

# **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS**



## **PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES PARA EL ANÁLISIS CUANTITATIVO DE TÉCNICAS DE SCHLIEREN**

**M. Gustavo Adolfo Rodríguez Reveles**

Tesis de Doctorado

presentada al Posgrado en Ingeniería

de acuerdo a los requerimientos de la Universidad para obtener el Grado de

## **DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ORIENTACIÓN: PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES Y MECATRÓNICA**

Directores de tesis:

Dr. José de Jesús Villa Hernández, Dr. Rumen Ivanov Tsonchev y Dr. Ismael de la Rosa Vargas

POSGRADO EN INGENIERÍA

Zacatecas, Zac., 20 de noviembre de 2018

## RESUMEN

A lo largo de la historia de la fabricación de telescopios ópticos, las técnicas de la familia de Schlieren han sido ampliamente usadas para analizar a detalle el desarrollo de la curvatura de un espejo cóncavo durante el delicado proceso de figuración. Sin embargo, tanto la prueba “del filo de la navaja” de Foucault, la técnica más simple del conjunto y a partir de la cual se derivaron todas las restantes; como la prueba “de la rejilla” de Ronchi, la más conocida y aplicada; a su vez han sido consideradas tradicionalmente como técnicas de caracterización puramente cualitativas y, por tanto, totalmente insuficientes como para cubrir las altas exigencias en términos de precisión demandadas en la investigación científica y la fabricación industrial.

En el presente trabajo se lleva a cabo un extenso análisis de este par de fenómenos ópticos tomando como punto de partida las teorías geométrica y física, todo con la finalidad de ampliar tanto su entendimiento en lo que a aspectos conceptuales se refiere, así como también su utilidad en la práctica. Con base en este estudio se proponen novedosos algoritmos de procesamiento digital de imágenes para la estimación del gradiente del error en el frente de onda de una superficie óptica a partir de capturas directas de ambas pruebas.

Por lo tanto, esta investigación constituye uno de los pocos intentos exitosos en los cuales se ha logrado extraer información cuantitativa tanto de foucaultgramas como birronchigramas experimentales. Dichos mapas de gradiente son integrados posteriormente por medio de un algoritmo especialmente diseñado para hacer uso adecuado y eficiente de este tipo particular de datos, conformando así metodologías de caracterización renovadas y validadas capaces de estimar el perfil de las aberraciones en un espejo cóncavo con un nivel de precisión similar al alcanzado por los métodos de análisis interferométrico modernos.

## **ABSTRACT**

Throughout history of optical telescope making, the Schlieren family of techniques have been widely used to analyze in detail the development of the curvature of a concave mirror during the delicate figuring process. However, both the Foucault “knife-edge” test, the simplest technique of the set and from which all the other remaining ones were derived; as well as the Ronchi “ruling” test, the most known and applied; at the same time have been considered traditionally as purely qualitative characterization techniques and, therefore, totally insufficient to fulfill the high requirements in terms of accuracy demanded in scientific research and industrial manufacturing.

In the present work is carried over an extensive analysis of this pair of optical phenomena taking as starting point the geometric and physic theories, all with the purpose of broadening both its understanding as far as conceptual aspects are concerned, as well as its usefulness in practice. With basis in this study are proposed novel digital image processing algorithms for estimating the wave-front error gradient of an optical surface from raw captures of both tests.

Hence, this investigation constitutes one of the few successful attempts in which it has been possible to extract quantitative information both from experimental foucaultgrams and bironchigrams. Such gradient fields are integrated later by means of an algorithm specifically designed to make adequate and efficient use of this particular kind of data, thus shaping renewed and validated characterization methodologies capable of estimating the aberration profile of a concave mirror with a level of precision akin to that achieved by modern interferometric analysis methods.

# Contenido General

	Pag.
<b>Resumen</b> . . . . .	i
<b>Abstract</b> . . . . .	ii
<b>Lista de figuras</b> . . . . .	v
<b>Lista de tablas</b> . . . . .	x
<b>Nomenclatura</b> . . . . .	xi
<b>1 Introducción</b> . . . . .	1
1.1 Breve historia de los telescopios reflectores . . . . .	3
1.2 Descripción corta del figurado y caracterización de espejos ópticos a través de la historia . . . . .	4
1.3 Las técnicas de caracterización de la familia de Schlieren . . . . .	6
1.3.1 Reseña histórica breve de las pruebas de Foucault y Ronchi . . . . .	8
1.4 Procesamiento digital de imágenes para el análisis cuantitativo de técnicas de Schlieren . . . . .	10
1.4.1 Hipótesis . . . . .	10
<b>2 Marco teórico</b> . . . . .	12
2.1 La prueba cuantitativa de Foucault ( <i>PCF</i> ) . . . . .	13
2.1.1 Modelo para la simulación de foucaultgramas ( <i>MSF</i> ) . . . . .	15
2.1.2 Modelo para la simulación de foucaultgramas desplazados ( <i>MSFD</i> ) . . . . .	18
2.1.3 Método para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de foucaultgramas desplazados ( <i>MEGFD</i> ) . . . . .	21
2.1.4 Método simplificado para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de foucaultgramas desplazados ( <i>MSEGFD</i> ) . . . . .	23
2.2 La prueba cuantitativa de Ronchi ( <i>PCR</i> ) . . . . .	25
2.2.1 Modelo para la simulación de ronchigramas con defoco ( <i>MSRD</i> ) . . . . .	28

2.2.2	Método para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco ( <i>MEGBD</i> ) . . . . .	30
2.3	Integración del gradiente del error en el frente onda estimado . . . . .	33
2.3.1	Función de costo cuadrática regularizada para la integración de campos de gradiente ( <i>FCCR</i> ) . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Resultados simulados</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Generación de las superficies ópticas para simulación . . . . .	37
3.2	Generación de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados simulados con el <i>MSFD</i> . . . . .	44
3.3	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados simulados con el <i>MEGFD</i> . . . . .	49
3.4	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie foucaultgramas desplazados simulados con el <i>MSEGFD</i> . . . . .	55
3.5	Generación de un birronchigrama con defoco simulado con el <i>MSRD</i> . . . . .	58
3.6	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco simulado con el <i>MEGBD</i> . . . . .	64
3.7	Integración de los mapas de gradiente del error en el frente onda estimados a partir de patrones simulados con la <i>FCCR-MGCL</i> . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Resultados experimentales</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1	Generación de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados experimentales	81
4.2	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados experimentales con el <i>MEGFD</i> . . . . .	83
4.3	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados experimentales con el <i>MSEGFD</i> . . . . .	87
4.4	Generación de un ronchigrama con defoco experimental . . . . .	89
4.5	Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco experimental con el <i>MEGBD</i> . . . . .	91
4.6	Integración de los mapas de gradiente del error en el frente onda estimados a partir de patrones experimentales con la <i>FCCR-MGCL</i> . . . . .	95
4.7	Estimación del error en el frente de onda mediante interferometría . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Conclusión</b> . . . . .	<b>102</b>
	<b>Referencias</b> . . . . .	<b>105</b>

## Lista de figuras

Figura	Pag.
2.1 Disposición geométrica básica de la prueba de Foucault clásica [35]. . . . .	15
2.2 Diagrama en perspectiva del desplazamiento del filo de la navaja (orientada verticalmente) una distancia $ x_s $ a lo largo del eje $x$ [35]. . . . .	19
2.3 Perfil típico de un gráfico $(I_s, x_s)$ extraído de una serie de foucaultgramas desplazados [37]. . . . .	22
2.4 Disposición geométrica básica de la prueba de Ronchi clásica [40]. . . . .	27
3.1 Pupila de salida del sistema óptico propuesto (512x512pix.) . . . . .	38
3.2 Simulación del frente de onda esférico perfecto asociado a los parámetros del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	39
3.3 Simulación del frente de onda parabólico perfecto asociado a los parámetros del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	40
3.4 Simulación del error en el frente de un espejo parabólico perfecto con las especificaciones del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	41
3.5 Perfil normalizado del ruido de baja frecuencia propuesto [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	42
3.6 Simulación del error en el frente de un espejo parabólico con aberraciones de baja frecuencia [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha].	43
3.7 Derivadas parciales del perfil ideal respecto a los ejes $x$ [arriba] e $y$ [abajo] y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	44

Figura	Pag.
3.8 Derivadas parciales del perfil aberrado respecto a los ejes $x$ [arriba] e $y$ [abajo] y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	45
3.9 Muestras de foucaultgramas desplazados binarios verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil ideal. . . . .	47
3.10 Muestras de foucaultgramas desplazados sigmoidales verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil ideal. . . . .	48
3.11 Muestras de foucaultgramas desplazados sigmoidales verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil aberrado. . . . .	49
3.12 Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie ideal [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoidales respectivos [línea continua]. . . . .	50
3.13 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	51
3.14 Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie aberrada [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoidales respectivos [línea continua]. . . . .	52
3.15 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	53
3.16 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] obtenidas con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie ideal empleando máscaras de estimación de 3, 5, 9 y 17 píxeles [de izquierda a derecha]. . . . .	54
3.17 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] obtenidas con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie aberrada empleando máscaras de estimación de 3, 5, 9 y 17 píxeles [de izquierda a derecha]. . . . .	55
3.18 Muestras de perfiles de intensidad de irradiancia correspondientes a la serie ideal [puntos discontinuos] y sus ajustes de pendiente de transición entre estados a funciones lineales respectivos [línea continua]. . . . .	57
3.19 Muestras de perfiles de intensidad de irradiancia correspondientes a la serie aberrada [puntos discontinuos] y sus ajustes de pendiente de transición entre estados a funciones lineales respectivos [línea continua]. . . . .	58

Figura	Pag.
3.20 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MSEGFD</i> aplicado a la serie ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	59
3.21 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MSEGFD</i> aplicado a la serie aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	60
3.22 Ronchigramas vertical [izquierda] y horizontal [derecha] con defoco correspondientes al perfil ideal. . . . .	62
3.23 Ronchigramas vertical [izquierda] y horizontal [derecha] con defoco correspondientes al perfil aberrado. . . . .	62
3.24 Birronchigramas con defoco del perfil ideal [izquierda] y del perfil aberrado [derecha].	63
3.25 Magnitud de los espectros de Fourier de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha]. . . . .	65
3.26 Perfiles transversales de la magnitud de los espectros de Fourier de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha]. . . . .	66
3.27 Amplificaciones transversales de los lóbulos espectrales positivos [puntos discontinuos] de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha] así como sus interpolaciones respectivas obtenidas con la IRC [líneas continua]. . . . .	67
3.28 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGBD</i> aplicado a la muestra ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	70
3.29 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGBD</i> aplicado a la muestra aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	71
3.30 Perfiles estimados con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir de los mapas de gradiente calculados directamente de los perfiles ideal [arriba] y aberrado [abajo] y una vista transversal de los mismos a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	73
3.31 Perfiles obtenidos con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir de los gradientes estimados con el <i>MEGFD</i> aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	74

Figura	Pag.
3.32 Perfiles obtenidos con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir de los gradientes estimados con el <i>MEGFD-V3</i> aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	75
3.33 Perfiles obtenidos con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir de los gradientes estimados con el <i>MSEGF</i> D aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	76
3.34 Perfiles obtenidos con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir de los gradientes estimados con el <i>MEGBD</i> aplicado a las muestras ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	77
4.1 Muestras de foucaultgramas desplazados verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes a la serie experimental. . . . .	83
4.2 Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie experimental [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoideas respectivos [línea continua]. . . . .	84
4.3 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	85
4.4 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGFD-V3</i> aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	86
4.5 Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie experimental [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones lineales respectivos [línea continua]. . . . .	88
4.6 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MSEGF</i> D aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	89
4.7 Birronchigrama con defoco obtenido experimentalmente. . . . .	90
4.8 Magnitud del espectro de Fourier de la muestra experimental. . . . .	92
4.9 Amplificación transversal del lóbulo espectral positivo de la muestra experimental [puntos discontinuos] así como su interpolación respectiva obtenida con la IRC [línea continua]. . . . .	93

Figura	Pag.
4.10 Derivadas parciales con respecto a $x$ [arriba] e $y$ [abajo] estimadas con el <i>MEGBD</i> aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha]. . . . .	94
4.11 Perfil obtenido con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir del gradiente estimado con el <i>MEGFD</i> aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	95
4.12 Perfil obtenido con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir del gradiente estimado con el <i>MEGFD-V3</i> aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	96
4.13 Perfil obtenido con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir del gradiente estimado con el <i>MSEGFD</i> aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	97
4.14 Perfil obtenido con la <i>FCCR-MGCL</i> a partir del gradiente estimado con el <i>MEGBD</i> aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje $y$ [derecha]. . . . .	98
4.15 Perfil de las aberraciones en el espejo de pruebas obtenido por el análisis interferométrico. . . . .	100
4.16 Vista transversal a lo largo del eje $y$ del perfil de las aberraciones en el espejo de pruebas obtenido por el análisis interferométrico. . . . .	100

## Lista de tablas

Tabla	Pag.
3.1 Tiempos de estimación, integración y porcentaje promedio de error de las diversas metodologías propuestas al analizar el perfil ideal. . . . .	78
3.2 Tiempos de estimación, integración y porcentaje promedio de error de las diversas metodologías propuestas al analizar el perfil aberrado. . . . .	78

# Nomenclatura

## Unidades de medida

<i>cm.</i>	Centímetros
<i>cic/m.</i>	Ciclos por metro
<i>m.</i>	Metros
<i>μm.</i>	Micrómetros
<i>mm.</i>	Milímetros
<i>ms.</i>	Milisegundos
<i>min.</i>	Minutos
<i>nm.</i>	Nanómetros
<i>lpi.</i>	Pares de líneas por pulgada
<i>pix.</i>	Píxeles
<i>rad.</i>	Radianes
<i>s.</i>	Segundos

# Capítulo 1

## Introducción

La óptica es la rama de la física que se encarga del estudio de las propiedades y el comportamiento de la luz. Entre sus tareas principales se encuentran la explicación de la amplia variedad de fenómenos en los cuales la luz interactúa con la materia, así como también la construcción de los instrumentos que la detectan o hacen uso de ella.

Para fines prácticos, dada la relativa complejidad de las descripciones de la luz en términos electromagnéticos, los fenómenos ópticos son comúnmente explicados haciendo uso de algunos modelos simplificados, de entre los cuales destacan los modelos geométrico y físico. El más sencillo de éstos, generalmente denominado como óptica geométrica, considera a la luz simplemente como un conjunto de rayos que viajan en el espacio siguiendo líneas rectas, los cuales se curvan al ser reflejados o pasar a través de ciertas superficies o cuerpos. Por otro lado, la óptica física asigna a la luz las características propias de una onda, lo que la constituye como un modelo más completo para la descripción de dicho fenómeno al ser capaz de tomar en cuenta efectos tales como la difracción y la interferencia, los cuales que no son considerados en absoluto por la óptica geométrica.

La óptica como ciencia resulta relevante para una enorme variedad de disciplinas tales como la astronomía, ingeniería, medicina y fotografía, tan solo por mencionar algunas. En todas estas áreas del conocimiento así como también en una gran cantidad de objetos de uso cotidiano podemos encontrar aplicaciones prácticas de la óptica en la forma de dispositivos e instrumentos que van desde los espejos, lentes, y cámaras fotográficas; hasta los microscopios, telescopios, láseres, etc.

Particularmente en el caso de la astronomía, la ciencia natural encargada del estudio de todos los fenómenos relacionados con los objetos celestes, la óptica juega un papel fundamental. Esta disciplina, una de las ciencias más antiguas de la que se tenga registro, a su vez se divide en dos ramas principales, la astronomía teórica y la observacional. La astronomía teórica se orienta a la concepción y desarrollo de modelos analíticos y computacionales capaces de describir adecuadamente los objetos y fenómenos astronómicos. Por su parte, la astronomía observacional se enfoca a la adquisición de información significativa a partir de la observación de dichos fenómenos y objetos, misma que luego es analizada haciendo uso de los principios básicos de la física.

La astronomía observacional representa una de las pocas ciencias modernas en las cuales los aficionados aún desempeñan un rol importante, principalmente mediante el descubrimiento y/o documentación de fenómenos transitorios. A lo largo de la historia, los astrónomos aficionados han realizado muchos descubrimientos relevantes, como es el caso de encontrar un nuevo cometa, por citar algún ejemplo.

El instrumento óptico que hace posible dicha participación activa en el progreso de la ciencia es el telescopio. Un telescopio óptico es un dispositivo capaz de recolectar y focalizar la luz proveniente de la parte visible del espectro electromagnético, para así crear una imagen magnificada del objeto celeste siendo observado. Los tres tipos principales de telescopios ópticos son el refractor o dióptrico, mismo que a grandes rasgos podría ser descrito simplemente como un arreglo de lentes; el reflector o catóptrico, constituido en este caso por un arreglo de espejos; y el catadióptrico, el cual hace uso de una combinación de ambos arreglos.

La capacidad de un telescopio para captar energía luminosa y su consecuente habilidad para resolver pequeños detalles se encuentra directamente relacionada con el diámetro o apertura de su objetivo, o en otras palabras, con el tamaño de la lente o el espejo primario que recolecta y focaliza la luz [1]. El telescopio reflector, propuesto en el siglo XVII como una alternativa al telescopio refractor cuya configuración sufría en aquel entonces de severos problemas relacionados con la aberración cromática, es el diseño particular que permite hacer uso de los objetivos, espejos curvos en este caso, de diámetro más grande. Esta es precisamente la

razón por la que hoy en día casi todos los telescopios importantes usados en la investigación científica son reflectores de gran tamaño [2].

