Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"
Unidad Académica de Matemáticas

ALGUNAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS CON SUCESIONES DE FIBONACCI, DE PADOVAN Y DE POTENCIAS DE DOS

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS BÁSICAS

(Orientación en Matemáticas)

PRESENTA:

Ana Cecilia García Lomelí

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Santos Hernández Hernández

Zacatecas, Zac., 15 de Febrero de 2019

Prefacio

El objetivo de esta tesis es resolver ecuaciones diofánticas mediante el método clásico de formas lineales en logaritmos, el método de reducción de Baker-Davenport y fracciones continuas. Así, este trabajo se dividió en dos partes y un apéndice.

La primera parte, consiste del capítulo 1. En éste establecemos el lenguaje, el método clásico mencionado en el párrafo anterior y las herramientas necesarias para resolver nuestras ecuaciones diofánticas.

La segunda parte, está conformada por los capítulos 2 y 3. En el capítulo 2 se plantean ecuaciones diofánticas que son variaciones de la ecuación de I. Stewart. De manera algo más precisa, primero buscamos los números de Fibonacci que se pueden escribir como suma de dos números de Padovan. Luego, sustituimos la sucesión de Fibonacci por potencias de dos, es decir, buscamos todas las potencias de dos que son números de Padovan y todas las potencias de dos que se pueden escribir como suma de dos números de Padovan. En el capítulo 3, se resuelven dos casos del problema de tipo Pillai: uno con la sucesión de Padovan y las potencias de dos y el otro con las sucesiones de Fibonacci y de Padovan. Una descripción más detallada de estos problemas se desarrolla en la introducción.

Finalmente, en el apéndice, presentamos un programa en *Mathematica* que calcula las soluciones de una de nuestras ecuaciones diofánticas. Los demás son análogos.

En cada capítulo de esta tesis los lemas y teoremas están enumerados de manera consecutiva. En cambio, la numeración de las ecuaciones es consecutiva en toda la tesis.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Autónoma de Zacatecas, institución que a través de la Unidad Académica de Matemáticas me brindó la oportunidad de realizar mis estudios de Doctorado. Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me brindó en el transcurso de mis estudios a través de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC), en particular al programa de Doctorado en Ciencias Básicas con número PNPC 3911, mediante la beca nacional número 252484. A la Fundación Sofia Kovalevskaia de la Sociedad Matemática Mexicana por darme su valioso apoyo para la conclusión de este trabajo.

A mi asesor, le agradezco todas y cada una de sus enseñanzas. La paciencia, ayuda y apoyo que siempre me ha brindado. Gracias MAESTRO.

Agradezco a los Profesores Homero R. Gallegos Ruíz, Luis Manuel Rivera Martínez, Martha Rzedowski Calderón y Gabriel Villa Salvador por aceptar formar parte del cómite de sinodales. Sus valiosos comentarios, sugerencias y correciones a mi tesis, hicieron de ésta un trabajo mucho mejor. Muchas gracias.

Le agradezco a Dios por haberme guiado hasta este camino.

A mi madre y hermana por el apoyo incondicional que siempre me brindan. De manera muy especial a mi hijo, por ser paciente y caminar conmigo. Agradezco también las palabras de mis tías y de mis amigas Brenda, Cristy y Sandy.

Resumen

Sean $(F_m)_{m\geqslant 0}$ y $(P_n)_{n\geqslant 0}$ las sucesiones de Fibonacci y de Padovan dadas por las condiciones iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $P_0 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$ y las fórmulas de recurrencia $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$ para todo $m, n \geqslant 0$, respectivamente. En esta tesis estudiamos y resolvemos completamente las ecuaciones diofánticas:

$$P_n + P_{n_1} = F_m; \qquad P_n = 2^a; \qquad P_n + P_{n_1} = 2^a;$$

$$P_n - 2^m = P_{n_1} - 2^{m_1} \qquad \text{y} \qquad P_n - F_m = P_{n_1} - F_{m_1},$$

en enteros no negativos $(n, n_1, m), (n, a), (n, n_1, a)$, y (n, m, n_1, m_1), respectivamente. Para resolver estas ecuaciones utilizamos el método clásico de formas lineales en logaritmos, una versión del método de reducción de Baker-Davenport y fracciones continuas.

Abstract

Let $(F_m)_{m\geqslant 0}$ and $(P_n)_{n\geqslant 0}$ be the Fibonacci and the Padovan sequences given by the initial conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $P_0 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$ and the recurrence formulas $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$ for all $m, n \geqslant 0$, respectively. In this tesis we study and completely solve the Diophantine equations

$$P_n + P_{n_1} = F_m; \qquad P_n = 2^a; \qquad P_n + P_{n_1} = 2^a;$$

$$P_n - 2^m = P_{n_1} - 2^{m_1} \qquad \text{and} \qquad P_n - F_m = P_{n_1} - F_{m_1},$$

in non-negative integers $(n, n_1, m), (n, a), (n, n_1, a)$, and (n, m, n_1, m_1), respectively. To solve these equations we use the classic method of linear forms in logarithms, a version of the Baker-Davenport reduction method and continued fractions.

Índice general

Introducción

Probablemente, una de las sucesiones más conocidas sea la sucesión de *Fibonacci* $(F_m)_{m\geqslant 0}$ que se define por las condiciones iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y la fórmula de recurrencia

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \quad \text{para todo} \quad m \geqslant 0.$$

Sus primeros términos son:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

También es muy conocida la fórmula de Binet

$$F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}} \quad \text{para todo} \quad m \geqslant 0,$$

donde α, β son las raíces de su polinomio característico $X^2 - X - 1$. El número real $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es popularmente conocido como el *número de oro*.

Otra sucesión, probablemente menos conocida, es la sucesión de *Padovan* $(P_n)_{n\geqslant 0}$. Ésta, es una sucesión ternaria que está dada por las condiciones iniciales $P_0 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$ y la fórmula de recurrencia

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 0.$$

Sus primeros términos son:

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, \ldots$$

La fórmula de Binet para esta sucesión es:

$$P_n = c_1\gamma^n + c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 0,$$

donde γ, δ, $\overline{\delta}$ son las raíces de su polinomio característico $X^3 - X - 1$ y c_1, c_2, c_3 están dados en términos de γ, δ, $\overline{\delta}$ (ver capítulo 1). El arquitecto H. Van der Laan descubrió que γ tiene una utilidad de índole similar al número de oro dentro de la arquitectura y le llamo *número de plástico*. El también arquitecto R. Padovan realizó traducciones de diversos trabajos de H. Van der Laan donde hablaba sobre el número de plástico. De hecho, publicó algunos trabajos con este número. La sucesión de Padovan fue introducida por I. Stewart en [31].

Las propiedades aritméticas de α y γ son muy interesantes. Por ejemplo, ambos son números de *Pisot*, es decir, son enteros algebraicos reales > 1 cuyos conjugados tienen valor absoluto < 1. De hecho, en [29], C. L. Siegel demuestra que γ es el número de Pisot más pequeño. En [1] J. Aarts, R. Fokkink y G. Kruijtzer demuestran que α y γ son los únicos números reales $y > 1$ para los que existen enteros positivos k y l tales que

$$y + 1 = y^k \quad \text{y} \quad y - 1 = y^{-l}.$$

Para α se tiene $k = 2$, $l = 1$ y para γ, $k = 3$, $l = 4$.

Algunos problemas aritméticos con la sucesión de Padovan han sido estudiados. Por ejemplo, en [31], I. Stewart observa que 3, 5 y 21 son números de Fibonacci y de Padovan y se preguntó si habría otras coincidencias. Es decir, se pregunta por las soluciones de la ecuación diofántica

$$P_n = F_m \tag{\textbf{1}}$$

en enteros positivos n, m. Este problema fue resuelto por B. M. M. De Weger en [14], quien en particular probó que los únicos enteros que son números de Fibonacci y de Padovan al mismo tiempo son 0, 1, 2, 3, 5, 21. De hecho, demostró que la distancia $|P_n - F_m| \sim \gamma^{\text{máx}\{n,m\}/2}$, es decir, crece exponencialmente con n. En este trabajo planteamos la ecuación diofántica

$$P_n + P_{n_1} = F_m \tag{\textbf{2}}$$

en enteros no negativos (n, n_1, m), que es una versión ligeramente más general que (**1**). Notemos que el caso particular $n_1 = 0$ es la ecuación (**1**) y por tanto se obtiene también una solución al problema de Stewart. En este mismo sentido, planteamos las ecuaciones (**1**) y (**2**) sustituyendo la sucesión de Fibonacci por las potencias de dos, es decir, estudiamos y resolvemos completamente las ecuaciones diofánticas

$$P_n = 2^a \quad \text{y} \quad P_n + P_{n_1} = 2^a \tag{\textbf{3}}$$

en enteros no negativos n, n_1 y a. Cabe señalar que ecuaciones de este estilo han sido estudiadas. En efecto, J. J. Bravo y F. Luca en [7] resuelven el problema de escribir potencias de dos como suma de dos números de Fibonacci. En [5] y [6] ellos junto con C. A. Gómez resuelven el problema similar con números

k-Fibonacci y números de Lucas, respectivamente. También, el problema de escribir potencias de dos como suma de tres números de Fibonacci y tres números de Pell ha sido estudiado (ver E. F. Bravo y J. J. Bravo [3] y J. J. Bravo, B. Faye y F. Luca [4]). La solución de las ecuaciones (**2**) y (**3**) se exponen en el capítulo 2 de este trabajo y forman parte de los artículos [18] y [16] escritos en colaboración con F. Luca y mi asesor, S. Hernández Hernández, y con mi asesor, S. Hernández Hernández, respectivamente.

Sean ahora a, b dos enteros positivos fijos y consideremos la ecuación diofántica

$$a^n - b^m = a^{n_1} - b^{m_1} \tag{\textbf{4}}$$

en enteros positivos (n, m, n_1, m_1) con $(n, m) \neq (n_1, m_1)$. En particular, se buscan los números enteros que se pueden escribir como una diferencia de una potencia de a y una potencia de b en al menos dos formas distintas. En [23], A. Herschfeld demostró que en el caso $(a, b) = (2, 3)$ la ecuación (**4**) tiene una cantidad finita de soluciones. En [25], S. S. Pillai extendió el resultado de Herschfeld al caso en el que a, b son números enteros primos relativos mayores o iguales a 2. En ambos casos, el resultado es inefectivo. En [26], Pillai conjetura que en el caso $(a, b) = (2, 3)$, $(3, 2, 1, 1), (5, 3, 3, 1)$ y $(8, 5, 4, 1)$ son todas las soluciones de la ecuación (**4**). Esta conjetura permaneció abierta durante aproximadamente 37 años y fue confirmada por R. J. Stroeker y R. Tijdeman en [32] utilizando la teoría de Baker sobre formas lineales en logaritmos de números algebraicos.

El problema anterior, conocido ahora como *problema de Pillai*, se planteó en el contexto de sucesiones lineales recurrentes. Es decir, sean $\mathbf{U} := (U_n)_{n\geqslant 0}$ y $\mathbf{V} := (V_m)_{m\geqslant 0}$ dos sucesiones lineales recurrentes de enteros y considere la ecuación diofántica

$$U_n - V_m = U_{n_1} - V_{m_1} \tag{\textbf{5}}$$

en enteros positivos (n, m, n_1, m_1) con $(n, m) \neq (n_1, m_1)$. Esta versión se inició por M. Ddamulira, F. Luca y M. Rakotomalala en [13] donde ellos consideran a $\mathbf{U}$ siendo la sucesión de Fibonacci y $\mathbf{V}$ siendo las potencias de 2. Muchos otros casos han sido estudiados, ver por ejemplo J. J. Bravo, F. Luca y K. Yazán [8], K. C. Chim, I. Pink y V. Ziegler [10], M. Ddamulira, C. A. Gómez y F. Luca [12], S. Hernández Hernández, F. Luca y L. M. Rivera [22]. En [11] K. C. Chim, I. Pink y V. Ziegler demuestran que, bajo algunas condiciones naturales sobre $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, la ecuación (**5**) tiene una cantidad finita de soluciones y todas ellas son efectivamente calculables. Inspirados por estos resultados, planteamos otros casos particulares de la ecuación (**5**). Más precisamente, estudiamos y resolvemos completamenta las ecuaciones diofánticas

$$P_n - 2^m = P_{n_1} - 2^{m_1} \quad \text{y} \quad P_n - F_m = P_{n_1} - F_{m_1},$$

en enteros no negativos (n, m, n_1, m_1) con $(n, m) \neq (n_1, m_1)$. Las soluciones de estas ecuaciones se exponen en el capítulo 3 de este trabajo y forman parte de los artículos [17] y [19] escritos en colaboración con mi asesor, S. Hernández Hernández y con F. Luca y mi asesor, S. Hernández Hernández, respectivamente.

Para la solución a los problemas planteados se utiliza el método clásico con cotas inferiores de formas lineales en logaritmos, el método de reducción de Baker-Davenport y las fracciones continuas. Éste, consiste en transformar la ecuación diofántica en una forma lineal en logaritmos que luego se acota inferior y superiormente. En general, la cota superior es sencilla de obtener, mientras que para las cotas inferiores necesitamos la teoría de formas lineales en logaritmos de números algebraicos de A. Baker. Nosotros utilizamos la cota inferior dada por E. M. Matveev. Combinando estas desigualdades obtenemos una cota absoluta al máximo de los parámetros involucrados. Esta cota aunque explícita es en general demasiado grande y prácticamente inútil. Sin embargo, A. Baker y A. Davenport desarrollan un método con el cual, tal cota gigantesca se puede reducir. La cota que se obtiene con este método de reducción ya es manejable mediante la computadora. Unos programas sencillos terminan el análisis de la búsqueda de soluciones. En el capítulo 1 se presentan todas estas herramientas en las versiones de nuestras necesidades.

Capítulo 1

Teoría General

En este capítulo se reúnen las herramientas necesarias para demostrar los resultados de esta tesis. Primero presentamos las sucesiones de Fibonacci y de Padovan. En particular, demostramos la fórmula de Binet para los términos de la sucesión de Padovan, así como también algunas desigualdades básicas para los mismos. Para el caso de la sucesión de Fibonacci éstas son muy conocidas. También se establece la cota inferior para una forma lineal en logaritmos dada por E. M. Matveev. Finalmente, presentamos una versión del método de reducción de Baker-Davenport y los resultados de fracciones continuas que se necesitan.

1.1. Las sucesiones de Fibonacci y de Padovan

Recordemos que la *sucesión de Fibonacci* $(F_m)_{m\geqslant 0}$, se define mediante las condiciones iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y la fórmula de recurrencia

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \quad \text{para todo} \quad m \geqslant 0,$$

y la *sucesión de Padovan* $(P_n)_{n\geqslant 0}$, nombrada así en honor al arquitecto Richard Padovan, mediante las condiciones iniciales $P_0 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$, y la fórmula de recurrencia

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 0.$$

Ésta es la sucesión número A000931 en *The On-Line Encyclopedia of Integers Sequences* (ver N. J. A. Sloane [30]). Parece ser que es en [31] donde I. Stewart define $(P_n)_{n\geqslant 0}$ por primera vez con las condiciones iniciales $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ y le da este nombre.

