

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"



UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS



**SIGNIFICADOS DE LA DERIVADA EN EL
CURRÍCULUM OFICIAL E IMPARTIDO DE UNA
LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS**

Tesis para obtener el grado de
Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior

Presenta:

Alexis Castro Soto

Directores de Tesis:

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís

DEDICATORIA

Dedico la presente investigación, principalmente a Dios, por inspirar mi espíritu para la conclusión de esta tesis.

A mi madre y hermanos, son mi motor y siempre están a mi lado.

A mis abuelos maternos, por impulsarme a perseguir mi meta y desde niña introducirme en el mundo de las matemáticas. Al igual, que a mis tíos y primos por apoyarme y estar pendiente en esta etapa tan importante para mí.

A una persona muy especial para mí, José Antonio, porque siempre creyó en mí y me alentó cuando quería desistir.

A mis asesores de tesis quienes mostraron siempre interés por mi trabajo; nunca desistieron a enseñarme; y depositaron su confianza en mí.

A mis mejores amigos que me apoyaron y me siguieron en todo el proceso.

A los sinodales quienes estudiaron y aprobaron mi tesis.

Para ellos es esta dedicatoria de tesis, por su apoyo incondicional.



A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "SIGNIFICADOS DE LA DERIVADA EN EL CURRÍCULUM OFICIAL E IMPARTIDO DE UNA LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. Alexis Castro Soto egresada de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 08 de junio del 2021

Judith A Hde S.

Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez

Directora de tesis

Dr. Eduardo Briceño Solís

Dr. Eduardo Briceño Solís

Asesor de tesis

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 13 del mes de agosto del año 2021, la que suscribe Alexis Castro Soto alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Superior con número de matrícula 33146785; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado Significados de la derivada en el currículum oficial e impartido de una Licenciatura en Matemáticas bajo la dirección de la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y el Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Alexis Castro Soto

Nombre y Firma del estudiante

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó durante estos dos años para realizar mis estudios de maestría.



Alexis Castro Soto

Becaria No. 999390

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores: La Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y el Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís por su disposición, paciencia y apoyo tanto académico como emocional. Gracias por los conocimientos que me compartieron y la confianza que depositaron en mí.

A todos mis maestros de la Unidad Académica de Matemáticas: por el conocimiento brindado durante la Maestría. Pues a pesar de la pandemia, mostraron su profesionalismo al realizar su labor.

A mis compañeros de clase: Por el apoyo que me brindaron en todo momento y por aquellos momentos llenos de alegría.

A mi familia: Por creer siempre en mí; motivarme a perseguir mis metas; escucharme cuando lo necesitaba; y estar siempre a mi lado. Gracias por no abandonarme.

RESUMEN

En Matemática Educativa varias investigaciones sobre el cálculo dan cuenta de la complejidad de las nociones que lo conforman. Para el caso de la derivada, una dificultad es la multiplicidad de significados dado sus usos y formas de representarse en lo escolar; esto consecuentemente favorece la desconexión de éstos en los diferentes tipos del currículum (oficial, potencial, impartido y aprendido). Esto origina deficiencias en la comprensión de los estudiantes sobre la derivada y una desconexión de sus significados en la enseñanza. Las investigaciones en el Nivel Superior sobre los significados de un concepto matemático identificados en documentos oficiales y en lo impartido por el profesor son escasos. Por tal motivo, esta investigación presenta las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada identificados en el currículum oficial e impartido en una licenciatura de matemáticas. Para alcanzar el objetivo, se utilizó como sustento teórico la noción y tipos de currículum, y el significado de un concepto matemático escolar, adoptando un enfoque metodológico cualitativo-descriptivo. Los significados fueron organizados con base en dos fases del análisis didáctico: el análisis conceptual y de contenido. El primer análisis sirvió de referencia al identificar los significados de la derivada en cuatro documentos de corte histórico. Los significados de referencia identificados en estos documentos fueron: razón de cambio, límite del cociente incremental, pendiente de la recta tangente, máximos y mínimos, y velocidad instantánea. El segundo análisis permitió identificar y organizar los significados del tema de la derivada del programa de estudios de una Licenciatura en Matemáticas y en la observación de clase de una profesora. En el caso del programa de estudios se encontró a la derivada como límite del cociente incremental, las fórmulas de derivación, y la velocidad. En la observación de clase los significados potenciados por la profesora tienen como referente el límite del cociente incremental utilizando diversos sistemas de representación. En el análisis comparativo los resultados apuntan a la desconexión de los significados de la derivada en ambos tipos del currículum. El profesor al utilizar diversos sistemas de representación, complementa los significados propuestos del programa de estudios.

Palabras clave: análisis de contenido, análisis conceptual, Nivel Superior, Tipos de currículum.

ABSTRACT

In Educational Mathematics, several investigations on calculus reveal the complexity of the notions that make it up. In the case of the derivative, one difficulty is the multiplicity of meanings given their uses and ways of representing themselves in school; This consequently favors the disconnection of these in the different types of the curriculum (official, potential, taught and learned). This causes deficiencies in students' understanding of the derivative and a disconnect from its meanings in teaching. Research at the Higher Level on the meanings of a mathematical concept identified in official documents and in what is taught by the teacher are scarce. For this reason, this research presents the relationships and differences between the meanings of the derivative identified in the official curriculum and taught in a mathematics degree. To achieve the objective, the notion and types of curriculum were used as theoretical support, and the meaning of a school mathematical concept, adopting a qualitative-descriptive methodological approach. The meanings were organized based on two phases of the didactic analysis: the conceptual and content analysis. The first analysis served as a reference when identifying the meanings of the derivative in four historical documents. The reference meanings identified in these documents were: rate of change, limit of the incremental quotient, slope of the tangent line, maximums and minimums, and instantaneous velocity. The second analysis allowed us to identify and organize the meanings of the topic of the derivative of the study program of a Bachelor of Mathematics and in the observation of a teacher's class. In the case of the study program, the derivative was found as the limit of the incremental quotient, the derivation formulas, and the speed. In class observation, the meanings promoted by the teacher have as a reference the limit of the incremental quotient using various representation systems. In the comparative analysis, the results point to the disconnection of the meanings of the derivative in both types of the curriculum. By using various systems of representation, the teacher complements the proposed meanings of the study program.

Keywords: content analysis, conceptual analysis, Higher Level, Types of the curriculum.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	15
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES.....	20
1.1 Algunos estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R}	20
1.2 Estudios comparativos de un contenido matemático escolar en distintos tipos del currículum.....	22
1.3 Investigaciones relacionadas con los significados de la derivada.....	25
CAPÍTULO 2. LA MULTIPLICIDAD DE SIGNIFICADOS Y SU DESCONEXIÓN EN LOS TIPOS DEL CURRÍCULUM.....	32
2.1 PROBLEMÁTICA.....	32
2.2 PROBLEMA	33
2.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	33
2.4 HIPÓTESIS.....	34
2.5 OBJETIVO GENERAL Y ESPECÍFICOS	34
2.6 JUSTIFICACIÓN	34
2.7 ALCANCE.....	36
CAPÍTULO 3. MARCO CONCEPTUAL	37
3.1 Noción y tipos del currículum.....	37
3.1.1. Noción de currículum.....	37
3.1.2. Tipos de currículum.....	39
3.2 Noción de significado	42
3.2.1 Componentes del Significado.....	45
3.2.1.1 Estructura Conceptual	45
3.2.1.2. Sistemas de representación	49
3.2.1.3 Fenomenología.....	51
3.2.2 Tipos de significados	52
3.3 Los significados de un concepto matemático en el análisis conceptual y de contenido .	53
CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA.....	55
4.1 Método del análisis conceptual	57
4.2 Método del análisis de contenido	58
4.3 Análisis comparativo	59

4.4 Esquema metodológico	60
4.4.1 Fase 1. Etapas metodológicas para el análisis conceptual al desarrollo histórico de la derivada	61
4.4.2 Fase 2. Etapas metodológicas aplicadas al plan de estudios sintético de Cálculo I..	65
4.4.3 Fase 3. Etapas metodológicas aplicadas a la observación de clase a profesora..	69
4.4.4 Fase 4. Análisis comparativo aplicado a los significados de la derivada	72
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS CONCEPTUAL EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA DERIVADA	75
5.1 Desarrollo histórico de la derivada.....	75
5.2 Significados de la derivada en su desarrollo histórico.....	80
5.3 Referentes base de los significados de la derivada.....	101
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE CONTENIDO APLICADO AL PROGRAMA SINTÉTICO DE CÁLCULO I PARA EL TEMA DE DERIVADA	106
6.1 Descripción del programa sintético de estudios de Cálculo I.....	106
6.2 Significados globales de la derivada presentes en la unidad de competencia cinco	108
6.3 Significados locales de la derivada por bloques de desempeño.....	110
6.3.1 Bloque 1: Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua	111
6.3.2 Bloque II. Determina las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas.	112
6.3.3 Bloque III. Resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta.	113
6.3.4 Bloque IV. Identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diversos momentos y sus variaciones promedio.	116
6.4 Significados de la derivada en el programa sintético de Cálculo I	118
CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE CONTENIDO APLICADO A LA OBSERVACIÓN DE CLASE A PROFESORA.....	120
7.1 Significados en la observación de los videos de clase de una profesora.....	120
7.1.1 Análisis del video 1: Introducción al tema de la derivada (Parte 1)	120
7.1.2 Análisis del video 2: Introducción al tema de la derivada (Parte 2)	122
7.1.3 Análisis del video 3. Definición de la derivada de una función en un punto	123
7.2 Mapas conceptuales de los videos de la observación a profesora.....	124
CAPÍTULO 8. ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE EL CURRÍCULUM OFICIAL Y EL IMPARTIDO	129

8.1 Significados de la derivada en el currículum oficial	129
8.2 Significados de la derivada en el currículum impartido	130
8.3 Relaciones y diferencias de los significados de la derivada en el currículum oficial e impartido	131
CONCLUSIÓN	135
REFLEXIONES.....	137
REFERENCIAS	140

ÍNDICE DE FIGURAS

Elemento	Página
Figura 1. Dimensiones del currículum (Rico, 1998, p. 27)	38
Figura 2. Dimensiones del significado de un concepto matemático escolar (Gómez, 2007, p. 27)	43
Figura 3. Traducción entre sistemas de representación.....	46
Figura 4. Transformación sintáctica variante	47
Figura 5. Primeras dos categorías del análisis didáctico	53
Figura 6. Imagen del proceso metodológico.....	61
Figura 7. Ficha de registro para la recogida de datos en el desarrollo histórico	63
Figura 8. Ejemplo de codificación para el desarrollo histórico.....	64
Figura 9. Ejemplo de interpretación de un fragmento de Ruiz (2003).....	64
Figura 10. Ficha de registro para la recogida de datos.....	66
Figura 11. Ejemplo de codificación en el plan de estudios sintético de Cálculo I.....	67
Figura 12. Bloque I del Plan de estudios sintético de Cálculo I.....	68
Figura 13. Ejemplo de codificación de observación a clase.....	70
Figura 14. Fragmento extraído de las transcripciones	71
Figura 15. Formato de la tabla comparativa	73
Figura 16. Mapa conceptual de Apolonio de Pérgamo.....	81
Figura 17. Mapa conceptual de Arquímedes.....	82
Figura 18. Mapa conceptual Inicios del siglo XVI	83
Figura 19. Mapa conceptual de Fermat.....	85
Figura 20. Mapa conceptual de Newton	87
Figura 21. Mapa conceptual de Leibniz	89
Figura 22. Mapa conceptual de Maclaurin	91
Figura 23. Mapa conceptual de Euler	93
Figura 24. Mapa conceptual de D'Alembert.....	94
Figura 25. Mapa conceptual de Lagrange.....	96
Figura 26. Mapa conceptual de Bolzano	97
Figura 27. Mapa conceptual de Cauchy	99
Figura 28. Mapa conceptual de Ampère.....	100
Figura 29. Mapa conceptual de los referentes base	105
Figura 30. Unidad de competencia número cinco	107
Figura 31. Mapa conceptual del programa sintético de Cálculo I para el tema de la derivada	109
Figura 32. División de los desempeños.....	111
Figura 33. Mapa conceptual del bloque I.....	112
Figura 34. Mapa conceptual del bloque II.....	113
Figura 35. Mapa conceptual del bloque III	115
Figura 36. Mapa conceptual del bloque IV	117
Figura 37. Sistema de representación tabular para la resolución del problema.....	121

Figura 38. Inicio del tema de la derivada.....	121
Figura 39. Traducción sintáctica invariante.....	121
Figura 40. Transformación sintáctica variante	122
Figura 41. Ejemplo de la transformación sintáctica invariante.....	123
Figura 42. Imagen del tiro vertical de un proyectil	123
Figura 43. Pantalla de la profesora.....	124
Figura 44. Mapa conceptual de la observación de clase a profesora dándole prioridad al campo procedimental	126
Figura 45. Mapa conceptual de la observación de clase a profesora dándole prioridad al campo conceptual.....	128

ÍNDICE DE TABLAS

Elemento	Página
Tabla 1. Referentes de los significados de la derivada en diversas investigaciones.....	29
Tabla 2. Ideas sobre el significado del concepto del número 7 según la propuesta de Frege (1998)	44
Tabla 3. Ideas sobre los significados del concepto del número 7 según la propuesta de Rico (2012)	44
Tabla 4. Tabla de metodología.....	56
Tabla 5. Fuentes de información requeridas para el desarrollo histórico	62
Tabla 6. Codificar los libros.....	63
Tabla 7. Llenado de la ficha de registro con la información obtenida	65
Tabla 8. Llenado de la ficha de registro del Plan de estudios sintético de Cálculo I.....	68
Tabla 9. Llenado de la ficha de registro de la observación de clase	71
Tabla 10. Velocidad instantánea como referente base del significado de la derivada	102
Tabla 11. Pendiente de la recta tangente como un referente del significado de la derivada..	102
Tabla 12. Máximos y mínimos como un referente del significado de la derivada.....	103
Tabla 13. Razón de cambio como un referente base del significado de la derivada.....	103
Tabla 14. Límite del cociente incremental como un referente base del significado de la derivada.....	104
Tabla 15. Significados de la derivada potenciados en el programa sintético de Cálculo I	118
Tabla 16. Significados de referencia en el currículum oficial	130
Tabla 17. Significados de referencia en el currículum impartido	131
Tabla 18. Tabla comparativa sobre las componentes del significado y los campos de la estructura conceptual en el bloque 1	132
Tabla 19. Tabla comparativa de los referentes base en ambos tipos del currículum.....	133
Tabla 20. Tabla comparativa sobre los sistemas de representación entre ambos tipos del currículum	134
Tabla 21. Tabla comparativa sobre la fenomenología en ambos tipos del currículum	134

INTRODUCCIÓN

La presente investigación está centrada en la enseñanza y aprendizaje de una de las ramas de la matemática con mayor demanda en investigaciones: el cálculo diferencial. Una de las razones por la cual se ha estudiado frecuentemente, es por la complejidad de los conceptos que lo conforman (Pino-Fan, 2017). Las nociones clave del cálculo diferencial: función, límite, derivada, entre otros, desencadenan una serie de dificultades para su enseñanza y aprendizaje tanto en estudiantes como en profesores (Pino-Fan, 2017; Díaz, 2009). Pino-Fan (2017) y Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) reportan que el manejo, uso y comprensión de estos conceptos están basados en la memorización de algoritmos, fórmulas y definiciones.

Una dificultad relacionada con la complejidad de estos conceptos es la multiplicidad de sus significados. Estudios al respecto se han hecho presentes en: Valenzuela y Dolores (2012) para el tema de introducción de funciones; Claros, Sánchez y Coriat (2016) para el tema de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función; y Zamora (2015) para el tema de límites. Respecto al concepto de derivada, Gómez y Velasco (2017) y Castro et al. (2015) determinan que los profesores optan por impartir el significado que más les agrada. Además de darle la interpretación que ellos desean (Fernández-Plaza et al. 2016; Pino-Fan et al., 2013); según Gómez y Velasco (2017) esta interpretación depende de la comprensión que el profesor tenga sobre el concepto en cuestión.

Es importante mencionar que la multiplicidad de significados de los conceptos matemáticos se ha indagado desde diversos enfoques teóricos. Por ejemplo, Claros, Sánchez y Coriat (2016) realizan su estudio identificando los significados de las nociones de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función desde un enfoque fenomenológico. También se tiene el caso de Rico et al. (2016) quienes identifican los significados de la potencia de un número en un salón de clases del nivel primaria bajo el análisis didáctico. Valenzuela y Dolores (2012) para el tema de ecuaciones lineales de segundo orden e introducción a funciones y Zamora (2015) para el concepto de límite usando análisis didáctico.

Para el caso de la derivada, Pino-Fan et al. (2013) y Castro et al. (2015) identifican los significados desde el enfoque EOS. Por ejemplo, Pino-Fan et al. (2013), se enfocan en la comparación de los significados globales y curriculares en el nivel medio superior. En Castro et al. (2015) reportan los significados institucionales de la derivada identificados en un examen aplicado a 12 estudiantes del curso de Matemáticas I del curso durante el período 2006-2010. En estos estudios, se reportaron una desconexión entre los significados analizados de la derivada en el currículum potencial (libro de texto) y el currículum aprendido (los exámenes que fueron aplicados a 12 estudiantes). Biza (2019) identifica los significados de la derivada mediante un marco propuesto por Sfard en 2008; Code et al. (2014) bajo la teoría APOE; Morales (2018) con el análisis de contenido del análisis didáctico; Job y Scheinder (2014) desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico; y Zandieh (2000) bajo el marco desarrollado para el concepto de derivada.

Aunado a lo anterior, algunas investigaciones realizan estudios comparativos en diversos tipos del currículum evidenciando una desconexión entre los conocimientos matemáticos escolares. Por ejemplo, en Ibáñez y Dolores (2012) se analizan el currículum oficial (programas y planes de estudio) y potencial (libros de texto) comparando los contenidos en las materias de Matemáticas V y VI del Nivel Medio Superior. En Valenzuela y Dolores (2012) se comparan los objetivos y contenidos entre currículum oficial (planes y programas de estudio) e impartido (notas de los estudiantes) para la asignatura de Matemáticas II en una preparatoria de la Universidad Autónoma de Guerrero. Finalmente, Zavaleta y Dolores (2012) realizan un comparativo entre el currículum oficial (planes y programas de estudio) y aprendido (lo que los estudiantes al finalizar el curso aprendieron) sobre contenidos matemáticos como: cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones e incertidumbres en estudiantes del Bachillerato de una institución del sur de México. Estas investigaciones, utilizan la clasificación de currículum propuesta en Alsina (2000), adoptada en la presente investigación. La cual consiste en proponer los siguientes tipos de currículum: oficial (programas de estudio y documentos oficiales); potencial (libros de texto, material y documentos publicados por los docentes); impartido (lo que imparte el profesor en el aula de clases); y aprendido (referido a lo que el estudiante ha aprendido).

Tanto en los estudios sobre el currículum como en el de los significados de la derivada se evidencia esta ruptura entre los tipos del currículum y los significados de la derivada presentes en ellos. Argumentan que la componente simbólica es favorecida por profesores en sus aulas, incluso que la parte geométrica no es promovida por los programas de estudios. La preferencia por algunos significados depende del enfoque teórico que se adopte. Esta desconexión tiene como una consecuencia la deficiencia en el aprendizaje sobre el concepto de la derivada (Pino-Fan et al., 2013). Sin embargo, los estudios sobre los significados de la derivada y tipos de currículum en su mayoría están enfocados en el Nivel Medio Superior y en dos tipos de currículum: potencial (libros de texto) y aprendido (referente al conocimiento que el estudiante adquirió). Por lo anterior, surge el interés de indagar cuáles son las relaciones y diferencias de los significados de la derivada de una función real de una variable real en el Nivel Superior en los dos tipos del currículum: el oficial y el impartido.

Así, el objetivo general de la presente investigación es describir las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada potenciados en el currículum oficial (programa de la asignatura donde se introduce el concepto de derivada) e impartido (las clases donde el profesor imparte el tema de derivada). Para ello se proponen los siguientes objetivos específicos.

- Identificar y organizar los significados de la derivada en el desarrollo histórico de la noción de derivada, aplicando el análisis conceptual sobre el concepto.
- Identificar y organizar los significados de la derivada de una función de una variable planteados en el programa de estudios de la unidad didáctica Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquellos

promovidos en el aula de clase; en ambos casos se hace uso del análisis de contenido sobre el tema en cuestión.

- Y finalmente, comparar los significados potenciados e impartidos identificados en los objetivos anteriores.

Se considera que la multiplicidad de los significados de la derivada de una función de una variable podría implicar diferencias en cómo son potenciados en el currículum oficial e impartido. Específicamente, es posible que el profesor tienda a complementar los significados de la derivada en una licenciatura en matemáticas, dándole mayor importancia a aquellos que él conoce. De igual manera considerando las tres componentes que conforman el significado de un concepto matemático propuestas por Rico (2012), probablemente la componente simbólica y el contexto matemático están potenciados con mayor frecuencia, debido a naturaleza de la carrera. Sin embargo, identificar los fenómenos y situaciones dentro del contexto matemático que dan sentido al concepto de la derivada en una carrera de matemáticas muestra claridad respecto a los significados de la derivada que podrían formar parte en la formación de los licenciados de matemáticas a diferencia de aquellos que se han establecido en el Nivel Medio Superior.

Para este estudio se toma como referente teórico dos conceptos claves: currículum y significado de un concepto matemático escolar. La definición de currículum adoptada en esta investigación es toda aquella actividad que considere el hecho de planificar una formación (Rico, 1995). Así mismo, los tipos de currículum propuestos por Alsina (2000): currículum oficial (documentos oficiales dados por autoridades educativas), potencial (libros de texto, materiales didácticos, publicaciones de los profesores, entre otros), impartido (todo lo referente a lo que el profesor muestra en el aula) y aprendido (aquello que el estudiante aprende). Para la noción de significado de un concepto matemático se considera la propuesta de Rico (2012), conformado por tres componentes: la estructura conceptual, sistemas de representación y la fenomenología. Además, se incluyen otras posturas con respecto a las definiciones clave y se discuten los conceptos adoptados.

El enfoque metodológico es de corte cualitativo-descriptivo. Está conformado por tres métodos: análisis conceptual y de contenido propuestos en Rico (2013) y el comparativo propuesto por Makón (2004). Para el análisis conceptual, se propone tratar de eliminar inconsistencias y faltas de precisión entre los significados de la derivada (Rico y Fernández-Cano, 2013). Por lo tanto, se utilizan cuatro fuentes de información de corte histórico sobre la noción de derivada, sin proponer ser exhaustivos. Teniendo como referente los resultados del análisis conceptual se procederá a realizar el análisis de contenido al programa de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas y para la observación directa no participante de clase a una profesora que imparte el tema de la derivada en la misma licenciatura. Finalmente, en el análisis comparativo, se mostrarán las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada recopilados en el plan de estudios de la materia de Cálculo I y de la observación de clase a profesora.

El estudio brinda evidencia de las relaciones y diferencias de los significados de la derivada propuestos en el programa de la asignatura y los potenciados por una profesora experta, en una licenciatura en matemáticas; en ambos casos se tiene como referencia los significados identificados en el análisis conceptual realizado a cuatro documentos de corte histórico. Los resultados dan evidencia de los siguientes referentes base para los significados de la derivada: límite del cociente incremental, razón de cambio, pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea, y máximos y mínimos. En algunos significados, se muestra evidencia de la falta de alguna de las tres componentes del significado de un concepto matemático como es el caso del programa sintético de estudios para el tema de la derivada. En la observación de clases no sucede eso. Al contrario, los sistemas de representación son variados. La similitud entre ambos es que con frecuencia muestran a la derivada como el límite del cociente incremental.

Esta información es útil para los profesores de matemáticas que interpretan y concretan tanto los programas de estudio como su propio discurso para el diseño de su plan de clases y la actuación en el aula. Es importante realizar este estudio, debido a las dificultades causadas por la multiplicidad de significados de la derivada de una función de una variable y la desconexión de los significados (Castro et al., 2015; Díaz, 2009; Sánchez-Matamoros et al., 2006; Silva, 2006) en los tipos del currículum. Aunado a lo anterior, este tipo de estudios son una línea vigente de investigación en diversos niveles educativos y para diversos conceptos matemáticos según lo menciona Pino-Fan (2017). De igual manera porque la mayoría de los estudios sobre significados, consultados para esta investigación, están centrados en el Nivel Medio Superior y es escasa la información que se tiene respecto al Nivel Superior.

El desarrollo de esta tesis se presenta en ocho apartados que a continuación se describen:

En el primer capítulo, se muestra la revisión de antecedentes que se centra en lo que se ha estudiado sobre la multiplicidad de los significados de un concepto matemático y las dificultades en la enseñanza y aprendizaje tanto en profesores como en alumnos sobre esos conceptos matemáticos; que es lo que faltaría por investigar sobre el tema de los significados de la derivada con la finalidad de justificar la pertinencia del presente estudio, así como identificar la problemática que se va abordar.

En el capítulo dos, se describe el planteamiento del problema centrado en la multiplicidad de significados de un concepto matemático más la desconexión de los significados en diversos tipos del currículum, lo que influye en el desempeño académico de los estudiantes. De lo anterior, surge la pregunta de investigación haciendo énfasis en conocer las relaciones y diferencias de los significados de la derivada en dos tipos del currículum para una licenciatura de matemáticas. Para dar respuesta a la pregunta de investigación se plantean objetivos generales y específicos y finalmente se expone la importancia de realizar este tipo de estudios.

En el capítulo tres, son desarrollados los conceptos centrales en la investigación: currículum y significado. Para ello, se presentan algunas posturas teóricas de estas definiciones y se discute

aquella que se adopta en la investigación. Las nociones que se adoptan en esta investigación son la de currículum propuesta en Rico (1998) y para el significado de un concepto matemático la expuesta en Rico (2012). También son considerados los tipos del currículum propuestos por Alsina (2000) y la relación que existe entre ellos.

En el capítulo cuatro, se presenta la metodología que se va a utilizar para la investigación. El estudio tiene un enfoque cualitativo-descriptivo (Kothari, 2004). Dado el objetivo general, se tomarán en cuenta cuatro fases, basadas en los objetivos específicos. Para el análisis, se hará uso de tres métodos: el análisis conceptual y de contenido del análisis didáctico bajo las ideas de Rico y Fernández-Cano (2013); y el método comparativo propuesto por Makón (2004). Algunas de las técnicas que se utilizarán son la investigación documental, la observación directa no participante a una profesora, el análisis de la observación de clase y el contraste de contexto. Entre los instrumentos a utilizar están: las fichas de registro; el video; y una tabla comparativa.

En el capítulo cinco, se muestran resultados parciales de la aplicación del análisis conceptual a una primera indagación documental sobre el desarrollo histórico de la derivada. Ahora, se presentan algunos de los componentes de la estructura conceptual que conforman los significados de la derivada que se han identificado hasta el momento y que le dieron origen al concepto matemático en cuestión y los posteriores en donde es aplicable el concepto matemático. Así como la descripción de esos significados bajo el referente teórico.

En el capítulo seis, se muestra evidencia de los resultados parciales de la aplicación del análisis de contenido al currículum oficial (programa sintético de estudios de cálculo I) de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas y la descripción de esos significados bajo el referente teórico utilizado.

El capítulo siete, se encuentran los resultados correspondientes a la aplicación del análisis de contenido aplicado a los videos de la observación de clase a la profesora titular de la materia de Cálculo I. En este capítulo se presenta la descripción y organización de dichos significados presentados en el currículum impartido con base en el referente teórico utilizado.

El capítulo ocho, se enfoca en presentar las relaciones y diferencias de los significados de la derivada correspondientes a la aplicación del análisis comparativo en el currículum oficial e impartido de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de Universidad Autónoma de Zacatecas.

Finalmente, se presenta la conclusión de la presente investigación, centrada en responder la pregunta de investigación de la tesis. De igual manera son mostradas las reflexiones, en donde se muestra la experiencia al realizar el presente trabajo, las limitaciones y áreas de oportunidad para futuras investigaciones. Las referencias están localizadas en la parte final de la presente tesis.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

En este apartado, se expone la revisión de literatura relacionada con la investigación que se propone. Este capítulo está dividido en tres secciones: estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de derivada de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , donde se pretende recopilar información sobre la importancia de cómo se enseña y cómo se aprende la noción de derivada, así como las problemáticas con las que se enfrentan tanto los profesores como los estudiantes con este objeto matemático. En segundo lugar, se presentan estudios comparativos sobre los significados o concepciones de un contenido matemático escolar en distintos tipos del currículum, para contestar a las siguientes preguntas: ¿por qué se considera un estudio comparativo en esta investigación?, ¿cómo se ha llevado a cabo esos estudios comparativos en los significados de otros conceptos matemáticos? Finalmente, se presentan investigaciones relacionadas con los significados de la derivada en diversos tipos del currículum para prestar atención a los alcances y limitaciones de estos estudios y encontrar áreas de oportunidad.

1.1 Algunos estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R}

En Vrancken y Engler (2013) se menciona que el cálculo es una de las ramas de la matemática en la que los procesos de enseñanza y aprendizaje causa mayores problemas, el estudiante puede llegar a resolver ejercicios y problemas sencillos, pero al ingresar a la disciplina matemática le surgen dificultades para comprender conceptos y métodos de pensamiento que rigen este campo. Su investigación, se centró en observar de qué manera los estudiantes construyen el concepto de derivada tomando en cuenta la visualización y sus representaciones. Concluyen que el concepto de derivada, abstracto, enseñando por un límite estructurado con rigor matemático representa la parte algebraica y carece de otras representaciones como la geométrica. Consecuentemente, los estudiantes no visualizaban y reconocían las diferentes utilidades del concepto, y no alcanzaban la comprensión del concepto de derivada. Se puede afirmar que esto aún persiste en estudiantes de nivel superior, ya que no reconocen el significado del concepto desde la representación geométrica o gráfica (Briceño, Sánchez y Espino 2018). Fenomenológicamente, el discurso de los estudiantes se encuentra en contextos puramente matemáticos cuya representación primordial es la algebraica o numérica, sin relacionarse con la representación geométrica.

Törner, Potari y Zachariades (2014) detectaron una reducción del contenido de cálculo en los desarrollos curriculares. Para su enseñanza se han integrado el uso de herramientas digitales, pero no deja de ser una enseñanza tradicional que sólo se centra en aspectos procesales del conocimiento. La enseñanza tradicional incluso en el Nivel Superior está muy lejos de lo que

los estudiantes entienden. Además, reporta que el estudio del concepto de derivada se basa en una noción intuitiva de límite, se enfatiza la práctica de algoritmos y procedimientos.

Syahrir et al. (2019) argumentan sobre el proceso de aprendizaje en el aula que generalmente se dirige a la capacidad de los estudiantes para memorizar información, el cerebro de los estudiantes se ve obligado a recordar y atesorar una variedad de información sin tener que comprender la información que recuerdan y relacionarla con la vida cotidiana. Así mismo, Pino-Fan (2017) menciona la importancia del cálculo remarcando los usos que se le da a los conceptos clave como los de función, límite y derivada. La complejidad de estos conceptos matemáticos, dificultan la enseñanza y aprendizaje tanto en profesores como en estudiantes. La enseñanza de estos conceptos se concentra en la resolución de problemas y los métodos utilizados, así como la memorización de definiciones y algoritmos. Su investigación se basa en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Concluye la importancia de conocer los significados de los conceptos clave del cálculo porque la información existente es escasa y las competencias didáctico- matemáticas relacionadas, pues por su propia naturaleza desencadena una serie de dificultades para una mayor comprensión del concepto.

Artigue (1995) mencionó que existen dificultades en los estudiantes para la comprensión satisfactoria de algún concepto matemático, a pesar de que se les puede enseñar a realizar los cálculos de forma mecánica en particular, el caso de la derivada. De igual manera, Díaz (2009) coincide con esto, ya que la forma mecánica de abordar la noción de derivada, promovida generalmente por los profesores, y la memorización de algoritmos y definiciones, tienden a dificultar su comprensión. Al igual que la autora, Montiel (2005) menciona que la enseñanza y aprendizaje se centra más en los cálculos numéricos y algebraicos abordando el concepto de manera rigurosa con su estructura matemática como tal. Sin embargo, la lucha diaria de los maestros con un enfoque conceptual; tratando de establecer las relaciones entre lo conceptual y lo procesal es algo que existe (Code et al., 2014), esto lleva a dificultades en la aplicación del concepto de derivada y su representación con la recta tangente, debido a que según las interpretaciones que realizan los profesores existen diferencias conceptuales.

Anteriormente esto ya ha sido mencionado por Montiel (2005) donde se argumentó que la noción de derivada no puede reducirse a una sola definición por la diversidad de aplicaciones que ésta tiene. Se puede considerar que esto puede ser base de errores y dificultades como los reportados en Sánchez-Matamoros et al. (2008) que se detecta en tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la derivada: relación entre el concepto de razón de cambio y cociente incremental donde se olvida de lo algorítmico y lo estático; los sistemas de representación; y relación entre la derivada de una función, la función derivada y el operador derivada.

Retomando a Sánchez-Matamoros et al. (2008) muestran la influencia que tienen los contextos, entendiendo estos como el conjunto de situaciones en donde se presenta el concepto, pues los estudiantes no conectan el concepto de derivada vinculado de un contexto a otro. Realizan comentarios con base en la comprensión del concepto de derivada,

mencionan que la comprensión del concepto se va alcanzando, cuando los estudiantes reconozcan y construyan los significados de razón, límite y función en diversos contextos. Ellos argumentan que los modos de representación gráfico y analítico influyen en la construcción de los significados que hacen los alumnos, debido a que se consideran como modos separados al momento de aplicar algoritmos sin relación. Lo anterior, es mencionado porque identificaron la dificultad de que, al dotar de significado gráfico a la derivada, los estudiantes tienden a confundirla con el eje ordenado.

A propósito de los gráficos, Briceño, Hernández y Espino (2018) indagan acerca de cómo los estudiantes interpretan a la derivada desde un enfoque gráfico. El objetivo de la investigación es identificar las ideas, pensamientos y conceptos que los estudiantes de nivel superior tienen con respecto a la noción de derivada. Para lograr el objetivo ellos realizan un cuestionario de actividades a 11 estudiantes de segundo semestre de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Reportan que la derivada se aborda como un límite, pero sin sentido, argumentan que los estudiantes siguen pensando que la noción tangente es similar a cómo es impartido en el nivel medio superior. Los estudiantes muestran evidencia de que la forma en que trabajan es de manera algebraica y con pocos argumentos desde una representación gráfica. En consecuencia, los estudiantes relacionan a la derivada con lo algebraico; reglas de derivación; la fórmula del límite.

Sin embargo, en los profesores también se presenta esta situación, en Rodríguez-Nieto y Rodríguez-Vázquez (2019), se da evidencia de las concepciones que los profesores en formación y en servicio tienen con respecto al concepto de derivada. Ellos aplicaron una entrevista a dos profesores de matemáticas, basada en tareas y un instrumento con cinco tareas. Los resultados muestran que los futuros profesores conciben la derivada como la pendiente de la recta tangente y como el límite del cociente incremental. Sin embargo, al momento de resolver problemas, uno de los profesores presenta dificultades para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función, por sus concepciones alternativas asociadas a la derivada.

Con los antecedentes propuestos en esta sección podemos concluir que, en efecto, el concepto de la derivada de una función es clave dentro del campo del cálculo diferencial, porque con dicho concepto se estudian los cambios de un fenómeno. Sin embargo, su enseñanza y aprendizaje presentan algunas dificultades que están ligadas con el desempeño académico del estudiante. La revisión evidencia una enseñanza que favorece la representación simbólica, alejado de conectarse con otros sistemas de representación como la geométrica. Estas representaciones en sí mismas conllevan a una diversidad de significados en cada una de ellas, con diversos usos, es decir estamos ante un sistema de significados en lo escolar que muestra desconexión. Es por eso que se problematiza la existencia de una multiplicidad de significados para dicho concepto lo cual requiere analizar sus relaciones entre los tipos de currículo como se muestra a continuación.

1.2 Estudios comparativos de un contenido matemático escolar en distintos tipos del currículum

Esta sección indaga acerca de las investigaciones en donde se han hecho estudios comparativos en diversos tipos del currículum. De tal manera, que se pueda observar cómo se han llevado a cabo esos estudios comparativos y sobre lo que se ha investigado al respecto.

En Fernández-Plaza et al. (2016) se analizó e interpretó los significados de tres conceptos matemáticos en formación de profesores: La fracción; razones trigonométricas; números enteros. Para su estudio aplican un cuestionario a tres grupos diferentes de estudiantes y de profesores en formación. Además de utilizar el análisis de contenido y didáctico. Los autores reportan que los profesores toman la iniciativa de enriquecer el tema matemático que abordan utilizando el significado que a ellos les gusta. Por lo tanto, describen que esta toma de iniciativa infiere concepciones con distintos niveles de complejidad para su comprensión. Finalmente, ellos aportan una propuesta para el estudio del significado de los conceptos matemáticos escolares que inciden en la enseñanza y aprendizaje. Los autores determinan que los estudiantes organizan sus conocimientos de acuerdo a su comprensión en clase y la interpretación de los significados de acuerdo con las componentes de un concepto matemático propuesto por Rico (2012).

Una investigación que reporta sobre los significados de un concepto matemático en distintos tipos es Castro-Rodríguez et al. (2015), quienes realizan un estudio comparativo de programas de estudio de España entre 1945-2014 de significados de los números racionales. La matemática que propone el currículum oficial es austera, su estructura está basada en poca información teórica y preponderante en las destrezas y algoritmos del cálculo. Provocando en los estudiantes un aprendizaje repetitivo y promoviendo la memorización de procesos de los números racionales. Mencionan además que no promueven el cálculo mental, a pesar, de ser una habilidad reconocida a inicios del siglo XX.

La investigación de Valenzuela y Dolores (2012) estableció la relación entre currículum oficial e impartido particularmente para los temas de ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado e introducción a funciones. En su estudio, se reporta el incumplimiento de los objetivos planteados en los programas de estudio y lo que el profesor imparte. La consecuencia que esto provoca son deficiencias en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues argumentan que los alumnos no tienen comprensión sobre estos conceptos, pues se basan sólo en realizar ejercicios y mecanizarlos. Ellos proponen que sería importante estudiar los materiales que el profesor utiliza para impartir su clase.

Zamora (2015) realizó un estudio comparativo entre el currículum oficial y potencial con respecto a las competencias que se favorecen en la noción de límite. Concluye que existen diferencias entre las competencias que se potencian en los libros de texto y las que propone el currículum oficial en cuanto a los sistemas de representación y el papel que juegan dentro de la construcción de cada significado que se construye, además, la fenomenología utilizada para darle sentido al límite. De la misma manera, Morales (2018) realizó un estudio comparativo de los significados de la noción de derivada presentes en los programas de estudio concretado dentro del Marco Curricular Común (MCC), que propone la Reforma

Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) en México y libros de texto propuestos por los programas de estudio o utilizados por los profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ), en su comparativo expresa la desconexión entre los significados presentes en el currículum oficial (programas de estudios) y currículum potencial (libros de texto de los cuatro profesores utilizados en sus planeaciones de clase).

En Ibáñez y Dolores (2012) se realizó un estudio comparativo entre el currículum oficial y potencial de la matemática escolar, es decir los conocimientos matemáticos que se llevan al aula. En esta investigación centran la atención en el campo del cálculo tanto diferencial como integral. Ellos observaron que existen diferencias marcadas entre los objetivos planteados en el currículum oficial y lo que los libros de texto promueven, es decir, los libros de texto contienen definiciones débiles y los ejercicios carecen de intencionalidad en los temas de función y derivada. Menciona algunas diferencias, por ejemplo, en el plan de estudios marca que se debe potencializar más la noción de función, pero en los libros de texto analizados no promueven ejercicios para apoyar este objetivo. De igual manera para la noción de integral, los textos muestran deficiencia en las nociones y los ejercicios carecen de intencionalidad.

Feudel (2019) realiza una investigación sobre la derivada en economía entre libros de economía y de matemáticas. El autor remarca que el concepto juega un papel importante en economía. Por ejemplo, en teorías económicas como la producción o la teoría de costos. Los conocimientos que se requieren sobre la derivada son: la interpretación en economía sobre la derivada y su conexión con la matemática mediante aproximación lineal; la representación geométrica de la derivada como pendiente de la línea tangente; la conexión entre la derivada y la monotonidad / convexidad; criterios para valores óptimos que involucran la derivada; y las reglas de diferenciación. La forma en que se utiliza la derivada en los libros de texto de economía a menudo no coincide con la que se enseña en los libros de texto de matemáticas, estos últimos se centran principalmente en los procedimientos de cálculo. Feudel (2018) menciona que muchos estudiantes generalizan en exceso a que la derivada es la aceleración o la velocidad de la misma. Concluye que los estudiantes no entienden a la derivada como la tasa de cambio pues la comprensión de los estudiantes de la derivada se daba en contextos físicos y existe poca investigación en contextos económicos.

Para Jennings, Goos y Adams (2019), existen diferencias en el nivel escolar entre el plan de estudios de cálculo previsto y el plan de estudios de cálculo promulgado, con implicaciones posteriores para las matemáticas terciarias y cómo se enseña. Varios maestros dijeron que el significado de la definición límite de la derivada ya no estaba en el plan de estudios y, por lo tanto, ya no se enseña, por lo tanto, los estudiantes tendrían dificultades con preguntas o tareas relacionadas con este significado en particular.

Finalmente, Gómez y Velasco (2017) reportaron que el profesor utiliza los planes de estudio y les da la interpretación que él desea. Ésta, depende de lo que él comprenda. El interés para ésta investigación es el significado impartido en el aula. Se concluyó que existen incoherencias entre los documentos curriculares y lo que se lleva al aula, además se le añade

la complejidad de los conceptos se espera que las capacidades de los estudiantes difieran. Ellos argumentan la importancia de los conocimientos que tenga el profesor y el dominio disciplinar para interpretar los documentos curriculares de manera adecuada. Además, muestra una desconexión sobre los conocimientos entre los planes de estudio y lo impartido en el aula. Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017), realizaron un estudio comparativo de los significados de la derivada en dos libros de texto. El objetivo del estudio fue detectar relaciones y diferencias entre los textos analizados con respecto al contenido de los mismos y en aspectos de aprendizaje que manifiestan. Mencionan que, aunque son libros clásicos, mantienen la misma estructura que en otros textos, entre ellos hay una desconexión de los significados de la derivada.

Hasta el momento, las investigaciones revisadas, nos muestran evidencia de las diferencias que existen entre los objetivos planteados en un plan de estudios y los libros de texto en el concepto de la derivada (Feudel, 2019; Jennings et al., 2019; Ibáñez y Dolores, 2012). Así mismo, se puede apreciar en los contenidos matemáticos, por ejemplo, en los significados de la derivada que no existe relación entre los libros de texto que los profesores utilizan para sus planeaciones, las cuales carecen de intencionalidad (Morales, 2018). De igual manera vemos el caso de las competencias de la noción de límite que son diferentes entre los planes de estudio y los libros de texto (Zamora, 2015). Otro interés que muestran las investigaciones citadas es que la mayoría de los estudios son en el Nivel Medio Superior y algunos con profesores en formación, al respecto hemos encontrado un área de oportunidad para la presente tesis. Por lo tanto, es importante realizar un estudio comparativo de los significados de la derivada en los planes de estudio y en la observación de clase.

1.3 Investigaciones relacionadas con los significados de la derivada

En esta sección, se hará una descripción de investigaciones centradas en los significados de la derivada. Es decir, mostraremos qué es lo que se ha hecho al respecto con ellas y lo que faltaría por hacer.

Castro et al. (2015) reportaron en su investigación que no existe una relación entre los significados de la derivada propuestos en el plan de estudios y los promovidos en los libros de texto utilizados por los profesores, su estudio se basa en identificar y analizar los significados institucionales de la derivada. Se estudian los contextos en que los significados están inmersos. La metodología utilizada es el análisis de doce exámenes aplicado a estudiantes de Matemáticas I de un curso universitario en un lapso de cinco años y de un libro de texto diseñado ex profeso para el curso. Ellos identifican que, de acuerdo con las configuraciones de significados y los tipos de contexto, se utilizan con mayor frecuencia los siguientes significados institucionales: derivabilidad y derivadas laterales por definición; y verificación de derivadas y fórmulas de derivación. Además, muestran la relación del conocimiento de la derivada con procedimientos algebraicos. En los exámenes no se proponen gráficas sobre modelar fenómenos de variación, no se explora uso de la regla de la cadena en problemas de modelación ni tampoco se exploran ejercicios donde la derivada

dependa de dos parámetros. Concluyen que este tipo de ejercicios donde se promueven estos significados, son favorables para que el estudiante use los elementos matemáticos de la derivada y establezca relaciones entre ellos.

Otra investigación es la realizada por Inglada y Font (2003) que consiste en describir los significados institucionales y personales de la derivada con base en las ideas de Godino y Batanero (1998). Mencionan un posible desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (estudiante y el libro de texto). Estos conflictos se desencadenan cuando son originados en el libro de texto al dejar a cargo al estudiante de la realización de tareas básicas para la interpretación correcta del texto. Además, en la notación incremental, concluyen que hay un conflicto semiótico causado al introducir la función de la derivada en la definición. Este conflicto es presentado, porque en los libros de texto la notación diferencial e incremental no les dan tanta importancia, es decir, no se les explica con mayor detalle cada uno de los elementos que lo componen. Añaden que esta situación puede tener influencia en los procesos de aprendizaje.

Morales (2018), reportó los significados de la derivada que un profesor potencia en sus planeaciones de clase, el objetivo de la investigación es caracterizar los significados potenciados de cuatro profesores del nivel medio superior. Concluyó que los profesores potencian los siguientes significados de la derivada: pendiente, razón de cambio y fórmulas de derivación mediante lo algebraico. Uno de ellos potencia más significados: razón de cambio, velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, límite y reglas de derivación. Las representaciones utilizadas: gráfico, tabular y simbólico y la metodología utilizada es: fenómenos de optimización, producción, velocidad móvil y contexto matemático.

En Pino-Fan et al. (2013) se realizó una investigación donde el objetivo central es la caracterización del significado de la noción de derivada pretendido en el plan de estudios y en los libros de texto en el nivel bachillerato. Ellos muestran una interpretación del significado distinta, que puede obstaculizar la comprensión del concepto tanto en profesores como en estudiantes. Proponen indagar en los conocimientos de los futuros profesores sobre el objeto de la derivada, en particular, los diversos significados que establecen de dicho concepto. Estos autores nos ayudan a declarar parte de nuestra problemática que es el obstáculo a la comprensión adecuada del concepto de derivada. Además, nos muestran el motivo del porqué estudiar sobre los significados que un profesor establece. En nuestro caso queda como antecedente para la descripción de los significados de la derivada en el currículum impartido.

A diferencia de Pino-Fan et al. (2013), Parra y Castro (2020) se interesaron por evidenciar los significados de la derivada que veinte estudiantes de diversas facultades (Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas; Facultad de Ciencias exactas y aplicadas; y Facultad de Ingenierías) presentaron al realizar una serie de cuestionarios enfocados en el tema los significados y fueron analizados bajo el Enfoque Ontosemiótico. De lo cual concluyen que los estudiantes muestran la comprensión de significados parciales sobre la derivada. Además, los

sistemas de representación que más evidenciaron son: simbólico y verbal. Los significados más frecuentes fueron el límite del cociente incremental; reglas de derivación; máximos y mínimos y puntos críticos.

Zavaleta y Dolores (2009), realizaron un estudio para evaluar el currículum matemático escolar aprendido en el nivel medio superior particularmente con el concepto de derivada. Ellos mencionan la asimetría entre el currículum planeado y el logrado. Además, que existe un bajo nivel de comprensión en los temas de derivada y sus aplicaciones. Lo interesante de esta investigación es relativo a las formas en que se aborda el concepto de derivada menciona que existen deficiencias y además que no existe una articulación de los significados entre el currículum planeado y logrado.

En el mismo tenor, Silva (2016) muestra la descripción de significados de la derivada en dos dimensiones de significado: referencial instruccional y personal. Ella manifiesta que el significado institucional referencial en los libros de texto y en el programa abordan el concepto en tres contextos: a saber matemático, aplicado y geométrico. De los cuales sólo se favorece dos de ellos que es a saber matemático y aplicado. Menciona que existen dificultades con el saber geométrico. En significados personales se encuentran los errores más comunes que presentan los estudiantes, la incomprensión de la noción de la derivada como el límite de un cociente, no tiene claridad en sus interpretaciones. Adoptando esta información a la presente investigación tenemos que en dos de las componentes del significado propuestas por Rico (2012) se favorece la referencia del concepto y el sentido. En el significado de ver al límite como un cociente incremental vemos que no es comprendido porque no se están atendiendo los tres componentes, faltaría el signo y es lo que los estudiantes no han comprendido. En Dolores, Rivera y Moore-Russo (2020) reportan que la pendiente como razón geométrica recibe menor importancia en el currículum de México. Además, recalca que existe una discontinuidad dentro del currículum oficial e impartido al introducir la pendiente en noveno grado. Realiza una sugerencia en cuestión a revisar los libros de texto y el impacto que se tiene al impartirlos en el aula. En otras palabras, sugiere hacer un estudio comparativo de la pendiente en el currículum potencial e impartido. Reportan que el maestro tiene la libertad de interpretar y hablar según sus criterios personales. En consecuencia, el plan de estudios en México tiene divergencia. Por lo tanto, se puede aprovechar la oportunidad para realizar investigaciones sobre la conceptualización de pendiente promovida en esos estudios comparativos.

En Zandieh (2000) se reporta que la derivada puede representarse de la siguiente manera: gráficamente como la pendiente de la línea tangente a una curva en un punto o como la pendiente de la línea, una curva parece enfoque bajo aumento; verbalmente como la tasa de cambio instantánea; físicamente como velocidad; y simbólicamente como el límite de la diferencia cociente. Además, reporta que los estudiantes podrán saberse de memoria la ecuación, pero al momento que se le pide una explicación no es capaz de relacionarlo en el contexto. Code et al. (2014) reportan los significados de la derivada como: tasa de cambio; y diferenciación implícita y problemas verbales con objetos geométricos. Algo similar, ocurre

con la investigación realizada por Job y Scheinder (2014) donde reporta que como un precursor de la derivada la definió mediante un límite es por esa razón que se utiliza frecuentemente para enseñar este concepto. El autor agrega que los estudiantes no conciben la idea de aceptar que el concepto de derivada proporciona un valor exacto para la velocidad y otras tasas de cambio instantáneas como un flujo instantáneo, añade que se preocupan por conectar las características de movimiento como la aceleración; características de sus representaciones gráficas. Por lo tanto, los significados de la derivada reportados en esta investigación son: velocidad media; velocidad instantánea; pendiente de la recta tangente; y límite del cociente incremental.

Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2020) identifican los significados de la derivada con base en la noción de significado propuesta por Rico y Moreno (2016) en los libros de texto de 1° de bachillerato para el tema. Los significados de la derivada más potenciados en este nivel educativo son tres: procedimental-algebraico, un algorítmico y conceptual-geométrico. Concluyen que en la enseñanza de la derivada existe una contradicción ya que las tareas propuestas conducen a procesos mecánicos.

Finalmente, Sánchez- Matamoros et al. (2008) realizan una investigación donde puntualmente mencionan los significados de la derivada con base en las dificultades de dicho concepto matemático. Mencionan que se presentan dificultades cuando necesitan manejar la noción de derivada, a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, en su representación geométrica y como recta tangente. Por lo anterior, ellos buscan comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada. Los autores detectaron tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la derivada: a) relación entre el concepto de razón de cambio y cociente incremental, 2) los sistemas de representación y 3) relación entre la derivada de una función, la función derivada y el operador derivada. Reportan que, aunque estos significados tienen relación, el estudiante no lo alcanza a visualizar y le causa dificultades al momento de interpretar.

En el anexo 2 se muestran los significados identificados en algunas de las investigaciones citadas anteriormente, donde se pretende señalar cómo el significado en algunos casos es definido de manera distinta, es decir, depende del enfoque teórico que los investigadores adopten. En él se puede apreciar que la mayoría de los significados de la derivada expuestos están definidos bajo el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Por lo tanto, para los investigadores que implantan este enfoque teórico, la información sobre los significados de un concepto matemático (en particular, el concepto de derivada) es suficiente. En cambio, para el presente estudio, no sucede lo mismo sobre esos significados de la derivada detectados, dado que para esta investigación el significado de un concepto matemático (Rico, 2012) no es el mismo que como el Enfoque Ontosemiótico lo define. El EOS muestra preferencia por el signo y la representación de un concepto, en cambio, en la propuesta de Rico (2012) además de tomar en cuenta la referencia y la representación agrega aquella que dota de sentido al significado.

De igual manera en la Tabla 1 se pretende dar evidencia de aquellos significados de la derivada que según las investigaciones citadas anteriormente son más utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. Los significados más frecuentes son: pendiente de la recta tangente, límite del cociente incremental, razón de cambio y fórmulas y reglas de derivación.

Tabla 1.

Referentes de los significados de la derivada en diversas investigaciones

Autor	Referentes de los significados de la derivada																
	Reglas de derivación Tasa de variación	Valores extremos locales y globales			Máximos y mínimos	Velocidad media	Velocidad instantánea	Tasa de cambio	Interpretación geométrica	Diferenciación implícita	Verificación de la derivada	Derivadas laterales	Diferenciación	Fórmulas de derivación	Razón de cambio instantáneo	Límite del cociente incremental	Pendiente de la recta tangente
Biza (2019)															X	X	
Briceño et al. (2018)													X	X	X	X	
Castro et al. (2015)										X	X		X				
Code et al. (2014)							X		X								
Da Silva y Borba (2014)								X						X		X	
Díaz (2009)														X		X	
Dolores et al. (2020)															X		
Eichler y Erens (2014)														X			
Feudel (2019)															X		
Hitt y González-Martín (2016)												X		X	X	X	
Inglada y Font (2003)													X		X		

Tabla 1.

Referentes de los significados de la derivada en diversas investigaciones

Autor	Referentes de los significados de la derivada																
	Pendiente de la recta tangente	Límite del cociente incremental	Razón de cambio instantáneo	Fórmulas de derivación	Diferenciación	Derivadas laterales	Verificación de la derivada	Diferenciación implícita	Interpretación geométrica	Tasa de cambio	Velocidad instantánea	Velocidad media	Máximos y mínimos	Valores extremos locales y globales		Tasa de variación	Reglas de derivación
Job y Schneider (2014)	X	X								X	X						
Kirsch (2014)	X		X							X							
Morales (2018)	X	X	X							X						X	
Pino-Fan et al. (2011)	X	X		X	X								X		X		
Pino-Fan et al. (2013)		X							X				X		X	X	
Rodríguez-Nieto y Rodríguez-Vázquez (2019)	X	X	X														
Matamoros et al. (2008)		X	X		X												
Silva (2016)					X					X							X
Syahrir et al. (2019)														X	X		
Zandieh (2000)	X	X								X							

En conclusión, los antecedentes citados en esta sección, muestran evidencia de los significados de la derivada utilizados con mayor frecuencia en la enseñanza del concepto de derivada. Entre ellos se destaca: pendiente de la recta tangente, límite del cociente

incremental y razón de cambio instantáneo. También se pueden apreciar los enfoques teóricos que se han utilizado para el estudio de estos significados. Finalmente, para este primer capítulo se puede concluir que la multiplicidad de significados es una dificultad para el profesor al momento de organizarlos, además, observamos que los estudios curriculares son escasos para el nivel superior. Por lo tanto, cuando se pretende encontrar relaciones entre los documentos curriculares y la dificultad que los profesores presentan, en varias ocasiones no existe tal relación, una causa de esta situación son los distintos modos de representación que el profesor utiliza e imparte, creando dificultad para la comprensión de dicho objeto matemático en sus estudiantes. Algunas investigaciones también nos mostraron una caracterización de esos significados, en los cuales podemos rescatar que algunos de ellos estarán presentes en uno de los tipos del currículum analizados en la presente tesis. A manera de cierre, la multiplicidad de significados de la derivada es un fenómeno educativo, no solo por lo mostrado en la Tabla 1, sino porque cada uno de ellos está inmerso en sus diversas representaciones. Esto ha llevado a analizar su presencia en los diversos tipos de currículum mencionados. En el caso de este trabajo, se considera relevante indagar esta presencia en la práctica del profesor, que en cierta forma no está de forma tangible como en los demás currículums. El logro será entender esta presencia del significado de la derivada y comparar con su programa de estudios para sugerencias de mejora del mismo. Esto como consecuencia hace más real el currículum porque se relaciona con lo que sucede en el aula.

CAPÍTULO 2

LA MULTIPLICIDAD DE SIGNIFICADOS Y SU DESCONEXIÓN EN LOS TIPOS DEL CURRÍCULUM

2.1 PROBLEMÁTICA

En el campo de la Matemática Educativa los temas sobre el cálculo son constantes y centrales, sobre todo en los cursos universitarios. La naturaleza de estos temas desencadena una serie de dificultades para su enseñanza y aprendizaje. Una de estas dificultades evidenciada en los antecedentes y que es el foco central de esta investigación, es la multiplicidad de significados de un concepto matemático. Esta dificultad es inherente a todos los conceptos matemáticos; pero, los investigadores se han enfocado en algunos conceptos matemáticos como: potencia de un número (Rico, et. al, 2015), ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado e introducción a funciones (Valenzuela y Dolores, 2012); la noción de límite (Zamora, 2015), de derivada (Morales, 2018; Sánchez-Matamoros et al., 2008; Díaz, 2009), pendiente de una recta tangente (Dolores et al., 2020), razones trigonométricas (Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016), de función (Parra-Urrea y Pino-Fan, 2017) y el caso de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) en distintos tipos del currículo. Cabe mencionar, que la multiplicidad de significados es un elemento intrínseco a cada concepto matemático. Es decir, es una característica que no puede ser evitada, pero si la forma en la que se presentan y organizan estos significados en los diferentes tipos del currículum de matemáticas.

Al respecto, la literatura proporciona evidencia de que los significados de conceptos matemáticos se presentan de manera diferente en los diversos tipos del currículo. Entre estas desconexiones están: los significados para la noción de límite entre currículum oficial y potencial en el nivel medio superior (Zamora, 2015); los temas de ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado e introducción a funciones entre currículum oficial e impartido en el nivel medio superior (Valenzuela y Dolores, 2012); los significados de la derivada en el plan de estudios y los libros de texto en el nivel medio superior (Pino-Fan et al., 2013), o los institucionales y personales en la formación de profesores (Castro et al., 2015). Un factor de esta desconexión, puede ser ocasionada por la libertad que el profesor tiene para abordar temas (Fernández-Plaza, et. al, 2016; Gómez y Velasco, 2017); la deficiencia de conocimiento en los profesores (Fernández-Plaza, et al., 2016; Díaz, 2009; Jennings et al., 2019); o bien que los textos que utilizan los profesores carecen de intencionalidad (Ibáñez y Dolores, 2012).

En general, una implicación de estas desconexiones en los distintos tipos del currículo es que afecta principalmente los aprendizajes de los estudiantes (Valenzuela y Dolores, 2012; Ibáñez y Dolores, 2012; Zavaleta y Dolores, 2012; Dolores et al., 2020). Sin embargo, aunque la multiplicidad de los significados no se puede evitar, si puede trabajarse con la forma de organizarlos para su enseñanza. De esta manera, se espera ayudar a superar la dificultad en el aprendizaje de los estudiantes, debido a la desconexión de los significados de un concepto

matemático en diversos tipos de currículo. Por lo tanto, como la multiplicidad de los significados no puede ser evitada, pero sí se puede evitar su desconexión, mediante la organización de cuáles significados serán presentados en diversos tipos del currículo y cómo relacionarlos o no entre sí. Dado lo anterior, la problemática que se asume en este presente trabajo es dado la multiplicidad de los significados de un concepto matemático norma una la desconexión de éstos en diversos tipos del currículo.

2.2 PROBLEMA

La multiplicidad de significados de los conceptos matemáticos ha desencadenado una serie de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de éstos. La derivada en particular muestra esta dificultad por sus aplicaciones (Díaz, 2009; Silva, 2016; Pino-Fan, 2017; Castro et al., 2015) y tiende a tener diferentes interpretaciones que pueden ser adoptadas tanto por los profesores como por los estudiantes (Gómez y Velasco, 2017; Rodríguez-Nieto y Rodríguez-Vázquez, 2019). El o los significados que potencia el profesor al impartir su clase, depende de su comprensión sobre la noción de derivada (Morales, 2018; Silva, 2016). Lo anterior, influye en el aprendizaje del estudiante, en algunos casos, crea una deficiencia en el conocimiento matemático de sus alumnos (Fernández-Plaza, et. al, 2016; Díaz, 2009; Hitt y González-Martín, 2016). A su vez, la multiplicidad de significados de la derivada y las dificultades que la misma desencadena, provoca que la manera en cómo son propuestos en los planes de estudio y cómo el profesor los imparte en el aula sea diferente (Ibáñez y Dolores, 2012). La literatura muestra que a menudo hay discrepancias entre la forma de impartir los conceptos matemáticos en los cursos de matemáticas y sus aplicaciones en la vida cotidiana. Estas discrepancias pueden dar lugar a diversas dificultades (Feudel, 2019).

Aunado a lo anterior, las investigaciones de Ibáñez y Dolores (2012); Valenzuela y Dolores (2012); Pino-Fan et al. (2013); Castro et al. (2015); Zavaleta y Dolores (2009) muestran una desconexión de los significados que se presentan en los distintos tipos del currículo. En particular para el caso de los significados de la derivada, investigaciones como Ibáñez y Dolores (2012); Castro et al. (2015); Inglada y Font (2003); Pino-Fan et al. (2013); Zavaleta y Dolores (2009); Silva (2016); Dolores et al. (2020); Gómez y Velasco (2017) y Sánchez-Matamoros et al. (2008) mencionan que las desconexiones que existen causan una deficiencia en el conocimiento matemático sobre el concepto. Por tal motivo, el problema de interés es interpretarlas posibles desconexiones de los significados de la derivada, presentes en el programa de estudios y en la observación de clase a una profesora en una licenciatura de matemáticas. La pertinencia, radica en que la mayoría de las investigaciones reportadas en los antecedentes centran su atención en el nivel medio superior y la necesidad de interpretar la organización del significado en ambos currículums.

2.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta de investigación asociada al problema anterior y que guiará este estudio es:

¿Cuáles son las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada que se potencian en el currículum oficial e impartido en una licenciatura de matemáticas?

2.4 HIPÓTESIS

Para esta investigación, se espera que la manera en que los significados de la derivada son propuestos en el currículum oficial (plan de estudios) y los significados de la derivada promovidos en el currículum impartido (lo que imparte el profesor en el aula) guardarán diferencias. Esto apoyado en lo que reporta Morales (2018) sobre aquellos significados de un tópico complementados por el profesor.

Además, se espera que los significados que si coincidirán en el currículum oficial e impartido son los identificados en Sánchez-Matamoros et al. (2008) e Inglada y Font (2003) como razón de cambio y cociente incremental. Estos autores mencionan que ambos significados son abordados con mayor frecuencia para la enseñanza de la noción de derivada. Por lo que en una licenciatura en matemáticas es posible que estos significados aparezcan tanto en el programa de estudios como en el discurso del profesor. Sin embargo, se espera que en este caso el límite del cociente incremental sea la componente estructural que mayor se potencie; destacando la representación simbólica y la fenomenología bajo contextos matemáticos. La anterior hipótesis se refuerza con el estudio de Briceño, Hernández y Espino (2018), que reportan que la derivada es trabajada con mayor frecuencia mediante la representación algebraica.

2.5 OBJETIVO GENERAL Y ESPECÍFICOS

Para responder la pregunta de investigación se plantea como objetivo general:

Describir las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada propuestos por el currículum oficial y potenciados en el currículum impartido de una Licenciatura en Matemáticas.

Para alcanzar el objetivo general se proponen los objetivos específicos siguientes:

1. Identificar y organizar los significados de la derivada en un documento sobre el desarrollo histórico del concepto de la derivada, mediante el análisis conceptual del análisis didáctico.
2. Identificar y organizar los significados de la derivada presentes en el programa sintético de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), mediante el análisis de contenido del análisis didáctico.
3. Identificar y organizar los significados de la derivada potenciados por una profesora de matemáticas al impartir el tema de derivada en la Licenciatura en Matemáticas de la UAM de la UAZ, mediante el análisis de contenido del análisis didáctico.
4. Comparar los significados de la derivada del currículum oficial e impartido identificados en los objetivos anteriores.

2.6 JUSTIFICACIÓN

Realizar este estudio resulta pertinente dado que la mayoría de las investigaciones reportadas en los antecedentes comparan el currículum oficial y potencial. Por tal motivo, es importante

también identificar y caracterizar los significados de la derivada en el discurso del profesor y contrastarlos con los que se presentan en los otros tipos del currículo, como el oficial en nuestro caso.

El motivo de describir los significados de la derivada de una función en una clase de una profesora es porque el conocimiento del contenido específico (los significados de la derivada) es un componente esencial del conocimiento profesional del profesor (Hamann y Schmidt-Thieme, 2018). Además, el papel de los profesores en la vida de los estudiantes es muy importante dado que:

- La independencia de los estudiantes depende del profesor (Syahrir et al., 2019).
- El profesor es la influencia cultural para los estudiantes (Eichler y Erens, 2014).
- El profesor transmite sus ideas a los estudiantes y algunas con interpretaciones diferentes a las que el plan de estudios propone (Moreno, 2007).

En otras palabras, la profesora es una de las responsables del aprendizaje de sus estudiantes y debe aprovechar la riqueza de los significados, debido a que los estudiantes tienden a utilizar diversos significados de la derivada, pero sólo se refieren al registro simbólico cuando aprenden sobre derivadas (Swidan, 2019). Code et al. (2014) argumentan que los estudiantes al realizar procedimientos demuestran una riqueza de conexiones entre conceptos, lo cual potencia la comprensión de las nociones.

Ahora, incluir el análisis de los significados de la derivada presentes en el currículum oficial es importante porque los programas de estudio sirven de guía y condicionan el trabajo del profesor (Gómez, 2007). Eichler y Erens (2014) mencionan que los objetivos del profesor son el motivo por el cual el plan de estudios varía. Los profesores continuamente utilizan el currículum oficial para hacer sus planeaciones; pues es un plan formativo el cual se concreta en organizar objetivos, contenidos, metodología y criterios e instrumentos de evaluación (Rico, 1998). Así mismo Dolores, Rivera y Moore-Russo (2020) mencionan que los estudios comparativos son necesarios para plantear propuestas que sirvan para mejorar los programas de estudio, libros de texto, materiales didácticos, entre otros que llegan a los estudiantes por medio de los profesores.

El interés por la multiplicidad de significados de la derivada y su desconexión, es que las investigaciones reportan que, si no se tiene un buen manejo de los significados, éstos pueden ser un obstáculo para la comprensión de un contenido matemático escolar (Sánchez-Matamoros et al., 2008; Pino-Fan et al., 2013; Castro et al., 2015; Silva, 2016; Rodríguez-Nieto y Rodríguez-Vázquez, 2019). Finalmente, se justifica hacer la investigación para el nivel superior porque la mayoría de las investigaciones encontradas y que fueron presentadas en los antecedentes se enfocan en el nivel medio superior. Existe investigación abundante y variada para educación primaria y secundaria, pero para el nivel superior la investigación es escasa (Hitt y González-Martín, 2016). Aunado a lo anterior, Pino-Fan (2017) menciona la importancia de realizar estudios de los significados de las nociones claves del cálculo y

menciona que es una línea de investigación vigente en los diferentes niveles educativos. Por lo que este autor muestra un área de oportunidad para la presente tesis.

2.7 ALCANCE

Alcances teóricos

El presente estudio permitirá identificar si la situación que se presenta en el nivel medio superior (la desconexión de los significados de la derivada en los diversos tipos del currículum) está presente también en el nivel superior (los significados de la derivada promovidos en el currículum oficial e impartido); mostrará evidencia si los significados más frecuentes para la enseñanza de la derivada en el nivel medio superior, son los mismos significados que se encuentran presentes en la enseñanza en el nivel superior; y caracterizará los significados de la derivada de una función de una variable presentes en una licenciatura de matemáticas, tanto en su programa de estudios como en una clase de una profesora experta. Lo anterior, permitirá identificar aquellos significados que toman mayor sentido en una licenciatura en matemáticas y por ende que están ligados a la formación de estos profesionales.

Alcances prácticos

En esta investigación se pretende brindar información a la profesora en observación para que realice una reflexión sobre los significados de la derivada que potencia y la forma en la que los articula. Se espera que esto le ayude a comprender mejor su práctica y las decisiones que toma en torno al tema de derivada para el alcance de los objetivos de aprendizaje. Asimismo, se espera que este estudio sirva a la institución, en particular, a los encargados de actualizar los planes y programas de estudio en la Licenciatura en Matemáticas de la UAM de la UAZ para determinar si es necesario un rediseño del plan de estudios, con la finalidad de mejorarlo y contemplar los posibles cambios para promover una articulación entre los significados impartidos por el profesor y aquellos considerados en el programa de la asignatura.

Finalmente, se espera que la presente tesis sirva como modelo para realizar futuras investigaciones con objetivos afines a los que se exponen anteriormente. El proceso metodológico y el marco conceptual propuesto en esta investigación, puede ser aplicado en diversos tipos de currículum; en distintos niveles educativos; y para cualquier concepto matemático. Tanto el marco conceptual como la metodología utilizada son ideales para este tipo de investigaciones, porque se comienza con el desarrollo histórico del concepto, que después es útil para la identificación y organización de los significados de dicho concepto en los diversos tipos del currículum, además, tener en cuenta la historia del concepto evita las inconsistencias y las faltas de precisión.

CAPÍTULO 3

MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se abordan los conceptos considerados como centrales para el desarrollo de esta investigación. Dado que el objetivo es describir las relaciones y diferencias de los significados de la derivada de una función de una variable entre el currículum oficial e impartido de una Licenciatura en Matemáticas; se identifican dos nociones clave para esta investigación: currículum y significado de un concepto matemático. Por lo anterior, el marco conceptual se divide en dos apartados. En el primero se aborda la noción y tipos de currículum y en el segundo se discute la noción de significado para un concepto matemático. En cada apartado, sin pretender ser exhaustivos, se discutirán y analizarán algunas posturas en torno a estas dos nociones concluyendo en aquellas que serán adoptadas en el presente estudio.

3.1 Noción y tipos del currículum

3.1.1. Noción de currículum

En Educación Matemática existen diversas nociones sobre el currículum, a continuación, se mencionan algunas de ellas. Para Hernández y Dolores (2007) el currículum debe responder a las siguientes preguntas: ¿qué enseñar?; ¿cuándo enseñar?; ¿Qué, cuándo y cómo evaluar?, los nuevos retos actuales reflejan que el currículum debe estar asociado a: la situación social; como la globalización, la calidad educativa, el compromiso social, entre otros. En el caso de Cox (2001), el currículum se refiere a los planes y programas de estudio, o al conjunto de contenidos, organizados en una determinada secuencia, en donde el sistema escolar se comunica, es decir, ¿cómo se comunican los agentes institucionales en la organización de los contenidos? Rico (1995) menciona que el currículum se le llama a toda actividad que considere el hecho de planificar una formación (Rico, 1995, p. 10).

El currículum está conformado por los siguientes componentes:

1. El colectivo de personas a formar.
2. El tipo de formación que se requiere proporcionar.
3. La institución social en la que se lleva a cabo la formación.
4. Las necesidades que se pretende atender.
5. Los mecanismos y control y valoración.

(Rico, 1995, p. 10).

En estas componentes que Rico (1995) propone, está relacionado con lo que Cox (2001) menciona acerca del currículum y lo que Hernández y Dolores (2007) sugieren. Por ejemplo, los números 1, 2, 4, y 5 responden a las preguntas que propone Hernández y Dolores (2007). Los números 2, 3 y 4 atienden lo que Cox (2001) menciona acerca de que la institución desea comunicarse. Además, Rico y Fernández-Cano (2013) mencionan que el currículo está establecido por las finalidades las cuales tratan de responder a las siguientes preguntas: ¿cuál

formación/conocimiento?; ¿para qué dicha formación?; ¿cómo y cuándo se lleva a cabo la formación?; ¿con cuáles resultados? De estas cuestiones y propuestas, Rico (1995) observa que las finalidades se clasifican en: conceptuales, cognitivas, formativas y sociales. Estas cuatro finalidades forman las dimensiones que estructuran el concepto de currículum (Rico, 1998): dimensión cultural/conceptual; dimensión cognitiva o de desarrollo; dimensión ética; dimensión social (Figura 1).

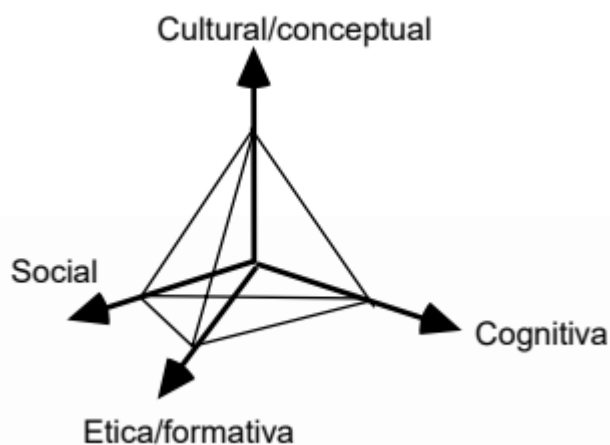


Figura 1. Dimensiones del currículum (Rico, 1998, p. 27)

Para cada una de las dimensiones del currículum Rico (1998), menciona que le corresponden distintos niveles de reflexión conceptual y profesional sobre el currículum (Rico y Fernández-Cano, 2013): teleológico; institucional; académico; axiológico; y práctico. Rico (1998) aclara que no son únicos y que se presta para nuevas interpretaciones. Cada nivel está caracterizado por las componentes que muestran los sujetos, instituciones, disciplinas, actividades profesionales del educador para planificar, implementar y evaluar el plan de formación considerado (Rico y Fernández-Cano, 2013). Los niveles atienden a las necesidades o a las funciones del currículum. Hay que tener en cuenta las distintas dimensiones curriculares, pero al mismo tiempo la especificidad del tema matemático en estudio (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 15) mediante los organizadores curriculares. Entendiendo a los organizadores del currículum como “aquellos conocimientos que son adoptados como componentes fundamentales para relacionar el diseño, el desarrollo y la evaluación de unidades didácticas” (Rico, 1998).

En el presente estudio, se adopta la noción de currículum propuesta por Rico (1995) porque responde a las preguntas que Hernández y Dolores (2007) proponen y hace referencia a lo que Cox (2001) se centra, a sólo en los elementos por los cuales una institución se puede comunicar. Sin embargo, se considera que el currículum es más que eso y ofrece otras componentes que son necesarias como la interpretación del contenido matemático a impartir; comprender cuál es el conocimiento matemático adecuado para el nivel educativo considerado; etc. Además, la propuesta de Rico (1995) permite visualizar al currículum desde una perspectiva global y local. La parte global corresponde en nuestro caso al plan de

estudios y la parte local a la clase de la profesora, por lo que esta definición se considera la más adecuada para las finalidades de esta investigación.

De esta manera, el presente estudio está centrado en dos dimensiones del currículum propuesto por Rico (1998) en la Figura 1. La dimensión cultural/conceptual por el plan sintético de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. La otra dimensión es la ética/formativa porque se contempla la observación de la profesora al impartir su clase. Por la definición del currículum, se tiene la necesidad de caracterizarlo para darle forma en la presente investigación.

3.1.2. Tipos de currículum

Para complementar la noción de currículum, es necesario presentar formas de clasificarlo. Lo anterior permitirá ubicar aquellos tipos de currículum que se hacen presentes como objetos de estudio en la presente investigación. A continuación, se presentan algunas características o tendencias para su estudio y se concluye con aquellas que son del interés en esta tesis.

En este sentido, Ruiz (2002) realiza una caracterización de currículum como:

- Producto, se considera como el documento escrito en donde se determinan los propósitos educativos, así como la selección y organización de los contenidos, las tareas a realizar y el sistema de evaluación
- Proceso, este tipo de currículum contempla el contexto o situación: social, económico, político y educativo en el que se encuentra inmerso);
- Prácticas social y educativa (se refiere a la aplicación en la vida académica; su evaluación y es mirada desde una perspectiva crítica y globalizada).

Por su parte, Alsina (2000) propone una clasificación para tipos de currículum:

- **El currículum oficial** se le llama al conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar, que fijan y proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben superarse, entre otros propósitos.
- **El currículum potencial** está determinado por el conjunto de publicaciones docentes, libros de texto y materiales, entre otros recursos que en el punto de vista teórico y práctico se desarrollan dentro del currículum oficial
- **El currículum impartido** se refiere a las actividades que el profesor desarrolla en el aula de clases.
- **El currículum aprendido** que como su nombre lo indica es lo que el estudiante ha aprendido de las clases, distinguiendo la retención o el olvido de lo aprendido.

(Alsina, 2000, p. 14)

En la caracterización del currículum propuesta por Ruiz (2002) se observa un currículum producto como el currículum oficial (Alsina, 2000) porque hace referencia a los documentos que son instruidos por una institución educativa. Por lo tanto, es posible identificar y organizar los significados en el programa sintético de Cálculo I. Además, el currículum

impartido (Alsina, 2000), también es visto como un currículum de práctica social y educativa (Ruiz, 2002), porque ambos se refieren a las actividades que el profesor realiza en el aula, lo cual, permite la identificación y organización de los significados de la derivada en la observación de clase a la profesora.

Por lo tanto, se asume la clasificación propuesta por Alsina (2000) dado que dos de los tipos de currículum que propone se adaptan a los objetivos específicos de esta investigación. Los tipos de currículum a los que se hace referencia son el currículum oficial e impartido. En el currículum oficial se puede ver que se refiere a los programas de estudios, es decir, aquellos documentos oficiales propuestos por una asociación, en nuestro caso, nos centraremos en el análisis del plan sintético de la materia Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Con el currículum impartido la misma palabra lo señala es lo que el profesor imparte en el aula, el conocimiento matemático escolar que se lleva al aula, las actividades y tareas que el profesor propone para sus estudiantes, por lo que esta es la otra dimensión en que la investigación estará enfocada.