La superficie reflectora de un espejo curvo puede ser abultada hacia afuera o convexa, lo que ocasiona que los rayos de luz que llegan a ésta diverjan; o bien abultada hacia adentro o cóncava, lo que le otorga la capacidad de hacer converger o focalizar la luz precisamente de la manera que lo requiere un telescopio reflector. Originalmente y por simplicidad, los espejos cóncavos eran moldeados con la forma de una sección particular de la superficie de una esfera de metal que era usada como patrón. No obstante, debido a que los telescopios reflectores necesitan formar y resolver imágenes de objetos muy distantes, pronto se descubrió que tal como en el caso de las lentes de su tipo éstos a su vez sufrían de aberración esférica [3], una imperfección o defecto que les impedía formar imágenes nítidas.

## **1.1 Breve historia de los telescopios reflectores**

La primer descripción de un telescopio reflector fue realizada por el astrónomo escocés James Gregory en 1663. Su diseño puramente teórico empleaba un espejo cóncavo secundario que reflejaba la imagen de regreso directamente hasta el observador a través de un orificio en el espejo primario, y no sería construido sino hasta diez años tarde por Robert Hooke.

El primer telescopio catóptrico exitoso llegaría de la mano del científico británico Sir Isaac Newton en 1668. Este dispositivo usualmente estaba constituido por un espejo primario parabólico y un espejo secundario plano que reflejaba la luz captada hacia un plano focal localizado en la parte superior del tubo. Newton eligió el espéculo de metal, una aleación de estaño estaño y cobre, como el material ideal para fabricar su espejo objetivo esférico, mismo que habría de corregir los problemas asociados con la aberración cromática.

Posteriormente, en el año de 1672, el físico francés Laurent Cassegrain publicaría también su propio diseño de un telescopio reflector esta vez compuesto por un espejo parabólico primario y un espejo hiperbólico secundario que redirigía la luz a través de un orificio en el primario a la manera del telescopio gregoriano. En este caso, los efectos de divergencia y doblado

proporcionados por el secundario propiciaban un telescopio con una longitud focal larga que al mismo tiempo presentaba un tubo de longitud proporcionalmente corta.

No fue sino hasta principios de la década de 1910 que una mejora significativa para el telescopio Cassegrain fue propuesta por George Willis Ritchey y Henri Chrétien, quienes sustituyeron el espejo parabólico primario del diseño original por un espejo hiperbólico. De esta forma, el telescopio reflector quedó finalmente liberado de las aberraciones de coma y esfericidad, lo que convirtió a este diseño en el favorito de los astrónomos profesionales alrededor del mundo aún hasta nuestros días. No obstante, el telescopio newtoniano a su vez también se mantiene como la configuración más popular entre los fabricantes de telescopios aficionados gracias a su comparativa simplicidad y asequibilidad económica.

## **1.2 Descripción corta del figurado y caracterización de espejos ópticos a través de la historia**

Ya fuera durante la era de los espejos de metal, en la cual los grandes objetivos eran moldeados haciendo uso de la aleación de espéculo; la era del vidrio, misma en la que se utilizaban sustratos con coeficiente de expansión térmica bajo y posteriormente nulo sobre los cuales se depositaban delgadas capas de plata para fabricar las superficies reflectoras; o la era del control, definida por el empleo de dispositivos electrónicos tales como las cámaras digitales y las computadoras durante la fabricación e implementación de todo tipo de telescopios [3]; tanto el astrónomo profesional como el aficionado rápidamente se percataron del papel preponderante que las técnicas de medición de superficie jugaban durante la delicada etapa final de figuración de sus espejos.

El figurado se define como el proceso de pulido final que se aplica a una superficie óptica encargado de modelar la curvatura definitiva y/o remover las imperfecciones en la misma para alcanzar así la forma requerida por una aplicación dada. Como habría de esperarse, la metodología o instrumento a ser empleado para guiar a el pulidor durante este proceso debe ser extremadamente preciso, al menos tanto como para resolver defectos superficiales con magnitudes de apenas unas cuantas micras o incluso menores.

Por este motivo, desde el comienzo, cualquier método concebible de medición directa sobre la superficie del espejo quedaba totalmente descartado ya que aun los sistemas mecánicos y comparadores ópticos modernos carecen de la sensibilidad suficiente como para detectar magnitudes en el orden de fracciones de un micrómetro. Por otro lado, las nacientes técnicas interferométricas, ideales por su precisión y por ello ampliamente aplicadas en la industria, requerían no solamente de un disco óptico de referencia que debía a su vez estar propiamente validado, sino que aun en sus configuraciones más simples aptas para la tarea en cuestión, como es el caso del interferómetro de Twyman-Green, su costo se encontraba muy por encima de la posibilidades de un fabricante de telescopios aficionado [3]. Por estas razones, en la práctica, solamente los métodos de probado basados en la generación de imágenes resultaban viables para los laboratorios y talleres ópticos modestos.

La inspección directa de la imagen de difracción, tanto dentro como fuera del foco, ha sido practicada casi desde el mismo momento que los telescopios aparecieron. Una de estas primeras técnicas arcaicas de caracterización fue propuesta por el británico Dennis Taylor a finales del siglo XIX, sin embargo, ésta resultaba de poco valor práctico al no otorgar información precisa acerca de la magnitud y posición exactas de las imperfecciones detectadas.

El análisis de las imágenes producidas por un espejo óptico curvo puede ser realizado por medio de una amplia variedad de técnicas, no obstante, todas éstas caen bajo dos géneros esenciales: las pruebas realizadas en el foco y las pruebas realizadas en el centro de curvatura. A pesar de la eficacia de las pruebas en el foco, dentro de las cuales precisamente la interferometría así como también las pruebas de nulo con sus variaciones respectivas resaltan como las técnicas más importantes, la inmensa mayoría de éstas resultan prohibitivamente costosas para el aficionado con recursos limitados, o bien, excesivamente complejas como para ser aplicadas por un principiante.

Por su parte, las pruebas realizadas en el centro de curvatura pueden ser clasificadas a su vez también en dos géneros principales: las pruebas de nulo y las pruebas de no-nulo. Desde el inicio las pruebas de nulo son consideradas inconvenientes para el aficionado por prácticamente las mismas razones que las pruebas realizadas en el foco, en este caso todas hacen uso exhaustivo

de instrumentos auxiliares que son ya sea extremadamente costosos o bien considerablemente difíciles de fabricar.

Finalmente, solo queda por analizar y comparar las dos subespecies más sobresalientes de las pruebas de no-nulo: el método de Gaviola o prueba cáustica y la serie de técnicas de la familia de *Schlieren*. Pese a que ambos tipos de metodologías son consideradas básicamente como inapropiadas e/o insuficientes en los ámbitos industrial y científico dada su naturaleza inherentemente cualitativa, las virtudes particulares de estos métodos de caracterización no deben ser ignoradas o pasadas por alto. Por ejemplo, la prueba cáustica es capaz de analizar el desarrollo de la curvatura de un espejo siendo figurado con un grado de precisión extremadamente alto cuando es realizada por expertos. No obstante, también debe reconocerse que es un técnica bastante rigurosa cuya ejecución además consume mucho tiempo, todo sin mencionar que la construcción del aparato de pruebas asociado puede resultar un desafío considerable para un novato en el ramo [3].

### **1.3 Las técnicas de caracterización de la familia de Schlieren**

Las técnicas de Schlieren pertenecen a una familia de pruebas ópticas clásicas con características muy similares basadas en la generación de patrones de sombras y franjas específicos que son posteriormente usados para analizar y/o caracterizar de forma precisa la superficie óptica que los produjo. La principal ventaja de estas metodologías radica en lo extremadamente simple que resulta su implementación y ejecución en la práctica. Esto se vuelve especialmente evidente al compararlas con la inmensa mayoría de las técnicas modernas que se emplean para efectuar esta clase de mediciones, particularmente en el caso de la interferometría. Entre las exponentes más sobresalientes de esta serie de técnicas se encuentran las pruebas de *Foucault*, *Linfoot*, *Hartmann*, *Zernike* y *Ronchi*, así como todas sus variaciones respectivas. Estas metodologías fueron ampliamente usadas con un alto grado de éxito sobre todo en la primera mitad del siglo XX [1].

En líneas generales, el aparato de pruebas asociado a las técnicas de Schlieren para el análisis de un espejo cóncavo consiste simplemente de una fuente de luz semi-puntual o extendida

(un LED común y una abertura delgada resultan más que suficientes hoy en día) posicionada justamente sobre el eje óptico de la pieza siendo estudiada y a una distancia igual al radio nominal de curvatura de la misma. En el plano focal o paraxial correspondiente se coloca un mecanismo sencillo (en el pasado tradicionalmente bastaba con usar la propia mano) cuyo cometido es introducir una función de transmitancia o pantalla de modulación entre el cono de rayos de luz que es focalizado por el espejo siendo analizado y el plano de observación que se localiza precisamente detrás de dicha pantalla.

En este arreglo, la función de transmitancia hace las veces de un filtro espacial aplicado en el dominio de la frecuencia que hace posible bloquear y/o modificar secciones particulares de la imagen paraxial producida por el dispositivo siendo estudiado, lo que ocasiona que en el detector colocado en el plano imagen (en la actualidad comúnmente una cámara digital y simplemente el ojo desnudo en el pasado) se formen patrones de luz y sombras particulares que aparecen directamente sobre la superficie del espejo, mismos que se encuentran íntimamente relacionados con las imperfecciones o aberraciones presentes en el mismo.

En el caso de la prueba de Foucault, la más simple de las técnicas de esta familia y a partir de la cual se originaron todas las restantes, la pantalla de modulación consiste simplemente del filo de una navaja (una hoja de afeitar común puede ser usada sin problemas), mientras que para la prueba de Ronchi, la más reconocida y sobresaliente del conjunto, la función de transmitancia está compuesta por una rejilla de difracción (regularmente se emplea un objetivo óptico de onda cuadrada de alta frecuencia para tal efecto) [4, 5].

En el pasado, los expertos de la época en la aplicación de estas técnicas evaluaban a simple vista, o en otras palabras, de forma puramente cualitativa, estos peculiares patrones de sombras y franjas siendo capaces a menudo de determinar las medidas correctivas ideales que llevarían la calidad de sus superficies reflectoras prácticamente al límite impuesto por la difracción. Como es de esperarse, los resultados finales alcanzados en la práctica dependían enteramente de las habilidades y la experiencia del individuo que ejecutaba el procedimiento, lo que ocasionó que las técnicas de Schlieren fueran consideradas desde entonces y hasta nuestros días como pruebas ópticas completamente subjetivas e imprecisas, y por consiguiente también inadecuadas para ser empleadas en aplicaciones industriales y científicas.

### 1.3.1 Reseña histórica breve de las pruebas de Foucault y Ronchi

A lo largo de la historia de la fabricación de telescopios ópticos “la prueba del filo de la navaja” de Foucault, propuesta por el físico francés León Foucault en 1858, fue ampliamente aplicada y estudiada, especialmente en los albores de esta en aquel entonces emergente disciplina para los fabricantes amateurs. Esta prueba era generalmente descrita solo en términos de la teoría geométrica y se plantaba para ser usada como un método de apoyo en la detección de aberraciones transversales durante el proceso de figuración [6–12].

A partir de la creciente necesidad de superficies ópticas de alta calidad, en otras palabras, únicamente limitadas por difracción, se publicaron varios trabajos que abordaron este fenómeno desde el enfoque más completo de la teoría física alcanzando resultados, al menos en términos de precisión, cada vez más alentadores [13–15]. El propósito principal de todos estos esfuerzos era hacer posible que la técnica lograra producir mediciones precisas de aberraciones en el orden o inclusive menores a la longitud de onda, un objetivo que no pudo ser conseguido en su totalidad debido a ciertas limitaciones que plagaban en las teorías matemáticas aun hasta épocas relativamente recientes [16–18].

Por su parte, tan pronto como “la prueba de la rejilla” de Ronchi apareció por primera vez en 1923 de la mano del físico italiano Vasco Ronchi, múltiples fueron los trabajos dedicados a explicar de forma más completa, así como también generalizar y mejorar diversos aspectos de la entonces novedosa técnica. De entre los ejemplos más notables resaltan algunas variaciones significativas tales como la prueba nula de Ronchi, propuesta para incrementar la sensibilidad de la metodología en la práctica así como su correlación con la prueba de Hartmann [19, 20]; la prueba de Ronchi de banda lateral sencilla, la cual reducía considerablemente el indeseable efecto Talbot por medio de filtrado [21]; la prueba de Ronchi por escaneo de franjas (medición de fase), concebida para lidiar adecuadamente con el análisis de superficies esféricas de gran aberración en conjunto con la detección de fase sincrónica [22, 23]; y la prueba de Ronchi de fuente extendida, ideada para aumentar significativamente el contraste y la visibilidad de las franjas tomando ventaja del fenómeno de auto-producción de imágenes y la super-imposición de múltiples patrones de difracción de Fresnel mutuamente incoherentes [24].

No obstante y a pesar del evidente interés que la prueba despertó durante aquel periodo, de la misma forma que la prueba de Foucault, ésta nunca escaparía realmente al velo de incertidumbre y subjetividad en el cual las técnicas de esta familia siempre se han visto envueltas. Con el pasar de los años, este factor propició su casi total abandono en favor de otras técnicas consideradas como ampliamente superiores, aunque también extremadamente más complejas y costosas, como es el caso de la interferometría [2, 16, 25].

En años recientes, el estudio y por lo tanto también la influencia de las pruebas de Foucault y Ronchi se ha limitado, en el caso de la primera, a un proceso adaptación para su empleo en combinación con tecnologías modernas y aparatos electrónicos tales como los procesadores de imágenes y cámaras digitales, alcanzando resultados apenas ligeramente alentadores aun en los mejores casos [26–28]. Por su parte, la prueba de Ronchi a quedado confinada a la utilización de sus rejillas de periodicidad fija como un elemento complementario en la descripción y diseño de otras metodologías e instrumentos en el campo. De entre los desarrollos más importantes sobresalen la interpretación alternativa de sus característicos patrones de franjas como interferogramas con el propósito de calcular el perfil de irradiancia [29], el diseño de un nuevo tipo de interferómetro de corte lateral que consta de dos rejillas de fase de Ronchi dispuestas en serie [30], y la propuesta de un interferómetro de camino común en arreglo  $4f$  con una rejilla de Ronchi como filtro espacial [31].

Los trabajos actuales acerca de la prueba de Ronchi en su forma original se encuentran casi totalmente soportados por una serie de algoritmos diseñados ya sea para la simulación de ronchigramas basándose en la teoría de trazado de rayos exactos [32], la recuperación de los coeficientes de aberración a partir de los cuales un frente de onda sintético y su ronchigrama asociado fueron generados [33], o la correlación de birronchigramas a través de algoritmos genéticos para la evaluación de errores y parámetros de superficie [34]. Como se puede entrever, todos estas metodologías están principalmente destinadas a la comparación directa entre muestras experimentales y artificiales con la ayuda de una computadora, y no para la medición indirecta del perfil de aberración verdadero de la superficie óptica siendo analizada en la práctica.

## **1.4 Procesamiento digital de imágenes para el análisis cuantitativo de técnicas de Schlieren**

Una vez conociendo el precario estado actual en el que se encuentran este par de alguna vez prominentes técnicas clásicas de caracterización óptica, el presente trabajo de tesis doctoral se planteó como un proyecto investigación para su recuperación desde el punto de vista práctico tomando como punto de partida su análisis a partir del enfoque más completo de la óptica física. Considerando además también la potencia de cálculo de los equipos de cómputo modernos en conjunto con los algoritmos de procesamiento digital de imágenes más recientes, es posible constituir una base suficiente de fundamentos teóricos y herramientas prácticas como para revalorar el potencial de ambas técnicas.

De esta forma se abren posibilidades realistas para la propuesta de nuevas metodologías teórico-prácticas que permitan realizar estimaciones cuantitativas del error en el frente de onda de una superficie óptica focalizadora que rivalicen directamente, en términos de precisión, con los resultados alcanzados por los métodos e instrumentos de análisis de vanguardia.

Si bien es cierto que tales procedimientos renovados resultarán perfectos e idóneos para los pequeños talleres ópticos de aficionados dada su inherente simplicidad y bajo costo, éstas metodologías también deberán de ostentar el beneficio agregado de preservar un nivel aceptable de precisión, en otras palabras, tendrán que ser suficientemente rigurosas como para cubrir las exigentes demandas de los laboratorios científicos y los fabricantes industriales en el ramo.

El grado de optimización y eficiencia de los algoritmos de estimación asociados deberá a su vez ser cuidado al límite en aras de hacerlos apropiados como para ser implementados sin mayores contratiempos en la forma de un prototipo de analizador óptico autónomo y totalmente integrado en el futuro cercano.

### **1.4.1 Hipótesis**

“A partir de la propuesta de nuevos algoritmos de procesamiento digital de imágenes para el análisis cuantitativo de los patrones de sombras y franjas generados respectivamente por las

pruebas de Foucault y Ronchi, es posible estimar con precisión el gradiente del error en el frente de onda de un espejo óptico cóncavo.

En el caso de la prueba de la navaja, esto es logrado a través de la generación de un par de series suficientes de foucaultgramas ortogonales, una por cada derivada parcial, a partir de las cuales se extraen los perfiles de transición de estado de iluminación correspondientes que primeramente son ajustados a funciones sigmoideas y posteriormente a pseudo-lineales.

Mientras tanto, para la prueba de la rejilla, un solo ronchigrama de rejillas cruzadas o birronchigrama constituye información suficiente para estimar el gradiente completo de la pieza cuando se hace uso apropiado y específico de las operaciones comunes de transformación de dominio de Fourier, filtrado espacial y desenvolvimiento de fase.

Adicionalmente, la adecuación de un algoritmo de integración de mapas de gradiente basado en la teoría de regularización el cual permite establecer fácilmente la región de interés (ROI) de la función meta hace posible obtener una reproducción digital del error en el frente de onda del dispositivo óptico analizado con un nivel de precisión similar al alcanzado por los métodos de análisis interferométricos actuales.”

