135-156.
- Rojas, N. (2015). *Caracterización del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rojas, N; Carrillo, J. y Flores, P. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *BOLEMA*, 29 (51), 143-166.
- Rosales-Angeles, B., Flores-Medrano, E., y Escudero-Avila, D. (2018). Aprendizaje basado en proyectos: explorando la caracterización personal del profesor de matemáticas. *Zetetike*, 26(3), 506-525.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education. Netherlands*. 8(3), p. 255-281.

- Salcedo, A., y Mosquera, J. (2008). Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado*, 23(2).
- Sánchez, E. (2009) La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, 21 (2), 39-77.
- Sánchez, E. (2010). Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. *RELIME*, 13(4), 409-422.
- Sánchez, E. y Batanero, C. (2011). Manejo de la información. En E. Sánchez (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Casos y perspectivas* (pp. 64-92). México, D. F: Secretaría de Educación Pública.
- Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*. Mahwah, NJ, Erlbaum.
- Sedlmeier, P. (2002). Improving statistical reasoning by using the right representational format. In B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 6). Cape Town: International Statistical Institute. CD ROM.
- SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México. Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2006). *Plan y programas de estudio. Secundaria*. México: Secretaria de Educación Pública.
- Serrano, L. Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria”. *Educación Matemática*, 10 (1), 55-82.
- Serradó, A., Cardeñoso, J. y Azcárate, P. (2005). Los Obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 59-81
- Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. En *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 2 (1), 1-35.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, cap. 5.,. En L. Rico (Eds), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Horsori, Barcelona.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis Doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

- Sosa, L., Aguayo, L., y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México D. F: Díaz de Santos.
- Sosa, L. y Ribeiro, C.M. (2014). Una experiencia de investigación y práctica en el contexto de una profesora de matemáticas de secundaria en México. En ICME (Eds.) *International Conference on research, practice and contexts in education*. Leiria: Portugal.
- Sosa, L. (2013). Tres perspectivas diferentes para mirar el conocimiento del profesor de matemáticas y la enseñanza. En C. Flores, G. Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1575-1583). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015) Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173-189.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28 (2), 151-174.
- Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. Frank K. Lester, Jr. (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 176-185). Hamburg: Springer.
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. España: Ediciones Morata.
- Stake, R. (2010). *Investigación Cualitativa: El estudio de cómo funcionan las cosas*. New York: The Guilford Press.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An epistemological Perspective*. EUA: Springer.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11 (4), 258-288.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En Kahneman, D., Slovic, P.; Tversky, A. (Eds.). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universiade de Rennes I.
- Vásquez, C. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de Educación Primaria. *Revista Ensino de Ciências e Matemática*, 9(2), 374-389.

- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015a). Una aproximación ontosemiótica al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad. En J.M. Contreras (eds.). *Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 131-149). Granada: Universidad de Granada.
- Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimiento didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo*. Tesis doctoral. Universidad de Girona, España.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015b). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.
- Vásquez, C y Angel, A. (2017). ¿Cómo desarrollar la alfabetización probabilística en Educación Primaria?. *Revista UNO de Didáctica de las Matemáticas*, 78(1), 24-29.
- Vásquez, C. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de Educación Primaria. *Revista Ensino de Ciências e Matemática*, 9(1), 374-389.
- Walker, R. (1985). *Applied qualitative research*. Londres: Gower
- Zvi, D., Makar, K. y Garfield J. (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Cham: Springer.

ANEXO 1: CUESTIONARIO



Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa
Cuestionario de Conocimientos Didácticos de
Probabilidad



Situación 1: *La selección mexicana*

Parte 1:

Problema: Supón que la Selección Mexicana de fútbol alcanza la final de la Copa de Oro en 2019. Para ganar la copa, hay que ganar cinco partidos. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

- México pierde el primer partido.
- México gana la Copa de Oro, pero pierde el primer partido.

Respuesta:

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas al Problema 1, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** Es más probable que la Selección de México pierda el primer partido, dado que es un suceso que puede ocurrir con mayor probabilidad.
- E2.** Es más probable que México gane la Copa de Oro, aún perdiendo el primer partido, dado que México es el máximo ganador histórico de la Copa de Oro. Por ello, es más probable que vuelva a ser campeón.
- E3.** Ambos sucesos son igual de probables.

S1E1:

S1E2:

S1E3:

Situación 2: *Una prueba diagnóstica y un paciente*

Parte 1

Problema: Una prueba de diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿En cuál de las siguientes predicciones tienes más confianza?

- Una persona que tiene cáncer ha dado positivo en la prueba de diagnóstico.
- Una persona que ha dado positivo en la prueba de diagnóstico realmente tiene cáncer.

Resultado:

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas al Problema 2, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** Es más probable la primera predicción, puesto que al realizar los estudios es más probable encontrar resultados positivos en una persona con cáncer.
- E2.** Es más probable la segunda predicción, puesto es más probable diagnosticar el cáncer en una persona que haya dado positivo en la prueba.
- E3.** Tengo la misma confianza en ambas predicciones.

S2E1:

S2E2:

S2E3:

Situación 3: Y ahora ¿qué pasará?

Parte 1:

Problema: Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas, en las cuales hay 4 tipos (diamantes, corazones, picas y tréboles), cada tipo tiene 13 cartas (números del 1 al 10, príncipe, reina y rey). Sea A el suceso “se extrae una carta de corazones” y B el suceso “se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

Respuesta:

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas al Problema 3, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** No son independientes porque en la baraja hay un rey de corazones, es decir, tiene ambas características y eso relaciona los sucesos, por ello son dependientes.
- E2.** Solo serán independientes si después de sacar la carta de la baraja y ver si es rey, se devuelve a la baraja y posteriormente se procede a sacar una segunda carta, para ver si es de corazones.
- E3.** Si son independientes. Esto se debe a que la probabilidad de obtener un rey dado que se ha extraído una carta de corazón es $\frac{1}{13}$ y es igual a la probabilidad de obtener un rey “a secas” es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Por ello, ser una carta de corazones “no afecta” la probabilidad de obtener un rey.

S3E1:

S3E2:

S3E3:

Situación 4: ¡Alerta! Se estrelló un taxi

Parte 1:

Problema: Un taxi se ve implicado en un accidente nocturno. Hay dos compañías de taxis en Zacatecas, el Rojo y el Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Rojos y el 15% Azules. Un testigo identificó al taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo en las mismas circunstancias de la noche del accidente y concluyó que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

Respuesta:

Parte 2:

De acuerdo con las respuestas a la Situación 4, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

- E1.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 80%, puesto que, si se da por hecho que el testigo lo vio, esa es la probabilidad con que identifica correctamente los colores del auto.
- E2.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 15%, dado que ese es el porcentaje de taxis de ese color en la ciudad.
- E3.** La probabilidad que el taxi implicado sea azul es del 12%, por el principio de la multiplicación, se hace el producto de la probabilidad que sea azul con la probabilidad que el testigo haya visto correctamente el color del auto.

$$15\% * 80\% = 12\%$$

- E4.** La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 41%, porque aplicando el teorema de Bayes, dividimos la probabilidad de que el carro sea azul y el testigo lo vio

S4E1:

S4E2:

S4E3:

S4E4:
