



Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Matemáticas



PROPIEDADES DEL DIFERENCIAL EN GRÁFICAS

TESIS

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS BÁSICAS
(Orientación en Matemáticas)

PRESENTA

M. en C. Ludwin Ali Hernández Basilio

DIRECTORES DE TESIS

Jesús Leños Macías

José María Sigarreta Almira

Zacatecas, México

Octubre de 2020

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Autónoma de Zacatecas, y a la Unidad Académica de Matemáticas por los apoyos recibidos durante la investigación para la culminación de este trabajo. Agradezco al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)* por el soporte económico a través de su *Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC)*, en particular al programa de *Doctorado en Ciencias Básicas* con número *PNPC 3911*, mediante la beca nacional **467172**, y a la Universidad **Pablo de Olavide**, donde realicé mi estancia de investigación con el apoyo de la Universidad Autónoma de Zacatecas y a la beca mixta de la convocatoria número **291250**.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Gráficas y operaciones en gráficas	3
1.2. Teoría de dominación	6
2. El diferencial de una gráfica	9
2.1. El diferencial y parámetros de dominación	12
2.2. El diferencial de $R(G)$	17
3. El β-diferencial de una gráfica	31
3.1. La función $f_G(\beta) = \partial_\beta(G)$	32
3.2. Cotas sobre el β -Diferencial de una Gráfica	39
4. El polinomio diferencial de una gráfica	51
4.1. Propiedades del polinomio diferencial de una gráfica	51
4.2. El polinomio diferencial de algunas transformaciones en gráficas	54
5. Conclusiones	59
Bibliografía	66

Resumen

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple, en el que $V(G)$ y $E(G)$ son sus conjuntos de vértices y aristas respectivamente. Si $S \subseteq V(G)$, sea $B(S)$ el conjunto de vértices contenido en $V(G) \setminus S$ con algún vecino en S . El diferencial de S denotado por $\partial(S)$ se define como $|B(S)| - |S|$, y el diferencial de una gráfica como $\partial(G) = \max\{\partial(S) : S \subseteq V(G)\}$. En este trabajo mostramos una amplia colección de resultados que relacionan el diferencial con parámetros bien conocidos, como el número de dominación, orden, tamaño, grado, cuello, entre otros. También estudiamos el diferencial en la gráfica $R(G)$, que se obtiene a partir de G , agregando un nuevo vértice por cada arista de G y uniendo cada vértice nuevo a los extremos de la arista correspondiente a él. Encontramos cotas para $\partial(R(G))$ y familias infinitas de gráficas que las alcanzan. Además, mostramos relaciones interesantes entre ciertos conjuntos de vértices de G y $R(G)$. Generalizamos el concepto de diferencial de una gráfica. Estudiamos las propiedades matemáticas de este nuevo parámetro y encontramos cotas que lo relacionan con el orden, tamaño, grado mínimo (máximo) y el número de dominación. Finalmente, este trabajo se complementa con el concepto de polinomio diferencial, establecemos relaciones entre el polinomio y sus coeficientes, y mostramos fórmulas del polinomio diferencial en ciertas clases de gráficas.

Como resultado de esta investigación se obtuvieron los siguientes artículos:

- Basilio, L. A., Bermudo, S., Leños, J. and Sigarreta, J. M. β -Differential of a Graph. *Symmetry*, **9** (10), 205 (2017). Doi:10.3390/sym9100205.
- Basilio, L. A., Bermudo, S. and Sigarreta, J. M. Bounds on the differential of a graph. *Utilitas Mathematica*, **103**, 319-334 (2017).
- Basilio-Hernández, L. A., Carballosa, W., Leños, J. and Sigarreta, J. M. On the Differential Polynomial of a Graph. *Acta Mathematica Sinica, English Series*,

35(3), 338-354, (2019). Doi:10.1007/s10114-018-7307-3.

- Basilio, L. A., Leños, J., Cayetano, O. R. and Sigarreta, J. M. The differential on graph operator $R(G)$, *Utilitas Mathematica*, to appear.
- Basilio, L. A., Simon, J. C., Leños, J. and Cayetano, O. R. The Differential on Graph Operator $Q(G)$. *Symmetry*, **12**(5), 751 (2020). Doi:10.3390/sym12050751.

Además, dichos resultados fueron presentados en los siguientes congresos:

- XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
- L Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
- Jornadas de Investigación UAZ-2017.
- XXXIV Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo mostramos algunos conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que serán fundamentales para llevar a cabo este trabajo.

1.1. Gráficas y operaciones en gráficas

Una **gráfica** G es una tripleta ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ que consiste en un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** (o puntos), un conjunto $E(G)$ (ajeno de $V(G)$) de **aristas** y una **función de incidencia** ψ_G que asocia a cada arista de G un par (no ordenado) de elementos (no necesariamente diferentes) de $V(G)$.

Diremos que los vértices u y v son **adyacentes**, si existe una arista a que los une ($a = uv$). A los vértices u y v los llamaremos **extremos** de la arista a .

Una gráfica se puede representar mediante un dibujo en el que a cada vértice le corresponde un punto, y si dos vértices son adyacentes se unen sus puntos correspondientes mediante un arco.

Para un vértice $u \in V$ se define la **vecindad abierta** de v como $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ y la vecindad cerrada de v como $N[v] := N(v) \cup \{v\}$.

Para un subconjunto no vacío $S \subseteq V$, y cualquier vértice $v \in V$, denotamos por $N_S(v)$ al conjunto de vértices en S adyacentes a v , esto es $N_S(v) = \{u \in S : u \sim v\}$, y $\delta_S(v) := |N_S(v)|$ denota el grado de v en S . Se define la **vecindad abierta** de S como $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ y la **vecindad cerrada** como $N[S] = N(S) \cup S$.

Denotaremos por $\delta_G(v)$ el grado del vértice v en la gráfica G , y cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos simplemente $\delta(v)$. El **grado mínimo** se define como

$\delta(G) := \min \{\delta(v) : v \in V\}$ y el **grado máximo** como $\Delta(G) := \max \{\delta(v) : v \in V\}$.

Una **subgráfica** de una gráfica $G = (V(G), E(G))$ es una gráfica $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Para cualquier subconjunto W de vértices de una gráfica G , llamaremos **subgráfica inducida** por W (denotada por $G[W]$) a la subgráfica de G que se obtiene tomando los vértices de W y las aristas de G que son incidentes en ellos (ver Figura 1.1).

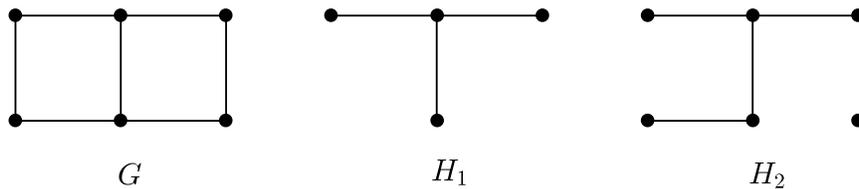


Figura 1.1: H_1 es una subgráfica inducida ya que contiene todas las aristas de G incidentes con sus vértices, pero H_2 no lo es.

Si v es un vértice de una gráfica G , entonces $G \setminus \{v\}$ es la subgráfica obtenida de G eliminando el vértice v junto con todas las aristas incidentes a él. En general, escribimos $G \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ para denotar a la gráfica obtenida eliminando los vértices v_1, v_2, \dots, v_k en G y todas las aristas incidentes con cualquiera de ellos (ver Figura 1.2).

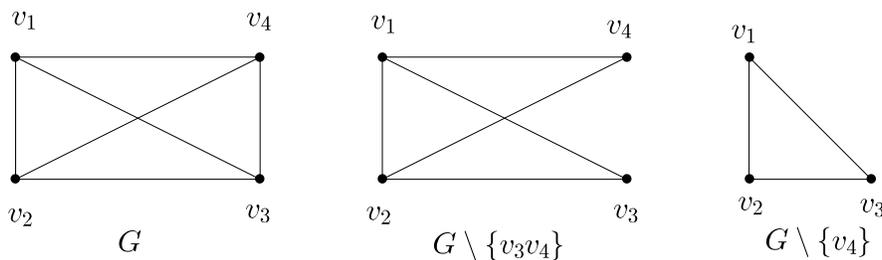


Figura 1.2: Ejemplo de eliminación de aristas y vértices.

Denotaremos por K_n a la gráfica de orden n . Dada una gráfica G con n vértices y $G' = (V', E')$ una subgráfica de K_n isomorfa a G , definiremos $\overline{G} = (V, E(K_n) \setminus E')$ y le llamaremos **complemento** de G (ver Figura 1.3).

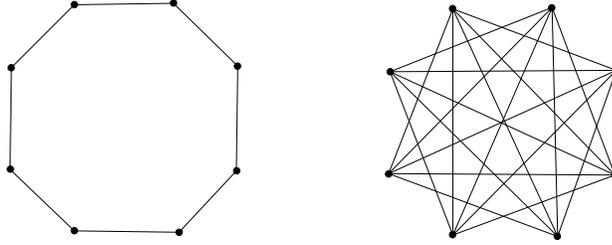


Figura 1.3: Gráficas complementarias.

La gráfica con n vértices o **gráfica sin aristas** es la gráfica complemento de la gráfica completa K_n , comúnmente denotada por E_n para $n \geq 1$.

Una de las propiedades más importantes de una gráfica es que sea conexa. Dos vértices de una gráfica están **conectados** cuando existe un camino entre ambos, es decir, u y v están conectados si y solo si existe un camino que une a u con v . Una gráfica G es **conexa** si cada par de sus vértices están conectados. Es decir, G es conexa si y solo si para todo $u, v \in V(G)$, existe un camino que une a u con v . En caso contrario, diremos que G es un gráfica **disconexa**. Si G es disconexa, se define **componente conexa de G** a una subgráfica conexa maximal de G . De esta forma, G puede ser particionada en sus componentes conexas.

Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ y un vértice v de G , v será **vértice de corte** si $G \setminus \{v\}$ es disconexa. Además, llamaremos **punto de corte** a cualquier arista e de G tal que la gráfica $G' = (V, E \setminus \{e\})$ no sea conexa.

Ahora presentaremos algunos operadores en gráficas que estudiaremos en éste trabajo.

Para dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ con conjuntos disjuntos de vértices V_1 y V_2 (y por tanto conjuntos disjuntos de aristas), la **unión disjunta** de gráficas, a veces llamado simplemente **gráfica unión** es la gráfica $G_1 \uplus G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

El **producto cartesiano** $G_1 \square G_2$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G_1) \times V(G_2)$, y

$$E(G_1 \square G_2) := \{(v, u)(v', u') : [v = v', uu' \in E(G_2)] \vee [vv' \in E(G_1), u = u']\}.$$

Por otro lado, el **producto fuerte** $G_1 \boxtimes G_2$ es la gráfica que tiene como con-

junto de vértices a $V(G_1) \times V(G_2)$, y su conjunto de aristas es $E(G_1 \boxtimes G_2) := \{(v, u)(v', u') : [v = v', uu' \in E(G_2)] \vee [vv' \in E(G_1), u = u'] \vee [vv' \in E(G_1), uu' \in E(G_2)]\}$.

Si G es una gráfica, la **gráfica línea** denotada como $\mathcal{L}(G)$ es la gráfica cuyos vértices corresponden a las aristas de G y en donde dos vértices son adyacentes si y solo si las correspondientes aristas en G tienen un vértice en común.

Sea G una gráfica; el operador $R(G)$ se define como la gráfica obtenida a partir de G , agregando un nuevo vértice por cada arista de G y uniendo cada vértice nuevo a los extremos de la arista correspondiente a él (ver Figura 1.4).

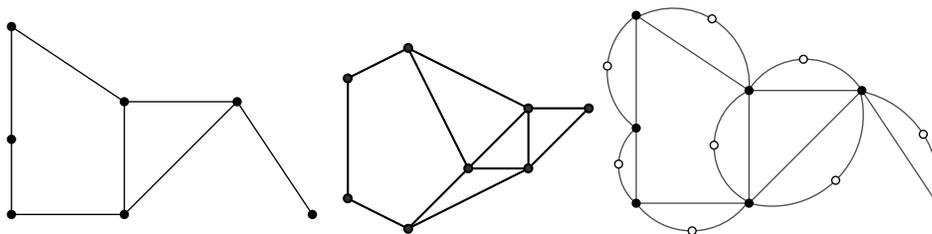


Figura 1.4: Ejemplo de una gráfica G , $\mathcal{L}(G)$ y $R(G)$ respectivamente.

1.2. Teoría de dominación

El concepto central a estudiar en este trabajo, el diferencial de una gráfica, tiene una gran relación con parámetros muy conocidos de la Teoría de Dominación. A continuación recordaremos las definiciones formales de esos parámetros.

Un conjunto $S \subset V$, es un **conjunto k -dominante** si cada vértice en $V \setminus S$ tiene al menos k vértices adyacentes en S . El **número k -dominación** de G , denotado por $\gamma_k(G)$, es el cardinal del menor conjunto k -dominante. Notemos que la definición para el caso particular $k = 1$, coincide con el número de dominación.

Un subconjunto S de V es llamado **independiente** si sus vértices son mutuamente no adyacentes. El **número de independencia** $\alpha(G)$ es el cardinal del mayor conjunto independiente de G .

Una **cubierta por vértices** de una gráfica G es un subconjunto $S \subseteq V$ tal que cada arista de G tiene al menos un extremo en S . El **número de cubierta por vértices** de G , denotado por $\tau(G)$ es el cardinal de cualquier cubierta de tamaño mínimo.

Una **función de dominación romana** (RDF) sobre una gráfica $G = (V, E)$ es una función $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ que satisface la siguiente condición: cada vértice $v \in V$ que cumple que $f(v) = 0$, es adyacente al menos un vértice $u \in V$ tal que $f(u) = 2$. El **peso** de una RDF es el valor $w(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. El **número de dominación romana** de una gráfica G , denotado por $\gamma_R(G)$, es el peso mínimo de todas las posibles RDF sobre G .

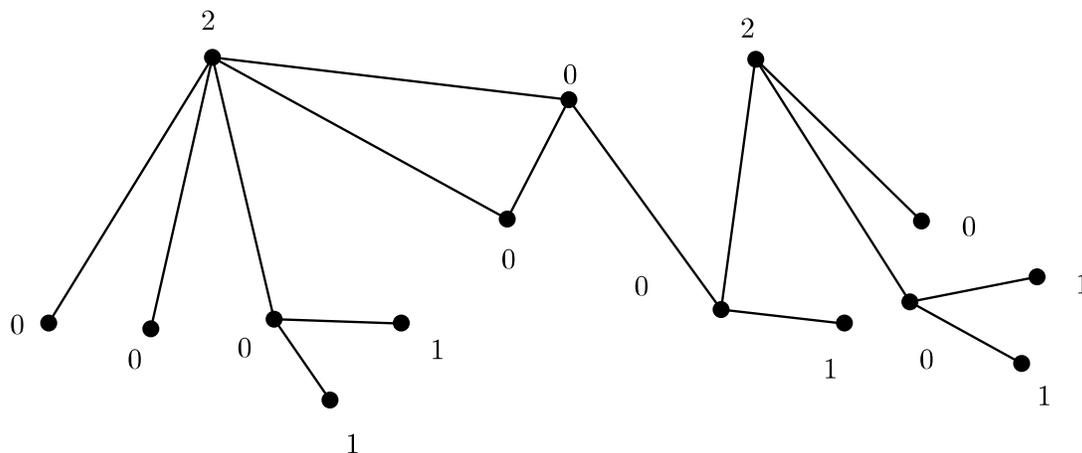


Figura 1.5: Representación de una función de dominación romana.

Capítulo 2

El diferencial de una gráfica

En este capítulo se muestran cotas importantes para el diferencial de una gráfica, en particular, relacionamos el diferencial con parámetros bien conocidos en gráficas tales como orden, tamaño, grado mínimo y máximo, número de dominación, número de independencia, entre otros.

En el año 2006, en [40], J. L. Mashburn, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi y P. J. Slater. introdujeron el concepto de diferencial de una gráfica como un problema típico de maximización. Los autores definen de manera intuitiva el diferencial de una gráfica de la siguiente manera: “Sea G una gráfica arbitraria, consideremos el siguiente juego. Podemos comprar tantas fichas como deseemos, digamos k fichas, a un costo de una unidad cada una. Ahora, coloquemos las fichas en algún subconjunto de k vértices de V . Para cada vértice de G que no tiene ninguna ficha, pero es adyacente a un vértice con una ficha, recibiremos una unidad. Nuestro objetivo es maximizar nuestro beneficio, es decir, el valor total recibido menos el costo de las fichas compradas.” Sea $B(S)$ el conjunto de vértices en $V \setminus S$ que tienen un vecino en S (Ver [4] y [40]).

Basado en lo anterior, se define el **diferencial** de un conjunto S como $\partial(S) = |B(S)| - |S|$ y el **diferencial de una gráfica** como $\partial(G) := \max\{\partial(S) : S \subseteq V\}$.

Para resolver este problema, de manera intuitiva se piensa en la búsqueda de un conjunto dominante mínimo, y aunque más adelante veremos que el número de dominación tiene un papel importante en la búsqueda del diferencial, no siempre resulta ser la mejor opción. Como ejemplo de ello podemos ver la Figura 2.1, en la cual para obtener el diferencial de la gráfica $K_{1,8}$, un conjunto dominante mínimo (el centro de la

estrella) es la mejor opción. A diferencia de la gráfica $K_{1,8} \cup \{w\}$, en el cual un conjunto dominante mínimo (vértices grises), no es el conjunto ideal para alcanzar el diferencial.

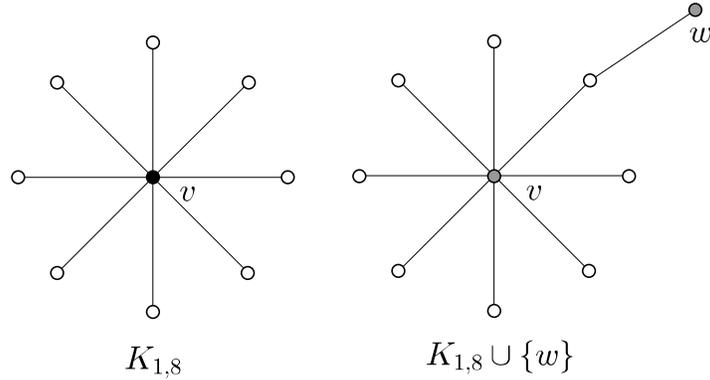


Figura 2.1: Notemos que $\{v\}$ es un conjunto dominante mínimo de la gráfica $K_{1,8}$, pero no lo es en $K_{1,8} \cup \{w\}$. Además $\partial(K_{1,8}) = \partial(K_{1,8} \cup \{w\}) = 7$.

Enseguida se presentan resultados conocidos del diferencial en gráficas.

En [40] se muestra la siguiente relación entre el diferencial de una gráfica y su número de dominación: dada una gráfica G de orden n ,

$$n - 2\gamma(G) \leq \partial(G) \leq n - \gamma(G) - 1.$$

Además, prueban la realizabilidad de los valores del diferencial de $n - 2\gamma(G)$ a $n - \gamma(G) - 1$ para árboles. Caracterizan árboles T que alcanzan la cota $n - \gamma(G) - 1$ y se hace un estudio de los árboles T que alcanzan la cota inferior $n - 2\gamma(T)$. Finalmente se enuncia una caracterización de los árboles T cumpliendo que $\partial(T) = \Delta(T) - 1$.

Notemos que para cada gráfica G con componentes conexas G_1, \dots, G_k ,

$$\partial(G) = \partial(G_1) + \dots + \partial(G_k).$$

Por lo tanto, es suficiente estudiar el diferencial en gráficas conexas.

En [14] se muestra que para cualquier gráfica G de orden $n \geq 3$, $\partial(G) \geq \frac{n}{5}$, y construyen una familia infinita de gráficas alcanzando esta cota. Además, para cualquier

gráfica de orden n y grado mínimo al menos dos, se tiene que:

$$\partial(G) \geq \frac{3n}{11},$$

excepto para C_4, C_5, C_8, C_8 con una cuerda y C_8 con dos cuerdas que parten de dos vértices adyacentes en el ciclo.

En [15] se prueba que el siguiente problema de decisión es NP-completo en dos clases de gráficas bien conocidas, las gráficas divididas y cúbicas: Dada una gráfica $G = (V, E)$ y un entero k , ¿es cierto que $\partial(G) \geq k$?

Uno de los resultados más importantes aparece en [16]. Los autores demuestran que el número de dominación romana y el diferencial son problemas equivalentes: si G es una gráfica de orden n , entonces $\gamma_R(G) = n - \partial(G)$.

En [17] se muestra una manera alternativa para definir el diferencial de una gráfica G , la cual está basada en la búsqueda de “estrellas” (no necesariamente inducidas) disjuntas S_d con $d \geq 2$:

$$\partial(G) = \max \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} (|S| - 2) : \mathcal{S} \in SP(G) \right\}.$$

Además demuestran que no es posible incrementar arbitrariamente el número de vértices sin incrementar el diferencial de una gráfica. Sea G una gráfica de orden n , grado máximo Δ y grado mínimo $\delta \geq 2$; para cualquier número natural k , si $n > (\Delta + k - 1) \left(\frac{3\delta + 1}{\delta - 1} \right)$, entonces $\partial(G) \geq \Delta + k$.