## Capítulo 2

# Marco teórico

Este capítulo abre con una descripción y análisis general de los conceptos básicos y fundamentos matemáticos esenciales que constituyen el fundamento de los procesos de evaluación cuantitativa de espejos focalizadores con base en las técnicas de Schlieren seleccionadas que se proponen más adelante. A lo largo de estas exposiciones constantemente se alternarán y/o combinarán formulaciones propias ya sea de la óptica geométrica, o bien, de la óptica física. Este recurso resulta indispensable cuando se plantea la propuesta de metodologías de análisis prácticas comparativamente más sencillas y accesibles que los métodos e instrumentos de vanguardia, pero que además también compitan en términos de precisión con los antes mencionados.

En primera instancia, se desarrollan y discuten los fundamentos teóricos relacionados con la primera técnica de caracterización propuesta, la prueba cuantitativa de Foucault (*PCF*) [35]. Esta metodología surgió en su forma definitiva después de complementar y refinar los resultados presentados en la Tesis de Maestría que sirve como precedente directo a las investigaciones que se reportan en este trabajo [36]. A su vez, el documento antes mencionado tuvo como sustento principal el modelo para la simulación de foucaultgramas desplazados con base en la teoría física (*MSFD*) [37], estudio que también se consolidara en aquella etapa.

Posteriormente, se expone y analizan las virtudes de una variación simplificada de la *PCF*. Esta metodología alternativa tuvo como objetivo central sentar las bases para una potencial automatización completa del proceso de caracterización de espejos [38]. Adicionalmente, en este trabajo se hacen patentes por vez primera las capacidades inherentes de la función de costo

cuadrática regularizada (*FCCR*) para la integración de campos de gradiente [39], misma que fuera precisamente concebida para lidiar adecuadamente con las características particulares de los datos matriciales producidos por la *PCF*.

Para finalizar, se presenta el método de evaluación cuantitativa que fue desarrollado propiamente durante el periodo de estudios doctorales, la prueba cuantitativa de Ronchi (*PCR*) [40]. Esta metodología comparte una ideología y principios generales muy similares a los de su antecesora, sin embargo, su base teórica es completamente distinta. A grandes rasgos, la técnica está constituida principalmente por minuciosas mediciones de fase a través del análisis de Fourier. En este trabajo también se hace uso extensivo de mejoras substanciales en el algoritmo de integración de gradiente previamente reportadas, como es el caso del empleo del método de gradiente conjugado lineal (*MGCL*) para la minimización de la *FCCR* [38].

Pese a que para fines prácticos ambas técnicas virtualmente exhiben el mismo nivel de precisión, la superioridad de la *PCR* sobre la *PCF* se hace evidente una vez que se conocen y ponderan todos los detalles relacionados con la implementación y aplicación de cada procedimiento. No obstante, cualquiera de estas técnicas representa una alternativa viable en todos los sentidos a los sistemas de análisis interferométricos, especialmente cuando se dispone de recursos limitados.

## **2.1 La prueba cuantitativa de Foucault (*PCF*)**

La prueba de Foucault es la metodología teórico-práctica a partir de la cual se originaron todas las otras técnicas de caracterización de superficies ópticas basadas en la generación de patrones de sombras. Este conjunto de procedimientos ópticos es a menudo identificado simplemente como técnicas de Schlieren, y dentro de éstas la prueba del filo de la navaja de Foucault se destaca por la prácticamente insuperable simplicidad de su aparato de pruebas asociado. Este arreglo óptico no solo se considera sencillo por la poca variedad y características propias de los elementos que lo componen, sino también por los mínimos requerimientos para llevar a cabo una adecuada operación del mismo.

Desde luego, la relativa simpleza de su implementación y ejecución trae consigo también una serie de inconvenientes y ciertas desventajas, mismas que suelen potenciarse en una disciplina como la óptica, en la cual la precisión regularmente juega un papel preponderante. Quizás la más sobresaliente de estas desventajas sea el innegable grado de subjetividad con el que tradicionalmente son interpretadas sus observaciones. Esto ocasiona que la gran mayoría de la información que la técnica genera sea de carácter puramente cualitativo, o en otras palabras, esencialmente trivial.

Con la finalidad de eliminar de raíz la impresión negativa que regularmente se tiene acerca de este procedimiento óptico clásico y otorgarle finalmente una rigurosidad teórico-práctica equiparable con la de los procedimientos de caracterización modernos en el ramo, tanto su ejecución en la práctica como también el método de análisis de sus muestras deben ser replanteados.

Antes de abordar a detalle los principios matemáticos y físicos fundamentales detrás de esta técnica, primeramente debe proveerse un panorama general de las características del arreglo óptico en cuestión. En la Fig. 2.1 se muestra la configuración típica de la prueba del filo de la navaja de Foucault para el análisis de espejos ópticos cóncavos. Como puede observarse, el espécimen a ser analizado se coloca en posición vertical formando así un espacio de referencia  $(x, y, z)$  en el cual su eje óptico se corresponde con el eje  $z$ . En el plano focal, localizado a la distancia de su radio de curvatura nominal ( $r$ ), se coloca una fuente de luz semi-puntual ( $s$ ), misma que es responsable de iluminar uniformemente la superficie del dispositivo siendo analizado.

Bajo las condiciones antes descritas, la función del error en el frente onda [ $W(x, y)$ ], como su nombre lo indica, modela la distribución del perfil del error en el frente de onda en relación con la esferoide ideal asociada al parámetro  $r$ . Cuando el perfil de las aberraciones o defectos presentes en la pieza se conoce con antelación, o bien, se especifica como la combinación lineal de una serie de aberraciones geométricas primarias, las derivadas parciales ortogonales o mapas de gradiente de dicha función ( $W^x$  y  $W^y$ , respectivamente) pueden ser calculados fácilmente incluso de forma analítica.

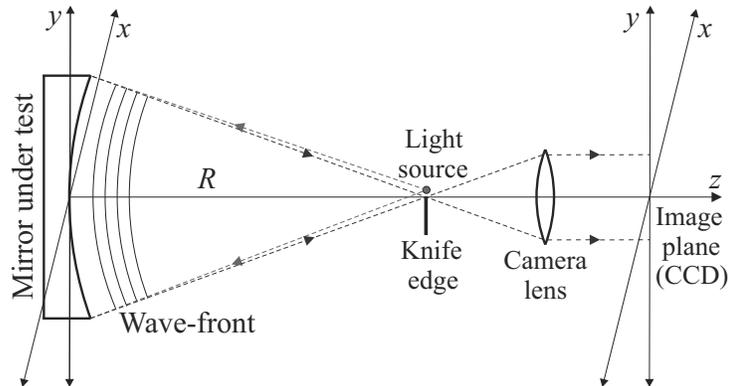


Figura 2.1: Disposición geométrica básica de la prueba de Foucault clásica [35].

No obstante, como se aprecia una vez más en la Fig. 2.1, inmediatamente adyacente a la fuente  $s$  y perpendicular al eje óptico  $z$ , se posiciona también un objeto opaco, mismo que es empleado para bloquear una sección particular de los rayos de luz siendo reflejados por el espécimen. El sobrenombre de “la prueba del filo de la navaja” con el cual es conocida regularmente la prueba de Foucault proviene precisamente del hecho de que, desde su origen y hasta nuestros días, por conveniencia y simplicidad se emplea el filo de una navaja de afeitar común para realizar este peculiar bloqueo selectivo de rayos de luz.

### 2.1.1 Modelo para la simulación de foucaultgramas (*MSF*)

De manera formal, se puede considerar que el filo de la navaja hace las veces de una función de transmitancia de luz  $[T(u, v)]$  en el arreglo antes descrito. Esta función en efecto establece la cantidad y la estructura concreta de la energía lumínica que pasa más allá del plano focal  $(u, v)$ .

Dadas sus características y por simplicidad, esta función puede ser modelada como una distribución binaria. Esto puede ser corroborado por medio de un ejercicio mental simple: si se estuviera observando siempre de frente al espejo y la navaja se orientara en forma vertical con su filo directamente adyacente y a la izquierda del eje óptico, en perspectiva, ésta se apreciaría superpuesta a la mitad izquierda de la superficie del espécimen. Esto ocasionaría que los rayos reflejados provenientes de dicha sección de la pieza se vieran obstaculizados completamente, mientras que los procedentes del lado contrario pasarían totalmente inalterados. Como puede

intuirse, para un observador adecuadamente posicionado en el plano imagen (consulte la Fig. 2.1) la superficie del espejo siendo estudiado aparecería dividida en dos mitades perfectas, una uniformemente iluminada y la otra completamente cubierta por sombras.

Es precisamente por esta razón que este tipo de imágenes ópticas reciben el nombre de mapas de sombras (del inglés *shadowgram*), o simplemente “foucaultgrama” en el caso específico de la prueba de Foucault. El foucaultgrama antes descrito constituye el tipo más sencillo de mapa de sombras que puede ser producido en la práctica y en este trabajo es denominado como “foucaultgrama central”.

Con base en lo expuesto anteriormente, una función de transmitancia simplificada con base en la teoría geométrica para un foucaultgrama central puede ser aproximada como sigue: [4]

$$T(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } W^x < 0 \\ 0 & \text{si } W^x \geq 0 \end{cases} . \quad (2.1)$$

En la práctica, esta formulación solamente puede cobrar relevancia si se relaciona de manera directa con la función de la amplitud compleja del error en el frente de onda en el plano de la pupila de salida del sistema [ $\psi_o(x, y)$ ]. Dicha función, esta vez desde el punto de vista de la óptica física, está definida de la siguiente forma:

$$\psi_o(x, y) = A(x, y) \exp [i2\pi W(x, y)/\lambda], \quad (2.2)$$

en la cual  $A(x, y)$  establece la amplitud de la propia función dentro de la pupila circular de salida cuando se asume iluminación uniforme,  $i = \sqrt{-1}$  representa la variable compleja y  $\lambda$  simboliza la longitud de onda de la luz, respectivamente.

Como habría de esperarse, esta formulación se encuentra estrechamente ligada con la función de la amplitud compleja del error en el frente de onda que aparece en el plano complementario de observación [ $\psi_i(x, y)$ ]. Este plano se corresponde con la pupila de entrada del sistema y es representado en el arreglo óptico que se observa en la Fig. 2.1 por una cámara CCD que hace también las veces de detector. Por conveniencia, dicha función es expresada haciendo uso de algunas propiedades fundamentales de las transformadas de Fourier y Hilbert de la siguiente

manera: [37,41,42]

$$\begin{aligned}\psi_i(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[H(u)\mathcal{F}\{\psi_o(x, y)\}] \\ &= \frac{1}{2}[\psi_o(x, y) + i\mathcal{H}\{\psi_o(x, y)\}],\end{aligned}\quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  y  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  denotan respectivamente los operadores de las transformadas de Fourier y Hilbert,  $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$  indica la operación de transformada inversa de Fourier y  $H(u)$  representa la función escalón unitario de Heaviside. La principal ventaja de esta formulación se vuelve evidente precisamente al descubrir la aparición de la función escalón unitario en la misma. Como puede suponerse, ésta constituye una representación matemática directa o idealización del efecto que causa la introducción del filo de la navaja en el plano focal cuando se genera un foucaultgrama central.

De esta forma, la función de transmitancia (Ec. 2.1), en este caso particular, podría definirse alternativamente como una especie de filtro de amplitud aplicado en el dominio frecuencial y cuyas coordenadas se relacionan con las correspondientes al dominio espacial como se establece a continuación:

$$u = \frac{x}{\lambda r}.\quad (2.4)$$

Por lo tanto, si se asume que el sistema presenta una pupila de salida con una apertura lo suficientemente grande como para producir un patrón de difracción o disco de Airy considerablemente más pequeño que el lóbulo espectral producido por el frente de onda de la propia pieza, la intensidad de la irradiancia de su foucaultgrama correspondiente  $[I(x, y)]$  puede ser modelada en distribución binaria como sigue: [37]

$$I(x, y) \approx H(W^x)A^2(x, y).\quad (2.5)$$

Si bien esta expresión matemática cerrada es consistente tanto con la teoría geométrica como con la teoría física ya que de hecho también toma en cuenta los efectos asociados con el fenómeno de difracción, sus resultados, en lo que a términos visuales respecta, son marcadamente insatisfactorios en la práctica. Esto se debe a que, al tratarse de un modelo binario, resulta imposible producir o emular adecuadamente la transición suave que existe entre los estados opuestos de iluminación uniforme y de oclusión total, misma que puede ser apreciada de manera clara en cualquier foucaultgrama experimental competente.

Adicionalmente, también es claro que las implicaciones prácticas de este modelo de irradiancia son bastante limitadas ya que a grandes rasgos solamente se podría concluir lo siguiente: “todos aquellos puntos sobre la superficie del espejo siendo analizado que formen parte de la línea de frontera entre estados opuestos de iluminación que aparece en su foucaultgrama central correspondiente tendrán derivada parcial cero.”

Aún pasando por el alto cuán difícil resultaría determinar a ciencia cierta la ubicación exacta de tales puntos en una muestra real debido a la naturaleza no abrupta de la línea de transición ente dichos estados de iluminación, no se puede dejar de lado que de cualquier manera tampoco existe información disponible como para conocer el valor de la derivada parcial de todos los puntos fuera de ella. Para lograr una caracterización precisa haciendo uso de alguna técnica de Schlieren primeramente es necesario poder estimar el gradiente completo del error en el frente de onda por medio de ésta.

### **2.1.2 Modelo para la simulación de foucaultgramas desplazados (*MSFD*)**

La única alternativa viable para modificar la distribución del patrón de irradiancia del foucaultgrama central y con ello generar información no trivial sobre toda la superficie del espécimen consiste en forzar que el filo de la navaja abandone su posición estacionaria en el origen del plano focal. No obstante, este movimiento no puede ser realizado siguiendo la línea del eje  $z$  ya que este desplazamiento en particular induce otro tipo de aberración geométrica muy conocida y a la cual se le conoce con el nombre de defoco.

Incidentalmente, esta clase de movimiento o aberración inducida resulta extremadamente útil durante las primeras etapas de la alineación de un aparato de pruebas de Foucault ya que tiene la propiedad de invertir cualquiera que sea la disposición actual de los estados opuestos de iluminación en el foucaultgrama observable. Este efecto ocurre cada y toda vez que el filo de la navaja pasa a través del plano focal durante su avance. Dicho fenómeno de transición de iluminación de tipo “espejo” constituye una especie de procedimiento de auto-calibración inherente a la prueba de Foucault, ya que permite localizar de manera sencilla la ubicación del plano paraxial a lo largo del óptico con un precisión aceptable.

Por lo tanto, el único desplazamiento relevante que la navaja tiene permitido realizar es siguiendo cualquiera que sea el eje coordenado del plano focal directamente perpendicular a su orientación actual, lo que supone un avance axialmente paralelo a la superficie del espejo como se observa en la Fig. 2.2. En este caso particular, el movimiento de la navaja producirá un foucaultgrama vertical desplazado una distancia  $|x_s|$  con respecto al foucaultgrama central vertical.

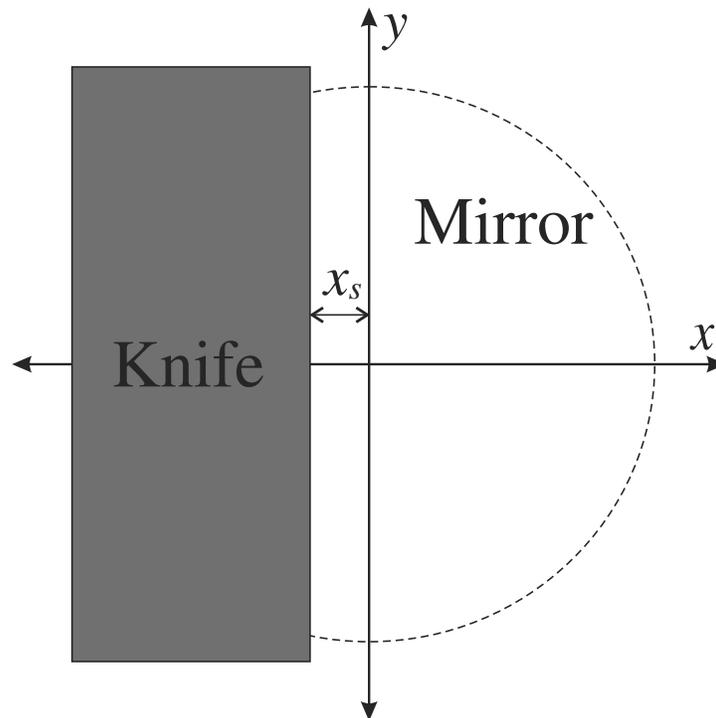


Figura 2.2: Diagrama en perspectiva del desplazamiento del filo de la navaja (orientada verticalmente) una distancia  $|x_s|$  a lo largo del eje  $x$  [35].

Como se puede intuir fácilmente, sí la navaja es desplazada una distancia considerable a la izquierda del origen del plano focal, ésta no obstruirá en lo absoluto el cono de rayos siendo reflejados, ocasionando así que la superficie del espejo aparezca completa y uniformemente iluminada. De manera complementaria, un desplazamiento similar pero en sentido contrario producirá el efecto inverso, es decir, la superficie del espécimen se apreciará totalmente ensombrecida ya que la navaja se encontrará obstruyendo por completo a la imagen reflejada.

En este trabajo estos dos estados de iluminación fundamentalmente opuestos son denominados simplemente como “estados extremos”.

La relevancia práctica de la transición entre estados extremos recae en el hecho de que es controlada totalmente por el desplazamiento del filo de la navaja. Esto implica que si la navaja parte desde el estado de iluminación uniforme tomando incrementos equidistantes axialmente positivos, eventualmente siempre alcanzará el estado de oclusión total, y viceversa (con incrementos axialmente negativos). Esto hace posible generar gráficos de intensidad de iluminación contra distancia de desplazamiento de la navaja  $[(I_s, x_s)]$  para todos los puntos sobre la superficie del espejo, los cuales además contendrán siempre una y solo una transición entre estados extremos o punto de inflexión.