Iniciemos con algunas propiedades básicas de nuestras sucesiones. Dado un número complejo z, mediante $\overline{z}$ denotamos su conjugado complejo. Sea $\omega \neq 1$

una raíz cúbica de 1. Definamos

$$\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

y

$$\gamma := \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}, \qquad \delta := \omega\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \overline{\omega}\sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}.$$

Es claro que α, β son las raíces del polinomio $\mathbb{Q}$-irreducible $X^2 - X - 1$ y $\gamma, \delta, \overline{\delta}$ lo son del polinomio $\mathbb{Q}$-irreducible $X^3 - X - 1$. Se puede probar que las fórmulas de Binet

$$F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad P_n = c_1\gamma^n + c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n, \tag{\textbf{6}}$$

se cumplen para todo $m, n \geqslant 0$, donde

$$c_1 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2\gamma+3}, \quad c_2 = \frac{\delta(\delta+1)}{2\delta+3} \quad \text{y} \quad c_3 = \overline{c_2}.$$

Dado que la fórmula de Binet para la sucesión de Fibonacci es muy conocida, daremos la demostración de la fórmula de Binet para la sucesión de Padovan. Considere la sucesión $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ definida mediante $P'_n = c_1\gamma^n + c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n$. Para $n = 0$, $P'_0 = c_1 + c_2 + c_3$. Notemos que

$$c_2 + c_3 = \frac{4\delta\overline{\delta} + 3(\delta + \overline{\delta}) + 2\delta\overline{\delta}(\delta + \overline{\delta}) + 3(\delta^2 + \overline{\delta}^2)}{4\delta\overline{\delta} + 6(\delta + \overline{\delta}) + 9}.$$

Dado que $\gamma, \delta, \overline{\delta}$ son las raíces del polinomio $X^3 - X - 1$ tenemos que $\gamma + \delta + \overline{\delta} = 0$ y $\gamma\delta\overline{\delta} = 1$. De estas relaciones se tiene que

$$c_2 + c_3 = \frac{3\gamma^3 - 3\gamma^2 - 2\gamma - 2}{-6\gamma^2 + 9\gamma + 4}.$$

Ahora, del hecho que $\gamma^3 - \gamma - 1 = 0$, concluimos que

$$c_1 + c_2 + c_3 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2\gamma+3} + \frac{-3\gamma^2 + \gamma + 1}{-6\gamma^2 + 9\gamma + 4} = \frac{6\gamma^3 - 6\gamma - 6}{(2\gamma+3)(-6\gamma^2 + 9\gamma + 4)} = 0.$$

Así, $P'_0 = 0$. Con cálculos análogos a los anteriores podemos probar que $P'_1 = 1$ y $P'_2 = 1$. Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
P'_{n+1} + P'_n &= (c_1\gamma^{n+1} + c_2\delta^{n+1} + c_3\overline{\delta}^{n+1}) + (c_1\gamma^n + c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n) \\
&= c_1\gamma^n(\gamma+1) + c_2\delta^n(\delta+1) + c_3\overline{\delta}^n(\overline{\delta}+1) \\
&= c_1\gamma^n\gamma^3 + c_2\delta^n\delta^3 + c_3\overline{\delta}^n\overline{\delta}^3 \\
&= P'_{n+3}.
\end{aligned}$$

Así, la sucesión $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ satisface la misma fórmula de recurrencia que la sucesión de Padovan y tiene las mismas condiciones iniciales. Por lo tanto $P_n = P'_n$ para todo $n \geqslant 0$. Las fórmulas en (**6**) también se siguen del teorema general sobre sucesiones lineales recurrentes ya que los polinomios anteriores son los polinomios característicos de la sucesión de Padovan y Fibonacci respectivamente (ver T. N. Shorey y R. Tijdeman [28, capítulo Preliminares, sección C, teorema C.1]). Además, las desigualdades

$$\alpha^{m-2} \leqslant F_m \leqslant \alpha^{m-1} \qquad \text{y} \qquad \gamma^{n-3} \leqslant P_n \leqslant \gamma^{n-1} \tag{7}$$

también se cumplen para todo $m, n \geqslant 1$. Como en el caso anterior, sólo demostraremos la segunda desigualdad en (**7**).

El argumento es mediante inducción. Notemos que $\gamma > 1$. Para $n = 1$ se tiene que $\gamma^{-2} < P_1 = 1 \leqslant \gamma^0$ se satisface. Para $n = 2$ tenemos que $\gamma^{-1} < P_2 = 1 < \gamma$ y para $n = 3$ se cumple que $\gamma^0 \leqslant P_3 = 1 < \gamma^2$. Así, (**7**) se satisface para $n = 1, 2, 3$. Sea ahora $n > 3$ y escribamos $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$. De la hipótesis de inducción se tiene que

$$\gamma^{n-6}(\gamma + 1) = \gamma^{n-5} + \gamma^{n-6} \leqslant P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \leqslant \gamma^{n-3} + \gamma^{n-4} = \gamma^{n-4}(\gamma + 1).$$

Como $\gamma^3 = \gamma + 1$ se sigue (**7**).

Finalmente notemos que

$$\alpha = 1.61803\ldots, \qquad |\beta| = 0.61803\ldots,$$

y

$$\gamma = 1.32471\ldots, \quad |\delta| = 0.86883\ldots, \quad c_1 = 0.54511\ldots, \quad |c_2| = 0.28241\ldots$$

1.2. Formas lineales en logaritmos

Sea α un número algebraico de grado d, sea $a > 0$ el coeficiente principal de su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Z}$ y sean $\alpha = \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(d)}$ sus conjugados. La *altura logarítmica* de α se define como

$$h(\alpha) = \frac{1}{d}\left(\log a + \sum_{i=1}^{d} \log \text{máx}\left\{|\alpha^{(i)}|, 1\right\}\right).$$

En particular, note que si $\alpha = p/q$ es un número racional con $(p, q) = 1$ y $q > 0$ entonces

$$h(\alpha) = \log \text{máx}\{|p|, q\}.$$

En efecto, el polinomio mínimo sobre $\mathbb{Z}$ de α es $qX - p$. Así,

$$h(\alpha) = \log q + \log \max\left\{\frac{|p|}{q}, 1\right\}.$$

Si $|p| < q$ entonces $|p|/q < 1$. Por lo tanto,

$$h(\alpha) = \log q = \log \max\{|p|, q\}.$$

Análogamente, si $|p| > q$ entonces $|p|/q > 1$. Por lo tanto

$$h(\alpha) = \log q + \log \frac{|p|}{q} = \log |p| = \log \max\{|p|, q\}.$$

La altura logarítmica satisface las siguientes propiedades básicas cuyas demostraciones se pueden encontrar en U. Zannier [33, capítulo 3, sección 2, proposición 3.1]. Sean α, β números algebraicos y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

- $h(\alpha + \beta) \leqslant h(\alpha) + h(\beta) + \log(2)$;
- $h(\alpha\beta) \leqslant h(\alpha) + h(\beta)$;
- $h(\alpha^m) = |m| h(\alpha)$.

Ahora, sea $\mathbb{L}$ un campo de números algebraicos real de grado $d_{\mathbb{L}}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{L}$ positivos y $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sea $B \geqslant \max\{|b_1|, \ldots, |b_\ell|\}$ y

$$\Lambda = \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_\ell^{b_\ell} - 1.$$

Sean $A_1, \ldots, A_\ell$ números reales tales que

$$A_i \geqslant \max\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0.16\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell.$$

El siguiente resultado se debe a E. M. Matveev [24] (ver también Y. Bugeaud, M. Mignotte y S. Siksek [9, teorema 9.4]).

Teorema 1.1. *(Matveev) Supongamos que $\Lambda \neq 0$. Entonces*

$$\log |\Lambda| > -1.4 \cdot 30^{\ell+3} \cdot \ell^{4.5} \cdot d_{\mathbb{L}}^2 \cdot (1 + \log d_{\mathbb{L}}) \cdot (1 + \log B) A_1 \cdots A_\ell.$$

1.3. Fracciones continuas

Una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

donde $a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, recibe el nombre de *fracción continua finita* o simplemente *fracción continua*. Denotaremos la expresión anterior mediante $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. El $k-$*ésimo convergente* para $0 \leqslant k \leqslant n$ de $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ se define como $C_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$. Si los $a_i \in \mathbb{Z}$ la fracción continua recibe el nombre de *fracción continua simple*. Estas fracciones son siempre un número racional. De manera recíproca, cada número racional se puede representar como una fracción continua simple a partir del algoritmo de Euclides.

Para cada fracción continua $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ se define

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_0 \cdot a_1 + 1, & q_1 &= a_1, \\ &\vdots & &\vdots \\ p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}, & q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

para todo $2 \leqslant k \leqslant n$. Mediante inducción se puede demostrar que para $k \geqslant 0$,

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{y} \quad q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k, \tag{8}$$

donde $q_{-1} = 0$ y $p_{-1} = 1$ (ver W. M. Schmidt [27, capítulo I, secciones 3 y 4]). Así, si $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}]$ se tiene que

$$\alpha q_n - p_n = C_{n+1} q_n - p_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} q_n - p_n = \frac{-(q_{n+1} p_n - p_{n+1} q_n)}{q_{n+1}}.$$

De las fórmulas para p_{n+1} y q_{n+1}, y de la ecuación anterior obtenemos que

$$\alpha q_n - p_n = \frac{-(a_{n+1} q_n p_n + q_{n-1} p_n - a_{n+1} p_n q_n - p_{n-1} q_n)}{q_{n+1}} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_{n+1}}.$$

Así, de (**8**) llegamos a que:

$$\alpha q_n - p_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}. \tag{9}$$

Ahora, dados $a_0, a_1, \ldots$ una infinidad de números reales con a_i positivos para $i \geqslant 1$, se define

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] := \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Si $\alpha = [a_0, a_1, a_2 \ldots]$ diremos también que es la expansión de α en fracción continua simple. Se tiene el siguiente lema, cuya demostración se puede consultar en W. M. Schmidt [27, capítulo I, sección 4].

Lema 1.2. *Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots$ números enteros, tales que $a_i \geqslant 1$ para todo $i \geqslant 1$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

existe y es irracional. Recíprocamente, si α es irracional existen números enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ únicos como antes tales que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Así, si α es un número irracional podemos escribir $\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ como en el lema anterior, donde $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$. De la ecuación (**9**) aplicada a este caso tenemos

$$|\alpha q_n - p_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Del hecho que $a_1, a_2, \ldots$ son números enteros $\geqslant 1$ tenemos que $\alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ y $q_{n-1} < q_n$. De la igualdad anterior se deduce

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)}. \tag{\textbf{10}}$$

Ahora enunciamos dos teoremas sobre convergentes que utilizamos en este trabajo. Sus demostraciones se pueden encontran en G. H. Hardy y E. M. Wright [21, capítulo X, sección 15].

Teorema 1.3. *(Legendre) Sean α un número irracional y p, q enteros con $q > 0$ tales que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Entonces p/q es un convergente de α.

Teorema 1.4. *Sea α un número irracional. Sean $k \geqslant 1$, $0 < q \leqslant q_k$ y $p/q \neq p_k/q_k$. Entonces*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|.$$

Sea x un número real. Definimos $\|x\|$ como la distancia de x al entero más cercano. Si p_k/q_k es un convergente de α entonces

$$\|\alpha q_k\| = |p_k - \alpha q_k|.$$

En efecto, sea $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\|\alpha q_k\| = |p - \alpha q_k|$. Si $p \neq p_k$, en particular se tiene que $p/q_k \neq p_k/q_k$. Del teorema 1.4 se obtiene que $|\alpha q_k - p| > |\alpha q_k - p_k|$, que contradice la hipótesis. Por lo tanto $p = p_k$.

1.4. Método de reducción

Aquí presentamos una versión del método de reducción de Baker-Davenport basado en el lema de A. Baker y H. Davenport [2]. En este trabajo se usa la dada por J. J. Bravo, C. A. Gómez y F. Luca [5, lema 1] y se reproduce su demostración.

Lema 1.5. *Sea M un entero positivo. Sean $\tau, \mu, A > 0, B > 1$ números reales dados. Suponga que p/q es un convergente de τ tal que $q > 6M$ y $\varepsilon := \|\mu q\| - M\|\tau q\| > 0$. Entonces no existe solución a la desigualdad*

$$0 < |n\tau - m + \mu| < \frac{A}{B^w} \tag{\textbf{11}}$$

en enteros positivos n, m y w que satisfagan

$$n \leqslant M \quad y \quad w \geqslant \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log(B)}.$$

Demostración. Supongamos que $0 < n \leqslant M$. Dado que p/q es un convergente de τ tenemos que $\|\tau q\| = |p - \tau q|$ como se vio al final de la sección anterior. Entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \|\mu q\| - M\|\tau q\| &\leqslant \|\mu q\| - n|p - \tau q| \\
&\leqslant |\mu q - (qm - np)| - n|p - \tau q| \\
&\leqslant |\mu q - (qm - np) - n(p - \tau q)| = q|n\tau - m + \mu| \\
&< qAB^{-w},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (**11**). Por lo tanto, como $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$w < \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log B}$$

y se sigue que n, m, w no es una solución de (**11**). $\square$

El lema anterior es una ligera variación de el dado por A. Dujella, A. Pethő [15]. Para finalizar este capítulo, presentamos los siguientes lemas que son muy útiles para obtener cotas absolutas, además reproducimos sus demostraciones. Éstos son los lemas 6 y 7 en S. Guzmán Sánchez y F. Luca [20].

Lema 1.6. *Sea $T > 3$ y $T > x/\log x$. Entonces*

$$x < 2T \log T.$$

Demostración. Supongamos que $x \geqslant 2T \log T$. Entonces $x > 6$. Dado que la aplicación $f(x) = x/\log x$ es creciente para $x > e$, tenemos en particular que

$$\frac{x}{\log x} \geqslant \frac{2T \log T}{\log(2T \log T)}.$$

Además $T > x/\log x$. Así,

$$T \log(2T \log T) > 2T \log T.$$

Entonces, cancelando el factor T y exponenciando obtenemos que

$$2T \log T > T^2.$$

Cancelando nuevamente un factor T, llegamos a que $2 \log T > T$, esto es una contradicción, pues $T > 3$. Por lo tanto $x < 2T \log T$. □

Lema 1.7. *Sean $m \geqslant 1$, $T > (4m^2)^m$ y $T > x/(\log x)^m$. Entonces*

$$x < 2^m T (\log T)^m.$$

Demostración. El caso $m = 1$ se obtiene del lema anterior. Así, suponemos que $m \geqslant 2$ y $x \geqslant 2^m T(\log T)^m$. Dado que $f(x) = x/(\log x)^m$ es creciente para $x > e^m$, tenemos que

$$\frac{x}{(\log x)^m} \geqslant \frac{2^m T(\log T)^m}{(\log(2^m T(\log T)^m))^m}.$$

Así,

$$T(\log(2^m T(\log T)^m))^m > 2^m T(\log T)^m.$$

Cancelando un factor T, sacando raíz $m-$ésima y exponenciando llegamos a la desigualdad $2^m T(\log T)^m > T^2$. Nuevamente al cancelar un factor T y sacando raíz $m-$ésima llegamos a que

$$2 \log T > T^{1/m}.$$

Sea $Y = T^{1/m}$. Entonces la desigualdad anterior es equivalente a

$$Y < (2m)\log Y.$$

Note que $2m \geqslant 4 > 3$. Entonces

$$Y < 2(2m)\log(2m) = 4m\log(2m).$$

Así, $T < (4m\log(2m))^m$. Dado que $\log(2m) < m$ para todo $m \geqslant 1$ deducimos que $T < (4m^2)^m$, que es una contradicción. Por lo tanto $x < 2^m T(\log T)^m$. $\square$

Capítulo 2

Números de Fibonacci y potencias de dos que son suma de dos números de Padovan

Sean $(F_m)_{m\geqslant 0}$, $(P_n)_{n\geqslant 0}$ las sucesiones de Fibonacci y de Padovan, respectivamente. En este capítulo se estudian y resuelven las siguientes ecuaciones diofánticas,

$$P_n + P_{n_1} = F_m, \tag{12}$$

$$P_n = 2^a, \tag{13}$$

$$P_n + P_{n_1} = 2^a, \tag{14}$$

en enteros no negativos (n, n_1, m), (n, a) y (n, n_1, a), respectivamente. Ahora bien, como $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ y $P_4 = P_5 = 2$, con la finalidad de no repetir soluciones numéricas, en lo que sigue suponemos que $n, n_1 \neq 1, 2$ y 4. Es decir, cada vez que consideremos a 1 y 2 como elementos de la sucesión de Padovan, pensamos que son P_3 y P_5, respectivamente. De manera análoga para la sucesión de Fibonacci suponemos que $m \neq 1$.

2.1. Números de Fibonacci que son suma de dos números de Padovan

Para la ecuación (**12**), con las convenciones antes mencionadas, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Todas las soluciones enteras no negativas* (n, n_1, m) *de la ecuación* (**12**) *pertenecen al conjunto*

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} (0,0,0), & (3,0,2), & (3,3,3), & (5,0,3), & (5,3,4), & (6,0,4), \\ (6,5,5), & (7,3,5), & (8,0,5), & (7,7,6), & (8,6,6), & (9,3,6), \\ (10,7,7), & (11,3,7), & (11,10,8), & (12,8,8), & (13,0,8), & (18,6,11) \end{array} \right\}.$$

El conjunto de los números de Fibonacci que se pueden escribir como suma de dos números de Padovan es

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 89\}.$$

Las representaciones de los números en el conjunto anterior son

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & P_0 + P_0; \\ 1 & = & P_3 + P_0; \\ 2 & = & P_3 + P_3 = P_5 + P_0; \\ 3 & = & P_5 + P_3 = P_6 + P_0; \\ 5 & = & P_6 + P_5 = P_7 + P_3 = P_8 + P_0; \\ 8 & = & P_7 + P_7 = P_8 + P_6 = P_9 + P_3; \\ 13 & = & P_{10} + P_7 = P_{11} + P_3; \\ 21 & = & P_{11} + P_{10} = P_{12} + P_8 = P_{13} + P_0; \\ 89 & = & P_{18} + P_6. \end{array}$$

Demostración. Sea (n, n_1, m) una solución entera no negativa de la ecuación (**12**). Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \geqslant n_1$. Notemos que si $n = 0$, $n_1 = 0$. Así $0 = F_m$. Por lo tanto $m = 0$ y se tiene la primera solución listada en el teorema. Por lo tanto podemos distinguir dos casos: $n = n_1 > 0$ y $n > n_1 \geqslant 0$. Notemos que en ambos casos $n \geqslant 1$ y $m \geqslant 1$. Así, de (**7**) obtenemos que

$$\gamma^{n-3} \leqslant P_n + P_{n_1} = F_m \leqslant \alpha^{m-1} \quad \text{y} \quad \gamma^{n+2} \geqslant P_n + P_{n_1} = F_m \geqslant \alpha^{m-2},$$

donde usamos $\gamma^3 > 2$. De estas desigualdades se sigue que

$$(n-3)\frac{\log\gamma}{\log\alpha} \leqslant m-1 \qquad \text{y} \qquad (n+2)\frac{\log\gamma}{\log\alpha} \geqslant m-2. \tag{\textbf{15}}$$

Ahora estudiamos cada uno de los casos $n = n_1 > 0$ y $n > n_1 \geqslant 0$. Notemos que $\log\gamma/\log\alpha = 0.584357\ldots$.