En [35] se estudia el diferencial bajo operaciones en gráficas; el producto corona ($G \odot H$), la suma ($G + H$) y el producto cartesiano de dos gráficas ($G \times H$). Sean G y H dos gráficas de orden n_1 y n_2 , y de grado máximo Δ_1 y Δ_2 respectivamente, entonces los siguientes enunciados se satisfacen:

- Si $n_2 \geq 2$, entonces $\partial(G \odot H) = n_1(n_2 - 1)$.
- Si $n_2 = 1$, entonces $\partial(G \odot H) = n_1 - \gamma(G)$.
- $n_1 + n_2 - 4 \leq \partial(G + H) \leq n_1 + n_2 - 2$.

- $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 2$ si y solo si $\Delta_1 = n_1 - 1$ ó $\Delta_2 = n_2 - 1$.
- $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 3$ si y solo si $\Delta_1 = n_1 - 2$ y $\Delta_2 \leq n_2 - 2$ ó $\Delta_1 \leq n_1 - 2$ y $\Delta_2 = n_2 - 2$.
- $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 4$ si y solo si $\Delta_1 \leq n_1 - 3$ y $\Delta_2 \leq n_2 - 3$.
- $n_1 n_1 - 2 \min\{\gamma(G)n_2, \gamma(H)n_1\} \leq \partial(G \times H) \leq \min\{\gamma(G)n_2, \gamma(H)n_1\}(\Delta_1 + \Delta_2 - 1)$.

En [13] estudian relaciones entre el diferencial del producto fuerte en gráficas y diversos parámetros en los factores del producto.

Sean G y H dos gráficas de orden n_1, n_2 , grado máximo Δ_1 y Δ_2 , y grado mínimo δ_1 y δ_2 , respectivamente. Entonces:

- $\partial(G \boxtimes H) \geq 2\gamma(G \boxtimes H)$.
- Si $\delta(G) \geq 2$ ó G es una gráfica diferencial dominante, entonces $\partial(G \boxtimes H) \geq 3\gamma(G \boxtimes H)$.
- Si $\delta(G) \geq 2$ ó G es una gráfica diferencial dominante, y $\delta(H) \geq 2$ ó H es una gráfica diferencial dominante, entonces $\partial(G \boxtimes H) \geq \frac{17}{4}\gamma(G \boxtimes H)$.
- $\max\{n_1(\partial(H) + 1), n_2(\partial(G) + 1)\} \leq \partial(G \boxtimes H) \leq n_1 n_2 - n_1 - n_2 + \partial(G) + \partial(H) + 2$.
- $\partial(G \boxtimes H) \geq n_2 \partial(G) + n_1 \partial(H) - \partial(G) \partial(H) + 2 \left\lceil \frac{n_1 \delta_1}{\delta_1 \Delta_1 + \Delta_1 + \delta_1} \right\rceil \left\lceil \frac{n_2 \delta_2}{\delta_2 \Delta_2 + \Delta_2 + \delta_2} \right\rceil$.

2.1. El diferencial y parámetros de dominación

En esta sección se muestra una amplia colección de resultados que relacionan el diferencial con el número de dominación y otros parámetros generales de la Teoría de Gráficas.

Dada una gráfica G y un subconjunto de vértices D se define naturalmente $C(D) := V \setminus (D \cup B(D))$. Notemos que $\{D, B(D), C(D)\}$ es una partición del conjunto de vértices V . Además, esta partición hereda propiedades importantes en función de la elección de un conjunto D ; como se muestra en el Lema 2.1.

Decimos que D es un **conjunto diferencial** de G si $\partial(D) = \partial(G)$, además es llamado **mínimo (máximo)** si tiene cardinalidad mínima (máxima) de entre todos los conjuntos diferenciales.

Dado un conjunto S y $v \in S$, decimos que $u \in V \setminus S$ es un **S -vecino privado externo** ($S - epn$) de v si $N(u) \cap S = \{v\}$. Denotamos por $epn[v, S]$ al conjunto de todos los vecinos privados externos de v .

Ahora mostraremos algunas propiedades acerca de la partición $\{D, B(D), C(D)\}$ cuando consideramos un conjunto diferencial mínimo. El inciso (a) del siguiente lema fue probado en [14] y las condiciones (b) y (c) en [17].

Lema 2.1. *Si D es un conjunto diferencial mínimo de G , entonces $\{D, B(D), C(D)\}$ es una partición de V tal que:*

- (a) *para todo $v \in D$, $|epn[v, D]| \geq 2$,*
- (b) *para todo $v \in B(D)$, $\delta_{C(D)}(v) \leq 2$,*
- (c) *para todo $v \in C(D)$, $\delta_{C(D)}(v) \leq 1$.*

En [14] se probó que $\partial(G) = \max\{\sum_{X \in \mathcal{S}} (|X| - 2) : \mathcal{S} \in SP(G)\}$. Para cada $\mathcal{S} \in SP(G)$ escribiremos $\partial(\mathcal{S}) = \sum_{X \in \mathcal{S}} (|X| - 2)$ y lo llamaremos el diferencial de un paquete de estrellas grandes \mathcal{S} . Llamaremos a un paquete de estrellas $\mathcal{S} \in SP(G)$ un paquete de estrellas diferencial si alcanza el diferencial de la gráfica, i.e., si $\partial(\mathcal{S}) = \partial(G)$. Un paquete de estrellas diferencial máximo es un paquete diferencial de cardinal máximo, i.e., con el máximo número de estrellas contenidas en él. Denotemos por $\max SP(G)$ a la colección de todos los paquetes diferenciales máximos de G .

A continuación, demostraremos el Lema 2.2, ya que jugará un papel muy importante en la mayoría de los resultados en este trabajo.

Lema 2.2. [6] *Si D es un conjunto diferencial de una gráfica G , entonces $|D| \leq \gamma(G)$.*

Demostración. Sea A un conjunto dominante mínimo. Si $|A| < |D|$, tenemos que

$$\partial(A) = n - 2|A| > n - |D| - |D| \geq |B(D)| - |D| = \partial(G).$$

□

Teorema 2.3. [6] Si G es una gráfica de orden $n \geq 3$ y grado máximo Δ , entonces

$$\frac{\gamma(G)}{2} \leq \partial(G) \leq \gamma(G)(\Delta - 1).$$

La cota superior es alcanzada en las gráficas $G = C_{3n}$ y $G = K_n$, la cota inferior se alcanza en la gráfica mostrada en la Figura 2.2.

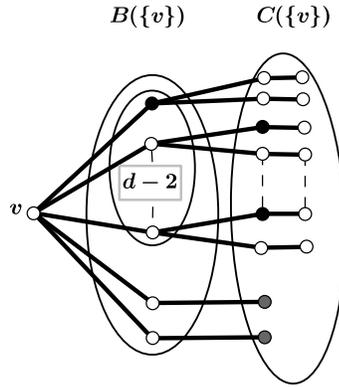


Figura 2.2: Gráfica que alcanza la cota inferior del Teorema 2.3.

Note que la gráfica mostrada en la Figura 2.2 alcanza la cota inferior $\frac{n}{5}$ para el diferencial de cualquier gráfica de orden $n \geq 3$ (ver [14]). Si el grado mínimo es dos, se probó en [14] que una cota inferior para el diferencial es $\frac{3n}{11}$, y los autores dan una familia de gráficas que alcanzan esta cota.

Es conocido que $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$ para cada gráfica G de orden n y grado máximo Δ . El siguiente resultado probado en [6] y [4], muestra que las gráficas que alcanzan dicha cota pueden ser caracterizada por su diferencial.

Proposición 2.4. Sea G una gráfica con orden n y grado máximo Δ . Entonces $\gamma(G) = \frac{n}{\Delta+1}$ si y sólo si $\partial(G) = \frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1}$.

Demostración. Si $\gamma(G) = \frac{n}{\Delta+1}$, tenemos que

$$\frac{n(\Delta - 1)}{\Delta + 1} = n - 2\left(\frac{n}{\Delta + 1}\right) = n - 2\gamma(G) \leq \partial(G) \leq \gamma(G)(\Delta - 1) = \frac{n(\Delta - 1)}{\Delta + 1}$$

Así $\partial(G) = \frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1}$.

Ahora, supongamos que $\partial(G) = \frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1}$ y sea D un conjunto diferencial. Ya que $|B(D)| - |D| = \frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1} = n - 2\left(\frac{n}{\Delta+1}\right)$, si $|D| > \frac{n}{\Delta+1}$ entonces $|B(D)| > n - \frac{n}{\Delta+1} > n - |D|$, lo que es una contradicción, por tanto, $|D| \leq \frac{n}{\Delta+1}$. Finalmente, usando que $\frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1} = \partial(G) \leq |D|(\Delta-1) \leq \frac{n(\Delta-1)}{\Delta+1}$ concluimos que $|D| = \frac{n}{\Delta+1}$ y $|B(D)| = n - \frac{n}{\Delta+1}$, en consecuencia, D es un conjunto dominante y $\gamma(G) = |D| = \frac{n}{\Delta+1}$. \square

Hemos mencionado antes, $\partial(G) \geq \frac{n}{5}$ para cualquier gráfica G de orden $n \geq 3$, y $\partial(G) \geq \frac{3n}{11}$ para cualquier gráfica G de orden $n \geq 9$ y grado mínimo $\delta \geq 2$. Veamos otros resultados relacionando el diferencial, el orden y el número de dominación.

La demostración del siguiente teorema, aparece en [6] y en [4], por completitud de esta investigación se incluye la demostración.

Teorema 2.5. *Para cualquier gráfica G de orden n y grado mínimo δ .*

- (a) *si $n \geq 3$, entonces $\frac{3n}{5} \leq \partial(G) + \gamma(G) \leq n - 1$.*
- (b) *Si $n \geq 9$ y $\delta \geq 2$, entonces $\frac{7n}{11} \leq \partial(G) + \gamma(G) \leq n - 1$.*

Demostración. En ambos casos, si D es un conjunto diferencial, ya que $\gamma(G) \leq |D| + |C(D)|$, tenemos

$$\partial(G) + \gamma(G) \leq |B(D)| - |D| + |D| + |C(D)| = n - |D| \leq n - 1.$$

(a) Si $\gamma(G) \geq \frac{2n}{5}$, ya que $\partial(G) \geq \frac{n}{5}$, tenemos $\partial(G) + \gamma(G) \geq \frac{3n}{5}$. Si $\gamma(G) < \frac{2n}{5}$ tomemos un conjunto dominante $S \subseteq V$ tal que $|S| = \gamma(G)$, obtenemos

$$\partial(G) + \gamma(G) \geq \partial(S) + \gamma(G) = n - \gamma(G) > n - \frac{2n}{5} = \frac{3n}{5}.$$

(b) Ya que $\partial(G) \geq \frac{3n}{11}$ si $\delta \geq 2$ y $n \geq 9$, podemos usar el mismo argumento usado en (a), usando $\frac{4n}{11}$ en lugar de $\frac{2n}{5}$, para encontrar la cota. \square

Dada una gráfica G , un conjunto de vértices U_c es llamado crítico si $|U_c| - |N(U_c)| = \mu_c = \max\{|U| - |N(U)| : U \subseteq V\}$.

En [50] se prueba que $\alpha_c = \mu_c$, donde

$$\alpha_c = \max\{|I| - |N(I)| : I \subseteq V \text{ es un conjunto independiente}\}.$$

Proposición 2.6. *Si G es una gráfica, entonces $\partial(G) \geq \alpha_c$.*

Demostración. Si un conjunto independiente I_c satisface $|I_c| - |N(I_c)| = \alpha_c$ y $S = N(I_c)$, tenemos que $|B(S)| \geq |I_c|$, por tanto,

$$\alpha_c = |I_c| - |N(I_c)| \leq |B(S)| - |S| \leq \partial(G).$$

□

El siguiente resultado demostrado en [6] y [4], presenta una relación entre el diferencial y el cuello de una gráfica.

Proposición 2.7. [6] *Sea G una gráfica con cuello $g(G)$. Entonces*

$$\left\lfloor \frac{g(G)}{3} \right\rfloor \leq \partial(G) \leq n - 2 \left\lfloor \frac{g(G)}{3} \right\rfloor.$$

Teorema 2.8. [6] *Si G es una gráfica de orden n y grado mínimo δ , entonces*

$$\partial(G) \geq \left\lceil \frac{n(\delta - 1)}{3\delta - 1} \right\rceil.$$

Un *bloque* en G es una subgráfica conexa maximal sin un vértice de corte. Un *bloque-final* es un bloque con exactamente un vértice de corte de G .

Denotaremos por $eb(G)$ y $\lambda(G)$ el número de bloques-finales y el número máximo de caminos disjuntos 3-vértice en G . Una gráfica $K_{1,3}$ es llamada un *claw* y denotamos por Δ^* la gráfica obtenida por un triángulo, digamos $v_1v_2v_3$, mediante la adición de tres nuevos vértices u_1, u_2, u_3 y tres nuevas aristas v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3 .

En [37] podemos encontrar dos resultados que agrupamos en el Lema 2.9.

Lema 2.9. *Sea G una gráfica claw-libre de orden n .*

- (a) *Si G es una gráfica 2-conexa, una gráfica Δ^* -libre o si a lo más tiene dos bloques-finales, entonces $\lambda(G) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*
- (b) *Si $eb(G) \geq 2$, entonces $\lambda(G) \geq \lfloor \frac{n-eb(G)+2}{3} \rfloor$.*

Ya que $\partial(G) \geq \lambda(G)$ podemos obtener directamente el siguiente resultado:

Teorema 2.10. [6] *Sea G una gráfica claw-libre de orden n .*

- (a) *Si G es una gráfica 2-conexa, una gráfica Δ^* -libre o si tiene a lo más dos bloques-finales, entonces $\partial(G) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*

(b) Si $eb(G) \geq 2$, entonces $\partial(G) \geq \left\lfloor \frac{n-eb(G)+2}{3} \right\rfloor$.

La siguiente proposición involucra el diferencial de la gráfica línea $\mathcal{L}(G)$.

Proposición 2.11. [6] Sea G una gráfica libre de puentes, entonces $\partial(\mathcal{L}(G)) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Demostración. La gráfica línea de cualquier gráfica es un $K_{1,3}$ - libre, y como G no tiene puentes, $\mathcal{L}(G)$ es 2 - conexo, así, por el Teorema 2.10, se obtiene el resultado. \square

Una gráfica G se dice *diferencial dominante* si contiene un conjunto diferencial que es también un conjunto dominante. Algunos ejemplos de gráficas diferenciales dominantes son las gráficas completas, ruedas, caminos P_n y ciclos C_n con $n = 3k$ ó $n = 3k + 2$. El siguiente resultado se demuestra en [6] y en [4].

Teorema 2.12. [6] Una gráfica G es diferencial dominante si y solo si $\partial(G) = n - 2\gamma(G)$.

Demostración. Si D es un conjunto diferencial de G el cual es un conjunto dominante, por el Lema 2.2, tenemos $|D| \leq \gamma(G)$, así $|D| = \gamma(G)$ y $\partial(G) = n - 2\gamma(G)$. Si A es un conjunto dominante mínimo y $\partial(G) = n - 2|A| = |B(A)| - |A|$, entonces A es un conjunto diferencial y dominante. \square

Para más información ver [6] y [4].

2.2. El diferencial de $R(G)$

En esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron al trabajar con el operador $R(G)$. Recordemos que $R(G)$ se define como la gráfica obtenida a partir de G añadiendo un nuevo vértice v_e por cada arista e de G y uniendo cada v_e al vértice final de e . Ver Figura 1.4.

La mayoría de los resultados que aparecen en esta sección, establecen relaciones entre ciertos conjuntos de vértices de G y $R(G)$. Además, obtenemos cotas para $\partial(R(G))$, relacionándolo con el número de independencia, el orden y el tamaño de G .

Comenzamos con algunas propiedades básicas de $R(G)$, las cuales se pueden deducir de su definición.

Proposición 2.13. Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica de orden n . Entonces

- i) $|V(\mathbb{R}(G))| = |V(G)| + |E(G)|$.
- ii) $|E(\mathbb{R}(G))| = 3|E(G)|$.
- iii) G es una subgráfica inducida de $\mathbb{R}(G)$.
- iv) $G \cong \mathbb{R}(G)$ si y solo si $G \cong E_n$.
- v) Si $v \in V(G)$, entonces $\delta_{\mathbb{R}(G)}(v) = 2\delta_G(v)$.
- vi) G es conexa y simple si y solo si $\mathbb{R}(G)$ es conexa y simple.

En vista de la Proposición 2.13 iii), podemos dividir $V(\mathbb{R}(G))$ en dos subconjuntos: el conjunto de vértices V formado por los vértices de $\mathbb{R}(G)$ que están en G y $U := V(\mathbb{R}(G)) \setminus V$. Por lo tanto, la subgráfica $\langle V \rangle$ de $\mathbb{R}(G)$ es isomorfa a G , $|U| = |E(G)|$, y cualquier vértice u en U tiene exactamente dos vecinos, digamos v_1 y v_2 , de modo que $v_1, v_2 \in V$ y $v_1v_2 \in E(G)$. Dicha partición $\{V, U\}$ se llamará *partición canónica* de $V(\mathbb{R}(G))$.

Las Proposiciones 2.14 y 2.15 garantizan que el subconjunto de vértices V (dada una gráfica G y su partición canónica $\{U, V\}$) es un excelente candidato para buscar el valor exacto de $\partial(\mathbb{R}(G))$.

Proposición 2.14. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Entonces V contiene un conjunto dominante mínimo de $\mathbb{R}(G)$.*

Demostración. Sea W un conjunto dominante de $\mathbb{R}(G)$ tal que $\gamma(\mathbb{R}(G)) = |W|$. Dado que si $W \subseteq V$ entonces no hay nada que demostrar, asumamos que $W \cap U$ tiene al menos un vértice u . Sabemos que u tiene exactamente dos vecinos v_1 y v_2 tal que $v_1, v_2 \in V$ y $v_1v_2 \in E(G)$. Podemos asumir que $\{v_1, v_2\} \cap W = \emptyset$, ya que de lo contrario $W \setminus \{u\}$ es un conjunto dominante de $\mathbb{R}(G)$, contradiciendo que W es mínimo. Entonces $W' := (W \setminus \{u\}) \cup \{v_1\}$ es un conjunto dominante mínimo de $\mathbb{R}(G)$ con $|W' \cap U| = |W \cap U| - 1$. Continuando con este procedimiento podemos construir el conjunto dominante requerido de $\mathbb{R}(G)$. □

Proposición 2.15. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Si D es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$, entonces V contiene un conjunto diferencial S de $\mathbb{R}(G)$ tal que $|S| = |D|$.*

Demostración. Sea D un subconjunto de $V(\mathbb{R}(G))$ tal que $\partial(\mathbb{R}(G)) = \partial(D)$. Dado que si $D \subseteq V$, entonces no hay nada que demostrar, asumimos que $D \cap U$ tiene al menos un vértice u . Nuevamente, sabemos que u tiene exactamente dos vecinos v_1 y v_2 tal que $v_1, v_2 \in V$ y $v_1v_2 \in E(G)$. Entonces $N(u) \subseteq N(v_i)$ para cualquier $i \in \{1, 2\}$ y que $\partial(\mathbb{R}(G)) = \partial(D)$ se tiene que ni v_1 ni v_2 pertenecen a D . Sea $D' = (D \setminus \{u\}) \cup \{v_1\}$. Entonces $|D'| = |D|$, $B(D) \subseteq B(D')$, y así $\partial(D') = \partial(\mathbb{R}(G))$. También tenga en cuenta que $|D' \cap U| = |D \cap U| - 1$. Continuando con el procedimiento, podemos construir nuestro S requerido. \square

El siguiente resultado nos garantiza poder “manipular” un poco a cualquier conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$ sin alterar esta propiedad.

Proposición 2.16. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$, entonces existe un subconjunto diferencial S' tal que: (i) $S \subseteq S' \subseteq V$, y (ii) S' es un conjunto dominante de G .*

Demostración. Sea S un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$. Si S es un conjunto dominante de G , entonces tome $S' = S$ y listo. Entonces podemos suponer que existe un vértice $v_1 \in C(S) \cap V$. Como G es una gráfica conexa de orden al menos 2, entonces v_1 tiene al menos un vecino $v_2 \in V$. Si $v_2 \in C(S)$, entonces el único vértice $u \in U$ tal que $N(u) = \{v_1, v_2\}$ debe pertenecer a $C(S)$. Pero luego tenemos, $\partial(S \cup \{v_1\}) > \partial(S) = \partial(\mathbb{R}(G))$, una contradicción. Entonces podemos suponer que todos los vecinos de v_1 en V están en $B(S)$. En particular, tenemos que $v_2 \in B(S)$, y $u \in C(S)$. Notemos que $\partial(S \cup \{v_1\}) = \partial(S) = \partial(\mathbb{R}(G))$. Continuando de esta manera, podemos construir el requerido S' . \square

Corolario 2.17. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Entonces V contiene un conjunto diferencial S de $\mathbb{R}(G)$ tal que S es un conjunto dominante de G .*

Observemos que el conjunto S garantizado por el Corolario 2.17 no es necesariamente dominante mínimo. Suponga que S es la parte más pequeña de la bipartición de $V(K_{p,q})$. Como veremos más adelante, si $|S| = p < q$, entonces S es el único conjunto diferencial de $\mathbb{R}(K_{p,q})$. Según el Corolario 2.17, S es un conjunto dominante para $K_{p,q}$, pero está lejos de ser un conjunto mínimo dominante de $K_{p,q}$ (ver Figura 2.4).

Proposición 2.18. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$ y $\delta(G) \geq 2$, entonces S es un conjunto dominante de G .*

Demostración. Sea S un conjunto diferencial de $R(G)$. Dado que si S es un conjunto dominante de G , entonces no hay nada que demostrar, asumamos que V contiene un vértice w que no es adyacente a ningún vértice de S . Sea v_1 y v_2 dos vecinos distintos de w en G , entonces $R(G)$ tiene dos vértices distintos $u_1, u_2 \in U$ tal que $N(u_1) = \{w, v_1\}$ y $N(u_2) = \{w, v_2\}$. Si $u_i \in N(S)$ para algún $i \in \{1, 2\}$, entonces tenemos que $v_i \in S$. Esto implica $w \in N(S)$, contradiciendo la elección de w . Por lo tanto, podemos suponer que $u_i \in C(S)$ para $i = 1, 2$, y por lo tanto $\partial(S \cup w) > \partial(S) = \partial(R(G))$. Como esta desigualdad es falsa, concluimos que tal w no existe, como se requiere. \square

Observemos que la implicación inversa en la Proposición 2.18 no se cumple. Nuevamente, consideremos dos vértices x y y en $K_{p,q}$ que pertenecen a partes distintas de la bipartición de $V(K_{p,q})$. Si $3 \leq p \leq q$, entonces $K_{p,q}$ tiene grado mínimo de al menos 2, y $S = \{x, y\}$ es un conjunto dominante (mínimo) de $K_{p,q}$. Sin embargo, S no es un conjunto diferencial de $R(K_{p,q})$. Por otro lado, el conjunto S de vértices grises de la gráfica en la Figura 2.3 muestra que la condición $\delta(G) \geq 2$ en la Proposición 2.18 es necesaria.

Corolario 2.19. Sean $X \subseteq V(G)$ y $Y \subseteq V(R(G))$ conjuntos diferenciales de G y $R(G)$, respectivamente. Si $\delta(G) \geq 2$, entonces $|Y| \geq |X|$.

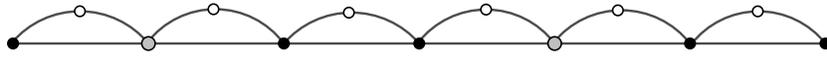


Figura 2.3: El grado mínimo de P_7 es uno, y el conjunto S de vértices grises forma un conjunto diferencial para P_7 y $R(P_7)$. Sin embargo, S no es un conjunto dominante de P_7 .

Notemos que si $q > p \geq 3$, entonces cualquier conjunto diferencial de $K_{p,q}$ consta de exactamente dos vértices que pertenecen a partes distintas de la bipartición de $V(K_{p,q})$. Por otro lado, hemos demostrado en la Proposición 2.22 que para el mismo rango de valores de p y q , el único conjunto diferencial de $R(K_{p,q})$ es la parte más pequeña de $V(K_{p,q})$. Estos hechos muestran que la estructura de un conjunto diferencial de G

puede ser considerablemente distinta de la estructura de un conjunto diferencial de $R(G)$. Situación que se pone de manifiesto en el ejemplo de la Figura 2.4.

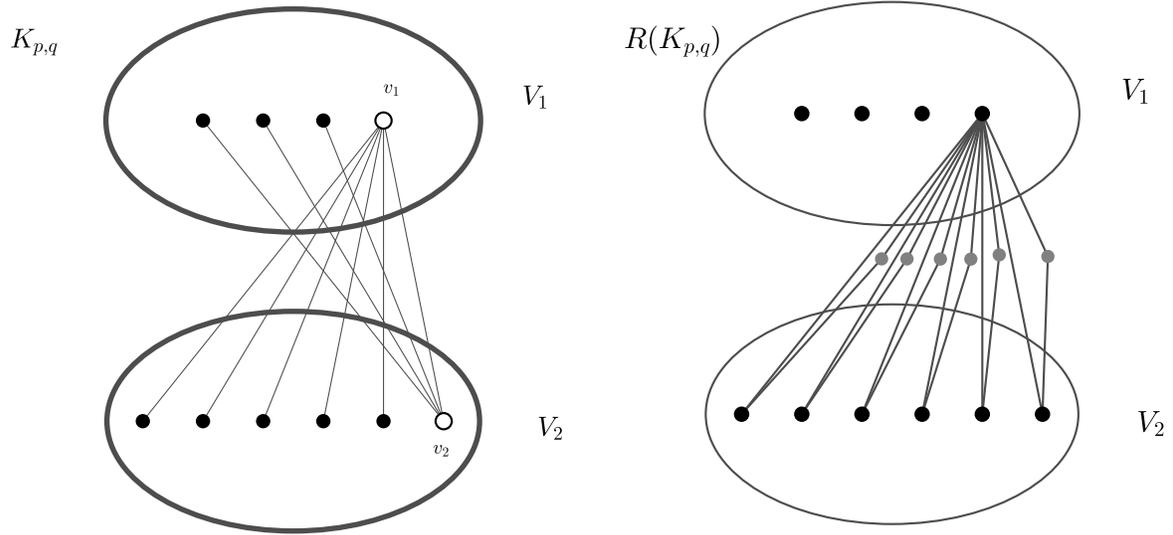


Figura 2.4: La gráfica bipartita completa $G = K_{p,q}$ muestra que la estructura de un conjunto diferencial de G puede ser muy diferente de la estructura de un conjunto diferencial de $R(G)$.

Utilizaremos la Proposición 2.20 para mostrar la caracterización que aparece en la Proposición 2.21

Proposición 2.20. [17] Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ , entonces

- (a) $\Delta = n - 1$ si y solo si $\partial(G) = n - 2$.
- (b) $\Delta = n - 2$ si y solo si $\partial(G) = n - 3$.
- (c) Si $\Delta = n - 3$, entonces $\partial(G) = n - 4$.

Proposición 2.21. Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(R(G))$. Si $m = |V(R(G))|$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

- (i) $\partial(R(G)) = m - 2$ si y solo si $G = K_{1,n-1}$.
- (ii) $\partial(R(G)) = m - 3$ si y solo si $G = K_{1,n-1} \cup \{e\}$, donde e es una arista uniendo dos hojas de $K_{1,n-1}$.

Demostración. Sea G una gráfica conexa y simple de orden $n \geq 3$.

Comencemos mostrando (i). Si $G = K_{1,n-1}$, entonces $R(G)$ tiene un vértice v tal que $\delta(v) = m - 1$, y por la Proposición 2.20 (a) tenemos que $\partial(R(G)) = m - 2$.

Ahora supongamos que $\partial(R(G)) = m - 2$. Entonces $R(G)$ debe tener un vértice adyacente a cualquier otro vértice. Esto y el hecho de que $n \geq 3$, implica que $v \in V$. En particular, v debe ser adyacente a cualquier otro vértice de G , por lo que G contiene $K_{1,n-1}$ como subgráfica. Ya que v es adyacente a cualquier otro vértice de $R(G)$, entonces cualquier arista de G debe pertenecer a su subgráfica $K_{1,n-1}$, y entonces $G = K_{1,n-1}$.

Ahora demostraremos (ii). Si $G = K_{1,n-1} \cup \{e\}$, donde e es la arista que une dos hojas de $K_{1,n-1}$, entonces existe un vértice v de $K_{1,n-1}$ con grado $m - 2$, luego por la Proposición 2.20 (b) y (i) tenemos que $\partial(R(G)) = m - 3$.

Ahora supongamos que $\partial(R(G)) = m - 3$. Para $n \geq 3$ y el hecho de que G es conexo tenemos que $m \geq 5$. Por otro lado, notemos que $\partial(R(G)) = m - 3$, esto implica que el grado máximo de $R(G)$ es $m - 2$.

Sea $v \in V(R(G))$ con $\delta(v) = m - 2 \geq 3$. Como $\delta(u) = 2$ para cualquier $u \in U$, entonces tenemos que v debe pertenecer a V . Dado que para cualquier arista de G con ambos extremos en $V \setminus \{v\}$ existe un único vértice en U que no es adyacente a v , y $\delta(v) = m - 2$, entonces tenemos que G tiene a lo más una arista con ambos extremos en $V \setminus \{v\}$. Por otro lado, $\delta(v) = m - 2$ implica que $R(G)$ contiene exactamente un vértice, digamos v_1 , que no es adyacente a v , y entonces $C(\{v\}) = \{v_1\}$. Por la conexidad de $R(G)$ sabemos que $B(\{v\})$ contiene un vértice v_2 , que es adyacente a v_1 .

Notemos que si $v_2 \in U$, entonces debe pasar que v_2 es adyacente a v en $R(G)$, y por lo tanto v_1 es adyacente a v en G , contradiciendo que $v_1 \in C(\{v\})$. Esto implica que cualquier vecino de v_1 en $R(G)$ debe pertenecer a $V \setminus \{v\}$ y, por lo tanto, $v_1 \in U$. Sea v_3 el otro vecino de v_1 , entonces la arista $e = v_2v_3$ pertenece a G , y entonces $G = K_{1,n-1} \cup \{e\}$, como se quería. \square

Proposición 2.22. *Supongamos que p y q son enteros positivos, de modo que $p+q \geq 4$ y $p < q$. Sea $\{P, Q\}$ la bipartición de vértices de $K_{p,q}$, con $|P| = p$ y $|Q| = q$. Entonces P es el único conjunto diferencial de $R(K_{p,q})$.*

Demostración. Sea $\{P, Q\}$ la partición de vértices de $V(K_{p,q})$ con $|P| = p$ y $|Q| = q$. Recordemos que $p < q$. Como P es una cubierta por vértices de $K_{p,q}$, entonces P es un conjunto dominante de $R(K_{p,q})$. Entonces $\partial_{R(K_{p,q})}(P) = q(p+1) - p$, y así $\partial(R(K_{p,q})) \geq q(p+1) - p$. La afirmación es fácil de verificar para $n = 4, 5, 6$. Asumiremos que $n > 6$.

Sea S un conjunto diferencial de $R(K_{p,q})$. Por la Proposición 2.15, podemos suponer que $S \subseteq V$. Es suficiente mostrar que $|S| \geq p$. Buscando una contradicción, supongamos que $|S| \leq p-1$. Entonces P y Q tiene al menos un vértice que no está en S . Sea $v \in Q \setminus S$ y supongamos que $P \setminus S$ tiene al menos tres vértices, digamos v_1, v_2 , y v_3 . Para $i = 1, 2, 3$, sea u_i el único vértice de U adyacente a v y a v_i . Notemos que la existencia de tales $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ y v implica, $\partial_{R(K_{p,q})}(S \cup \{v\}) = \partial_{R(K_{p,q})}(S) + 1$, una contradicción. Por lo tanto, concluimos que P tiene como máximo 2 vértices que no están en S . Mediante un razonamiento análogo, podemos concluir que Q tiene como máximo 2 vértices que no están en S . Esto implica que $|S| \geq p + q - 4$, y por lo tanto, $p - 1 \geq p + q - 4$. Pero esta última desigualdad implica, $3 \geq q \geq n/2$, una contradicción.

Sabemos que si S es un conjunto diferencial de $R(K_{p,q})$, entonces $S \cap Q = \emptyset$. Por lo tanto, podemos suponer que $S \subseteq P \cup U$. Afirmamos que $S \cap U = \emptyset$, supongamos que no, entonces existe $u \in S \cap U$. Sea $x \in P$ y $y \in Q$ los únicos dos vecinos de u en $R(K_{p,q})$. Por lo tanto, x no puede pertenecer a S .

Por otro lado, ya que $q > p$ y $p+q \geq 4$, entonces $q \geq 3$. Sean y_1, y_2, \dots, y_q los vértices de Q . Para $i = 1, 2, \dots, q$, sea u_i el único vértice de U tal que $N_{K_{p,q}}(u_i) = \{x, y_i\}$. Como $x \notin S$ y $S \cap Q = \emptyset$, entonces $\{u_1, u_2, \dots, u_q\} \cap B_{R(K_{p,q})}(S) = \emptyset$. Entonces $S' := S \setminus \{u\} \cup \{x\}$ satisface

$$\partial_{R(K_{p,q})}(S') \geq \partial_{R(K_{p,q})}(S) + 2,$$

lo que contradice la elección de S . □

Enseguida se muestra el valor $\partial(R(G))$ para algunas familias de gráficas.

Proposición 2.23. *Sean p, q, n enteros positivos, tales que $p + q = n \geq 4$ y $p \leq q$. Las siguientes igualdades se cumplen:*

$$(i) \quad \partial(R(K_n)) = \frac{n(n-1)}{2} - n + 3.$$

$$(ii) \quad \partial(R(W_n)) = 2n - 3.$$

$$(iii) \quad \partial(R(K_{p,q})) = q(p+1) - p.$$

Demostración. Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(R(G))$, donde G es K_n, W_n , y $K_{p,q}$, dependiendo del caso bajo consideración.

Primero mostraremos (i). Como $G = K_n$, entonces $|V| = n$ y $|U| = \frac{n(n-1)}{2}$. Sea S un conjunto diferencial de $R(K_n)$. Por la Proposición 2.15, podemos suponer que $S \subseteq V$. En particular, esto implica que $1 \leq |S| \leq n$.

Afirmamos que $|S| \geq n - 3$. Supongamos que no es así. Entonces $V \setminus S$ contiene al menos 4 vértices, digamos v_1, v_2, v_3 y v_4 . Entonces estos 4 vértices deben pertenecer a $B_{R(K_n)}(S)$. Para $i = 2, 3, 4$, sea u_i el único vértice de U adyacente a v_1 y a v_i . Ya que $v_1, v_2, v_3, v_4 \in B_{R(K_n)}(S)$, entonces u_2, u_3 y u_4 están en $C_{R(K_n)}(S)$. De estos hechos se deduce que $\partial_{R(K_n)}(S \cup \{v_1\}) > \partial_{R(K_n)}(S)$, lo que contradice que S es un conjunto diferencial de $R(K_n)$. Por lo tanto, debemos tener que $|S| \in \{n - 3, n - 2, n - 1, n\}$.

Por otro lado, se puede verificar que:

$$\partial_{R(K_n)}(S) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2} - n + 3 & \text{si } |S| = n - 3, n - 2, \\ \frac{n(n-1)}{2} - n + 2 & \text{si } |S| = n - 1, \\ \frac{n(n-1)}{2} - n & \text{si } |S| = n. \end{cases} \quad (2.1)$$

De la Ecuación 2.1 y el hecho de que estas cuatro son las únicas posibilidades para tal conjunto S , podemos concluir que $\partial(R(K_n)) = \frac{n(n-1)}{2} - n + 3$, como se quería.

Ahora mostramos (ii). Sea v el vértice central de W_n . Notemos que $|V(R(W_n))| = 3(n-1) + 1 = 3n - 2$ y también que $\partial_{R(W_n)}(\{v\}) = 2(n-1) - 1$. Esta última igualdad implica $\partial(R(W_n)) \geq 2n - 3$. Dado que el caso $n = 4$ es fácil de verificar, supongamos que $n \geq 5$.

Sea S es un conjunto diferencial de $R(W_n)$, y que $\ell := |S| > 0$. Por la Proposición 2.15, podemos suponer que $S \subseteq V$. Además, afirmamos que si $v \notin S$, entonces $S' := S \cup \{v\}$ también es un conjunto diferencial de $R(W_n)$. Supongamos que $v \notin S$, y que $\partial_{R(W_n)}(S) > \partial_{R(W_n)}(S')$. Entonces, la última desigualdad implica que $V(C_{n-1})$ tiene como máximo un vértice que no está en S . De esto, la suposición de que $v \notin S$ y $S \subseteq V$ implica que $|S| \geq n - 2$. Por lo tanto, $\partial_{R(W_n)}(S) \leq ((3n - 2) - 1) - 2|S| \leq 3n - 3 - 2(n - 2) = n + 1$. Ya que $\partial(R(S)) \geq 2n - 3$, entonces tenemos que $n + 1 \geq 2n - 3$, o que $4 \geq n$. Como $4 \geq n$ contradice $5 \leq n$, tenemos que S' también es un conjunto diferencial de $R(W_n)$.

Sean $v, v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}$ los vértices de S' . Afirmamos que $S'' := S' \setminus \{v_{i_\ell}\}$ también es un conjunto diferencial de $R(W_n)$. Ya que $\text{epn}[v_{i_\ell}, S'] \leq 2$ y $|S''| = |S'| - 1$, entonces se tiene que $\partial_{R(W_n)}(S') = \partial_{R(W_n)}(S'')$, como se requería. De forma similar, se puede deducir que

$S''' := S'' \setminus \{v_{i_{\ell-1}}\}$ también es un conjunto diferencial de $R(W_n)$. Continuando con este proceso, podemos concluir que $\{v\}$ es un conjunto diferencial de W_n , y por tanto que $\partial(R(W_n)) = \partial_{R(W_n)}(\{v\}) = 2n - 3$, como se quería.

Por la Proposición 2.22, tenemos (iii). \square

La siguiente proposición muestra una sorprendente relación entre el número de cubierta por vértices de G y el número de dominación de $R(G)$.

Proposición 2.24. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(R(G))$. Entonces $\tau(G) = \gamma(R(G))$.*

Demostración. Primero mostraremos que $\gamma(R(G)) \leq \tau(G)$. Sea $X \subseteq V(G)$ una cubierta por vértices de G tal que $\tau(G) = |X|$. Es suficiente mostrar que X es un conjunto dominante de $R(G)$. Sea u un vértice de $V(R(G))$. Debemos mostrar que $u \in X$ o que $R(G)$ contiene una arista ux con $x \in X$. Si $u \in X$ no hay nada que demostrar. Entonces podemos asumir que $u \notin X$. Si $u \in U$, entonces sabemos que u tiene exactamente dos vecinos v_1 y v_2 tal que $v_1, v_2 \in V$ y $v_1v_2 \in E(G)$. Ya que X es una cubierta por vértices de G , al menos uno de v_1 o v_2 debe pertenecer a X , y por lo tanto, ese vértice es el requerido x . Entonces, podemos asumir que $u \in V$. Como G es una gráfica conexa de orden $n \geq 3$, entonces u tiene al menos un vecino en V , digamos y . Por el hecho de que X es una cubierta de vértice de G , y el hecho de que $u \notin X$ tenemos que y debe pertenecer a X , por lo que y es el x requerido.

Ahora mostramos que $\gamma(R(G)) \geq \tau(G)$. De la Proposición 2.14, sabemos que V contiene un conjunto dominante S de $R(G)$. Entonces es suficiente demostrar que S es una cubierta por vértices de G . Sea v_1v_2 una arista de G . De la definición de $R(G)$ sabemos que U contiene un único vértice u tal que $N(u) = \{v_1, v_2\}$. Ya que tal vértice u debe estar dominado por algún vértice de S , entonces v_1 ó v_2 está en S , y por lo tanto S es una cubierta por vértices de G . Esto implica que $\tau(G) \leq \gamma(R(G))$. \square

Proposición 2.25. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(R(G))$. Si $S \subseteq V$ es una cubierta por vértices de G y $\partial(G) = \partial(S)$, entonces S es un conjunto diferencial de $R(G)$.*

Demostración. Sea S un conjunto diferencial y cubierta por vértices de G . Entonces S es un conjunto dominante tanto para G como para $R(G)$. Ya que S es un conjunto dominante de G y $\partial(G) = \partial(S)$, entonces S debe ser un conjunto dominante mínimo de G . Por otro lado, dado que G es una subgráfica inducida de $R(G)$, entonces $|S| = \gamma(G) \leq$

$\gamma(\mathbb{R}(G))$. De la última desigualdad y el hecho de que S es un conjunto dominante de $\mathbb{R}(G)$, tenemos que S también es un conjunto dominante mínimo de $\mathbb{R}(G)$. Por lo tanto, $\gamma(\mathbb{R}(G)) = |S|$.

Sea $X \subseteq V(\mathbb{R}(G))$ tal que $\partial(\mathbb{R}(G)) = \partial(X)$. Entonces $|X| \leq |S|$. Por el Corolario 2.17, podemos suponer que X es un conjunto dominante de G y que $X \subseteq V$. Ya que $S \subseteq V$ es un conjunto dominante mínimo de G , entonces $|X| \geq |S|$, y así $|X| = |S| = \gamma(\mathbb{R}(G))$.

Sea $m = |V(\mathbb{R}(G))|$. Como $Y \subseteq V(\mathbb{R}(G))$, entonces $|B(Y)| \leq m - \gamma(\mathbb{R}(G))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \partial(\mathbb{R}(G)) &= \partial(X) \\ &= |B(X)| - |X| \leq m - \gamma(\mathbb{R}(G)) - |X| \leq m - 2|S| = \partial(S) \leq \partial(\mathbb{R}(G)). \end{aligned}$$

□

Notemos que si S es un conjunto diferencial de G y $\mathbb{R}(G)$, entonces S no es necesariamente una cubierta por vértices de G . Ver un ejemplo en la Figura 2.5.

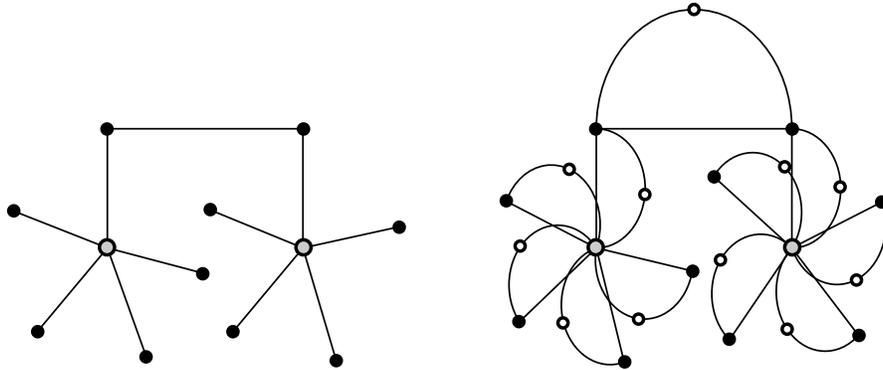


Figura 2.5: Los vértices grises forman un conjunto diferencial de G y $\mathbb{R}(G)$, pero no son una cubierta por vértices de G .