Con base en lo anteriormente discutido, entonces solamente restaría establecer una relación matemática directa entre la distribución de la irradiancia del foucaultgrama observable con respecto a la posición actual del filo de la navaja para finalmente estar en condiciones de poder realizar algún tipo de estimación del gradiente del error en el frente de onda. Como habría de esperarse, dicha formulación es derivada a partir del modelo restringido para el caso del foucaultgrama central y tiene la siguiente forma: [37]

$$I_s(x, y; x_s) \approx H(W^x + x_s/r)A^2(x, y), \quad (2.6)$$

misma que evidentemente deja de manifiesto que de hecho se trata de una generalización de la propia Ec. 2.5. Las implicaciones de esta nueva ecuación pueden ser sintetizadas como sigue: “todos aquellos puntos sobre la superficie del espejo que formen parte de la línea de frontera entre estados extremos de un foucaultgrama desplazado tendrán un valor de derivada parcial directamente proporcional al negativo de la distancia por la cual la navaja fue axialmente desplazada para su generación e inversamente proporcional al radio de curvatura de la pieza.”

Para fines prácticos, entonces puede establecerse con certeza que la totalidad de la información significativa contenida en un foucaultgrama desplazado está estrechamente ligada con la ubicación y morfología de la línea de transición entre estados extremos que aparece en el mismo. De hecho, para todos aquellos puntos que forman parte de dicha línea de frontera la

siguiente expresión simplificada se mantiene:

$$W^x = -x_s/r. \quad (2.7)$$

Sin embargo, como se ha mencionado con anterioridad, esta “línea” de transición solamente existe de forma idealizada. En la práctica, la franja grisácea que aparece entre los estados extremos de una muestra real es tan amplia que resulta prácticamente imposible delimitarla con un grado aceptable de precisión usando métodos empíricos convencionales. Por este motivo resulta indispensable proponer una estrategia de análisis práctica capaz de hacer uso efectivo de las implicaciones teóricas de la Ec. 2.6, misma que de hecho constituiría entonces un método formal de estimación cuantitativa del gradiente del error en el frente de onda.

### **2.1.3 Método para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de foucaultgramas desplazados (MEGFD)**

Las razones principales por las cuales la transición entre estados extremos de un foucaultgrama es de naturaleza no abrupta son la extensión finita de la pupila de salida del sistema y la presencia de aberraciones en la pieza. Si la navaja es desplazada a partir de uno de los estados extremos tomando una serie considerable de desplazamientos equidistantes hasta llegar al otro estado complementario, el gráfico de intensidad de iluminación contra posición de la navaja  $[(I_s, x_s)]$  para cualquier punto sobre la superficie del espejo presentará siempre una tendencia o pendiente de transición suave entre estados estacionarios, muy semejante a la de una función sigmoide, como se observa en la Fig. 2.3.

Por lo tanto, si en la práctica resulta posible generar un conjunto abundante de foucaultgramas igualmente espaciados que contengan a los estados extremos respectivos como muestras inicial y final, por consiguiente se habrá obtenido también información suficiente como para trazar perfiles muy detallados de intensidad de irradiancia transitoria  $(I_s, x_s)$  para cualquier punto dentro de la pupila de salida, mismos que además siempre serán de naturaleza inherentemente sigmoideal. En este trabajo, una serie de foucaultgramas desplazados con las características antes descritas es denominada simplemente como “serie suficiente”.

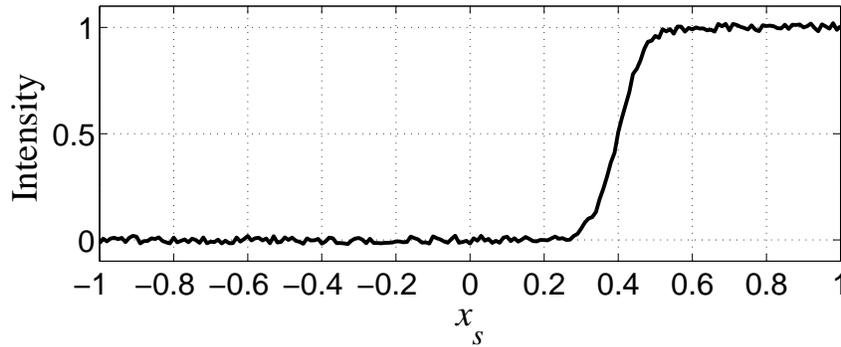


Figura 2.3: Perfil típico de un gráfico  $(I_s, x_s)$  extraído de una serie de foucaultgramas desplazados [37].

La totalidad de los perfiles sigmoideales que pueden ser extraídos de una serie suficiente pueden ser identificados por medio de dos características principales: la pronunciación relativa de su pendiente de transición entre estados estacionario y la localización axial de su punto de inflexión central respectivo. Este par de características se corresponden con los dos parámetros distintivos propios de una función sigmoide analítica, de tal manera que de hecho es posible ajustar todos los perfiles  $(I_s, x_s)$  extraídos de una serie suficiente conformada por  $n$  muestras a un modelo sigmoideal idealizado por medio del método de mínimos cuadrados. Esto último puede ser logrado optimizando la siguiente función de costo: [35]

$$f_s(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{j=1}^n \left( I_{s_j} - \left\{ \frac{\gamma}{1 + \exp[-\alpha(x_{s_j} - \beta)]} + \delta \right\} \right)^2, \quad (2.8)$$

en la cual  $\alpha$  y  $\beta$  son precisamente los parámetros asociados a la pronunciación de la pendiente de transición y a la localización del punto de inflexión de la función sigmoideal analítica, respectivamente. Los parámetros  $\gamma$  y  $\delta$  son introducidos en el modelo de ajuste sigmoideal con la finalidad de tomar en consideración tanto posibles irregularidades en la intensidad de la fuente de iluminación como la presencia potencial de iluminación de fondo residual, lo que hace que el procedimiento sea significativamente más consistente en condiciones reales.

En la práctica, el valor de  $\alpha$  es determinado por la morfología y las imperfecciones propias del espejo siendo analizado y carece de mayor importancia para nuestros propósitos actuales. El caso totalmente contrario ocurre con el valor de  $\beta$ , mismo que en nuestro contexto puede

ser relacionado directamente con la posición exacta del filo de la navaja responsable de causar la transición entre estados opuestos de iluminación en el punto de la superficie reflectora actualmente siendo evaluado. Por medio de esta simple asociación queda de manifiesto que en esta instancia se cuenta con suficiente información no trivial como para realizar una estimación precisa del valor de la derivada parcial en dicho punto por medio de la Ec. 2.7, misma que de hecho ahora puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$W^x = -\beta/r. \quad (2.9)$$

Puesto que la función de costo para el ajuste sigmoideal propuesta (Ec. 2.8) se adapta satisfactoriamente a los datos que predice la teoría y además puede ser solucionada haciendo uso de algún método de optimización clásico, el procedimiento antes descrito queda establecido como un método cuantitativo simple para la estimación precisa del gradiente del error en el frente de onda de cualquier clase de espejo óptico focalizador.

Desde luego, esta metodología solamente puede adquirir relevancia una vez que los mapas de gradiente estimados sean integrados para así generar una representación digital a detalle de la superficie reflectora del dispositivo, y más importante aún, cuando se compruebe que dicho perfil resultante se corresponde satisfactoriamente con el obtenido mediante algún otro método de caracterización validado.

#### **2.1.4 Método simplificado para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de foucaultgramas desplazados (*MSEGFD*)**

Al analizar cuidadosamente las características fundamentales de la función sigmoideal analítica que fue propuesta como modelo para el ajuste de los perfiles de intensidad de iluminación transitoria (Ec. 2.8), resulta evidente que a pesar de que se trata del modelo teórico con las propiedades ideales para describir este particular fenómeno óptico, dicha función puede ser sustituida por alguna otra incluso potencialmente más ventajosa sin mayores complicaciones.

Dadas las características semi-estacionarias de la pendiente de transición de un perfil sigmoideal, la función que describe a una línea recta emerge como una primera alternativa obvia. Debido a su comparativa simplicidad, ésta podría hacer más eficiente el proceso de estimación

del gradiente del error en el frente de onda sin impactar severamente la precisión global de la metodología.

No obstante, este intercambio de la función modelo para el ajuste de los perfiles de iluminación transitoria únicamente puede arrojar resultados aceptables cuando se establecen por adelantado algunas consideraciones heurísticas: siempre y cuando  $(I_s, x_s)$  constituya un perfil pseudo-sigmoidal cuya componente de iluminación de fondo (offset) ha sido adecuadamente removida previo a su normalización, todos aquellos puntos (muestras) que conformen su pendiente de transición respectiva pueden ser aislados para generar un sub-perfil reducido  $(I_r, x_r)$  conformado por  $m$  muestras, mismo que solo entonces puede ser propiamente ajustado a una distribución lineal básica optimizando la siguiente función de costo simplificada: [38]

$$f_r(a, b) = \sum_{j=1}^m [I_{r_j} - (ax_{r_j} + b)]^2, \quad (2.10)$$

para la cual  $a$  se corresponde con la pendiente y  $b$  con el pistón de la línea recta, respectivamente. La principal ventaja de este modelo de ajuste lineal radica en que la técnica de optimización que debe ser empleada para encontrar su solución será siempre inherentemente más simple y, por consiguiente, también significativamente más eficiente que la requerida para el caso del modelo de ajuste sigmoidal. A partir de los coeficientes que minimizan la función anterior, el punto de inflexión del perfil originalmente sigmoidal ( $\beta$ ) puede ser calculado de manera opcional directamente como sigue:

$$\beta = \frac{1 - 2b}{2a}, \quad (2.11)$$

que al ser sustituido a su vez en la Ec. 2.9 da lugar a la siguiente expresión alternativa para la estimación del gradiente del error en el frente de onda:

$$W^x = -\frac{1 - 2b}{2ar}. \quad (2.12)$$

Como habría de esperarse, esta metodología simplificada para la extracción de información cuantitativa a partir de series de foucaultgramas desplazados retiene básicamente todas las propiedades fundamentales del modelo original, manifestado adicionalmente el potencial para exhibir un rendimiento comparativamente superior en la práctica. Desde luego, esta premisa

solamente puede ser confirmada una vez que se confronten los resultados de ambos métodos, y de forma más concluyente aun, cuando tales resultados sean empleados para generar una reproducción digital detallada de la superficie del dispositivo óptico analizado por medio de alguna técnica de integración.

## **2.2 La prueba cuantitativa de Ronchi (PCR)**

La prueba de Ronchi es considerada como la derivación directa más sobresaliente de la prueba de Foucault y, debido a esto, es también comúnmente señalada como la técnica insignia por excelencia de la familia de Schlieren. Esto se debe principalmente a que la metodología no solo es capaz de retener la sencillez del procedimiento original, sino que también, al mismo tiempo, aumenta significativamente la cantidad y calidad de la información sensible que puede ser captada por el observador. En términos generales, se podría afirmar que la prueba de Ronchi redujo considerablemente la subjetividad intrínseca del proceso de caracterización, al menos comparativamente hablando.

Esta mejora substancial con respecto a la metodología propuesta por Foucault consiste simplemente de una sola pero ingeniosa modificación: la sustitución de la pantalla de modulación original, el filo de una navaja, por una rejilla de difracción de alta frecuencia; lo que en resumidas cuentas genera un patrón de sombras, o en este caso mejor dicho un “patrón de franjas”, significativamente más denso. Desde luego, como habría de esperarse, la prueba de la rejilla de Ronchi de hecho hereda también prácticamente todas las desventajas y defectos primordiales de su antecesora, en otras palabras, la generación de observaciones experimentales para las cuales no existe un procedimiento de análisis riguroso que permita extraer información sensible acerca del dispositivo siendo estudiado de manera no trivial.

Pese a que las características generales de los arreglos ópticos asociados a la aplicación de ambas técnicas son esencialmente las mismas, la naturaleza de sus observaciones es radicalmente distinta. Esta es la razón principal por la cual las modificaciones pertinentes realizadas

al aparato de pruebas de Ronchi clásico así como los fundamentos teóricos detrás del procedimiento propuesto para el análisis de sus muestras también difieren drásticamente con respecto a la *PCF*.

Como referencia y para dar comienzo con su estudio, en la Fig. 2.4 se observa el arreglo óptico básico empleado de manera tradicional para llevar a cabo la prueba de Ronchi. Al igual que en el caso de la prueba de Foucault, el espécimen cóncavo de diámetro superficial  $D$  a ser analizado debe ser posicionado de forma vertical, con su eje óptico  $z$  apuntando hacia adelante y formando un ángulo recto con respecto a su superficie reflectora. A la distancia de su radio de curvatura nominal  $r$  una fuente de luz semi-puntual  $s$  es colocada inmediatamente adyacente a su eje óptico, evitando ocluir la imagen. Con la finalidad de producir los característicos mapas de franjas, una rejilla de Ronchi con periodo espacial fijo  $p$  es situada entre la trayectoria de focalización de los rayos de luz con su superficie orientada perpendicularmente al eje óptico y a una distancia específica  $l'$  referida con respecto al centro de curvatura de la pieza.

Más allá de dicha pantalla de modulación un observador o bien un sistema formador de imágenes ubicado precisamente en el plano imagen detectaría como las franjas expandidas, que de otra manera serían perfecta rectas, se ven curvan ligeramente sobre la superficie del espejo. Este efecto se debe al influjo de tanto la morfología e imperfecciones propias del dispositivo óptico siendo analizado, como del término de defoco inducido por la rejilla. En un “ronchigrama”, nombre coloquial que reciben las observaciones de la prueba, tal efecto es considerado como una manifestación visual y/o consecuencia de la presencia de aberraciones transversales, las cuales se denotan como  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ .

Desde el punto de vista más exhaustivo de la óptica física, la combinación de franjas observable en un ronchigrama es interpretada como un producto directo de los efectos de la interferencia y la difracción. Por lo tanto, este modelo teórico, en principio más complejo, no puede ser pasado por alto cuando se pretende realizar mediciones con una precisión en el orden o incluso menor al de la longitud de onda en la práctica.

Si alternativamente se considera que el patrón de franjas producido es un especie de interferograma para el cual la rejilla de Ronchi ha producido una gran cantidad de ordenes de difracción distintos, entonces el frente de onda en el plano de la pupila de salida de un sistema

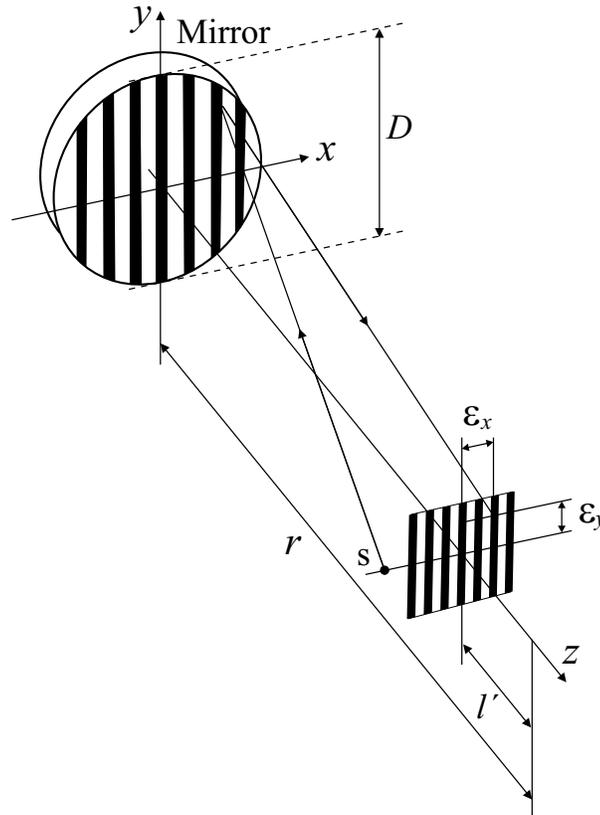


Figura 2.4: Disposición geométrica básica de la prueba de Ronchi clásica [40].

uniformemente iluminado puede ser representado por una función compleja con las siguientes características: [4]

$$F(x, y) = \begin{cases} \psi_o(x, y) & \text{dentro de la apertura circular,} \\ 0 & \text{fuera de ésta,} \end{cases} \quad (2.13)$$

Debido a las implicaciones de la teoría de Fourier, por consiguiente, si la rejilla de Ronchi es considerada a su vez como una máscara de filtrado espacial  $M(u, v)$  en el plano de la transformada (o plano focal), la función de amplitud compleja en el plano complementario de observación  $G(x_o, y_o)$  estará dada por: [4]

$$G(x_o, y_o) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy \iint_{-\infty}^{\infty} M(u, v) e^{i(2\pi/\lambda r)[(x_o-x)u+(y_o-y)v]} du dv, \quad (2.14)$$

misma que constituye un modelo físico aceptable y válido virtualmente para cualquier tipo de pantalla de modulación. Sin embargo, la solución de esta formulación integral puede volverse

un tanto desafiante e innecesariamente engorrosa cuando se genera un patrón tipo Moiré [43], en otras palabras, cuando dos o más patrones de franjas ya sea rotados y/o desplazados se superponen. Incidentalmente, esto resulta ser precisamente lo que ocurre en el caso de un “birronchigrama”, nombre coloquial que reciben las muestras de la prueba de Ronchi con una cuadrícula [44]. Esto ocasiona que la formulación anterior se vuelva totalmente inadecuada para nuestros propósitos ya que el análisis de este tipo de muestras es imprescindible para lograr la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una sola imagen de la prueba de Ronchi.

Afortunadamente, en el pasado ha sido demostrado que la notablemente más accesible teoría geométrica produce prácticamente los mismos resultados siempre y cuando la frecuencia del enrejado sea relativamente baja [4]. Casualmente, lo antes mencionado también resulta ser una de las condiciones experimentales preestablecidas para la generación de ronchigramas, puesto que la sobre-saturación o “empalme” de franjas en el campo de visión es siempre evitado a toda costa.