La clasificación propuesta por Alsina (2000) se relaciona con las componentes del currículum de Rico (1995) antes expuestas. La primera componente, está enfocada en los estudiantes, por ello se considera que pertenece a una parte del currículum aprendido. En la componente número 2, está reflejado el currículum impartido, dado que se enfoca en el profesor y la formación que él desea impartir. La componente número 4 está relacionada con el currículum oficial, porque en los documentos oficiales, se describen los objetivos que requieren ser alcanzados. La componente número 5, tiene elementos que están presentes en el currículum oficial y también en el currículum impartido pues son objetos que pueden ser modificados, sus revisiones son periódicas y se concretan en uno o varios documentos oficiales (Rico, 1995), en este caso, se puede tomar en cuenta el trabajo del profesor en aula.

Otra razón por la que se asume esta clasificación es porque está relacionada con las dimensiones de la noción del currículum (Rico, 1995): cultural/conceptual; cognitiva; ética/formativa; y social. El currículum oficial (documentos oficiales) se manifiesta dentro de la primera dimensión (cultural/conceptual), dado que hace referencia a los significados de la noción de derivada que es nuestro objeto de estudio. Así mismo, el currículum impartido (lo que enseña el profesor en el aula) está presente en la tercera dimensión (ética/formativa) debido a que uno de los objetivos específicos de la investigación menciona la observación a una profesora, es decir, en lo que nos vamos a centrar es en el discurso de la profesora en activo sobre el tema en cuestión. El sistema educativo en la primera dimensión obtiene el conocimiento (noción de derivada) y en la tercera dimensión se tiene al profesor (su discurso). En el nivel de planificación para los profesores en la primera dimensión tenemos los contenidos que en el caso de la presente investigación hace referencia a los significados de la derivada aplicada en la tercera dimensión contemplando la observación del profesor. El nivel de análisis didáctico es un término común dentro del área de la matemática educativa, debido a su aportación en cuestiones didácticas primordiales (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Para robustecer la noción de currículum de Rico (1995), su perspectiva global y local relacionada con la clasificación de Alsina (2000), se utiliza lo expuesto en Cañadas y Gómez (2014) sobre los niveles en el contenido de las matemáticas escolares, en donde se observa como el contenido puede ir de lo más general al más específico. Es importante mencionar, que no es necesario que el contenido tenga que pasar por todos los niveles, en algunos casos, el objeto de estudio puede estar centrado únicamente en el nivel 1 o bien en el nivel 6. Además, se distinguen los tipos de currículum, que en la presente investigación dos tipos del currículum (oficial e impartido) son el objeto de estudio. Es decir, los niveles en el contenido de las matemáticas escolares, permite que la presente tesis sea delimitado y ubicado con mayor precisión.

Nivel 1. *Contenido en el currículum global*

En este nivel son consideradas las pruebas a nivel internacional que definen al currículo global en las dimensiones conceptual y cognitiva del currículum. [Un ejemplo de ello son las pruebas PISA].

Nivel 2. *Contenido del programa del currículum oficial*

En este nivel son consideradas las pruebas o los programas normados el gobierno del país. [Por ejemplo, se pueden mencionar las pruebas de CENEVAL, aplicadas al ingresar a cualquier nivel educativo del país].

Nivel 3. *Contenido matemático escolar*

[En este nivel se hacen presentes los tipos de currículum propuestos por Alsina (2000) porque contemplan todos los contenidos en términos del conocimiento matemático escolar y son presentados la revisión de contenidos, significados, criterios teóricos en libros de texto, documentos, etc.].

Nivel 4. *Contenido propuesto para una asignatura*

Este nivel es llevado a cabo por las academias porque se proponen contenidos, actividades, tareas, objetivos para una asignatura en específico (Cañadas y Gómez, 2014). [Aquí se puede ubicar el currículum oficial que propone Alsina (2000). En este nivel se centra la presente investigación porque se tiene el interés por investigar en lo propuesto por las academias con respecto a una asignatura, para el caso de esta investigación, se refiere a los planes sintéticos de estudio para la materia de Cálculo I de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas].

Nivel 5. *Estructura matemática*

En este nivel se encarga el profesor, ya que es responsable de seleccionar el contenido y desarrollar los documentos para llevar a cabo. [El tipo de currículum que se encuentra presente en este nivel es el currículum potencial que Alsina (2000) propone].

Nivel 6. *Tema*

Este nivel también es trabajado por el docente, la diferencia con el nivel anterior, es que ahora el profesor se centra en las agrupaciones de conceptos, procedimientos y relaciones de un tema matemático específico. [La presente investigación abarca este nivel ya que el tema es el concepto de la derivada y corresponde a ver los significados en el plan y programa de estudio, y la observación a clase de una profesora al impartir el tema. En este nivel se observa que son vistos los el currículum oficial, potencial e impartido].

(p. 2)

Con base en los niveles anteriores, se menciona que el contenido matemático escolar se sustenta sobre el conocimiento de los significados de cada tema matemático del programa (Gómez, 2007, p. 38). La presente investigación, como se mencionó anteriormente, está ubicada en el nivel 4 (referido al plan sintético de Cálculo I) y en el nivel 6 (la observación de clase a una profesora). Los organizadores del currículum son “aquellos conocimientos que son adoptados como componentes fundamentales para relacionar el diseño, el desarrollo y la evaluación de unidades didácticas” (Rico, 1998, p. 32). Estos organizadores son herramientas conceptuales metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar la información sobre los múltiples significados (Rico y Fernández-Cano, 2013). Uno de estos organizadores son las componentes del significado que se describen a continuación y que conforman la segunda noción central de la presente investigación.

3.2 Noción de significado

En la presente tesis, se requiere, buscar en la estructura interna del contenido semántico tanto del currículum oficial como en el impartido, los significados de la noción de derivada presentes en estos tipos de currículo. Por lo anterior, es importante presentar lo que en esta investigación se entenderá como significado de un concepto matemático escolar.

En Matemática Educativa, existen diversas nociones de significado y son propuestas desde diversas posturas. Godino, Batanero y Font (2007) definen al significado como un sistema de prácticas realizadas de manera individual (significado personal), o en colaboración con otras personas en una institución (significado institucional) con el objetivo de resolver un tipo de situaciones o problemas en donde se requiere identificar un representante en un conjunto de datos. El significado está relacionado con la estructura es por ello que D'Amore (2005) define al significado en términos de referente y los sistemas de representación. En un curso de lingüística Saussure (1945, citado en Serrano, 2005) se aproxima a la noción de significado mediante el signo. Considera dos ideas: el vínculo que une un nombre con una cosa no es operación simple; y lo que une un signo no es una cosa ni un nombre, sino un concepto con una imagen. En conclusión, Saussure (1945, citado en Serrano, 2005), define al significado de una cosa como el concepto que alguien tiene sobre esa cosa. Ogden y Richards (1945, citado en Serrano, 2005) definen al significado en tres componentes: referente, símbolo y pensamiento o referencia. Finalmente, Serrano (2005) adopta la noción de significado en relación a un objeto matemático o a un objeto asociado constituido por dos dimensiones: el uso y la explicación del objeto.

En la filosofía del lenguaje, el significado de una palabra está relacionada de manera externa con el mundo y de manera interna con otras palabras (Gómez, 2007). El lenguaje se conforma de palabras las cuales determinan si se habla de una secuencia o de una sentencia (Gómez, 2007). Las sentencias pueden expresar una proposición, que puede ser verdadera o falsa. Frege (1998, citado en Rico, 2012) realizó una distinción entre sentido y referencia de un mismo término, la referencia de un enunciado es su falsedad o veracidad y el sentido es el pensamiento que expresa. De esta manera, Frege (1998, citado en Rico, 2012) menciona que el significado de un concepto está compuesto por el signo con el que se expresa, el referente del concepto y su sentido; sin embargo, para el significado de un concepto matemático, Frege le da poco valor al sentido y le muestra énfasis al referente (valor de verdad) y al signo (forma de representarlo). Con base en lo anterior, Rico (2012) retoma parte de estas ideas, dado que, en el campo de la Matemática Educativa, el sentido no puede desestimarse dado que incluye fenómenos que sustentan al concepto. Los fenómenos son presentados mediante un contexto o situación en el que el concepto toma sentido (Gómez, 2007). Dada la situación anterior, Rico (2012) considera tres componentes para el significado de un concepto matemático: la estructura conceptual, sistemas de representación y la fenomenología como elementos centrales para establecer los significados de un concepto matemático en el área de la Matemática Educativa (Figura 2).



Figura 2. Dimensiones del significado de un concepto matemático escolar (Gómez, 2007, p. 27)

- La estructura conceptual se refiere a los conceptos, definiciones, propiedades, argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad (Rico, 2012).
- En los sistemas de representación se incluyen las distintas maneras de representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos (Gómez, 2007, p. 27).
- La fenomenología se refiere al contexto en donde es utilizado, es decir, la situación o problema en donde el concepto tiene sentido (Gómez, 2007, p. 27).

En caso de no presentarse alguna de las componentes del significado, será llamado significado parcial (Fernández-Plaza et al., 2016). Para explicar cómo se interpretan los significados de un concepto matemático se presenta el concepto del número 7 (citado en Gómez, 2007). En la Tabla 2 se muestran los significados bajo la postura de Frege en torno a un concepto en matemáticas como podemos observar el sentido es desestimado dado que la operación está conformada por el concepto de ambos números. Sin embargo, se puede observar que Rico (2012) rescata el sentido para un concepto matemático escolar identificando otros significados, mediante la inclusión del sentido y otros signos (Tabla 3).

Tabla 2.

Ideas sobre el significado del concepto del número 7 según la propuesta de Frege (1998)

Referente	Signo	Sentido
Concepto del número 7	7	2+5
Concepto del número 7	7	4+3

La información presentada en esta tabla son interpretaciones que Gómez (2007) realiza para mostrar las ideas de Frege (1998).

Tabla 3.

Ideas sobre los significados del concepto del número 7 según la propuesta de Rico (2012)

Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología
	Siete	Ordenar
Concepto del número 7	7°	Posición
	7 kg.	Unidad de medida
	♣♣♣♣♣♣♣	Contar

La información mostrada en esta tabla son interpretaciones que Gómez (2007) hace para evidenciar las ideas de Rico (2012)

Al respecto, Gómez (2007) menciona que las dimensiones del significado de un concepto matemático escolar ponen en evidencia la diversidad de significados en las matemáticas escolares. Un concepto matemático presenta esta multiplicidad de significados por las siguientes razones:

- La estructura conceptual es compleja. Tiene variedad de relaciones con otros conceptos matemáticos.
- Existe una diversidad de modos en las que puede ser representado un concepto matemático, así como las formas de relacionarse con otros conceptos matemáticos.
- Existe una variedad de fenómenos que le dan sentido al concepto.

(Gómez, 2007, p. 28)

Considerando la propuesta de significado de un concepto matemático establecida en Rico (2012) y Rico y Fernández-Cano (2013) se retoman estas ideas considerando que las categorías para analizar el contenido matemático escolar en un discurso escrito o verbal son:

- Conceptual (considera el momento histórico donde es presentado).
- Formal y estructural (se refiere a la estructura formal de los conceptos, definiciones y procedimientos los cuales dan referencia a los contenidos utilizados).

- Representacional (formas de representación como: notaciones, gráficas, símbolos y los sistemas de signos involucrados).
- Fenomenológica (se refiere a los fenómenos que les dan sentido a los conceptos, por ejemplo, las situaciones en las que se presenta o los contextos en que son utilizados).

En la primera categoría se trata de indagar en los aspectos históricos del desarrollo del concepto matemático, en este caso, la noción de derivada, la cual permite una reflexión sobre los significados tratando de eliminar inconsistencias y faltas de precisión (Rico y Fernández-Cano, 2013); esta categoría conforma el método del análisis conceptual, descrito más adelante en este capítulo. Las tres últimas categorías constituyen las componentes que describen el significado de un concepto matemático; esto permite identificarlos, caracterizarlos y organizarlos, convirtiéndose en un punto clave de nuestro estudio; en este caso estas tres categorías para analizar el discurso constituyen el análisis de contenido, método que se describirá en el siguiente capítulo.

Para la presente investigación se toma la definición de significado como Rico (2012) la propone, ya que otros autores sólo toman en consideración el referente (estructura conceptual en Rico, 2012) y los sistemas de representación, dejando de lado aquello que le da sentido al significado. De esta manera, las tres componentes (estructura, representación y fenomenología) serán utilizadas para identificar, organizar y caracterizar los significados de la noción de derivada tanto en el currículum oficial (programa sintético de Cálculo I) como en el currículum impartido (observación de clase a una profesora), una vez que se tenga la información sobre los significados de la derivada en los diversos tipos del currículum se va a realizar el comparativo entre significados de ambos tipos del currículum.

3.2.1 Componentes del Significado

3.2.1.1 Estructura Conceptual

Se utiliza estructura conceptual al referirse a tres aspectos de todo el concepto matemático del contenido matemático escolar:

1. Estructuras matemáticas involucradas: Todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas:
 - a. Estructura matemática que el concepto matemático configura. [Cuando la derivada en un punto es vista como el cociente de diferencias, esta actúa sobre estructuras conceptuales como la longitud de intervalos].
 - b. Estructuras matemáticas de las que él forma parte. [Por ejemplo, la derivada de una función en un punto es definida como el límite del cociente incremental en ese punto, en este caso, la derivada pertenece a una estructura matemática: el concepto de límite].
2. Relaciones conceptuales:
 - a. Relaciones establecidas entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura. [La derivada es el límite del

cociente de los incrementos de la función y la variable independiente cuando el incremento de la variable tiende a cero].

- b. Relaciones establecidas entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto. [Sea $f(x) = x^2$ su derivada es $f'(x) = 2x$ un caso particular donde la derivada de $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{R}$ es igual a $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$]
 - c. Relaciones establecidas entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte. [La relación entre la función derivada y la continuidad de las funciones.]
3. Relaciones de representaciones: La exploración de los significados de un concepto matemático requiere de los sistemas de representación. Con ello, se identifica el modo en que el concepto es presentado.
- a. La relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un sistema de representación. [Sea la función $f(x)=2x$. Determinar la derivada por definición. Entonces tenemos $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$ que es igual a tener $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$ es igual a 2. En este caso se está viendo como una transformación sintáctica invariante].
 - b. La relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes. [Sea la función $f(x)=2x$, y $f'(x)=2$, representar gráficamente ambas funciones (Figura 3)]

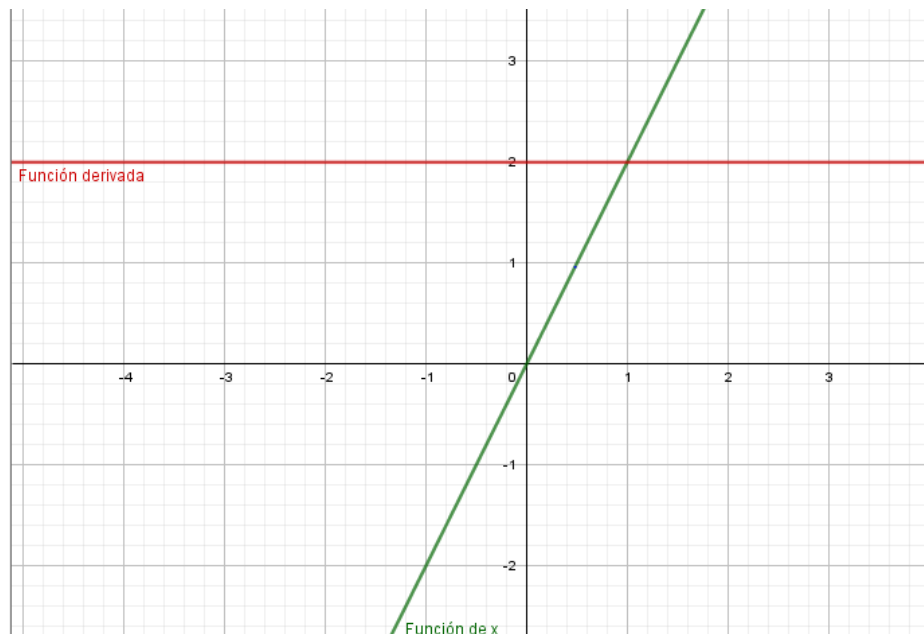


Figura 3. Traducción entre sistemas de representación

- c. La relación entre dos signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación. [Un ejemplo de ello es por

ejemplo lo que se observa en la Figura 4, ya que tienen tres funciones $f(x)=2x$, $g(x)=2x+1$ y $h(x)=2x-1$, la función derivada para cada una de estas funciones es la misma, por lo que se está tratando dentro de un mismo sistema de representación].

(Gómez, 2007, p. 46)

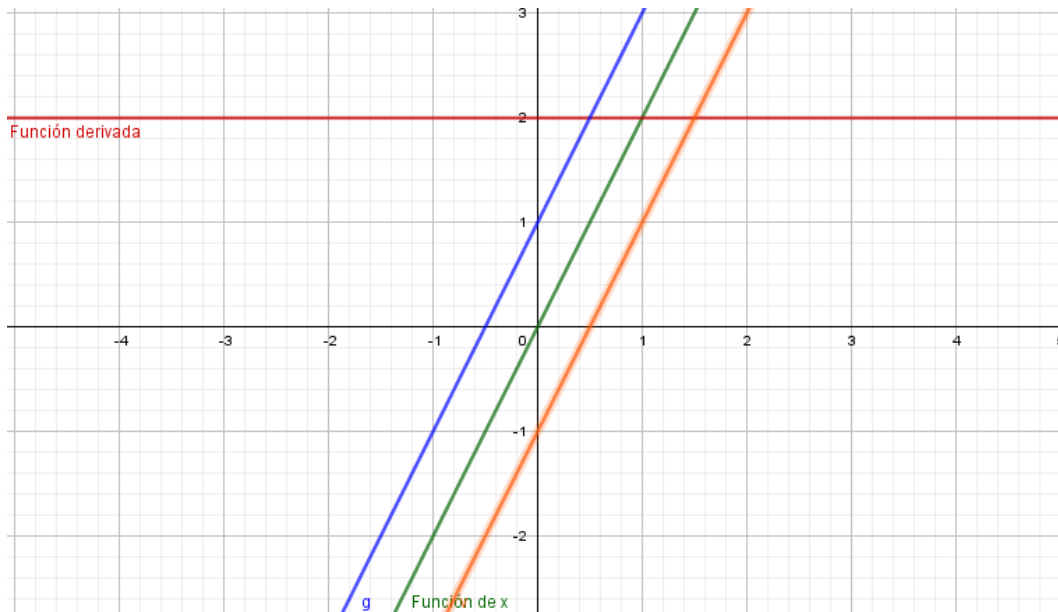


Figura 4. Transformación sintáctica variante

Con base en lo anterior, se observa que para explorar la estructura matemática de un concepto matemático en las matemáticas escolares debemos tomar en cuenta tres elementos:

- Objetos: Casos particulares de un concepto matemático y que conforman la extensión del concepto. [Para el caso de la derivada, algunos objetos que se hacen presentes son: una curva específica, la derivada en un punto particular, la distancia recorrida en un tiempo determinado].
- Conceptos: predicados que son saturados por objetos y a su vez, conforman estructuras matemáticas. [En el caso de la derivada, algunos conceptos serían, la derivada, la función y la recta tangente].
- Estructuras matemáticas: conformadas por conceptos. [Por ejemplo, podemos mencionar algunas estructuras como el conjunto de rectas tangentes y normales].

(Gómez, 2007, p. 46)

Los conceptos son componentes de nuestro pensamiento, es decir, es aquello con lo que pensamos (Rico y Fernández-Cano, 2013). Son importantes en educación, en particular para

Matemática Educativa, porque son cruciales para entender e interpretar procesos mentales y psicológicos como: categorización; inferencia; memoria; aprendizaje; y decisión. En este sentido el análisis conceptual muestra una de las concepciones del método de análisis, en donde son establecidas las condiciones necesarias con las cuales se puede manipular un concepto. El origen del análisis conceptual se detecta en la preocupación por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje, que trata de encuadrar los términos y sus interconexiones.

En su realización se examina cuidadosamente la diversidad de significados; las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias), intersubjetivos (concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual y el campo procedimental.

(Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 8).

El campo conceptual es lo relacionado con el cuestionamiento qué es lo que compone al conocimiento matemático (Cañadas y Gómez, 2015). En el campo conceptual son identificados diversos niveles de los cuales se puede pasar de un nivel inferior a un nivel superior cuando son considerados otros elementos y relaciones (Cañadas y Gómez, 2015):

- a. Hechos (unidades de información y sirven como registros de acontecimientos)
 - i. Términos: son las denominaciones o vocablos con los que designamos los conceptos o las relaciones entre conceptos. [Para la derivada aparecen algunos términos como curva, distancia o tiempo por mencionar algunos].
 - ii. Notaciones: Son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar de modo breve y preciso. [Las notaciones $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{d}{dx}[x]$ entre otras, son utilizadas para expresar a la derivada].
 - iii. Convenios: Son acuerdos tácitos o consensuados para comunicar información sin ambigüedad, evitando explicaciones. [En el siguiente límite $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ se tenía el convenio de que E sería un número distinto de cero para después eliminarlo como si fuera cero].
 - iv. Resultados: Son unidades de información producto directo e inmediato de relaciones entre términos, susceptibles de ser memorizadas, cuyo dominio y control conviene disponer para trabajar en matemáticas sin tener que partir siempre de cero. [El siguiente límite $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ se muestra como la definición de un concepto más general que es la derivada, la razón de cambio o incluso la pendiente de una recta tangente. Por lo tanto, se considera un resultado que involucra a la derivada].
- b. Conceptos (es un conjunto de hechos, suelen admitir un modelo o representación y designan un signo o un símbolo). [Un ejemplo de concepto es, el máximo y mínimo de una función].

- c. Estructuras conceptuales (sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos, constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos). [Por ejemplo, las distancias máxima y mínima de un planeta].

(Rico, 1995, p. 14)

El campo procedimental se refiere a los procedimientos y modos de actuación con respecto al conocimiento (Cañadas y Gómez, 2015). En los cuales se destaca:

- a. Destrezas (se ejecutan procesando hechos, produciendo manipulaciones de símbolos y transformaciones. [Por ejemplo, calcular la tangente de una curva en un punto dado]. Las destrezas se clasifican en:
 - i. Aritméticas: Son aquellas necesarias para un correcto dominio del sistema decimal de numeración y de las cuatro operaciones básicas. Entre ellas se destaca la lectura y escritura de números; el cálculo mental con dígitos y algunos números con dos cifras; el cálculo con papel y lápiz; y el empleo de la calculadora.
 - ii. Métricas: Son las destrezas necesarias para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. Es incluido en dominio del sistema métrico decimal.
 - iii. Geométricas: Son las destrezas que incluyen rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo plano. Además, está incluido el dominio y empleo correcto de algunos convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.
 - iv. Gráficas y de representación: Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar la relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están utilizando destrezas del tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o relación.
- (Rico, 1995, p. 16)
- b. Razonamientos (son ejecutados sobre conceptos). [Por ejemplo, encontrar el máximo o el mínimo de una función].
 - c. Estrategias (ejecutados sobre estructuras conceptuales, produciendo la manipulación de distintos sistemas de representación). [Por ejemplo, calcular las distancias mínima y máxima de un planeta].

3.2.1.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación están compuestos por signos que comprenden unas reglas. Las reglas determinan:

1. Cómo crear un signo que pertenece al sistema.
2. Cómo reconocer si un signo dado pertenece a él

3. Cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos.

Una estructura matemática o un mismo concepto puede ser representado en diversos sistemas de representación, lo cual permite se pueden identificar y caracterizar en cuatro categorías, las operaciones que se realizan sobre los signos pertenecen a los sistemas de representación (Cañadas y Gómez, 2015):

1. Creación y presentación de signos o expresiones. Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas.
2. Transformación sintáctica invariante. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie.
3. Transformación sintáctica variante. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia.
4. Traducción entre sistemas de representación. Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece una relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diversos sistemas de representación.

(Cañadas y Gómez, 2015, p. 18)

Usualmente son considerados los siguientes sistemas de representación:

- a. Numérico (compuesto por símbolos llamados números cuya representación numérica es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).
- b. Simbólico (sistema de representación específico porque tiene sus propios signos: números; letras; y símbolos de las operaciones aritméticas) con ellas se puede operar y existe una relación entre ellos).
- c. Tabular (está ligado al sistema de representación numérico, pero tiene sus propios signos y reglas de combinación de los mismos. La información se presenta en filas y columnas de la tabla y forman parte de las normas de este sistema de representación).
- d. Gráfico (este tipo de representaciones generalmente utiliza las gráficas en sistemas cartesianos).
- e. Geométrico (el sistema de representación geométrico se utiliza para representar con figuras geométricas).
- f. Pictórico (suelen representar a un cardinal de un número de elementos y describir el uso que se hace de la agrupación para determinar el uso que se hace de la agrupación para determinar la cardinalidad en un conjunto).
- g. Verbal (el sistema de representación tiene sentido, cuando el lenguaje es referido a conceptos y procedimientos matemáticos que se quieren representar).

- h. Manipulativo (como su nombre lo indica es una representación que es palpable, las dificultades que causa es confundirlo con el material didáctico).
- i. Ejecutable (Este sistema de representación se asocia a programas que cumplen las características requeridas para cualquier sistema de representación para un tema determinado de las matemáticas escolares).

(Cañadas y Gómez, 2015, p. 20)

3.2.1.3 Fenomenología

Freudenthal considera que la Matemática surge como una abstracción de la realidad, los conceptos matemáticos representan lo que tienen en común con una amplia variedad de situaciones (Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo, 2013). La fenomenología está constituida por las conexiones entre el concepto matemático y las situaciones del mundo real. Las implicaciones que tiene la fenomenología para la enseñanza de las matemáticas, constituyen la fenomenología didáctica (Castro-Rodríguez et al. 2013).

El término fenomenología dentro del análisis de contenido se usa como dimensión del significado de un concepto matemático. La fenomenología viene dada por la tripla: contextos, situaciones y fenómenos.

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento (Rico et al. 2008). Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para qué se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones (Rico et al. 2008, p. 58). Los contextos serán se considerarán los matemáticos (situaciones puramente matemáticas) y los contextos no matemáticos (aquellas situaciones en la vida cotidiana) (Rico et al. 2008).

Una situación viene dada por una referencia al medio (personales, educativas, ocupacionales, públicas, científicas y profesionales) en el que se sitúan tareas, cuestiones matemáticas que se pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo (Castro-Rodríguez et al. 2013, p. 149). A continuación, se presentan los tipos de situaciones propuestas en Castro-Rodríguez et al. (2013)

- Las situaciones personales son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Por ejemplo: Tomás ha logrado reunir la mitad de los cromos de la colección de la Liga de Fútbol Profesional. Sabe que tiene 48 cromos. ¿cuántos cromos forman la colección completa?
- Las situaciones educativas son las que encuentra el alumno en el centro escolar. Se refiere al modo en que el centro escolar propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. Por ejemplo: Al tostarse, el café pierde un

quinto de su peso. Un comerciante tiene 80 kg. de café verde. ¿Cuánto pesará el producto después de tostarlo?

- Las situaciones ocupacionales son las que encuentra el alumno en un entorno de trabajo. Se refiere al modo en que un entorno laboral propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta.
- Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. [Un autobús se desplaza entre Zacatecas y Aguascalientes. Cuando ha recorrido la cuarta parte del trayecto se encuentra a 15 km de la primera parada, que está a 121 km de Zacatecas. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?]
- Las situaciones científicas son las más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Por ejemplo: La nave espacial “Voyager II” salió de la Tierra el 20-8-1997 con destino a Júpiter, tardando en llegar cinco años. Si la mitad del tiempo lo empleó en llegar a Marte. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a Marte?
- Las situaciones profesionales se refieren a aquellas que se le proponen al estudiante para desarrollar sus competencias profesionales.

(p. 149)

El término fenómeno hace referencia al conjunto de fenómenos organizados por un concepto o una estructura matemática determinada (Castro-Rodríguez et al. 2013) y están ligados al tema en cuestión. Por ejemplo, el diseño de unos lentes, la distancia de un planeta, entre otros. El fenómeno debe contestar a la pregunta para qué se dio la situación.

Finalmente, se concluye este capítulo con una clasificación de los tipos de significado, esto permite ubicar en qué parte de la organización escolar ocurre cada uno de los significados, en este caso la derivada.

3.2.2 Tipos de significados

Los significados a su vez pueden ser tipificados en conceptuales, técnicos y prácticos como se propone en Hernández, Zamora y Lupiáñez (2020). Esta clasificación es fácilmente adaptable a cualquier concepto matemático. Por lo anterior, a continuación, se hace una adaptación para el caso del tema de la derivada:

- *El significado conceptual*, corresponde principalmente a los que se abordan al introducir el tema de la derivada y se orientan en explicar el concepto de la derivada de una función.
- *El significado técnico*, se concentra generalmente en las propiedades o reglas para el cálculo de las derivadas. Los significados técnicos se destacan de los teóricos por el carácter de la herramienta analítica que asume cada una de las nociones.

- El significado práctico, se presenta generalmente a través de los fenómenos y situaciones en donde la derivada toma sentido como una herramienta para la solución de problemas en contextos no matemáticos.

3.3 Los significados de un concepto matemático en el análisis conceptual y de contenido

La investigación se centra en identificar las relaciones y diferencias de los significados de la derivada en diferentes niveles del contenido matemático escolar que se hacen presentes en dos tipos del currículum. Para ello, se toma la noción de derivada como un todo y los significados de ella como pequeñas componentes. Para esta tesis se tomarán como herramientas metodológicas las primeras dos categorías que estructuran el análisis didáctico: el análisis conceptual y el de contenido (Figura 5). El primero centrado en el nivel 3 de un contenido matemático (Cañadas y Gómez, 2014), analizando documentos de corte histórico. El segundo, aplicado a dos tipos del currículum (oficial y potencial) asociados a los niveles 4 y 6 (global y local, respectivamente) de un contenido matemático escolar (Cañadas y Gómez, 2014).

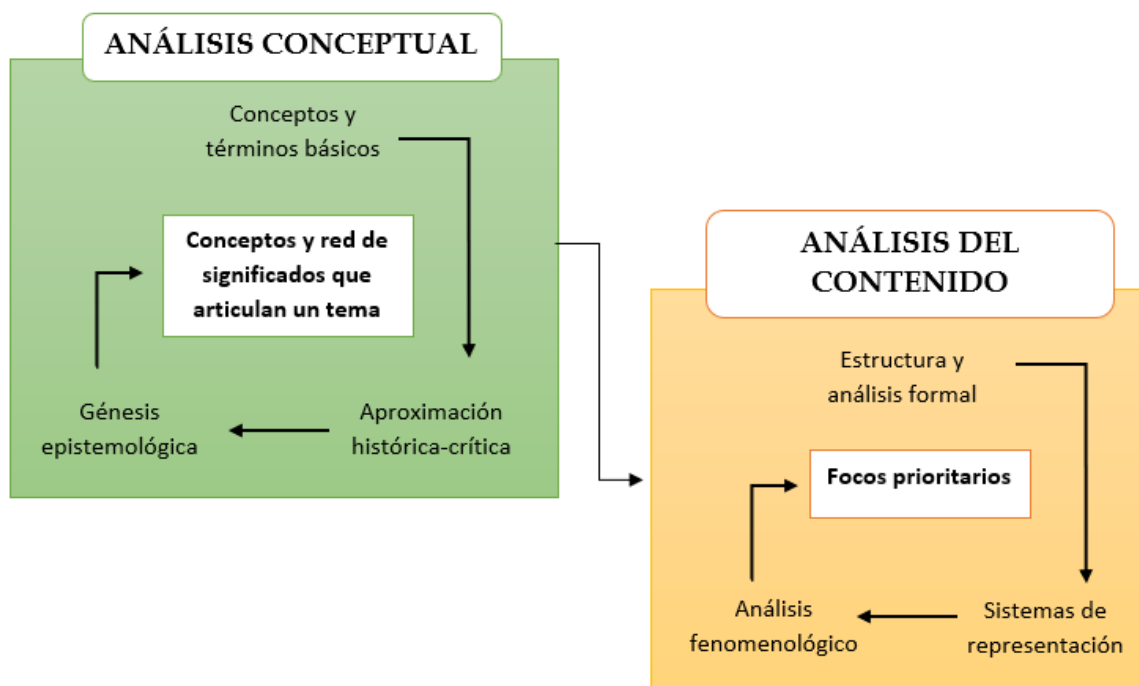


Figura 5. Primeras dos categorías del análisis didáctico

Fuente: Fragmento extraído de las categorías del análisis didáctico (Rico, 2013, p. 22)

De esta manera, el análisis didáctico comienza por el análisis conceptual, el cual se basa en la revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el texto, creando así una red de significados de dichos conceptos (Rico y Fernández-Cano, 2013). En la presente investigación, el desarrollo histórico del concepto de la derivada funge un papel importante,

ya que, al realizar la revisión histórica, epistemológica y crítica de dicho concepto, la red de significados creados, permite la identificación y organización de los significados de la derivada en los dos tipos del currículum (oficial e impartido) que se pretenden analizar. Posterior se continúa con el análisis de contenido que se complementa con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articulan el tema matemático y determina sus focos prioritarios. Cada uno de estos métodos se describen en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología que se adopta en la presente investigación. Este estudio será de corte cualitativo puesto que se tiene como objetivo general describir las relaciones y diferencias entre los significados de la derivada propuestos por el currículum oficial y potenciados en el currículum impartido. Es decir, la información de interés son los significados de la derivada cuyas componentes se conforman por características de corte cualitativo que son estructura conceptual, sistemas de representación y la fenomenología (propuestos en Rico, 2012). Además, cumple con una investigación cualitativa que según Hernández, Fernández y Baptista (2014) se enfoca en profundizar interpretaciones y significados; en este caso aquellos presentes en dos tipos del currículum.

La investigación tiene un alcance descriptivo. Es decir, no se tiene control sobre las variables en cuestión (Kothari, 2004); en este caso las variables por estudiar son los significados de la derivada, por lo que la tarea central será detallar la forma en la que se presentan (Hernández et al., 2014) a través de los rasgos que definen a un significado de un concepto matemático (Rico, 2012). La temporalidad de la presente tesis es longitudinal retrospectivo (Kothari, 2004) dado que las fuentes de información ya existen. En este caso, el plan sintético de Cálculo I ya estaba establecido antes de su análisis, así como la observación de clase a la profesora. Es decir, el estudio se hace posteriormente a los hechos analizados.

Para la realización de la presente tesis, se consideran cuatro fases guiadas por los objetivos específicos mencionados en la sección 2.5 del capítulo 2. En la Tabla 4, se aprecia la utilización de tres métodos y los referentes para llevar a cabo la investigación. El método de análisis conceptual (para el primer objetivo) y el método de análisis de contenido (para los objetivos 2 y 3); ambos métodos forman parte del análisis didáctico y son descritos en Rico y Fernández-Cano (2013). Por último, el análisis comparativo (para el objetivo 4) basado en lo expuesto en Makón (2004).

Tabla 4.

Tabla de metodología

Objetivos específicos	Métodos	Fuente	Técnicas	Instrumento
1. Identificar y organizar los significados de la derivada en el desarrollo de la noción de derivada.		Ruiz (2003) Ortega del Rincón y Sierra (1998) Ponce (2015) y Grabiner (1978)	Análisis de textos	Ficha de registro
2. Identificar y organizar los significados de la derivada en el plan de estudios de la licenciatura en matemáticas de la unidad académica de matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas	Análisis conceptual	El plan de estudios sintético de Cálculo I propuesto para segundo semestre de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.	Investigación documental	Ficha de registro
3. Identificar y organizar los significados de la derivada en una observación de clase a un profesor de matemáticas al impartir el tema de la derivada en una licenciatura en matemáticas	Análisis de contenido	Aula de clases de la profesora titular de la materia	<ul style="list-style-type: none"> Observación directa no participante de manera asincrónica a la profesora, titular de la materia para el semestre. Análisis de la observación de clase 	<ul style="list-style-type: none"> Video Ficha de registro
4. Comparar los significados de la derivada del currículum oficial e impartido identificado en los objetivos anteriores.	Análisis comparativo.	Fichas de registro de los objetivos específicos dos y tres.	Contraste de contexto de forma múltiple.	Tabla comparativa

A continuación, se describen cada uno de los métodos adoptados y se concluye con un esquema metodológico donde se explica la forma en la que fueron utilizados en esta investigación.

4.1 Método del análisis conceptual

En Ciencias de la Educación, en particular, la Matemática Educativa, el análisis conceptual es una herramienta metodológica que:

- Permite controlar la complejidad semántica.
- Seleccionar las opciones idóneas.
- Disponer del aparato teórico adecuado para la investigación educativa.

(Rico y Fernández-Cano, 2013)

El análisis conceptual aborda una cuestión importante para el investigador donde es indispensable el conocimiento amplio del campo de estudio; marco teórico sólido; y unos conceptos precisos en donde se plantean cuestiones significativas (Rico y Fernández-Cano, 2013).

La multiplicidad de significados de un concepto matemático implica que, para efectos de organizar los significados en una investigación, el investigador debe:

- Recabar información necesaria que le permita identificar dichos procesos.
- Organizar la información que le sea útil para la investigación.

(Gómez, 2007)

Lo anterior, significa que el investigador debe estar seguro de que la información provenga de fuentes confiables y tenga una estructura lógica para llevar a cabo la investigación. El investigador debe organizar la información y darle coherencia para que todo tenga sentido. La organización, en este caso será la propuesta por las componentes del significado expuestas anteriormente.

Lo que se menciona en Rico y Fernández-Cano (2013) es que las dificultades presentadas de la investigación son los conceptos centrales y que en gran parte provienen de la historia y encierran elementos sutiles que los pensadores conformados a lo largo de sus reflexiones y sus experiencias.

Esta situación, es una de las que el análisis conceptual trata de resolver, ofreciendo un método para convertir los conceptos en piezas teóricas precisas. El análisis conceptual es un método no empírico que trabaja con enunciados textuales y no con datos de naturaleza sensible. El análisis conceptual trabaja con: descripciones; definiciones; listas extensivas; ejemplos de uso; contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 7). Este método se sirve de la historia, es por ello, que es ideal para aplicarlo a la identificación de significados de la derivada en su desarrollo histórico. Además, el método permite la reflexión previa de lo que se va a investigar determinando y caracterizando aquellos puntos clave que delimitan el problema de estudio;

las ideas; los conceptos y teorías sobre lo que se quiere dar solución (Rico y Fernández-Cano, 2013). Lo interesante para el presente estudio es que este método trata de eliminar las inconsistencias que se derivan de la falta de precisión en el significado de los conceptos utilizados.

El análisis conceptual es una actividad útil para los investigadores en Matemática Educativa porque:

1. Proporciona la oportunidad de profundizar los conceptos matemáticos y las nociones básicas sobre el conocimiento, sobre los fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo, sobre los principios de enseñanza e interpretación de aprendizaje (Rico y Fernández-Cano, 2013). El estudio del desarrollo histórico de un concepto matemático es una fuente fundamental de información para el análisis conceptual.
2. Aporta argumentos para determinar qué conocimientos, procedentes de la matemática, de la filosofía y de la ciencia cognitiva, pueden estar en base de la disciplina teórica de la Educación Matemática.
3. El análisis conceptual es un precedente de la reducción teórica para responder cuestiones de fundamento en Educación Matemática.

(Rico et al., 2008, p. 13)

En conclusión, el método de análisis conceptual propiciará fundamentos de su génesis para tener un precedente respecto a los significados encontrados en el plan sintético de Cálculo I y en la observación de clase a una profesora. Estos darán una mirada informativa de cómo puedan ser organizados de una manera coherente y darles una estructura lógica tal como lo mencionan Rico y Fernández-Cano (2013).

4.2 Método del análisis de contenido

Para lograr el objetivo general de la investigación esta tesis se apoya también del análisis de contenido, segunda categoría del análisis didáctico, el cual va a servirnos como una herramienta metodológica. El análisis de contenido es uno de los métodos de mayor extensión debido a sus dos dimensiones: cualitativa y cuantitativa (Rico, 2012,) de los contenidos de la comunicación. En general, las técnicas del análisis de contenido trabajan la naturaleza del mensaje-discurso (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9). Según Rico y Fernández-Cano (2013) este método se ha utilizado en Matemática Educativa como un método para establecer y estudiar la multiplicidad de significados de conceptos y procedimientos que aparecen en un texto (en nuestro caso del programa sintético de Cálculo I y discurso de una profesora). Se añade que este método es sensible a las variaciones y adherencias contextuales de los significados; es riguroso, sistemático y verificable.

El análisis de contenido nos ayuda además a: definir patrones en el discurso; contrastar una hipótesis previa e inferir significados interpretativos en un texto (Rico y Fernández-Cano, 2013) que es en lo que nuestra investigación está enfocada en identificar. Los procedimientos y usos que se le da con mayor frecuencia al análisis de contenido son (Rico, 2012):

- Comparar documentos derivados de la misma fuente.
- Comparar mensajes de una misma fuente en distintas situaciones.
- Comparar mensajes de dos o más fuentes.

Que como se puede observar a la investigación se le da uno de estos usos, que es comparar el mensaje de dos o más fuentes, pues recordemos que el objetivo es identificar relaciones y diferencias de los significados entre el currículum oficial y el currículum impartido.

Etapas para el análisis conceptual y de contenido

Las etapas que se utilizarán para realizar el análisis de contenido y conceptual, son las propuestas por Rico y Fernández-Cano, (2013) y se enlistan enseguida:

- * Delimitar el corpus de contenido (texto, discurso, producción escrita) a analizar.
- * Concretar la unidad de análisis: palabra (nombre, verbo o adjetivo), frase o párrafo.
- * Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.
- * Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas. Evitar en lo posible la categoría "OTROS", para obviar indeterminaciones.
- * Codificar y cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionadas (sistema inductivo). Cada unidad sólo debe incluirse en una categoría.
- * Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas, considerando sus unidades de análisis adscritas.
- * Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes (hablante/escritor u oyente/lector).

(p. 10)

Aunque las etapas aplicadas en cada análisis son las mismas, las finalidades que se persiguen en cada uno son diferentes. En el análisis conceptual se pretende profundizar en la estructura y los modos de uso (Rico y Fernández-Cano, 2013) del objeto matemático derivada; por lo que estos estarán menos sujetos al contenido matemático escolar y más relacionados a la matemática como conocimiento per se. En el análisis de contenido se tomará en cuenta el objeto matemático, pero en un contexto completamente escolar, por lo que en el análisis de contenido lo que se analiza no es el objeto matemático sino el contenido matemático escolar ligado al tema de derivada. De esta manera, para analizar la forma en que se aborda un tema matemático escolar, es necesario contar con un conocimiento referencial sobre el objeto matemático y distinguirlo del tema matemático escolar. Ambas perspectivas guardan diferencias, pero son igualmente importantes para realizar esta investigación porque con base en el conocimiento referencial, se identificarán las relaciones y diferencias en tema de la derivada en ambos tipos del currículum.

4.3 Análisis comparativo

El método comparativo lo que busca es identificar y descubrir la explicación de la ocurrencia o no de un fenómeno, considerando que los fenómenos son diversos o similares (Makón, 2004). Este método, permite comparar aspectos diferentes y similares de las unidades seleccionadas, en nuestro caso de estudio, las unidades en las que va a trabajar son los significados de la derivada encontrados dentro de los planes de estudios y el discurso del profesor.

Las técnicas propias del método comparativo buscan ser abordables (Makón, 2004) para esta complejidad de los significados de la noción de derivada en ambos tipos del currículum. También evita caer en falsos particularismos y permite establecer la excepcionalidad de un fenómeno (Makón, 2004). Es por esta razón que se elige como un método adecuado para la presente investigación.

La acción de comparar identifica elementos comunes, las regularidades de distintos casos, así como también sus diferencias con la finalidad de encontrar explicaciones claras de los fenómenos a estudiar (Makón, 2004). En nuestro caso, como ya se mencionó anteriormente son los significados del concepto de derivada.

El tipo de método comparativo que se utilizará en esta investigación será los estudios de un caso único o también llamado análisis comparativo (Makón, 2004, p. 4), porque se utilizan conceptos desarrollados en diversas partes. Las etapas para realizar un análisis comparativo son:

- Mostrar particularidades de cada caso. En la presente investigación las componentes del significado de un concepto matemático: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Rico, 2012) son el fenómeno que se va a observar. Por lo tanto, en esta etapa del análisis comparativo, hace referencia a estas componentes.
- Delimitar la aplicabilidad. Es importante que las unidades sean accesibles y bien delimitadas en este caso sólo se tienen dos unidades: el currículum oficial (programa de estudios sintético de Cálculo I) e impartido (observación de clase a profesora)
- Delimitar el vínculo con la evidencia empírica. Es lo que al final se debe lograr o se debe ver a simple vista.

(Makón, 2004)

4.4 Esquema metodológico

Las fases y métodos utilizados en cada una de ellas se presentan en la Figura 3, conformando el proceso metodológico que se sigue para la presente investigación (Figura 6). En las primeras tres fases se pasará por las cinco etapas descritas en la sección 4.2 y que corresponden al análisis conceptual y de contenido para la organización e identificación de los significados de la derivada en los diferentes corpus. Al concluir la tercera fase, se inicia la última fase con las etapas que el estudio comparativo.

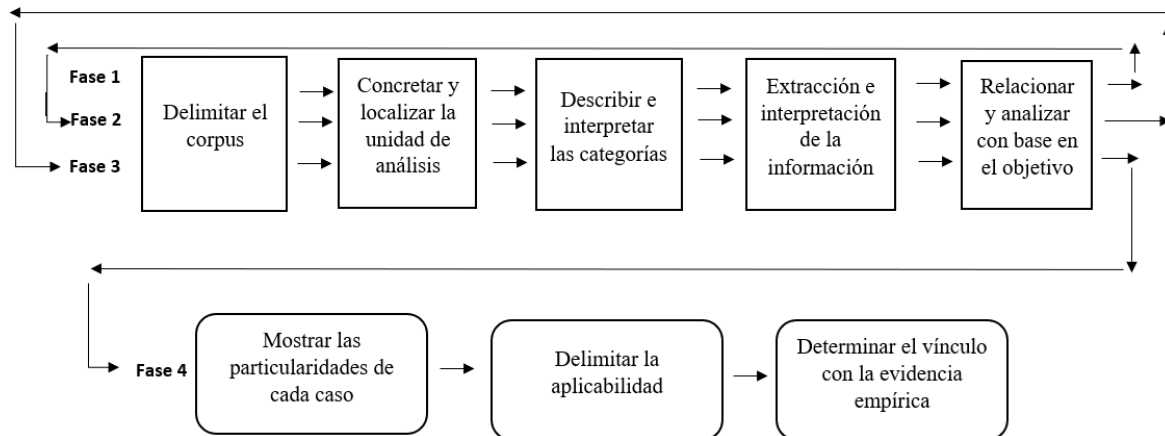


Figura 6. Imagen del proceso metodológico

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta el desarrollo del proceso metodológico, es decir, se explica con detalle cada una de las fases que componen la presente tesis, así como las actividades que se realizan en cada una de las etapas: las etapas del análisis de contenido aplicado al análisis conceptual, al plan de estudios sintético de Cálculo I y la observación de clase; y las etapas del análisis comparativo aplicado al currículum oficial e impartido.

4.4.1 Fase 1. Etapas metodológicas para el análisis conceptual al desarrollo histórico de la derivada

En esta fase se desarrolla la forma en que se identificaron y organizaron los significados de la derivada presentes en el desarrollo histórico del concepto. Se explica la manera en que son aplicadas las etapas metodológicas del análisis de contenido en análisis conceptual de la derivada que son:

- **Delimitar el corpus.** Según las etapas para la realización del análisis conceptual, la primera etapa es delimitar el corpus para esta fase el corpus es el desarrollo histórico de la derivada que se verá en el capítulo 5, en el cual se recaba información de cuatro fuentes de información, entre ellos tres artículos y un libro que son mencionados en la siguiente tabla (Tabla 5). La técnica que se utiliza es una investigación documental (Kothari, 2004), dado que la fuente de información es la bibliografía donde se explica con mayor detalle cómo es el desarrollo del concepto de derivada.

Tabla 5.

Fuentes de información requeridas para el desarrollo histórico

Autores	Año	Título	Tipo de documento
Tomás Ortega del Rincón y Modesto Sierra Vázquez	1998	El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza.	Artículo
Ángel Ruiz	2003	Historia y Filosofía de las Matemáticas	Libro
Juan Carlos Ponce Campuzano	2015	Breve historia del concepto de derivada	Artículo
Judith V. Grabiner	1978	The origins of Cauchy's theory of derivate	Artículo

- **Concretar y localizar la unidad de análisis.** Para el desarrollo histórico, lo que se realiza en el artículo de Ortega del Rincón y Sierra (1998) es tomar en cuenta la sección número dos el cual tiene como título “Desarrollo Histórico de la Derivada” ubicado en las páginas 88, 89 y 90 del artículo pues lo que se pretende es complementar con la información del libro de Ruiz (2003). La unidad de análisis son fragmentos verbales en donde hace referencia al concepto de la derivada. Del libro de Ruiz (2003) lo que se realiza es tomar el capítulo XV de la página 270-288 titulado “El cálculo infinitesimal”. Las unidades de análisis son fragmentos algunos verbales y otros simbólicos en donde se destaca la derivada. Así mismo del artículo de Ponce (2015) la unidad de análisis son fragmentos verbales y simbólicos que hacen referencia al concepto de derivada, para ello se toman los capítulos 3-4 los cuales llevan de nombre “Primera etapa: cálculo de máximos y mínimos” y “Segunda etapa: tangentes, áreas y razones de cambio” respectivamente. Finalmente, en el artículo de Grabiner (1978) se realiza un complemento de información, por medio de fragmentos verbales y simbólicos que son localizados desde la página 381 a la página 393.
- **Describir e interpretar las categorías.** Las categorías que se toman en cuenta son las componentes del significado. La primera componente es la estructura conceptual dividida en dos campos (conceptual y procedimental). En el campo conceptual se consideran los hechos, los conceptos y las estructuras conceptuales. El campo procedimental está estructurado por las destrezas, razonamientos y las estrategias. La segunda componente del significado son los sistemas de representación y la tercera es la fenomenología, de las cuales se va a determinar si son contextos matemáticos o no

matemáticos. En cada tipo de contexto se identifica la situación y el fenómeno. Cada una de estas componentes están mostradas con mayor detalle en el capítulo 3.2.

- **Extracción e interpretación de la información**

Código				
Unidad de análisis				
Precursor y fecha:				
Estructura Conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología	
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contextos matemáticos	Contextos no matemáticos
Nivel 1	Nivel 1		Situación:	Situación:
Términos:	Destrezas:			
Nivel 2	Nivel 2			
Conceptos:	Razonamientos:			
Nivel 3	Nivel 3			
Estructuras conceptuales:	Estrategias:			
Notas:				

Figura 7. Ficha de registro para la recogida de datos en el desarrollo histórico

Para la generación de códigos del desarrollo histórico de la derivada, se analizan cuatro documentos de corte histórico, entre ellos, artículos y libros que hablaban de la derivada (Tabla 6). Estos libros y artículos son codificados de la siguiente manera.

Tabla 6.

Codificar los libros

Número de libro	Documento en formato APA
01	Ortega del Rincón y Sierra (1998)
02	Ruiz (2003)
03	Ponce (2015)
04	Grabiner (1978)

Por lo que el formato del código quedó de la siguiente manera:

Número del documento histórico- HT (tipo de documento, en este caso es histórico)-número de página-número de párrafo-número de renglón.

Un ejemplo de codificar en la ficha de registro (Figura 7) es como mostramos en la Figura 8

Ruiz (2003)

15.1 Hacia el cálculo

Si bien algunos de sus fundamentos, especialmente en torno a la integral, se encuentran en la Antigüedad Clásica griega, como por ejemplo en los trabajos de Arquímedes, en la nueva época un primer punto importante por señalar fue establecido por Bonaventura Cavalieri, en su Geometría indivisibilium continuum del año 1635. Usando el concepto de "indivisible", este profesor de la Universidad de Bolonia generaba las rectas a partir de puntos y los planos a partir de las rectas por medio del movimiento. Es decir, avanzó elementos en lo que luego sería el cálculo integral. Es en este territorio intelectual que nació precisamente el famoso "teorema de Cavalieri".

Párrafo # 2

Pero en esa época no sólo se trabajaba en el cálculo de longitudes de segmentos, áreas, volúmenes. También en el problema de encontrar la recta tangente a una curva a un punto dado. **Reglón #2**

En general, cuatro fueron los problemas que se buscó resolver: determinar la velocidad y la aceleración instantáneas de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo, y viceversa (si se tenía la velocidad o la aceleración, se trataba de encontrar la distancia o la velocidad respectivamente en un momento determinado); determinar la tangente a una curva en un punto (por ejemplo para dar una dirección de un cuerpo en movimiento o el cálculo de rectas tangentes y normales a curvas para la descripción del comportamiento de la luz, el diseño de lentes); encontrar el máximo o el mínimo de una función (por ejemplo, para calcular las distancias máxima y mínima de un planeta en su movimiento traslacional, o la inclinación de un cañón para que una bala golpee a la máxima distancia posible); encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinadas por curvas o superficies, y centros de gravedad de cuerpos (utilidad en el cálculo de la distancia recorrida o el área "barrida" por el planeta en un tiempo).

En los orígenes del cálculo es posible determinar dos tendencias definidas, una algebraica y otra geométrica. Mientras que Fermat, Descartes o John Wallis se inclinaban por una aproximación algebraica, Torricelli, Isaac Cavalieri y Barrow lo hacían por una geométrica. Esto último también sucedía con Huygens.

Debe señalarse que en la mayoría de los casos el tipo de curvas que estudiaban en la mitad del siglo XVII eran algebraicas y sólo muy ocasionalmente trascendentes.

Se deben mencionar varios avances precursoros en el cálculo. Por ejemplo, ya en el mismo año de 1638, Fermat había descubierto un método para encontrar máximos y mínimos en una ecuación algebraica simple, el cual fue generalizado posteriormente por el holandés Johannes Hudde.

Fermat y la tangente

Fue en el curso de sus trabajos en la geometría de coordenadas que Fermat descubrió un método que le permitía calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica. Un claro antecedente del concepto de derivada. La forma precisa en que Fermat lo realizó se puede reducir al siguiente límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Número de página

271

También en el problema de encontrar la recta tangente a una curva a un punto dado.

01HT27122

Número del documento

Tipo de documento

Número de renglón

Número de párrafo

Número de página

Figura 8. Ejemplo de codificación para el desarrollo histórico

Fuente: Elaboración propia

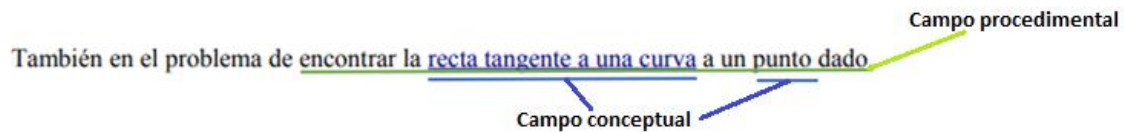


Figura 9. Ejemplo de interpretación de un fragmento de Ruiz (2003)

Para la interpretación de los significados de la derivada, se identifica de cada fragmento el campo conceptual o el campo procedimental (Figura 9). Después de identificarlo se hace uso del instrumento propuesto en donde se reporta la información obtenida (Tabla 7). Para continuar con el llenado de la ficha se hace énfasis en la oración para el tipo de representación, en este caso, no indica que el tipo de representación, por ello, se pone sin información en el llenado de la ficha (Tabla 7). Finalmente, se detecta qué tipo de situación es y cuál es el fenómeno de la oración. En el caso del fragmento mostrado en la Figura 9 la cual se observa que tampoco tiene información al respecto. Al igual que con las demás componentes se prosiguen con el llenado de la ficha (Tabla 7).

Tabla 7.

Llenado de la ficha de registro con la información obtenida

Código 01HT27122						
Unidad de análisis También en el problema de encontrar la <u>recta tangente a una curva</u> a un punto dado.						
Precursor y fecha: Matemáticos del siglo XVI, siglo XVI						
Estructura Conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología			
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contextos matemáticos		Contextos no matemáticos	
Nivel 1 Términos: Recta tangente Curva Punto dado	Nivel 1 Destrezas: Encontrar la recta tangente a una curva a un punto dado.	Sin información	Situación: Sin información	Fenómeno: Sin información	Situación: Sin información	Fenómeno: Sin información
Nivel 2 Conceptos:	Nivel 2 Razonamientos:					
Nivel 3 Estructuras conceptuales:	Nivel 3 Estrategias:					
Notas :						

- **Relacionar y analizar con base en el objetivo**

Esta etapa se realiza en el capítulo 5 de la presente investigación. Está conformado por el desarrollo histórico del concepto de la derivada, así como el análisis de los significados encontrados en él. También se presenta una línea del tiempo conceptual, la cual permite organizar de manera coherente los significados del plan de estudios y los de la observación de clase.

4.4.2 Fase 2. Etapas metodológicas aplicadas al plan de estudios sintético de Cálculo I

En esta etapa de la investigación se explica con detalle la manera en que las etapas metodológicas del análisis de contenido son aplicadas al plan de estudios sintético de cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

- **Delimitar el corpus.** En esta etapa el corpus es el plan sintético de estudios de cálculo I de la materia de cálculo diferencial de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se realiza una investigación documental (Kothari, 2004), dado que el plan de estudios es un texto.
- **Concretar y localizar las unidades de análisis.** Del plan sintético de estudios de Cálculo I, se extrae la unidad de análisis. La unidad de análisis está compuesta por bloques de fragmentos verbales. Estos fragmentos son seleccionados con base en la relación que exista entre ellos, para ello el investigador en formación selecciona adecuadamente los fragmentos en donde se presentan los significados de la derivada dándoles una estructura lógica y coherente.
- **Describir e interpretar las categorías.** Las categorías que se toman en cuenta al aplicar correctamente el método de análisis de contenido en esta etapa son las mismas que se contemplan en el análisis conceptual del desarrollo histórico, mostrado en la fase anterior. Los detalles de cada una de las categorías se desarrollan con detalle en la sección 3.2 de esta investigación.
- **Extracción e interpretación de la información.** El instrumento que se utiliza para el levantamiento de los significados de la derivada presentes en el plan de estudios son las fichas de registro (Figura 10) en esta fase, se identifican los significados de la derivada adoptando la noción de significado expuesto en el capítulo 3.

Código				
Unidad de análisis				
Estructura Conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología	
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contextos matemáticos	Contextos no matemáticos
Nivel 1 Términos:	Nivel 1 Destrezas:		Situación:	Situación:
Nivel 2 Conceptos:	Nivel 2 Razonamientos:			
Nivel 3 Estructuras conceptuales:	Nivel 3 Estrategias:			
Notas:				

Figura 10. Ficha de registro para la recogida de datos

Dada la estructura el programa sintético de cálculo I, se considera poner la letra B seguido del número de bloque correspondiente a la unidad de análisis. Después se destaca el corpus que en este caso es el plan de estudios sintético de Cálculo I por lo

tanto se pone PE seguido del número de página en donde se encuentra la información y el número de significado. La generación de este código queda de la siguiente manera:

B_ número de bloque_ PE (Plan de estudios) _ número de página_orden de análisis.

Un ejemplo de codificación (Figura 9) en la cual se muestran todos los elementos que se contemplaron para la codificación el número de página, los párrafos que conforman el primer bloque. En la Figura 11 al generar el código tenemos que el bloque se contempla por esas tres imágenes las cuales corresponden a diferentes apartados de la estructura del plan de estudios, la flecha indica que así es como se va generando el código para esa parte del bloque I.



Figura 11. Ejemplo de codificación en el plan de estudios sintético de Cálculo I

En la Figura 12 se observa el Bloque I que se consideró para el plan de estudios sintético de Cálculo I de la materia de Cálculo diferencial, para la interpretación de los significados tenemos que observar las relaciones que tienen para poderle dar una interpretación lógica por lo que dada sus relaciones se busca el campo conceptual y el campo procedimental, después de que se identifica se pasa al llenado de la ficha de registro (Tabla 8). Una vez que se localiza la estructura conceptual, se analiza si existe información sobre los sistemas de representación y si la hay se procede a llenar la ficha de registro, en caso contrario, se pone en la ficha sin información tal como se muestra en la Tabla 8. De igual manera, se procede con la fenomenología, en este caso no se menciona ni los contextos ni las situaciones ni el fenómeno por ello en la Tabla 8 se puede ver que no hay información al respecto.

Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales
Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua y determina las formulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas.	Derivada de una función en un punto, primero de forma intuitiva a través de un ejemplo: como razón de cambio promedio. Definición de derivada de una función en un punto a través de un límite.	Determinar si una función admite o no, y porqué, derivada en un punto. Encontrar la función derivada de una función elemental o compuesta, haciendo uso de las propiedades de la derivada bajo operaciones entre funciones.

Figura 12. Bloque I del Plan de estudios sintético de Cálculo I

Tabla 8.

Llenado de la ficha de registro del Plan de estudios sintético de Cálculo I

Código B1PE1801						
Unidad de análisis						
Desempeños		Saberes teóricos/declarativos		Saberes procedimentales		
Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua y determina las		Derivada de una función en un punto, primero de forma intuitiva a través de un ejemplo: como razón de cambio promedio.		Entenderá el significado de la derivada de una función elemental o compuesta, en un punto, como la razón de cambio instantánea.		
Estructura Conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología			
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contextos matemáticos		Contextos no matemáticos	
Nivel 1	Nivel 1	Sin información	Situación:	Fenómeno:	Situación:	Fenómeno:
Términos: La derivada en un punto de una función real continua.	Destrezas: Aritmética: Definir la derivada en un punto de una función real continua.		Sin información	Sin información	Sin información	Sin información
Resultados: Razón de cambio promedio Razón de cambio instantáneo						

Nivel 2 Conceptos:	Nivel 2 Razonamientos:					
Nivel 3 Estructuras conceptuales:	Nivel 3 Estrategias:					
Notas:						

- **Relacionar y analizar con base en el objetivo**

Esta etapa se describe en el capítulo 6 de la presente investigación. En este capítulo se presentan las unidades de análisis de manera más estructurada y con mayor coherencia, se presentan también los análisis de los significados de la derivada mostrando sus particularidades. Así como un mapa conceptual en donde se muestran los significados obtenidos.

4.4.3 Fase 3. Etapas metodológicas aplicadas a la observación de clase a profesora

Para la realización de esta fase, se van a aplicar las etapas metodológicas a la observación de clase a una profesora. La profesora es llamada Ángel para mantener oculta su identidad. Ángel, es una profesora que tiene más de 20 años de experiencia impartiendo la materia de Cálculo I de la Universidad Autónoma de Zacatecas. La formación educativa de la profesora es Licenciada en Matemáticas y Maestra en Ciencias. La técnica utilizada es la observación directa, no participante (Kothari, 2004), porque nuestro objetivo es reportar sólo lo que se observa en la clase. Se tomará en cuenta otra técnica que consiste en el análisis de la observación a la clase por medio de los videos analizados. Estas técnicas ayudan a ver con claridad los significados y las interpretaciones.

- **Delimitar el corpus.** En esta etapa el corpus son las transcripciones de los videos de la observación de clase a la profesora Ángel. Estas transcripciones son el producto de los videos. Los videos fueron grabados por medio de la plataforma de Zoom entre las fechas 8 de mayo al 18 de junio del 2020 que fue en donde el tema de derivada fue impartido por la profesora. Se analizará la transcripción de tres videos correspondientes al bloque 1, guiado por primer desempeño propuesto en el programa sintético de Cálculo I para el tema de la derivada.
- **Concretar y localizar las unidades de análisis.** Dado que el corpus son las transcripciones de los videos, entonces nuestra unidad de análisis son los fragmentos de esas transcripciones tal como sucede en las fases anteriores. Por lo tanto, los fragmentos son verbales y simbólicos, también los fragmentos tienen la característica que hablan acerca del tema de la derivada.
- **Describir e interpretar las categorías.** En esta fase se identifican los significados de la derivada en el discurso de la titular de la materia de cálculo diferencial de la

Universidad Autónoma de Zacatecas. Las categorías que son consideradas para la identificación y organización de los significados de la derivada son las componentes del significado que propone Rico (2012): estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Estas componentes están descritas a detalle en la sección 3.2 de esta investigación.

- **Extracción e interpretación de la información.** El instrumento para la recolecta de la información presentes en el discurso del profesor es el video (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Se toma en cuenta otra técnica que consiste en el análisis de la observación a la clase para ello el instrumento a utilizar para la captura de los significados de la derivada identificados en el video son las fichas de registro (Figura 8) mencionadas anteriormente. Para generar el código de las transcripciones escritas del video se toma en cuenta observación de clase (OC), la fecha del video, seguido del minuto, después el segundo. Por lo que el formato para ello queda de la siguiente manera:

OC_fecha del video (día_número de mes) _ minuto_ segundo

En la Figura 13 se muestra un ejemplo de cómo se hace la codificación de los videos de la observación de clase impartida por la profesora. Se aprecia que las transcripciones están en un documento de "Word" en donde está la imagen de lo que la profesora estaba plasmando en ese momento, así como también la fecha en que se realizó la observación. Las transcripciones están en forma de tabla ya que es importante localizar los minutos y los segundos y en la otra columna el discurso de la profesora Ángel. La flecha de color negra indica que así es como se extrae la unidad de análisis que importa, se interpreta enseguida de la generación del código para ese fragmento.

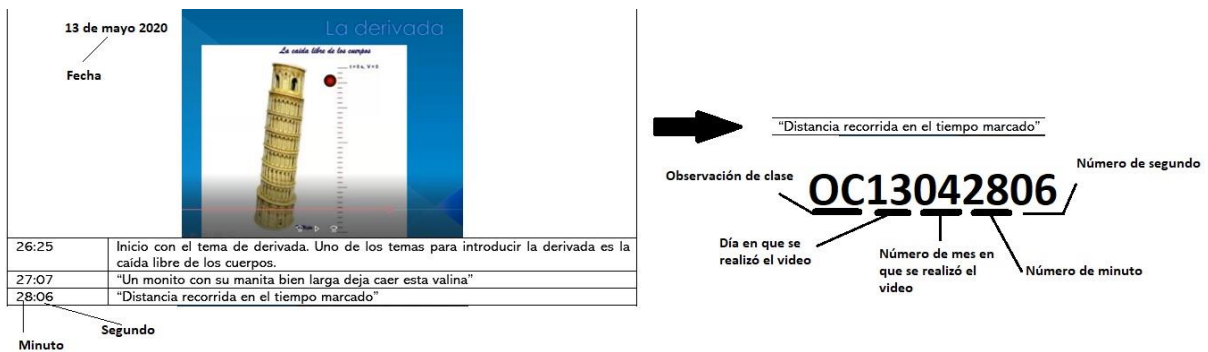


Figura 13. Ejemplo de codificación de observación a clase

En este ejemplo en la Figura 14, se tiene lo que es la unidad de análisis que es el fragmento de la transcripción. Para comenzar con el llenado se observa el campo conceptual y el campo procedimental que en este caso no tiene campo procedimental sólo campo conceptual. Con esa información se complementa la ficha de registro, tal como se muestra en la Tabla 9. Como


se observa en la Tabla 9 está presente otra imagen, esa imagen pertenece a las láminas que la profesora Ángel esto indica que tiempo de la representación se utiliza al momento en que menciona este fragmento y también para ver la información sobre la fenomenología. En este caso se dice que la profesora habla de la velocidad que lleva un cuerpo al caer de la torre por ello es que en la Tabla 9 se pone en contextos no matemáticos en una situación pública y el fenómeno es la caída libre de un cuerpo.

“Distancia recorrida en el tiempo marcado”

Figura 14. Fragmento extraído de las transcripciones

Tabla 9.

Llenado de la ficha de registro de la observación de clase

Código OC13042806						
Imagen						
			<p style="text-align: center;">“Distancia recorrida en el tiempo marcado”</p>			
Estructura Conceptual		Sistemas de representación	Fenomenología			
Campo conceptual	Campo procedimental	Tipo de representación	Contextos matemáticos		Contextos no matemáticos	
Nivel 1	Nivel 1	Verbal y pictórico	Situación:	Fenómeno:	Situación:	Fenómeno:
Términos: Distancia en el tiempo marcado	Destrezas: Sin información		Sin información	Sin información	Pública	La caída libre de un cuerpo.
Nivel 2	Nivel 2					
Conceptos: Sin información	Razonamientos: Sin información					

Nivel 3 Estructuras conceptuales: Sin información	Nivel 3 Estrategias: Sin información					
Notas:						

- **Relacionar y analizar con base en el objetivo.** Esta etapa se explica con mayor claridad en el capítulo 7 de la presente investigación, se presentan los resultados y el análisis obtenido referente al tema de la derivada en los videos de la observación de clase de una profesora, mostrando de tal manera las particularidades de este caso. Además, se muestra el producto de esta fase, un mapa conceptual en donde es concentrada toda la información de los significados identificados.

4.4.4 Fase 4. Análisis comparativo aplicado a los significados de la derivada

En esta fase se realiza un estudio comparativo de los significados de la derivada presentes en el plan de estudios de Cálculo I y en la observación de clase a una profesora. La herramienta a utilizar como técnica para la organización de datos es una tabla comparativa que permite la organización bajo ciertos criterios de manera visual (Makón, 2004). La finalidad de la tabla comparativa es mostrar las diferencias y semejanzas de las características que se abordan en las categorías y con base en ello, realizar las críticas correspondientes y tomar decisiones (Makón, 2004). Se observa que este tipo de herramienta es ideal para cumplir con nuestro objetivo de investigación. Makón (2004) menciona que las características para realizar una tabla comparativa es que la posición de las entradas puede variar, pero se sigue conservando el enfoque bidimensional.

- **Mostrar las particularidades de cada caso.** En esta fase se utilizará la técnica contraste de contexto (Makón, 2004) de los significados identificados en las fases dos y tres. Los significados de la derivada se reportan en una tabla comparativa (Figura 15), de tal manera, que esto permite caracterizar componentes del significado de un concepto matemático, en particular el de derivada. En esta etapa, como ya se había mencionado anteriormente las componentes del significado (Rico, 2012) son el fenómeno de estudio.
- **Delimitar la aplicabilidad.** En esta etapa del análisis comparativo, se refiere a que para que sea un comparativo de contraste de contextos se limita a los dos contextos o bien a las dos fuentes de información. En este caso son el currículum oficial e impartido. Por ello, en la figura 15 se reporta una columna en donde esta información tiene importancia. En la columna titulada tipo de currículum aparece el desarrollo histórico de la derivada, esto porque hay que recordar que el desarrollo histórico del concepto de derivada permite la organización los significados en ambos tipos del currículum (oficial e impartido).

- **Determinar el vínculo con la evidencia empírica.** Esta etapa del análisis comparativo se detalla en el capítulo 8 de la presente investigación, pues se presentan los resultados y los análisis correspondientes al estudio comparativo presentes en ambos currículums. Además, se muestra el producto de esta fase y de la investigación que consiste en mostrar la tabla comparativa descrita al inicio de esta fase con mayor detalle.

Tipo de currículum	Significados de la derivada		
	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología
Desarrollo histórico de la derivada			
Currículum oficial (programa de estudios sintético de Cálculo I)			
Currículum impartido (observación de clase a profesora)			

Figura 15. Formato de la tabla comparativa

Para identificar adecuadamente las clases, categorías y características de un tema específico se tienen que realizar los siguientes pasos:

- * Separar los conceptos clave que le dieron origen al tema. [Los conceptos claves de la presente investigación son: los tipos del currículum y significado. En la tabla comparativa (Figura 15) se puede observar que esta información está considerada y las componentes del significado que conforman la noción de significado en la presente tesis, por ello también forman parte de la tabla comparativa (Figura 15)].
- * Determinar los elementos de la clase. [Como ya se menciona anteriormente los elementos de las clases en este caso son los tipos del currículum (oficial e impartido) y las componentes del significado (estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología)].
- * Se diseña la parte superior y estableces los elementos principales de la clase. [Por esta razón, es que la tabla comparativa (Figura 15) es la tabla adecuada para el tiempo de investigación, pues en ella se encuentran los elementos de clase que en efecto van en la parte superior de la tabla].
- * Finalmente utilizas los conceptos que engloben los elementos de la clase para que no exista confusión con las categorías. [Por tal motivo, en la parte superior de la tabla (Figura 15) están expresados los conceptos de currículum y de significado de

un concepto matemático de acuerdo a las clases de interés que en este caso son los tipos del currículum y las componentes del significado].

(Makón, 2004, p. 9)

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS CONCEPTUAL EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA DERIVADA

En este capítulo se presenta una síntesis del desarrollo histórico de la derivada, basado en la lectura de cuatro documentos de corte histórico. Así como los significados de la derivada identificados en el desarrollo histórico del concepto. Los mapas conceptuales son herramientas visuales que se utilizan para la organización de los significados que fueron identificados en estos documentos; los significados identificados son presentados de forma cronológica y organizados según personajes matemáticos destacados en el desarrollo del concepto de la derivada y que en este capítulo hemos llamado precursores de la derivada. De igual manera, se rescatan algunos referentes base del concepto de la derivada utilizando sus significados.

5.1 Desarrollo histórico de la derivada

Según Ortega del Rincón y Sierra (1998) uno de los antecedentes del concepto de derivada se encuentra en las Cónicas de Apolonio de Pérgamo (262-190 a.C.). Menciona que existen dos libros: libro II (un estudio sobre las tangentes de una cónica) y libro V (un estudio sobre máximos y mínimos, y trazados sobre tangentes de una cónica y normales a una sección cónica). Sin embargo, este autor considera que el precursor de los métodos infinitesimales fue Arquímedes (287-212 a.C.)

En el siglo XVII, se buscaba dar solución a cuatro problemas:

1. Determinar la velocidad y la aceleración instantáneas de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo, y viceversa (si se tenía la velocidad o la aceleración, se trataba de encontrar la distancia o la velocidad respectivamente en un momento determinado).
2. Determinar la tangente a una curva en un punto (por ejemplo, para dar una dirección de un cuerpo en movimiento o el cálculo de rectas tangentes y normales a curvas para la descripción del comportamiento de la luz, el diseño de lentes).
3. Encontrar el máximo o el mínimo de una función (por ejemplo, para calcular las distancias máxima y mínima de un planeta en su movimiento de translación, o la inclinación de un cañón para que una bala golpee a la máxima distancia posible).
4. Encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinadas por curvas o superficies, y centros de gravedad de cuerpos (utilidad en el cálculo de la distancia recorrida o el área "barrida" por el planeta en un tiempo).

(Ruiz, 2003, p. 270)

Para Ruiz (2003) fueron destacadas dos tendencias en el origen del cálculo: una geométrica y la otra algebraica. Además, menciona que algunos de los matemáticos famosos de la época

como Fermat, Descartes o John Wallis se inclinaban por una aproximación algebraica. Por su parte, Torricelli, Isaac Cavalieri y Barrow lo hacían por una geométrica.

Uno de los matemáticos más destacados en su época por las aportaciones al cálculo fue Fermat. En 1638, Fermat encontró un método que le permitía calcular máximos y mínimos en una ecuación algebraica simple, que poco después el holandés Johannes Hudde generalizó (Ruiz, 2003). También descubrió un método en donde podía determinar la pendiente de una recta tangente de una curva algebraica. La cual, lo reduce mediante el siguiente límite $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ (Ruiz, 2003). Es necesario recalcar que Fermat no consideró al término E como un infinitesimal, ni tampoco como un límite, él no explicó porque se podía dividir en primer lugar por E (tratado como un número diferente de cero) y entonces eliminarlo (como si fuera cero) (Ponce, 2015). Tampoco explicó que usaba un caso especial de un concepto más general, el cual se convertiría más tarde en la derivada, la razón de cambio, o incluso la pendiente de la recta tangente. Ponce (2015) menciona que Fermat no había comprendido la relación entre su método de extremos y la manera de calcular una tangente.

A mediados del siglo XVII, los matemáticos habían logrado calcular: rectas tangentes; volúmenes y centroides. Cabe mencionar que aún no se explicaba la relación inversa entre la derivada y la integral. Fue hasta 1670 que se pudo explicar, dado que fue resultado de un trabajo realizado por Isaac Barrow (Ponce, 2015). Por otra parte, Pascal introdujo un método que adelantaba el "desvanecimiento" de los famosos infinitesimales, es decir, el paso al límite.

Ruiz (2003) menciona que Newton en su obra publicada en 1704 titulada "De quadratura curvarum" trató de evitar los infinitesimales utilizados en los trabajos antes mencionados por lo que planteó una teoría de las "razones primeras y últimas", donde la "razón última" era la derivada formulada sin el concepto del límite (Ruiz, 2003, p. 283). En el Lema I del Libro I de la obra Philosophiae, Newton publicó su cálculo al considerar el límite de una función. Para ello utilizó a la astronomía y la mecánica, la cual fue expresada con geometría tradicional, dándole un enfoque físico. Él señalaba que "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales" (Ruiz, 2003, p. 283).

A diferencia de los trabajos de Newton, Leibniz fue esencialmente algebraico y lógico debido a su formación profesional (Ruiz, 2003). Entre 1675 y 1684 Leibniz expresa su evolución en la construcción del cálculo. En 1676 muestra la regla a la que se refiere es $dx^n = n x^{n-1}$ (Ruiz, 2003). En 1684, Leibniz publica su método sobre los máximos y mínimos, también para tangentes en una revista titulada "Acta eruditorum" en ese método no utilizó racionales ni tampoco irracionales, pero ya aparecían reglas básicas de derivación ($d(xy) = xdy + ydx$; $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; y $dx^n = n x^{n-1}$), las condiciones para máximos y mínimos y para los puntos de inflexión y algunos símbolos como dx y dy . Señalaba que $dy = 0$ para valores extremos relativos o $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión (Ruiz, 2003, p. 286).

En Ruiz (2003) menciona las claras diferencias que existían entre Newton y Leibniz, una de las más mencionadas es que mientras que Leibniz usaba los incrementos infinitesimales en la x y y , posteriormente estudiaba las relaciones entre ellos, Newton usaba sus infinitesimales en la derivada misma. En Newton, los infinitesimales estaban relacionados directamente con el cálculo de velocidades instantáneas (en el sentido de la aplicación de la física). Para Leibniz el interés no era la física, sino que era la metafísica. El énfasis de Newton era la razón de cambio, mientras que para Leibniz era la suma infinita de infinitesimales.