Nuestro objetivo ahora es mostrar el Teorema 2.28, que establece cotas generales superiores e inferiores para $\partial(\mathbb{R}(G))$.

Recordemos que un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es k -dependiente en G si $[S]$ tiene grado máximo a lo más k . Podemos encontrar más información sobre conjuntos k -dependientes en [28].

Proposición 2.26. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$, entonces $\langle B_G(S) \rangle$ es 2-dependiente. Además, si S es un conjunto diferencial máximo de $\mathbb{R}(G)$, entonces $\langle B_G(S) \rangle$ es 1-dependiente.*

Demostración. Recordemos que $|V(G)| = n \geq 3$. Sea $S \subseteq V$ un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$. Buscando una contradicción, supongamos que $\langle B_G(S) \rangle$ tiene un vértice v tal que $\delta_{\langle B_G(S) \rangle}(v) \geq 3$. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vecinos distintos de v en $\langle B_G(S) \rangle$, y para $i = 1, 2, 3$, sea u_i el único vértice en U adyacente a v y a v_i . Entonces, $u_1, u_2, u_3 \in C_{\mathbb{R}(G)}(S) \cap N_{\mathbb{R}(G)}(v)$, y así tenemos $\partial_{\mathbb{R}(G)}(S \cup \{v\}) \geq \partial_{\mathbb{R}(G)}(S) + 1$, una contradicción.

Ahora supongamos que, adicionalmente, S es maximal y que $\langle B_G(S) \rangle$ tiene un vértice v de grado 2. Sean v_1 y v_2 dos vecinos de v distintos. Para $i = 1, 2$, sea u_i el único vértice en U adyacente a v y a v_i . Entonces $u_1, u_2 \in C_{\mathbb{R}(G)}(S) \cap N_{\mathbb{R}(G)}(v)$, y por lo tanto tenemos $\partial_{\mathbb{R}(G)}(S \cup \{v\}) \geq \partial_{\mathbb{R}(G)}(S)$, lo cual contradice la maximalidad de S . \square

Si $S \subseteq V(G)$ es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$ de cardinalidad máxima, entonces usaremos $\mu(G)$ para denotar $|S|$. De manera similar, usaremos $\lambda(G)$ para denotar $|E(G)| - |V(G)| + 2\alpha(G)$. Notemos que la conectividad de G y $\alpha(G) \geq 1$ implica que $\lambda(G) \geq 1$.

Proposición 2.27. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto diferencial máximo de $\mathbb{R}(G)$, entonces $|C_{\mathbb{R}(G)}(S)| \leq \frac{|V(G)| - \mu(G)}{2}$.*

Demostración. Sea H la subgráfica de G inducida por $B_G(S)$. Afirmamos que $V \cap C_{\mathbb{R}(G)}(S) = \emptyset$. Supongamos que no es así, y sea v un vértice en $V \cap C_{\mathbb{R}(G)}(S)$. Como G es conexo y $|V(G)| = n \geq 3$, v es adyacente a otro vértice $v_1 \in V$. Sea u_1 el único vértice de U adyacente a v y a v_1 . Como S es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$, entonces $v_1 \in B_{\mathbb{R}(G)}(S)$ y $u_1 \in C_{\mathbb{R}(G)}(S)$. Estas dos últimas conclusiones implican que $S \cup \{v\}$ es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(G)$, lo que contradice la maximalidad de S . Entonces, podemos asumir que $C_{\mathbb{R}(G)}(S) \subseteq U$. En particular, esto implica que cada $u \in C_{\mathbb{R}(G)}(S)$ corresponde a una arista de H , y por lo tanto $|C_{\mathbb{R}(G)}(S)|$ es exactamente el número de aristas de H . Por otro lado, dado que H tiene un grado máximo a lo más 1 por la Proposición 2.26, entonces H tiene a lo más $\frac{|V(G)| - \mu(G)}{2}$ aristas, como se requería. \square

Teorema 2.28. *Sea $\{V, U\}$ la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$. Entonces*

$$\lambda(G) \leq \partial(\mathbb{R}(G)) \leq \lambda(G) + \lfloor \frac{|V(G)| - \mu(G)}{2} \rfloor.$$

Demostración. Recordemos que $|V(G)| = n \geq 3$. Primero mostraremos que $\lambda(G) \leq \partial(\mathbb{R}(G))$. Sea I un conjunto independiente máximo de G , y sea $S := V \setminus I$. Entonces $\alpha(G) = |I|$ y $|S| = n - \alpha(G)$. Note que $B_{\mathbb{R}(G)}(S) = U \cup I$. Entonces $\partial(\mathbb{R}(G)) \geq \partial_{\mathbb{R}(G)}(S) = |U| + |I| - |S| = |E(G)| + \alpha(G) - (n - \alpha(G)) = |E(G)| + 2\alpha(G) - n = \lambda(G)$, como se quería.

Ahora mostraremos que $\partial(\mathbb{R}(G)) \leq \lambda(G) + \lfloor \frac{n - \mu(G)}{2} \rfloor$. Sea S un conjunto diferencial máximo de $\mathbb{R}(G)$. Entonces $\mu(G) = |S|$. Además, por la Proposición 2.15 podemos suponer que $S \subseteq V$. Notemos también que la maximalidad de S implica que $C_{\mathbb{R}(G)}(S) \subseteq U$. Por lo tanto, V tiene exactamente $n - \mu(G)$ vértices en $B_{\mathbb{R}(G)}(S)$. Sea F el conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en $V \setminus S$ y sea $f := |F|$. De la Proposición 2.26 sabemos que $f \leq \lfloor \frac{n - \mu(G)}{2} \rfloor$, y que F es un emparejamiento de G . Sea S' un conjunto de vértices en V que resulta al agregar a S exactamente un vértice de cada arista en F . Entonces S' es un conjunto dominante de $\mathbb{R}(G)$, y $I' := V \setminus S'$ es un conjunto independiente de G . Así, $\lambda(G) = |E(G)| + \alpha(G) - (n - \alpha(G)) \geq |E(G)| + |I'| - (n - |I'|) = \partial_{\mathbb{R}(G)}(I') = \partial(\mathbb{R}(G)) - f$. Entonces $\lambda(G) \geq \partial(\mathbb{R}(G)) - f \geq \partial(\mathbb{R}(G)) - \lfloor \frac{n - \mu(G)}{2} \rfloor$. \square

Para un entero positivo r , denotemos por $K'_{r,2r}$ a la gráfica que resulta de la gráfica bipartita completa $K_{r,2r}$, agregándole un emparejamiento de r aristas con ambos extremos en la parte más grande de la bipartición de $V(K_{r,2r})$.

Nuestro próximo resultado muestra que ambas cotas en el Teorema 2.28 se alcanzan.

Proposición 2.29. *Sea $r \geq 2$ un entero positivo. Entonces se cumple:*

$$(i) \quad \partial(\mathbb{R}(K_{r,2r})) = \lambda(K_{r,2r}).$$

$$(ii) \quad \partial(\mathbb{R}(K'_{r,2r})) = \lambda(K'_{r,2r}) + \left\lfloor \frac{3r - \mu(K'_{r,2r})}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. A lo largo de esta prueba asumimos que $\{V, U\}$ es la partición canónica de $V(\mathbb{R}(G))$, donde G es $K_{r,2r}$ ó $K'_{r,2r}$, dependiendo del caso de estudio.

Primero mostraremos (i). Sea $\{P, Q\}$ la bipartición de vértices de $V(K_{r,2r})$. Supongamos que $|P| = r$ y que $|Q| = 2r$. Como $\alpha(K_{r,2r}) = 2r$, entonces $\lambda(K_{r,2r}) = 2r(r) - 3r + 4r = 2r^2 + r$. Ya que P es una cubierta por vértices de $K_{r,2r}$, entonces P es un conjunto dominante de $\mathbb{R}(K_{r,2r})$, por lo tanto, $\partial_{\mathbb{R}(K_{r,2r})}(P) = 2r(r+1) - r = 2r^2 + r$. En particular, tenemos que $\partial(\mathbb{R}(K_{r,2r})) \geq \lambda(K_{r,2r})$.

Queda por demostrar que P es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(K_{r,2r})$. Sea S un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(K_{r,2r})$. Por la Proposición 2.15, podemos suponer que $S \subseteq V$.

Como P es un conjunto dominante de $\mathbb{R}(K_{r,2r})$, entonces, para mostrar que P es un conjunto diferencial de $\mathbb{R}(K_{r,2r})$, es suficiente con mostrar que $|S| \geq r$. Buscando una contradicción, supongamos que $|S| \leq r - 1$. Entonces tanto P como Q tiene al menos un vértice que no está en S . De hecho, $Q \setminus S$ tiene al menos $r + 1 \geq 3$ de tales vértices. Sea $v \in P \setminus S$, y sean v_1, v_2 , y v_3 tres vértices en $Q \setminus S$. Para $i = 1, 2, 3$, sea u_i el único vértice de U adyacente a v y a v_i . Notemos que la existencia de tales $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ y v implica que $\partial_{\mathbb{R}(K_{r,2r})}(S \cup \{v\}) \geq \partial_{\mathbb{R}(K_{r,2r})}(S) + 1$, contradiciendo la elección de S .

Ahora demostraremos (ii). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

- $P := \{v_1, \dots, v_r\}, Q := \{w_1, \dots, w_{2r}\}$, y
- $E(G) := \{v_i w_j | v_i \in P \text{ y } w_j \in Q\} \cup \{w_i w_{i+r} | i = 1, \dots, r\}$.

Sea S un conjunto diferencial máximo de $\mathbb{R}(G)$. Entonces $\mu(G) = |S|$ y $\partial(G) = \partial_{\mathbb{R}(G)}(S)$. Como antes, por la Proposición 2.15 podemos suponer que $S \subseteq V = P \cup Q$. Es un ejercicio cómodo mostrar que el número de dominación de $\mathbb{R}(G)$ es exactamente $2r$. En vista de esto, podemos suponer que $|S| \leq 2r$.

Cada una de las siguientes igualdades se deduce directamente de las definiciones involucradas: (i) $\alpha(G) = r$, (ii) $\lambda(G) = (2r(r) + r) - 3r + 2r = 2r^2$ y (iii) $\partial_{\mathbb{R}(G)}(P) = 2r(r) + |Q| - |P| = 2r(r) + 2r - r = 2r^2 + r$.

En particular, notemos que si $S = P$, entonces no hay nada que demostrar. De hecho, en tal caso tenemos que $\mu(G) = r$, y por lo tanto $\partial_{\mathbb{R}(G)}(P) = 2r^2 + r = 2r^2 + \lfloor \frac{3r-r}{2} \rfloor$, como se requería.

Así, de ahora en adelante asumimos que $S \neq P$. Sean $P_1 := P \cap S, Q_1 := Q \cap S, P_0 := P \setminus P_1$ y $Q_0 := Q \cap S$.

AFIRMACIÓN 1. $|Q_0| \geq 1$. Buscando una contradicción, supongamos que $Q_0 = \emptyset$. Entonces $Q \subseteq S$, y por lo tanto $Q = S$. Esto último implica que $\partial_{\mathbb{R}(G)}(S) = |U| + |P| - |S| = (2r(r) + r) + (r) - (2r) = 2r^2 < 2r^2 + r = \partial_{\mathbb{R}(G)}(P)$, lo cual contradice la elección de S .

AFIRMACIÓN 2. $|Q_1| \geq 1$. Buscando una contradicción, supongamos que $Q_1 = \emptyset$. Ya que $S \neq P$, entonces $P_0 \neq \emptyset$, y por tanto $|S| < |P| = r$. Entonces $\partial_{\mathbb{R}(G)}(S) = (2r)|S| + |Q| - |S| = |S|(2r-1) + 2r < r(2r-1) + 2r = 2r^2 + r = \partial_{\mathbb{R}(G)}(P)$, contradiciendo la elección de S .

AFIRMACIÓN 3. $|P_0| \geq 1$. En busca de una contradicción, supongamos que $P_0 = \emptyset$. Esto y la Afirmación 2 implican que $S = P \cup Q_1$, donde $Q_1 \neq \emptyset$. Sea U_1 el conjun-

to de vértices de U que son adyacentes a algún vértice de Q_1 pero a ningún vértice de P . De la definición de G y $R(G)$ queda claro que $|Q_1| \geq |U_1|$. Así $\partial_{R(G)}(S) = (2r(r) + |Q| - |Q_1| + |U_1|) - (|P| + |Q_1|) = (2r^2 + |Q| - |P|) + (|U_1| - 2|Q_1|) = \partial_{R(G)}(P) + |U_1| - 2|Q_1|$. Ya que $|U_1| - 2|Q_1| < 0$, entonces $\partial_{R(G)}(S) < \partial_{R(G)}(P)$, lo que contradice la elección de S .

AFIRMACIÓN 4. $|P_1| \geq 1$. Buscando una contradicción, supongamos que $P_1 = \emptyset$, y por lo tanto que $P = P_0$. Por la Afirmación 1, sabemos que Q_0 contiene al menos un vértice, digamos w . Sea U_w el conjunto de vértices U que tienen un vecino en P y el otro en $\{w\}$. Como $|P| = r \geq 2$, entonces $|U_w| \geq 2$. Como ningún vértice en U_w pertenece a $B_{R(G)}(S)$, entonces para $S' := S \cup \{w\}$ tenemos que $\partial_{R(G)}(S') \geq \partial_{R(G)}(S)$, contradiciendo el elección de S .

AFIRMACIÓN 5. $|Q_0| = 1$. En busca de una contradicción y considerando la Afirmación 1, podemos suponer que $|Q_0| \geq 2$. Por la Afirmación 3, sabemos que P_0 contiene al menos un vértice, digamos v . Sea U_v el conjunto de vértices de U que tienen un vecino en $\{v\}$ y el otro en Q_0 . Ya que $|Q_0| \geq 2$, entonces $|U_v| \geq 2$. Como ningún vértice en U_v pertenece a $B_{R(G)}(S)$, entonces para $S' := S \cup \{v\}$ tenemos que $\partial_{R(G)}(S') \geq \partial_{R(G)}(S)$, contradiciendo el elección de S .

La Afirmación 5 implica que $|Q_1| = 2r - 1$. Esto, junto con $|S| \leq 2r$ y la Afirmación 4 implican que $|P_1| = 1$, y por lo tanto que $|S| = 2r$. Ya que $|Q_0| \geq 1$ y $|P_0| \geq 1$, entonces el conjunto $U_{0,0}$ de vértices de U , tienen un vecino en Q_0 y el otro en P_0 , es no vacío. Además, dado que ningún vértice en $U_{0,0}$ pertenece a $B_{R(G)}(S)$, entonces S no es un conjunto dominante de $R(G)$, pero tiene cardinalidad $2r$. Por lo tanto, $\partial_{R(G)}(Q) > \partial_{R(G)}(S)$, contradiciendo la elección de S . \square

Capítulo 3

El β -diferencial de una gráfica

Supongamos por el momento que una gráfica $G = (V, E)$ representa un mapa de un país, donde V es el conjunto de ciudades de G , y E es el conjunto de carreteras entre ciudades de G . Para evitar pesos, podríamos suponer que todas las ciudades de G tienen la misma población e importancia, y también que todos los caminos tengan la misma longitud.

Una cadena de supermercados quiere construir algunos en ese país y están estudiando cuáles son los mejores lugares para hacerlo. Para esto, consideran que cada supermercado dará servicio a la propia ciudad y a ciudades vecinas. Además, según algunos estudios previos, el costo de construir un nuevo supermercado es $\alpha > 0$ veces el beneficio que puede obtener cada ciudad en un número específico de años. En consecuencia, si consideramos una unidad como la cantidad de dinero que podemos obtener de una ciudad en una cantidad de años y construimos un supermercado en cada vértice de un conjunto $D \subseteq V$, entonces el beneficio obtenido es $|B(D)| + |D| - \alpha|D| = |B(D)| - (\alpha - 1)|D|$, o equivalentemente, $|B(D)| - \beta|D|$ para $\beta = \alpha - 1$. Tal valor es denotado por $\partial_\beta(D)$ y es llamado el β -**diferencial** de D . Estamos interesados en determinar el siguiente valor:

$$\partial_\beta(G) := \max\{\partial_\beta(D) : D \subseteq V\} = \max\{|B(D)| - \beta|D| : D \subseteq V\}.$$

El número $\partial_\beta(G)$ es el β -**diferencial** de G . Notemos que $\partial_\beta(G) = \partial(G)$ cuando $\beta = 1$.

En este capítulo final se generaliza el concepto de Diferencial de una Gráfica. Se hace un análisis del comportamiento de $\partial_\beta(G)$ en función de beta. Además se obtienen

cotas inferiores y superiores relacionando el β -diferencial con parámetros tales como el orden, tamaño, grado mínimo y máximo, y el número de dominación.

Notemos que si $v \in V$ tiene grado máximo Δ , entonces $\partial_\beta(G) \geq \partial_\beta(\{v\}) = \Delta - \beta$. Por tanto, si $\beta < \Delta$, siempre habrá lugares que otorgarán beneficios. Por otro lado, si $\beta \geq \Delta$ y $D \subseteq V$, entonces $\partial_\beta(D) = |B(D)| - \beta|D| \leq \Delta|D| - \beta|D| = (\Delta - \beta)|D| \leq 0$, y por tanto no existe un conjunto de lugares que nos beneficie. Por estas razones, restringimos nuestro estudio del $\partial_\beta(G)$ a valores de β en $(-1, \Delta)$.

3.1. La función $f_G(\beta) = \partial_\beta(G)$

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $\beta \in (-1, \Delta)$. Notemos que el valor de $\partial_\beta(G)$ se puede considerar como una función $f_G : (-1, \Delta) \rightarrow \mathbb{R}$, la cual se define como $f_G(\beta) := \partial_\beta(G)$. Un subconjunto $D \subseteq V$ que satisface $\partial_\beta(D) = \partial_\beta(G)$ es llamado un **conjunto β -diferencial**. Si D tiene cardinalidad mínima (máxima) de entre todos los conjuntos β -diferenciales, entonces D es un **conjunto β -diferencial mínimo (máximo)**. Usaremos el símbolo D_β^m (D_β^M , respectivamente) para indicar que D es un conjunto β -diferencial mínimo (máximo, respectivamente). Ya que el valor del $\partial_\beta(G)$ se puede obtener con varios conjuntos de V , un problema natural es el determinar propiedades de estos. En particular, una consecuencia de estos conjuntos β -diferenciales es que f_G es una función continua como se muestra en el Teorema 3.9. Observamos anteriormente que, si $v \in V$ tiene grado máximo, entonces $\partial_\beta(\{v\}) > 0$ para cualquier β válido. En los siguientes resultados continuaremos el estudio en esta dirección y mostraremos que el valor del β -diferencial de un conjunto $D \subseteq V$, dependerá solo de los valores de $|D|$ y β .

Proposición 3.1. *Sea G una gráfica. Si $\beta \in (-1, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < \frac{n}{\beta + 1}$, entonces existe un subconjunto $D \subseteq V$ tal que $|D| = k$ y $\partial_\beta(D) > 0$.*

Demostración. Si G contiene un conjunto dominante $D \subseteq V$ de cardinalidad k , entonces $\partial_\beta(D) = |B(D)| - \beta|D| = n - k(\beta + 1) > n - \frac{n}{\beta + 1}(\beta + 1) = 0$, como se quería. Ahora supongamos que $\gamma(G) > k$, y consideremos un emparejamiento máximo de G , digamos $M = \{u_1v_1, \dots, u_mv_m\}$. Se sabe que $m = |M| \geq \gamma(G) > k$. Sea $D = \{u_1, \dots, u_k\}$. Si u_m ó v_m es adyacente a un vértice en D , entonces $\partial_\beta(D) = |B(D)| - \beta|D| \geq k + 1 - k = 1 > 0$. Así podemos asumir que u_m y v_m no son adyacentes a ningún vértice en D . Ya que G es conexa, entonces al menos uno de los dos u_m ó v_m es adyacente a

algún vértice de $V \setminus (D \cup \{u_m, v_m\})$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u_m es adyacente a un vértice $x \in V \setminus (D \cup \{u_m, v_m\})$. Si $x \notin \{v_1, \dots, v_k\}$, entonces $D' = \{u_1, \dots, u_{k-1}, u_m\}$ satisface $\partial_\beta(D') = |B(D')| - \beta|D'| \geq k + 1 - k = 1 > 0$. Si $x = v_j$ para algún $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces $D' = \{u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, u_{j+1}, \dots, u_k\}$ satisface que $\partial_\beta(D') = |B(D')| - \beta|D'| \geq k + 1 - k = 1 > 0$. \square

Teniendo en cuenta que $\frac{n}{\beta+1} \leq \frac{n-\gamma(G)}{\beta}$ cuando $\beta \in (-1, 1]$, la siguiente proposición muestra que la cota superior sobre el tamaño de D en la Proposición 3.1 no puede ser mejorada.