### 2.2.1 Modelo para la simulación de ronchigramas con defoco (*MSRD*)

En este caso, desde el punto de vista particular de la óptica geométrica, las líneas que se forman en un ronchigrama son consideradas simplemente como sombras retro-proyectadas directamente desde las bandas de la rejilla. Ante tal escenario, las aberraciones transversales  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  en el plano focal pueden ser estimadas simplemente haciendo uso de las siguientes expresiones: [4, 5]

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_x}{r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_y}{r}, \quad (2.15)$$

respectivamente. En consecuencia, el modelo matemático de un ronchigrama vertical con perfil de intensidad sinusoidal puede ser expresado directamente como sigue: [22]

$$R(x, \beta) = 1 + \zeta \cos \left( \frac{2\pi}{p} \left[ r \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} - \eta \right] \right), \quad (2.16)$$

para la cual  $\zeta$  representa el contraste relativo de las franjas de la rejilla y  $\eta$  el término de fase inicial. Este modelo idealizado básico describe al ronchigrama observable de cualquier tipo de superficie focalizadora simplemente como el contorno de la primera derivada parcial de la

función de la deformación en su frente onda en la dirección siendo considerada. Por lo tanto, a través de esta expresión cerrada es posible generar fácilmente aproximaciones sintéticas en escala de grises de los ronchigramas unidireccionales asociados a una pieza cualesquiera siempre y cuando se conozca de antemano su función del error en el frente de onda.

No obstante, esta formulación de hecho no considera la introducción del término de defoco asociado con la posición relativa de la rejilla a lo largo del eje óptico ( $l'$ ), mismo que, como se verá en la siguiente sección, resulta vital para llevar a cabo las operaciones de filtrado y medición de fase requeridas por la metodología que se propone.

Tomando en consideración lo antes discutido, el análisis propiamente dicho puede ser iniciado asumiendo que un desplazamiento paraxial de la rejilla a lo largo del eje óptico una distancia  $l'$  (consulte la Fig. 2.4) precisamente induce un término de defoco puro ( $d$ ), el cual está definido de la siguiente forma dentro de las aberraciones geométricas primarias: [4]

$$d = \frac{l'}{2r^2}. \quad (2.17)$$

Por simplicidad y ya que el término  $\eta$  en la Ec. 2.16 es inconsecuente para nuestros propósitos mientras que  $\zeta$  se vuelve prescindible cuando se emplean simultáneamente una rejilla de alto contraste y algoritmos de corrección de imágenes, tales parámetros pueden ser obviados de la formulación. Por lo tanto, un modelo generalizado con base en la teoría geométrica para describir la formación de ronchigramas normalizados sinusoidales en la presencia de un defoco predominante inducido por la propia rejilla de Ronchi puede ser reescrito como:

$$R(\chi) = \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \left[ \frac{r}{p} W^\chi(x, y) + \frac{l'}{rp} \chi \right] \right) \right] / 2, \quad (2.18)$$

donde  $\chi$  representa cualquiera de los dos ejes coordenados  $x$  e  $y$  con respecto al cual la rejilla teórica se encuentra actualmente orientada de forma perpendicular. Asimismo,  $W^\chi(x, y)$  representa la primer derivada parcial de la función de la deformación en el frente de onda en la dirección especificada por  $\chi$ .

Probablemente, la implicación más importante y evidente de esta formulación es que para todos los espejos focalizadores con longitudes focales relativamente largas, *p. ej.* la mayoría de los espejos primarios de los telescopios reflectores, sus ronchigramas con defoco asociados

consistirán a primera vista de franjas perfectamente rectas cuya frecuencia espacial fundamental ( $f_d$ ) estará regida por:

$$f_d = \frac{l'}{rp}. \quad (2.19)$$

Por consiguiente,  $f_d$  puede ser considerada como un tipo de frecuencia portadora espacial que en la práctica es completa y simplemente controlada desplazando la rejilla a lo largo del eje óptico más cerca o lejos del espécimen, causando así un incremento o disminución en la densidad de franjas observable en la muestra según sea el caso.

La “frecuencia portadora de defoco”  $f_d$  es precisamente el parámetro que por sí solo es capaz de enlazar ambos enfoques ópticos, ya que permite realizar un proceso de filtrado espacial que es consistente con el método de medición de fase basado en el análisis de Fourier, fundamentos de la metodología de estimación cuantitativa que se presenta en la siguiente sección.

Desde luego, esta formulación basada en la teoría geométrica debe ser adecuadamente extendida para que pueda lidiar también con los efectos colaterales asociados a la combinación de dos patrones de franjas superpuestos, lo cual representa precisamente el caso que ocurre cuando se genera un birronchigrama. Una vez logrado lo anterior se estará en condiciones de proponer una estrategia de análisis para afrontar el problema inverso que de hecho tiene implicaciones en la práctica: ¿cómo estimar de forma precisa el perfil de las aberraciones en la superficie de un espejo focalizador a partir de un solo birronchigrama capturado experimentalmente?

### **2.2.2 Método para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco (MEGBD)**

Puesto que las formulaciones de ambos enfoques ópticos previamente estudiados son consistentes dentro de sus propios campos de acción, el propósito principal del análisis que se presenta a continuación es establecer un vínculo formal entre ambos. Esto permitirá proponer una metodología de caracterización que haga alarde de la simplicidad asociada a la teoría geométrica, sin al mismo tiempo carecer de la rigurosidad de la óptica física, teoría que resulta esencial para llevar a cabo estimaciones cuantitativas inclusive en el orden de fracciones de la longitud de onda.

Como punto de partida, al menos para nuestros propósitos, es necesario adoptar un modelo alternativo a la Ec. 2.14 que describa de manera más sencilla los fenómenos de formación y combinación de franjas que dan lugar a un birronchigrama. Una formulación con tales características fue empleada previamente para la calibración de un sistema de perfilometría por proyección de franjas [45]. En este trabajo, la cuadrícula formada por las franjas proyectadas por un sistema perfilométrico, misma que aparece en el plano equivalente al de la pupila de salida del arreglo para la prueba de Ronchi, fue descrita con base en la expansión de series de Fourier básica como sigue:

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi n[\phi_x(x,y)+u_x x]} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i2\pi m[\phi_y(x,y)+v_y y]} \\
&= a_0 b_0 + a_1 b_0 c_x(x, y) e^{i2\pi u_x x} + a_0 b_1 c_y(x, y) e^{i2\pi v_y y} + \dots \\
&\quad a_{-1} b_0 c_x^*(x, y) e^{-i2\pi u_x x} + a_0 b_{-1} c_y^*(x, y) e^{-i2\pi v_y y} + \dots, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

donde  $a_n$  y  $b_m$  representan las constantes correspondientes de la serie de Fourier,  $u_x$  y  $v_y$  son las frecuencias espaciales fundamentales en cada dirección ortogonal respectiva,  $c_x(x, y) = \exp[i2\pi\phi_x(x, y)]$ ,  $c_y(x, y) = \exp[i2\pi\phi_y(x, y)]$  y \* indica el complejo conjugado. Por otra parte, los términos  $\phi_x(x, y)$  y  $\phi_y(x, y)$  demandan una explicación más detallada. Mientras que para el caso de la metodología original se consideraba que estas ligeras modulaciones de fase eran causadas por leves distorsiones y errores en el sistema tales como la desalineación, en nuestro contexto, estas minúsculas deformaciones son inducidas por una versión ponderada del gradiente de la función de aberración en el frente de onda, como lo implica la Ec. 2.18. A partir de esta simple realización nos encontramos finalmente en una posición adecuada para tratar de extraer información sensible de un birronchigrama.

Por las implicaciones de la teoría de Fourier y siguiendo el desarrollo matemático natural de la técnica de calibración original, la transformada de Fourier en el plano equivalente al de modulación quedaría entonces dada por:

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \mathcal{F}\{g(x, y)\} = a_0 b_0 \delta(u, v) + \dots \\
&\quad a_1 b_0 C_x(u - u_x, v) + a_0 b_1 C_y(u, v - v_y) + \dots \\
&\quad a_{-1} b_0 C_x^*(-u - u_x, v) + a_0 b_{-1} C_y^*(u, -v - v_y) + \dots, \tag{2.21}
\end{aligned}$$

para la cual  $\delta(\cdot)$  representa la función delta de Dirac. Al analizar esta ecuación resulta evidente que de hecho es posible no solo identificar, sino también incluso disociar y separar de manera formal la información de fase concerniente a cada una de las rejillas individuales que conforman la pantalla de modulación. Esto puede ser conseguido con relativa facilidad en el dominio de la frecuencia aislando el segundo y el tercer término de la Ec. 2.21 por medio de dos filtros espaciales cuyos centroides se encuentren localizados en los pares coordenados  $(u_x, 0)$  y  $(0, v_y)$ , respectivamente. Estos segmentos de información representan a dos de los cuatro lóbulos principales en el espectro de Fourier que aparecen como resultado del efecto de modulación inducido por la posición relativa de las rejillas cruzadas de Ronchi a lo largo del eje óptico. En el espectro de un birronchigrama, dichos lóbulos solamente vendrán segundos en magnitud al término impulsivo en el origen que es propiciado por la componente de iluminación de fondo.

Una vez propiamente aislados y tras aplicarles la operación transformada inversa de Fourier correspondiente, estos términos darán lugar a las dos siguientes señales complejas:

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} [a_1 b_0 C_x(u - u_x, v)] = a_1 b_0 e^{i2\pi[\phi_x(x, y) + u_x x]} \\ g_y(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} [a_0 b_1 C_y(u, v - v_y)] = a_0 b_1 e^{i2\pi[\phi_y(x, y) + v_y y]}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por simple asociación con la Ec. 2.18 y dadas las implicaciones de la Ec. 2.19, el argumento de cada una de estas expresiones puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= a_1 b_0 \exp \left\{ i2\pi \left[ \frac{r}{p} W^x(x, y) + f_d x \right] \right\} \\ g_y(x, y) &= a_0 b_1 \exp \left\{ i2\pi \left[ \frac{r}{p} W^y(x, y) + f_d y \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

para las cuales obviamente se asumió que ambas rejillas cruzadas comparten exactamente la misma ubicación a lo largo del eje óptico y presentan el mismo periodo. Por lo tanto, simplemente resta con resolver como corresponde en las ecuaciones previas para acceder así al

gradiente de la función de la deformación en el frente de onda, lo que da lugar a las subsecuentes expresiones cerradas:

$$\begin{aligned} W^x(x, y) &= \frac{\mathcal{U}\left\{\arg\left[g_x(x, y)e^{-i2\pi f_d x}\right]\right\}_p}{2\pi r} \\ W^y(x, y) &= \frac{\mathcal{U}\left\{\arg\left[g_y(x, y)e^{-i2\pi f_d y}\right]\right\}_p}{2\pi r}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $\mathcal{U}\{\cdot\}$  indica un operador de desenvolvimiento de fase. Como se puede constatar, mientras que el enfoque matemático presentado en la sección anterior principalmente pretendía describir un modelo apropiado para la simulación de ronchigramas con defoco a partir de frentes de onda analíticos conocidos, el presente análisis se empeña en extraer información cuantitativa precisa de cualquier birronchigrama con defoco capturado en la práctica.

Sin embargo, no se debe olvidar que hasta el momento se ha dejado de lado el proceso de análisis, selección y ajuste de la herramienta matemática apta para realizar la integración de los datos sensibles arrojados por las metodologías de estimación propuestas. La *PCF* y la *PCR*, como cualquier otra técnica de caracterización de su tipo, requieren de un algoritmo de integración robusto para poder alcanzar su máximo potencial en términos de precisión.

### 2.3 Integración del gradiente del error en el frente onda estimado

Durante la etapa final de cada una de las metodologías propuestas, la implementación de algoritmos optimizados se vuelve una necesidad ya que los métodos para la integración de datos matriciales son significativamente más complejos y demandantes (en términos computacionales) que los que son llevados a cabo cuando se trabaja con información vectorial. Debido a que la gran mayoría de esta clase de algoritmos involucran alguna especie de minimización iterativa discreta del funcional de integración asociado, éstos manifiestan ya sea respuestas relativamente lentas o bien producen resultados severamente inexactos.

Incidentalmente, esta última particularidad se contrapone con la característica más importante que se busca en prácticamente todo tipo de metodología de caracterización óptica: la precisión. A pesar de que la eficiencia constituye también otro factor esencial que es procurado

en la medida de las capacidades propias de cualquier sistema, la exactitud siempre prevalecerá en este ramo ya que rara vez se pretende o requiere que esta clase de procedimientos y/o instrumentos generen un respuesta inmediata en tiempo real.

Para el caso de la *PCF*, originalmente se empleó un algoritmo de integración basado en la teoría de Fourier [35,46], mismo que fue elegido ya que ofrecía una respuesta notablemente más rápida que la de la inmensa mayoría de métodos iterativos debido a su naturaleza de estimación global no-iterativa. No obstante, posteriormente se comprobó que su desventaja principal, es decir, la incapacidad inherente del algoritmo para delimitar de forma intuitiva la región de existencia de datos significativos para la integración que en nuestro caso particular se encuentra confinada por lo límites de la pupila de salida del sistema, es causante de una severa propagación de errores en el perfil de aberración resultante, particularmente en las regiones aledañas al anillo de frontera exterior de la pieza [38].

Por esta razón, se estimó necesario volver a recurrir a un método de integración iterativo, pues a pesar del sacrificio que éstos comparativamente suponen en términos de tiempo de ejecución, es de hecho posible establecer de manera sencilla y eficiente la región de interés (ROI) para la integración, lo que limita drásticamente la introducción de errores asociados exclusivamente con este proceso [38].

### **2.3.1 Función de costo cuadrática regularizada para la integración de campos de gradiente (*FCCR*)**

Con lo anteriormente discutido en mente, se propuso una función de costo cuadrática regularizada (*FCCR*) especialmente diseñada para lidiar con las características particulares de los campos de gradiente obtenidos mediante los métodos *MEGFD* y *MEGBD* durante el proceso de integración. Dicha formulación se encuentra basada en el modelo central de diferencias y

en la teoría de regularización, como se muestra a continuación: [39]

$$\begin{aligned}
 I(\omega) = \sum_{(x,y) \in L} & \left\{ [2\Delta W^x(x,y)_{x,y} - (\omega_{x+1,y} - \omega_{x-1,y})]^2 + \dots \right. \\
 & [2\Delta W^y(x,y)_{x,y} - (\omega_{x,y+1} - \omega_{x,y-1})]^2 + \dots \\
 & \mu [(\omega_{x,y} - \omega_{x+1,y})^2 + (\omega_{x,y} - \omega_{x-1,y})^2 + \dots \\
 & (\omega_{x,y} - \omega_{x,y+1})^2 + (\omega_{x,y} - \omega_{x,y-1})^2 + \dots \\
 & (\omega_{x,y} - \omega_{x+1,y+1})^2 + (\omega_{x,y} - \omega_{x-1,y+1})^2 + \dots \\
 & \left. (\omega_{x,y} - \omega_{x+1,y-1})^2 + (\omega_{x,y} - \omega_{x-1,y-1})^2 \right\}, \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

en la cual  $L$  constituye la cuadrícula o enrejado de datos válidos,  $\Delta$  establece la distancia de muestreo entre píxeles adyacentes,  $\mu$  es un término de regularización que fija el grado de suavidad de la función estimadora por medio de un filtro de pasa-bajas, y  $\omega$  representa la función a estimar o meta-datos cuyo gradiente es conocido, respectivamente.

Formulaciones de este tipo evidentemente siempre presentarán una respuesta comparativamente más lenta en relación con la de cualquier otro método con características similares a las del algoritmo de integración con base en la teoría de Fourier. Esto se debe a que forzosamente se requiere de alguna estrategia iterativa a fin de alcanzar un grado aceptable de convergencia dentro de los límites de tolerancia establecidos para el proceso de minimización.

En contraste, puesto que la *FCCR* precisamente no representa un método de estimación de naturaleza global, la ROI para la integración puede ser especificada de antemano inclusive píxel a píxel, lo cual, como se pudo constatar en un análisis de precisión y desempeño, tiene un impacto directo muy significativo en la exactitud de los resultados alcanzados con esta clase de metodologías [38].

Por otro lado, de hecho se puede ganar mucho en términos de tiempo de ejecución cuando se toma ventaja de la estructura regular de la función a través de un manejo eficiente de índices y mediante la selección de un algoritmo de optimización competente para su solución, como lo es el caso del método de gradiente conjugado lineal (*MGCL*) [47].

En esta punto, solo resta revisar y discutir algunas consideraciones prácticas y algorítmicas importantes para poder hacer uso adecuado y luego poner a prueba a las metodologías propuestas bajo un entorno controlado de simulación con las condiciones experimentales esperadas. Una vez logrado lo anterior, entonces también se estará en una posición favorable como para poder llevarlas a la práctica y posteriormente confrontar sus resultados directamente con los obtenidos usando algún otro método de caracterización confiable.

## Capítulo 3

# Resultados simulados

En este capítulo se presentan y analizan detalladamente los resultados alcanzados por las metodologías *PCF* y *PCR* en un entorno de simulación. Solamente bajo condiciones controladas e ideales es posible discernir y establecer un serie de consideraciones experimentales y algorítmicas indispensables que posteriormente permitirán alcanzar resultados satisfactorios también en la práctica.

Los cálculos pertinentes, el procesamiento y visualización de las imágenes asociadas fue realizado en la plataforma MATLAB R2017b ejecutada en una PC Windows 10 con procesador Intel Core i7-4770 @ 3.4GHz y 16GB en RAM.