Según Ortega del Rincón y Sierra (1998), las consideraciones infinitesimales de Leibniz parten de la consideración del triángulo característico de pascal. Recordemos que Leibniz trabajaba con los elementos geométricos, por lo que, mediante las consideraciones sobre ese triángulo y sus semejantes, el de la ordenada y la tangente o el de la ordenada y subnormal, reconoció que los problemas de la tangente y la cuadratura son inversos. En efecto, este triángulo muestra que en el problema de la tangente interviene el incremento, es decir, las diferencias de las ordenadas, mientras que en el problema de la cuadratura interviene la suma de las ordenadas, aspecto puramente formal de la cuestión que revela que ambos problemas son inversos.

D'Alembert insistió en que hay que despojar al cálculo de su metafísica. En una contestación a Bekeley, Maclaurin escribe su *Teatrise of fluxions* en el estilo riguroso de los antiguos griegos, utilizando un enfoque geométrico (Ortega del Rincón y Sierra, 1998). D'Alembert afirmaba que la derivada se debía basar en el límite de la razón de las diferencias de variables dependientes e independientes: $\frac{dy}{dx}$. Sin embargo, según Ortega del Rincón y Sierra (1998), en 1817, Bolzano fue la persona que definió la derivada por primera vez como un límite: la cantidad $f'(x)$ a la que la razón $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

Bolzano sabía que $f'(x)$ no era un cociente de ceros o una razón de cantidades que se "evanecen", sino un número al que se aproxima la razón que señalamos arriba. Ahora bien, el mismo Euler había descrito $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de ceros, y otros matemáticos, como Lacroix, siguieron sus pasos (Ruiz, 2003, p. 290).

Lagrange (1736-1813) en su obra *Théorie des fonctions analytiques* trató de desarrollar el cálculo de modo que éste fuese más riguroso, por lo que fue desarrollando $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$. Después lo multiplicó por el coeficiente x^n por $n!$ Lagrange lo denominó el valor de la función derivada n -ésima de la función en el punto $x = 0$. En este método Lagrange pensó que consiguió eliminar los infinitesimales, a pesar de que continuó utilizándolos paralelamente a sus funciones derivadas (Ponce, 2015). Lo importante de los trabajos de Lagrange es que trabajaba con geometría en la mecánica. Además de su atribución en la potenciación en las matemáticas.

En el siglo XVIII, Cauchy realizó las siguientes acciones:

- Buscó corregir las debilidades de un desarrollo matemático, ya que puso mayor atención en la experimentación, la aplicación, la intuición, y no en los criterios lógicos y aquellos más bien asociados a la geometría clásica.
- Revisó el concepto de función de una variable real.
- Ofreció un fundamento al cálculo casi como el que encontramos hoy en los textos de matemáticas.
- Retomó el concepto de límite introducido por D'Alembert para definir la derivada de una función.
- Usó la notación de Lagrange con un enfoque analítico y no algebraico.

(Ruiz, 2003, p. 320)

Para Grabiner (1978), la primera persona en definir a la derivada de una función en términos de la definición de límite fue Cauchy. Además de darle un sentido muy riguroso al cálculo, agregando teoremas, definiciones y propiedades. Con estas atribuciones, en 1823, dio la teoría de derivadas de una manera estricta. Según Grabiner (1978), también mostró aplicaciones de la derivada como los extremos, pendiente de la recta tangente a las curvas, pero para ello la teoría de las derivadas tendría que probar la validez de estas aplicaciones.

Una diferencia que marca Grabiner (1978) es sobre los trabajos realizados por D'Alembert y el trabajo de Cauchy. Lo que menciona al respecto es que en el trabajo de D'Alembert yace en el entendimiento y el uso de la definición, no tenía a lo que ahora se le llama épsilon-delta. En cambio, Cauchy esto si lo estableció y fue el comienzo de su tarea. D'Alembert sólo utilizó su definición para ilustrar el hallazgo de una tangente a una parábola como límite de secantes (Grabiner, 1978).

Como ya se había mencionado anteriormente, Cauchy definió un límite de lo cual según Grabiner (1978) menciona que interpretó la declaración del límite, como x va a infinito de $f(x+1)-f(x)$ es un número k . Dado que lo que estaba pensando en ese momento era que esta diferencia converge al límite k por ello era que se podía designar un E tan pequeño como se deseaba y dar un valor h suficientemente grande para que x sea igual o mayor que h . Por lo que Grabiner (1978) menciona que Cauchy de esta manera introdujo épsilon en el análisis y más tarde la delta para definir un límite y posteriormente definir a la derivada.

Cauchy definió a la derivada de la siguiente manera:

“Si la función $y=f(x)$ es siempre continua entre dos límites dados de la variable x , y si elegimos un valor de la variable entre esos límites, que un infinito pequeño incremento dado a la variable producirá infinitamente pequeño incremento en la función. Por lo tanto, si establecemos $Ax = i$, los dos términos de la proporción de las diferencias $Ay/Ax = f(x+i) - f(x)/i$ será infinitamente pequeña. Pero cuando los dos términos indefinidamente y simultáneamente se acercan al límite cero, la proporción en sí converge hacia otro límite, este límite puede ser positivo o negativo. Este límite cuando existe tiene un valor determinado para cada particular valor de x ; pero varía con X . La forma de la nueva función sirve como límite de la relación $f(x+i) - f(x)/i$, ya que dependerá sólo

de la forma de la función propuesta. Al indicar esta dependencia, se le da una nueva función del nombre y se denota por medio de la tilde como $f'(x)$ "

(Grabiner, 1978, p. 383)

En esta frase, aunque es verbal, se puede ver la presencia de su actitud por el rigor y que lo presenta de una manera muy general, también se aprecia que esta definición según Grabiner (1978) en el álgebra de desigualdades para el uso en pruebas. Para la demostración de las propiedades de la derivada, Cauchy utilizó su definición y para ello hizo uso del siguiente teorema (Grabiner, 1978):

"Si $f(x)$ es continua entre $x=x_0$ y $X=x$, y si A es el mínimo de $f'(x)$ en ese intervalo mientras que B es el máximo, entonces $A < (f(X)-f(x))/(X-x_0)$ "

(Grabiner, 1978, p. 383)

En su demostración, Cauchy introdujo la definición de la derivada en lenguaje de épsilon-delta con desigualdades y decidió trabajar para todo x en el intervalo dado equivalente al de la convergencia uniforme de la derivada. Lo que él quería decir era que la derivada es el límite del cociente de diferencias, por lo tanto, lo postulaba en el primer matemático en la historia en saber esto. Pues lo que Bolzano realizó fue una propiedad no una definición por ello es que Cauchy es el primero en conocerlo. Las propiedades que fueron mencionadas por Lagrange y utilizadas por Cauchy son las que hoy en día se siguen utilizando para derivar por lo que podemos decir que la mayoría de los resultados obtenidos en el siglo XVIII son utilizados sobre las funciones y su derivada.

Euler en sus instituciones como profesor de cálculo diferencial mostró un criterio para saber cuándo usar un número finito de términos de la serie de potencias, no tomando precaución del resto. Según Grabiner (1978) este criterio llevó a Lagrange a la propiedad de Lagrange. Una de las corrientes que se destacaron en esta época era la geométrica para el criterio de derivación para máximos y mínimos fue puramente analítico es decir la corriente que predominaba era algebraico basada en el álgebra de desigualdades.

Como ya se había mencionado Lagrange basó su cálculo en la serie de Taylor, pero también aprovechó el criterio de Euler, este método lo usó para obtener un lema que dice de la siguiente manera:

"Una función que es cero cuando la variable es cero, la variable aumenta afirmativamente, valores del mismo signo que su función derivada o de signo opuesto si la variable aumenta negativamente, siempre los valores de la función derivada mantienen el mismo signo y no se va a infinito"

(Grabiner, 1978, p. 390)

Lagrange hizo la demostración de este lema. Según Grabiner (1978) fue una de las mejores pruebas del siglo XVIII. Ahí fueron mostradas de forma impresionante las características que hace destacar a esta prueba de las demás que trataban sobre las propiedades de la derivada.

Se le reconoce a Lagrange que fue el primero en introducir ϵ - δ en el cálculo. Sin embargo, Cauchy fue capaz de adaptar el método de Lagrange, mediante la continuidad y el límite para definir la derivada, pero utilizando sus propias técnicas y demostrando cada uno de los resultados que iba obteniendo lo cual lo posicionó en la persona que creó su propia teoría de derivadas. La claridad de las demostraciones de Cauchy y el sistema completo de propiedades y teoremas que constituyó fue uno de las más grandes aportaciones al cálculo. Su teoría no estaba basada en inventar nuevas técnicas para encontrar la comprensión, lo que él hizo fue tomar las ideas de sus antecesores y mejorarlas de lo cual construyó algo nuevo.

5.2 Significados de la derivada en su desarrollo histórico

En esta sección se presentan los mapas conceptuales donde se organizaron los significados de la derivada que estuvieron presentes en el desarrollo histórico de dicho concepto; de acuerdo a la revisión de los cuatro documentos históricos analizados que conforman el corpus en la primera fase del proceso metodológico. Como producto del análisis de los significados se muestran estos mapas conceptuales en donde los títulos llevan por nombre a cada uno de los precursores de la derivada, además, se ordenan de manera cronológica. Es importante mencionar que el análisis se realizó respecto a la estructura conceptual, considerando si el precursor le da prioridad al campo conceptual o al campo procedimental, después se observa si existe información sobre el sistema de representación que se maneja y sobre la utilidad en caso que exista.

En el mapa conceptual de la Figura 16, se puede observar que Apolonio de Pérgamo le dio más énfasis al campo procedimental de la estructura conceptual de la derivada, mediante el trazado de rectas normales y tangentes a una cónica como una estrategia, es decir, en un nivel tres. Para ello, tomó parte del campo conceptual en los tres niveles: términos como las tangentes de una cónica; conceptos como máximos y mínimos de una sección cónica (estructura conceptual). Este significado asociado a la derivada no hace referencia a los sistemas de representación utilizados, aunque por la época en que se desarrolló la representación geométrica predominaba. Sin embargo, en los documentos analizados no lo mencionan de manera explícita. Además, tampoco se menciona la situación o el contexto en que esta estrategia toma sentido.



Figura 16. Mapa conceptual de Apolonio de Pérgamo

Arquímedes sólo priorizó el campo conceptual llegando a teorizar el método de infinitesimales que fue en donde se marcó el inicio de la historia del cálculo (Figura 17). Tal como lo cita Ruiz (2003) en donde en conjunto con otros historiadores lo consideran el precursor del cálculo. Este método tal y como se presenta en los documentos analizados se considera un significado parcial de la derivada; porque los documentos analizados no hacen referencia a las representaciones que fueron utilizadas, tampoco se menciona las situaciones y contextos en donde el significado toma sentido. Lo anterior, no quiere decir que los registros semióticos y la fenomenología no se existan, lo único que se está mencionando es que los autores de la bibliografía revisada no muestran detalle de estas dos componentes.

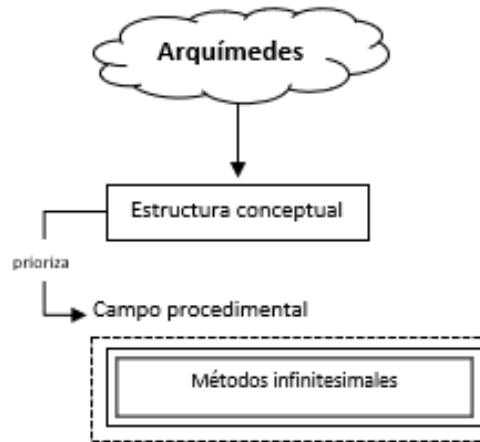


Figura 17. Mapa conceptual de Arquímedes

A inicios del siglo XVI los matemáticos, se enfocaron en la componente del campo conceptual de la estructura de derivada. Se puede observar en el mapa conceptual de la Figura 18 que trabajaron con la distancia como un hecho y después vemos que es tratada como un concepto. También para el caso de la tangente se observa que en un inicio es tratada como un concepto y después se consideró como una estructura conceptual, pero aún sin considerar su relación con la derivada.

Posteriormente, las evoluciones conceptuales fueron utilizadas para empezar a determinar, por ejemplo, la velocidad y aceleración instantáneas, la distancia respecto del tiempo y viceversa. Estos problemas llamaron la atención de los matemáticos en esa época y tienen la característica de que los contextos en donde toma sentido la estructura conceptual de la derivada son extra matemáticos. La mayoría de las acciones que son presentadas en el campo procedimental surgen de manera científica y ocupacional, en áreas de la física, astronomía y óptica con la intención de dar solución a problemas de la vida cotidiana.

En la figura 18, se muestra que los sistemas de representación no están presentes. Esto no significa que no se hayan presentado algunas representaciones en la época, pues se recuerda que la información está basada en los libros y artículos históricos y éstos no reportan tal cual el sistema de representación utilizado. Por lo tanto, los significados identificados en el siglo XVI asociados a la derivada son parciales dado que hace falta el registro de representación semiótica utilizada.

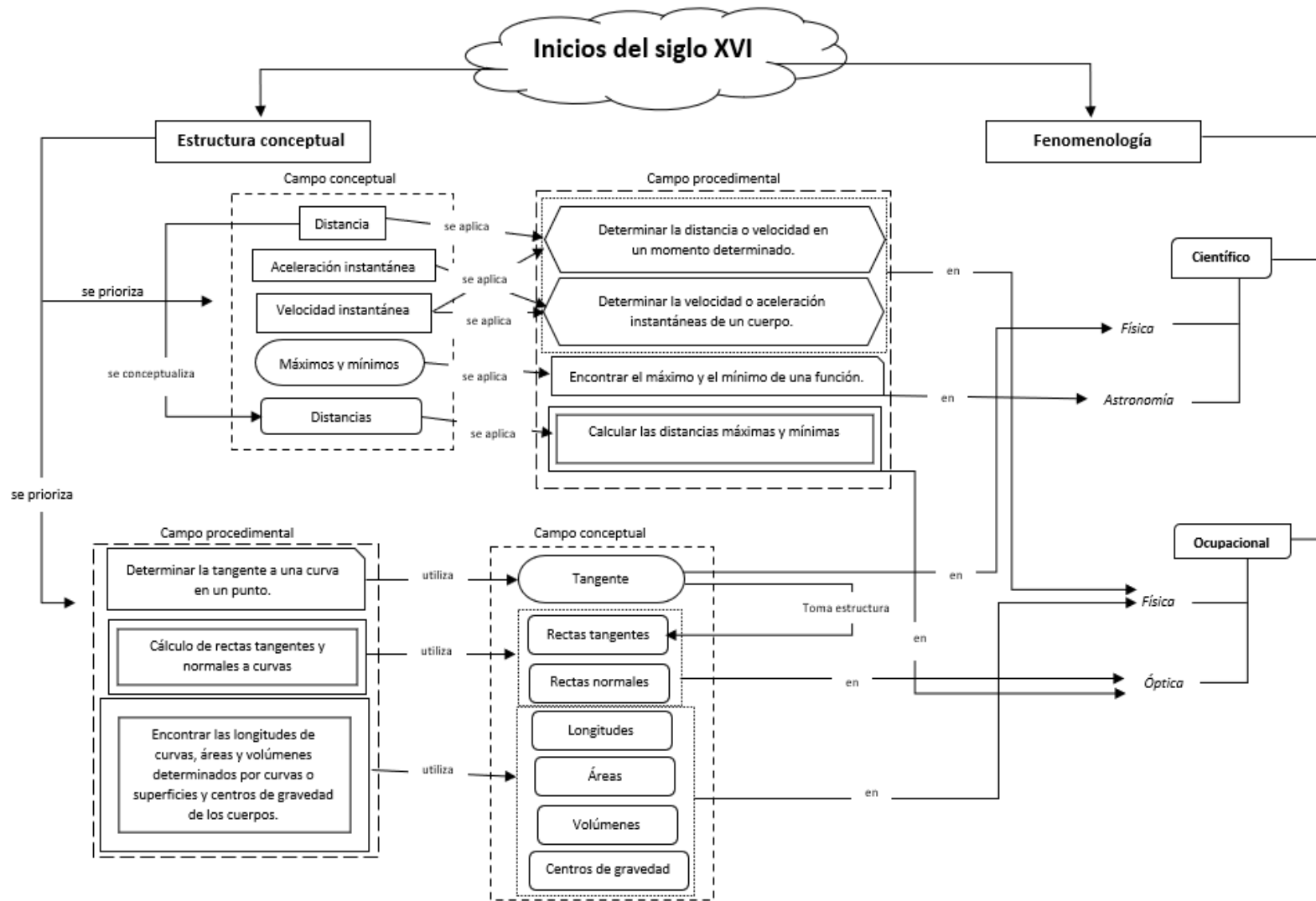


Figura 18. Mapa conceptual Inicios del siglo XVI

A finales del siglo XVI, se presenta el precursor Fermat. En primer lugar, en la Figura 19 se aprecia la importancia que mostró en el campo conceptual. Se pueden observar tres referencias conceptuales que Fermat no relacionó: pendiente de la recta tangente, razón de cambio y derivada. Después podemos observar cuando Fermat muestra prioridad por el campo procedimental el cual aparece: el método de extremos; el método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica; y el método de máximos y mínimos en una ecuación algebraica.

El método utilizado para encontrar tangentes, se ubica en el campo procedimental de la estructura conceptual. Además, se presenta en dos sistemas de representación: algebraico y geométrico. Las situaciones en la que se muestra son: científicas y ocupacionales en un contexto matemático. Como se observa, se han mencionado los cuatro significados de la derivada, los cuales están compuestos por las tres componentes que Rico (2012) propone.

De igual manera, se hace presente otros cuatro significados distintos a los mostrados anteriormente. En la Figura 19, aparece en el campo procedimental el método que permite calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica se muestra en dos sistemas de representación: algebraico y simbólico. El contexto es matemático y las situaciones son: ocupacional y científico.

Ahora, son presentados otros cuatro significados de la derivada en donde la estructura conceptual es el método para encontrar máximos y mínimos en una ecuación algebraica simple es representado de forma algebraica y geométrica en contexto matemático con dos situaciones diferentes: científica y ocupacional.

Cabe destacar que Fermat no alcanzó a ver la relación entre su método de extremos y la manera en que se calculaban las tangentes. Por lo tanto, este significado es parcial porque que no se tiene información de la representación utilizada ni el contexto y situación que dotaba de sentido a este significado. A causa ello, no entendió que se trataba del concepto de la derivada, razón de cambio e incluso pendiente de la recta tangente significados parciales localizados en la parte conceptual de Fermat.

Finalmente, calcular el límite $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ considerando a E como infinitesimal y distinto de cero es un significado de la derivada considerado en el campo procedimental. Se representa de manera algebraica en contexto matemático con dos situaciones diferentes: ocupacional y simbólica. Como resultado tenemos dos significados de la derivada distintos a los mencionados anteriormente.

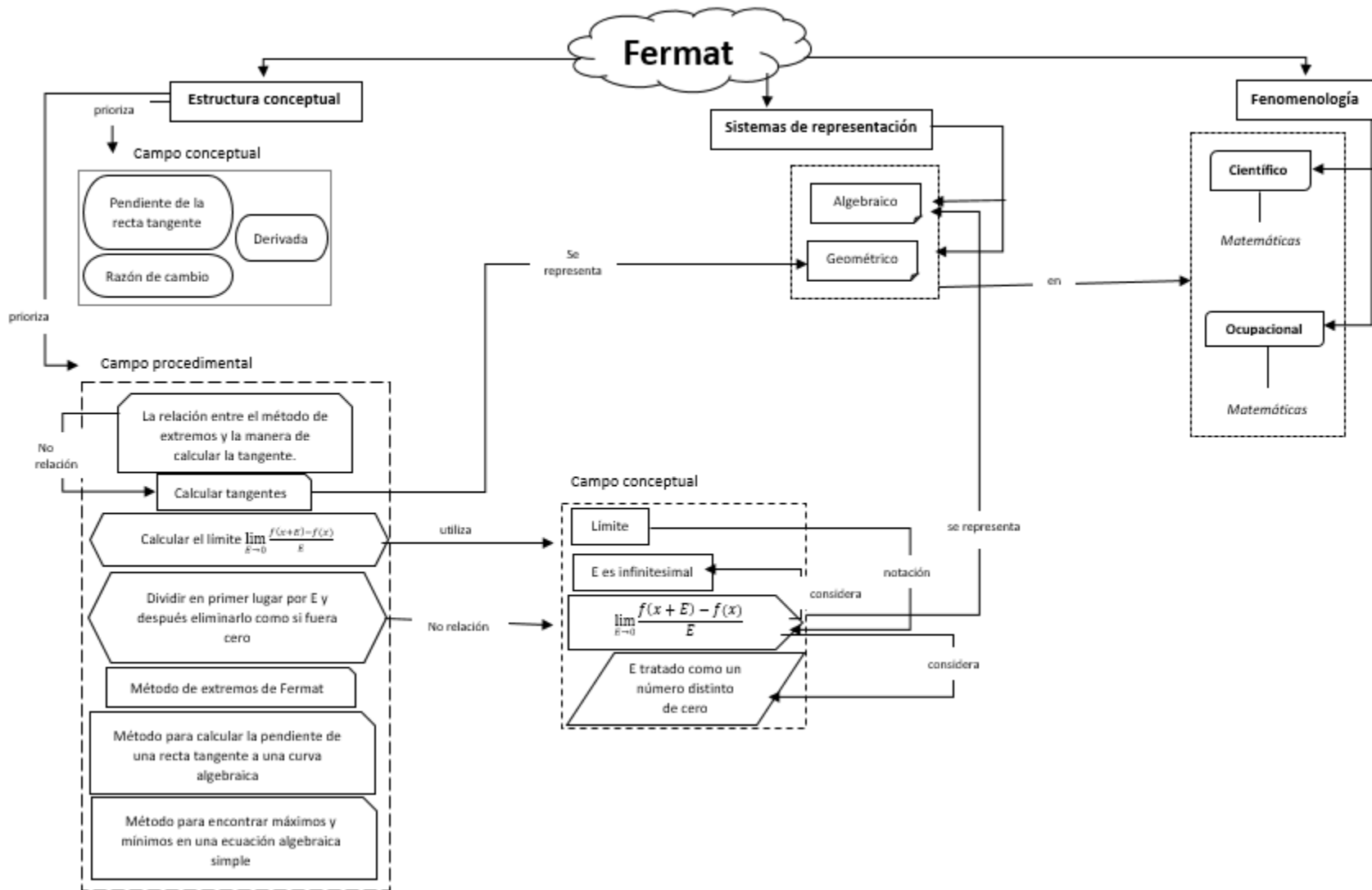


Figura 19. Mapa conceptual de Fermat

A finales del siglo XVI y principios del siglo XVII se destaca como precursor de la derivada a Newton. Newton únicamente centra su atención en el campo procedimental, dado que no se localizó en las unidades de análisis el campo conceptual, por ello, fue criticado al igual que Leibniz. En el mapa presentado en la Figura 20 se puede interpretar que la relación entre series y el cálculo la utiliza para el método de fluxiones y series infinitas, que son parte del campo procedimental, el cual se considera un significado parcial dado que no hay información que respalde el tipo de representación utilizada. Tampoco se muestra el contexto o la situación que le dio origen a ese significado. Por otro lado, se tiene en el campo conceptual, la razón de cantidades. Esta razón la realiza entre términos como distancia y tiempo. Es posible realizar la razón de otro tipo de cantidades que no se especifica en el texto. Al igual que el significado anterior, se considera parcial por la falta de información entre el sistema de representación utilizada y el contexto y la situación que le dotó de sentido.

En el mapa conceptual (Figura 20) es presentada la derivada sin límite, así es como Newton la define para cantidades fluentes e infinitamente pequeñas, es presentado de manera geométrica en un contexto no matemático con situación ocupacional y científica en las áreas de astronomía y mecánica. Por lo tanto, aquí se tienen dos significados de la derivada.

Se observa además el concepto de razones primeras y últimas en las cuales Newton realiza la estructuración y la convierte en teoría de las razones primeras y últimas. El sistema de representación que se hizo presente fue la verbal y como Newton trabajaba en las áreas de Astronomía y mecánica, estos significados toman sentido. La situación en la que se determinan es en la científica y la ocupacional, el cual tenemos dos significados de la derivada.

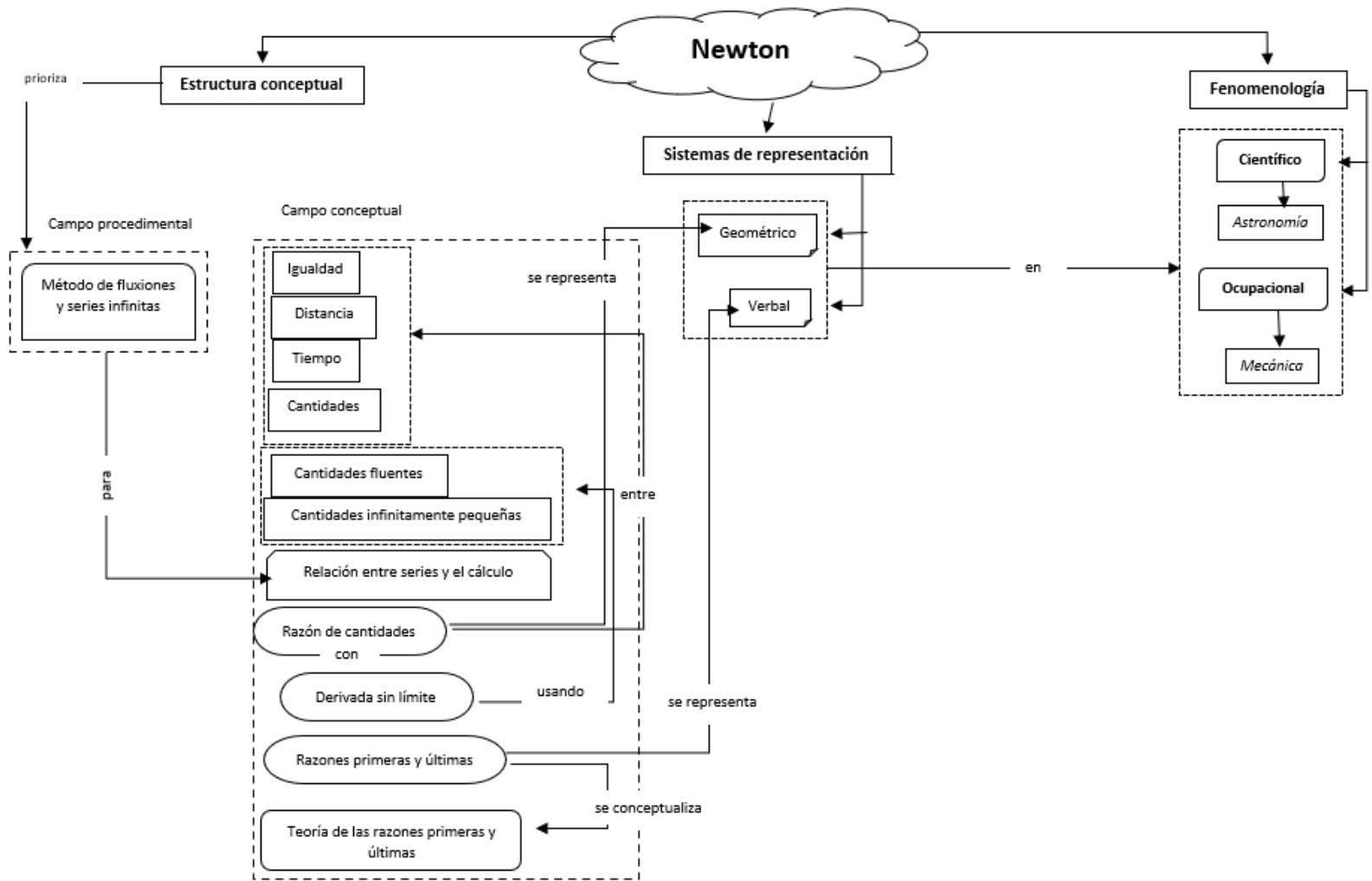


Figura 20. Mapa conceptual de Newton

Otro de los precursores destacado por sus aportaciones al cálculo diferencial a finales del siglo XVI y principios del siglo XVII fue Leibniz. En la Figura 21, se puede observar que se le da prioridad al campo procedimental, una prueba de ello es que se presenta el método de las tangentes utilizado para encontrar tangentes a curvas. Este método es realizado mediante un sistema de representación geométrico de contexto matemático y en situación ocupacional. Lo cual es considerado como un significado de la derivada.

Está presente y se puede observar en la Figura 21 la teoría de máximos y mínimos, anteriormente, se muestra que los máximos y mínimos se veían como hechos y Leibniz se interesó en ellos para estructurarlos, de modo general, se ve una evolución del concepto, la representación que utiliza es simbólica y verbal en un contexto matemático y en situación ocupacional. En este caso tenemos dos significados para una sola estructura conceptual y una fenomenología. Las reglas de derivación para número entero o fraccionario son significados que también se muestran en la época de Leibniz, el sistema de representación es simbólico en contexto matemático la situación que lo generó es ocupacional.

En el caso del método para encontrar áreas y volúmenes a través de sumas se queda como significado parcial, dado que no se obtuvo información sobre el sistema de representación que utilizaban, ni tampoco se menciona el contexto y la situación que dota de sentido al significado.

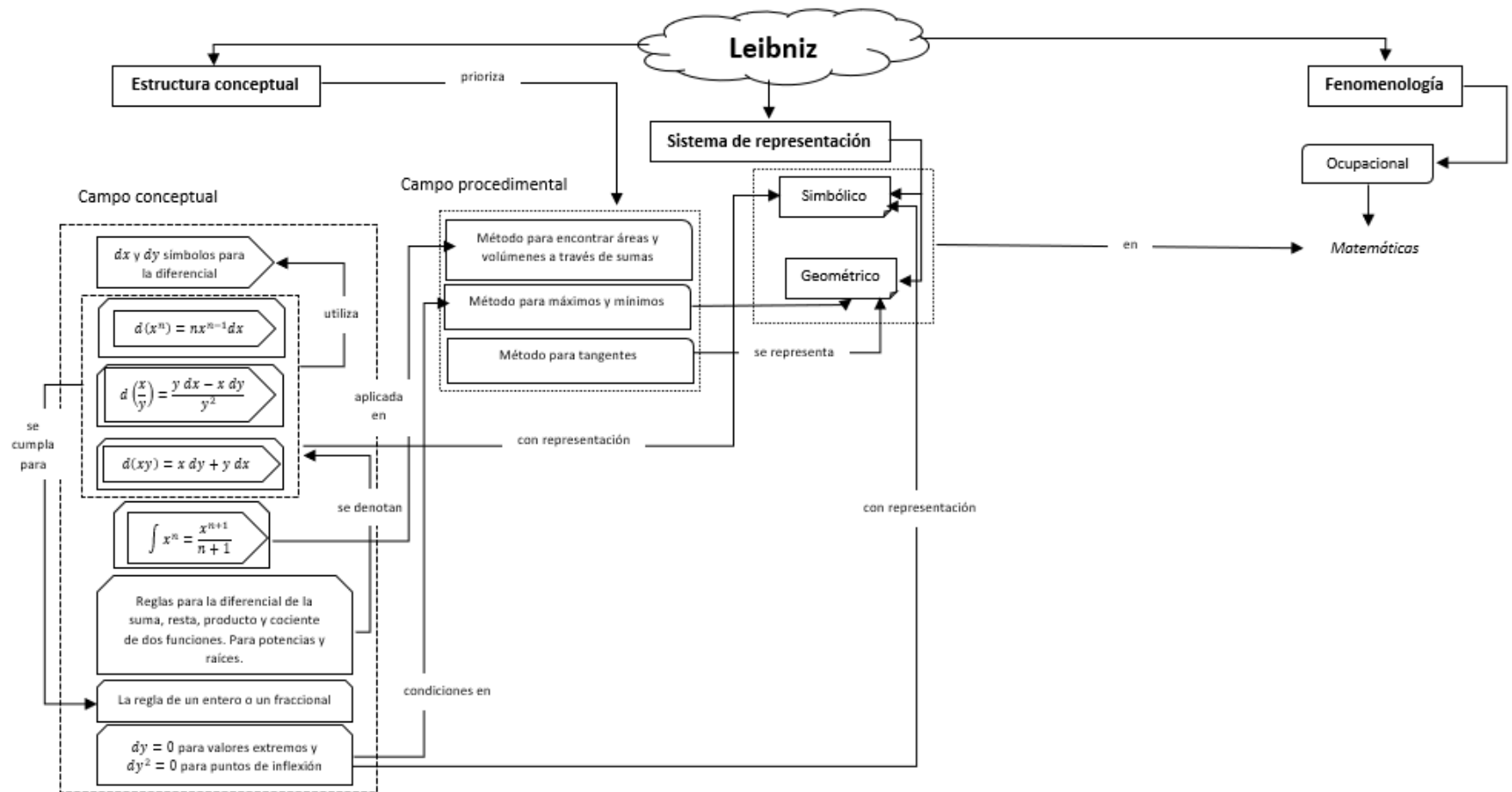


Figura 21. Mapa conceptual de Leibniz

En el siglo XVII, Maclaurin fue uno de los matemáticos que se destacaron en la época por sus aportaciones al concepto de la derivada. Maclaurin muestra interés por el campo conceptual con su teoría de máximos y mínimos. La teoría es representada por tres sistemas: verbal, simbólico y algebraico. En un contexto matemático en una situación científica. Dado la información anterior se da evidencia de tres significados distintos con una estructura conceptual, dos sistemas de representación un contexto y una situación.

Así mismo, en mapa conceptual (Figura 22) podemos observar que la teoría que propone acerca de fluxiones utiliza el criterio de Euler, en el mapa se puede observar en que consiste o con qué está relacionado. Esta teoría sobre fluxiones utiliza la representación geométrica en contexto matemático en situación ocupacional. Para el tratamiento propuesto de máximos y mínimos en series de Taylor tiene un enfoque geométrico en un contexto matemático con situación ocupacional. Dada esta información, se observa este significado que, sumado a los cuatro significados anteriores, se puede mencionar que este autor nos brinda en total cinco significados de la derivada.

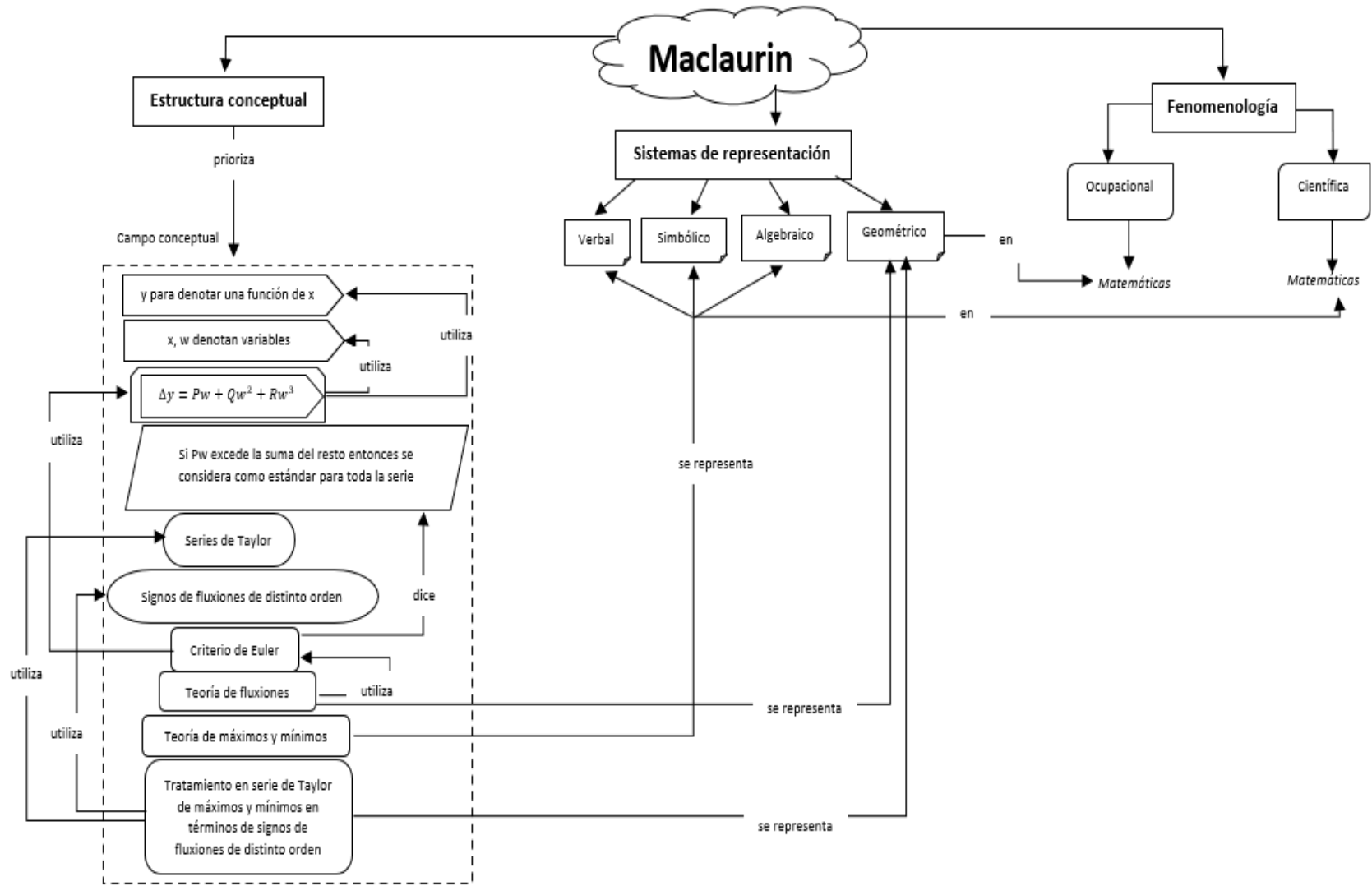


Figura 22. Mapa conceptual de Maclaurin

Euler es otro de los matemáticos más importantes del siglo XVII. Euler con respecto a la derivada demostró cada una de las aplicaciones del concepto, es decir, le mostró atención al campo procedimental, para ello hizo uso del criterio de Euler del campo conceptual (Figura 23). Las demostraciones de estas aplicaciones tienen un enfoque simbólico y algebraico. El contexto utilizado es matemático y se manejan dos situaciones: ocupacional y científica. Por lo tanto, Euler nos muestra que las demostraciones de las aplicaciones de la derivada suman cuatro significados de la derivada por los dos sistemas de representación y por las dos fenomenologías que se mencionaron anteriormente.