Proposición 3.2. *Sea G una gráfica. Cada conjunto $D \subseteq V$ tal que $|D| \geq \min \left\{ \frac{n}{\beta+1}, \frac{n-\gamma(G)}{\beta} \right\}$ satisface que $\partial_\beta(D) \leq 0$.*

Demostración. Si $D \subseteq V$ es un conjunto tal que $|D| \geq n/(\beta + 1)$, entonces $\beta|D| \geq n - |D| \geq |B(D)|$, en consecuencia, $\partial_\beta(D) \leq 0$. Si $|D| \geq (n - \gamma(G))/\beta$, entonces $\beta|D| \geq n - \gamma(G) \geq |B(D)|$, lo cual implica $\partial_\beta(D) \leq 0$. \square

El siguiente resultado muestra la monotonía del diferencial en función de la elección del β .

Lema 3.3. *Si G es una gráfica y $\beta_1 < \beta_2$, entonces $\partial_{\beta_1}(G) > \partial_{\beta_2}(G)$.*

Demostración. Si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $|B(D)| - \beta_1|D| > |B(D)| - \beta_2|D|$ para cada $D \subseteq V$. Ya que el número de subconjuntos de V es finito, concluimos que $\partial_{\beta_1}(G) > \partial_{\beta_2}(G)$. \square

Ahora vamos a establecer un par de relaciones entre conjuntos dominantes y conjuntos β -diferenciales de G .

Lema 3.4. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea A un conjunto dominante de G . Si $D \subseteq V$ con $|D| > |A|$, entonces $\partial_\beta(D) < \partial_\beta(A)$. En particular,*

$$\partial_\beta(G) = \max\{\partial_\beta(D) : D \subseteq V, |D| \leq \gamma(G)\}.$$

Demostración. Sea $D \subseteq V$ con $|D| > |A|$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_\beta(A) &= |B(A)| - \beta|A| \\ &= |V| - |A| - \beta|A| > |V| - |D| - \beta|D| \geq |B(D)| - \beta|D| = \partial_\beta(D). \end{aligned}$$

\square

Proposición 3.5. *Sea G una gráfica de orden n . Si $\beta \in [-1, 0]$, entonces $\partial_\beta(G) = n - (1 + \beta)\gamma(G)$. Esto es, todo conjunto β -diferencial es un conjunto dominante mínimo.*

Demostración. Sea $A, D \subseteq V$ tal que A es un conjunto dominante con $\gamma(G) = |A|$ y $\partial_\beta(G) = \partial_\beta(D)$. Se sabe que $|B(A)| = \max\{|B(S)| : S \subseteq V\}$. Si $\beta = 0$ tenemos que $\partial_0(A) = |B(A)| \geq |B(D)| = \partial_0(D)$, y así $|B(A)| = |B(D)|$. Entonces $|B(D)| + |A| = n$, o de manera equivalente, $\partial_0(D) = n - \gamma(G)$, como se quería. Ahora supongamos que $\beta < 0$. Por el Lema 3.4 sabemos que $|D| \leq |A|$. Si $|D| < |A|$, entonces

$$\partial_\beta(A) = |B(A)| - \beta|A| \geq |B(D)| - \beta|A| > |B(D)| - \beta|D| = \partial_\beta(D),$$

una contradicción. Finalmente, ya que $|D| = |A|$ y $\partial_\beta(D) = |B(D)| - \beta|D| = |B(D)| - \beta|A| \leq |B(A)| - \beta|A| = \partial_\beta(A)$, tenemos que $|B(D)| = |B(A)|$ y, en consecuencia, que D es un conjunto dominante mínimo. \square

En vista de la Proposición 3.5, a menos que se indique lo contrario, a partir de ahora solo consideraremos $\beta > 0$. Notemos que los árboles que se muestran en las Figuras 3.1–3.3, y los conjuntos 1- y 2- diferenciales (marcados en negro) sugieren que si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $|D_{\beta_2}^M| \leq |D_{\beta_1}^m|$. Esta pregunta será respondida en el Lema 3.6.

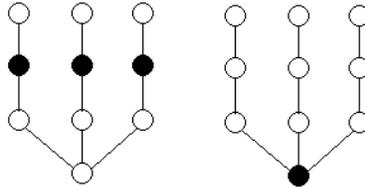


Figura 3.1: $|D_1^m| = 3$ y $|D_2^M| = 1$.

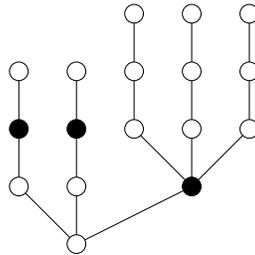


Figura 3.2: $|D_1^m| = |D_2^M| = 3$.

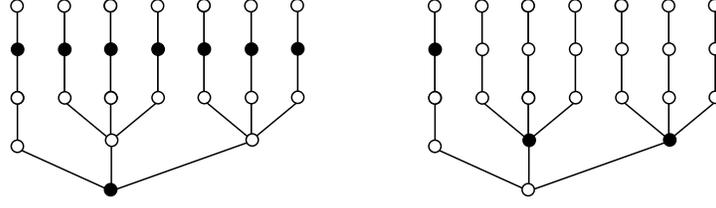


Figura 3.3: $|D_1^m| = 8$ y $|D_2^M| = 3$.

Lema 3.6. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $\beta_1 < \beta_2$, y no existe $D \subseteq V$ tal que $\partial_{\beta_1}(G) = \partial_{\beta_1}(D)$ y $\partial_{\beta_2}(G) = \partial_{\beta_2}(D)$, entonces para cada $D_1, D_2 \subseteq V$ tal que $\partial_{\beta_1}(G) = \partial_{\beta_1}(D_1)$ y $\partial_{\beta_2}(G) = \partial_{\beta_2}(D_2)$, tenemos que $|D_2| \leq |D_1| - 1$.*

Demostración. Sean D_1 y D_2 tales que $\partial_{\beta_1}(G) = \partial_{\beta_1}(D_1)$ y $\partial_{\beta_2}(G) = \partial_{\beta_2}(D_2)$. Por hipótesis $\partial_{\beta_2}(G) \neq \partial_{\beta_2}(D_1)$, así $|B(D_2)| - \beta_2|D_2| > |B(D_1)| - \beta_2|D_1|$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 |B(D_2)| - \beta_1|D_2| &= |B(D_2)| - |B(D_1)| + |B(D_1)| - \beta_1|D_2| + \beta_1|D_1| - \beta_1|D_1| \\
 &> \beta_2|D_2| - \beta_2|D_1| + \beta_1|D_1| - \beta_1|D_2| + \partial_{\beta_1}(G) \\
 &= (\beta_2 - \beta_1)(|D_2| - |D_1|) + \partial_{\beta_1}(G).
 \end{aligned}$$

Se deduce que, si $|D_2| - |D_1| \geq 0$, entonces $|B(D_2)| - \beta_1|D_2| > \partial_{\beta_1}(G)$, una contradicción. \square

Lema 3.7. *Sea G una gráfica. Si $\beta_1 < \beta_2$, entonces para cada conjunto D_1 y D_2 β_1 -diferencial y β_2 -diferencial respectivamente, se satisface que $|D_2| \leq |D_1|$ y $|B(D_2)| \leq |B(D_1)|$.*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que $|D_2| > |D_1|$. Dado que $\partial_{\beta_2}(D_1) \leq \partial_{\beta_2}(D_2)$, entonces

$$|B(D_1)| - \beta_2|D_1| \leq |B(D_2)| - \beta_2|D_2| = |B(D_2)| - \beta_1|D_2| - |D_2|(\beta_2 - \beta_1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 |B(D_1)| - \beta_2|D_1| + |D_2|(\beta_2 - \beta_1) \\
 = |B(D_1)| - \beta_1|D_1| + (|D_2| - |D_1|)(\beta_2 - \beta_1) \leq \partial_{\beta_1}(D_2).
 \end{aligned}$$

Ya que $(|D_2| - |D_1|)(\beta_2 - \beta_1) > 0$, tenemos $\partial_{\beta_1}(D_1) = |B(D_1)| - \beta_1|D_1| < \partial_{\beta_1}(D_2)$, una contradicción.

Finalmente, ya que $|B(D_2)| - \beta_1|D_2| \leq \partial_{\beta_1}(G) = |B(D_1)| - \beta_1|D_1|$, tenemos

$$|B(D_2)| - |B(D_1)| \leq \beta_1(|D_2| - |D_1|) \leq 0.$$

□

Mirando las Figuras 3.1 - 3.3, se podría pensar que cada conjunto β -diferencial mínimo de G está contenido en un conjunto β -diferencial máximo, pero esto no es cierto, como se puede ver en la Figura 3.4, donde los vértices negros forman conjuntos 1-diferenciales y $\frac{1}{2}$ -diferenciales (mínimos), respectivamente, y los vértices grises son conjuntos 1-diferencial y $\frac{1}{2}$ -diferencial (máximos), respectivamente.

Si β es un número irracional, entonces $|D_\beta^m| = |D_\beta^M|$, porque $|B(D_\beta^M)| - \beta|D_\beta^M| = |B(D_\beta^m)| - \beta|D_\beta^m|$ implica que $\beta(|D_\beta^M| - |D_\beta^m|) = |B(D_\beta^M)| - |B(D_\beta^m)|$.

Proposición 3.8. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $\beta_1 < \beta_2$ y existe $D \subseteq V$ tal que $\partial_{\beta_1}(G) = \partial_{\beta_1}(D)$ y $\partial_{\beta_2}(G) = \partial_{\beta_2}(D)$, entonces para cada $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ se cumple que $\partial_\beta(G) = \partial_\beta(D)$ y $|D| = |D_{\beta_2}^M| = |D_{\beta_1}^m|$.*

Demostración. Sea $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ y sea $D' \subseteq V$ un conjunto β -diferencial, por el Lema 3.7 tenemos

$$|D| \leq |D'| \leq |D| \quad \text{and} \quad |B(D)| \leq |B(D')| \leq |B(D)|,$$

así, $\partial_\beta(D) = |B(D)| - \beta|D| = |B(D')| - \beta|D'| = \partial_\beta(G)$. Finalmente, ya que D es un conjunto β_2 -diferencial, por el Lema 3.7, tenemos $|D| \leq |D_{\beta_1}^m|$. Ahora usando que D es también un conjunto β_1 -diferencial, tenemos $|D| \geq |D_{\beta_2}^M|$. La igualdad $|D| = |D_{\beta_2}^M|$ puede ser obtenida de forma análoga. □

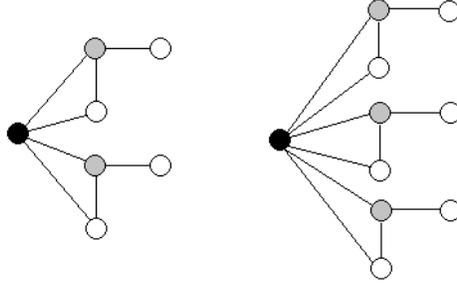


Figura 3.4: A la izquierda $|D_1^m| = 1$ y $|D_1^M| = 2$, y a la derecha $|D_{\frac{1}{2}}^m| = 1$ y $|D_{\frac{1}{2}}^M| = 3$.

Teorema 3.9. *Sea G una gráfica, entonces la función $f_G(\beta) = \partial_\beta(G)$ es continua para cada $\beta \in (-1, \Delta)$.*

Demostración. Del Lema 3.6 y la Proposición 3.8 se sigue que la representación gráfica de la función $f_G(\beta)$ está formada por segmentos de líneas rectas con pendiente negativa. Esto es, existe una partición $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{r-1} < \beta_r = \Delta$ de $[0, \Delta]$ tal que

$$f_G(\beta) = \begin{cases} n - (1 + \beta)\gamma(G) & -1 < \beta \leq 0 \\ a_1 - b_1\beta & 0 < \beta \leq \beta_1 \\ a_2 - b_2\beta & \beta_1 < \beta \leq \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_r - b_r\beta & \beta_{r-1} < \beta \leq \beta_r \end{cases}$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Más aún, $b_i \leq b_{i-1} - 1$ y $r \leq \gamma(G)$. Observe que $f_G(\beta)$ es una función continua porque, si $a_i - b_i\beta_i > a_{i+1} - b_{i+1}\beta_i$, entonces existe $\delta > 0$ y $\beta' \in (\beta_i, \beta_i + \delta)$ tal que $a_i - b_i\beta' > a_{i+1} - b_{i+1}\beta'$, ya que $f_G(\beta')$ es máximo, este debe ser igual a $a_i - b_i\beta'$, una contradicción. \square

Por ahora, en las gráficas mostradas en la Figura 3.5 tenemos que $f(\beta) = 4 - 3\beta$ si $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$, y $f(\beta) = 3 - \beta$ si $\beta \in (\frac{1}{2}, 3]$.

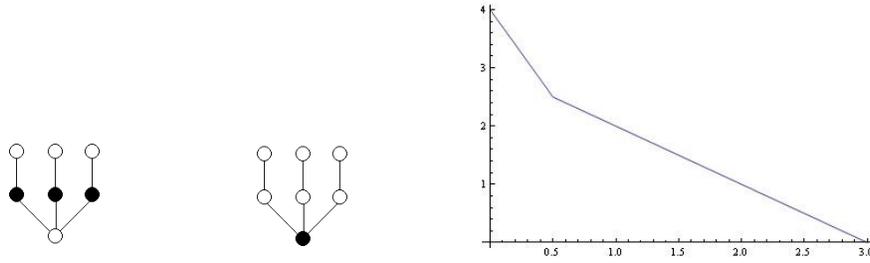


Figura 3.5: Conjunto β -diferencial cuando $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ (por la izquierda) y conjunto β -diferencial cuando $\beta \in (\frac{1}{2}, 3]$ (por la derecha).

Retomando la idea desarrollada en la introducción, si el costo de construir un supermercado es $\alpha = \frac{7}{5}$ (esto es $\beta = \frac{2}{5}$), es más rentable construir tres supermercados dando servicio a todas las ciudades. Sin embargo, si el costo de construir un supermercado es $\alpha = \frac{8}{5}$ (esto es $\beta = \frac{3}{5}$), es más rentable construir solo uno, dejando sin servicio a tres ciudades.

Podría pensarse que los intervalos donde la función es una línea recta son grandes, pero existen gráficas donde estos intervalos son realmente pequeños. Por ejemplo, si consideramos la gráfica G_r con $3r + 1$ vértices, mostrada en la Figura 3.6. Si $\beta > \frac{1}{r-1}$, el conjunto β -diferencial es unitario, contiene solo al vértice negro, y si $\beta \leq \frac{1}{r-1}$ el conjunto β -diferencial es el que contiene a los vértices grises.

Como $v_r \in B(D_\beta)$ para cada conjunto β -diferencial D_β en G_r , podemos considerar una gráfica G cuyos vértices son $V(G) = \bigcup_{i=0}^j V(G_{r+i})$ y con aristas $E = \bigcup_{i=0}^j E(G_{r+i}) \cup \{v_s v_{s+1} : s \in \{r, \dots, r+j-1\}\}$. En tal caso, la partición del intervalo $(0, \Delta)$ por la definición de la función por intervalos $f_G(\beta)$ es $0 < \frac{1}{r+j-1} < \frac{1}{r+j-2} < \dots < \frac{1}{r-1} < \Delta$.

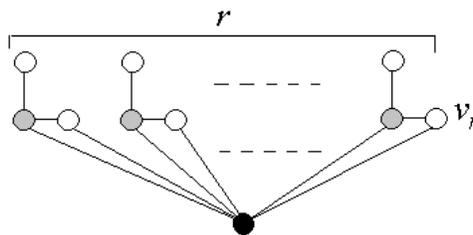


Figura 3.6: Un ejemplo de una gráfica G_r tal que $\partial_\beta(G_r) = 1 + 2r - \beta r$ si $\beta \leq \frac{1}{r-1}$, y $\partial_\beta(G_r) = 2r - \beta$ si $\beta > \frac{1}{r-1}$.

3.2. Cotas sobre el β -Diferencial de una Gráfica

Como hemos mencionado en la introducción, $\partial_\beta(G)$ será el beneficio máximo que podríamos obtener si el costo de colocar el servicio considerado es $\alpha = \beta + 1$, por lo que es interesante obtener cotas inferiores y superiores para este beneficio.

Proposición 3.10. *Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ . Entonces $\Delta - \beta \leq \partial_\beta(G) \leq n - (1 + \beta)$.*

Demostración. Sea $v \in V$ tal que $\delta(v) = \Delta$. Entonces $\partial(\{v\}) = \Delta - \beta \leq \partial_\beta(G)$. Ahora para cualquier conjunto β -diferencial D tenemos que

$$\partial_\beta(G) = |B(D)| - \beta|D| \leq n - 1 - \beta|D| \leq n - 1 - \beta.$$

□

Proposición 3.11. *Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ . Las siguientes propiedades se cumplen:*

- (a) $\partial_\beta(G) = n - (1 + \beta)$ si y solo si $\Delta = n - 1$.
- (b) $\partial_\beta(G) = n - (2 + \beta)$ si y solo si $\Delta = n - 2$.
- (c) Si $\beta > 1$, entonces $\partial_\beta(G) = n - (3 + \beta)$ si y solo si $\Delta = n - 3$.

Demostración. (a) Si $\Delta = n - 1$, por la Proposición 3.10 tenemos $n - 1 - \beta \leq \partial_\beta(G) \leq n - 1 - \beta$, entonces $\partial_\beta(G) = n - 1 - \beta$. Si $\partial_\beta(G) = n - 1 - \beta$ y D es un conjunto β -diferencial, entonces tenemos $n - 1 - \beta = |B(D)| - \beta|D| \leq n - 1 - \beta|D|$. Por tanto, $|D| \leq 1$, esto es, $|D| = 1$ y $|B(D)| = n - 1$, lo que significa que $\Delta = n - 1$.

- (b) Si $\Delta = n - 2$, por la Proposición 3.10 y (a) tenemos $n - 2 - \beta \leq \partial_\beta(G) < n - 1 - \beta$. Si D es un conjunto β -diferencial tal que $|D| \geq 2$, entonces $n - 2 - \beta \leq |B(D)| - \beta|D| \leq |B(D)| - 2\beta$, en consecuencia, $n - 2 - \beta \leq |B(D)|$. Ya que $\beta > 0$, tenemos $n - 1 \leq |B(D)|$, lo cual es una contradicción. Si D es un conjunto β -diferencial tal que $|D| = 1$, por $n - 2 - \beta \leq |B(D)| - \beta|D|$ y por (a) obtenemos $|B(D)| = n - 2$, así $\partial_\beta(G) = n - (2 + \beta)$. Ahora, si $\partial_\beta(G) = n - 2 - \beta$, existe un conjunto β -diferencial D tal que $n - 2 - \beta = |B(D)| - \beta|D| \leq |B(D)| - \beta$, por tanto $|B(D)| \geq n - 2$. Por (a) sabemos que $|B(D)| \neq n - 1$, entonces $|B(D)| = n - 2$ y, usando otra

vez que $|B(D)| - \beta|D| = n - 2 - \beta$, concluimos que $|D| = 1$, lo cual significa que $\Delta = n - 2$.

(c) Si $\partial_\beta(G) = n - (3 + \beta)$, existe un conjunto β -diferencial D tal que $n - (3 + \beta) = |B(D)| - \beta|D| \leq |B(D)| - \beta$, entonces $|B(D)| \geq n - 3$. Por (a) sabemos que $|B(D)| \neq n - 1$. Si $|B(D)| = n - 2$, entonces tenemos $|D| \leq 2$ y $|D| = 1 + \frac{1}{\beta}$, lo cual es una contradicción con el hecho que $\beta > 1$. Por lo tanto, $|B(D)| = n - 3$, y consecuentemente $|D| = 1$, lo que significa que $\Delta = n - 3$. Finalmente, si $\Delta = n - 3$ y D es un conjunto β -diferencial, y por la Proposición 3.10 tenemos $n - 3 - \beta \leq |B(D)| - \beta|D| \leq |B(D)| - \beta$, entonces $|B(D)| = n - 2$ ó $|B(D)| = n - 3$. Si $|B(D)| = n - 2$, ya que $\Delta = n - 3$, tenemos $|D| = 2$ y $-1 - \beta \leq -\beta|D| = -2\beta$, una contradicción. Si $|B(D)| = n - 3$, ya que $n - 3 - \beta \leq |B(D)| - \beta|D| = n - 3 - \beta|D|$, tenemos que $|D| = 1$ y $\partial_\beta(G) = n - 3 - \beta$.

□

Notemos que, si consideramos el camino P_5 y $\beta < 1$, entonces tenemos $\Delta = n - 3$ pero $\partial_\beta(P_5) = n - 2 - 2\beta \neq n - (3 + \beta)$.

En general, caracterizar las gráficas G tal que $\partial_\beta(G) = \Delta - \beta$ es muy difícil. Una caracterización de estas gráficas cuando $\beta = 1$ fue dada en [40], pero solo para árboles. Ahora daremos algunas propiedades necesarias para que se cumpla la igualdad.

Proposición 3.12. *Sea G una gráfica de grado máximo Δ . Si $\partial_\beta(G) = \Delta - \beta$ y $v \in V$ es tal que $\delta(v) = \Delta$, entonces:*

(a) $\Delta(G[V \setminus N[v]]) \leq \beta$.

(b) $\delta_{\overline{N[v]}}(u) \leq \beta + 1$ para cada $u \in N(v)$.