### 3.1 Generación de las superficies ópticas para simulación

Con la finalidad de que posteriormente sea posible realizar una comparación razonable entre los resultados simulados y los resultados experimentales que se presentan en el siguiente capítulo, las especificaciones generales de la superficie óptica a ser simulada deben ser las mismas que las del espejo de pruebas que será analizado experimentalmente. En nuestro caso particular, este dispositivo óptico es un espejo cóncavo esférico de  $15\text{cm}$ . de diámetro superficial ( $D$ ) y  $2.36\text{m}$ . de radio de curvatura nominal ( $r$ ). Al tratarse de una pieza con una apertura circular, la pupila de salida del sistema óptico puede ser generada fácilmente haciendo

uso de la siguiente función:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq D/2 \\ 0 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} > D/2 \end{cases} . \quad (3.1)$$

En la Fig. 3.1 puede verse la pupila de salida resultante para una muestra con un diámetro efectivo de  $512\pi x$ . Estas dimensiones son propuestas ya que resultan suficientes para demostrar el potencial de ambas metodologías en términos de precisión sin impactar severamente su rendimiento o tiempo de cálculo.

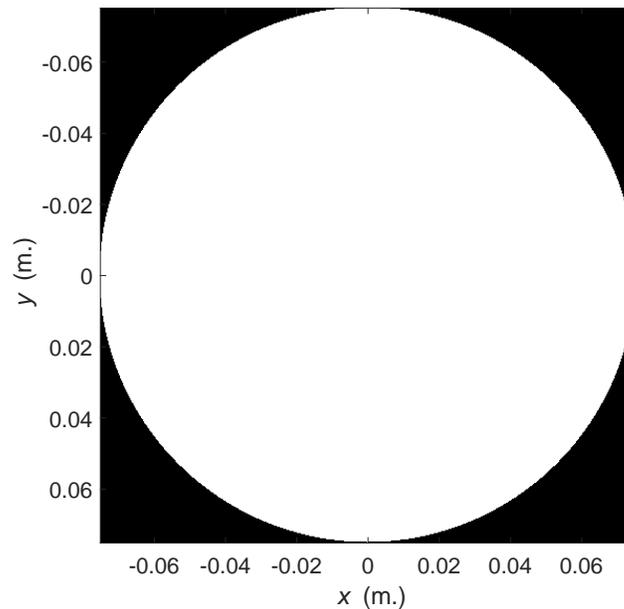


Figura 3.1: Pupila de salida del sistema óptico propuesto ( $512x512\pi x$ .)

Puesto que el error en el frente de onda que reportan la amplia mayoría de las técnicas de caracterización óptica se encuentra referido con respecto a la esferoide ideal asociada a los parámetros de las superficie reflectora siendo analizada, por lo tanto primeramente debe generarse un frente de onda esférico perfecto de referencia asociado a las especificaciones particulares del espejo de pruebas. Tal frente de onda puede ser descrito de manera sencilla cuando se encuentra confinado por los límites preestablecidos por la pupila de salida del sistema (Fig. 3.1) como sigue:

$$Z_e = r - \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}. \quad (3.2)$$

En la Fig. 3.2 se observa el frente de onda esférico ideal resultado de introducir los parámetros ya conocidos del espejo de pruebas en la ecuación anterior, mismo que presenta una relación  $P-V$  (pico a valle) de  $1.2\text{mm}$ .

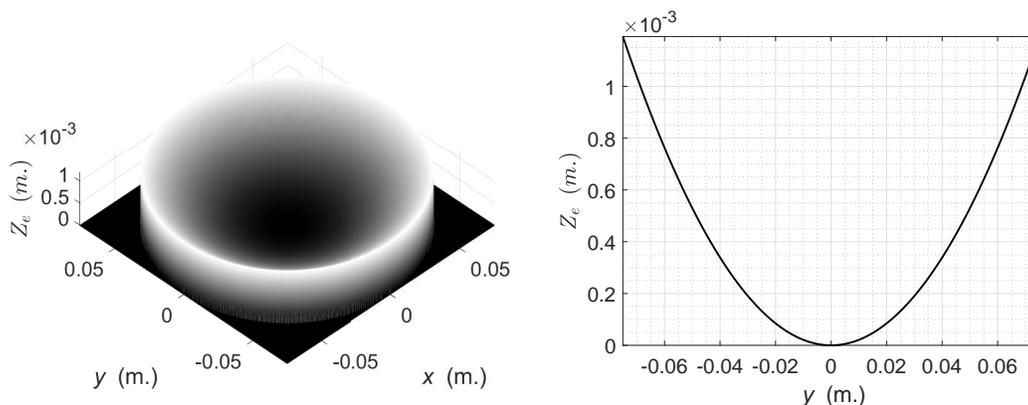


Figura 3.2: Simulación del frente de onda esférico perfecto asociado a los parámetros del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

No obstante, como se mencionó anteriormente, la curvatura pretendida para este espejo de pruebas es de tipo esférica, y más específicamente parabólica, al tratarse del espejo primario para un telescopio reflector. Por lo tanto, esta pieza puede ser considerada como una superficie óptica con “gran” aberración, pues su perfil deseado, en términos de morfología y magnitud, sea aleja considerablemente del de una esferoide ideal. Lo anterior también implica que una proporción significativa del error en el frente de onda del espejo de pruebas que las técnicas de caracterización habrán de detectar, al estar referido con respecto a su esferoide ideal (3.2), de hecho propiamente no forma parte de los defectos o imperfecciones presentes en el dispositivo. En otras palabras, se puede concluir que una porción importante de las aberraciones que se detectan al analizar toda superficie esférica en realidad es inducida deliberadamente durante el proceso de figuración en búsqueda de alcanzar el perfil requerido en dicho espécimen.

Para conocer la morfología y magnitud de tales errores de superficie entonces también resulta necesario generar, en este caso, un frente de onda parabólico perfecto de referencia asociado a las especificaciones del espejo de pruebas. Una vez más, este perfil puede ser descrito por medio de la siguiente ecuación simple siempre y cuando sus límites se encuentren

delimitados por la pupila de salida del sistema establecida previamente (Fig. 3.1):

$$Z_p = \frac{x^2 + y^2}{2r}. \quad (3.3)$$

El frente de onda parabólico ideal resultante asociado al espejo de pruebas se muestra en la Fig. 3.3, mismo que exhibe también una relación  $P-V$  de aproximadamente  $1.2mm.$ , como puede observarse. Desde luego, resulta prácticamente imposible diferenciar los frentes de onda que aparecen en las Figs. 3.2 y 3.3 a primera vista y/o simplemente empleando los órdenes de magnitud con los que se presentan a gran escala. La disparidad que existe entre un perfil esférico y uno parabólico con el mismo radio de curvatura es extremadamente diminuta, y es precisamente la razón por la cual el proceso de figuración de una superficie parabólica representa una tarea tan desafiante en la práctica.

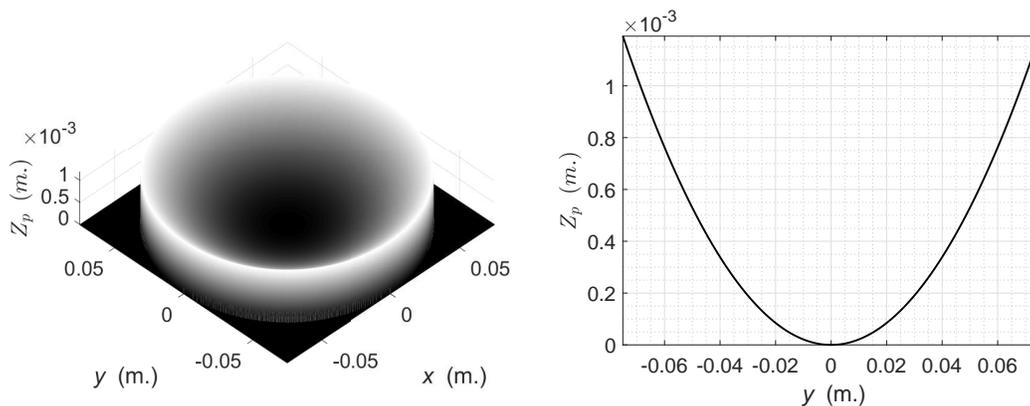


Figura 3.3: Simulación del frente de onda parabólico perfecto asociado a los parámetros del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Una vez en posesión de ambos frentes de onda ideales resulta muy sencillo calcular el error en el frente de onda que un espejo parabólico perfecto debería presentar en teoría, mismo que puede ser obtenido simplemente con la siguiente relación:

$$W_i = Z_e - Z_p. \quad (3.4)$$

En la Fig. 3.4 puede apreciarse el perfil de dicho error ideal para una superficie reflectora con las características de nuestro espejo de pruebas (de aquí en adelante esta curva simplemente es

referida como “perfil ideal”). Esta figura finalmente nos aporta un panorama general de la morfología potencial de las aberraciones presentes en la pieza, mismas que exhiben una relación  $P$ - $V$  de alrededor de apenas  $300nm.$ , en otras palabras, aproximadamente  $\lambda/2$  (suponiendo  $\lambda \simeq 633nm.$ )

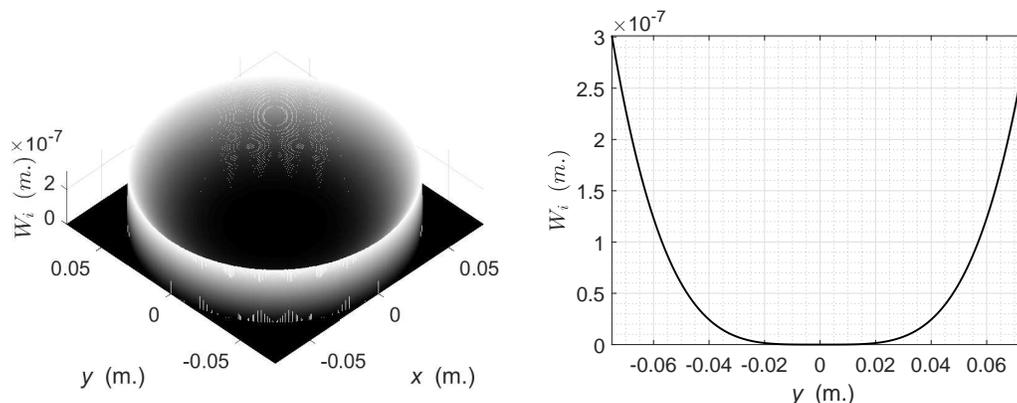


Figura 3.4: Simulación del error en el frente de un espejo parabólico perfecto con las especificaciones del espejo de pruebas [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Por otra parte y como puede suponerse, puesto que este perfil de hecho solamente constituye una porción mayoritaria del error en el frente de onda que es esperada/deseada, su relación  $P$ - $V$  no es representativa en lo absoluto de los órdenes de magnitud que las metodologías propuestas deberán ser capaces de resolver en la práctica. En la práctica, las imperfecciones o defectos que se requiere detectar se manifiestan en la forma de minúsculas elevaciones y depresiones que se distribuyen sobre toda la superficie del espécimen siguiendo un patrón irregular de baja frecuencia, por lo que toda técnica de caracterización óptica de alta precisión idealmente debería ser capaz de resolver magnitudes de al menos una centésima parte del valor  $P$ - $V$  del perfil de aberración de la pieza siendo estudiada.

Una forma sencilla de introducir esta clase de defectos en el perfil ideal generado anteriormente (Fig. 3.4), mismos que de hecho representan a los errores que actualmente se pretende y/o requiere detectar en la práctica, consiste en añadir un pequeño porcentaje de ruido aleatorio a dicho perfil. Sin embargo, no debe pasarse por alto que las características propias de esta tipo

de ruido no se corresponden en lo absoluto con la naturaleza de las imperfecciones esperadas en la práctica, pues la adición de éste ocasionará que las aberraciones presentes en el frente de onda sean de frecuencia relativamente alta.

Una alternativa razonable para disminuir la frecuencia espacial del ruido aleatorio consiste en incorporarlo previamente a una función analítica base de menor frecuencia y con una amplitud significativamente mayor a la de éste. En la Fig. 3.5 se muestra el ruido de baja frecuencia que posteriormente será añadido en forma ponderada al error en el frente de onda ideal simulado. Este perfil es el resultado de agregar a la función `peaks` de MATLAB ruido gaussiano uniformemente distribuido (*RGUD*) con una amplitud equivalente al 0.5% de su relación *P-V*. Como se pretendía, las componentes de alta frecuencia asociadas al ruido aleatorio son prácticamente imperceptibles a simple vista en el ruido final procesado.

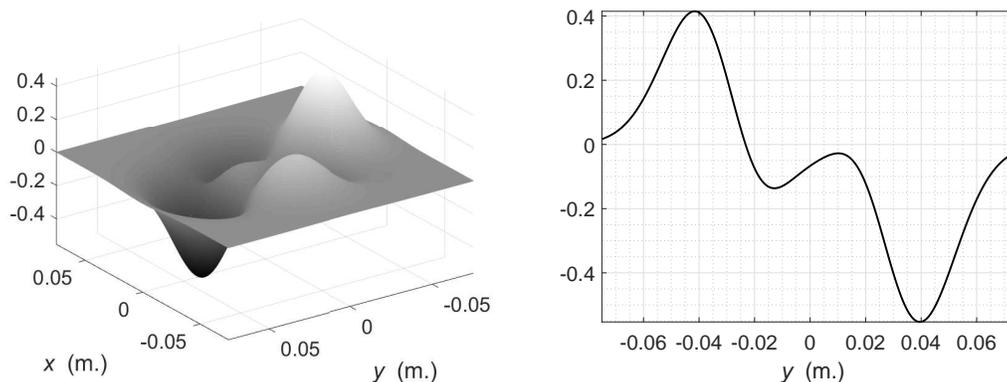


Figura 3.5: Perfil normalizado del ruido de baja frecuencia propuesto [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje *y* [derecha].

Al añadir el ruido generado anteriormente con una amplitud equivalente al 25% de la relación *P-V* de la curva original (Fig. 3.4), se obtiene el perfil del error en el frente de onda de un espejo parabólico con aberraciones de baja frecuencia que se observa en la Fig. 3.6 (de aquí en más, referido simplemente como “perfil aberrado”). A pesar de que el ruido de baja frecuencia agregado parece únicamente haber causado una alteración importante en la morfología general del perfil ideal, la influencia del *RGUD* se volverá evidente una vez que se realice el

cálculo discreto del gradiente, precisamente la información a la cual son sensibles las técnicas propuestas.

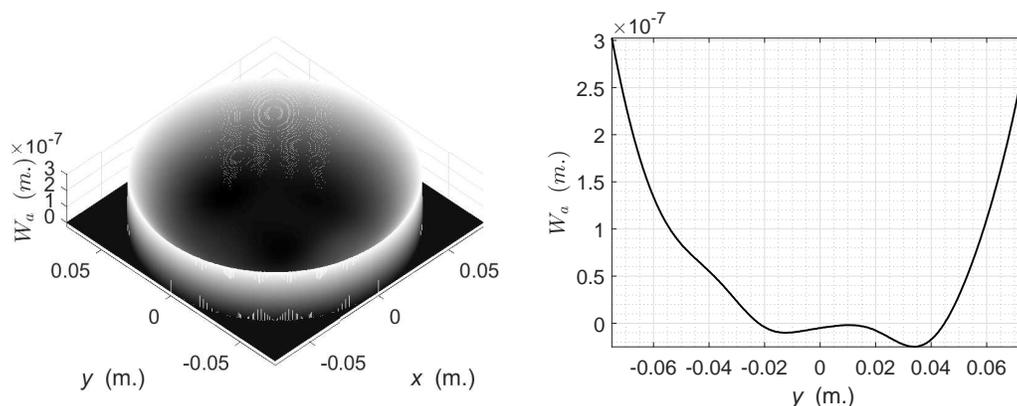


Figura 3.6: Simulación del error en el frente de un espejo parabólico con aberraciones de baja frecuencia [izquierda] y una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Con la finalidad de hacer patente esta particular diferencia entre ambos perfiles generados, entonces se procede a obtener sus derivadas parciales ortogonales respectivas, lo cual se logra haciendo uso de la función `gradient` de MATLAB. Como corresponde, en la Fig. 3.7 se aprecia el gradiente del perfil ideal (Fig. 3.4), mientras que en la Fig. 3.8 se muestra el gradiente del perfil aberrado (Fig. 3.6). Es en este último que se hace tangible el influjo del ligero porcentaje de *RGUD* incorporado en el ruido de baja frecuencia añadido al perfil ideal. Como se conoce de antemano, el gradiente del error en el frente de onda es la información cuantitativa a la cual son sensibles las metodologías de estimación propuestas y, por lo tanto, son precisamente estos perfiles los que deben presentar un nivel de ruido representativo de las características del fenómeno real y adecuado para el análisis objetivo de su desempeño.

En esta instancia, finalmente se ha generado toda la información preliminar necesaria para generar versiones sintéticas de los patrones de sombras y franjas asociados a ambas técnicas, lo que además permitirá también evaluar la congruencia y relevancia de los modelos de simulación propuestos en el capítulo anterior.