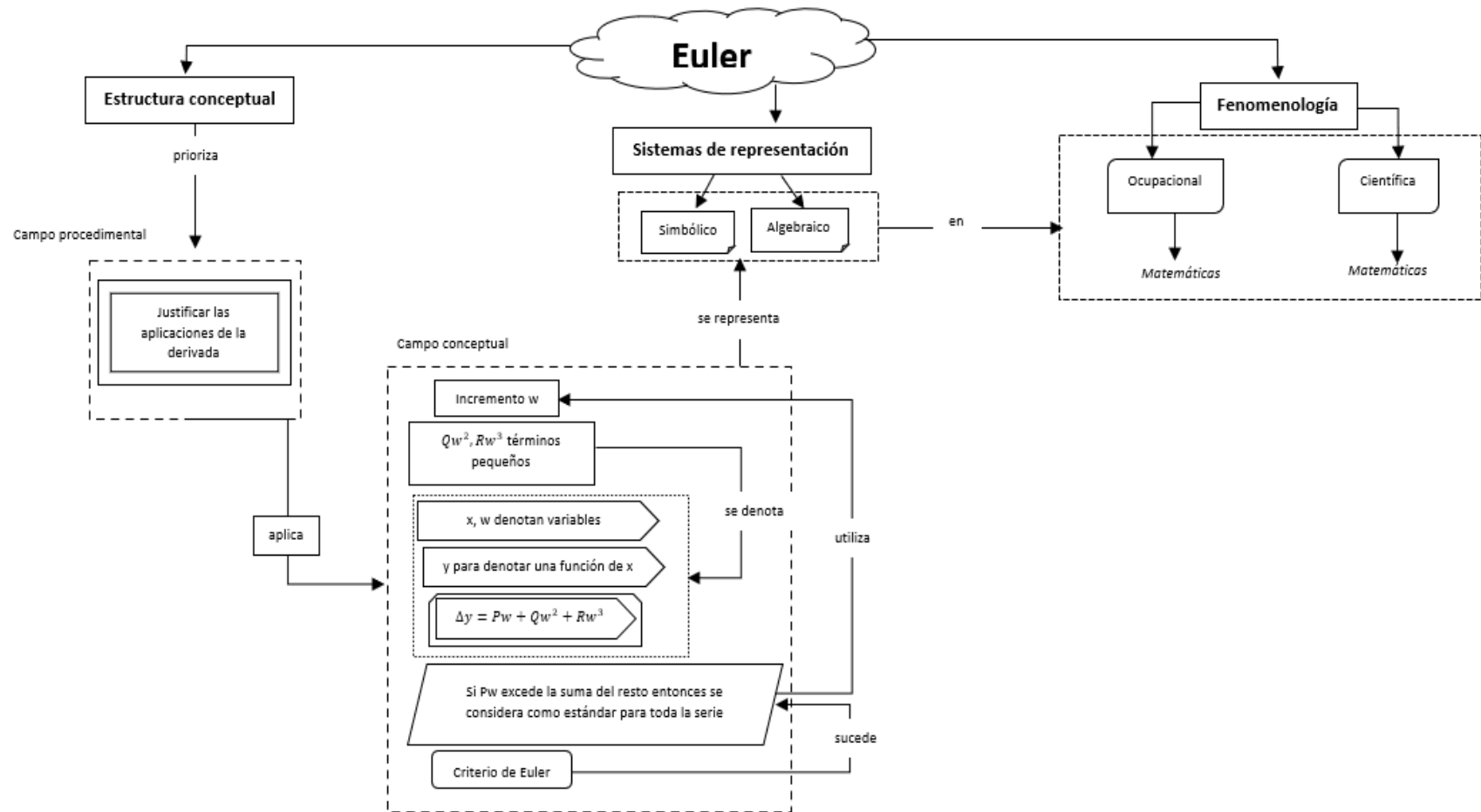


Figura 23. Mapa conceptual de Euler

En el siglo XVII, D'Alembert fue un matemático destacado de esta época por su labor realizada en el campo de las matemáticas. En el mapa conceptual presentado en la Figura 24 se va a comenzar a ver el análisis con respecto en donde D'Alembert prioriza al campo procedimental, se observa que para ilustrar el hallazgo a una parábola como el límite de secantes utilizó varios elementos del campo conceptual como los conceptos de tangente a una parábola, límite de secantes y límite del cociente de diferencias. Este significado es considerado como significado parcial dado que falta información con respecto a los sistemas de representación que utiliza y aquel contexto o situación que le dotó de sentido al significado, esto no quiere decir que no hayan existido, simplemente que en los libros y artículos de consulta no viene de manera clara. Se intuye que por la estrategia mostrada en el mapa pudiera ser que la representación fuera geométrica pero aun así sería algo del cual no se tiene seguridad.

Ahora se pasa cuando se le da prioridad al campo conceptual, se dedica a dar la definición de la derivada y la muestra de una manera verbal y simbólico este es un significado parcial dado que falta información sobre aquel contexto y situación que le dio sentido al significado.

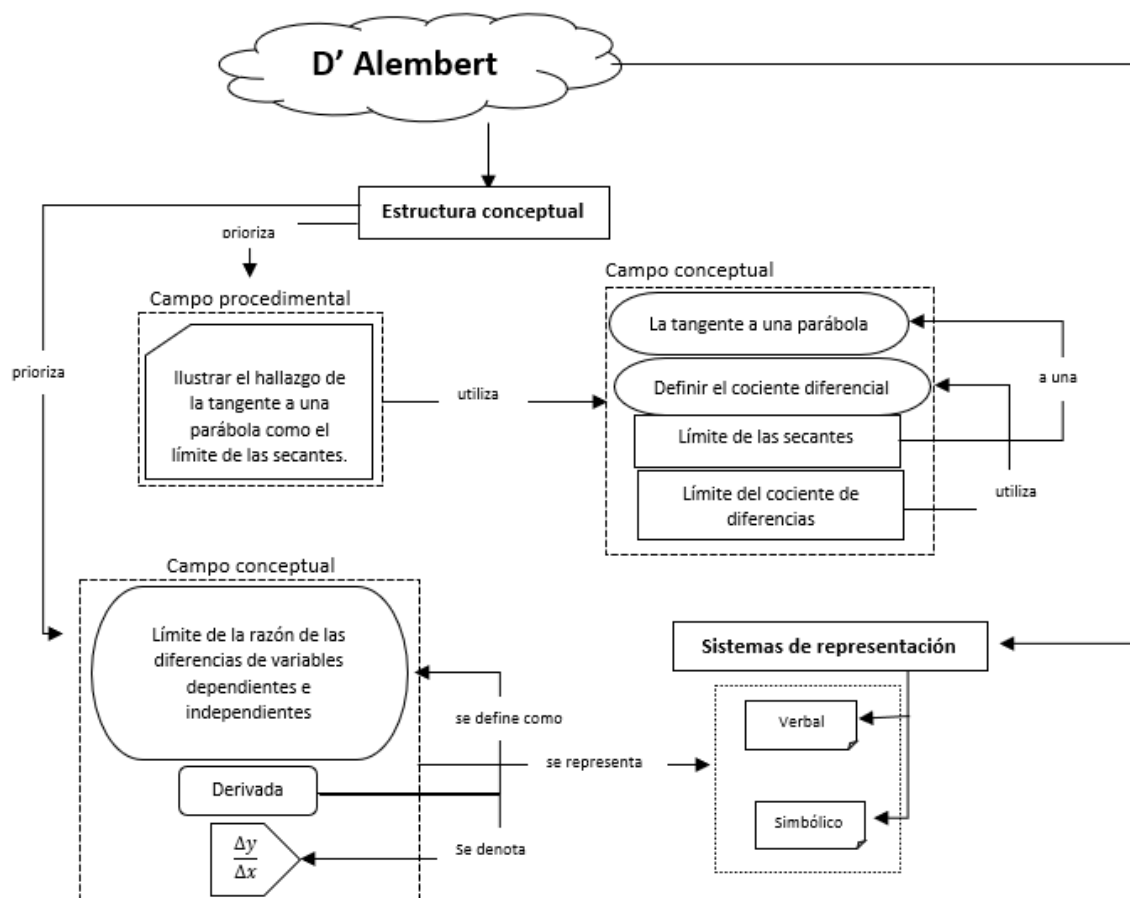


Figura 24. Mapa conceptual de D'Alembert

A finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, Lagrange se destaca por su contribución al cálculo. Lagrange al priorizar el campo procedimental, desarrolla la función $f(x)$ por la división larga y multiplicar x^n por $n!$ porque es un caso particular del cual se sirve de la función n -ésima de la función en el punto $x=0$ el cual utiliza dos sistemas de representación: simbólico y algebraico, en contextos matemáticos y no matemáticos (mecánica) en una situación ocupacional del cual tenemos cuatro significados de la derivada. Otro significado que se hace presente es cuando se quiere probar que la función se puede hacer como el producto de esta suma $f(x + i) = f(x) + iP$ para realizarlo utiliza el criterio de Euler que como se puede apreciar en el mapa conceptual (Figura 25). Se obtiene que este significado es parcial dado que solo se cuenta con la información de la estructura conceptual, de acuerdo a nuestro marco teórico falta información con respecto de los sistemas de representación y la fenomenología utilizada. Como se ha mencionado anteriormente esto no significa que no se hayan presentado, es sólo que en los libros y artículos de consulta no se menciona nada al respecto. Finalmente, se analiza el campo conceptual que Lagrange prioriza en donde se presenta el método de funciones analíticas para ello hace uso de la función derivada con la intención de que sean eliminados los infinitesimales o los límites. Estos tres significados son de corte numérico en contextos matemáticos y no matemáticos con situación ocupacional.

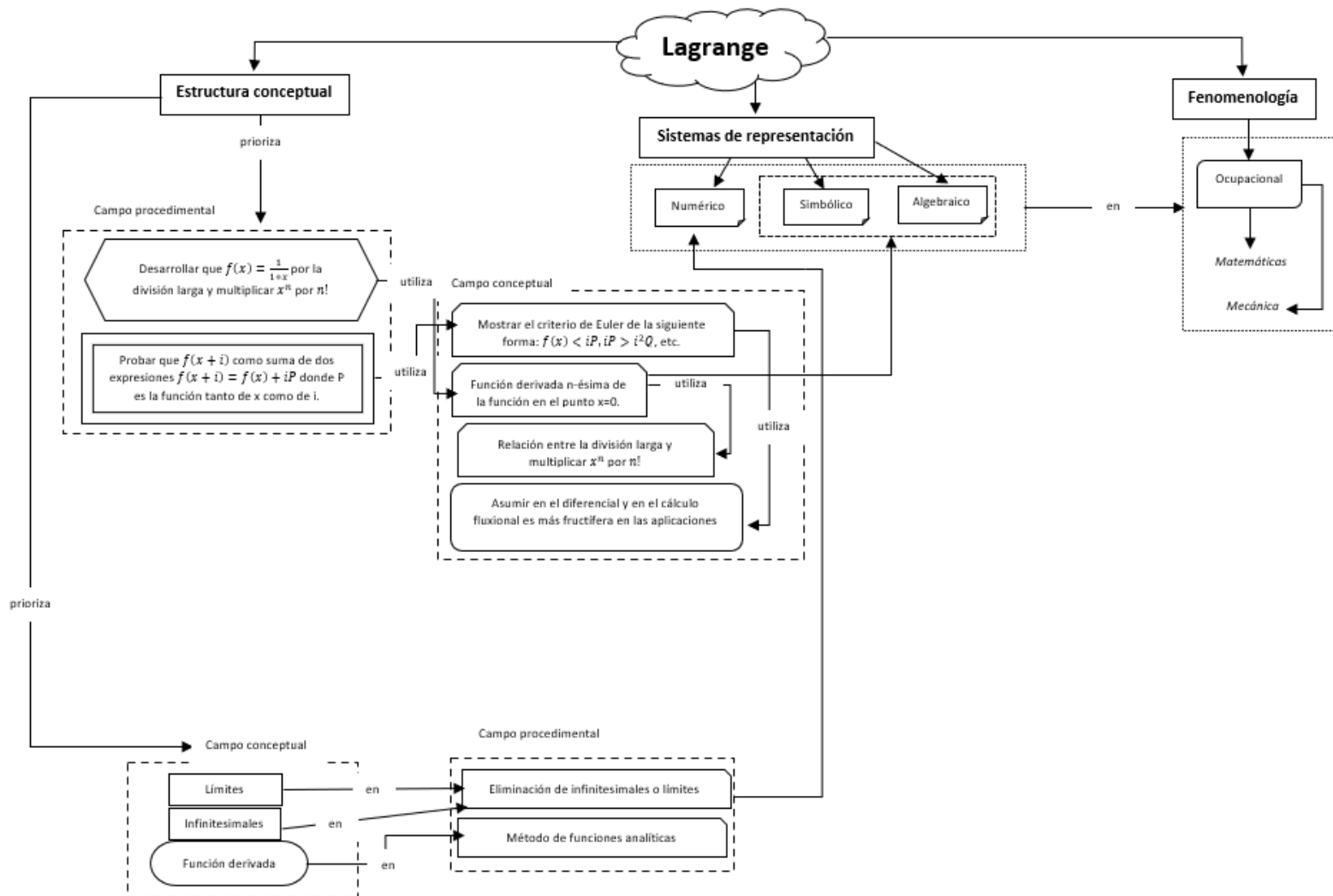


Figura 25. Mapa conceptual de Lagrange

A inicios del siglo XVIII, Bolzano es uno de los matemáticos destacados por su labor dentro de las matemáticas, específicamente en el cálculo. Bolzano se enfoca en el campo conceptual esto se hace presente en el mapa conceptual (Figura 26) ya que define a la derivada como el límite y le da además una notación, realiza la igualdad y lo hace de manera verbal y simbólica. Por lo tanto, se observan dos significados parciales. Son llamados así porque en este caso falta saber acerca de la fenomenología, es decir, en qué contexto y situación este significado tomó sentido.

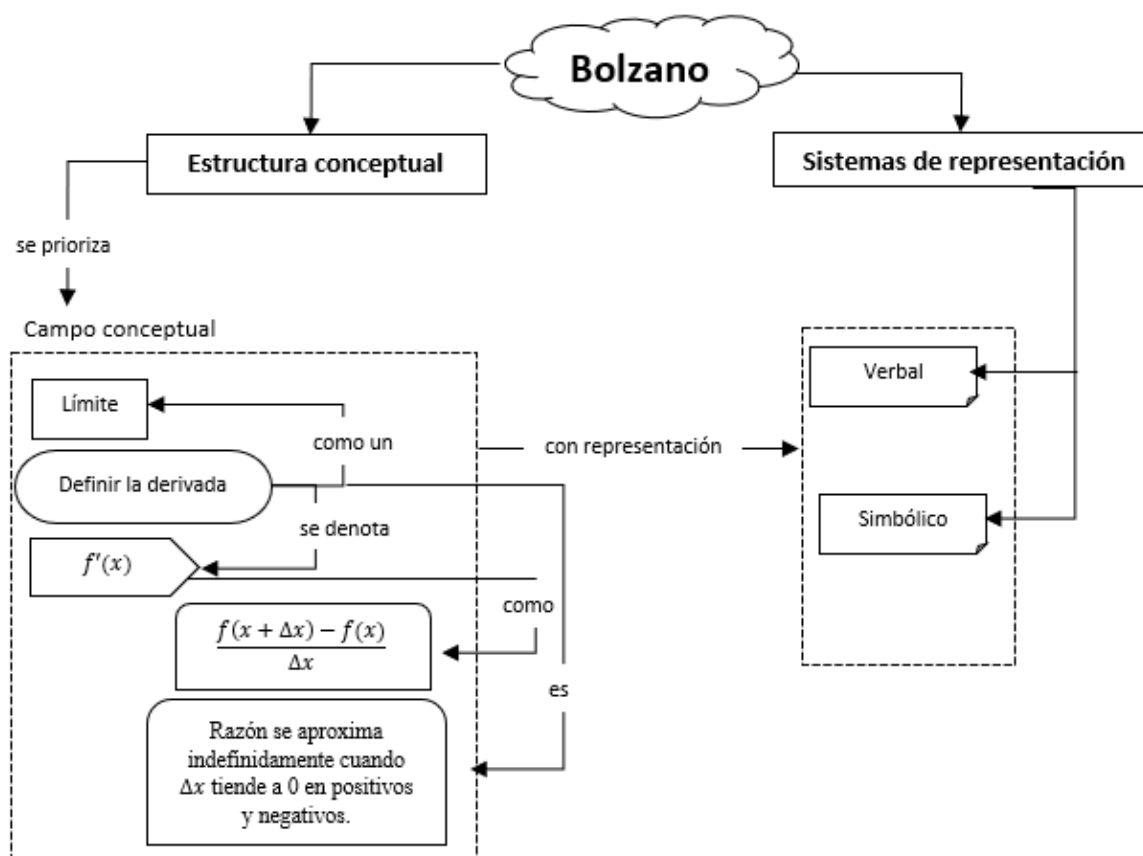


Figura 26. Mapa conceptual de Bolzano

Otro de los precursores del cálculo en el siglo XVII fue Cauchy. En el mapa conceptual (Figura 27) se puede mostrar que Cauchy se enfocó más en el campo conceptual definiendo a la derivada como el límite del cociente de diferencias en el cual le dio una notación. Es importante resaltar que este significado es parcial dado que la manera en cómo la definió no tiene detalles del sistema de representación utilizado. Además, que no hay información en la bibliografía consultada sobre el contexto y las situaciones que le dieron sentido a la definición de la derivada.

Es definida también la derivada de una función continua, la cual, en el mapa (Figura 27) se puede observar los hechos, conceptos y estructuras con las que tiene relación. Sin embargo, también es un significado parcial dado que no se tiene información suficiente sobre las otras

dos componentes del significado (sistemas de representación y fenomenología). Se muestra una estructuración de la derivada al momento en que es presentada la teoría de derivadas, en la cual muestran propiedades de las derivadas que después son probadas y están localizadas en el campo procedimental del mapa conceptual (Figura 27). Es representada simbólicamente en un contexto matemático en situaciones ocupacionales y científicas. Por lo tanto, tenemos dos significados distintos de la derivada.

Es mostrada la convergencia de series, la cual se aplica al querer demostrarlas. El sistema de representación utilizado es el simbólico en contexto matemático con dos situaciones: ocupacional y científica. En este caso, se cuenta con dos significados distintos. Finalmente se observa en el mapa conceptual (Figura 27) que se tiene una estructura conceptual compuesta por extremos tangentes entre curvas entre otros en los cuales Cauchy realiza la demostración de los mismos mediante el sistema de representación simbólico con un contexto matemático en dos situaciones distintas: ocupacional y científico. De lo cual se deducen dos significados de la derivada diferentes.

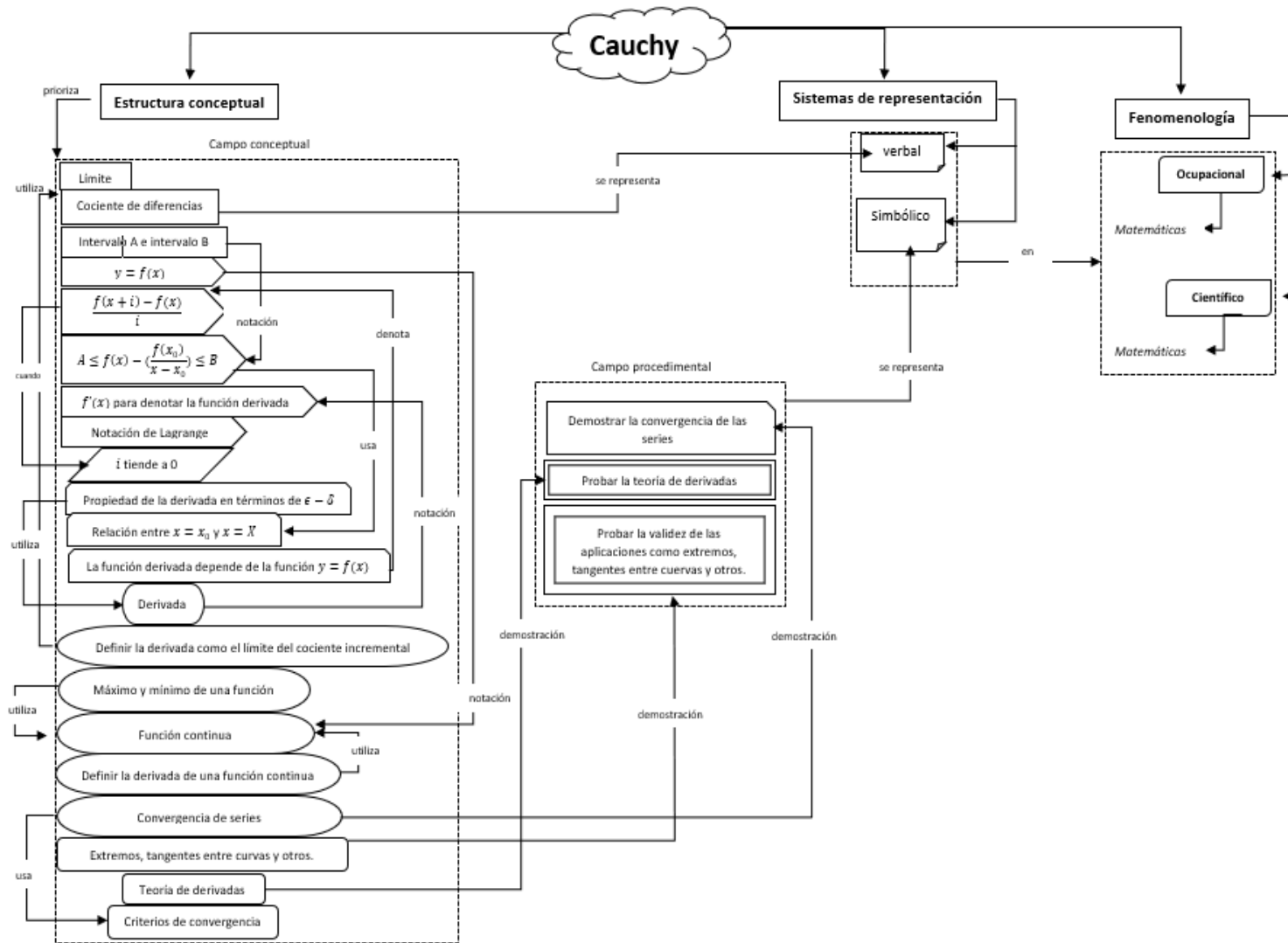


Figura 27. Mapa conceptual de Cauchy

Finalmente, Ampère es uno de los precursores de la derivada del siglo XVII. En el mapa conceptual (Figura 28) es apreciado que Ampère le dio prioridad al campo conceptual por lo cual define la función derivada $f'(x)$, la cual utiliza la igualdad $f(x+i) = \frac{f(x)}{i}$ y la función de x . El sistema de representación utilizado es simbólico y verbal bajo un contexto matemático en una situación ocupacional. En conclusión, se logran apreciar dos significados de la derivada diferentes.

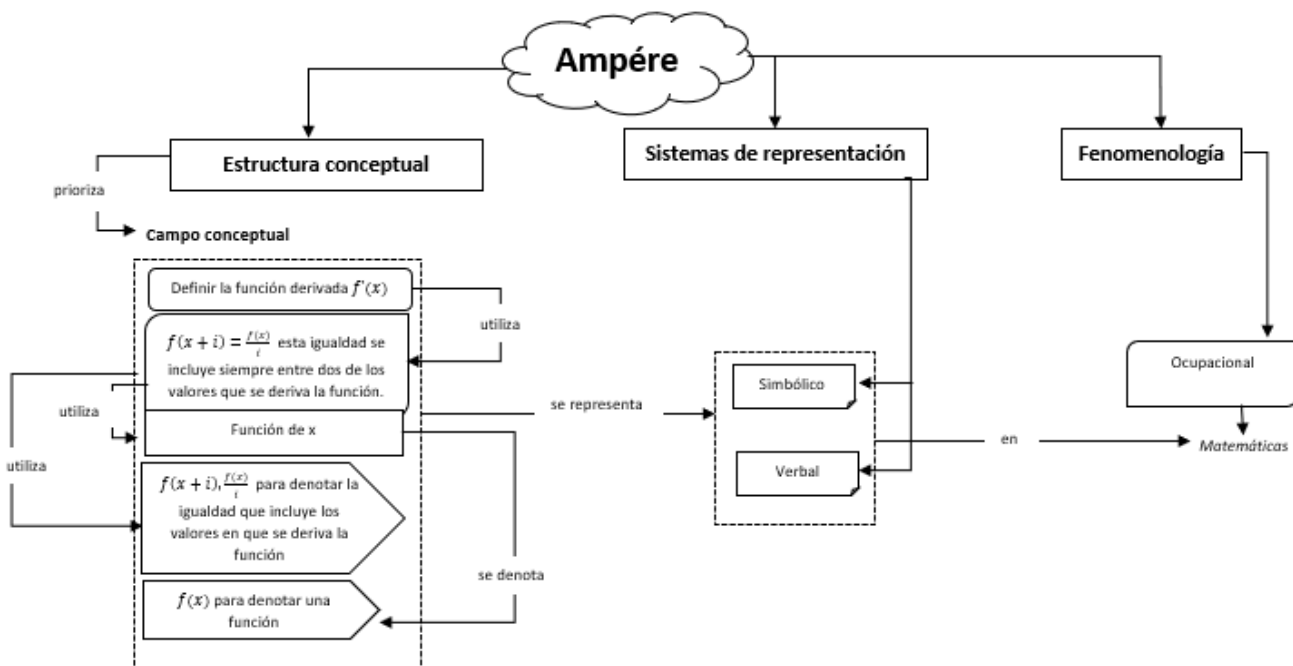


Figura 28. Mapa conceptual de Ampère

En el Anexo 4 se concentra la información presentada en estos mapas conceptuales a través de una tabla organizada por cada precursor. De manera general se observa que los primeros precursores centraron los significados que antecedieron al concepto de la derivada mediante el trazado de rectas tangentes y normales a las cónicas y curvas. Para realizar el trazado, consideraron los máximos y mínimos de una función y la razón de cambio de una función en la Física. A partir de Fermat se empiezan a proponer métodos más generales para el estudio de curvas y de los valores extremos; como, el método de los extremos de Fermat y el método para calcular la pendiente de una recta tangente, donde los registros de representación utilizados fueron la algebraica y la geométrica. Para Fermat, estos métodos toman sentido en situaciones de corte ocupacional y científica en contextos matemáticos. Sin embargo, es importante mencionar que Fermat con su método de los extremos, no se dio cuenta de la relación entre la pendiente de la recta tangente; la razón de cambio; y la derivada. Fermat lo que hace es calcular el límite del cociente incremental, pero no lo relaciona con la derivada.

Con Newton se observa un trabajo donde utiliza otros recursos menos los infinitesimales y la derivada se define sin límite en una representación geométrica en el contexto no matemático. Además, se desarrollaron teorías de las razones máximas y mínimas de forma verbal en

contexto no matemático. Un significado relevante fue el de las reglas de derivación para diversas operaciones que presenta Leibniz en representación simbólica y en contexto matemático.

Posteriormente se observan: el método de máximos y mínimos en representación geométrica; el método de la tangente con representación geométrica y en contexto matemático; la teoría de fluxiones con enfoque geométrico y en contexto matemático; y la teoría de máximos y mínimos en tres representaciones: verbal, simbólico y algebraico en contexto matemático.

Definir la derivada como el límite del cociente incremental y con representación simbólica y verbal, es considerado un significado parcial que probablemente estará presente en el programa de estudios y en la observación de clase a la profesora. También, definir la derivada como razón en dos representaciones: simbólica y verbal, es otro significado que se utiliza con mayor frecuencia para la enseñanza de la derivada. Finalmente, la función derivada está definida como un límite y utilizando épsilon y delta con un enfoque geométrico y algebraico en contexto matemático.

5.3 Referentes base de los significados de la derivada

Para finalizar este capítulo, se presentan aquellos referentes base del significado de la derivada y sus relaciones con estructuras del campo procedimental y conceptual identificados en los cuatro documentos revisados. Los referentes provienen de la estructura conceptual, lo cual indica que pueden pertenecer al campo conceptual o al campo procedimental, es decir, estos referentes pueden estar relacionados con las destrezas, los razonamientos o las estrategias. Cada uno de los referentes están mostrados en una tabla, donde se exhibe los elementos con los que están relacionados (esto permitirá la organización y la identificación de los significados de la derivada en el currículum oficial e impartido); y los precursores para que sea identificado el tiempo en el que se desarrolló tal referente. En la Tabla 10 se observa que la velocidad instantánea es uno de los referentes más utilizados dentro del desarrollo histórico de la derivada. La velocidad instantánea está relacionada con diversos métodos y teorías como lo es el de las fluxiones; ambas se desarrollan en situaciones ocupacionales y científicas en contexto no matemático, enfocado en el área de física y mecánica.

Tabla 10.

Velocidad instantánea como referente base del significado de la derivada

Referente (base)	Elementos relacionados	Precursores
Velocidad instantánea	Aceleración instantánea. Teoría de las razones primeras y últimas. Método de fluxiones y series infinitas. Reglas para la diferencial de suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones. Para potencias y raíces. Teoría de fluxiones. Tratamiento en series de Taylor de máximos y mínimos en términos de signos de fluxiones de distinto orden.	Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716) y Maclaurin (1698-1746).

La Tabla 11 indica aquellos elementos conceptuales y procedimentales relacionados con el referente de la pendiente de la recta tangente según el desarrollo histórico del concepto de la derivada. Este referente base del significado de la derivada fue utilizado por la mayoría de los precursores utilizando las representaciones algebraica y geométrica en contextos matemáticos y no matemáticos en situaciones ocupacional y científica.

Tabla 11.

Pendiente de la recta tangente como un referente del significado de la derivada.

Referente (base)	Elementos relacionados	Precursores
Pendiente de la recta tangente	Trazados sobre rectas tangentes y normales a una cónica. Tangente a una curva en un punto. Rectas tangentes y normales a curvas. Método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica. Métodos para tangentes. Ilustrar el hallazgo de la tangente a una parábola como el límite de las secantes.	Matemáticos de inicios del siglo XVI, Fermat (1601-1665), Leibniz (1646-1716) y Cauchy (1789-1857).

Otro referente del significado de la derivada que se hace presente con mayor frecuencia en el desarrollo histórico de la derivada es el de máximos y mínimos, presentado en la Tabla 12. En este referente, el contexto predominante es el matemático y predominan dos situaciones: científica y ocupacional.

Tabla 12.

Máximos y mínimos como un referente del significado de la derivada

Referente (base)	Elementos relacionados	Precusores
Máximos y mínimos	Máximos y mínimos de una función. Métodos de extremos de Fermat. Método para encontrar máximos y mínimos en una ecuación algebraica simple. Método para máximos y mínimos. Teoría de máximos y mínimos. Método para encontrar áreas y volúmenes a través de sumas.	Matemáticas de inicios del siglo XVI, Fermat (1601-1665), Leibniz (1646-1716), Maclaurin (1698-1746), Cauchy (1789-1857).

En la Tabla 13 se presentan el referente base del significado de la derivada, la razón de cambio. Este es un referente que probablemente estará potenciado en la unidad de competencia del plan de estudios de Cálculo I y en la observación de clase a profesora. Según la revisión de los antecedentes es uno de los referentes utilizados con mayor frecuencia para la enseñanza al introducir el tema de la derivada.

Tabla 13.

Razón de cambio como un referente base del significado de la derivada

Referente (base)	Elementos relacionados	Precusores
Razón de cambio	Razón de cantidades. Definir la derivada como razón que se aproxima indefinidamente cuando el incremento tiende a cero en positivos y negativos.	Newton (1643-1727) y Bolzano (1781-1848)

Finalmente, la Tabla 14, es visualizado el referente de la derivada el límite del cociente incremental en donde se observa que los elementos que tienen relación con este referente base, en su mayoría están dentro del campo conceptual, ya que se define la derivada y la función derivada en términos del límite. El contexto manejado es matemático y en situación científica.

Tabla 14.

Límite del cociente incremental como un referente base del significado de la derivada

Referente (base)	Elementos relacionados	Precusores
Límite del cociente incremental	<p>Calcular el límite</p> $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$ <p>Derivada como el límite de la razón de las diferencias de variables dependientes e independientes.</p> <p>Definir a la derivada como un límite.</p> <p>Función derivada como límite.</p> <p>Función derivada n-ésima de la función en el punto $x=0$.</p> <p>Derivada en términos de épsilon y delta.</p> <p>Definición de una función continua.</p>	<p>Fermat (1601-1665), D'Alembert (1717-1783), Bolzano (1781-1848), Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857) y Ampère (1775-1836).</p>

En la Figura 29 se muestran los referentes base identificados en el desarrollo histórico de la derivada. Se observa que los referentes base provienen de la estructura conceptual ya sea del campo conceptual o del campo procedimental. Los referentes base que son tomados del campo conceptual son: pendiente de la recta tangente; razón de cambio; velocidad instantánea; y límite del cociente incremental. El referente base máximos y mínimos proviene del campo procedimental.

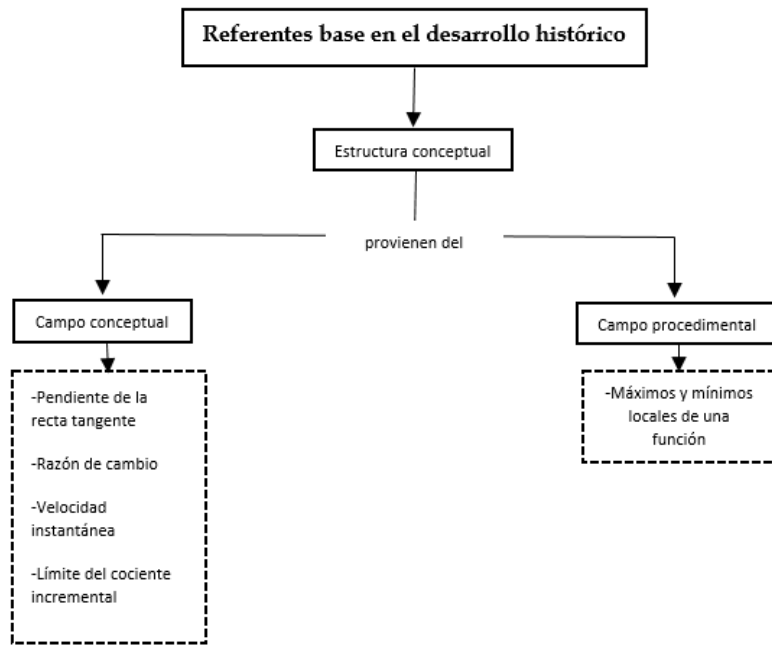


Figura 29. Mapa conceptual de los referentes base

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE CONTENIDO APLICADO AL PROGRAMA SINTÉTICO DE CÁLCULO I PARA EL TEMA DE DERIVADA

En este capítulo se presenta la unidad de competencia número cinco correspondiente al tema de derivada en el programa sintético de la materia de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Además, se muestran los significados de la derivada identificados en esta unidad de competencia. Finalmente se muestran los significados locales de la derivada según los bloques organizados mediante los desempeños propuestos en el programa sintético para esta misma unidad de competencia.

6.1 Descripción del programa sintético de estudios de Cálculo I

El tema de la derivada se ubica en la quinta unidad didáctica de competencia de la asignatura de Cálculo I ubicado en el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. El programa sintético de la asignatura de Cálculo I se divide en seis unidades de competencia. La unidad de competencia que aborda el tema de derivada y es utilizada como fuente de información en la presente tesis es la unidad cinco, llamada “unidad de competencia 5” en donde la competencia propuesta para desarrollar es “Usar las ideas de variación, derivada y diferencial para la resolución de problemas en diversos contextos” (UAM_UAZ, 2014, p.18). En la Figura 30 se muestra que la unidad de competencia se divide en: los desempeños, saberes teóricos, saberes procedimentales y competencias genéricas. Los desempeños los podemos ver como las demandas cognitivas que se le pide al estudiante deberá alcanzar al momento de terminar la unidad, por lo que sirvieron de eje rector para organizar los significados y relacionarlos con las otras dos columnas que son los saberes teóricos y procedimentales. En la presente investigación, se pone énfasis en los desempeños, saberes teóricos y saberes procedimentales, ya que son los que guían al profesor al impartir su clase.

UNIDAD DE COMPETENCIA 5	TOTAL DE HORAS DEL SEMESTRE QUE SE LLEVA LA UNIDAD DE COMPETENCIA		
	AID	ATS	ATI
Usar las ideas de variación, derivada y diferencial para la resolución de problemas en diversos contextos.			

Desempeños	Saberes Teóricos/Declarativos	Saberes Procedimentales	Competencias Genéricas
<p>Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua y determina las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas. Creo que aquí hablan de lo que hará el profesor...</p> <p>Resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta.</p> <p>Identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diferentes momentos y sus variaciones promedio.</p>	<p>Derivada de una función en un punto, primero de forma intuitiva a través de un ejemplo: como razón de cambio promedio.</p> <p>Definición de derivada de una función en un punto a través de un límite.</p> <p>Propiedades de linealidad de la derivada, así como las propiedades bajo productos, cocientes y composición de funciones.</p> <p>Condiciones bajo las cuales una función admite derivación en un punto.</p> <p>Derivación de orden superior.</p> <p>Regla de L'Hospital</p>	<p>Determinar si una función admite o no, y porqué, derivada en un punto.</p> <p>Encontrar la función derivada de una función elemental o compuesta, haciendo uso de las propiedades de la derivada bajo operaciones entre funciones.</p> <p>Entenderá el significado de la derivada de una función elemental o compuesta, en un punto, como la razón de cambio instantánea.</p> <p>Usará la regla de L'Hospital en la solución de límites.</p> <p>Aplicar la definición y propiedades de la derivada de una función en un punto, para resolver problemas en diferentes contextos: física (velocidad), biología (cambios en poblaciones), etc.</p>	<p>Capacidad crítica y autocrítica</p> <p>Compromiso con la calidad</p>

Figura 30. Unidad de competencia número cinco

Fuente: (UAM_UAZ, 2014, p. 18)

6.2 Significados globales de la derivada presentes en la unidad de competencia cinco

En el mapa conceptual de la Figura 31 es posible organizar toda la información presentada en la Figura 30 para una mayor visualización. En primer lugar, se puede observar que el programa de estudios potencia en mayor medida el campo procedimental de la derivada. De tal manera que se parte del campo procedimental y a partir de éste se va desarrollando el campo conceptual; es decir, el proceso para abordar el tema de la derivada según la propuesta del plan de estudios es partir del campo procedimental al campo conceptual.

En el desarrollo del tema de la derivada se observa una evolución de la estructura conceptual de la derivada, ya que la derivada de ser tratada como un término pasa a ser tratado como un concepto. La fenomenología al introducir la definición de la derivada se maneja en contextos matemáticos en situación educativa y contextos no matemáticos en situación pública, científica ocupacional y el área en donde más está enfocado es en la Física. No se tiene información sobre los sistemas de representación, lo anterior, como se ha mencionado no significa que no se usen, simplemente que el plan de estudios no lo declara de manera explícita. Esto podría dar libertad al profesor de elegir aquellos sistemas de representación con los que se sienta más cómodo. Por lo tanto, los significados evidenciados en la unidad de competencia 5 dedicada al tema de la derivada son significados parciales conformados por sólo dos componentes: estructura conceptual y fenomenología.

Por tal motivo, los significados parciales que se proponen desde el programa de la asignatura para el tema de la derivada son:

- La derivada como límite, en contexto matemático con situación educativa.
- Regla de L'Hopital para la solución de límites en situación educativa en el contexto matemático.
- Función derivada para funciones continuas, elementales y compuestas en contextos no matemáticos.
- Las fórmulas de derivación en contexto matemático.
- La resolución de problemas utilizando propiedades de la derivada y condiciones para admitir o no la derivación de una función en contexto no matemático.
- Variaciones promedio y variaciones instantáneas y su relación en contexto no matemático.
- La velocidad en el área de Física y el cambio de poblaciones en el área de biología, de las otras situaciones no define con claridad, pero se intuya que puede ser el contexto matemático en contexto no matemático.