Caso 1. Supongamos que $n = n_1 > 0$. De (**15**) se tiene que si $n \leqslant 200$, $m \leqslant 120$. Corrimos un programa en *Mathematica* (ver apéndice) y encontramos que las únicas soluciones en el rango $0 < n = n_1 \leq 200$, $0 < m \leqslant 120$, con nuestras convenciones, son $(3,3,3)$ y $(7,7,6)$. Demostraremos que en este caso éstas son las únicas soluciones.

Desde ahora, suponemos que $n > 200$. Entonces, de (**15**) tenemos que $m > 116$ y que $n > m$. Usando las fórmulas de Binet (**6**), podemos reescribir (**12**) como

$$2c_1\gamma^n - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = -2c_2\delta^n - 2c_3\overline{\delta}^n - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$\left|2c_1\gamma^n - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}}\right| \leqslant 4|c_2||\delta|^n + \frac{|\beta|^m}{\sqrt{5}} < 4|c_2| + \frac{1}{\sqrt{5}} < \gamma^2,$$

debido a que $|\delta|, |\beta| < 1$. Dividiendo por $2c_1\gamma^n$ se tiene que

$$\left|1 - \frac{1}{2c_1\sqrt{5}}\alpha^m\gamma^{-n}\right| < \frac{\gamma^2}{2c_1\gamma^n} < \frac{1}{\gamma^{n-2}}, \qquad (\mathbf{16})$$

pues $1 < 2c_1$. Sea $\Lambda := 1 - (2c_1\sqrt{5})^{-1}\alpha^m\gamma^{-n}$. Afirmamos que $\Lambda \neq 0$. Para ver esto, consideramos el $\mathbb{Q}-$automorfismo σ de la extensión de Galois $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, \gamma, \delta)$ sobre $\mathbb{Q}$ definido por $\sigma(\gamma) := \delta$, $\sigma(\delta) := \gamma$ y $\sigma(\alpha) := \alpha$. Este σ se obtiene, por ejemplo, considerando la inclusión de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en $\mathbb{K}$ y extendemos ésta a $\mathbb{K}$ precisamente como σ, ya que $X^3 - X - 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. De hecho, dado que $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\gamma, \delta) = \mathbb{Q}$ tenemos que

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma, \delta)/\mathbb{Q}),$$

y notamos que σ es la extensión de la identidad en $\mathbb{Q}(\alpha)$ a $\mathbb{Q}(\gamma, \delta)$. Ahora, si $\Lambda = 0$, $\sigma(\Lambda) = 0$ y tenemos que

$$\frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = 2\sigma(c_1\gamma^n) = 2c_2\delta^n.$$

Como $|c_2|$, $|\delta| < 1$, y $m > 116$, obtenemos que

$$1 < \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = 2|c_2||\delta|^n < 1,$$

que es una contradicción. Así, $\Lambda \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, definiremos los parámetros que se necesitan en este teorema. Consideremos $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\gamma, \alpha)$ y

$$\alpha_1 = \frac{1}{2c_1\sqrt{5}},\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_3 = \gamma, \quad b_1 = 1,\ b_2 = m,\ b_3 = -n.$$

Entonces $\ell = 3$, $d_{\mathbb{L}} = 6$ y $B = n$. Así, definimos la siguiente constante:

$$C := 1.43908 \times 10^{13} > 1.4 \cdot 30^{3+3} \cdot 3^{4.5} \cdot 6^2 \cdot (1 + \log 6).$$

Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Dado que $X^2 - X - 1$ y $X^3 - X - 1$ son los polinomios mínimos sobre $\mathbb{Z}$ de α_2 y α_3 respectivamente, obtenemos que $h(\alpha_2) = \log \alpha/2$ y $h(\alpha_3) = \log \gamma/3$. Para α_1, usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2. De la tercera propiedad tenemos que $h(\alpha_1) = h(\alpha_1^{-1})$. Por tanto, $h(\alpha_1) = h(2\sqrt{5}c_1)$. Así, de la segunda propiedad se sigue que $h(\alpha_1) \leqslant h(2\sqrt{5}) + h(c_1)$. Notemos que $h(2\sqrt{5}) = \log 2\sqrt{5}$, pues $X^2 - 20$ es el polinomio mínimo sobre $\mathbb{Z}$ de $2\sqrt{5}$. Ahora, para calcular $h(c_1)$, procedemos de manera análoga, esto es,

$$h(c_1) = h\left(\frac{\gamma(\gamma+1)}{2\gamma+3}\right) \leqslant h(\gamma(\gamma+1)) + h(2\gamma+3).$$

Luego, al aplicar un par de veces la primera y segunda propiedad y recordando que $h(\alpha_3) = h(\gamma) = \log \gamma/3$ tenemos que

$$h(c_1) \leqslant \log \gamma + 5 \log 2.$$

Por lo tanto, $h(\alpha_1) \leqslant \log \gamma + 8 \log 2$. Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 35, A_2 = 1.45$ y $A_3 = 0.57$. Así, del teorema de Matveev se sigue que

$$\log |\Lambda| > -C \cdot (1 + \log n) \cdot 35 \cdot 1.45 \cdot 0.57,$$

y al compararla con (**16**), se deduce que

$$(n-2) \log \gamma < 4.1629 \times 10^{14} (2 \log n).$$

Entonces, $n < 2.96082 \times 10^{15} \log n$ y del lema 1.7 obtenemos que

$$n < 2.10954 \times 10^{17}. \qquad (\mathbf{17})$$

Reduzcamos esta cota para n. Para esto, consideramos

$$\Gamma := m \log \alpha - n \log \gamma + \log\left(\frac{1}{2c_1\sqrt{5}}\right),$$

y vamos a (**16**). Notemos que $1 - e^{\Gamma} = \Lambda$. Dado que $\Lambda \neq 0$, $\Gamma \neq 0$. Si $\Gamma > 0$, entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma \leqslant e^{\Gamma} - 1 = |1 - e^{\Gamma}| = |\Lambda| < \frac{1}{\gamma^{n-2}}.$$

Por otro lado, si $\Gamma < 0$ se tiene que $1-e^{\Gamma} = |1-e^{\Gamma}| = |\Lambda| < 1/2$, pues $n > 200$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma| < e^{|\Gamma|} - 1 = e^{|\Gamma|}|\Lambda| < \frac{2}{\gamma^{n-2}}.$$

Entonces, en ambos casos tenemos que

$$0 < |\Gamma| < \frac{2}{\gamma^{n-2}}.$$

Dividiendo por $\log \gamma$ tenemos que

$$0 < |m\,\tau - n + \mu| < \frac{13}{\gamma^{n}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \alpha}{\log \gamma} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(1/2c_1\sqrt{5}\right)}{\log \gamma}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Sea $M := 2.10954 \times 10^{17}$. De (**17**), tenemos que M es cota superior para n por lo tanto para m pues $n > m$. Una inspección rápida con *Mathematica* muestra que el denominador del convergente

$$\frac{p_{35}}{q_{35}} = \frac{2886944412481215133}{1687006631192447246}$$

satisface que $q_{35} > 6M$ y $\varepsilon := \|q_{35}\,\mu\| - M\|q_{35}\,\tau\| = 0.0329968 > 0$. Así, del lema 1.5 con $A := 13$, $B := \gamma$ obtenemos que

$$n < \frac{\log(q_{35} \cdot 13/\varepsilon)}{\log \gamma} < 171,$$

que es una contradicción a la suposición sobre n. Esto termina el caso 1.

Caso 2. Estudiemos el otro caso, es decir $n > n_1 \geqslant 0$. De (**15**) se tiene que si $n \leqslant 330$, $m \leqslant 196$. Corriendo un programa en *Mathematica* (ver apéndice) en el rango $0 \leqslant n_1 < n \leqslant 330$, $0 \leqslant m \leqslant 196$ y, con nuestras convenciones, obtenemos el resto de las soluciones escritas en el teorema. En lo que sigue probaremos que éstas son las únicas soluciones que faltan.

Desde ahora, suponemos que $n > 330$. De (**15**), tenemos que $m > 192$ y que $n > m$. Usando (**6**), deducimos de la ecuación (**12**) que

$$\left|c_1\gamma^{n} - \frac{\alpha^{m}}{\sqrt{5}}\right| \leqslant 2|c_2||\delta|^{n} + \gamma^{n_1-1} + \frac{|\beta|^{m}}{\sqrt{5}} \leqslant \gamma^{n_1+4}.$$

Dividiendo por $c_1\gamma^n$ tenemos que

$$\left|1 - \frac{1}{c_1\sqrt{5}}\alpha^m\gamma^{-n}\right| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-7}}, \qquad \textbf{(18)}$$

donde usamos que $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda_1 := 1 - (c_1\sqrt{5})^{-1}\alpha^m\gamma^{-n}$. Afirmamos que $\Lambda_1 \neq 0$. Para ver esto, consideramos la extensión de Galois $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{Q}$ dada en el caso 1 y el mismo $\mathbb{Q}$-automorfismo σ. Si $\Lambda_1 = 0$, $\sigma(\Lambda_1) = 0$. Por lo tanto, se tiene que

$$1 < \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = |c_2||\delta|^n < 1,$$

pues $m > 192$ y $|c_2|$, $|\delta|$ son menores que 1, que es una contradicción. Así, $\Lambda_1 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, elegimos $\mathbb{L}$ y C como en el caso 1 y

$$\alpha_1 = \frac{1}{c_1\sqrt{5}},\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_3 = \gamma, \quad b_1 = 1,\ b_2 = m,\ b_3 = -n.$$

Entonces, $B = n$. Además, α_2 y α_3 son como en el caso 1. Entonces $h(\alpha_2)$ y $h(\alpha_3)$ ya han sido calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y recordamos que en el caso 1 obtuvimos que $h(c_1) \leqslant \log\gamma + 5\log 2$ para concluir que

$$h(\alpha_1) \leqslant h(\sqrt{5}) + h(c_1) \leqslant \log\gamma + 7\log 2.$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 30.8$, $A_2 = 1.45$, $A_3 = 0.57$. Del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda_1| > -C \cdot (1 + \log n) \cdot 30.8 \cdot 1.45 \cdot 0.57,$$

y al compararla con (**18**), se deduce que

$$(n - n_1)\log\gamma < 3.66336 \times 10^{14}(1 + \log n). \qquad \textbf{(19)}$$

Todavía no hemos obtenido una cota superior para n. Para hacer esto, reescribamos la ecuación (**12**) usando las fórmulas de Binet para deducir que

$$\left|c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\gamma^{n_1} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}}\right| < 4|c_2||\delta|^{n_1} + \frac{|\beta|^m}{\sqrt{5}} < \gamma^2.$$

Dividiendo por $c_1(\gamma^n + \gamma^{n_1})$, obtenemos que

$$\left|1 - \frac{1}{c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\sqrt{5}}\alpha^m\gamma^{-n_1}\right| < \frac{1}{\gamma^{n-5}}, \qquad \textbf{(20)}$$

donde otra vez usamos que $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda_2 := 1-(c_1(\gamma^{n-n_1}+1)\sqrt{5})^{-1}\alpha^m\gamma^{-n_1}$. Afirmamos que $\Lambda_2 \neq 0$. Pues si no, aplicamos el σ anterior y tenemos las desigualdades

$$1 < \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} \leqslant 2|c_2| < 1,$$

ya que $m > 192$, lo que es una contradicción. Así, $\Lambda_2 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, elegimos el mismo campo $\mathbb{L}$ y la misma constante C que en el caso 1 y

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1}+1)},\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_3 = \gamma, \quad b_1 = 1,\ b_2 = m,\ b_3 = -n_1.$$

Entonces, $B = n$. Notemos que $h(\alpha_2)$ y $h(\alpha_3)$ ya han sido calculadas. Para $h(\alpha_1)$, usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**19**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(\sqrt{5}) + h(c_1) + h(\gamma^{n-n_1}+1) \\ &\leqslant \log\sqrt{5} + \log\gamma + 5\log 2 + (n-n_1)\frac{\log\gamma}{3} + \log 2 \\ &< \frac{3.66337\times 10^{14}(1+\log n)}{3}. \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}}\cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1,2,3$, podemos elegir $A_1 = 7.32674\times 10^{14}(1+\log n)$, $A_2 = 1.45$ y $A_3 = 0.57$. Del teorema de Matveev tenemos que

$$\log|\Lambda_2| > -C\cdot(1+\log n)\left(7.32674\times 10^{14}(1+\log n)\right)\cdot 1.45\cdot 0.57,$$

y al compararla con (**20**) nos da que $n < 1.23961\times 10^{29}(\log n)^2$. Del lema 1.7, obtenemos que

$$n < 2.22516\times 10^{33}. \qquad (\mathbf{21})$$

Reduzcamos esta cota para n. Para esto, consideramos

$$\Gamma_1 := m\,\log\alpha - n\log\gamma + \log\left(\frac{1}{c_1\sqrt{5}}\right), \qquad (\mathbf{22})$$

y la desigualdad (**18**). Supongamos que $n-n_1 \geqslant 10$. Notemos que $1-e^{\Gamma_1} = \Lambda_1$. Dado que $\Lambda_1 \neq 0$, $\Gamma_1 \neq 0$. Si $\Gamma_1 > 0$, entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma_1 \leqslant e^{\Gamma_1} - 1 = |1-e^{\Gamma_1}| = |\Lambda_1| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-7}}.$$

Si $\Gamma_1 < 0$, se tiene que $1-e^{\Gamma_1} = |1-e^{\Gamma_1}| = |\Lambda_1| < 1/2$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma_1|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma_1| < e^{|\Gamma_1|} - 1 = e^{|\Gamma_1|}|\Lambda_1| < \frac{2}{\gamma^{n-n_1-7}}.$$

Entonces, en ambos casos obtenemos que

$$0 < |\Gamma_1| < \frac{2}{\gamma^{n-n_1-7}}.$$

Dividiendo por $\log\gamma$ se tiene que

$$0 < |m\,\tau - n + \mu| < \frac{51}{\gamma^{n-n_1}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log\alpha}{\log\gamma}, \qquad \mu := \frac{\log\left(1/c_1\sqrt{5}\right)}{\log\gamma}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Sea $M := 2.22516 \times 10^{33}$. De (**21**), tenemos que M es una cota superior para n. Como $n > m$, M es cota superior para m. Con *Mathematica* encontramos que el denominador del convergente

$$\frac{p_{66}}{q_{66}} = \frac{276210093001120272437241265542247559}{161405344862421884156022607883753468}$$

de τ satisface $q_{66} > 6M$ y $\varepsilon := \|q_{66}\,\mu\| - M\|q_{66}\,\tau\| = 0.279446 > 0$. Así, del lema 1.5 con $A := 51$, $B := \gamma$ obtenemos que

$$n - n_1 < \frac{\log\left(q_{66}\,51/\varepsilon\right)}{\log\gamma} < 307.$$

Estudiemos este rango. Para esto, consideramos

$$\Gamma_2 := m\,\log\alpha - n_1\log\gamma + \log\left(\frac{1}{\sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1}+1)}\right)$$

y vamos a (**20**). Notemos que $1-e^{\Gamma_2} = \Lambda_2 \neq 0$. Así, $\Gamma_2 \neq 0$ y, con un argumento similar al dado anteriormente, concluimos que

$$0 < |\Gamma_2| < \frac{2}{\gamma^{n-5}},$$

pues $n > 330$. Dividiendo por $\log\gamma$, obtenemos que

$$0 < |m\,\tau - n_1 + \mu| < \frac{30}{\gamma^{n}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log\alpha}{\log\gamma} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(1/\sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1}+1)\right)}{\log\gamma}.$$

Observemos que $n_1 > 0$. En otro caso, $n \leqslant 306$ lo cual contradice que $n > 330$. Así, podemos aplicar el lema 1.5 otra vez. Considere

$$\mu_s := \frac{\log\left(1/\sqrt{5}c_1(\gamma^s + 1)\right)}{\log \gamma}, \qquad s = 1, \ldots, 306.$$

Con ayuda de *Mathematica* encontramos que el denominador del 66º convergente de τ dado anteriormente trabaja bien, esto es, éste satisface que $q_{66} > 6M$ y $\varepsilon_s \geqslant 0.00155487 > 0$ para todo $s = 1, \ldots, 306$. Con $A := 30$, $B := \gamma$ calculamos $\log(q_{66}30/\varepsilon_s)/\log\gamma$ para todo $s = 1, \ldots, 306$ y encontramos que el máximo valor de éstos es a lo más 323. Así $n \leqslant 323$. Esto contradice nuestra suposición sobre n. Además finaliza la demostración del caso 2 y por lo tanto toda la demostración. □

2.2. Números de Padovan que son potencias de dos

En esta sección reproducimos el teorema 2 del artículo [16] usando las condiciones iniciales de la sucesión de Padovan dadas en el capítulo 1. Así, bajo nuestras convenciones, para la ecuación (**13**) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Todas las soluciones de la ecuación* (**13**) *en enteros no negativos* (n, a) *pertenecen al conjunto*

$$\{(3,0), (5,1), (7,2), (12,4)\}.$$

Los números de Padovan que son potencias de dos son $1, 2, 4, 16$. *La representación de cada uno de ellos es la siguiente:*

$$\begin{aligned} 1 &= P_3; \\ 2 &= P_5; \\ 4 &= P_7; \\ 16 &= P_{12}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea (n, a) una solución entera no negativa de la ecuación (**13**). Puesto que $n \neq 1, 2, 4$, se tiene en particular que $n \geqslant 3$. Entonces de (**7**) tenemos que

$$\gamma^{n-3} \leqslant P_n = 2^a \qquad \text{y} \qquad \gamma^{n-1} \geqslant P_n = 2^a.$$

Así,

$$(n-3)\frac{\log\gamma}{\log 2} \leqslant a \leqslant (n-1)\frac{\log\gamma}{\log 2}.$$

Como $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\log\gamma}{\log 2} < \dfrac{1}{2}$ obtenemos que

$$\frac{2(n-3)}{3} < 2a < n. \qquad (\mathbf{23})$$

Si $n \leqslant 200$, $a \leqslant 99$. Corriendo un programa en *Mathematica* en el rango $1 \leqslant n \leqslant 200$, $0 \leqslant a \leqslant 99$ y, con nuestras convenciones, obtenemos todas las soluciones en el enunciado de este teorema. En lo que sigue probaremos que éstas son todas.