(c) $|N_{\overline{N[v]}}(A)| + |N_{N(v) \setminus A}(A)| \leq \Delta - 1 + \beta(|A| - 1)$ para cada $A \subseteq N(v)$.

Demostración. Supongamos que $\partial_\beta(G) = \Delta - \beta$ y tomemos cualquier vértice $v \in V$ tal que $\delta(v) = \Delta$. Si $\Delta(G[V \setminus N[v]]) > \beta$, existe $\{u, u_1, \dots, u_j\} \subseteq V \setminus N[v]$ tal que $u \sim u_i$ para cada $i \in \{1, \dots, j\}$ y $j > \beta$. En tal caso, $\partial_\beta(\{v, u\}) = \Delta + j - 2\beta > \Delta - \beta$, una contradicción. Si existe $u \in N(v)$ tal que $\delta_{\overline{N[v]}}(u) > \beta + 1$, entonces $\partial_\beta(\{v, u\}) > \Delta - 1 + \beta + 1 - 2\beta = \Delta - \beta$, una contradicción. Si existe $A \subseteq N(v)$ tal que $|N_{\overline{N[v]}}(A)| + |N_{N(v) \setminus A}(A)| > \Delta - 1 + \beta(|A| - 1)$, entonces $\partial_\beta(A) = |N_{\overline{N[v]}}(A)| + |N_{N(v) \setminus A}(A)| + 1 - \beta|A| > \Delta - \beta$, una contradicción. □

Note que las condiciones (a)-(c) en la Proposición 3.12 no son suficientes para garantizar que $\partial_\beta(G) = \Delta - \beta$. La gráfica que aparece en la Figura 3.7 satisface esas tres condiciones, pero $\partial_2(G) = 4 > \Delta - 2$.

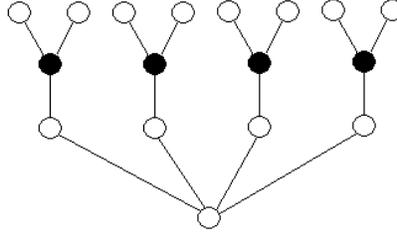


Figura 3.7: Gráfica que cumple con las condiciones de la Proposición 3.12, con $\beta = 2$ y $\partial_2(G) = 4$.

Proposición 3.13. *Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ . Si $\beta \in (0, 1)$ y $\partial_\beta(G) = \Delta - \beta$, entonces $n \leq 2\Delta + 1$. Además, si $\beta < \frac{1}{\Delta-1}$, entonces $n \leq 2\Delta$.*

Demostración. El primer enunciado se obtiene de la Proposición 3.12. Asumamos que $\beta < \frac{1}{\Delta-1}$ y $n = 2\Delta + 1$. Si $\delta(v) = \Delta$, entonces $\partial_\beta(N(v)) = \Delta + 1 - \beta\Delta > \Delta - \beta$, una contradicción. \square

Otras cotas inferiores y superiores se muestran en el siguiente lema.

Lema 3.14. *Sea G una gráfica de orden n . Entonces*

$$n - (1 + \beta)\gamma(G) \leq \partial_\beta(G) \leq n - \gamma(G) - \beta.$$

Demostración. Para cualquier conjunto de vértices D se sabe que $|B(D)| \leq n - \gamma(G)$. Por tanto, si D es un conjunto β -diferencial tenemos

$$\partial_\beta(G) = |B(D)| - \beta|D| \leq n - \gamma(G) - \beta|D| \leq n - \gamma(G) - \beta.$$

Finalmente, si D es un conjunto dominante mínimo, entonces $n - (1 + \beta)\gamma(G) = \partial_\beta(D) \leq \partial_\beta(G)$. \square

A continuación, caracterizaremos todos los árboles que alcanzan la cota superior mostrada en el Lema 3.14. Una **araña herida** es la gráfica que resulta de la subdivisión de a lo más $m - 1$ aristas de la gráfica bipartita completa $K_{1,m}$.

Lema 3.15. [29] Si $G = (V, E)$ es un árbol, entonces $\gamma(G) = n - \Delta$ si y solo si G es una araña herida.

Proposición 3.16. Si G es un árbol de orden n , entonces $\partial_\beta(G) = n - \gamma(G) - \beta$ si y solo si G es una araña herida.

Demostración. Asumamos que $\partial_\beta(G) = n - \gamma(G) - \beta$, y sea D un conjunto β -diferencial de G . Ya que $|B(D)| - \beta|D| = n - \gamma(G) - \beta$ y sabemos que $|B(D)| \leq n - \gamma(G)$, se deduce que $D = \{v\}$ para algún $v \in V$, y $\delta(v) = n - \gamma(G)$. Por tanto, $\delta(v) = \Delta$ y, por el Lema 3.15 tenemos que G es una araña herida. Si G es una araña herida, de nuevo por el Lema 3.15 tenemos que $\Delta = n - \gamma(G)$, así $\partial_\beta(G) \geq \Delta - \beta \geq n - \gamma(G) - \beta$. Finalmente, usando el Lema 3.14 concluimos que $\partial_\beta(G) = n - \gamma(G) - \beta$. \square

Proposición 3.17. Sea G una gráfica con grado máximo Δ . Si $\beta \in [1, \Delta)$, entonces $\partial_{\beta-1}(G) - \gamma(G) \leq \partial_\beta(G) \leq \partial_{\beta-1}(G) - 1$.

Demostración. Por un lado,

$$\begin{aligned} \partial_{\beta-1}(G) &= \max\{|B(D)| - \beta|D| + |D| : D \subseteq V\} \\ &\geq \max\{|B(D)| - \beta|D| + 1 : D \subseteq V\} \\ &= \max\{|B(D)| - \beta|D| : D \subseteq V\} + 1 = \partial_\beta(G) + 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, si D es un conjunto $(\beta - 1)$ -diferencial, entonces $|D| \leq \gamma(G)$ y

$$\partial_{\beta-1}(G) = |B(D)| - \beta|D| + |D| \leq |B(D)| - \beta|D| + \gamma(G) \leq \partial_\beta(G) + \gamma(G).$$

\square

Proposición 3.18. Sean $K_n, P_n, C_n, S_{n,m}$ y $K_{n,m}$. Entonces

$$\partial_\beta(K_n) = \partial_\beta(W_n) = n - 1 - \beta.$$

$$\partial_\beta(P_n) = \partial_\beta(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor (2 - \beta) + 1 - \beta & \text{si } \beta \in (0, 1) \text{ y } n \equiv 2 \pmod{3} \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor (2 - \beta) & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Si $m \geq n$

$$\partial_\beta(K_{n,m}) = \begin{cases} m + n - 2(1 + \beta) & \text{si } 0 < \beta < n - 2 \\ m - \beta & \text{si } \beta \geq n - 2. \end{cases}$$

$$\partial_\beta(S_{n,m}) = \begin{cases} m+n-2\beta & \text{si } 0 < \beta < n-1 \\ m+1-\beta & \text{si } \beta \geq n-1. \end{cases}$$

Demostración. $\partial_\beta(K_n) = \partial_\beta(W_n) = n-1-\beta$ se sigue inmediatamente de la Proposición 3.10. Sea $V(P_n) = V(C_n) = \{u_1, \dots, u_n\}$ con $n = 3k$ ó $n = 3k+1$. Sea $D = \{u_2, u_5, \dots, u_{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}\}$ entonces $\partial_\beta(D) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor (2-\beta)$. Ya que cualquier otro conjunto tiene β -diferencial menor o igual a $\partial_\beta(D)$, entonces $\partial_\beta(P_n) = \partial_\beta(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor (2-\beta)$. De manera similar, podemos verificar los otros casos. \square

Lema 3.19. *Sea G una gráfica. Si D es un conjunto β -diferencial mínimo (respectivamente, máximo) de G , entonces $|B(D)| \geq (\lfloor \beta \rfloor + 1)|D|$ (respectivamente, $|B(D)| \geq \lceil \beta \rceil |D|$).*

Demostración. Si D es un conjunto β -diferencial mínimo, entonces para cada $v \in D$, el número k de vértices en $B(D)$ (los cuales son adyacentes a v , pero a ningún $w \in D \setminus \{v\}$, esto quiere decir que son vecinos privados de v con respecto a D), debe satisfacer que $k > \beta$, y así $k \geq \lfloor \beta \rfloor + 1$. Si consideramos la misma situación cuando D es un conjunto β -diferencial máximo, se debe satisfacer $k \geq \beta$, que es, $k \geq \lceil \beta \rceil$. \square

Observe que $\lfloor \beta \rfloor + 1 = \lceil \beta \rceil$ cuando $\beta \notin \mathbb{N}$.

Proposición 3.20. *Sea G una gráfica. Si D es un conjunto β -diferencial de G , entonces $(\lceil \beta \rceil - \beta)|D| \leq \partial_\beta(G)$. Además, si D es un conjunto β -diferencial mínimo, entonces $(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)|D| \leq \partial_\beta(G)$.*

Demostración. Es suficiente probar el primer enunciado para un conjunto β -diferencial máximo. Por el Lema 3.19 tenemos $\lceil \beta \rceil |D| \leq |B(D)|$, así $|D|(\lceil \beta \rceil - \beta) \leq \partial_\beta(G)$. Si D es un conjunto β -diferencial mínimo, de nuevo por el Lema 3.19 tenemos $(\lfloor \beta \rfloor + 1)|D| \leq |B(D)|$, así $(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)|D| \leq \partial_\beta(G)$. \square

Teorema 3.21. *Sea G una gráfica con grado máximo Δ :*

(i) *Si $\beta \in (0, 1]$, entonces $\frac{(\Delta-\beta)\partial(G)}{\Delta-1} \leq \partial_\beta(G)$.*

(ii) *Si $\beta \in (1, \Delta)$, entonces $\frac{(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)\partial(G)}{\lfloor \beta \rfloor} \leq \partial_\beta(G)$.*

Demostración. (i) Sea D un conjunto 1-diferencial de G . Ya que $\partial(G) \leq (\Delta-1)|D|$, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\beta(G) &\geq |B(D)| - \beta|D| = |B(D)| - |D| + (1-\beta)|D| = \partial(G) + (1-\beta)|D| \\ &\geq \partial(G) + \frac{(1-\beta)\partial(G)}{\Delta-1} = \frac{(\Delta-\beta)\partial(G)}{\Delta-1}. \end{aligned}$$

(ii) Sea D un conjunto 1-diferencial de G . Ya que $1 - \beta < 0$, por la Proposición 3.20 tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\beta(G) &\geq |B(D)| - \beta|D| = |B(D)| - |D| + (1 - \beta)|D| = \partial(G) + (1 - \beta)|D| \\ &\geq \partial(G) + \frac{(1 - \beta)\partial_\beta(G)}{(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1)},\end{aligned}$$

entonces $\left(1 - \frac{(1-\beta)}{(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1)}\right) \partial_\beta(G) \geq \partial(G)$ o, equivalentemente,

$$\partial_\beta(G) \geq \frac{(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1) \partial(G)}{\lfloor\beta\rfloor}.$$

□

Teorema 3.22. *Sea G una gráfica de orden n y grado mínimo δ , y sea $\beta \in (0, \delta)$. Entonces,*

$$\partial_\beta(G) \geq \left(\frac{\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1}{\beta\lfloor\beta\rfloor + 2\lfloor\beta\rfloor + 2} \right) n.$$

Demostración. Sea D un conjunto β -diferencial mínimo. Ya que $\beta < \delta$ tenemos que cada vértice en $C(D)$ tiene al menos un vecino en $B(D)$, esto es, $B(D)$ es un conjunto dominante. Por un lado, ya que $\partial_\beta(G) \geq |B(B(D))| - \beta|B(D)| = |D| + |C(D)| - \beta|B(D)|$, se obtiene $|C(D)| \leq \partial_\beta(G) + \beta|B(D)| - |D| = (1 + \beta)\partial_\beta(G) + (\beta^2 - 1)|D|$. Ahora, por la Proposición 3.20, $(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1)|D| \leq \partial_\beta(G)$, se tiene

$$\begin{aligned}n &= |D| + |B(D)| + |C(D)| \leq (\beta + 1)\partial_\beta(G) + |B(D)| + \beta^2|D| \\ &= (\beta + 2)\partial_\beta(G) + (\beta^2 + \beta)|D| \leq (\beta + 2)\partial_\beta(G) + \left(\frac{\beta^2 + \beta}{\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G) \\ &= \left(\frac{(\beta + 2)(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1) + \beta^2 + \beta}{\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G) = \left(\frac{\beta\lfloor\beta\rfloor + 2\lfloor\beta\rfloor + 2}{\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G).\end{aligned}$$

□

Notemos que (i) del Teorema 3.21 es alcanzada por cualquier gráfica con orden n y grado máximo $\Delta = n - 1$. Por otro lado, (ii) se alcanza en cualquier estrella doble, como se muestra en la Figura 3.8, cuando $\beta \in \mathbb{N}$ y $r = s = 1 + \beta$.

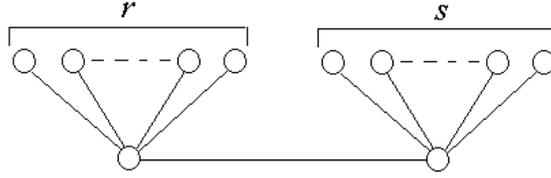


Figura 3.8: Esta gráfica muestra que la cota (ii) en el Teorema 3.21 se alcanza cuando $\beta \in \mathbb{N}$ y $r = s = 1 + \beta$.

Por otro lado, notemos que, si $\beta \geq \delta$ no es posible dar una cota similar a la dada en el Teorema 3.22. Por ejemplo falla para la gráfica mostrada en la Figura 3.9 con $\delta = 2, \beta = 3$ y $k \geq 29$, donde C_k representa un ciclo de k vértices y se tiene que $n = 6 + k$ y $\partial_3(G) = 2$.

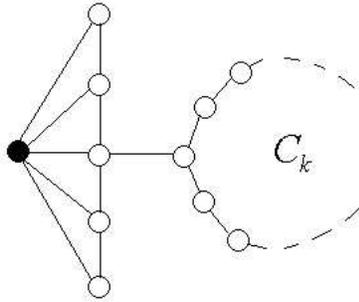


Figura 3.9: Esta gráfica muestra que el Teorema 3.22 puede fallar cuando $\beta > \delta$.

Teorema 3.23. *Sea G una gráfica de orden n , tamaño m y grado máximo Δ . Entonces*

$$\partial_\beta(G) \geq \frac{(2m - n\lfloor\beta\rfloor)(\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1)}{\Delta(\lfloor\beta\rfloor + 2) + 1}.$$

Demostración. Notemos que si D es un conjunto β -diferencial mínimo de G , entonces las siguientes propiedades se cumplen:

- (1) $|D| \leq \frac{\partial_\beta(G)}{\lfloor\beta\rfloor - \beta + 1}$.
- (2) Si $v \in B(D)$, entonces $\delta_{C(D)}(v) \leq \lfloor\beta\rfloor + 1$.

(3) Si $v \in C(D)$, entonces $\delta_{C(D)}(v) \leq \lfloor \beta \rfloor$.

Sea r el número de aristas de $B(D)$ a $C(D)$. Entonces de (3) y (2) tenemos

$$\left(\sum_{u \in C(D)} \delta(u) \right) - |C(D)|\lfloor \beta \rfloor \leq r \leq |B(D)|(\lfloor \beta \rfloor + 1).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2m &\leq |D|\Delta + |B(D)|\Delta + \sum_{u \in C(D)} \delta(u) \leq |D|\Delta + |B(D)|\Delta + |B(D)|(\lfloor \beta \rfloor + 1) + |C(D)|\lfloor \beta \rfloor \\ &= |D|\Delta + |B(D)|(\Delta + 1) + (n - |D|)\lfloor \beta \rfloor \\ &= |D|(\Delta - \lfloor \beta \rfloor) + \partial_\beta(G)(\Delta + 1) + \beta|D|(\Delta + 1) + n\lfloor \beta \rfloor \\ &= (\Delta - \lfloor \beta \rfloor + \beta(\Delta + 1))|D| + \partial_\beta(G)(\Delta + 1) + n\lfloor \beta \rfloor \\ &\leq \left(\frac{\Delta - \lfloor \beta \rfloor + \beta(\Delta + 1)}{\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G) + \partial_\beta(G)(\Delta + 1) + n\lfloor \beta \rfloor \\ &= \left(\frac{\Delta - \lfloor \beta \rfloor + \beta(\Delta + 1) + (\Delta + 1)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)}{\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G) + n\lfloor \beta \rfloor \\ &= \left(\frac{\Delta(\lfloor \beta \rfloor + 2) + 1}{\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1} \right) \partial_\beta(G) + n\lfloor \beta \rfloor. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\partial_\beta(G) \geq \frac{(2m - n\lfloor \beta \rfloor)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)}{\Delta(\lfloor \beta \rfloor + 2) + 1}.$$

□

Lema 3.24. Sea G una gráfica de grado máximo Δ . Si $\beta \in (0, \delta)$, entonces

$$\left(\frac{\lfloor \beta \rfloor(1 + \lfloor \beta \rfloor)}{\delta - \lfloor \beta \rfloor} + 2 + \lfloor \beta \rfloor \right) \left(\frac{\Delta - \beta}{1 + \lfloor \beta \rfloor - \beta} + 1 \right) > 2 + \Delta(2 + \lfloor \beta \rfloor).$$

Demostración. Sea $\beta = k + \frac{\alpha}{10}$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, 10)$, entonces la desigualdad es

$$\left(\frac{(k+1)^2}{\delta - k} + 2 + k \right) \left(\frac{\Delta - k - \frac{\alpha}{10}}{1 - \frac{\alpha}{10}} + 1 \right) > 2 + \Delta(2 + k)$$

o, equivalentemente,

$$\left(\frac{(k+1)^2 + (2+k)(\delta - k)}{\delta - k} \right) \left(\frac{10\Delta - 10k - 2\alpha + 10}{10 - \alpha} \right) > 2 + \Delta(2 + k).$$

Ya que $h_1(\delta) := \frac{(k+1)^2 + (2+k)(\delta-k)}{\delta-k}$ es decreciente en δ , y $h_2(\alpha) = \frac{10\Delta - 10k - 2\alpha + 10}{10-\alpha}$ es creciente en α , tenemos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k+1)^2 + (2+k)(\delta-k)}{\delta-k} \right) \left(\frac{10\Delta - 10k - 2\alpha + 10}{10-\alpha} \right) \\
& \geq \left(\frac{(k+1)^2 + (2+k)(\Delta-k)}{\Delta-k} \right) \left(\frac{10\Delta - 10k + 10}{10} \right) \\
& = \left(\frac{(k+1)^2 + (2+k)(\Delta-k)}{\Delta-k} \right) (\Delta - k + 1) \\
& = (k+1)^2 + (2+k)(\Delta-k) + \frac{(k+1)^2}{\Delta-k} + (2+k) \\
& = k(k+2) + 1 + (2+k)\Delta - (2+k)k + \frac{(k+1)^2}{\Delta-k} + (2+k) \\
& = 1 + \Delta(2+k) + \frac{(k+1)^2}{\Delta-k} + (2+k) > 2 + \Delta(2+k).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.25. Sea $G = (V, E)$ una gráfica de orden n , grado mínimo δ y grado máximo Δ . Sea $\beta < \delta$ y $h(k) := \left(\frac{\lfloor \beta \rfloor (1 + \lfloor \beta \rfloor)}{\delta - \lfloor \beta \rfloor} + 2 + \lfloor \beta \rfloor \right) \left(\frac{\Delta - \beta}{1 + \lfloor \beta \rfloor - \beta} + k + 1 \right)$, donde $k \in \mathbb{N}$. Si $n \geq h(k)$, entonces

$$\partial_\beta(G) \geq \Delta - \beta + (k+1)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1).$$

Demostración. Procedamos con inducción sobre k . Para $k = 0$ supongamos que $n \geq h(0)$ y tomemos $v \in V$ tal que $\delta(v) = \Delta$. Si existe $u \in B(\{v\})$ con $\delta_{C(\{v\})}(u) \geq \lfloor \beta \rfloor + 2$, entonces para $D = \{v, u\}$ obtenemos que $\partial_\beta(D) \geq \Delta - 1 + \lfloor \beta \rfloor + 2 - 2\beta = \Delta - \beta + (\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)$. Por tanto, podemos asumir que $\delta_{C(\{v\})}(u) \leq \lfloor \beta \rfloor + 1$ para cada $u \in B(\{v\})$. Notemos que si existe un $w \in C(\{v\})$ tal que $N(w) \cap B(\{v\}) = \emptyset$, entonces

$$\partial(\{v, w\}) \geq \Delta + \delta - 2\beta = \Delta - \beta + \delta - \beta \geq \Delta - \beta + (\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1),$$

porque $\delta \geq \lfloor \beta \rfloor + 1$. Si asumimos que $N(w) \cap B(\{v\}) \neq \emptyset$ para cada $w \in C(\{v\})$, entonces $|C(\{v\})| \leq \Delta(1 + \lfloor \beta \rfloor)$. Del Lema 3.24 se sigue que

$$n = 1 + \Delta + |C(\{v\})| \leq 1 + \Delta(2 + \lfloor \beta \rfloor) < h(0),$$

contradiendo la hipótesis. Ahora, supongamos que el teorema es cierto para k y $n \geq$

$h(k+1)$. Sea \mathcal{M} la colección de todos los conjuntos β -diferenciales de G tal que cada $D \in \mathcal{M}$ satisfice que cada vértice $v \in D$ tiene al menos $\lfloor \beta \rfloor + 1$ vecinos privados externos con respecto a D . Esto es, $|\text{epn}[v, D]| \geq \lfloor \beta \rfloor + 1$. Sea $D' \in \mathcal{M}$ con cardinalidad máxima. Ya que $n \geq h(k+1) \geq k$, por hipótesis de inducción sabemos que $\partial_\beta(D') \geq \Delta - \beta + (k+1)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)$. Más aún, como $|B(D')| \geq (\lfloor \beta \rfloor + 1)|D'|$, también tenemos $\partial_\beta(G) \geq (\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1)|D'|$.