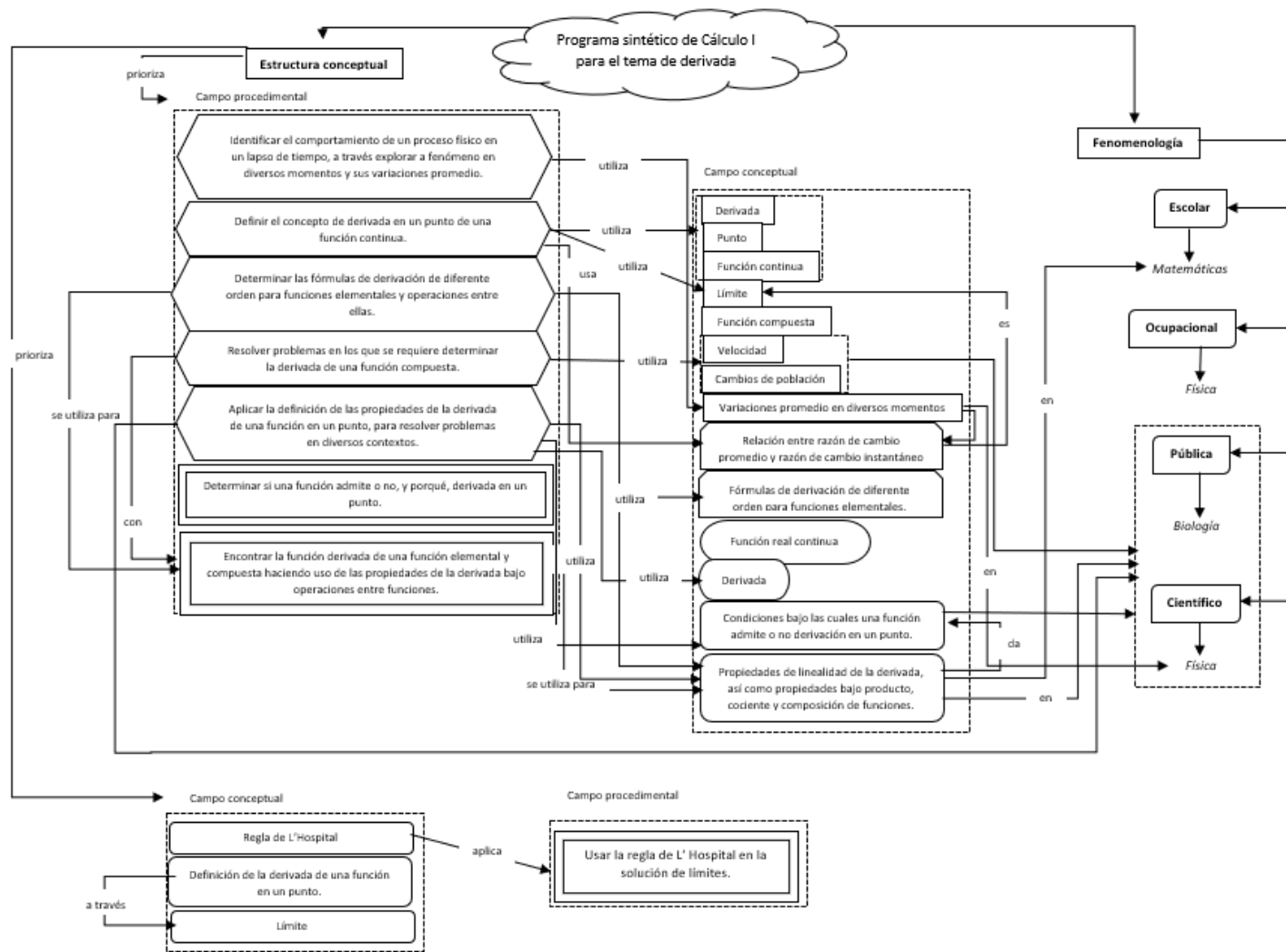


Figura 31. Mapa conceptual del programa sintético de Cálculo I para el tema de la derivada

En un inicio se observa que el programa sintético de cálculo I, muestra una anotación del cual parece no corresponder a la información del programa. Otro punto a tratar es que se declara que son utilizados diversos contextos en esta unidad de competencia sólo se muestran dos áreas aparte del área matemática que son física y biología entonces no se muestra esa diversidad que declara.

Otro dato muy importante es que, en los significados mencionados anteriormente, no se hacen presentes significados que tengan como referente base a la pendiente de la recta tangente; o los máximos y los mínimos. Además, se propone definir la derivada y la función derivada como el límite del cociente incremental. Lo anterior, es interesante que no se proponga de otra manera, pues según en la historia la derivada antecede al límite.

6.3 Significados locales de la derivada por bloques de desempeño

La planificación del programa sintético mostrado anteriormente, permitió organizarlo de manera más específica a través de lo que se le pide al profesor promover en los estudiantes. Para la organización del programa sintético se consideran los desempeños como eje central. Los desempeños son divididos en cuatro partes (Figura 32), éstas son elegidas con base en el enfoque teórico, es decir, de cada uno de los desempeños se localiza la estructura conceptual: campo conceptual y procedimental. Como se puede mostrar en la Figura 32 los bloques están normados por cada parte del desempeño de la siguiente manera:

- Primer bloque, es definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua.
- Segundo bloque tiene que ver con determinar las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas.
- Tercer bloque es resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta.
- Cuarto bloque es identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diferentes momentos y sus variaciones promedio.

Desempeños
<u>Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua y determina las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas.</u>
<u>Resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta.</u>
<u>Identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diferentes momentos y sus variaciones promedio.</u>

Figura 32. División de los desempeños

Fuente: (UAM_UAZ, 2014, p. 18)

Después cada una de las divisiones se procede a asociarla con las otras dos columnas que corresponden a los saberes teóricos y a los saberes procedimentales. De esta manera, se va conformando una nueva organización del programa sintético de estudios considerando los componentes del significado propuestos en el enfoque teórico. La organización de los significados identificados para cada bloque los llamaremos significados locales de la derivada y se presentan a continuación.

6.3.1 Bloque 1: Definir el concepto de derivada en un punto de una función real continua

En este bloque el desempeño que se emplea es definir el concepto de derivada de un punto de una función real continua. Este desempeño está asociado con los siguientes saberes teóricos: “derivada de una función en un punto, primero de forma intuitiva a través de un ejemplo: como razón de cambio promedio; definición de derivada de una función en un punto a través de un límite; y condiciones bajo las cuales una función admite derivación en un punto” (UAM_UAZ, 2014, p. 18). De igual manera, está asociado con los siguientes saberes procedimentales: “entender el significado de la derivada de una función elemental o compuesta, en un punto, como la razón de cambio instantánea; y determinar si una función admite o no, y por qué, derivada en un punto” (UAM_UAZ, 2014, p. 18).

En el mapa conceptual (Figura 33) se aprecia que el campo conceptual es al que se le tiene prioridad porque comprende la definición de una función derivada en un punto a través del límite como significado parcial, ya que no se tiene información de los sistemas de representación ni de la fenomenología utilizada. Otro significado parcial el de razón de cambio, se hace presente la relación que existe entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo que es el límite, los sistemas de representación y la fenomenología no está presente y es por ello que es un significado parcial. Por otro lado, en el campo procedimental se prioriza dar las razones porque una función admite o no derivación en un punto del cual se relaciona con un elemento del campo conceptual que consiste en conocer las condiciones bajo las cuales una función admite o no derivación en un punto.

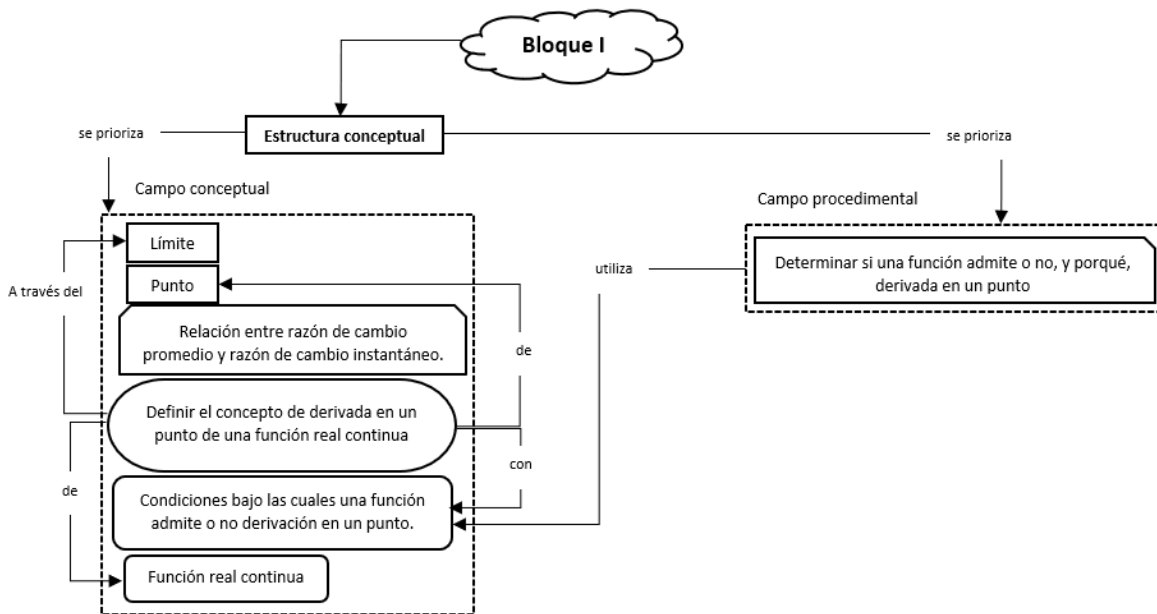


Figura 33. Mapa conceptual del bloque I

6.3.2 Bloque II. Determina las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas.

El bloque 2, está conformado por “determina las fórmulas de derivación de diferente orden para las funciones elementales y para las operaciones entre ellas” (UAM_UAZ, 2014). Está relacionado por elementos los siguientes saberes teóricos: “propiedades de linealidad de la derivada, así como las propiedades bajo productos, cocientes y composición de funciones; y derivación de orden superior” (UAM_UAZ, 2014). El saber procedimental con el que está asociado es “encontrar la función derivada de una función elemental o compuesta, haciendo uso de las propiedades de la derivada bajo operaciones entre funciones” (UAM_UAZ, 2014).

En la Figura 34, se observa en el campo procedimental, que en principio se requiere determinar las fórmulas de derivación de funciones elementales y operaciones entre ellas, entonces se hacen presentes dos significados parciales: uno que está dado por las fórmulas de derivación como referente base, tratado como resultado según el enfoque teórico; y el otro, las

propiedades de la derivada tratado como estructura conceptual. La razón por la cual son significados parciales es porque no hay evidencia de los sistemas de representación ni de la fenomenología utilizada. En conclusión, en este bloque, se observa que la estructura conceptual tiene más énfasis lo cual es esperado, por la naturaleza de la carrera.

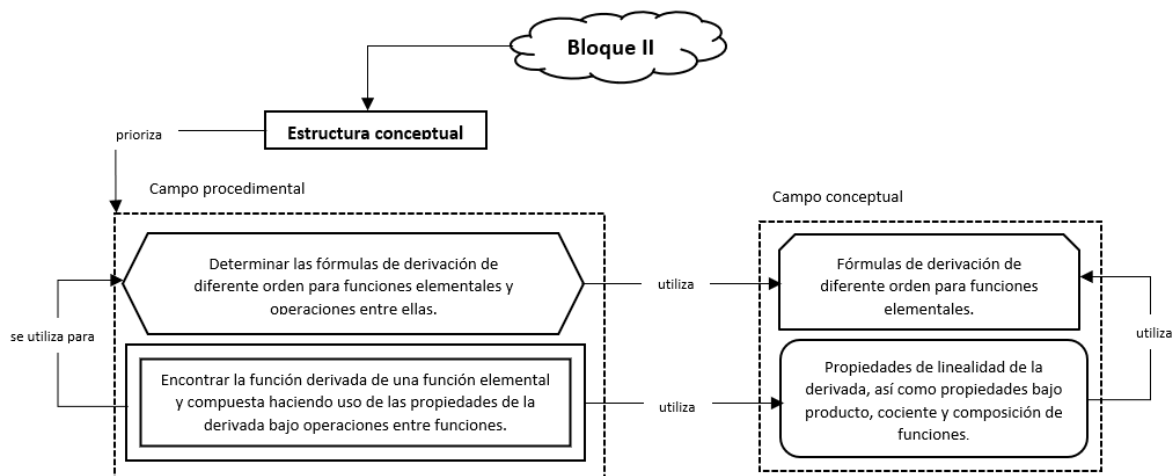


Figura 34. Mapa conceptual del bloque II

6.3.3 Bloque III. Resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta.

El bloque 3, está conformado por el desempeño: “resolver problemas en los que se requiera determinar la derivada de una función compuesta” (UAM_UAZ, 2014). Los saberes teóricos con los que se relaciona son: “propiedades de linealidad de la derivada, así como las propiedades bajo producto, cocientes y composición de funciones; y condiciones bajo las cuales una función admite derivación en un punto” (UAM_UAZ, 2014). Los saberes procedimentales son: “aplicar la definición y propiedades de la derivada de una función en un punto para resolver problemas en diversos contextos: física (velocidad), biología (cambios en poblaciones), etc.; y encontrar la función derivada de una función elemental o compuesta, haciendo uso de las propiedades de la derivada bajo operaciones entre funciones” (UAM_UAZ, 2014).

En el mapa conceptual (Figura 35) se observan los elementos al priorizar el campo procedimental, en el cual se utilizan elementos del campo conceptual como la derivada, mostrada como un hecho. Para determinar la derivada de una función se utiliza la velocidad en la física y los cambios en la población en la biología. Ambos son considerados significados parciales porque no cuentan con el sistema de representación. La definición de la derivada, es un significado parcial presente en la Figura 35. Es un significado parcial porque no hay evidencia de un sistema de representación, ni de la fenomenología que se utiliza. Para la resolución de problemas en los que se requiere determinar la derivada de una función compuesta, se hace uso de propiedades de la derivada y condiciones tal como se muestra en la Figura 35. Además de una relación con otras destrezas que requieren de los mismos

elementos del campo conceptual como determinar la función derivada de una función elemental y compuesta a través de condiciones y propiedades de la derivada. La fenomenología no está presente ni tampoco se indican sobre los sistemas de representación utilizados.

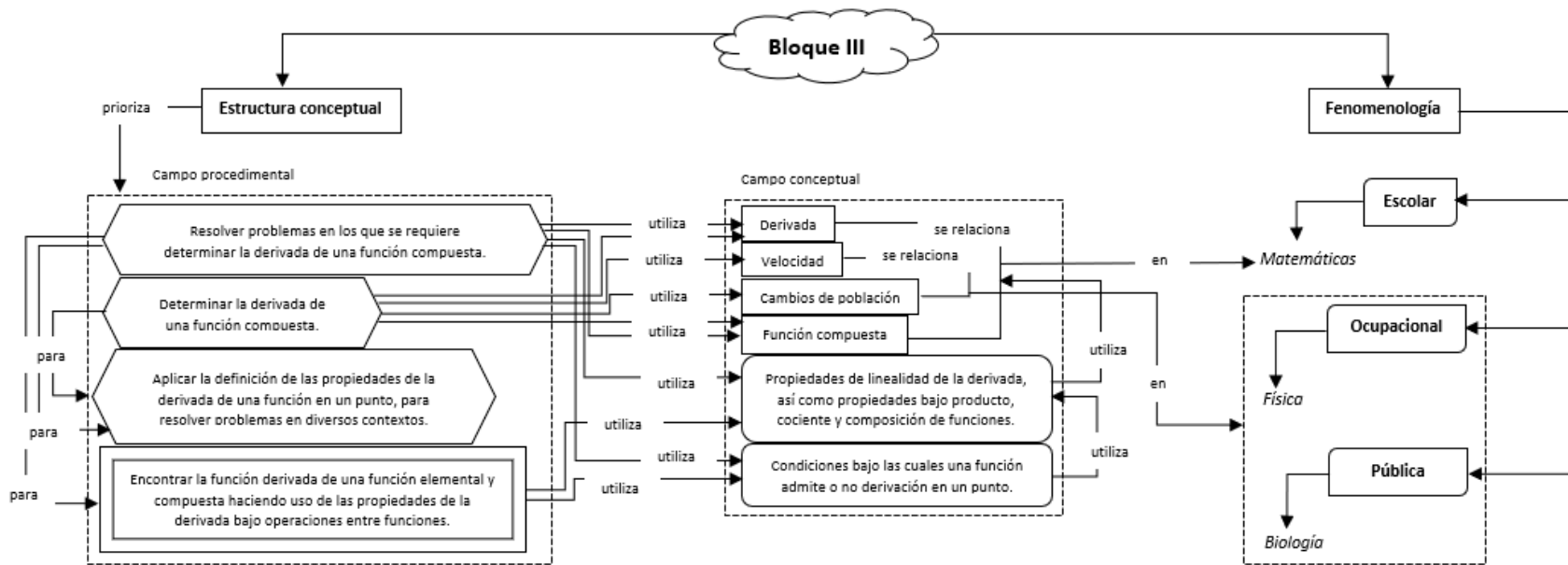


Figura 35. Mapa conceptual del bloque III

6.3.4 Bloque IV. Identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diversos momentos y sus variaciones promedio.

El bloque se compone por el desempeño: “identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar el fenómeno en diferentes momentos y sus variaciones promedio” (UAM_UAZ, 2014). Este desempeño se relaciona con los siguientes saberes teóricos: “definición de derivada de una función en un punto a través de un límite; derivada de una función en un punto, primero de forma intuitiva a través de un ejemplo: como razón de cambio promedio; condiciones bajo las cuales una función admite derivación en un punto; y regla de L’Hopital” (UAM_UAZ, 2014). Los saberes procedimentales a los cuales se asocia son: “aplicar la definición y propiedades de la derivada de una función en un punto, para resolver problemas en diferentes contextos: física (velocidad), biología (cambios en poblaciones), etc.; entender el significado de la derivada de una función elemental o compuesta, en un punto, como la razón de cambio instantánea; y usar la regla de L’Hopital en la solución de límites” (UAM_UAZ, 2014).

En el mapa conceptual (Figura 36) en primer lugar vemos que se prioriza el campo procedimental. En el campo procedimental, se observa que el desempeño consiste en que se identifique un proceso físico en diversos momentos de tiempo y sus variaciones promedio, el cual como ya se mencionó anteriormente está relacionado con otro desempeño correspondiente a aplicar la definición de las propiedades de la derivada, por lo cual se evidencia que un significado parcial es la definición de la derivada a través del límite donde el contexto es no matemático dentro de la Física. De igual manera, este mismo referente se presenta dentro de la biología. Algo importante de resaltar y que se puede apreciar es que la derivada al parecer se conceptualiza.

Se observa que hay un referente base que, al aplicar el límite a la razón de cambio promedio, se convierte en razón de cambio instantáneo, no se tiene información de los sistemas de representación utilizados ni de la fenomenología utilizada, sólo es la estructura conceptual la que está presente. Se puede intuir que se maneja en contextos matemáticos, pero no está declarado en el programa sintético por lo que se considera que no existe información suficiente.

Finalmente, se centra la atención en el campo conceptual (Figura 36), en donde aparece la regla de L’Hopital, esta regla hace mención que se aplica para la resolución de límites. No se tiene información sobre el sistema de representación ni de la fenomenología utilizada, esto como ya se ha mencionado anteriormente, no significa que no existan, simplemente que no los declaran de manera explícita y por ello es que se considera que no hay información al respecto. Por lo tanto, L’Hopital es considerado un significado parcial de la derivada por lo antes expuesto.

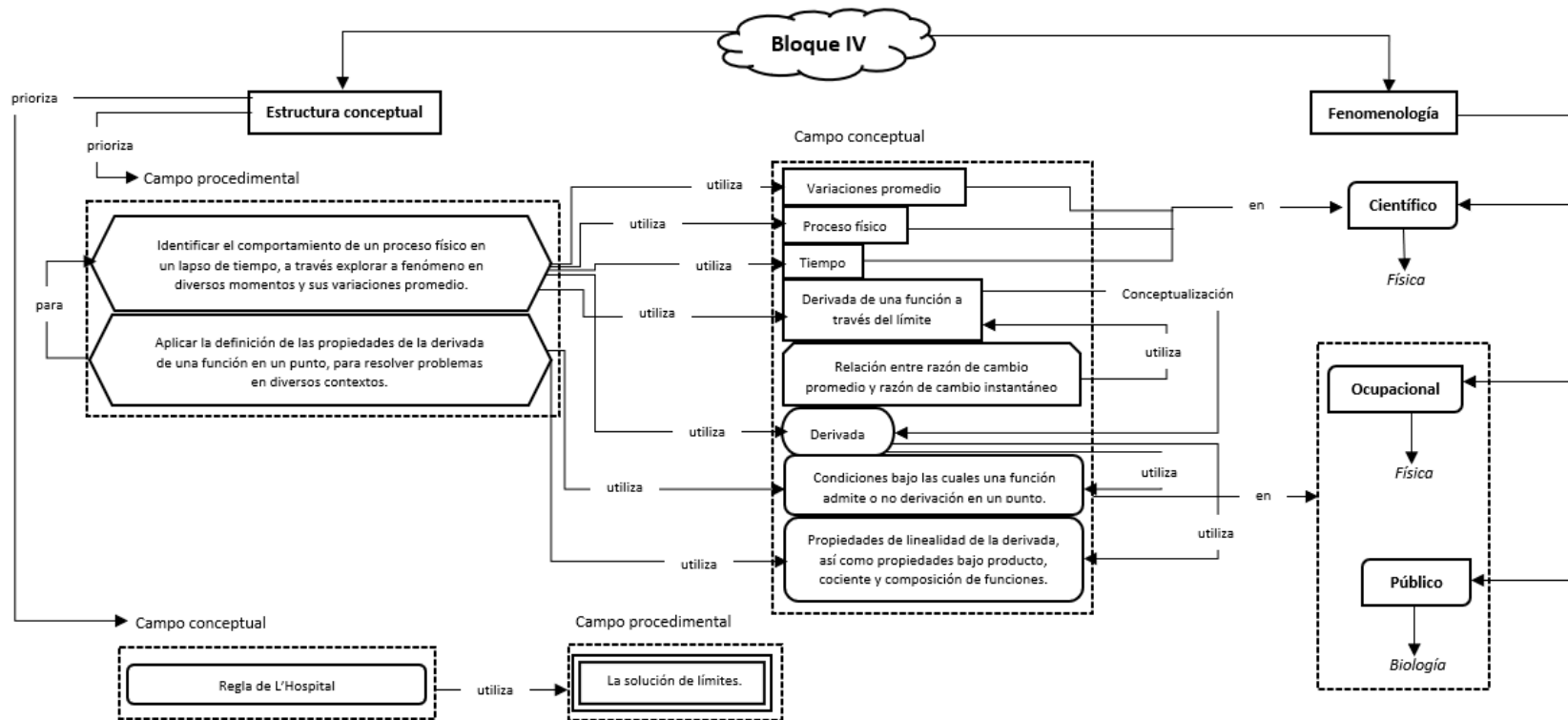


Figura 36. Mapa conceptual del bloque IV

6.4 Significados de la derivada en el programa sintético de Cálculo I

Los referentes base con los que son relacionados los significados son tomados de los significados de la derivada encontrados en el desarrollo histórico de la derivada. En la Tabla 15 son apreciados los significados de la derivada potenciados en el currículum oficial. El referente base que aparece con mayor frecuencia es el del límite del cociente incremental. Aparecen otros dos referentes base que son la razón de cambio y la velocidad instantánea. La manera en que el programa sintético de Cálculo I propone impartir el tema de la derivada, es comenzando por realizar acciones sobre el contenido matemático en cuestión y después ponerle atención a definir cada una de las componentes de ese contenido. Es decir, la propuesta del currículum oficial es que los temas sean impartidos primero con elementos del campo procedimental y con base en ello llegar al campo conceptual. Los sistemas de representación no se hicieron presentes en ninguno de los significados de la derivada mostrados en la Tabla 15. La fenomenología presentada está dada en situaciones públicas, científica y educativa en áreas de física, biología y matemáticas.

Tabla 15.

Significados de la derivada potenciados en el programa sintético de Cálculo I

Campo conceptual	Campo procedimental	Referentes base con los que se relaciona	Fenomenología
Variaciones promedio, tiempo, procesos físicos, función compuesta, Propiedades de linealidad de la derivada, así como propiedades bajo producto, cociente y composición de funciones, condiciones de porque una función en un punto, admite o no, derivación. Definir el concepto de derivada en un punto de una función continua como el límite.	Identificar el comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través explorar a fenómeno en diversos momentos y sus variaciones promedio.	Razón de cambio	Pública (biología) crecimiento de poblaciones
Fórmulas de derivación de diferente orden para funciones elementales.	Determinar las fórmulas de derivación de diferente orden para funciones	Límite del cociente incremental	Científica (física) velocidad

	elementales y operaciones entre ellas.		
Variaciones promedio, tiempo, procesos físicos, función compuesta, Propiedades de linealidad de la derivada, así como propiedades bajo producto, cociente y composición de funciones, condiciones de porque una función en un punto, admite o no, derivación.	Resolver problemas en los que se requiere determinar la derivada de una función compuesta (velocidad y cambios de población)	Límite del cociente incremental, y velocidad instantánea	Pública (biología) Crecimiento de poblaciones
Propiedades de linealidad de la derivada, así como propiedades bajo producto, cociente y composición de funciones, condiciones de porque una función en un punto, admite o no, derivación.	Aplicar la definición de las propiedades de la derivada de una función en un punto, para resolver problemas en diversos contextos.	Límite del cociente incremental	Científica (física) Velocidad
Condiciones de porque una función en un punto, admite o no, derivación.	Determinar si una función admite o no, y porqué, derivada en un punto.	Función derivable en un punto	Científica (física)
Regla de L'Hopital	Usar la regla de L'Hopital para la solución de límites	Sin especificar	Educativa (matemáticas)
			Educativa (matemáticas)

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS DE CONTENIDO APLICADO A LA OBSERVACIÓN DE CLASE A PROFESORA

En este capítulo se muestran la organización y los resultados de los significados de la derivada identificados en los videos de la observación de clase a profesora correspondientes al primer desempeño propuesto por el programa sintético de Cálculo I. Además, se presentan algunos aspectos relevantes observados en los videos de la clase de la profesora. Se concluye el capítulo con un mapa conceptual en son presentados los significados identificados en los videos de la clase que la profesora Ángel impartió.

7.1 Significados en la observación de los videos de clase de una profesora

En esta sección se muestran los significados de la derivada que se hicieron presentes en tres videos de clase de la profesora Ángel. Ella es titular de la materia de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Los tres videos tienen una duración de aproximadamente 40 minutos. Estos tres videos corresponden al primer bloque expuesto en el capítulo anterior, y que corresponde al desempeño “definir el concepto de la derivada en un punto de una función real continua” (UAM_UAZ, 2014, p. 18). Podemos situar este bloque como el tema que sirve de introducción al de la derivada.

7.1.1 Análisis del video 1: Introducción al tema de la derivada (Parte 1)

En la primera sesión analizada de la unidad de competencia número cinco del programa sintético de la materia de Cálculo I, se comienza a introducir el tema de la derivada. Al inicio de la clase, la profesora Ángel, muestra tres significados distintos de la derivada por medio de una aplicación. Esta aplicación tiene como referente base a la velocidad pues se requiere calcular ésta en un punto. Este problema está en un primer nivel, ya que es una destreza en el campo procedimental. Los sistemas de representación utilizados son: pictórico, gráfico y verbal (Figura 37). El fenómeno es la caída libre de los cuerpos, la situación es ocupacional en el área de la Física (Figura 38). Después de la presentación del problema y la explicación de este fenómeno, la profesora presenta la solución de dicho problema paso a paso. Las operaciones usadas entre los sistemas de representación a la que la profesora recurre son en su mayoría transformaciones sintácticas invariantes (Figura 39) y variantes (Figura 40).

Velocidad promedio en $[4, t]$: $\frac{d(t) - d(4)}{t - 4}$

Intervalo $[4, t]$	$[4, 4.4]$	$[4, 4.2]$	$[4, 4.1]$	$[4, 4.05]$	$[4, 4.01]$
Velocidad promedio	$41.16 \frac{m}{s}$	$40.18 \frac{m}{s}$	$39.69 \frac{m}{s}$	$39.445 \frac{m}{s}$	$39.249 \frac{m}{s}$

Velocidad promedio en $[t, 4]$: $\frac{d(4) - d(t)}{4 - t} = \frac{d(t) - d(4)}{t - 4}$

Intervalo $[t, 4]$	$[3.6, 4]$	$[3.8, 4]$	$[3.9, 4]$	$[3.95, 4]$	$[3.99, 4]$
Velocidad promedio	$37.24 \frac{m}{s}$	$38.22 \frac{m}{s}$	$38.71 \frac{m}{s}$	$38.955 \frac{m}{s}$	$39.151 \frac{m}{s}$

Figura 37. Sistema de representación tabular para la resolución del problema



Figura 38. Inicio del tema de la derivada

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

Si sustituimos en esta expresión $d(t) = 4.9t^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 v(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4.9t^2 - 4.9t_0^2}{t - t_0} \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4.9(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} \\
 &= 4.9 \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\
 &= 4.9 \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0) \\
 &= 4.9(2t_0) \\
 &= 9.8t_0.
 \end{aligned}$$

Figura 39. Traducción sintáctica invariante

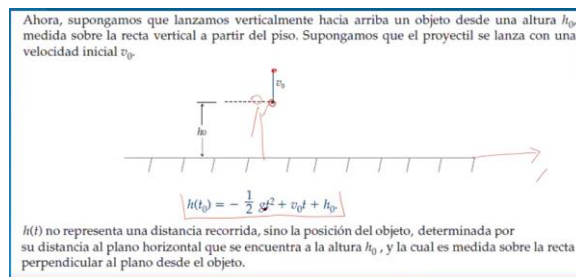


Figura 40. Transformación sintáctica variante

7.1.2 Análisis del video 2: Introducción al tema de la derivada (Parte 2)

En la segunda sesión, la profesora concluye el problema de introducción dándole otro enfoque, es decir, lo relaciona con otro referente base, la razón de cambio porque en determinados momentos la profesora calcula la velocidad calculando el límite, entonces, aunque sólo realiza el procedimiento y no lo declara como tal, están inmersos tres referentes base de la derivada velocidad instantánea, razón de cambio y límite del cociente incremental que ya después menciona la relación como tal.

Enseguida la profesora siguiendo con la idea de la relación entre la velocidad y la razón de cambio, expone otra aplicación que tiene como referente base nuevamente a la velocidad en un primer nivel de la estructura conceptual. Los sistemas de representación utilizados son pictórica, verbal simbólica y tabular. Además, realiza la presentación de los signos, igualmente realiza transformaciones sintácticas variantes al momento de cambiar entre los diversos sistemas de representación y transformaciones sintácticas invariantes cuando realiza los cálculos al resolver el límite (Figura 41). La forma en que pasa entre los sistemas de representación es que primero utiliza la representación pictórica, de la pictórica utiliza la representación verbal para explicar el fenómeno y otras aplicaciones sobre la derivada. Después utiliza la representación tabular y finalmente hace uso de la representación simbólica para la solución de dicho problema. La fenomenología está dada en un contexto no matemático en el área de la Física, en una situación ocupacional determinado por un fenómeno llamado tiro vertical de un proyectil (Figura 42).

La velocidad instantánea $v(t_0)$ que lleva el cuerpo en un instante t_0 , es definida, como en el ejemplo anterior, mediante el límite

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Si en el cociente $\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$ sustituimos $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 - \left(-\frac{1}{2}gt_0^2 + v_0t_0 + h_0\right)}{t - t_0} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2) + v_0(t - t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}g(t + t_0)(t - t_0) + v_0(t - t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0 \end{aligned}$$

Así que para toda $t \neq t_0$ tenemos

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0.$$

De donde obtenemos

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0 \right] = \frac{1}{2}g(2t_0) + v_0 = gt_0 + v_0.$$

Figura 41. Ejemplo de la transformación sintáctica invariante

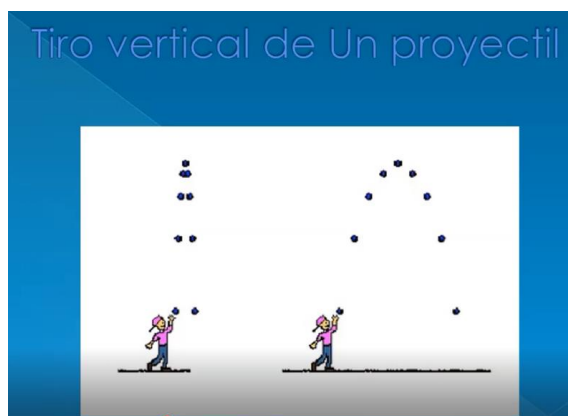


Figura 42. Imagen del tiro vertical de un proyectil

La profesora al decirles a sus estudiantes sobre la cantidad de las aplicaciones de la derivada, el papel de los matemáticos y el uso del cálculo diferencial en sus vidas como profesionistas, retoma la relación que hay entre el límite del cociente incremental, la razón de cambio y la velocidad. La manera en que hace esta relación es preguntando a los estudiantes que cómo fue que se resolvieron los problemas a lo cual los estudiantes concluyeron que primero se determina la velocidad por medio del límite del cociente incremental al pasar de la velocidad promedio a la velocidad instantánea y posteriormente analizando diversos momentos. Al concluir la sesión menciona lo siguiente:

- PA: Vamos a la definición más importante de su vida en el cálculo diferencial. Ya sé que les dije que la del límite... sí porque es el cimiento. Sin límite no hay cálculo, pero, la definición central para que se quería era para esta definición de derivada.

7.1.3 Análisis del video 3. Definición de la derivada de una función en un punto

Para la tercera sesión, la profesora nuevamente repite que en la sesión verán la definición más importante de sus vidas. En la pantalla presenta una imagen (Figura 43) en donde contiene el

título de la lámina “la derivada de una función en un punto” (video 3, 18:07); la definición de la derivada como el límite del cociente incremental en un nivel dos del campo conceptual. Dentro del campo conceptual se priorizan elementos como las notaciones que son presentadas (Figura 43). Algo interesante de esta sesión es que la profesora Ángel, no sólo muestra una notación para la derivada de una función, sino que expone otras siete notaciones entre ellas las que son utilizadas en el área de Matemáticas o bien en Física e ingenierías. De esas notaciones que ella presenta en la lámina, menciona aquella notación que es su agrado y manifiesta el motivo de la preferencia. Los sistemas de representación utilizados son verbal y simbólica. La manera en que expone la lámina es de acuerdo primero presenta lo simbólico y después lo verbal. Además, presentar los signos que es una de las operaciones de los signos en los sistemas de representación. El contexto a utilizar es el matemático en situación profesional por la declaración que hizo al iniciar la sesión.

La derivada de una función en un punto

Definición
 Sea $y = f(x)$ una función y x_0 un punto de su dominio. Si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

diremos que f es derivable en el punto x_0 y que tal límite se llama la derivada de f en x_0 , la cual se denota por cualquiera de los símbolos

$$f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0) \text{ o } Df(x_0).$$

También suelen usarse las notaciones (sobre todo en física e ingeniería)

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \text{ o bien } \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

para la derivada de f en x_0 .

Figura 43. Pantalla de la profesora

Para terminar la sesión número tres correspondiente al primer desempeño define a las derivadas laterales por medio de los límites laterales, en representaciones verbal, simbólica y pictórica, en contexto matemático ya que en cada ejercicio que realiza va tomando en cuenta el segundo desempeño descrito en la unidad de competencia número cinco, las fórmulas de derivación.

7.2 Mapas conceptuales de los videos de la observación a profesora

En esta sección se muestran dos mapas conceptuales en donde son presentados los significados de la derivada identificados en el análisis de los tres videos de la observación de clases de la profesora enfocado en el primer desempeño propuesto en la unidad de competencia número cinco del programa sintético de Cálculo I de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

En el primer mapa conceptual, se muestran los significados de la derivada de los tres videos de clase analizados que corresponden al primer desempeño de la unidad de competencia número cinco. La decisión de que estos significados sean mostrados en un mapa conceptual surge de mostrar los elementos del campo procedimental de la estructura conceptual porque al iniciar con el tema de la derivada la profesora introdujo el tema haciendo uso de aplicaciones. De igual manera, en el segundo mapa conceptual se observan los significados de la derivada de los tres videos analizados, con la diferencia de que en este mapa prioriza los elementos del campo conceptual.

En el mapa conceptual (Figura 44) se les presta mayor atención a los elementos del campo procedimental, esto se debe a que cuando se empezaron a analizar los videos, al inicio del tema de la derivada, la profesora, resuelve dos problemas mediante dos aplicaciones diferentes de la derivada. A pesar, de que las aplicaciones son distintas, ambas están guiadas por un referente base, la velocidad. Además de ello, se utilizan varios elementos del campo conceptual por ejemplo la velocidad promedio, la velocidad instantánea. Lo que realiza la profesora es que para llegar a la velocidad instantánea aplica el límite a la velocidad promedio, de esta manera relaciona a la velocidad con el límite, también utiliza varias notaciones que son parte del campo conceptual y que complementan al significado. Esto se observa en el mapa conceptual (Figura 44). Así mismo están presentes los convenios que la profesora expone a sus estudiantes cuando resuelve los problemas de introducción a la definición. Los sistemas de representación son cuatro: verbal, pictórico, simbólico y tabular en un contexto no matemático en el área de la Física. Se observa que los significados que la profesora Ángel imparte al priorizar elementos del campo procedimental son completos dado que tienen las componentes del significado.