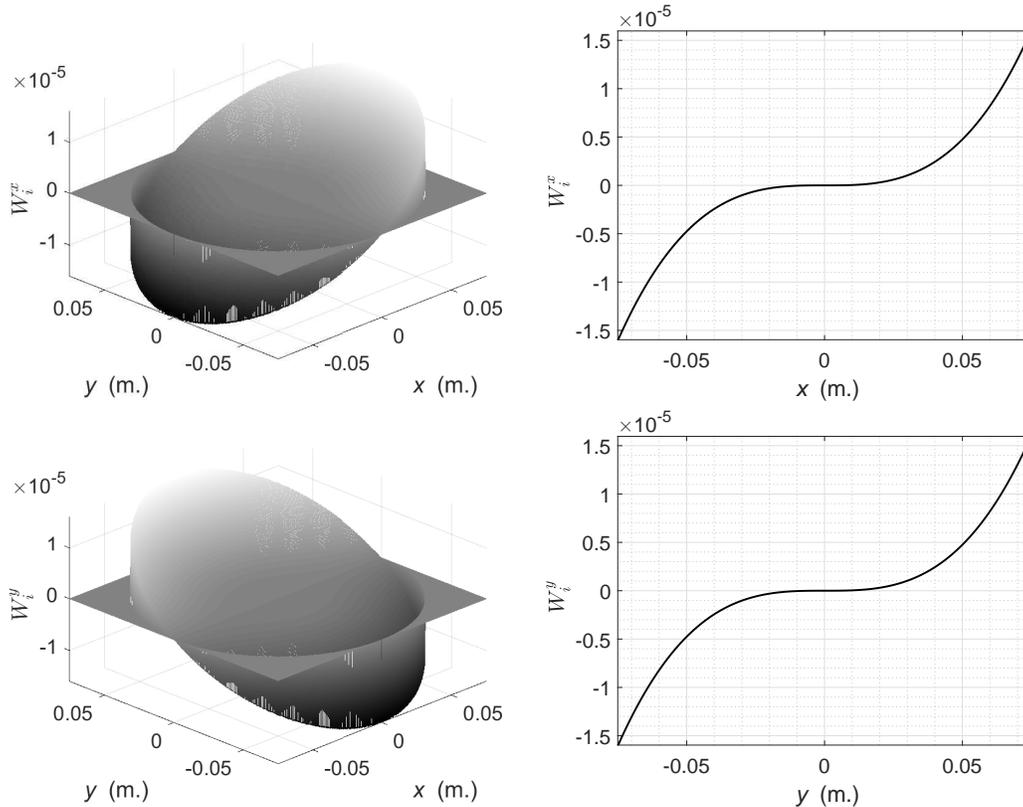


Figura 3.7: Derivadas parciales del perfil ideal respecto a los ejes  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

### 3.2 Generación de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados simulados con el *MSFD*

Debido a que, como se estudió previamente, el método propuesto para la estimación del gradiente del error en el frente de onda con base en la prueba de Foucault (*MEGFD*) requiere de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados, un conjunto de mapas de sombras con estas características debe ser generado de forma sintética para su posterior evaluación.

Afortunadamente, al tratarse de una simulación, el número  $n$  de imágenes que habrán de constituir la serie puede ser calculado de forma muy sencilla ya que las amplitudes máxima y mínima (límites) de la derivadas que luego deberán ser estimadas por el *MEGFD* son conocidas de antemano, lo cual evidentemente no ocurre en la práctica. En este caso en particular, los límites de las derivadas parciales de los perfiles ideal y aberrado (Figs. 3.7 y 3.8) son de

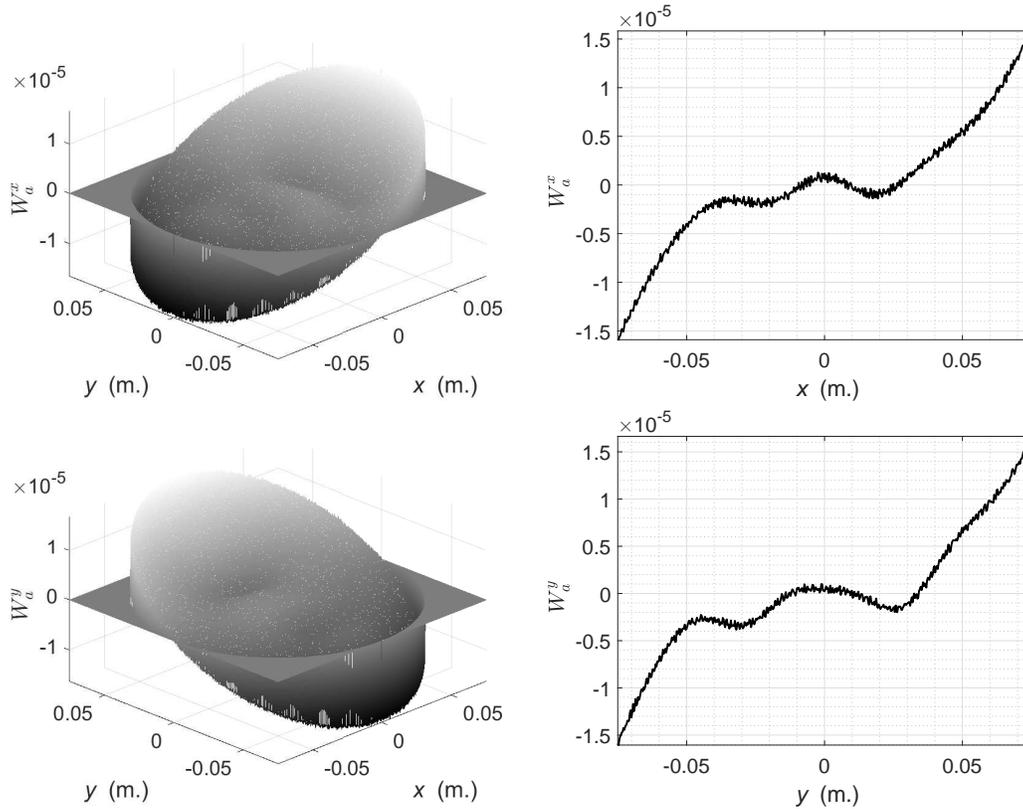


Figura 3.8: Derivadas parciales del perfil aberrado respecto a los ejes  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

aproximadamente  $\pm 1.6 \times 10^{-5}$ . Por lo tanto, los desplazamientos límites teóricos que el filo de la navaja debería ser capaz de abarcar en el eje paraxial para generar los estados extremos pueden ser fácilmente calculados a partir de la Ec. 2.7 de la siguiente manera:

$$x_{lim} = 2.36m.(\pm 1.6 \times 10^{-5}) = \pm 37.76 \mu m. \quad (3.5)$$

No obstante, como se discutió en el capítulo anterior, resulta beneficioso para la *MEGFD* que los estados extremos de iluminación se presenten en varias de las muestras marginales de la serie ya que los perfiles de transición de estado de iluminación extraídos de éstas son posteriormente ajustados a funciones sigmoideas. Con este fin, una ampliación razonable del rango de desplazamiento de la navaja en el plano paraxial es de alrededor de un 30% sobre el valor calculado. En nuestro caso, esto implica que  $x_{lim}$  puede entonces ser redondeado a  $\pm 50 \mu m$ .

Para poder calcular el número ideal de foucaultgramas desplazados que las series suficientes simuladas deberán contener resta tomar en consideración un último parámetro: la resolución máxima que es capaz de alcanzar el micrómetro o dispositivo mecánico que será empleado para controlar los desplazamientos del filo de la navaja en la práctica. Dicho valor es importante ya que constituye una limitante física inherente del arreglo óptico o aparato de pruebas en cuestión que no puede ser salvada. En nuestro caso particular, la resolución práctica máxima del micrómetro usado para controlar la navaja en el aparato de Foucault implementado es de  $5\mu m$ . Una vez que se conocen todos los parámetros antes mencionados, la cantidad total de imágenes en cada una de las series puede ser estimada fácilmente como se muestra a continuación:

$$n = \frac{2(50\mu m.)}{5\mu m.} + 1 = 21. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, entonces únicamente restaría evaluar de manera secuencial en la Ec. 2.6 una serie de desplazamientos equidistantes de la navaja dentro de los límites previamente establecidos tomando pasos con un tamaño equivalente a la resolución máxima del micrómetro para generar las series suficientes de foucaultgramas desplazados sintéticos de los perfiles ideal y aberrado. En la Fig. 3.9 pueden observarse 5 muestras representativas por orientación de los foucaultgramas desplazados del perfil ideal, mismas que están asociadas a los desplazamientos del filo de la navaja de  $-25\mu m.$ ,  $-5\mu m.$ ,  $0$ ,  $5\mu m.$  y  $25\mu m.$ , respectivamente. Se elige presentar solamente 5 de las 21 muestras disponibles por cada orientación ortogonal simplemente por cuestiones de espacio. Además, también debe tenerse en cuenta que las variaciones o diferencias entre muestras contiguas de este tipo en general no son lo suficientemente significativas como para ser apreciadas a simple vista de cualquier forma.

Desde luego y como se esperaba, estas muestras simuladas exhiben una transición entre estados de iluminación, provocada por la posición relativa del filo de la navaja en el plano paraxial, de naturaleza totalmente abrupta. Esto se debe a que fueron generadas con base en una formulación matemática que podría ser interpretada de manera alternativa simplemente como una especie de umbralización lineal de los valores del gradiente, procedimiento que evidentemente dará lugar a imágenes de naturaleza binaria.

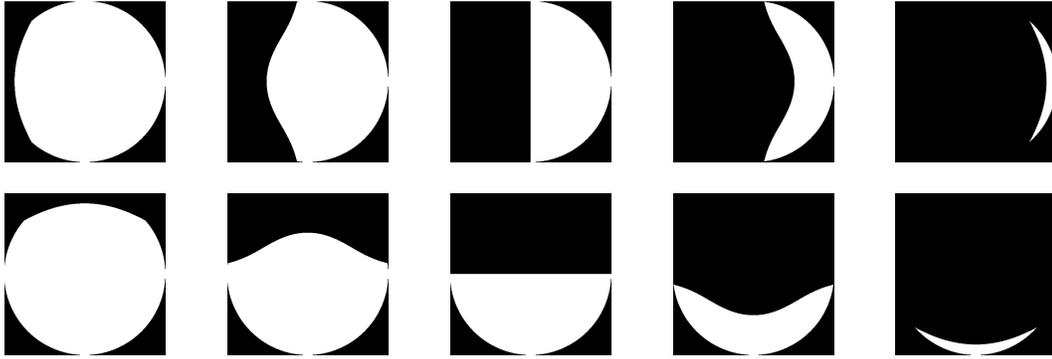


Figura 3.9: Muestras de foucaultgramas desplazados binarios verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil ideal.

Para disminuir este efecto adverso, y al mismo tiempo tratar de emular la transición entre estados de iluminación suave que se observa en cualquier foucaultgrama desplazado experimental, nuevamente se propone el uso de la función sigmoide. Dadas sus características propias, ésta es capaz de generar muestras con transiciones entre estados graduales siempre y cuando el gradiente del error en el frente de onda sea evaluado de la siguiente forma:

$$I_s(x, y; x_s) \approx \frac{1}{1 + \exp[-\alpha(W^x - x_s)]}. \quad (3.7)$$

El inconveniente principal de este modelo radica en que de hecho se desconoce el valor del parámetro  $\alpha$ , mismo que precisamente determina el ancho relativo de la pendiente de transición de la función sigmoide. Incidentalmente, dicho valor también se desconoce en la práctica ya que se encuentra estrechamente ligado a una serie de parámetros y características específicas de la pieza siendo analizada tales como sus dimensiones, morfología e incluso sus propias imperfecciones. Sin embargo, al tratarse de una simulación y dado que el orden de magnitud del gradiente en cuestión se conoce de antemano, se puede proponer un valor cualesquiera para  $\alpha$  según convenga. En nuestro caso, por ejemplo, un valor de  $\alpha$  que permite apreciar foucaultgramas desplazados nítidos con transiciones entre estados paulatinas es  $1 \times 10^6$ . En la Fig. 3.10 se observan las muestras obtenidas al hacer uso de la Ec. 3.7 para las posiciones de la navaja equivalentes a las de las series binarias (Fig. 3.9). De aquí en adelante, este conjunto de imágenes es referido simplemente como “serie ideal”.

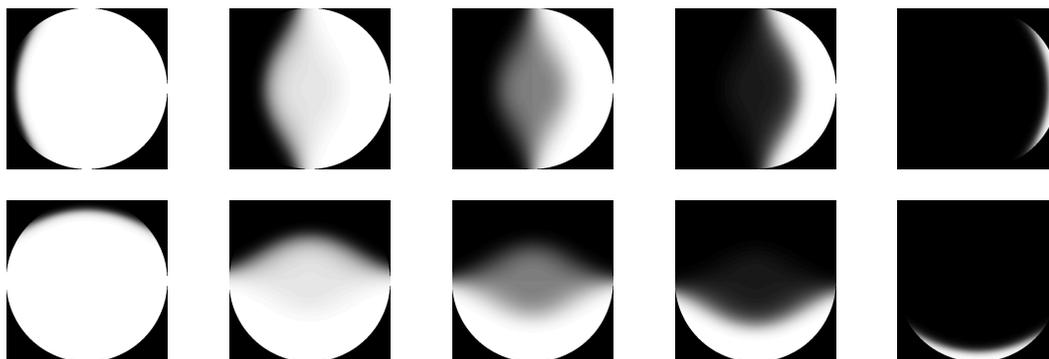


Figura 3.10: Muestras de foucaultgramas desplazados sigmoidales verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil ideal.

Cabe mencionar que esta modificación no es realizada meramente por motivos visuales, como se discutió en el capítulo anterior, la base y fundamento principal del *MEGFD* recae en ajustar a un modelo sigmoidal los perfiles de intensidad de iluminación que se extraen de una serie suficiente. No obstante, la relevancia de esta manipulación se vuelve más que evidente al analizar la Fig. 3.11, en la cual se observan los foucaultgramas desplazados sigmoidales que se obtienen a partir del perfil aberrado, muestras que una vez más se encuentran asociadas a las posiciones de la navaja  $-25\mu m.$ ,  $-5\mu m.$ ,  $0$ ,  $5\mu m.$  y  $25\mu m.$  tal como en los casos anteriores. Estos patrones de sombras simulados de hecho se aproximan de forma muy decente a los foucaultgramas desplazados que se podría esperar obtener en la práctica cuando se analiza una superficie óptica con gran aberración.

Una vez en posesión de las series suficientes mostradas en las Figs. 3.10 y 3.11 se cuenta con toda la información preliminar necesaria para evaluar adecuadamente el potencial probable en términos de precisión del *MEGFD*.

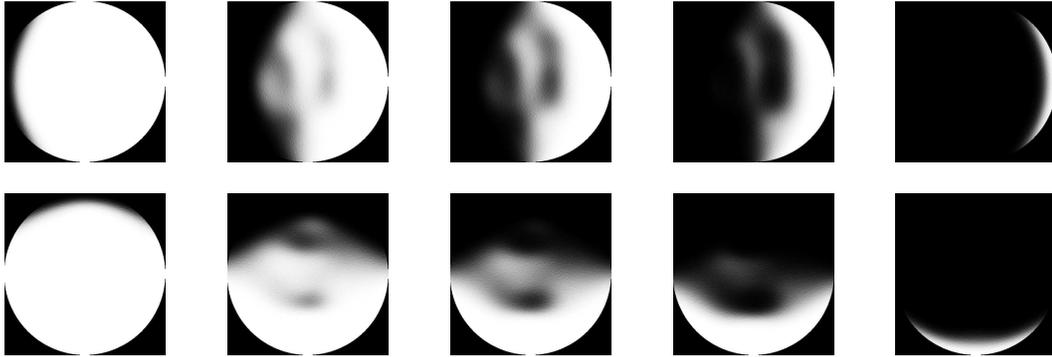


Figura 3.11: Muestras de foucaultgramas desplazados sigmoidales verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes al perfil aberrado.

### 3.3 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados simulados con el *MEGFD*

La Ec. 2.8 constituye el modelo generalizado con el cual se realizará el cálculo del gradiente del error en el frente de onda de una superficie óptica focalizadora a partir de una serie suficiente de sus foucaultgramas desplazados. Como se estudió en el capítulo anterior, este procedimiento requiere extraer el perfil de intensidad de iluminación respectivo de todos y cada uno de los píxeles dentro de la pupila de salida del sistema, mismo que posteriormente es ajustado a una función sigmoidal por medio de la ecuación antes mencionada.

A pesar de que las series suficientes que se generaron fueron manipuladas para que presentaran específicamente una pendiente de transición entre estados de iluminación con características sigmoidales (Figs. 3.10 y 3.11), resulta interesante, especialmente en el caso de la serie aberrada, analizar algunos de los perfiles de intensidad de iluminación que se puede extraer de cada una. Esto permitirá evaluar el desempeño, en términos de precisión, de la sigmoide como función modelo ideal.

En la Fig. 3.12 se observan tres de estos perfiles de irradiancia representativos a lo largo del eje  $y$  correspondientes a la serie ideal y asociados a los puntos  $-5.625cm.$ ,  $0$ , y  $5.625cm.$

dentro de la pupila de salida del sistema, respectivamente. Cada uno de estos perfiles está constituido, obviamente, por 21 muestras (puntos) que posteriormente son ajustadas a un modelo sigmoideal (Ec. 2.8, solucionada por medio de la función `lsqcurvefit` de MATLAB), lo cual permite estimar el valor de la derivada parcial en dicho punto a través de la Ec. 2.9. Como habría de esperarse, la curva que resulta del ajuste sigue de manera fiel a las muestras extraídas directamente de la serie, con lo que se confirma la validez del uso del modelo sigmoideal para la estimación del gradiente en este caso.

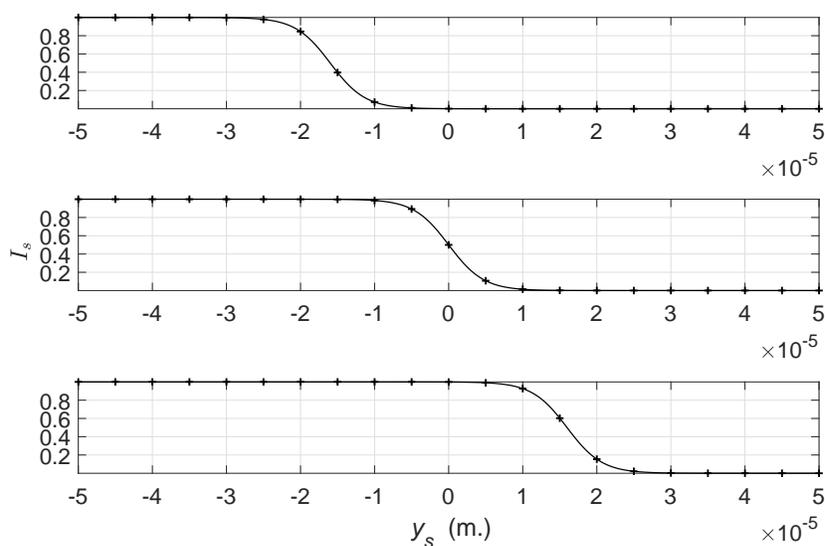


Figura 3.12: Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie ideal [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoideales respectivos [línea continua].