Si existe $w \in C(D')$ tal que $\delta_{C(D')}(w) > \lfloor \beta \rfloor$, entonces tenemos

$$\partial(D' \cup \{w\}) \geq \Delta - \beta + (k+1)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1) + \lfloor \beta \rfloor - \beta + 1 = \Delta - \beta + (k+2)(\lfloor \beta \rfloor - \beta + 1),$$

y hemos terminado. Por lo tanto, supongamos que para cada $w \in C(D')$ se satisfice que $\delta_{C(D')}(w) \leq \lfloor \beta \rfloor$. Si m' es el número de aristas en $G[C(D')]$, entonces

$$m' \leq \frac{(n - |D'| - |B(D')|)\lfloor \beta \rfloor}{2}.$$

Supongamos que existe $v \in D'$ y $u \in B(\{v\})$ tal que $\delta_{C(D')}(u) \geq 1 + \beta$. Si $|\text{epn}[v, D']| = \lfloor \beta \rfloor + 1$, entonces $D'' = (D' \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ da un β -diferencial mayor a $\partial_\beta(D')$, lo cual es imposible. Si $|\text{epn}[v, D']| > \lfloor \beta \rfloor + 1$, entonces $D'' = D' \cup \{u\} \in \mathcal{M}$, contradiciendo la elección de D' . Así, podemos asumir que $\delta_{C(D')}(u) < 1 + \beta$ para cualquier $u \in B(\{v\})$ y $v \in D'$, esto es, $\delta_{C(D')}(u) \leq \lceil \beta \rceil$ para cualquier $u \in B(\{v\})$ y $v \in D'$.

Sea r el número de aristas entre $B(D')$ y $C(D')$. Entonces $r \leq \lceil \beta \rceil |B(D')| = \lceil \beta \rceil (\partial_\beta(G) + \beta |D'|)$. Por tanto,

$$m' \geq \frac{(n - |D'| - |B(D')|)\delta - r}{2} \geq \frac{(n - |D'| - |B(D')|)\delta - \lceil \beta \rceil (\partial_\beta(G) + \beta |D'|)}{2},$$

consecuentemente,

$$\frac{(n - |D'| - |B(D')|)\delta - \lceil \beta \rceil (\partial_\beta(G) + \beta |D'|)}{2} \leq \frac{(n - |D'| - |B(D')|)\lfloor \beta \rfloor}{2}$$

o, equivalentemente,

$$n \leq \frac{\lceil \beta \rceil}{\delta - \lfloor \beta \rfloor} (\partial_\beta(G) + \beta |D'|) + \partial_\beta(G) + (\beta + 1)|D'|.$$

Finalmente, usando que $|D'| \leq \frac{\partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
n &\leq \frac{[\beta]}{\delta - [\beta]} (\partial_\beta(G) + \beta|D'|) + \partial_\beta(G) + (\beta + 1)|D'| \\
&\leq \frac{[\beta]}{\delta - [\beta]} \left(\partial_\beta(G) + \frac{\beta \partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1} \right) + \partial_\beta(G) + \frac{(\beta + 1) \partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1} \\
&= \frac{[\beta]}{\delta - [\beta]} \left(\frac{(1 + [\beta]) \partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1} \right) + \frac{(2 + [\beta]) \partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1} \\
&= \left(\frac{[\beta](1 + [\beta])}{\delta - [\beta]} + 2 + [\beta] \right) \frac{\partial_\beta(G)}{[\beta] - \beta + 1},
\end{aligned}$$

y como $\left(\frac{[\beta](1 + [\beta])}{\delta - [\beta]} + 2 + [\beta] \right) \left(\frac{\Delta - \beta + (k+2)([\beta] - \beta + 1)}{[\beta] - \beta + 1} \right) = h(k + 1) \leq n$, concluimos que $\partial_\beta(G) \geq \Delta - \beta + (k + 2)([\beta] - \beta + 1)$. \square

Capítulo 4

El polinomio diferencial de una gráfica

Para un estudio más completo del tema que se aborda en este capítulo ver [4] y [7]. En este capítulo se estudia el polinomio diferencial, se encuentran propiedades básicas y estructurales sobre sus coeficientes, y se muestran fórmulas cerradas del polinomio diferencial bajo operaciones en gráficas, tales como adición, subdivisión y eliminación de vértices y aristas.

4.1. Propiedades del polinomio diferencial de una gráfica

El **polinomio diferencial** de una gráfica G con variable x se define como:

$$C(G; x) = x^n \sum_{S \subseteq V} x^{\partial(S)}. \quad (4.1)$$

Otra expresión equivalente para el polinomio es la siguiente:

$$C(G; x) = \sum_{k=-n}^{\partial(G)} C_k(G) x^{n+k}, \quad (4.2)$$

donde $C_k(G)$ denota al número de subconjuntos de vértices con diferencial igual a k en G .

Proposición 4.1. *Si G es una gráfica de orden n , se tiene que:*

- I) $C(G; 0) = 1$.
- II) *Los ceros reales de $C(G; x)$ son negativos.*
- III) $C(G; 1) = 2^n$.
- IV) $\deg(C(G; x)) \geq n$.
- V) $\deg(C(G; x)) = n + \partial(G)$.
- VI) $\deg(C(G; x)) = \gamma_R(G) + 2\partial(G)$.

Por completitud de este trabajo de investigación se demuestra el Teorema 4.2.

Teorema 4.2. *Si G es una gráfica de orden n , entonces los coeficientes de $C(G; x)$ satisfacen que:*

- I) $C_{-n}(G) = 1$.
- II) $C_{-n+1}(G)$ *es el número de vértices aislados en G .*
- III) *Sea p el número de componentes conexas isomorfas a P_2 en G . Entonces $p = C_{-n+2}(G) + C_{-n+1}(G) - \binom{C_{-n+1}(G)}{2} - n$.*
- IV) $C_{-n+2}(G) = n$ *siempre que las componentes conexas de G tengan al menos tres vértices.*
- V) $C_{-n+3}(G) = \binom{C_{-n+1}(G)}{3} + C_{-n+1}(G)p + q + r + C_{-n+1}(G)(n - C_{-n+1}(G))$, *donde q es el número de componentes conexas con cardinalidad 3 (i.e., isomorfas a P_3 ó C_3) en G , y r es el número de vértices que cuelgan de una componente de orden al menos 3.*
- VI) $C_{-n+3}(G)$ *es el número de vértices colgantes siempre que las componentes conexas de G tengan al menos cuatro vértices.*

Demostración. Probaremos por separado cada inciso.

- i) Como $|B(S)| \geq 0$ y $|S| \leq n$ para cada $S \subset V$, entonces $\partial(S) \geq -n$. La igualdad se da solo si $S = V$.
- ii) Sea $S \subset V$ tal que $\partial(S) = -(n-1)$. Notemos que si $|S| < n-1$ entonces $\partial(S) = |B(S)| - |S| > -n+1$, por tanto $|S| \geq n-1$. Si $|S| = n$ entonces $\partial(S) = -n$ por tanto $|S| \leq n-1$ se deduce que $|S| = n-1$. Por lo tanto $B(S) = \emptyset$ si y solo si \bar{S} es un vértice aislado.
- iii) Notemos que si $n = 1$, entonces G tiene un único vértice (aislado) y $C(G; x) = 1+x$ (i.e., $C_0(G) = 1$). Si $n = 2$ hay dos casos: (1) $G \cong P_2$, y (2) G es una gráfica con exactamente dos vértices aislados. Ya que $C(P_2; x) = 1 + 3x^2$ tenemos el resultado para el caso (1). En el caso (2), tenemos $C(G; x) = x^2 + 2x + 1$ y así, tenemos el resultado.
- Ahora supongamos que $n \geq 3$. Sea $S \subset V$ tal que $\partial(S) = -n+2$. Si $|S| = n$ entonces $\partial(S) = -n$. Si $|S| < n-2$ entonces $\partial(S) = |B(S)| - |S| > |B(S)| - n + 2$. Por lo tanto tenemos dos casos: (1) $|S| = n-1$ y $|B(S)| = 1$, ó (2) $|S| = n-2$ y $|B(S)| = 0$. Notemos que el vértice en $V \setminus S$ en el caso (1) no es aislado, por lo tanto, el número de subconjuntos S es igual a $n - C_{-n+1}(G)$. En el caso (2), tenemos que \bar{S} es isomorfa a P_2 o isomorfa a E_2 ; así, el número de subconjuntos S es igual a $p + \binom{C_{-n+1}(G)}{2}$. Entonces $C_{-n+2}(G) = n - C_{-n+1}(G) + p + \binom{C_{-n+1}(G)}{2}$.
- iv) Ésta es una consecuencia directa de los incisos II) y III).
- v) Similar a la demostración del inciso III), los casos $n \leq 3$ son fáciles de verificar.

Supongamos que $n \geq 4$. Si $\partial(S) = -n+3$ y $|S| = n-1$ entonces $-n+3 = |B(S)| - n + 1$ y por tanto $|B(S)| = 2$, que es una contradicción. Si $|S| < n-3$ entonces $\partial(S) = |B(S)| - |S| > |B(S)| - n + 3$, que es imposible. Por tanto, tenemos dos casos: (1) $|S| = n-3$ y $|B(S)| = 0$, o caso (2) $|S| = n-2$ y $|B(S)| = 1$. Notemos que $[S]$ y $[\bar{S}]$ son subgráficas disjuntas en el caso (1), por tanto, el número de subconjuntos \bar{S} es igual a $\binom{C_{-n+1}(G)}{3} + C_{-n+1}(G)p + q$. Además, en el caso (2) tenemos que $V \setminus (S \cup B(S)) = \{v\}$, como $v \notin B(S)$ entonces $\delta(v) \leq 1$, por tanto v es un vértice aislado o colgant; por tanto, el número de subconjuntos \bar{S} es igual a $C_{-n+1}(G)(n - C_{-n+1}(G)) + d$. Entonces obtenemos el resultado.

VI) Esto es una consecuencia directa de los incisos II), III) y V).

□

Dado un polinomio $p(x)$, es natural preguntarse si existen gráficas G tales que $C(G; x) = p(x)$. Una primera acción para ello es el estudio del número de términos del polinomio diferencial. En el siguiente resultado se establecen algunas cotas para el número de términos de $C(G; x)$ en función de las propiedades de G .

Teorema 4.3. *Si G es una gráfica conexa de orden n , entonces $C(G; x)$ contiene al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ términos con exponente menor o igual a n .*

Demostración. Toda gráfica conexa tiene al menos un árbol T generador, además todo árbol es gráfica bipartita. Sea $\{A, B\}$ la partición de T , donde $|A| = n_1$ y $|B| = n_2$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n_1 \geq n_2$. Sea k tal que $n_1 - k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sean $v_i \in A$ ($i = 1, \dots, k$), definamos $C_1 := B \cup \{v_1, \dots, v_k\}$ y $A_1 := A \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$. Sea $A_1 = \{w_1, \dots, w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$, definamos ahora $S_j := C_1 \cup \{w_1, \dots, w_j\}$ y $S_0 = C_1$. Notemos que para $j = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ se tiene que $\partial(S_j) = |B(S_j)| - |S_j| = n_1 - k - j - (n_2 + k + j) = n_1 - (n_2 + 2k + 2j) \leq 0$. Observemos que n_1, n_2 y k son constantes y por tanto cada S_j genera un término del polinomio diferencial distinto.

□

Proposición 4.4. *Si G es una gráfica de orden n , con t grados diferentes, entonces $C(G; x)$ contiene al menos t términos con exponente mayor o igual a n .*

Demostración. Sea $v_i \in V(G)$ con grado k_i , tenemos que $\partial(\{v_i\}) = |B(\{v_i\})| - |\{v_i\}| = k_i - 1 \geq 0$, para cada $i = 1, \dots, t$.

□

4.2. El polinomio diferencial de algunas transformaciones en gráficas

Denotemos por G_e a la gráfica obtenida añadiendo una arista colgante e ($e \notin E$) a G . Notemos que esto implica la adición de un nuevo vértice.

Uno de los principales objetivos de esta sección es el mostrar una relación entre $C(G; x)$ y $C(G_e; x)$.

Denotemos por \mathbb{I}_X a la **función indicador** de X , *i.e.*, $\mathbb{I}_X(x) = 1$ si $x \in X$ y $\mathbb{I}_X(x) = 0$ en otro caso.

Sea a un vértice fijo de G . Definamos, para $i \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} C(G; x)_a^i &:= \sum_{S \subset V, \mathbb{I}_S(a)=i} x^{n+\partial(S)}, \\ C(G; x)_{a^0}^i &:= \sum_{S \subset V, \mathbb{I}_S(a)=i, N(a) \cap S = \emptyset} x^{n+\partial(S)}, \\ C(G; x)_{a^1}^i &:= \sum_{S \subset V, \mathbb{I}_S(a)=i, N(a) \cap S \neq \emptyset} x^{n+\partial(S)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} C(G; x)_a^0 &= C(G; x)_{a^0}^0 + C(G; x)_{a^1}^0, \\ C(G; x)_a^1 &= C(G; x)_{a^0}^1 + C(G; x)_{a^1}^1. \end{aligned}$$

y

$$C(G; x) = C(G; x)_a^0 + C(G; x)_a^1.$$

Lema 4.5. *Si G es una gráfica de orden n , y sea $b \in V$, entonces*

$$\begin{pmatrix} C(G_e; x)_{a^0}^0 \\ C(G_e; x)_{a^1}^0 \\ C(G_e; x)_{a^0}^1 \\ C(G_e; x)_{a^1}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(G; x)_{b^0}^0 \\ C(G; x)_{b^1}^0 \\ C(G; x)_{b^0}^1 \\ C(G; x)_{b^1}^1 \end{pmatrix}.$$

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $a, b \in V$ dos vértices fijos distintos. Definamos $e := ab$, y $G_e = (V, E \cup \{e\})$ la gráfica obtenida al agregar una arista a G .

Definimos para $i, j \in \{0, 1\}$ lo siguiente:

$$\begin{aligned}
C(G; x)_{a,b}^{(i,j)} &:= \sum_{S \subset V, \mathbb{I}_S(a)=i, \mathbb{I}_S(b)=j} x^{n+\partial(S)}, \\
C(G; x)_{a^0,b}^{(0,1)} &:= \sum_{S \subset V, a \notin S, b \in S, (S \setminus \{b\}) \cap N(a) = \emptyset} x^{n+\partial(S)}, \\
C(G; x)_{a^1,b}^{(0,1)} &:= \sum_{S \subset V, a \notin S, b \in S, (S \setminus \{b\}) \cap N(a) \neq \emptyset} x^{n+\partial(S)}, \\
C(G; x)_{a,b^0}^{(1,0)} &:= \sum_{S \subset V, a \in S, b \notin S, (S \setminus \{a\}) \cap N(b) = \emptyset} x^{n+\partial(S)} \\
&\quad \text{y} \\
C(G; x)_{a,b^1}^{(1,0)} &:= \sum_{S \subset V, a \in S, b \notin S, (S \setminus \{a\}) \cap N(b) \neq \emptyset} x^{n+\partial(S)}.
\end{aligned}$$

Teorema 4.6. Si $G = (V, E)$ es una gráfica de orden n , y $a, b \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
C(G_e; x) &= C(G; x)_{a,b}^{(1,1)} + C(G; x)_{a,b}^{(0,0)} + C(G; x)_{a,b^1}^{(1,0)} + C(G; x)_{a^1,b}^{(0,1)} \\
&\quad + x[C(G; x)_{a,b^0}^{(1,0)} + C(G; x)_{a^0,b}^{(0,1)}].
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $S \subset V(G_e)$. Notemos que en los casos a) $a, b \in S$, y b) $a, b \notin S$, se cumple que $B_{G_e}(S) = B(G)$, por lo tanto $\partial_{G_e}(S) = \partial_G(S)$, así obtenemos que

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(1,1)} = C(G; x)_{a,b}^{(1,1)}$$

y

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(0,0)} = C(G; x)_{a,b}^{(0,0)}.$$

c) Si $a \in S, b \notin S$ y $[S \setminus \{a\}] \cap N(b) = \emptyset$. Entonces $B_{G_e}(S) = B(S) \cup \{b\}$ y por tanto $\partial_{G_e}(S) = \partial_G(S) + 1$. Entonces tenemos que agregar

$$xC(G; x)_{a,b^0}^{(1,0)}$$

a

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(1,0)}.$$

d) Si $a \in S, b \notin S$ y $[S \setminus \{a\}] \cap N(b) \neq \emptyset$, entonces $B_{G_e}(S) = B(S)$ y por tanto $\partial_{G_e}(S) = \partial_G(S)$. Entonces tenemos que agregar

$$C(G; x)_{a,b^1}^{(1,0)}$$

a

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(1,0)}.$$

Así obtenemos

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(1,0)} = xC(G; x)_{a,b^0}^{(1,0)} + C(G; x)_{a,b^1}^{(1,0)}.$$

Los demás casos son similares, así

$$C(G_e; x)_{a,b}^{(0,1)} = xC(G; x)_{a^0,b}^{(0,1)} + C(G; x)_{a^1,b}^{(0,1)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} C(G_e; x) &= C(G; x)_{a,b}^{(1,1)} + C(G; x)_{a,b}^{(0,0)} + C(G; x)_{a,b^1}^{(1,0)} + C(G; x)_{a^1,b}^{(0,1)} \\ &\quad + x[C(G; x)_{a,b^0}^{(1,0)} + C(G; x)_{a^0,b}^{(0,1)}]. \end{aligned}$$

□

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas. Sean $a \in V_1, b \in V_2$ y $e := ab$ una nueva arista. La gráfica $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e\})$ es la gráfica que resulta al añadir la arista e entre G_1 y G_2 .

Teorema 4.7. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas de orden n_1, n_2 , respectivamente. Sean $a \in V_1, b \in V_2$, sea e una nueva arista $e := ab$ y $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e\})$. Entonces*

$$\begin{aligned} C(G; x) &= C(G_1; x)_a^0 C(G_2; x)_b^0 + C(G_1; x)_a^1 [xC(G_2; x)_{b^0}^0 + C(G_2; x)_{b^1}^0] \\ &\quad + C(G_2; x)_b^1 [xC(G_1; x)_{a^0}^0 + C(G_1; x)_{a^1}^0] + C(G_1; x)_a^1 C(G_2; x)_b^1. \end{aligned}$$

Lema 4.8. *Si G es una gráfica de orden n y ab una arista de G , entonces*

$$C(G; x) - C(G - e; x) = (x - 1) \left(C(G - e; x)_{a^0, b}^{(0,1)} + C(G - e; x)_{a, b^0}^{(1,0)} \right),$$

donde $C(G - e; x)_{a^0, b}^{(0,1)}$ y $C(G - e; x)_{a, b^0}^{(1,0)}$ son polinomios no nulos con coeficientes positivos.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica de orden n , y $a, b \in V$ tal que $ab \in E$. Definamos $G_c = (V_c, E_c)$ donde $V_c = V \cup \{c\}$ y $E_c = E \setminus \{ab\} \cup \{ac, bc\}$. Notemos que $|G_c| = |G| + 1 = n + 1$ y $N(c) = \{a, b\}$.

Teorema 4.9. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica de orden n , y $G_c = (V_c, E_c)$ la gráfica que resulta al subdividir la arista ab . Entonces*

$$\begin{aligned} C(G_c; x) = & xC(G; x)_{a, b}^{(0,0)} + xC(G; x)_{a, b^0}^{(1,0)} + x^2C(G; x)_{a, b^1}^{(1,0)} + xC(G; x)_{a^0, b}^{(0,1)} + \\ & x^2C(G; x)_{a^1, b}^{(0,1)} + x^2C(G; x)_{a, b}^{(1,1)} + x^2C(G; x)_{a^0, b^0}^{(0,0)} + xC(G; x)_{a^1, b^0}^{(0,0)} + \\ & xC(G; x)_{a^0, b^1}^{(0,0)} + C(G; x)_{a^1, b^1}^{(0,0)} C(G; x)_{a, b}^{(1,1)} + C(G; x)_{a, b}^{(1,0)} + C(G; x)_{a, b}^{(0,1)}. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el concepto de diferencial de una gráfica, principalmente propiedades que lo relacionan con otros parámetros bien conocidos tales como el número de dominación, orden, tamaño, grado, cuello, entre otros. En cuanto al diferencial, en general se obtienen cotas no triviales, y en algunos casos se muestran fórmulas cerradas. En el caso del operador $R(G)$, se encuentran cotas, y mostramos relaciones importantes entre ciertos conjuntos de vértices de G y $R(G)$. Además, complementamos este trabajo con el estudio del polinomio diferencial, establecemos relaciones entre el polinomio y sus coeficientes, y mostramos fórmulas para ciertas clases de gráficas. Otra aportación es la generalización del concepto de diferencial de una gráfica a través del β -diferencial, se estudian sus propiedades matemáticas y se obtienen cotas que lo relacionan con el orden, tamaño, grado mínimo (máximo) y el número de dominación.