A partir de ahora, suponemos que $n > 200$. Luego, de (**23**) tenemos que $a > 65$. De (**6**) reescribimos (**13**) como

$$2^a - c_1\gamma^n = c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n.$$

Tomando valor absoluto tenemos que

$$|2^a - c_1\gamma^n| \leqslant 2|c_2||\delta|^n < 1.$$

Dividiendo por $c_1\gamma^n$ obtenemos

$$|2^a\gamma^{-n}c_1^{-1} - 1| < \frac{1}{c_1\gamma^n} < \frac{1}{\gamma^{n-3}}, \qquad (\mathbf{24})$$

pues $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda := 2^a\gamma^{-n}c_1^{-1} - 1$. Afirmamos que $\Lambda \neq 0$. Para ver esto, consideremos el $\mathbb{Q}-$automorfismo σ de la extensión de Galois $\mathbb{Q}(\gamma,\delta)$ sobre $\mathbb{Q}$ definido por $\sigma(\gamma) := \delta$ y $\sigma(\delta) := \gamma$. Notemos que $\sigma(\overline{\delta}) = \overline{\delta}$. Si $\Lambda = 0$, $\sigma(\Lambda) = 0$. Así,

$$2^a = \sigma(c_1\gamma^n) = c_2\delta^n.$$

Al tomar valor absoluto y, como $|c_2|$, $|\delta| < 1$, $a > 65$, obtenemos

$$2^a = |c_2||\delta|^n < 1,$$

que es una contradicción. Así, $\Lambda \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, definiremos los parametros que se necesitan en este teorema. Consideremos $\mathbb{L}_1 := \mathbb{Q}(\gamma)$ y

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = c_1, \quad b_1 = a,\ b_2 = -n,\ b_3 = -1.$$

Entonces $\ell = 3, d_{\mathbb{L}_1} = 3$ y $B = n$. Así, definimos la siguiente constante:

$$C_1 := 2.70444 \times 10^{12} > 1.4 \cdot (30)^{3+3} \cdot 3^{4.5} \cdot 3^2 \cdot (1 + \log 3).$$

Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Notemos que $h(\alpha_1) = \log 2$ y de la demostración del teorema 2.1 tenemos que $h(\alpha_2) =$

$\log\gamma/3$ y $h(\alpha_3) \leqslant \log\gamma + 5\log 2$. Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}_1} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 2.1, A_2 = 0.3$ y $A_3 = 11.3$. Así, del teorema de Matveev se sigue que

$$\begin{aligned} \log|\Lambda| &> -C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot 2.1 \cdot 0.3 \cdot 11.3 \\ &> -1.92530 \times 10^{13}(1 + \log n), \end{aligned}$$

y al compararla con (**24**), nos da

$$(n-3)\log\gamma < 1.92530 \times 10^{13}(2\log n).$$

Entonces $n < 1.36936 \times 10^{14} \log n$ y del lema 1.7 obtenemos que

$$n < 8.91468 \times 10^{15}. \tag{\textbf{25}}$$

Reduzcamos esta cota para n. Para esto, consideramos

$$\Gamma := a\log 2 - n\log\gamma + \log(1/c_1).$$

y vamos a (**24**). Notemos que $e^\Gamma - 1 = \Lambda$. Dado que $\Lambda \neq 0$, $\Gamma \neq 0$. Si $\Gamma > 0$ entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma \leqslant e^\Gamma - 1 = |e^\Gamma - 1| = |\Lambda| < \frac{1}{\gamma^{n-3}}.$$

Si, por otra parte $\Gamma < 0$ tenemos que $1 - e^\Gamma = |e^\Gamma - 1| = |\Lambda| < 1/2$, pues $n > 200$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma| < e^{|\Gamma|} - 1 = e^{|\Gamma|}|\Lambda| < \frac{2}{\gamma^{n-3}}.$$

Entonces, en ambos casos tenemos que

$$0 < |\Gamma| < \frac{2}{\gamma^{n-3}}.$$

Dividiendo por $\log\gamma$ tenemos que

$$0 < |a\tau - n + \mu| < \frac{17}{\gamma^n},$$

donde

$$\tau := \frac{\log 2}{\log\gamma} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log(1/c_1)}{\log\gamma}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Dado que $2a < n$ y por la cota superior que obtuvimos en (**25**) para n, elegimos $M := 4.45734 \times 10^{15}$. Con un programa en *Mathematica*, encontramos que el denominador del convergente

$$\frac{p_{42}}{q_{42}} = \frac{1814208205674503586}{735997475682980473}$$

de τ satisface que $q_{42} > 6M$ y $\varepsilon = \|q_{42}\,\mu\| - M\|q_{42}\,\tau\| = 0.263981 > 0$. Así del lema 1.5 con $A := 17, B := \gamma$ obtenemos que

$$n < \frac{\log(17q_{42}/\epsilon)}{\log \gamma} < 162,$$

lo que contradice nuestra suposición sobre n.

$\square$

2.3. Potencias de 2 que son suma de dos números de Padovan

En esta sección demostramos el teorema 3 del artículo [16] con las condiciones iniciales de la sucesión de Padovan dadas en el capítulo 1. Así, el siguiente es el resultado del estudio de la ecuación (**14**) bajo nuestras convenciones.

Teorema 2.3. *Todas las soluciones de la ecuación* (**14**) *en enteros no negativos* (n, n_1, a) *pertenecen al conjunto*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (3,3,1), & (5,5,2), & (7,7,3), & (12,12,5), \\ (3,0,0), & (5,0,1), & (6,3,2), & (7,0,2), \\ (8,6,3), & (9,3,3), & (10,9,4), & (11,7,4), \\ (12,0,4), & (14,7,5), & (28,25,11), & (29,20,11) \end{array} \right\}.$$

El conjunto de todas las potencias de dos que se pueden escribir como suma de dos números de Padovan es

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 2048\}.$$

Las representaciones de cada uno de estos números son

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& P_3 + P_0; \\ 2 &=& P_3 + P_3 = P_5 + P_0; \\ 4 &=& P_5 + P_5 = P_7 + P_0 = P_6 + P_3; \\ 8 &=& P_7 + P_7 = P_8 + P_6 = P_9 + P_3; \\ 16 &=& P_{10} + P_9 = P_{11} + P_7 = P_{12} + P_0; \\ 32 &=& P_{12} + P_{12} = P_{14} + P_7; \\ 2048 &=& P_{28} + P_{25} = P_{29} + P_{20}. \end{array}$$

Demostración. Sea (n, n_1, a) una solución entera no negativa de la ecuación (**14**). Sin perdida de generalidad supongamos que $n \geqslant n_1$. Si $n = n_1$, obtenemos $P_n = 2^{a-1}$. Entonces del teorema 2.2 obtenemos la primera fila de las soluciones enumeradas en este teorema. Por lo tanto, suponemos $n > n_1$. Como el caso $n_1 = 0$ corresponde al teorema 2.2, suponemos que $n > n_1 \geqslant 1$. De (**7**) tenemos que

$$\gamma^{n-3} \leqslant P_n < P_n + P_{n_1} = 2^a \qquad \text{y} \qquad 2^n > 2\gamma^{n-1} \geqslant 2P_n > P_n + P_{n_1} = 2^a,$$

donde usamos $2 > \gamma$. De estas desigualdades se sigue que

$$\gamma^{n-3} < 2^a < 2^n.$$

Dado que $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\log \gamma}{\log 2}$ tenemos que

$$\frac{(n-3)}{3} < a < n. \tag{26}$$

Si $n \leqslant 350$, $a \leqslant 349$. Corriendo un programa en *Mathematica* en el rango $1 \leqslant n_1 < n \leqslant 350$, $0 \leqslant a \leqslant 349$, con nuestras convenciones, obtuvimos el resto de las soluciones enunciadas en este teorema. En lo que sigue demostraremos que éstas son todas.

Desde ahora, suponemos que $n > 350$. Entonces de (**26**) tenemos que $a > 115$. De la fórmula de Binet (**6**) reescribimos (**14**) como

$$2^a - c_1\gamma^n = c_2\delta^n + c_3\overline{\delta}^n + P_{n_1}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$|2^a - c_1\gamma^n| < 2|c_2||\delta|^n + \gamma^{n_1-1} < 1 + \gamma^{n_1-1} < 2\gamma^{n_1-1} < \gamma^{n_1+2},$$

donde usamos que $2|c_2|, |\delta| < 1$ y $2 < \gamma^3$. Dividiendo por $c_1\gamma^n$ tenemos

$$|2^a\gamma^{-n}c_1^{-1} - 1| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-5}}, \tag{27}$$

pues $\gamma^2 < c_1\gamma^5$. Sea $\Lambda_1 := 2^a\gamma^{-n}c_1^{-1} - 1$. Notemos que $\Lambda_1 = \Lambda$ donde Λ es el dado en la demostración del teorema 2.2. Dado que en este caso $a > 115$, también tenemos que $\Lambda_1 \neq 0$. De hecho, como estamos estudiando la ecuación (**14**) podemos probar que $\Lambda_1 > 0$. En efecto, de (**6**) tenemos que $c_1\gamma^n = P_n - c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n$. Tomando valor absoluto y dado que $n_1 \geqslant 1$ obtenemos

$$c_1\gamma^n = |c_1\gamma^n| = |P_n - c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n| \leqslant P_n + 2|c_2||\delta|^n < P_n + 1 \leqslant P_n + P_{n_1} = 2^a.$$

Como hemos notado que $\Lambda = \Lambda_1$, usamos los mismos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{L}_1$ y los mismos $b_1,\ b_2,\ b_3,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ para aplicar el teorema de Matveev. Así,

$$(n - n_1)\log\gamma < 1.92530 \times 10^{13}(1 + \log n). \tag{28}$$

Todavía no hemos obtenido una cota superior para n. Para hacer esto, reescribamos la ecuación (**14**) usando la fórmula de Binet para deducir que

$$\left|2^a - c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\gamma^{n_1}\right| < 4|c_2||\delta|^2 < 1$$

Dividiendo por $c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\gamma^{n_1}$, obtenemos que

$$\left|2^a\gamma^{-n_1}\left(c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\right)^{-1} - 1\right| < \frac{1}{c_1(\gamma^n + \gamma^{n_1})} < \frac{1}{\gamma^{n-3}}, \tag{29}$$

pues $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda_2 := 2^a\gamma^{-n_1}\left(c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)\right)^{-1} - 1$. Afirmamos que $\Lambda_2 \neq 0$. Para ver esto consideramos el mismo $\mathbb{Q}$-automorfismo σ de la extensión de Galois $\mathbb{Q}(\gamma, \delta)$ sobre $\mathbb{Q}$ dado en la demostración del teorema 2.2. Si $\Lambda_2 = 0$, $\sigma(\Lambda_2) = 0$. Por lo tanto, al tomar valor absoluto tenemos que

$$2^a = |c_2\left(\delta^n + \delta^{n_1}\right)| \leqslant 2|c_2||\delta|^2 < 1,$$

que es una contradiccón, pues $a > 115$. Así, $\Lambda_2 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, elegimos $\mathbb{L}_1$ y C_1 como en la demostración del teorema 2.2 y

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = c_1(\gamma^{n-n_1} + 1), \quad b_1 = a,\ b_2 = -n_1,\ b_3 = -1.$$

Entonces, $B = n$. Además, las alturas de α_1, α_2 y c_1 ya están calculadas en la demostración del teorema 2.2 y, de las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**28**), se tiene que

$$\begin{aligned} h(\alpha_3) &\leqslant h(c_1) + h(\gamma^{n-n_1} + 1) \\ &\leqslant \log\gamma + 5\log 2 + (n - n_1)\frac{\log\gamma}{3} + \log 2 \\ &< \frac{1.92531 \times 10^{13}}{3}(1 + \log n). \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}_1} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 2.1$, $A_2 = 0.3$ y $A_3 = 1.92531 \times 10^{13}(1 + \log n)$. Entonces del teorema de Matveev tenemos que

$$\begin{aligned} \log|\Lambda_2| &> -C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot 2.1 \cdot 0.3 \cdot \left(1.92531 \times 10^{13}(1 + \log n)\right) \\ &> -3.28035 \times 10^{25}(1 + \log n)^2, \end{aligned}$$

y al compararla con (**29**) nos da que $n < 4.66623 \times 10^{26}(\log n)^2$. Del lema 1.7, obtenemos que

$$n < 7.03833 \times 10^{30}.$$

Reduzcamos la cota para $n - n_1$. Para esto vamos a la ecuación (**27**) y consideramos

$$\Gamma_1 := a\log 2 - n\log\gamma + \log(1/c_1).$$

Notemos que $e^{\Gamma_1} - 1 = \Lambda_1$. Como $\Lambda_1 > 0$, $\Gamma_1 > 0$. Por lo tanto,

$$0 < \Gamma_1 < e^{\Gamma_1} - 1 = |\Lambda_1| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-5}}.$$

Dividiendo por $\log\gamma$ tenemos que

$$0 < |a\tau - n + \mu| < \frac{15}{\gamma^{n-n_1}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log 2}{\log\gamma} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log(1/c_1)}{\log\gamma}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Sea $M := 7.03833 \times 10^{30}$. Dado que $a < n$, $a < M$. Con un programa en *Mathematica*, encontramos que el denominador del convergente

$$\frac{p_{80}}{q_{80}} = \frac{3618874948619528805961168580355596 3}{14681241208508887086673603148214699}$$

de τ satisface que $q_{80} > 6M$ y que $\varepsilon = \|q_{80}\,\mu\| - M\|q_{80}\,\tau\| = 0.231368 > 0$. Así, del lema 1.5 con $A := 15, B := \gamma$ obtenemos que

$$n - n_1 < \frac{\log(q_{80}\,15/\varepsilon)}{\log\gamma} < 295.$$

Reduzcamos la cota superior de n. Para esto, vamos a la ecuación (**29**) y consideramos

$$\Gamma_2 := a\log 2 - n_1\log\gamma + \log(1/c_1(\gamma^{n-n_1} + 1)).$$

Notemos que $e^{\Gamma_2} - 1 = \Lambda_2$. Como $\Lambda_2 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$. Si $\Gamma_2 > 0$, entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma_2 \leqslant e^{\Gamma_2} - 1 = |\Lambda_2| < \frac{1}{\gamma^{n-3}}.$$

De otro modo, si $\Gamma_2 < 0$ tenemos que $1 - e^{\Gamma_2} = |e^{\Gamma_2} - 1| = |\Lambda_2| < 1/2$, pues $n > 350$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma_2|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma_2| < e^{|\Gamma_2|} - 1 = e^{|\Gamma_2|}|\Lambda_2| < \frac{2}{\gamma^{n-3}}.$$

Entonces, en ambos casos tenemos que

$$0 < |\Gamma_2| < \frac{2}{\gamma^{n-3}}.$$

Dividiendo por $\log\gamma$ tenemos que

$$0 < |a\tau - n_1 + \mu| < \frac{17}{\gamma^n}, \qquad (\mathbf{30})$$

donde

$$\tau := \frac{\log 2}{\log\gamma} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log(1/c_1(\gamma^{n-n_1}+1))}{\log\gamma}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5 otra vez. Consideramos

$$\mu_\ell = \frac{\log(1/c_1(\gamma^\ell + 1))}{\log\gamma}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, 294.$$

Con *Mathematica* encontramos que el mismo denominador del 80º convergente de τ trabaja bien para todos los valores de ℓ, excepto para el caso $\ell = 11$. Esto es, $q_{80} > 6\,M$ y $\varepsilon_\ell > 0.00481472 > 0$ para todo $\ell = 1, 2\ldots, 294$ excepto para el caso $\ell = 11$. Con $A := 17$, $B := \gamma$ calculamos $\log(q_{80}\,17/\varepsilon_\ell)/\log\gamma$ para cada uno de estos ε_ℓ y encontramos que el máximo valor de éstos es $\leqslant 308$.