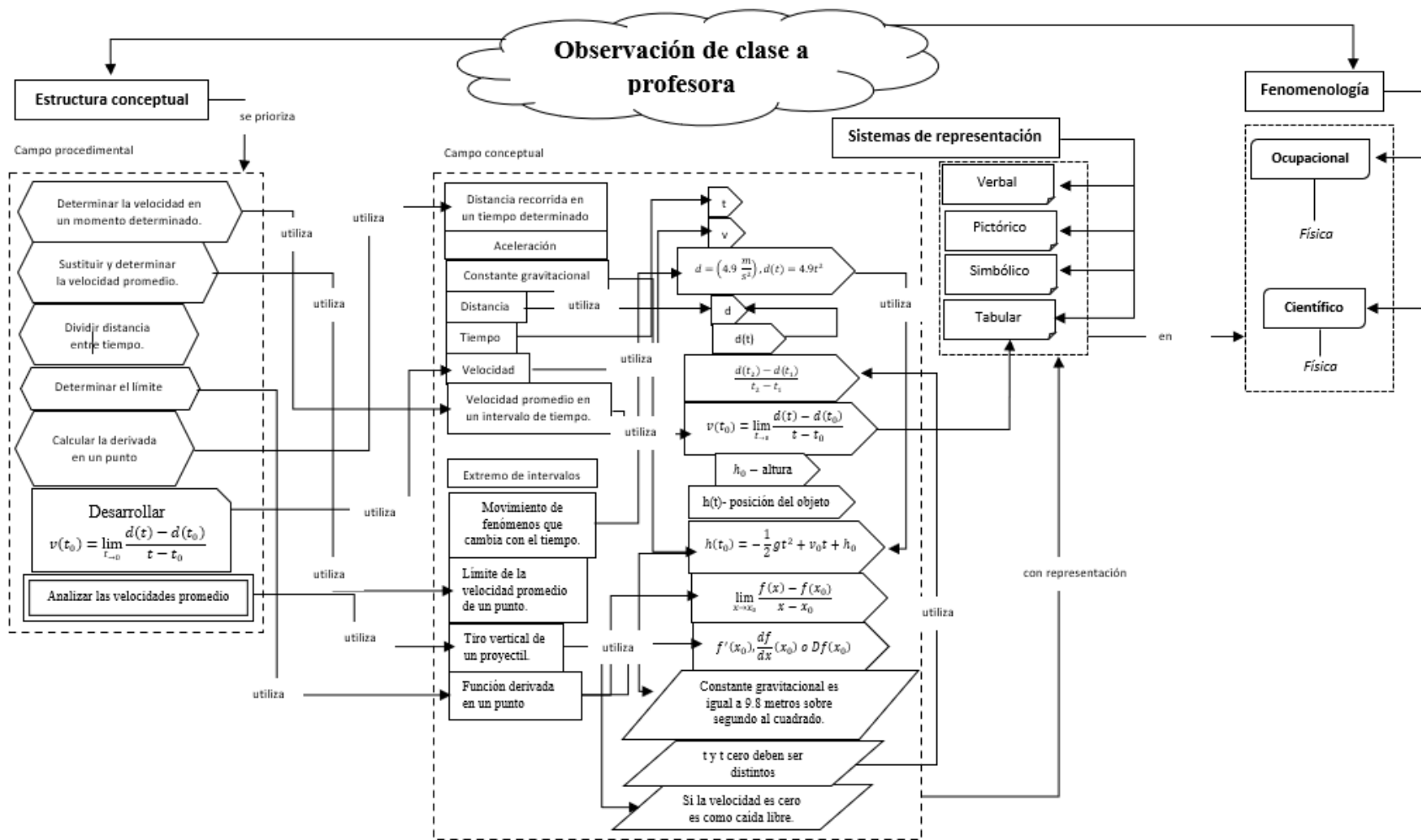


Figura 44. Mapa conceptual de la observación de clase a profesora dándole prioridad al campo procedimental

En la Figura 45 se observa los elementos al priorizar el campo conceptual, algunos de los significados que se pueden observar es la derivada como un concepto en un nivel dos de la estructura conceptual donde hace uso del límite como un hecho y de algunas notaciones que son utilizadas para denotar a la derivada. Los sistemas de representación utilizados son verbal y simbólico. La fenomenología utilizada es en el contexto matemático. En este mapa (Figura 45) se observa la relación que tiene la derivada con la razón de cambio y el cociente incremental en contexto matemático con representación verbal.

Posteriormente se observa otro significado de la derivada. La estructura conceptual es la definición de las derivadas laterales haciendo uso de los límites laterales en un nivel dos vistos como conceptos. Los sistemas de representaciones utilizadas son verbal, simbólica y pictórica, en contexto matemático. Así mismo hay otros significados que se hacen presentes como resultado en un primer nivel que son las reglas de derivación que, aunque no son parte del desempeño número uno se deriva de él y algo que parece interesante es como para las propiedades de la derivada se utilizan las propiedades del límite. Las representaciones son simbólica y verbal en contexto matemático. Con ello, podemos ver que, en la parte conceptual, el elemento base para la derivada que la profesora utiliza es el límite. Lo cual indica que la profesora trata de no alejarse de lo que el programa sintético de Cálculo I propone.

Siguiendo el análisis de los videos algo que llama la atención es que en efecto todos los significados que la profesora presenta en el aula, expuestos en el siguiente mapa conceptual (Figura 45), tienen las tres componentes del significado de un concepto matemático Rico (2012). Al mostrar los elementos de la estructura conceptual que la profesora impartió en el aula, se observaron nuevas aplicaciones como la caída libre de los cuerpos y el movimiento parabólico a través del tiro vertical. Además, se aprecia en el mapa conceptual (Figura 45) que los sistemas de representación que la profesora utilizó para abordar el tema de la derivada son variados. En el caso de la fenomenología se hicieron presentes situaciones como las personales y las profesionales. Estas situaciones no se hicieron presentes cuando se mostraron los elementos por medio del campo procedimental.

De manera general un aspecto relevante es que con el problema que presenta la profesora al inicio de la clase, abarca los desempeños que no se analizaron en la presente tesis. Además, se aprecia la adaptación de la profesora al introducir el tema de manera intuitiva hasta llegar a la formalización de dicho concepto, dando las herramientas teóricas necesarias para la comprensión de la derivada.

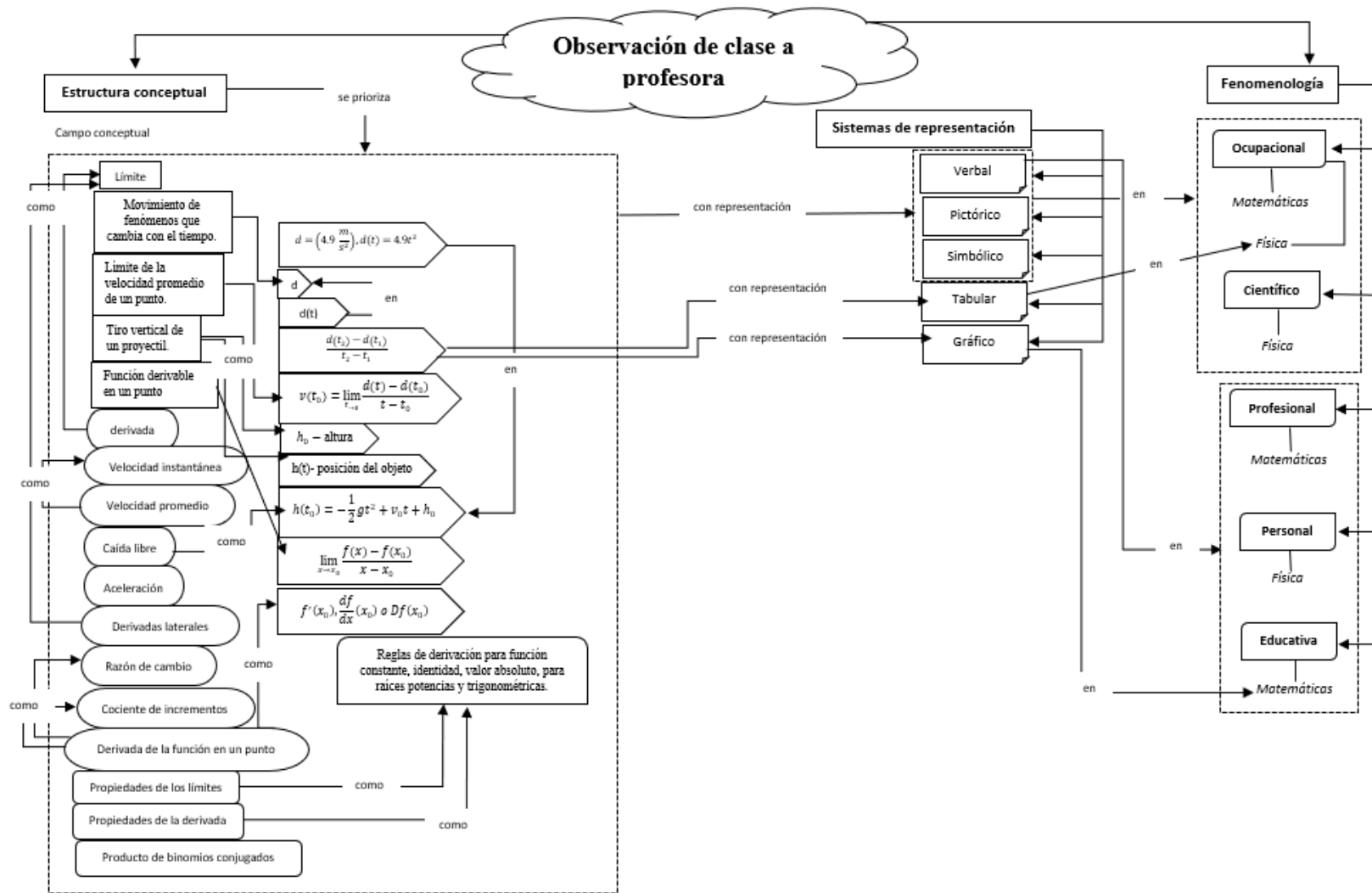


Figura 45. Mapa conceptual de la observación de clase a profesora dándole prioridad al campo conceptual

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE EL CURRÍCULUM OFICIAL Y EL IMPARTIDO

En este capítulo se muestran los resultados del análisis comparativo aplicado al programa sintético de Cálculo I, en particular, la unidad de competencia número cinco, y la observación de los videos de clase de la profesora correspondientes al bloque 1. Además, se muestran las relaciones y diferencias de los significados de la derivada en el currículum oficial e impartido de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

8.1 Significados de la derivada en el currículum oficial

En la Tabla 16 se muestran los significados de referencia identificados en el programa sintético de Cálculo I. El límite del cociente incremental es el referente base que más se propone en el currículum oficial. Las áreas en donde el programa sintético de estudios de Cálculo I sugiere que se trabaje este referente base son en Matemáticas y en la Física. Para los referentes base velocidad instantánea y razón de cambio se propone ser trabajado en contextos no matemáticos involucrando poniendo más atención en áreas como la Física y la Biología. En la Tabla 16 se puede observar que no aparecen referentes base como la pendiente de una recta tangente ni el referente base por la parte procedimental máximos y mínimos, este es un dato importante porque estos referentes son tomados del desarrollo histórico de dicho concepto matemático. Por los elementos con los que cada referente base está relacionado, se pueden ver la relación entre dichos referentes, tal es el caso de la velocidad instantánea la razón de cambio. Hablando de estos dos referentes, también se observa que muchos de sus elementos tienen que ver con elementos del campo procedimental y los referentes como el límite del cociente incremental y la función derivable en un punto se enfocan más en el campo conceptual.

Tabla 16.

Significados de referencia en el currículum oficial

Referente (base)	Elementos con los que se relaciona	Fenomenología
Velocidad instantánea	Variaciones promedio, tiempo, procesos físicos, función compuesta. Resolución de problemas en los que se requiere determinar la derivada de una función compuesta.	Física y biología
Límite del cociente incremental.	El concepto de derivada en un punto de una función continua. Fórmulas de derivación de diferente orden para funciones elementales y operaciones entre ellas. Propiedades de linealidad de la derivada, así como las propiedades bajo producto, cociente y composición de funciones, condiciones de porque una función admite o no, derivación. Aplicar la definición de las propiedades de la derivada para resolver problemas en diversos contextos.	Matemáticas y física
Razón de cambio	Variaciones promedio, tiempo, procesos físicos, función compuesta. Identificación del comportamiento de un proceso físico en un lapso de tiempo, a través de explorar a un fenómeno en diversos momentos y sus variaciones promedio.	Física y biología
Función derivable en un punto	Determinar si una función admite o no, y porque, derivada en un punto.	Matemáticas

8.2 Significados de la derivada en el currículum impartido

Siguiendo con el análisis de la observación de clase a la profesora. Algo que llama la atención es que en efecto todos los significados que la profesora presenta en el aula cumplen con tener las tres componentes del significado de un concepto matemático Rico (2012). En la Tabla 17, se puede observar la presencia de diversos referentes base como velocidad instantánea, límite del cociente incremental, razón de cambio y función derivable en un punto. La fenomenología que se presenta en áreas de matemáticas y física.

La similitud que el programa sintético tiene con el desarrollo histórico de la derivada es que presenta contextos en física y en matemáticas. Otra similitud con respecto al desarrollo histórico es que los referentes base como lo son la velocidad instantánea; las fórmulas de derivación; las propiedades de la derivada; y las condiciones de que una función admite o no derivación en un punto están presentes.

En la observación en clase, no se hicieron presentes algunos significados que vimos en la historia por ejemplo la pendiente de la recta tangente y los máximos y mínimos de una función. En este análisis de la observación de clase la profesora mencionó que sin límite no sería cálculo ya que era parte fundamental de la materia. Sin embargo, esto llama la atención porque en el desarrollo histórico de la derivada se apreció que la derivada antecede al límite. Cabe mencionar que en la observación de clase se encontraron otras situaciones como las personales y las profesionales, en el lugar de ellas otras se ausentaron como las situaciones públicas.

Tabla 17.

Significados de referencia en el currículum impartido

Referente (base)	Elementos con los que se relaciona	Registros de representación	Fenomenología
Velocidad instantánea	Velocidad promedio, velocidad, derivada, límite del cociente de diferencias.	Tabular, pictórico, simbólico y verbal	Física
Límite del cociente incremental.	Límite, razón de cambio, la distancia recorrida en un tiempo determinado.	Tabular, simbólico y verbal	Matemáticas
Razón de cambio	Velocidad, derivada, límite de cociente de diferencias, función derivada	Tabular, simbólico, pictórico y verbal	Matemáticas y Física
Función derivable en un punto	Límite del cociente incremental, función derivada, función continua, intervalo o vecindad	Verbal, simbólico y gráfico	Matemáticas

8.3 Relaciones y diferencias de los significados de la derivada en el currículum oficial e impartido

En esta sección, se presentan las relaciones y las diferencias de los significados de la derivada identificados en el currículum oficial e impartido de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Estas relaciones y diferencias son presentadas por medio de tablas comparativas, en las que se toma en cuenta la noción del significado de un concepto matemático propuesto por Rico (2012) así como los respectivos elementos que conforman las componentes del significado. El orden en que son mostradas estas tablas comparativas,

son que la información se analiza de lo más general a lo más particular considerando los elementos que conforman las componentes del significado.

En la Tabla 18, se aprecia la comparación que se hace de las componentes del significado de un concepto matemático Rico (2012) y de la preferencia por campo de la estructura conceptual en ambos tipos del currículum. Con respecto a las componentes del significado, en la Tabla 18, se presenta que en ambos tipos del currículum se presenta la estructura conceptual del significado. Así mismo, en el programa sintético de Cálculo I y en los videos de la observación de clase del primer del primer bloque está la fenomenología. Sin embargo, vemos que en el programa sintético de Cálculo I no se presentan los sistemas de representación. En cambio, se observa que la profesora en cada significado que presenta considera las tres componentes del significado propuesto por Rico (2012). Otro elemento que se compara en la Tabla 18, es el campo que se potencia en el bloque 1, para este elemento se puede observar que tanto el programa sintético de Cálculo I como los videos de la observación de clase de la profesora enfocado en el primer bloque que potencian el campo conceptual.

Tabla 18.

Tabla comparativa sobre las componentes del significado y los campos de la estructura conceptual en el bloque 1

Tipo de currículum	Componentes del significado			Campo que se potencia más en el bloque 1	
	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología	Conceptual	Procedimental
Programa sintético de cálculo I	x		x	x	
Observación de videos de clase de una profesora	x	x	x	x	

Siguiendo con el análisis de la estructura conceptual, la Tabla 19 está enfocada en mostrar cuales son los referentes base en ambos tipos del currículum. Para esta tabla, se consideran los referentes base rescatados del desarrollo histórico mostrado en el capítulo cinco de la presente tesis. En la Tabla 19 se observa que, en ambos tipos del currículum, se hacen presentes el límite del cociente incremental, la razón de cambio y la velocidad instantánea. Para la definición de la derivada se utiliza el límite del cociente incremental, este dato es interesante porque no se utilizan otros recursos, a pesar, de que en el desarrollo histórico la definición de la derivada se sirvió de otros recursos como la serie de Taylor y el criterio de Euler. La velocidad instantánea en el programa sintético de Cálculo I propone determinar la velocidad instantánea y al resolver el límite de la velocidad promedio que es

algo que la profesora estaba realizando para dar solución a los problemas. Lo mismo ocurre con la razón de cambio al verlo en el programa sintético para la identificación de un fenómeno físico en diversos tiempos y la profesora lo realiza al terminar con los problemas de contextos no matemáticos. Las similitudes que tienen el currículum oficial e impartido, es que, en ambos casos, no vieron aparecieron otros referentes base como la pendiente de la recta tangente; y los máximos y mínimos de una función.

Tabla 19.

Tabla comparativa de los referentes base en ambos tipos del currículum

Tipos del currículum	Referentes base				
	Límite del cociente incremental (conceptual)	Razón de cambio (conceptual)	Velocidad instantánea (conceptual)	Pendiente de la recta tangente (conceptual)	Máximos y mínimos (procedimental)
Programa sintético de Cálculo I	X	X	X		
Observación de videos de clase a profesora	X	X	X		

Una de las diferencias que llama la atención y está evidenciada anteriormente es que en los videos de la observación de clase de la profesora se hicieron presentes los sistemas de representación, cosa que en el plan de estudios no se da de manera explícita, es decir, no proponen ningún tipo de representación. La diferencia encontrada es que el programa sintético de Cálculo I para el tema de la derivada arroja significados parciales, por la componente faltante (los sistemas de representación). En cambio, en la observación a la profesora al impartir el tema, se aprecian significados de la derivada completos. En la Tabla 20 se puede observar que, en los videos de la observación de clase a la profesora, hace uso de sistemas de representación como verbal, pictórico, simbólico y gráfico. Además, de que en los videos de la observación a clase la profesora mostró varias operaciones de los sistemas de representación.

Tabla 20.

Tabla comparativa sobre los sistemas de representación entre ambos tipos del currículum

Tipos de currículum	Sistemas de representación							
	Verbal	Númérico	Pictórico	Tabular	Simbólico	Geométrico	Gráfico	Manipulativo
Programa sintético de Cálculo I								
Observación de videos de clase a profesora	x		x		x		x	

Finalmente, se tiene como objeto de estudio a la fenomenología en los dos tipos del currículum. En el capítulo tres de la presente tesis, se toma la decisión que, para la fenomenología, se consideran las situaciones y los contextos. Por esta razón, en la Tabla 21, se contemplan estos dos elementos en los cuales se clasifican en diversas situaciones y dos contextos.

En la Tabla 21 se aprecia que las situaciones ocupacionales, educativas y científicas aparecen tanto en el programa sintético de Cálculo I como en los videos analizados de la observación de clase de la profesora que se enfocaron en el primer bloque. Para el caso del programa sintético de Cálculo I observamos que la situación pública está propuesta, sin embargo, en los videos analizados esta situación no se hizo presente. En los videos analizados de la observación de clase de la profesora, se observan dos situaciones que en el programa sintético de Cálculo I no están propuestas, las personales y las profesionales. Esto llama la atención, ya que, en varias ocasiones, la profesora marcaba de qué manera el contenido matemático visto en ese momento serviría a los estudiantes dentro de su carrera profesional.

Tabla 21.

Tabla comparativa sobre la fenomenología en ambos tipos del currículum

Tipos del currículum	Fenomenología							
	Situaciones						Contexto	
	Personales	Ocupacionales	Educativas	Públicas	Científicas	Profesionales	Matemáticos	No matemático
Programa sintético de cálculo I		x	x	x	x		x	x
Observación de videos de clase a profesora	x	x	x		x	x	x	x

CONCLUSIÓN

En el desarrollo histórico de la derivada, se determinaron los referentes base que sirvieron para la organización de dichos significados en el currículum oficial e impartido. Los referentes base que se hicieron presentes en ambos tipos del currículum fueron razón de cambio, límite del cociente incremental y velocidad instantánea. La razón de cambio y el límite del cociente incremental eran referentes que aparecerían tanto en el currículum oficial como en el currículum impartido, porque como lo declaran Inglada y Font (2003); Sánchez-Matamoros et. al. (2008); y Hitt y González-Martín (2016) son los referentes más utilizados para la enseñanza de la derivada. Por lo anterior, una pregunta es ¿por qué los referentes como la pendiente de una recta tangente y los máximos y mínimos locales de una función no aparecen en ningún tipo del currículum analizado si anteceden al límite?

Dentro de la hipótesis planteada en la presente tesis se mencionó que los significados tanto del currículum oficial como el impartido serían diferentes, lo cual la presente investigación, en efecto, muestra evidencia de la desconexión de los significados de la derivada en el currículum oficial e impartido.

Por una parte, esto se debe a los sistemas de representación pues como se observó, el currículum oficial muestra significados parciales, en cambio, el currículum impartido presenta significados completos, es decir, significados con sus tres componentes. Lo anterior, da evidencia a lo que Morales (2018) menciona acerca del profesor, que en efecto tiende a complementar esos significados en este caso parte de lo que el plan de estudios propone. Además, el programa sintético de cálculo I, le da libertad al profesor de elegir aquellos sistemas de representación con el que el profesor se sienta más cómodo (Fernández-Plaza et. al., 2016). Sin embargo, se puede decir que el profesor trata de no alejarse tanto de lo que propone el programa sintético de estudios de Cálculo I. Por lo tanto, con base en el enfoque teórico se sugiere al programa sintético de estudios añadir aquellos sistemas de representación con lo que deba trabajar al profesor, ya que esto permitirá la articulación de los significados y logrando esa relación entre los tipos de currículum, mejorará la comprensión de dicho concepto matemático tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. De lo contrario, los significados seguirán desconectados, abriendo un sin fin de posibilidades, lo cual va a dificultar la comprensión de la derivada.

Por otra parte, la fenomenología presentada en el programa sintético de cálculo I se muestran situaciones: ocupacionales, educativas y científicas. Sin embargo, se observa que en ningún momento se propone la situación profesional, es decir, situaciones que involucren habilidades de los estudiantes como futuros profesionistas. Un ejemplo de este tipo de situaciones es desarrollar modelos matemáticos de fenómenos con propósitos analíticos y de investigación. Estas situaciones son un aspecto importante porque el programa sintético de estudios está enfocado a formar profesionistas enfocados en el área de Matemáticas. Por lo tanto, se sugiere al programa añadir este tipo de situaciones como

lo realiza la profesora en sus clases, al realizar demostraciones y desarrollar modelos en donde requieren ser analizados. Con respecto a los contextos, ambos tipos del currículum presentan tanto los matemáticos como los no matemáticos, lo cual en la mayor parte ayuda tanto al profesor como al futuro profesionista a comprender el contenido matemático relacionado con su entorno.

El desarrollo histórico del concepto de la derivada fue un gran apoyo para la presente investigación, porque además de que sirvió para la identificación y organización de los significados nos arroja un dato interesante y es que a como se ha presentado la historia de dicho concepto la forma en la que se divulgó el conocimiento influía mucho de su perfil como profesor, lo cual nos hace comprobar la hipótesis de que en este caso, la profesora complementaria los significados en su clase por su formación educativa.

REFLEXIONES

Esta tesis me ha hecho entender más el concepto de la derivada, un concepto que es clave dentro del cálculo, en particular, el cálculo diferencial. Para realizar esta investigación en repetidas ocasiones recurrí a mis notas de licenciatura e incluso a descargar libros de forma electrónica, puesto que había relaciones, conceptos, objetos que no recordaba muy bien de qué manera se abordaban y lo requería el conocimiento para cumplir con el objetivo de la investigación. Del concepto estudié varias cosas, incluso para la observación de clase, primero vi los videos y después los transcribí, fue como un repaso para mí. Desde el inicio yo tenía bien claro que era lo que quería trabajar y era con currículum porque sabía que era de los temas que mi asesora manejaba y a mí me gusta trabajar con los profesores por eso elegí algo que tuviera que ver con estos temas. El tema de investigación abordar los significados de un concepto matemático es un tema que me parece interesante y hasta el día de hoy, en mi opinión, es un trabajo vigente para cualquier nivel educativo y para cualquier concepto matemático.

Sobre los referentes teóricos, yo tenía otras nociones totalmente distintas, al momento de que fuimos construyendo el marco conceptual, me daba cuenta del mundo tan grande que hay detrás. Además, que existen conceptos que uno los utiliza en la vida cotidiana y pasan desapercibidos, pero cuando esos conceptos como lo es el currículum y el significado de un concepto matemático en un contexto matemático son difíciles de utilizar. El tema de investigación me gustó desde el momento en que leí un artículo sobre una clase de una profesora que utilizaba el cubo Rubik para impartir el tema de la potencia de un número. En ese momento quede encantada, elegir un concepto matemático para estudiar su multiplicidad fue lo más complicado para mí. Recordé que la derivada tenía varias aplicaciones y que en su mayoría ninguna sabía de qué manera podía ocuparla. Una de las cosas que se me complicó bastante fue identificar los significados en el desarrollo histórico, porque no sabía cómo elegir los fragmentos o las oraciones, y además era confuso el clasificarlos si correspondían al primer, segundo o tercer nivel.

Como futura profesora, cabe mencionar que esta investigación la tomaré como modelo para impartir el contenido matemático escolar, es decir, el marco conceptual y el proceso metodológico que se describió en el capítulo 3 y 4 de la presente tesis, me servirán como una guía para lograr identificar y organizar los significados de cualquier otro concepto matemático. En esta investigación, me di cuenta de la gran importancia que tiene hacer este tipo de investigaciones. Más en conceptos en donde no se han realizado estudios, pues estoy segura que mejorará la comprensión del concepto de interés tanto en mis futuros estudiantes, como en el mío propio. Además, la realización de este tipo de estudios, es de gran provecho, porque se refuerza mucho el conocimiento matemático (saber sabio), esto lo menciono porque a inicios de empezar a escribir la presente tesis, considero que muchos significados de la derivada no los asociaba con el concepto, ahora lo he comprendido, pero mucho de ello se lo debo al haber realizado el desarrollo histórico. Es algo ambicioso

pensar que a futuro consultaré la historia de cada concepto matemático, pero si está en mis manos y de ahí obtendré más conocimiento por saber de dónde se originó, será un placer sería bueno comenzar a consultar y conocer más acerca de los conceptos más comunes propuestos en el currículum oficial (los programas de estudio).

Además, algo que observé de la investigación y que me servirá como futura profesora es a cuidar el discurso que mostremos ante los estudiantes, ya que con lo que les decimos ellos pueden interpretarlo de otra manera y quizás la intensión era otra. Lo anterior, lo menciono porque en los videos que observé de la clase de la profesora pude darme cuenta que ella le da mucho valor a la definición de la derivada como límite entonces, pensemos que tomo esa frase, si un estudiante autodidacta se va a los libros de historia del cálculo que puede suceder, y se da cuenta que la derivada antecede al límite, esto va a ser un problema para la comprensión del concepto en el estudiante dado que no va a quedar claro lo que quise decir sobre el límite, entonces me deja como enseñanza que para cada concepto incluso para impartir clases, debemos cuidar lo que decimos.

En los tipos de currículum, sería es buena idea seguir indagando en la clasificación que propone Alsina (2000), para este mismo concepto en la misma licenciatura, me encantaría seguir buscando las posibles desconexiones de los significados de la derivada en los otros tipos del currículum. Además, esta acción, representaría un trabajo más completo, del cual, se podría detectar el problema dado que son acontecimientos extrínsecos y se les puede dar una mayor organización para que todo esté relacionado. Como futura profesora me gustaría hacer lo mismo para otros conceptos matemáticos, para tener más cuidado con lo que se propone, lo que se planea, lo que se imparte y lo que se enseña. Además de que cómo ya lo manifesté en unas líneas anteriores, el estudio es vigente para cualquier nivel educativo e incluso cualquier concepto matemático.

Me gustó mucho utilizar las etapas del análisis de contenido, porque son etapas muy detalladas que permiten la identificación de los significados del concepto matemático en cuestión, además que con el marco conceptual que se adoptó favoreció mucho a que todo se anclara de una manera muy clara y todo parece estar relacionado, es por ello, que si me llegan a preguntar si seguiría trabajando con este tipo de investigaciones con gusto diría que sí por esa conexión y la congruencia tanto del marco conceptual con el proceso metodológico, aunque bueno, si quisiera hacer el comparativo de entre otros tipos de currículum para el mismo concepto de la derivada me ahorraría el desarrollo histórico del concepto y continuaría con las fases del análisis de contenido en los otros corpus.

Esta tesis fue un reto para mí desde el primer momento, dado que en la licenciatura no realicé un trabajo de investigación de esta naturaleza, entonces era algo nuevo. Y sabemos que las cosas que se hacen por primera vez nos dan miedo porque nos quitan de nuestra zona de confort y no estamos acostumbrados a eso. Hacer una tesis es una experiencia muy bonita, aunque es estresante, delicada, y demandante de tiempo, pero al menos yo

obtuve algo de ella, algo precioso, algo que vale más que el oro: el conocimiento. Fue hermosa porque de la mano caminaron conmigo personas que admiro y respeto mucho, que se han ganado mi corazón por su humildad, su dedicación a mi trabajo, su paciencia para guiarme. Estas personas son ángeles que me han ayudado a lograr cada uno de mis sueños. Personas que me han inspirado a ser una mejor persona y hacer esta investigación sin ellos, hubiera sido un desastre. Estas personas de las que hablo son mi asesora la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez y mi coasesor el Dr. Eduardo Briceño.

REFERENCIAS

- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J.M. (coord.). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo 21*, (pp. 13-21). España: Biblioteca de Uno.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Biza, I. (2019). Calculus as a discursive bridge for algebra, geometry and análisis: The case of tangente line. En Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. Simposio llevado a cabo Conference to be held at the University of Agder, Kristiansand, Norway
- Briceño, E., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes del nivel superior. *El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las ciencias y la matemática*, 1(10), 31-47.
- Bos, R., Doorman, M., Drijvers, P. (2019). Supporting the reinvention of slope. En Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. Simposio llevado a cabo Conference to be held at the University of Agder, Kristiansand, Norway.
- Cañadas, M. y Gómez, P. (2014). Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 3. Documento no publicado (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Castro, W., Cadavid, G. y Pino-Fan, L. (2015). Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas. En A. Ruiz (Presidencia), *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Simposio llevado a cabo en el XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México.
- Castro-Rodríguez, E., Castro, E. y Torralbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*, (pp. 141-160). Granada: Comares, S.L.
- Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. y Ruiz-Hidalgo, J. (2015). Matemáticas escolares y el cambio curricular (1945-2014). El caso de los números racionales. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 19(3), 420-438.
- Claros, J., Sánchez, M. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en los libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación Matemática* 28(1), p. 125-152. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377006>.

- Code, W., Piccolo, C., Kohler, D. y MacLean, M. (2014). Teaching methods comparison in a large calculus class. *ZDM Mathematics Education* 1(46), 589-601. doi: 10.1007/s11858-014-0582-2.
- Cox, C. (2001). El currículum escolar del futuro. *Revista Perspectivas* 1(1), pp. 1-20.
- D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática. México: Reverté.
- Da Silva, D. y Borba, M. (2014). The role of software modellus in a teaching approach base don model análisis. *ZDM Mathematics Education* 1(46), 575-587. doi: 10.1007/s11858-013-0568-5.
- Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza*, 1(1), 75-90.
- Dolores, C., Rivera, M. y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 1(120), 104-115.
- Eichler, A. y Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 647-659. doi: 10.1007/s11858-014-0606-y.
- Ellis, J., Kelton, M. y Rasmussen, C. (2014). Student perceptions of pedadody and associated persistence in calculus. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 661-673. doi: 10.1007/s11858-014-0577-z.
- Fernández-Plaza, J., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez- Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. *Investigación en Educación Matemática XX*, 1(1), 259-268.
- Feudel, F. (6-7 abril del 2018). $C'(x) = C(x+1)-C(x)$? - Students' connections between the derivative and its economic interpretation in the context of marginal cost. En Proceedings of Indrum 2018, *Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Simposio llevado a cabo Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics of Kristiansand, Norway.
- Feudel, F. (2019). Required knowledge of the derivate in economics. Results from a textbook análisis. En Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. Simposio llevado a cabo Conference to be held at the University of Agder, Kristiansand, Norway.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1), pp. 127-135.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). *Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática*. En Tirado, M. L. (Ed.), *Educación en Matemáticas* (pp. 337-363). Bogotá: IDEP.
- Gómez, P. y Velazco, C. (2017). Complejidad y coherencia de documentos curriculares colombianos: derechos básicos de aprendizaje y mallas de aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, 1(73), 260-280.
- Grabiner, J. (1978). The origins of Cauchy's theory of the derivate. *Historia Matemática* 5(1), pp. 379-409.
- Hamann, T, Schmidt-Thieme, B. (6-7 abril del 2018). Cross-linking maths- using keynotes to structure a curriculum for future teachers. En Proceedings of Indrum 2018, *Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Simposio llevado a cabo Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics of Kristiansand, Norway.
- Hernández, O. y Dolores, C. (2007). *El estado actual del currículum matemático escolar*. En Buendía, Gabriela; Montiel, Gisela (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 31-39). Mérida, Yucatán: Red Cimates.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista P. (2014). *Metodología de la investigación*. D.F., México: McGRAW-HILL.
- Hernández, J., Zamora, R. y Lupiáñez J. (2020). Estudio comparativo de los significados y expectativas de aprendizaje del límite en tres libros y el currículo oficial. *PNA*, 14(4), p. 241-269.
- Herrera, M., Velasco, M y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.
- Hitt, F. y Gonzalez-Martín, A. (2016). Generalization, covariation functions and calculus. En A. Gutierrez, G. C. leder & P. Boero (Eds.). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (p. 3-38). Sense Publishers.
- Ibáñez, G. y Dolores, C. (2012). Relación entre el currículum oficial y el currículum potencial. El caso de los textos de preparatoria. En C. Dolores y M. S. García (Eds.), *¿Hacia dónde reorientar el currículum de las matemáticas del bachillerato?* (pp. 87-109). D. F., México: Plaza y Valdés Editores.
- Inglada, N. y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales del concepto de la derivada. *Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental*. XIX Jornadas del SI-IDM. XIX Jornadas del SI-IDM, Córdoba.

- Jennings, M., Goos, M. y Adams, P (2019). Teacher and lecturer perspectives on secondary school students understanding of limit definition of the derivative. En Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. Simposio llevado a cabo Conference to be held at the University of Agder, Kristiansand, Norway.
- Job, P. y Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 635-646. doi: 10.1007/s11858-014-06044-0.
- Keene, K., Hall, W. y Duca, A. (2014). Sequence limits in calculus: using desing reseach and building on intuition to support instruction. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 561-574. doi: 10.1007/s11858-014-0597-8.
- Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 691-695. doi: 10.1007/s11858-014-0608-9.
- Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology. Methods and Thechniques*. New Delhi: New Age International Publishers.
- Makón, A. (2004). Métodos comparativos en ciencias sociales: algunas reflexiones en relación a sus ventajas y limitaciones. *VI Jornadas de Sociología*. Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias*, 34(3), 51-71.
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la sociepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 8(2), 219-325.
- Morales, J. (2018). *Los significados potenciados por los profesores desde sus planeaciones de clase, para el tema de la derivada* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas", Zacatecas.
- Moreno, M. F. (2007). De la matemática formal a la matemática escolar. *PNA*, 1(3), 99-111.
- Ortega del Rincón, T. y Sierra M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 32(1), pp. 87-115.
- Parra, J., y Castro, W (2020). Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Parra-Urrea, Y. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de los libros de texto chilenos: el caso de la noción de función. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso*

International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, (pp. 1-11). Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, (pp. 1-16). Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.

Ponce, J. (2015). *Breve historia del concepto de derivada*. Queensland, Australia: Sin editorial

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículum escolar de matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), pp. 4-24.

Rico, L. (1998). Concepto del currículum desde la educación matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1(4), 7-42.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 1(1), 39-63.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*, (pp. 1-22). Granada: Comares, S.L.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA*, 1(1), pp. 7-23.

Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J., Fernández-Plaza, J., Castro-Rodríguez, E., Fernández, M. y Vilchez, M. (2015). Concepciones y significados de una tarea matemática escolar. *SUMA*, 1(1), 67-76.

Rodríguez-Nieto, C. y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2019). Evidencia de las concepciones de futuros profesores sobre el concepto derivada. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 649). Valladolid: SEIEM.

Ruch, D. (2017). An introduction to a rigorous definition of derivative. *Transforming instruction in undergraduate mathematics via primary historical sources*, 1(1), p. 1-11.

Ruiz, A. (2003). El cálculo infinitesimal. En EUNED (Ed.), *Historia y Filosofía de las Matemáticas*, (p. 270-290). México: D.F.

- Ruíz, E. (2002). Propuesta de un modelo de evaluación curricular para el nivel superior. *Una orientación cualitativa*. México, UNAM.
- Ruiz-Hidalgo, J. y Fernández-Plaza, J. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*, (pp. 1-22). Granada: Comares, S.L.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en la didáctica de la matemática. *RELIME*, 11(2), 267-296.
- Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en matemática educativa. *Notices of the AMS*, 47(6), pp. 1-18.
- Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista pedagógica*, 26(75), pp. 1-22.
- Sierra, M. (2001). Investigación en matemática educativa: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), pp. 173-198.
- Silva, L. (2016). Los significados de la derivada en un proceso de estudio en la asignatura matemática del DAC-UCLA. Estudio de caso. *Revista científica del decanato experimental de ciencias económicas y empresariales*, 10(1), 85-110.
- Swidan, O. (2019). Construction of the mathematical meaning of the function-derivative relationship using dynamic digital artifacts. En Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. Simposio llevado a cabo Conference to be held at the University of Agder, Kristiansand, Norway
- Syahrir, S., Syazali, M., Maskur, R., Amrulloh, M., Sada, H. y Listiani, B. (2019). Calculus module for derivate application materials with an islamic contextual teaching and learning approach. En J. Phys (Presidencia), *Journal of physics: Conference series*, Conferencia llevado a cabo en Journal of physics: conference series.
- Törner, G., Potari, D. y Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 549-560. doi: 10.1007/s11858-014-0612-0.
- UAM_UAZ (2014). *Plan analítico de cálculo diferencial*[Archivo PDF]. https://matematicas.reduaz.mx/lic_mathe/images/licenciatura/programas/2-Calculo_Diferencial.pdf
- Vargas, M., Fernández-Plaza, J., Ruíz-Hidalgo, J. (2020). Significados de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *Bolema*, 34(68), 911-933.

- Valenzuela, C. y Dolores, C. (2012). Entre currículum oficial e impartido: qué es lo que se enseña en el aula. En C. Dolores y M. S. García (Eds.), *¿Hacia dónde reorientar el currículum de las matemáticas del bachillerato?* (pp. 111-138). D. F., México: Plaza y Valdés Editores.
- Vásquez, E. y Pérez, A. (2014). Tabla comparativa. *Programa de apoyo a la formación profesional* 1(1), p. 1-21. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Vrancken, S. y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *UNIÓN*, 1(33), 53-70.
- Zamora, R. (2015). *Las competencias matemáticas que se favorecen en los libros de texto para los temas del límite en bachillerato. Estudio comparativo entre currículum oficial y potencial* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas", Zacatecas, México.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.) (Presidencia). Simposio llevado a cabo en Research in Collegiate Mathematics Education. IV.
- Zavaleta, A. y Dolores, C. (2009). Evaluación del currículum matemático escolar aprendido. En CLAME (Eds.), *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.* Simposio llevado a cabo en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22