Esta investigación permitió plantear los siguientes problemas abiertos

- Estudiar el Diferencial en los operadores $T(G)$, $L(G)$ y \overline{G} .
- Caracterizar las gráficas que alcanzan las cotas obtenidas.
- Buscar relaciones entre el diferencial y otros parámetros conocidos.
- Encontrar nuevas propiedades que relacionen al polinomio diferencial con otros polinomios.

- Estudiar las raíces del polinomio diferencial.

Bounds on the differential of a graph

Ludwin A. Basilio¹, Sergio Bermudo²,
and José M. Sigarreta³

¹Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, Carlos E. Adame 5, Col. La Garita,
Acapulco, Guerrero, México.
ludwin.ali@gmail.com

²Department of Economy, Quantitative Methods and Economic History
Pablo de Olavide University. Carretera de Utrera Km. 1, 41013-Sevilla, Spain
sbernav@upo.es

³Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, Carlos E. Adame 5, Col. La Garita,
Acapulco, Guerrero, México.
josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph of order n and size m . Let $B(D)$ be the set of vertices in $V \setminus D$ that have a neighbor in the set D . The differential of a set D is defined as $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ and the differential of a graph to equal the maximum value of $\partial(D)$ for any subset D of V . In this paper we obtain several tight bounds for the differential of a graph. In particular, we relate the differential of a graph with known parameters of a graph, namely, its order, size, minimum and maximum degree, its girth, its domination number, its 2-domination number, its 2-packing number and its independence number.

Keywords: Differential; domination number; independence number.

AMS Subject Classification numbers: 05C69; 05A20

1 Introduction

As explained in [1] in some details, due to the important problem of determining the best group of people to influence the rest, for instance, in social networks or marketing campaigns, the study of the graph parameter $\partial(G)$, called the differential of G , could be motivated from such scenarios. Let us first clarify this notion by giving precise definitions.

Let $G = (V, E)$ be a graph of order n , for every set $D \subseteq V$ let $B(D)$ be the set of vertices in $V \setminus D$ that have a neighbor in the vertex set D , and let $C(D) = V \setminus (D \cup B(D))$. The *differential of D* is defined as $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ and the *differential of a graph G* , written $\partial(G)$, is equal to $\max\{\partial(D) : D \subseteq V\}$.

Article

β -Differential of a Graph

Ludwin A. Basilio ¹, Sergio Bermudo ², Jesús Leños ¹ and José M. Sigarreta ^{3,*}

¹ Academic Unit of Mathematics, Autonomous University of Zacatecas, Paseo la Bufa, int. Calzada Solidaridad, 98060 Zacatecas, Mexico; ludwin.ali@gmail.com (L.A.B.); jleanos@mate.reduaz.mx (J.L.)

² Department of Economics, Quantitative Methods and Economic History, Pablo de Olavide University, Carretera de Utrera Km. 1, 41013 Sevilla, Spain; sbernav@upo.es

³ Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero, Carlos E. Adame 5, Col. La Garita, 39350 Acapulco, Guerrero, Mexico

* Correspondence: josemariasigarretaalmira@yahoo.es; Tel.: +52-744-481-0216

Received: 12 September 2017; Accepted: 26 September 2017; Published: 30 September 2017

Abstract: Let $G = (V, E)$ be a simple graph with vertex set V and edge set E . Let D be a subset of V , and let $B(D)$ be the set of neighbours of D in $V \setminus D$. The *differential* $\partial(D)$ of D is defined as $|B(D)| - |D|$. The maximum value of $\partial(D)$ taken over all subsets $D \subseteq V$ is the *differential* $\partial(G)$ of G . For $\beta \in (-1, \Delta)$, the β -*differential* $\partial_\beta(G)$ of G is the maximum value of $\{|B(D)| - \beta|D|\} : D \subseteq V$. Motivated by an influential maximization problem, in this paper we study the β -differential of G .

Keywords: differential of a graph; domination number

1. Introduction

Social networks, such as Facebook or Twitter, have served as an important medium for communication and information disseminating. As a result of their massive popularity, social networks now have a wide variety of applications in the viral marketing of products and political campaigns. Motivated by its numerous applications, some authors [1–3] have proposed several influential maximization problems, which share a fundamental algorithmic problem for information diffusion in social networks: the problem of determining the best group of nodes to influence the rest. As it was shown in [4], the study of the differential of a graph G , could be motivated from such scenarios. In this work we generalize the notion of differential of a graph and provide new applications. Let us first give some basic notation and then we motivate such a generalization.

Throughout this paper, $G = (V, E)$ is a simple graph of order $n \geq 3$ with vertex set V and edge set E . Let u, v be distinct vertices of V , and let S be a subset of V . We will write $u \sim v$ whenever u and v are adjacent in G . If S is nonempty, then $N_S(v)$ denotes the set of neighbors that v has in S , i.e., $N_S(v) := \{u \in S : u \sim v\}$; the degree of v in S is denoted by $\delta_S(v) := |N_S(v)|$. As usual, $N(v)$ is the set of neighbors that v has in V , i.e., $N(v) := \{u \in V : u \sim v\}$; and $N[v]$ is the closed neighborhood of v , i.e., $N[v] := N(v) \cup \{v\}$. We denote by $\delta(v) := |N(v)|$ the degree of v in G , and by $\delta(G)$ and $\Delta(G)$ the minimum and the maximum degree of G , respectively. The subgraph of G induced by S will be denoted by $G[S]$, and the complement of S in V by \bar{S} . Then $N_{\bar{S}}(v)$ is the set of neighbors that v has in $\bar{S} = V \setminus S$. We let $N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v)$ and $N[S] := N(S) \cup S$. Finally, we will use $B(S)$ to denote the set of vertices in \bar{S} that have a neighbour in S , and $C(S)$ to denote $\bar{S} \cup B(S)$. Then $\{S, B(S), C(S)\}$ is a partition of V . An *external private neighbor* of $v \in S$ (with respect to S) is a vertex $w \in N(v) \cap \bar{S}$ such that $w \notin N(u)$ for every $u \in S \setminus \{v\}$. The set of all external private neighbors of v is denoted by $\text{epn}[v, S]$.

To motivate the notion of β -differential of a graph, assume for a moment that our graph $G = (V, E)$ represents a map of a country, where V is the set of cities of G and E is the set of roads between cities of G . To avoid weights, we could assume that all the cities of G have the same population and have the

On the Differential Polynomial of a Graph

Ludwin A. BASILIO-HERNÁNDEZ

*Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad
entronque Paseo a la Bufa, 98060 Zacatecas, Zac., México*
E-mail: ludwin.ali@gmail.com

Walter CARBALLOSA

*Department of Mathematics and Statistics, Florida International University, 11200 SW 8th Street,
Miami, Florida 33199*
*Department of Mathematics, Miami Dade College, 300 NE Second Ave., Miami, FL 33132, Miami,
Florida, USA*
E-mail: waltercarb@gmail.com

Jesús LEAÑOS

*Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad
entronque Paseo a la Bufa, 98060 Zacatecas, Zac., México*
E-mail: jesus.leanos@gmail.com

José M. SIGARRETA

*Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Carlos E. Adame No.54 Col. Garita,
39650 Acapulco Gro., México*
E-mail: josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Abstract We introduce the differential polynomial of a graph. The differential polynomial of a graph G of order n is the polynomial $B(G; x) := \sum_{k=-n}^{\partial(G)} B_k(G) x^{n+k}$, where $B_k(G)$ denotes the number of vertex subsets of G with differential equal to k . We state some properties of $B(G; x)$ and its coefficients. In particular, we compute the differential polynomial for complete, empty, path, cycle, wheel and double star graphs. We also establish some relationships between $B(G; x)$ and the differential polynomials of graphs which result by removing, adding, and subdividing an edge from G .

Keywords Graph polynomial, differential of a graph

MR(2010) Subject Classification 05C31, 05C69

1 Introduction

Graph polynomials have been widely study since Birkhoff introduced the chromatic polynomial (1912) in an attempt to prove the four color theorem [14]. In 1932 the chromatic polynomial

Received June 23, 2017, revised April 11, 2018, accepted August 3, 2018

The third was partially supported by PFCE-UAZ 2018-2019 grant. The last author was supported in part by two grants from Ministerio de Economía y Competitividad, Agencia Estatal de Investigación (AEI) and Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) (MTM2016-78227-C2-1-P and MTM2017-90584-REDT), Spain

The Differential on Graph Operator $Q(G)$

Ludwin A. Basilio ¹, Jair Castro Simon ², Jesús Leaños ^{1,*} and Omar Rosario Cayetano ²

¹ Academic Unit of Mathematics, Autonomous University of Zacatecas, Paseo la Bufa, int. Calzada Solidaridad, Zacatecas 98060, Mexico; ludwin.ali@gmail.com

² Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero, Chilpancingo 39650, Mexico; castrosimonjair@gmail.com (J.C.S.); omarrosarioc@gmail.com (O.R.C.)

* Correspondence: jleanos@matematicas.reduaz.mx

Received: 23 March 2020; Accepted: 1 May 2020; Published: 6 May 2020



Abstract: If $G = (V(G), E(G))$ is a simple connected graph with the vertex set $V(G)$ and the edge set $E(G)$, S is a subset of $V(G)$, and let $B(S)$ be the set of neighbors of S in $V(G) \setminus S$. Then, the differential of S $\partial(S)$ is defined as $|B(S)| - |S|$. The differential of G , denoted by $\partial(G)$, is the maximum value of $\partial(S)$ for all subsets $S \subseteq V(G)$. The graph operator $Q(G)$ is defined as the graph that results by subdividing every edge of G once and joining pairs of these new vertices iff their corresponding edges are incident in G . In this paper, we study the relations between $\partial(G)$ and $\partial(Q(G))$. Besides, we exhibit some results relating the differential $\partial(G)$ and well-known graph invariants, such as the domination number, the independence number, and the vertex-cover number.

Keywords: differential of a graph; operator graphs; differential

1. Introduction

Some social networks arising from technologies such as Whatsapp, Facebook, Twitter, etc., have served as useful tools for communication and dissemination of information. Due to the high popularity of these technologies, they now have a wide variety of applications in the marketing of many products. With these facts in mind, several authors [1,2] have established some influential maximization problems, which share an algorithmic problem for information diffusion in social networks: the problem of determining the best set of nodes to influence the rest. For example, in [1], the authors attacked this problem by means of submodular functions and provided an algorithm that produced a solution that was provably within 63% of optimal for certain instances. Two years later, the same group of researchers [2] developed a more general framework and showed that the mentioned maximization problem can be approximated in a more general model known as the decreasing cascade model. In [3], it was explained how the differential of a graph G could be motivated by these scenarios

The study of the differential together with several other variants started in [4]. In particular, in [4], some bounds were established for $\partial(G)$. In that paper, the differential of G was related to the following maximization problem:

“You are allowed to buy as many tokens as you like, say k tokens, at cost of \$1 each. You then place the tokens on some subset of k vertices of G . For each vertex of G which has no token on it, but is adjacent to a vertex with a token on it, you receive \$1. Your objective is to maximize your profit, that is, the total value received minus the cost of the tokens bought.”

The differential $\partial(G)$ of a graph was also analyzed in [3,5–13]. In [10], it was established that $\partial(G) + \gamma_R(G) = n$, where n denotes the order of G and $\gamma_R(G)$ denotes the Roman domination number of G . These graph parameters lead to two natural algorithmic decision problems:

- DIF: If G is a graph and k is an integer, decide if $\partial(G) \geq k$;

The differential on Graph Operator $R(G)$

Ludwin A. Basilio¹, Jesús Leños¹, Omar Rosario²,
and José M. Sigarreta²

¹Academic Unit of Mathematics, Autonomous University of Zacatecas. Paseo la Bufa, int. Calzada Solidaridad, 98060 Zacatecas, Zacatecas, Mexico

²Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero. Carlos E. Adame 5, Col. La Garita, 39650, Acapulco, Guerrero, Mexico

e-mail: ludwin.ali@gmail.com; jesus.leanos@gmail.com; omarrosarioc@gmail.com;
josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a simple graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Let S be a subset of $V(G)$, and let $B(S)$ be the set of neighbours of S in $V(G) \setminus S$. The differential $\partial(S)$ of S is the number $|B(S)| - |S|$. The maximum value of $\partial(S)$ taken over all subsets $S \subseteq V(G)$ is the differential $\partial(G)$ of G . The graph $R(G)$ is defined as the graph obtained from G by adding a new vertex v_e for each $e \in E(G)$, and by joining v_e to the end vertices of e . In this paper we study the relationship between $\partial(G)$ and $\partial(R(G))$, and give tight asymptotic bounds for $\partial(R(G))$. We also exhibit some relationships between certain vertex sets of G and $R(G)$ which involve well known graph theoretical parameters.

Keywords: Differential of a graph; Graph operators; Dominating set.

AMS Subject Classification numbers: 05C69; 05C76

1 Introduction

Social networks, such as Facebook or Twitter, have served as a powerful tool for communication and information disseminating. As a consequence of their massive popularity, social networks now have a wide variety of applications in the viral marketing of products and in political campaigns. Motivated by their numerous applications, some authors [19, 18] have proposed several influential maximization problems, which share a fundamental algorithmic problem for information diffusion in social networks: the problem of determining the best group of nodes to influence the rest. As it was showed in [6], the study of the differential $\partial(G)$ of a graph G could be motivated by such scenarios. Before moving on any further, let us introduce the basic definitions and notation that will be used in this paper.

Throughout this paper, $G = (V(G), E(G))$ is a simple graph of order $n \geq 3$ with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. For the rest of this section, let us assume that $v \in V(G)$ and that $S \subseteq V(G)$. The set of all vertices of G that are adjacent to $v \in V(G)$ is the *neighborhood of v* and is denoted by $N_G(v)$. The set $N_G(v) \cup \{v\}$ is the *closed neighborhood of v* and is denoted by $N_G[v]$. We define $N_G(S) := \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ and $N_G[S] := N_G(S) \cup S$. We shall use \bar{S} to denote $V(G) \setminus S$, and $N_{\bar{S}}(v)$

Bibliografía

- [1] Akbari, S., Alikhani, S. and Peng, Y. H. Characterization of graphs using domination polynomials. *European Journal of Combinatorics*. **31** (7), 1714-1724 (2010).
- [2] Armada, C. L. and Canoy Jr, S. R. A-Differential of Graphs. *International Journal of Mathematical Analysis*, **9** (44), 2171-2180 (2015).
- [3] Arocha, J. L. and Llano, B. Mean value for the matching and dominating polynomial, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **20** (1), 57-69 (2000).
- [4] Basilio, L. A. (2016). El polinomio diferencial en gráficas [Tesis de maestría no publicada]. Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.
- [5] Basilio, L. A., Bermudo, S., Leños, J. and Sigarreta, J. M. β -Differential of a Graph. *Symmetry*, **9** (10), 205 (2017).
- [6] Basilio, L. A., Bermudo, S. and Sigarreta, J. M. Bounds on the differential of a graph. *Utilitas Mathematica*, **103**, 319-334 (2017).
- [7] Basilio-Hernández, L. A., Carballosa, W., Leños, J. and Sigarreta, J. M. On the Differential Polynomial of a Graph. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **35**(3), 338-354, (2019).
- [8] Basilio, L. A., Leños, J., Cayetano, O. R. and Sigarreta, J. M. The differential on graph operator $R(G)$, *Utilitas Mathematica*, to appear.
- [9] Basilio, L. A., Simon, J. C., Leños, J. and Cayetano, O. R. The Differential on Graph Operator $Q(G)$. *Symmetry*, **12**(5), 751 (2020).

- [10] Beck, M., Blado, D., Crawford, J., Jean-Louis, T. and Young, M. On Weak Chromatic Polynomials of Mixed Graphs, *Graphs and Combinatorics* **31** (1), 91-98 (2015).
- [11] Berge, C. The theory of graphs and its applications, Methuen and Co. Ltd., London (1962).
- [12] Bermudo, S. On the Differential and Roman domination number of a graph with minimum degree two, *Discrete Applied Mathematics*, **232**, 64-72 (2017).
- [13] Bermudo, S., De la Torre, L., Martín-Caraballo, A. M. and Sigarreta, J. M. The differential of the strong product graphs, *International Journal of Computer Mathematics*, **92**(6), 1124-1134 (2015).
- [14] Bermudo, S. and Fernau, H. Lower bound on the differential of a graph, *Discrete Mathematics*, **312**, 3236-3250 (2012).
- [15] Bermudo, S. and Fernau, H. Computing the differential of a graph: hardness, approximability and exact algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 165, 69-82 (2014).
- [16] Bermudo, S., Fernau, H. and Sigarreta, J. M. The differential and the roman domination number of a graph, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **8** (1), 155-171 (2014).
- [17] Bermudo, S., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M. On the differential in graphs, *Utilitas Mathematica*, **97**, 257-270 (2015).
- [18] Birkhoff, G. D. A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *The Annals of Mathematics*, **2** (14), 42-46 (1912).
- [19] Brown, J.I., Dilcher, K. and Nowakowski, R.J. Roots of Independence Polynomials of Well Covered Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **11** (3), 197-210 (2000).
- [20] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta and J. M., Torres-Nuñez, Y. Alliance polynomial of regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **225**, 22-32 (2017).
- [21] Carballosa, W., Hernández-Gómez, J. C., Rosario, O. and Torres-Nuñez, Y. Computing the strong alliance polynomial of a graph, *Investigacion Operacional*, **37** (2), 115-123 (2016).

- [22] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Torres-Nuñez, Y. Computing the alliance polynomial of a graph, *Ars Combinatoria*, **135**, 163-185 (2017).
- [23] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Torres-Nuñez, Y. Distinctive power of the alliance polynomial for regular graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. **46**, 313-320 (2014).
- [24] Cockayne, E. J., and Hedetniemi, S. T. Towards a theory of domination in graphs. *Networks*, **7**(3), 247-261 (1977).
- [25] Cvetkovic, D. M., and DM, C. Spectra of graphs. Theory and application (1980).
- [26] Dohmen, K., Pönitz, A. and Tittmann, P. A new two-variable generalization of the chromatic polynomial, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **6**, 69-90 (2003).
- [27] Farrell, E.J. An introduction to matching polynomials, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **27**, 75-86 (1979).
- [28] Favaron, O., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T. and Rall, D. F. On k -dependent domination, *Discrete mathematics*, 249 (1-3), 83-94.
- [29] Domke, G.S.; Dumbar, J.E. and Markus, L.R. Gallai-type theorems and domination parameters. *Discret. Math.* **1997**, 167-168, 237-248,
- [30] Goddard, W. and Henning, M. A. Generalised domination and independence in graphs, *Congressus Numerantium*, **123**, 161-171 (1997).
- [31] Godsil, C.D. and Gutman, I. On the theory of the matching polynomial. *Journal of Graph Theory*, **5**, 137-144 (1981).
- [32] Gutman, I. and Harary, F. Generalizations of the matching polynomial, *Utilitas Mathematica*, **24**, 97-106 (1983).
- [33] T. W. Haynes. *Domination in Graphs: Volume 2: Advanced Topics*, Routledge, (2017).
- [34] T. W. Haynes, S. Hedetniemi and P. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*, CRC press, (2013).

- [35] Hernández-Gómez, J. C. Differential and operations on graphs. *International Journal of Mathematical Analysis*, **9**, 341-349 (2015).
- [36] Hoede, C. and Li, X. Clique polynomials and independent set polynomials of graphs. *Discrete Mathematics*, **125**, 219-228 (1994).
- [37] A. Kaneko, A. Kelmans and T. Nishimura. *On packing 3-vertex paths in a graph*, J. Graph Theory **36** (4), 175-197 (2001).
- [38] Kotek, T. and Makowsky, J. A. Recurrence relations for graph polynomials on bi-iterative families of graphs, *European Journal of Combinatorics*, **41**, 47-67 (2014).
- [39] Makowsky, J. A., Ravve, E. V. and Blanchard, N. K. On the location of roots of graph polynomials, *European Journal of Combinatorics*. **41**, 1-19 (2014).
- [40] Mashburn, J. L., Haynes, T. W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J. Differentials in graphs, *Utilitas Mathematica*, **69**, 43-54 (2006).
- [41] de Mier, A. and Noy, M. On graphs determined by their Tutte polynomials, *Graphs and Combinatorics*, **20** (1), 105-119 (2004).
- [42] Noy, M. On graphs determined by polynomial invariants, *Theoretical Computer Science*, **307** (2), 365-384 (2003).
- [43] Ore, O. Theory of graphs (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 38). Amer. Math. Soc., Providence, 49-53 (1962).
- [44] Pushpam, P. R. L. and Yokesh, D. A-differentials and total domination in graphs, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **16** (1), 31-43 (2013).
- [45] Read, R. C. An introduction to chromatic polynomials, *Journal of Combinatorial Theory*, **4** (1), 52-71 (1968).
- [46] Sigarreta, J. M. Differential in Cartesian Product Graphs, *Ars Combinatoria*, **126**, 259-267 (2016).
- [47] Slater, P. J. Enclaveless sets and MK-systems, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **82** (3), 197-202 (1977).

- [48] Tittmann, P., Averbouch, I. and Makowsky, J. A. The enumeration of vertex induced subgraphs with respect to the number of components, *European Journal of Combinatorics*, **32** (7), 954-974 (2011).
- [49] Tutte, W. T. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.*, **6**, 80-91 (1954).
- [50] Zhang, C. Q. Finding critical independent sets and critical vertex subsets are polynomial problems, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **3** (3), 431-438 (1990).