El problema en el caso $\ell = 11$ es que ε_{11} es siempre < 0. La razón de esto es que tenemos la identidad

$$\frac{1}{\gamma^9} = \frac{2\gamma + 3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma^{11}+1)}.$$

Así la desigualdad (**30**) es

$$0 < |a\tau - (n_1 + 9)| < \frac{17}{\gamma^n}$$

y usamos la teoría de fracciones continuas para estudiarla. Dado que $n > 350$ se sigue que $\gamma^n > 34M > 34a$. Por lo tanto del teorema de Legendre tenemos que $(n_1+9)/a$ es un i-ésimo convergente de τ. Entonces de (**10**) considerando $q_i = a$, obtenemos que

$$\frac{1}{a^2(a_{i+1}+2)} < \left|\tau - \frac{n_1+9}{a}\right|.$$

Un cálculo sencillo con *Mathematica* revela que $q_{70} \leqslant M < q_{71}$ y que $b := \text{máx}\{a_1, \ldots, a_{71}\} = 80$. En particular $b \geqslant a_{i+1}$. Por lo tanto, al combinar las desigualdades anteriores obtenemos

$$\gamma^n < M \cdot 17 \cdot 82,$$

lo cual implica que $n \leqslant 278$. Por lo tanto, al combinar el resultado anterior con este caso restante, concluimos que $n \leqslant 308$. Esto contradice nuestra suposición sobre n y termina la demostración. $\square$

Capítulo 3

Problema de Pillai

En este capítulo, resolvemos el problema de Pillai con la sucesión de Padovan y las potencias de 2 y con las sucesiones de Fibonacci y de Padovan. Más precisamente, resolvemos las ecuaciones diofánticas

$$P_n - 2^m = P_{n_1} - 2^{m_1} \qquad (\mathbf{31})$$

y

$$P_n - F_m = P_{n_1} - F_{m_1} \qquad (\mathbf{32})$$

en enteros no negativos (n, m, n_1, m_1) con $(n, m) \neq (n_1, m_1)$. Con la misma finalidad que en la introducción del capítulo 2, vamos a suponer que $n, n_1 \neq 1, 2, 4$. Además para la ecuación (**32**) agregamos la condición de que $m, m_1 \neq 1$.

3.1. Con la sucesión de Padovan y potencias de dos

Para la ecuación (**31**), con las convenciones antes mencionadas, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Todas las soluciones enteras no negativas* (n, m, n_1, m_1) *de la ecuación* (**31**) *pertenecen al conjunto*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (3,1,0,0), & (5,1,3,0), & (5,2,0,1), & (6,1,5,0), \\ (6,2,0,0), & (6,2,3,1), & (7,1,6,0), & (7,2,3,0), \\ (7,2,5,1), & (7,3,0,2), & (8,1,7,0), & (8,2,5,0), \\ (8,2,6,1), & (8,3,3,2), & (9,2,7,0), & (9,2,8,1), \\ (9,3,0,0), & (9,3,3,1), & (9,3,6,2), & (10,2,9,1), \\ (10,3,5,0), & (10,3,6,1), & (10,3,8,2), & (10,4,3,3), \\ (11,2,10,0), & (11,3,8,0), & (11,4,0,2), & (11,4,7,3), \\ (12,3,10,0), & (12,3,11,2), & (12,4,3,0), & (12,4,5,1), \\ (12,4,7,2), & (12,5,0,4), & (13,4,9,1), & (13,4,10,2), \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} (13,5,8,4), & (14,3,13,0), & (14,4,12,2), & (14,5,0,2), \\ (14,5,7,3), & (14,5,11,4), & (15,5,9,1), & (15,5,10,2), \\ (15,5,13,4), & (15,6,8,5), & (16,4,15,2), & (16,5,13,2), \\ (16,6,3,4), & (17,5,15,2), & (17,5,16,4), & (17,6,5,0), \\ (17,6,6,1), & (17,6,8,2), & (17,6,10,3), & (17,7,3,6), \\ (19,5,18,2), & (19,7,5,4), & (22,9,10,8), & (27,10,17,3), \\ (30,12,24,11) & & & \end{array}\right\}.$$

El conjunto de los números enteros que se pueden escribir como la diferencia de un número de Padovan y una potencia de 2 en al menos dos formas distintas es

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} -1583, & -247, & -63, & -27, & -16, & -15, & -14, & -11, & -7, \\ -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \\ 5, & 8, & 12, & 17, & 20, & 33, & 57, & 82. & \end{array}\right\}.$$

Las representaciones de cada uno de estos números son:

$$\begin{array}{rcl}
-1583 & = & P_{30}-2^{12}=P_{24}-2^{11}; \\
-247 & = & P_{22}-2^{9}=P_{10}-2^{8}; \\
-63 & = & P_{17}-2^{7}=P_{3}-2^{6}; \\
-27 & = & P_{15}-2^{6}=P_{8}-2^{5}; \\
-16 & = & P_{12}-2^{5}=P_{0}-2^{4}; \\
-15 & = & P_{16}-2^{6}=P_{3}-2^{4}; \\
-14 & = & P_{19}-2^{7}=P_{5}-2^{4}; \\
-11 & = & P_{13}-2^{5}=P_{8}-2^{4}; \\
-7 & = & P_{10}-2^{4}=P_{3}-2^{3}; \\
-4 & = & P_{14}-2^{5}=P_{11}-2^{4}=P_{7}-2^{3}=P_{0}-2^{2}; \\
-3 & = & P_{8}-2^{3}=P_{3}-2^{2}; \\
-2 & = & P_{5}-2^{2}=P_{0}-2^{1}; \\
-1 & = & P_{9}-2^{3}=P_{6}-2^{2}=P_{3}-2^{1}=P_{0}-2^{0}; \\
0 & = & P_{12}-2^{4}=P_{7}-2^{2}=P_{5}-2^{1}=P_{3}-2^{0}; \\
1 & = & P_{17}-2^{6}=P_{10}-2^{3}=P_{8}-2^{2}=P_{6}-2^{1}=P_{5}-2^{0}; \\
2 & = & P_{7}-2^{1}=P_{6}-2^{0}; \\
3 & = & P_{9}-2^{2}=P_{8}-2^{1}=P_{7}-2^{0}; \\
4 & = & P_{11}-2^{3}=P_{8}-2^{0}; \\
5 & = & P_{15}-2^{5}=P_{13}-2^{4}=P_{10}-2^{2}=P_{9}-2^{1}; \\
8 & = & P_{12}-2^{3}=P_{11}-2^{2}=P_{10}-2^{0}; \\
12 & = & P_{14}-2^{4}=P_{12}-2^{2};
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
17 &= P_{16} - 2^5 = P_{13} - 2^2;\\
20 &= P_{14} - 2^3 = P_{13} - 2^0;\\
33 &= P_{17} - 2^5 = P_{16} - 2^4 = P_{15} - 2^2;\\
57 &= P_{27} - 2^{10} = P_{17} - 2^3;\\
82 &= P_{19} - 2^5 = P_{18} - 2^2.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea (n, m, n_1, m_1) una solución entera no negativa de (**31**) donde $(n, m) \neq (n_1, m_1)$ y $n, n_1 \neq 1, 2, 4$. Notemos que si $m = m_1$, $P_n = P_{n_1}$ que implica $n = n_1$, que es una contradicción. Por lo tanto, suponemos que $m > m_1$. Reescribiendo la ecuación (**31**) como

$$P_n - P_{n_1} = 2^m - 2^{m_1}, \qquad (\mathbf{33})$$

observamos que el lado derecho es positivo. Por lo tanto, el lado izquierdo también lo es, así $n > n_1$. Ahora, comparamos ambos lados de (**33**) usando (**7**) y tenemos que

$$\gamma^{n-8} \leqslant P_n - P_{n_1} = 2^m - 2^{m_1} < 2^m.$$

En efecto, la desigualdad del lado izquierdo es clara si $n_1 = 0$. Si $n_1 = 3$, $n \geqslant 5$. Para $n = 5$ también es clara, pues $P_5 = 2$ y para $n \geqslant 6$ tenemos $P_n - P_{n_1} \geqslant P_n - P_{n-1} = P_{n-5} \geqslant \gamma^{n-8}$. La desigualdad del lado derecho es clara. De forma similar,

$$\gamma^{n-1} \geqslant P_n \geqslant P_n - P_{n_1} = 2^m - 2^{m_1} > 2^{m-1}.$$

Así, $\gamma^{n-8} < 2^m$ y $\gamma^{n-1} > 2^{m-1}$ de donde se sigue que

$$(n-8)\,\frac{\log\gamma}{\log 2} < m \qquad \text{y} \qquad (n-1)\,\frac{\log\gamma}{\log 2} > m - 1. \qquad (\mathbf{34})$$

Como $\log\gamma/\log 2 = 0.40568\ldots$ tenemos que si $n \leqslant 500$, $m \leqslant 204$. Usando *Mathematica*, corremos un programa en el rango $0 \leqslant n_1 < n \leqslant 500$, $0 \leqslant m_1 < m \leqslant 204$ y, con nuestras convenciones, obtenemos todas las soluciones en el enunciado de este teorema. En lo que sigue demostraremos que éstas son todas.

A partir de ahora, suponemos que $n > 500$. Entonces de (**34**) tenemos que $m > 199$ y que $n > m$. Usando la fórmula de Binet (**6**), podemos reescribir (**31**) como

$$c_1\gamma^n - 2^m = P_{n_1} - c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n - 2^{m_1}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$|c_1\gamma^n - 2^m| < \gamma^{n_1-1} + 2\,|c_2|\,|\delta|^n + 2^{m_1} < \gamma^{n_1+3} + 2^{m_1} < \text{máx}\{\gamma^{n_1+6}, 2^{m_1+1}\},$$

donde usamos que $2<\gamma^3$. Dividiendo por 2^m se tiene que

$$\left|c_1\gamma^n 2^{-m}-1\right| < \max\{\gamma^{n_1-n+14}, 2^{m_1-m+1}\}, \qquad (\mathbf{35})$$

pues $\gamma^{n-8}<2^m$. Sea $\Lambda := c_1\gamma^n 2^{-m}-1$. Afirmamos que $\Lambda\neq 0$. Para ver esto, consideremos el $\mathbb{Q}-$automorfismo σ de la extensión de Galois $\mathbb{Q}(\gamma,\delta)$ sobre $\mathbb{Q}$ definida por $\sigma(\gamma):=\delta$ y $\sigma(\delta):=\gamma$. Notemos que $\sigma(\overline{\delta})=\overline{\delta}$. Si $\Lambda=0$, $\sigma(\Lambda)=0$ y tenemos que

$$2^m=\sigma(c_1\gamma^n)=c_2\delta^n.$$

Al tomar valor absoluto se tiene que

$$2^m=|c_2||\delta|^n<1,$$

que es una contradicción, pues $m>199$. Así, $\Lambda\neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, definiremos los parametros que se necesitan en este teorema. Dado que en esta demostración aplicaremos un par de veces el teorema de Matveev sobre el campo $\mathbb{Q}(\gamma)$ para $\ell=3$, fijamos el campo $\mathbb{L}_1:=\mathbb{Q}(\gamma)$, en particular, $d_{\mathbb{L}_1}=3$. Por lo tanto también fijamos la constante

$$C_1 := 2.704444\times 10^{12} > 1.4\cdot(30)^{3+3}\cdot 3^{4.5}\cdot 3^2\cdot(1+\log 3).$$

Así, consideramos

$$\alpha_1=c_1,\ \alpha_2=\gamma,\ \alpha_3=2,\quad b_1=1,\ b_2=n,\ b_3=-m.$$

Entonces $B=n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1,α_2 y α_3. En la demostración del teorema 2.2 se obtuvo que $h(\alpha_1)\leqslant\log\gamma+5\log 2$, $h(\alpha_2)=\log\gamma/3$, $h(\alpha_3)=\log 2$. Como $A_i\geqslant\max\{d_{\mathbb{L}_1}\cdot h(\alpha_i),|\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i=1,2,3$, podemos elegir $A_1=11.3$, $A_2=0.3$ y $A_3=2.1$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\begin{aligned}\log|\Lambda| &> -C_1\cdot(1+\log n)\cdot 11.3\cdot 0.3\cdot 2.1\\ &> -1.92530\times 10^{13}(1+\log n),\end{aligned}$$

y al compararla con (**35**), se deduce que

$$\min\{(n-n_1)\log\gamma,(m-m_1)\log 2\}\leqslant 1.92531\times 10^{13}(1+\log n). \qquad (\mathbf{36})$$

Ahora estudiamos cada una de estas dos posibilidades.

Caso 1. $\min\{(n-n_1)\log\gamma,(m-m_1)\log 2\}=(n-n_1)\log\gamma$.

Para este caso, de la fórmula de Binet (**6**) reescribimos la ecuación (**31**) como

$$c_1\gamma^n-c_1\gamma^{n_1}-2^m=-c_2\delta^n-c_3\overline{\delta}^n+c_2\delta^{n_1}+c_3\overline{\delta}^{n_1}-2^{m_1}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$\left|c_1(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1}-2^m\right| \leqslant 2|c_2||\delta|^n+2|c_2||\overline{\delta}|^{n_1}+2^{m_1}<2+2^{m_1}\leqslant 2^{m_1+1}.$$

Dividiendo por 2^m se tiene que

$$\left|c_1(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1}2^{-m}-1\right| < \frac{1}{2^{m-m_1-1}}. \qquad (\mathbf{37})$$

Sea $\Lambda_1 := c_1(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1}2^{-m}-1$. Afirmamos que $\Lambda_1 \neq 0$. Si no, aplicando el σ anterior, tenemos que $\sigma(\Lambda_1)=0$. Entonces tomando valor absoluto se obtiene que

$$2^m = |\sigma(c_1)\,(\delta^n-\delta^{n_1})| \leqslant 2|c_2| < 1,$$

que es una contradicción, pues $m>199$. Así, $\Lambda_1 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, consideramos

$$\alpha_1 = c_1(\gamma^{n-n_1}-1),\ \alpha_2=\gamma,\ \alpha_3=2, \quad b_1=1,\ b_2=n_1,\ b_3=-m.$$

Entonces $B=n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1,α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 ya están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**36**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(c_1)+h(\gamma^{n-n_1}-1)\\ &\leqslant \log\gamma+5\log 2+(n-n_1)\frac{\log\gamma}{3}+\log 2\\ &< \frac{1.92532\times 10^{13}}{3}(1+\log n). \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \max\{d_{\mathbb{L}_1}\cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i=1,2,3$, podemos elegir $A_1=1.92532\times 10^{13}(1+\log n)$, $A_2=0.3$ y $A_3=2.1$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda_1| > -C_1(1+\log n)\cdot 1.92532\times 10^{13}(1+\log n)\cdot 0.3\cdot 2.1,$$

y al compararla con (**37**), se deduce que

$$(m-m_1)\log 2 < 3.28036\times 10^{25}(1+\log n)^2.$$

Caso 2. $\min\{(n-n_1)\log\gamma, (m-m_1)\log 2\} = (m-m_1)\log 2$.

Para este caso de la fórmula de Binet (**6**), reescribimos la ecuación (**31**) como

$$c_1\gamma^n - 2^m + 2^{m_1} = P_{n_1} - c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n.$$

Tomando valor absoluto tenemos que

$$\left|c_1\gamma^n - (2^{m-m_1}-1)2^{m_1}\right| \leqslant \gamma^{n_1-1} + 2|c_2||\overline{\delta}|^n \leqslant 2\gamma^{n_1} < \gamma^{n_1+3},$$

donde usamos que $2 < \gamma^3$. Así, dividiendo por $c_1\gamma^n$ obtenemos que

$$\left|1 - \left(\frac{2^{m-m_1}-1}{c_1}\right)\gamma^{-n}2^{m_1}\right| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-6}}, \qquad (\mathbf{38})$$

donde usamos que $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda_2 := 1-((2^{m-m_1}-1)/c_1)\gamma^{-n}2^{m_1}$. Afirmamos que $\Lambda_2 \neq 0$. Si no, entonces aplicando el σ anterior obtenemos que $\sigma(\Lambda_2) = 0$. Al tomar valor absoluto tenemos que

$$1 \leqslant (2^{m-m_1}-1)2^{m_1} = 2^m - 2^{m_1} = |c_2||\delta|^n < |c_2| < \frac{1}{2},$$

que es una contradicción. Así, $\Lambda_2 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, consideramos

$$\alpha_1 = \frac{2^{m-m_1}-1}{c_1},\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = 2, \quad b_1 = 1,\ b_2 = -n,\ b_3 = m_1.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 ya están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**36**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(2^{m-m_1}-1) + h(c_1) \\ &\leqslant (m-m_1)\log 2 + \log 2 + \log\gamma + 5\log 2 \\ &< 1.92532 \times 10^{13}(1+\log n). \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}_1} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegimos $A_1 = 5.77596 \times 10^{13}(1+\log n)$, $A_2 = 0.3$, $A_3 = 2.1$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda_2| > -C_1(1+\log n)\cdot 5.77596 \times 10^{13}(1+\log n)\cdot 0.3 \cdot 2.1,$$

y al compararla con (**38**), se deduce que

$$(n-n_1)\log\gamma < 9.84107 \times 10^{25}(1+\log n)^2.$$

En conclusión, de los dos casos obtenemos que

$$\text{máx}\{(n-n_1)\log\gamma, (m-m_1)\log 2\} < 9.84107 \times 10^{25}(1+\log n)^2. \qquad (\mathbf{39})$$

Ahora acotamos n. Para hacer esto, reescribamos la ecuación (**31**) como

$$c_1\gamma^n - c_1\gamma^{n_1} - 2^m + 2^{m_1} = -c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n + c_2\delta^{n_1} + c_3\overline{\delta}^{n_1}.$$

Tomando valor absoluto se tiene que

$$\left|c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)\gamma^{n_1} - (2^{m-m_1} - 1)2^{m_1}\right| < 4|c_2||\delta|^{n_1} \leqslant 4|c_2| < 2.$$

Dividiendo por $2^m - 2^{m_1}$, obtenemos que

$$\left|\frac{c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)}{2^{m-m_1} - 1}\gamma^{n_1}2^{-m_1} - 1\right| < \frac{2}{2^m - 2^{m_1}} \leqslant \frac{4}{2^m} < \frac{4}{\gamma^{n-8}} < \frac{1}{\gamma^{n-13}}, \qquad (\mathbf{40})$$

donde usamos que $\gamma^{n-8} < 2^m$ y $4 < \gamma^5$. Sea

$$\Lambda_3 := \frac{c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)}{2^{m-m_1} - 1}\gamma^{n_1}2^{-m_1} - 1.$$

Si $\Lambda_3 = 0$, $\sigma(\Lambda_3) = 0$ y deducimos

$$1 \leqslant (2^{m-m_1} - 1)2^{m_1} = 2^m - 2^{m_1} = |c_2(\delta^n - \delta^{n_1})| \leqslant 2|c_2| \leqslant \frac{2}{3},$$

que es una contradicción. Así $\Lambda_3 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, elegimos

$$\alpha_1 = \frac{c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)}{2^{m-m_1} - 1},\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = 2, \quad b_1 = 1,\ b_2 = n_1,\ b_3 = -m_1.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 ya están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**39**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(c_1) + h(\gamma^{n-n_1} - 1) + h(2^{m-m_1} - 1) \\ &\leqslant \log\gamma + 5\log 2 + (n - n_1)\frac{\log\gamma}{3} + (m - m_1)\log 2 + 2\log 2 \\ &< \frac{3.93644 \times 10^{26}(1 + \log n)^2}{3}. \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \max\{d_{\mathbb{L}_1} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 3.93644 \times 10^{26}(1 + \log n)^2$, $A_2 = 0.3$, $A_3 = 2.1$. Entonces del teorema de Matveev tenemos que

$$\log|\Lambda_3| > -C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot 3.93644 \times 10^{26}(1 + \log n)^2 \cdot 0.3 \cdot 2.1,$$

y al compararla con (**40**), nos da que $n < 1.90809 \times 10^{40} (\log n)^3$. Del lema 1.7, obtenemos que

$$n < 1.21793 \times 10^{47}.$$

Reduzcamos esta cota para n. Para esto, vamos a la ecuación (**35**) y consideramos

$$\Gamma := n \log \gamma - m \log 2 + \log c_1.$$

Supongamos que $\min\{n - n_1, m - m_1\} \geqslant 20$. Notemos que $e^{\Gamma} - 1 = \Lambda$. Dado que $\Lambda \neq 0$, $\Gamma \neq 0$. Si $\Gamma > 0$ entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma < e^{\Gamma} - 1 = |\Lambda| < \max\{\gamma^{n_1 - n + 14}, 2^{m_1 - m + 1}\}.$$

Si $\Gamma < 0$, se tiene que $1 - e^{\Gamma} = |e^{\Gamma} - 1| < 1/2$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma| < e^{|\Gamma|} - 1 = e^{|\Gamma|} |\Lambda| < 2 \max\{\gamma^{n_1 - n + 14}, 2^{m_1 - m + 1}\}.$$

Entonces, en ambos casos obtenemos que

$$0 < |\Gamma| < 2 \max\{\gamma^{n_1 - n + 14}, 2^{m_1 - m + 1}\}.$$

Dividiendo por $\log 2$ se tiene que

$$0 < |n\tau - m + \mu| < \max\left\{\frac{148}{\gamma^{n - n_1}}, \frac{6}{2^{m - m_1}}\right\},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log 2}, \qquad \mu := \frac{\log c_1}{\log 2}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Sea $M := 1.21793 \times 10^{47}$, la cota superior de n. Usando *Mathematica* encontramos que el denominador del convergente

$$\frac{p_{115}}{q_{115}} = \frac{224745259913651824657224705332045796463030735851962 6}{5539892570194379685318407717184223926861580420931369}$$

de τ satisface $q_{115} > 6M$ y $\varepsilon = \|q_{115}\mu\| - M\|q_{115}\tau\| = 0.419327 > 0$. Así, del lema 1.5 con $A := 148$, $B := \gamma$ o $A := 6$, $B := 2$ obtenemos que

$$n - n_1 \leqslant 444 \qquad \text{o} \qquad m - m_1 \leqslant 175.$$

Estudiemos cada uno de estos casos. Primero supongamos que $n - n_1 \leqslant 444$ y $m - m_1 \geqslant 20$. Para este caso consideramos

$$\Gamma_1 := n_1 \log \gamma - m \log 2 + \log\left(c_1(\gamma^{n - n_1} - 1)\right)$$

y vamos a (**37**). Notemos que $e^{\Gamma_1} - 1 = \Lambda_1$. Dado que $\Lambda_1 \neq 0$, $\Gamma_1 \neq 0$. Con un argumento similar al anterior obtenemos que

$$0 < |\Gamma_1| < \frac{4}{2^{m-m_1}}.$$

Dividiendo por $\log 2$ se tiene que

$$0 < |n_1\tau - m + \mu| < \frac{6}{2^{m-m_1}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log 2} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)\right)}{\log 2}.$$

Notemos que $n_1 > 0$, ya que de lo contrario tendríamos $n \leqslant 444$ que contradice $n > 500$. Por lo tanto, podemos aplicar el lema 1.5. Consideremos

$$\mu_k := \frac{\log\left(c_1(\gamma^k - 1)\right)}{\log 2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 444.$$

Con ayuda de *Mathematica* encontramos que el denominador del $115^{\underline{o}}$ convergente de τ funciona bien, esto es, $q_{115} > 6M$ y $\varepsilon_k \geqslant 0.000889789 > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, 444$. Así, del lema 1.5 con $A := 6$, $B := 2$ obtenemos que el máximo valor de $\log(q_{115} \cdot 6/\varepsilon_k)/\log 2$, para $k = 1, \ldots, 444$, es menor que 185. Por lo tanto, $m - m_1 < 185$.

Estudiemos el otro caso. Supongamos que $m - m_1 \leqslant 175$ y $n - n_1 \geqslant 20$. Para este caso consideramos

$$\Gamma_2 := n \log \gamma - m_1 \log 2 + \log\left(\frac{c_1}{2^{m-m_1} - 1}\right)$$

y vamos a (**38**). Notemos que $1 - e^{-\Gamma_2} = \Lambda_2$. Dado que $\Lambda_2 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$ y como antes, podemos deducir que

$$0 < |\Gamma_2| < \frac{2\gamma^6}{\gamma^{n-n_1}}.$$

Dividiendo por $\log 2$ se tiene que

$$0 < |n\tau - m_1 + \mu| < \frac{16}{\gamma^{n-n_1}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log 2} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(c_1/(2^{m-m_1} - 1)\right)}{\log 2}.$$

Notemos que $m_1 > 0$, ya que de lo contrario tendríamos $m \leqslant 175$, que contradice $m > 199$. Por lo tanto, podemos aplicar el lema 1.5 nuevamente. Consideremos

$$\mu_\ell := \frac{\log\left(c_1/(2^\ell - 1)\right)}{\log 2} \qquad \ell = 1, \dots, 175.$$

Con *Mathematica*, encontramos que el mismo denominador del 115º convergente de τ trabaja bien, esto es, $q_{115} > 6M$ y $\varepsilon_\ell \geqslant 0.0016923 > 0$ para todo $\ell = 1, 2, \dots, 175$. Así, del lema 1.5 con $A := 16$, $B := \gamma$ obtenemos que el máximo valor de $\log(q_{115} \cdot 16/\varepsilon_\ell)/\log\gamma$, para $\ell = 1, \dots, 175$, es menor que 457. Por lo tanto $n - n_1 < 457$.

Ahora, resumimos lo que hemos hecho. Obtuvimos que $n - n_1 \leqslant 444$ o $m - m_1 \leqslant 175$. Suponiendo el primero, obtuvimos $m - m_1 \leqslant 184$ y, suponiendo el segundo obtuvimos $n - n_1 \leqslant 456$. En conjunto, tenemos $n - n_1 \leqslant 456$ y $m - m_1 \leqslant 184$. Por lo tanto, queda por estudiar este caso. Para hacer esto, consideramos

$$\Gamma_3 := n_1 \log\gamma - m_1 \log 2 + \log\left(\frac{c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)}{2^{m-m_1} - 1}\right),$$

y vamos a (**40**). Notemos que $e^{\Gamma_3} - 1 = \Lambda_3$. Dado que $\Lambda_3 \neq 0$, $\Gamma_3 \neq 0$. Como antes, podemos deducir que

$$0 < |\Gamma_3| < \frac{2 \cdot \gamma^{13}}{\gamma^n}.$$

Dividiendo por $\log 2$ tenemos que

$$0 < |n_1\tau - m_1 + \mu| < \frac{112}{\gamma^n},$$

donde

$$\tau := \frac{\log\gamma}{\log 2} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)/(2^{m-m_1} - 1)\right)}{\log 2}.$$

Como antes, notemos que $n_1 > 0$ y $m_1 > 0$. Así, aplicamos el lema 1.5 nuevamente. Consideramos

$$\mu_{k,\ell} := \frac{\log\left(c_1(\gamma^k - 1)/(2^\ell - 1)\right)}{\log 2}, \quad k = 1, \dots, 456, \quad \ell = 1, \dots, 184.$$

Nuevamente, con la ayuda de *Mathematica* encontramos que el mismo denominador del 115º convergente de τ también trabaja bien en este caso, esto es, $q_{115} > 6M$ y $\varepsilon_{k,\ell} \geqslant 5.27716 \times 10^{-6} > 0$ para todo $k = 1, \dots, 456$, $\ell = 1, \dots, 184$. Entonces, del lema 1.5 con $A := 112$, $B := \gamma$ encontramos que el máximo valor de $\log(q_{115} \cdot 112/\varepsilon_{k,\ell})/\log\gamma$, para $k = 1, \dots, 456$ y $\ell = 1, \dots, 184$ es menor que 484. Por lo tanto $n \leqslant 483$, que contradice nuestra suposición sobre n. $\square$

3.2. Con las sucesiones de Fibonacci y de Padovan

Para la ecuación (**32**), con las convenciones tomadas para la sucesión de Fibonacci y de Padovan tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Todas las soluciones enteras no negativas* (n, m, n_1, m_1) *de la ecuación* (**32**) *pertenecen al conjunto*

$$\left\{\begin{array}{cccc}
(3,2,0,0), & (3,3,0,2), & (3,4,0,3), & (5,2,3,0),\\
(5,3,3,2), & (5,3,0,0), & (5,4,3,3), & (5,4,0,2),\\
(5,5,0,4), & (6,2,5,0), & (6,3,5,2), & (6,3,3,0),\\
(6,4,5,3), & (6,4,3,2), & (6,4,0,0), & (6,5,3,4),\\
(6,5,0,3), & (6,6,0,5), & (7,2,6,0), & (7,3,6,2),\\
(7,3,5,0), & (7,4,6,3), & (7,4,5,2), & (7,4,3,0),\\
(7,5,5,4), & (7,5,3,3), & (7,5,0,2), & (7,6,3,5),\\
(8,2,7,0), & (8,3,7,2), & (8,3,6,0), & (8,4,7,3),\\
(8,4,6,2), & (8,4,5,0), & (8,5,6,4), & (8,5,5,3),\\
(8,5,3,2), & (8,5,0,0), & (8,6,5,5), & (8,6,0,4),\\
(8,7,0,6), & (9,3,8,0), & (9,4,8,2), & (9,4,7,0),\\
(9,5,8,4), & (9,5,7,3), & (9,5,6,2), & (9,5,5,0),\\
(9,6,7,5), & (9,6,5,4), & (9,6,3,3), & (9,6,0,2),\\
(9,7,5,6), & (10,3,9,0), & (10,4,9,2), & (10,5,9,4),\\
(10,5,8,2), & (10,5,7,0), & (10,6,7,4), & (10,6,6,3),\\
(10,6,5,2), & (10,6,3,0), & (10,7,7,6), & (10,7,3,5),\\
(10,8,3,7), & (11,4,10,0), & (11,5,10,3), & (11,5,9,0),\\
(11,6,10,5), & (11,6,9,4), & (11,6,8,2), & (11,6,7,0),\\
(11,7,9,6), & (11,7,7,5), & (11,7,5,4), & (11,7,3,3),\\
(11,7,0,2), & (11,8,7,7), & (12,5,11,2), & (12,6,10,2),\\
(12,7,8,3), & (12,7,7,2), & (12,7,6,0), & (12,8,6,6),\\
(12,8,0,5), & (12,9,6,8), & (13,5,12,0), & (13,6,12,4),\\
(13,7,12,6), & (13,7,10,2), & (13,8,8,5), & (13,8,6,4),\\
(13,8,5,3), & (13,8,3,2), & (13,8,0,0), & (13,9,0,7),\\
(13,10,0,9), & (14,6,13,2), & (14,7,12,2), & (14,8,11,5),\\
(14,8,10,3), & (14,8,9,0), & (14,9,9,7), & (14,9,5,6),\\
(14,10,9,9), & (15,8,13,5), & (15,8,12,0), & (15,9,12,7),\\
(15,9,8,3), & (15,9,7,2), & (15,9,6,0), & (15,10,12,9),\\
(15,10,6,8), & (15,11,6,10), & (16,7,15,2), & (16,8,14,0),\\
(16,9,14,7), & (16,9,12,2), & (16,10,14,9), & (16,10,9,7),\\
(16,10,5,6), & (17,8,16,5), & (17,10,11,3), & (18,8,17,0),\\
(18,9,17,7), & (18,10,17,9), & (18,11,8,6), & (18,11,5,5),\\
(18,11,0,4), & (19,11,14,4), & (19,12,7,9), & (20,11,17,4),
\end{array}\right\}.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} (20,12,14,8), & (20,12,11,5), & (20,12,10,3), & (20,12,9,0), \\ (20,13,9,11), & (20,14,9,13), & (21,11,19,4), & (21,13,3,9), \\ (22,13,15,5), & (23,11,22,4), & (25,15,10,4), & (25,15,9,2) \end{array}\right\}.$$

El conjunto de los números enteros que se pueden escribir como la diferencia de un número de Padovan y un número de Fibonacci en al menos dos formas distintas es:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} -226, & -82, & -52, & -34, & -33, & -30, & -27, & -18, & -13, \\ -12, & -9, & -8, & -6, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ 9, & 10, & 11, & 13, & 15, & 16, & 20, & 25, & 28, \\ 31, & 32, & 36, & 44, & 52, & 62, & 65, & 111, & 262. \end{array}\right\}.$$

Las representaciones de cada uno de estos números son:

$$\begin{aligned}
-226 &= P_{20} - F_{14} = P_9 - F_{13}; \\
-82 &= P_{20} - F_{13} = P_9 - F_{11}; \\
-52 &= P_{15} - F_{11} = P_6 - F_{10}; \\
-34 &= P_{13} - F_{10} = P_0 - F_9; \\
-33 &= P_{21} - F_{13} = P_3 - F_9; \\
-30 &= P_{19} - F_{12} = P_7 - F_9; \\
-27 &= P_{14} - F_{10} = P_9 - F_9; \\
-18 &= P_{12} - F_9 = P_6 - F_8 = P_{15} - F_{10}; \\
-13 &= P_{13} - F_9 = P_0 - F_7; \\
-12 &= P_{10} - F_8 = P_3 - F_7; \\
-9 &= P_{11} - F_8 = P_7 - F_7; \\
-8 &= P_8 - F_7 = P_0 - F_6; \\
-6 &= P_{16} - F_{10} = P_{14} - F_9 = P_9 - F_7 = P_5 - F_6; \\
-5 &= P_{12} - F_8 = P_6 - F_6 = P_0 - F_5; \\
-4 &= P_{10} - F_7 = P_7 - F_6 = P_3 - F_5; \\
-3 &= P_{18} - F_{11} = P_8 - F_6 = P_5 - F_5 = P_0 - F_4; \\
-2 &= P_6 - F_5 = P_3 - F_4 = P_0 - F_3; \\
-1 &= P_{11} - F_7 = P_9 - F_6 = P_7 - F_5 = P_5 - F_4 = P_3 - F_3 = P_0 - F_2; \\
0 &= P_{13} - F_8 = P_8 - F_5 = P_6 - F_4 = P_5 - F_3 = P_3 - F_2 = P_0 - F_0; \\
1 &= P_{10} - F_6 = P_7 - F_4 = P_6 - F_3 = P_5 - F_2 = P_3 - F_0; \\
2 &= P_9 - F_5 = P_8 - F_4 = P_7 - F_3 = P_6 - F_2 = P_5 - F_0; \\
3 &= P_{15} - F_9 = P_{12} - F_7 = P_8 - F_3 = P_7 - F_2 = P_6 - F_0;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4 &= P_{11} - F_6 = P_{10} - F_5 = P_9 - F_4 = P_8 - F_2 = P_7 - F_0;\\
5 &= P_9 - F_3 = P_8 - F_0;\\
6 &= P_{25} - F_{15} = P_{10} - F_4 = P_9 - F_2;\\
7 &= P_{20} - F_{12} = P_{14} - F_8 = P_{11} - F_5 = P_{10} - F_3 = P_9 - F_0;\\
8 &= P_{13} - F_7 = P_{12} - F_6 = P_{10} - F_2;\\
9 &= P_{11} - F_4 = P_{10} - F_0;\\
10 &= P_{17} - F_{10} = P_{11} - F_3;\\
11 &= P_{12} - F_5 = P_{11} - F_2;\\
13 &= P_{13} - F_6 = P_{12} - F_4;\\
15 &= P_{16} - F_9 = P_{14} - F_7 = P_{12} - F_2;\\
16 &= P_{15} - F_8 = P_{13} - F_5 = P_{12} - F_0;\\
20 &= P_{14} - F_6 = P_{13} - F_2;\\
25 &= P_{19} - F_{11} = P_{14} - F_4;\\
28 &= P_{16} - F_8 = P_{14} - F_0;\\
31 &= P_{18} - F_{10} = P_{17} - F_9;\\
32 &= P_{22} - F_{13} = P_{15} - F_5;\\
36 &= P_{16} - F_7 = P_{15} - F_2;\\
44 &= P_{17} - F_8 = P_{16} - F_5;\\
52 &= P_{18} - F_9 = P_{17} - F_7;\\
62 &= P_{20} - F_{11} = P_{17} - F_4;\\
65 &= P_{18} - F_8 = P_{17} - F_0;\\
111 &= P_{21} - F_{11} = P_{19} - F_4;\\
262 &= P_{23} - F_{11} = P_{22} - F_4.
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea (n, m, n_1, m_1) una solución entera no negativa de (**32**) donde $(n, m) \neq (n_1, m_1)$, $n, n_1 \neq 1, 2, 4$ y $m, m_1 \neq 1$. Notemos que si $m = m_1$, $P_n = P_{n_1}$ que implica $n = n_1$, que es una contradicción. Por lo tanto, suponemos que $m > m_1$. Reescribiendo la ecuación (**32**) como

$$P_n - P_{n_1} = F_m - F_{m_1} \tag{41}$$

observamos que el lado derecho es positivo. Por lo tanto, el lado izquierdo también lo es, así $n > n_1$. Ahora, comparando ambos lados de (**41**) usando (**7**) tenemos que

$$\gamma^{n-8} \leqslant P_n - P_{n_1} = F_m - F_{m_1} \leqslant F_m \leqslant \alpha^{m-1}.$$

En efecto, la desigualdad del lado izquierdo es clara si $n_1 = 0$. Si $n_1 = 3, n \geqslant 5$. Para $n = 5$ también es clara, pues $P_5 = 2$ y para $n \geqslant 6$ tenemos $P_n - P_{n_1} \geqslant$

$P_n - P_{n-1} = P_{n-5} \geqslant \gamma^{n-8}$. La desigualdad del lado derecho es clara. De forma similar,

$$\gamma^{n-1} \geqslant P_n - P_{n_1} = F_m - F_{m_1} \geqslant \alpha^{m-4}.$$

donde la desigualdad del lado derecho es clara para ambos $m_1 = 0$ y $m_1 \neq 0$. Así, $\gamma^{n-8} \leqslant \alpha^{m-1}$ y $\gamma^{n-1} \geqslant \alpha^{m-4}$ de donde se sigue que

$$(n-8)\frac{\log\gamma}{\log\alpha} \leqslant m-1 \qquad \text{y} \qquad (n-1)\frac{\log\gamma}{\log\alpha} \geqslant m-4. \tag{42}$$

Como $\log\gamma/\log\alpha = 0.584357...$ tenemos que si $n \leqslant 540$, $m \leqslant 318$. Usando *Mathematica*, corremos un programa en el rango $0 \leqslant n_1 < n \leqslant 540$, $0 \leqslant m_1 < m \leqslant 318$ y, con nuestras convenciones, obtenemos todas las soluciones en el enunciado de este teorema. En lo que sigue demostraremos que éstas son todas.

A partir de ahora, suponemos que $n > 540$. Entonces de (**42**), tenemos que $m > 311$ y que $n > m$. De las fórmulas de Binet (**6**), podemos reescribir (**32**) como

$$c_1\gamma^n - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = -c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} + P_{n_1} - F_{m_1}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$\left|c_1\gamma^n - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}}\right| \leqslant 2|c_2||\delta|^n + \frac{1}{\sqrt{5}} + \gamma^{n_1-1} + \alpha^{m_1-1} < \text{máx}\{\gamma^{n_1+6}, \alpha^{m_1+4}\},$$

donde usamos que $2 < \gamma^3$ y $2 < \alpha^2$. Dividiendo por $\alpha^m/\sqrt{5}$ se tiene que

$$\left|\sqrt{5}c_1\gamma^n\alpha^{-m} - 1\right| < \text{máx}\{\gamma^{n_1-n+16}, \alpha^{m_1-m+6}\}, \tag{43}$$

donde usamos que $\gamma^{n-8} \leqslant \alpha^{m-1}$, $\sqrt{5} < \alpha\gamma^2$ y $\sqrt{5} < \alpha^2$. Sea

$$\Lambda := \sqrt{5}c_1\gamma^n\alpha^{-m} - 1.$$

Afirmamos que $\Lambda \neq 0$. Para ver esto, consideramos el $\mathbb{Q}$-automorfismo σ de la extensión de Galois $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, \gamma, \delta)$ sobre $\mathbb{Q}$ definido por $\sigma(\gamma) := \delta, \sigma(\delta) := \gamma$ y $\sigma(\alpha) := \alpha$. Este σ se obtiene, por ejemplo, considerando la inclusión de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en $\mathbb{K}$ y extendemos ésta a $\mathbb{K}$ precisamente como σ, ya que $X^3 - X - 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$. De hecho, dado que $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\gamma, \delta) = \mathbb{Q}$ tenemos que

$$\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \times \text{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma, \delta)/\mathbb{Q}),$$

y notamos que σ es la extensión de la identidad en $\mathbb{Q}(\alpha)$ a $\mathbb{Q}(\gamma, \delta)$. Ahora, si $\Lambda = 0$, $\sigma(\Lambda) = 0$ y tenemos que

$$\frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = \sigma(c_1\gamma^n) = c_2\delta^n.$$

Al tomar valor absoluto se obtiene

$$\frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = |c_2||\delta|^n < 1,$$

que es una contradicción, pues $m > 311$. Así, $\Lambda \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, definiremos los parametros que se necesitan en este teorema. Dado que en esta demostración aplicaremos un par de veces el teorema de Matveev sobre el campo $\mathbb{Q}(\gamma, \alpha)$ para $\ell = 3$, fijamos el campo $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\gamma, \alpha)$, en particular, $d_{\mathbb{L}} = 6$. Por lo tanto también fijamos la constante

$$C := 1.43908 \times 10^{13} > 1.4 \cdot (30)^{3+3} \cdot 3^{4.5} \cdot 6^2 \cdot (1 + \log 6).$$

Así, consideramos

$$\alpha_1 = \sqrt{5}c_1,\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = \alpha, \quad b_1 = 1,\ b_2 = n,\ b_3 = -m.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. En la demostración del teorema 2.1 se obtuvo que $h(c_1) \leqslant \log\gamma + 5\log 2, h(\alpha_2) = \log\gamma/3$ y $h(\alpha_3) = \log\alpha/2$. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 para concluir que

$$h(\alpha_1) \leqslant h(\sqrt{5}) + h(c_1) \leqslant \log\gamma + 7\log 2.$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 30.8$, $A_2 = 0.57$ y $A_3 = 1.45$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda| > -C(1 + \log n) \cdot 30.8 \cdot 0.57 \cdot 1.45 > -3.66336 \times 10^{14}(1 + \log n),$$

y al compararla con (**43**), se deduce que

$$\text{mín}\{(n - n_1)\log\gamma, (m - m_1)\log\alpha\} \leqslant 3.66337 \times 10^{14}(1 + \log n). \qquad (\mathbf{44})$$

Estudiemos cada una de estas dos posibilidades.

Caso 1. $\text{mín}\{(n - n_1)\log\gamma, (m - m_1)\log\alpha\} = (n - n_1)\log\gamma$.

Para este caso de las fórmulas de Binet (**6**), reescribimos (**32**) como

$$c_1\gamma^n - c_1\gamma^{n_1} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = -c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n + c_2\delta^{n_1} + c_3\overline{\delta}^{n_1} - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} - F_{m_1}.$$

Tomando valor absoluto obtenemos que

$$\left|c_1(\gamma^{n-n_1} - 1)\gamma^{n_1} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}}\right| \leqslant 4|c_2||\delta|^{n_1} + 1 + \alpha^{m_1-1} < 2 \cdot \alpha^{m_1+2} \leqslant \alpha^{m_1+4},$$

donde usamos que $2 < \alpha^2$. Dividiendo por $\alpha^m/\sqrt{5}$ se tiene que

$$\left|c_1\sqrt{5}(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1}\alpha^{-m}-1\right| < \frac{1}{\alpha^{m-m_1-6}}, \tag{45}$$

donde usamos que $\sqrt{5} < \alpha^2$. Sea $\Lambda_1 := c_1\sqrt{5}(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1}\alpha^{-m}-1$. Afirmamos que $\Lambda_1 \neq 0$. De lo contrario, aplicamos el σ anterior y tenemos $\sigma(\Lambda_1) = 0$. Entonces tomando valor absoluto se obtiene que

$$\frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = |\sigma(c_1)(\delta^n - \delta^{n_1})| \leqslant 2|c_2| < 1,$$

que es una contradicción, pues $m > 311$. Así, $\Lambda_1 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, consideramos

$$\alpha_1 = \sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1}-1),\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = \alpha, \quad b_1 = 1,\ b_2 = n_1,\ b_3 = -m.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**44**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(\sqrt{5}) + h(c_1) + h(\gamma^{n-n_1}-1) \\ &\leqslant \log\sqrt{5} + \log\gamma + 5\log 2 + (n-n_1)\frac{\log\gamma}{3} + \log 2 \\ &< \frac{3.66338\times 10^{14}}{3}(1+\log n). \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}}\cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1,2,3$, podemos elegir $A_1 = 7.32676\times 10^{14}(1+\log n)$, $A_2 = 0.57$ y $A_3 = 1.45$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda_1| > -C(1+\log n)\cdot(7.32676\times 10^{14}(1+\log n))\cdot 0.57\cdot 1.45,$$

y al compararla con (**45**), se deduce que

$$(m-m_1)\log\alpha < 8.71446\times 10^{27}(1+\log n)^2.$$

Caso 2. $\text{mín}\{(n-n_1)\log\gamma, (m-m_1)\log\alpha\} = (m-m_1)\log\alpha$.

Para este caso de las fórmulas de Binet (**6**), reescribimos (**32**) como

$$c_1\gamma^n - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{m_1}}{\sqrt{5}} = -c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} + P_{n_1} + \frac{\beta^{m_1}}{\sqrt{5}}.$$

Tomando valor absoluto se tiene que

$$\left|c_1\gamma^n - \frac{(\alpha^{m-m_1}-1)\alpha^{m_1}}{\sqrt{5}}\right| < \gamma^{n_1-1} + 2|c_2| + 1 < \gamma^{n_1+4},$$

donde usamos que $2 < \gamma^3$. Dividiendo por $c_1\gamma^n$ obtenemos que

$$\left|1 - \left(\frac{\alpha^{m-m_1}-1}{\sqrt{5}c_1}\right)\gamma^{-n}\alpha^{m_1}\right| < \frac{1}{\gamma^{n-n_1-7}}, \qquad (\mathbf{46})$$

donde usamos que $1 < c_1\gamma^3$. Sea $\Lambda_2 := 1 - ((\alpha^{m-m_1}-1)/\sqrt{5}c_1)\gamma^{-n}\alpha^{m_1}$. Afirmamos que $\Lambda_2 \neq 0$. Si no, entonces aplicando el σ anterior obtenemos que $\sigma(\Lambda_2) = 0$. Tomando valor absoluto se tiene

$$1 < \frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{\alpha^m - \alpha^{m_1}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}|c_2||\delta|^n < \sqrt{5}|c_2| < 1,$$

que es una contradicción, pues $m > 311$. Así, $\Lambda_2 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, consideramos

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^{m-m_1}-1}{\sqrt{5}c_1},\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = \alpha, \quad b_1 = 1,\ b_2 = -n,\ b_3 = m_1.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 ya están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**44**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(\alpha^{m-m_1}-1) + h(\sqrt{5}) + h(c_1) \\ &\leqslant (m-m_1)\frac{\log\alpha}{2} + \log 2 + \log\sqrt{5} + \log\gamma + 5\log 2 \\ &< \frac{3.66338 \times 10^{14}(1+\log n)}{2}. \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \text{máx}\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log\alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 1.09901 \times 10^{15}(1+\log n)$, $A_2 = 0.57$ y $A_3 = 1.45$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log|\Lambda_2| > -C(1+\log n)\cdot\big(1.09901 \times 10^{15}(1+\log n)\big)\cdot 0.57 \cdot 1.45,$$

y al compararla con (**46**), se deduce que

$$(n-n_1)\log\gamma < 1.30717 \times 10^{28}(1+\log n)^2.$$

En conclusión de los dos casos obtenemos que

$$\max\{(n-n_1)\log\gamma, (m-m_1)\log 2\} < 1.30717\times 10^{28}(1+\log n)^2. \qquad (\mathbf{47})$$

Ahora acotamos n. Para esto, reescribamos la ecuación (**32**) como

$$c_1\gamma^n - c_1\gamma^{n_1} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{m_1}}{\sqrt{5}} = -c_2\delta^n - c_3\overline{\delta}^n + c_2\delta^{n_1} + c_3\overline{\delta}^{n_1} - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^{m_1}}{\sqrt{5}}.$$

Tomando valor absoluto se tiene que

$$\left| c_1(\gamma^{n-n_1}-1)\gamma^{n_1} - \frac{(\alpha^{m-m_1}-1)\alpha^{m_1}}{\sqrt{5}} \right| < 4|c_2| + 1 < 2.2.$$

Dividiendo por $(\alpha^m - \alpha^{m_1})/\sqrt{5}$ obtenemos que

$$\left| \left(\sqrt{5}c_1\frac{\gamma^{n-n_1}-1}{\alpha^{m-m_1}-1}\right)\gamma^{n_1}\alpha^{-m_1} - 1 \right| < \frac{2.2\cdot\sqrt{5}}{\alpha^m - \alpha^{m_1}} \leqslant \frac{6.6\cdot\sqrt{5}}{\alpha^m} < \frac{1}{\gamma^{n-16}}, \qquad (\mathbf{48})$$

donde usamos que $\gamma^{n-8} < \alpha^{m-1}$ y $6.6\cdot\sqrt{5} < \alpha\gamma^8$. Sea

$$\Lambda_3 := (\sqrt{5}c_1((\gamma^{n-n_1}-1)/(\alpha^{m-m_1}-1))\gamma^{n_1}\alpha^{-m_1} - 1.$$

Como anteriormente, si $\Lambda_3 = 0$ aplicando σ obtenemos que $\sigma(\Lambda_3) = 0$. Entonces al tomar valor absoluto, se tiene que

$$1 < \frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{\alpha^m - \alpha^{m_1}}{\sqrt{5}} = |c_2(\delta^n - \delta^{n_1})| \leqslant 2|c_2| < \frac{2}{3},$$

y como antes, tenemos una contradicción. Así, $\Lambda_3 \neq 0$ y aplicamos el teorema de Matveev. Para esto, consideramos

$$\alpha_1 = \sqrt{5}c_1\frac{\gamma^{n-n_1}-1}{\alpha^{m-m_1}-1},\ \alpha_2 = \gamma,\ \alpha_3 = \alpha, \quad b_1 = 1,\ b_2 = n_1,\ b_3 = -m_1.$$

Entonces $B = n$. Para elegir los A_i's necesitamos calcular las alturas de α_1, α_2 y α_3. Las alturas de α_2 y α_3 ya están calculadas. Para α_1 usamos las propiedades de la altura logarítmica dadas en el capítulo 1, sección 2 y la desigualdad (**47**) para concluir que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &\leqslant h(\sqrt{5}) + h(c_1) + h(\gamma^{n-n_1}-1) + h(\alpha^{m-m_1}-1) \\ &\leqslant \log\sqrt{5} + \log\gamma + 5\log 2 + (n-n_1)\frac{\log\gamma}{3} + (m-m_1)\frac{\log\alpha}{2} + 2\log 2 \\ &< \frac{6.53586\times 10^{28}(1+\log n)^2}{6}. \end{aligned}$$

Como $A_i \geqslant \max\{d_{\mathbb{L}} \cdot h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0.16\}$ para $i = 1, 2, 3$, podemos elegir $A_1 = 6.53586 \times 10^{28}(1 + \log n)^2$, $A_2 = 0.57$ y $A_3 = 1.45$. Entonces del teorema de Matveev se sigue que

$$\log |\Lambda_3| > -C \cdot \left((1 + \log n) \cdot 6.53586 \times 10^{28}(1 + \log n)^2\right) \cdot 0.57 \cdot 1.45,$$

y al compararla con (**48**) nos da que $n < 2.2116 \times 10^{43}(\log n)^3$. Del lema 1.7, obtenemos que

$$n < 1.75894 \times 10^{50}. \tag{49}$$

Reduzcamos esta cota para n. Para esto, consideramos

$$\Gamma := n \log \gamma - m \log \alpha + \log\left(\sqrt{5}\, c_1\right),$$

y vamos a (**43**). Supongamos que $\min\{n - n_1, m - m_1\} \geqslant 20$. Notemos que $e^\Gamma - 1 = \Lambda$. Dado que $\Lambda \neq 0$, $\Gamma \neq 0$. Si $\Gamma > 0$ entonces obtenemos que

$$0 < \Gamma < e^\Gamma - 1 = |\Lambda| < \max\{\gamma^{n_1 - n + 16}, \alpha^{m_1 - m + 6}\}.$$

Si $\Gamma < 0$, se tiene que $1 - e^\Gamma = |e^\Gamma - 1| = |\Lambda| < 1/2$. De aquí se sigue que $e^{|\Gamma|} < 2$. Así,

$$0 < |\Gamma| < e^{|\Gamma|} - 1 = e^{|\Gamma|}|\Lambda| < 2 \max\{\gamma^{n_1 - n + 16}, \alpha^{m_1 - m + 6}\}.$$

Entonces, en ambos casos obtenemos que

$$0 < |\Gamma| < 2 \max\{\gamma^{n_1 - n + 16}, \alpha^{m_1 - m + 6}\}.$$

Dividiendo por $\log \alpha$ se tiene que

$$0 < |n\tau - m + \mu| < \max\left\{\frac{374}{\gamma^{n - n_1}}, \frac{75}{\alpha^{m - m_1}}\right\},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log \alpha}, \qquad \mu := \frac{\log\left(\sqrt{5}\, c_1\right)}{\log \alpha}.$$

Ahora aplicamos el lema 1.5. Sea $M := 1.75894 \times 10^{50}$, cota superior de n por (**49**). Con ayuda de *Mathematica* encontramos que el denominador del convergente

$$\frac{p_{111}}{q_{111}} = \frac{105501811029038441927958274901502152509227085450395179 97}{18054337085897707605265391296915471978898809258369491754}$$

de τ satisface que $q_{111} > 6M$ y que $\varepsilon := \|q_{111}\mu\| - M\|q_{111}\tau\| = 0.450294 > 0$. Así, del lema 1.5 con $A := 374$, $B := \gamma$ o $A := 75$, $B := \alpha$, obtenemos que

$$n - n_1 \leqslant 476 \qquad \text{o} \qquad m - m_1 \leqslant 275.$$

Estudiemos cada uno de estos dos casos. Primero supongamos que $n-n_1 \leqslant 476$ y $m-m_1 \geqslant 20$. Para este caso, consideramos

$$\Gamma_1 := n_1 \log \gamma - m \log \alpha + \log(\sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1} - 1))$$

y vamos a (**45**). Notemos que $e^{\Gamma_1} - 1 = \Lambda_1$. Dado que $\Lambda_1 \neq 0$, $\Gamma_1 \neq 0$ y, con un argumento similar al anterior obtenemos que

$$0 < |\Gamma_1| < \frac{2\alpha^6}{\alpha^{m-m_1}}.$$

Dividiendo por $\log \alpha$ se tiene que

$$0 < |n_1\tau - m + \mu| < \frac{75}{\alpha^{m-m_1}},$$

donde

$$\tau := \frac{\log \gamma}{\log \alpha} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log(\sqrt{5}c_1(\gamma^{n-n_1} - 1))}{\log \alpha}.$$

Notemos que $n_1 > 0$, ya que de lo contrario tendríamos $n \leqslant 476$ que contradice $n > 540$. Por lo tanto, podemos aplicar el lema 1.5. Consideremos

$$\mu_k := \frac{\log(\sqrt{5}c_1(\gamma^k - 1))}{\log \alpha}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 476.$$

Con la ayuda de *Mathematica* encontramos que el denominador del 111º convergente de τ es tal que $q_{111} > 6M$ y $\varepsilon_k \geqslant 0.00129842 > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, 476$. Así, del lema 1.5 con $A := 75$, $B := \alpha$ obtenemos que el máximo valor de $\log(q_{111} \cdot 75/\varepsilon_k)/\log \alpha$, para $k = 1, 2, \ldots, 476$, es menor que 287. Por lo tanto $m - m_1 \leqslant 287$.

Ahora estudiamos el otro caso. Supongamos que $m - m_1 \leqslant 275$ y $n - n_1 \geqslant 20$. Para este caso consideramos

$$\Gamma_2 := n \log \gamma - m_1 \log \alpha + \log\left(\frac{\sqrt{5}c_1}{\alpha^{m-m_1} - 1}\right)$$

y vamos a (**46**). Notemos que $1 - e^{-\Gamma_2} = \Lambda_2$. Dado que $\Lambda_2 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$ y, con un argumento similar al dado anteriormente concluimos que

$$0 < |\Gamma_2| < \frac{2\gamma^7}{\gamma^{n-n_1}}.$$

Dividiendo por $\log \alpha$ se tiene que

$$0 < |n\tau - m_1 + \mu| < \frac{30}{\gamma^{n-n_1}}.$$

donde

$$\tau := \frac{\log\gamma}{\log\alpha} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(\sqrt{5}c_1/(\alpha^{m-m_1}-1)\right)}{\log\alpha}.$$

Notemos que $m_1 > 0$, ya que de lo contrario tendríamos $m \leqslant 275$, que contradice $m > 311$. Por lo tanto, podemos aplicar el lema 1.5 otra vez. Consideremos

$$\mu_\ell := \frac{\log\left(\sqrt{5}c_1/(\alpha^\ell-1)\right)}{\log\alpha}, \qquad \ell = 1,\ldots,275.$$

Nuevamente, con *Mathematica* encontramos que el mismo denominador del 111º convergente de τ satisface que $q_{111} > 6M$ y $\varepsilon_\ell > 0.000693865 > 0$ para todo $\ell = 1,\ldots,257$. Así, del lema 1.5 con $A := 30$, $B := \gamma$ obtenemos que el máximo valor de $\log(q_{111}\cdot 30/\epsilon_\ell)/\log\gamma$, para $\ell = 1,\ldots,257$ es $\leqslant 490$. Por lo tanto, $n - n_1 \leqslant 490$.

Resumamos lo que hemos hecho. Obtuvimos que $n-n_1 \leqslant 476$ o $m-m_1 \leqslant 275$. Suponiendo el primero obtuvimos que $m-m_1 \leqslant 287$, y suponiendo el segundo obtuvimos que $n-n_1 \leqslant 490$. Entonces, en conjunto, tenemos que $n-n_1 \leqslant 490$, $m-m_1 \leqslant 287$. Por lo tanto, queda por estudiar este caso. Para hacer esto, consideramos

$$\Gamma_3 := n_1\log\gamma - m_1\log\alpha + \log\left(\sqrt{5}c_1\frac{\gamma^{n-n_1}-1}{\alpha^{m-m_1}-1}\right),$$

y vamos a (**48**). Notemos que $e^{\Gamma_3} - 1 = \Lambda_3$. Dado que $\Lambda_3 \neq 0$, $\Gamma_3 \neq 0$ y dado que $n > 540$ con un argumento como los anteriores tenemos que

$$0 < |\Gamma_3| < \frac{2\gamma^{16}}{\gamma^n}.$$

Dividiendo por $\log\alpha$ obtenemos que

$$o < |n_1\tau - m_1 - \mu| < \frac{374}{\gamma^n},$$

donde

$$\tau := \frac{\log\gamma}{\log\alpha} \quad \text{y} \quad \mu := \frac{\log\left(\sqrt{5}c_1\left(\gamma^{n-n_1} - 1/\alpha^{m-m_1}-1\right)\right)}{\log\alpha}.$$

Como antes, notamos que n_1 y m_1 son positivos. Así, aplicamos el lema 1.5 nuevamente. Consideramos

$$\mu_{k,l} := \frac{\log\left(\sqrt{5}c_1\left(\gamma^k - 1/\alpha^\ell - 1\right)\right)}{\log\alpha}, \qquad k = 1,\ldots,490 \quad \ell = 1,\ldots,287.$$

Con *Mathematica* encontramos que el mismo denominador del 111º convergente de τ trabaja de nuevo, esto es, $q_{111} > 6M$ y $\varepsilon_{k,\ell} \geq 5.28933^{-8} > 0$ para todo $k = 1, \dots, 490$ y $\ell = 1, \dots, 287$. Así, por el lema 1.5 con $A := 374$ y $B := \gamma$ obtenemos que el máximo valor de $\log(q_{111} 374/\varepsilon_{k,\ell})/\log\gamma$, para $k = 1, \dots, 490$ y $\ell = 1, \dots, 287$, es $\leqslant 533$. Por lo tanto, $n \leqslant 533$ lo que contradice nuestra suposición sobre n. $\square$

Apéndice A

Programa

Aquí, se presentan los comandos de *Mathematica* que se usaron para completar el estudio de nuestras ecuaciones diofánticas. En particular, el programa abajo encuentra las soluciones de la ecuación diofántica (**12**). Los demás son análogos.

El paquete *Mathematica* hace sus aproximaciones con 10 digitos después del punto. Para mejorar nuestros cálculos usamos el comando

```
$MaxExtraPrecision = 200,
```

que sirve para hacer las aproximaciones con 200 digitos después del punto y que es suficiente para nuestros cálculos. Con esta precisión, encontramos los convergentes a partir del comando

```
Convergents[x, n].
```

El programa para encontrar las soluciones de la ecuación diofántica (**12**), para el caso 1 es el siguiente:

```
Clear[J]; J := {};
For[n = 1, n <= 200, n++,
 For[m = 0, m <= 120, m++,
  If[2*p[n] - Fibonacci[m] == 0, J = AppendTo[J, {n, m}]]]]; J;
```

mientras que, para el caso 2,

```
Clear[S]; S := {};
For[n = 1, n <= 330, n++,
 For[n_1 = 0, n_1 < n, n_1++,
  For[m = 0, m <= 196, m++,
   If[p[n] + p[n_1] - Fibonacci[m] == 00,
    S = AppendTo[S, {n, n_1, m}]]]]]; S,
```

donde p[n] denota la sucesión de Padovan.

Bibliografía

[1] J. Aarts, R. Fokkink, G. Kruijtzer, Morphic numbers, *Nieuw Arch. Wiskd. (5)* **2**(1), 56–58, 2001.

[2] A. Baker, H. Davenport, The equations $3X^2 - 2 = Y^2$ and $8X^2 - 7 = Z^2$, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **20**, 129–137, 1969.

[3] E. F. Bravo, J.J. Bravo, Powers of two as sums of three Fibonacci numbers, *Lith. Math. J.* **55**(3), 301–311, 2015.

[4] J.J. Bravo, B. Faye, F. Luca, Powers of two as sums of three Pell numbers, *Taiwanese J. Math.* **21**(4), 739–751, 2017.

[5] J.J. Bravo, C. A. Gómez, F. Luca, Powers of two as sums of two k-Fibonacci numbers, *Miskolc Math. Notes* **17**(1), 85–100, 2016.

[6] J.J. Bravo, F. Luca, Powers of two as sums of two Lucas numbers, *J. Integer Seq.* **17**(8) Article 14.8.3, 12 pp., 2014.

[7] J.J. Bravo, F. Luca, On the Diophantine equation $F_n + F_m = 2^a$, *Quaest. Math.* **39**(3), 391–400, 2016.

[8] J. J. Bravo, F. Luca, K. Yazán, On Pillai's problem with Tribonacci numbers and Powers of 2, *Bull. Korean Math. Soc.* **54**(3), 1069–1080, 2017.

[9] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, Classical and modular approaches to exponential diophantine equations I: Fibonacci and Lucas perfect powers, *Ann. of Math. (2)* **163**(3), 969–1018, 2006.

[10] K.C. Chim, I. Pink, V. Ziegler, On a variant of Pillai's problem, *Int. J. Number Theory* **13**(7), 1711–1727, 2017.

[11] K. C. Chim, I. Pink, V. Ziegler, On a variant of Pillai's problem II, *J. Number Theory* **183**, 269–290, 2018.

[12] M. Ddamulira, C. A. Gómez, F. Luca, On a problem of Pillai with k-generalized Fibonacci numbers and powers of 2, *Monatsh. Math.* **187**(4), 635–664, 2018.

[13] M. Ddamulira, F. Luca, M. Rakotomalala, On a problem of Pillai with Fibonacci numbers and powers of 2, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **127**(3), 411–421, 2017.

[14] B.M.M. de Weger, Padua and Pisa are exponentially far apart, *Publ. Mat.* **41**(2), 631–651, 1997.

[15] A. Dujella, A. Pethő, A generalization of a theorem of Baker and Davenport, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **49**(195), 291–306, 1998.

[16] A. C. García Lomelí, S. Hernández Hernández, Powers of two as sums of two Padovan numbers, *Integers* **18** Article A84, 2018.

[17] A. C. García Lomelí, S. Hernández Hernández, Pillai's problem with Padovan numbers and powers of two, aceptado en la *Revista Colombiana de Matemáticas.*

[18] A. C. García Lomelí, S. Hernández Hernández, F. Luca, Fibonacci numbers as sums of two Padovan numbers, *Sometido para su posible publicación*

[19] A. C. García Lomelí, S. Hernández Hernández, F. Luca, Pillai's problem with the Fibonacci and Padovan sequences, *Sometido para su posible publicación.*

[20] S. Guzmán Sánchez, F. Luca, Linear combinations of factorials and S-units in a binary recurrence sequence, *Ann. Math. Qué.* **38**(2), 169–188, 2014.

[21] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979.

[22] S. Hernández Hernández, F. Luca, L. M. Rivera, On Pillai's problem with the Fibonacci and Pell sequences, *Por aparecer en el Boletín de la SMM.*

[23] A. Herschfeld, The equation $2^x - 3^y = d$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**(4), 231–234, 1936.

[24] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers, II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **64**(6), 125-180, 2000. Traslation in *Izv. Math.* **64**(6), 1217-1269, 2000.

[25] S. S. Pillai, On $a^x - b^y = c$, *J. Indian Math. Soc.* **2**, 119–122, 1936.

[26] S. S. Pillai, On the equation $2^x - 3^y = 2^X + 3^Y$, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **37**, 15–20, 1945.

[27] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.

[28] T.N. Shorey, R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge University Press, 1986.

[29] C.L. Siegel, Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle, *Duke Math. J.* **11**, 597–602, 1944.

[30] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, https://oeis.org/

[31] I. Stewart, Mathematical Recreations: Tales of a neglected number, *Scientific American* **274**, 92–93, 1996.

[32] R. J. Stroeker, R. Tijdeman, Diophantine equations, *Computational methods in number theory, Part II*, Math. Centre Tracts **155**, Math. Centrum, Amsterdan, 321-369, 1982.

[33] U. Zannier, *Lecture Notes on Diophantine Analysis*, Edizioni Della Normale, 2009.