Como corresponde, en la Fig. 3.13 se muestra la estimación del gradiente del error en el frente de onda resultado de aplicar el *MEGFD* a la serie ideal, la cual requirió un tiempo de cálculo total de alrededor de *25.4min*. Por supuesto, dadas las condiciones propias del análisis, la precisión de estas estimaciones con respecto a los mapas de gradiente obtenidos directamente del perfil (Fig. 3.7) no necesariamente sorprende.

El verdadero potencial de la formulación propuesta solo puede quedar realmente de manifiesto al ajustar curvas de datos con una desviación estándar significativa respecto a la función

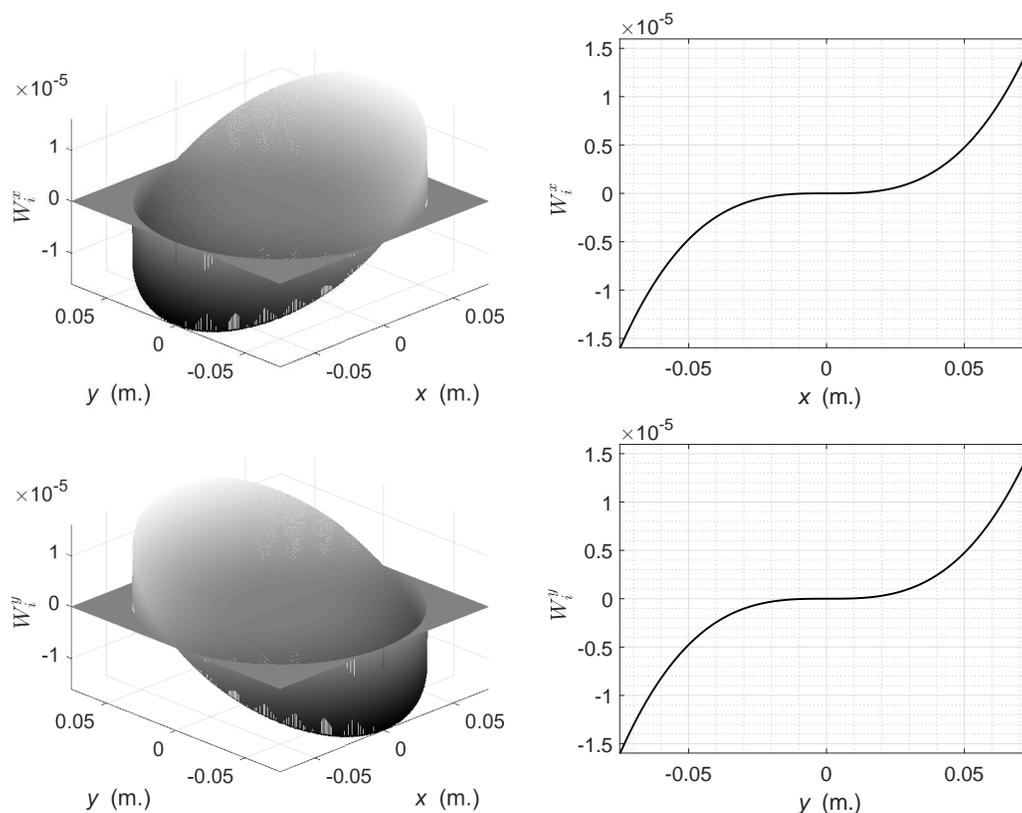


Figura 3.13: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGFD* aplicado a la serie ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

analítica modelo. Con este propósito, en la Fig. 3.14 se aprecian tres perfiles de irradiancia a lo largo del eje  $y$  extraídos esta vez de la serie aberrada y nuevamente correspondientes a los puntos  $-5.625\text{cm.}$ ,  $0$ , y  $5.625\text{cm.}$  sobre la superficie del espejo, respectivamente. A pesar de que, como se esperaba, la tendencia de las variaciones entre la curva experimental y la ajustada es ligeramente mayor que en el caso de la serie ideal, se demuestra que la función sigmoideal constituye el modelo óptimo para ajustar los datos extraídos de las series suficientes generadas.

El gradiente del error en el frente de onda respectivo estimado a partir de la serie aberrada haciendo uso del *MEGFD* se muestra en la Fig. 3.15. Esta estimación requirió un tiempo de procesamiento muy similar al del cálculo anterior, en este caso, cerca de  $29.1\text{min.}$ . De esta manera, se demuestra que la metodología propuesta es inclusive capaz de recuperar parte de la

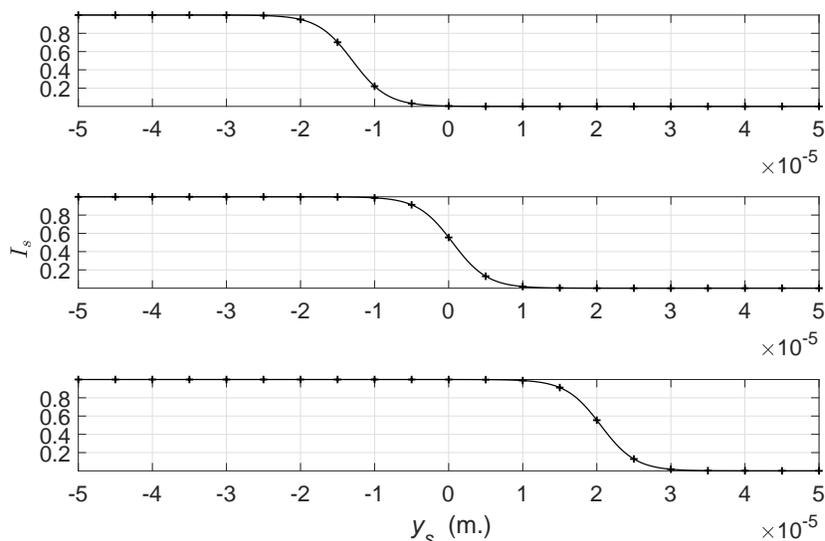


Figura 3.14: Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie aberrada [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoidales respectivos [línea continua].

información de alta frecuencia asociada al *RGUD* incorporado en el ruido de baja frecuencia que se añadió para generar el perfil aberrado, lo cual se corrobora al comparar estos resultados con el gradiente calculado directamente a partir de éste último (Fig. 3.8). Por lo tanto, se puede concluir que la precisión exhibida por el *MEGFD* es más que adecuada como para aplicarlo también en muestras reales, especialmente si se toma en consideración que la naturaleza de los errores esperados en la práctica es mayoritariamente de baja frecuencia.

No obstante, si bien de hecho no se pretende y en general tampoco es necesario que este tipo de metodologías presenten un respuesta rápida o en tiempo real; no se puede pasar por alto que, dadas las dimensiones de las imágenes generadas ( $512 \times 512 \text{ pix.}$ ), el tiempo de respuesta del algoritmo es considerablemente lento. Esto viene como resultado de hacer uso de la función `lsqcurvefit` durante el ajuste de las curvas de datos extraídas de cada serie.

A pesar de que el algoritmo correspondiente fue optimizado para que suministrara como valor inicial para la estimación actual el resultado de la estimación anterior, lo que obviamente aumenta su velocidad de convergencia; éste aún debe resolver tantos ajustes de curva

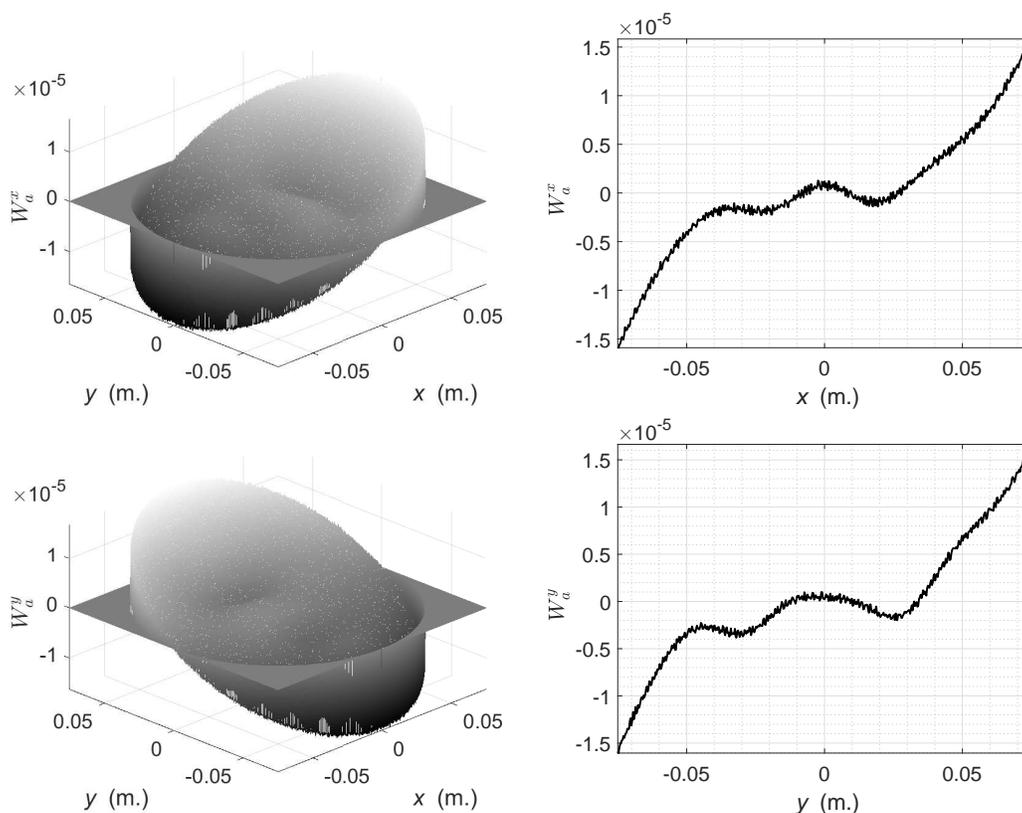


Figura 3.15: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGFD* aplicado a la serie aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

no lineales como píxeles contenga la pupila de salida del sistema en cuestión. Esto equivale a 205,861 minimizaciones no lineales por el método de la región-de-confianza-reflexiva (*trust-region-reflective* tan solo en nuestro caso).

Evidentemente esto puede volverse un problema importante para imágenes de mayor tamaño ya que la relación entre el aumento de dimensiones de la pupila de salida y el aumento de tiempo de cálculo para la estimación de su gradiente con el *MEGFD* no es lineal. Por ejemplo, si se duplicaran las dimensiones de las imágenes de las series generadas, el tiempo de respuesta del algoritmo aproximadamente cuadruplicaría a los antes reportados.

Una alternativa viable para reducir el tiempo de procesamiento global requerido por la metodología consiste en emplear la técnica de máscaras de estimación. Este procedimiento

implica establecer una matriz cuadrada impar de tamaño  $m$  para ser usada como una especie de apuntador, mismo que posteriormente es desplazado sin traslape a través de toda la imagen correspondiente. En cada una de estas posiciones relativas se procede a estimar, con cualesquiera sea el método en cuestión, única y exclusivamente el valor asociado a su píxel central, mismo que luego es asignado directamente a todos sus elementos (píxeles) restantes. Empleando esta sencilla estrategia de procesamiento el tiempo de cálculo del algoritmo se verá reducido de forma efectiva a una  $1/m^2$  parte de su duración original.

Como corresponde, en las Figs. 3.16 y 3.17 se muestran los mapas de gradiente del error en el frente de onda estimados con el *MEGFD* aplicado a las series ideal y aberrada empleando máscaras de estimación con  $m$  de 3, 5, 9 y 17 píxeles (las amplitudes marginales aproximadas de estos contornos son de  $\pm 1.6 \times 10^{-5}$ ). Dichas estimaciones requirieron tiempos promedio de cálculo de alrededor de 3.2min., 1.2min., 26.6s. y 11.1s. respectivamente, con lo que se corrobora la mejora substancial en el desempeño, en términos temporales, esperada.

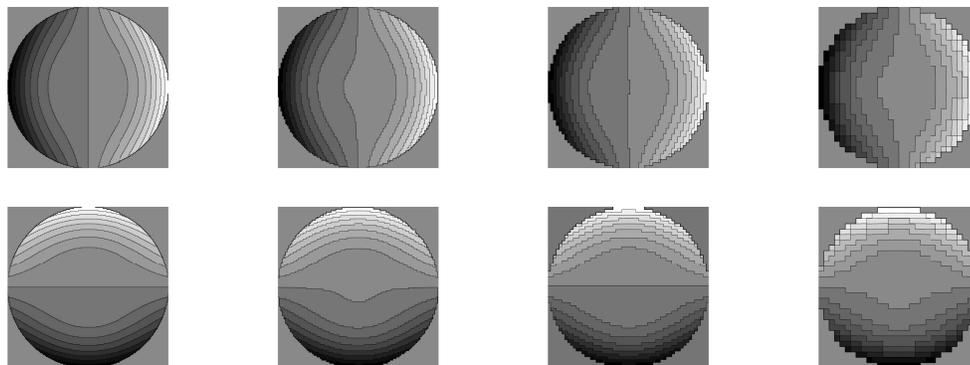


Figura 3.16: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] obtenidas con el *MEGFD* aplicado a la serie ideal empleando máscaras de estimación de 3, 5, 9 y 17 píxeles [de izquierda a derecha].

Como se observa, esta técnica de procesamiento de imágenes simple evidentemente sacrifica resolución píxel a píxel en los mapas de gradiente obtenidos en favor del tiempo necesario para su estimación. Sin embargo, en este punto de hecho aún no es posible determinar con absoluta certeza cuan perjudicial podría llegar a ser el uso de este tipo de máscaras para la precisión final de la metodología de caracterización propuesta, especialmente si se considera que

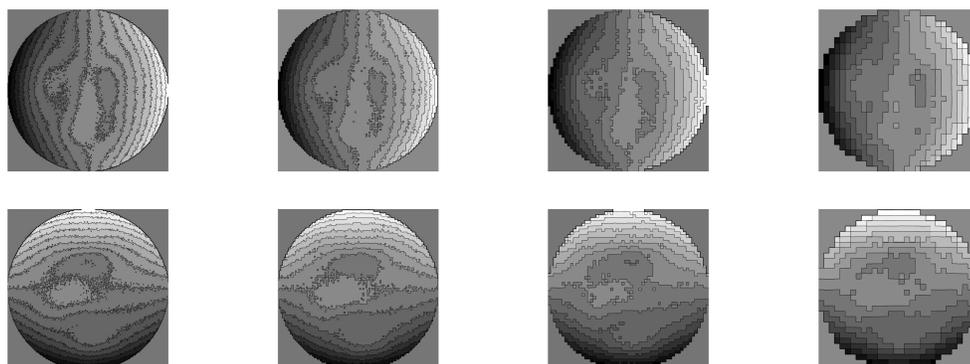


Figura 3.17: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] obtenidas con el *MEGFD* aplicado a la serie aberrada empleando máscaras de estimación de 3, 5, 9 y 17 píxeles [de izquierda a derecha].

el algoritmo de integración complementario que se empleará más adelante tiende a suavizar los perfiles resultantes. Esto último de cierta manera también implica que las estimaciones originales (Figs. 3.13 y 3.15) podrían presentar en teoría inclusive un cierto grado de “sobremuestreo” para nuestros propósitos y/o recursos.

No obstante, antes de proceder a realizar este análisis aún queda pendiente explorar la otra alternativa para reducir el tiempo de procesamiento del algoritmo sin la necesidad de recurrir al uso de máscaras de estimación, el *MSEGFD*; así como también abordar la segunda metodología propuesta basada en la prueba de Ronchi, el *MEGBD*.

### **3.4 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie foucaultgramas desplazados simulados con el *MSEGFD***

El fundamento principal de esta variante para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de foucaultgramas desplazados se basa en la sustitución de la función modeladora, originalmente sigmoideal (Ec. 2.8), por la que describe a una línea recta, tal como lo indica la Ec. 2.10. Obviamente, este intercambio supone una disminución significativa en el tiempo de cálculo del algoritmo asociado ya que el ajuste de las curvas de datos extraídas

de las series suficientes puede ser realizado por medio de una gran variedad de métodos que no involucran minimizaciones no lineales o siquiera la necesidad de hacer uso de la función `lsqcurvefit` cuando el modelo es una línea recta.

Sin embargo, como se pudo constatar en la sección anterior, la función sigmoide en efecto representa el modelo ideal para describir este tipo particular de curvas de irradiancia, por lo que resulta indispensable establecer ciertas condiciones heurísticas para garantizar un desempeño óptimo del algoritmo al emplear este modelo lineal alternativo.

La principal complicación que se presenta al hacer uso de esta formulación simplificada radica en encontrar un método que permita aislar selectiva y apropiadamente todos los puntos (muestras) que conforman la pendiente de transición entre estados iluminación de cada uno de los perfiles extraídos de la series suficientes, pues esta es la sección de la curva que de hecho exhibe un comportamiento cuasi-lineal.

Una opción simple para lograr este cometido consiste en establecer un umbral de amplitud superior y otro inferior delimitando la zona o porción del perfil que contiene información significativa para el ajuste lineal, lo cual puede ser asumido como válido con el conocimiento de que la naturaleza de las variaciones globales entre dos foucaultgramas desplazados contiguos es de baja frecuencia.

Para demostrar lo anteriormente dicho, en las Figs. 3.18 y 3.19 se muestran tres pares de perfiles de irradiancia correspondientes a los puntos  $-5.625\text{cm.}$ ,  $0$ , y  $5.625\text{cm.}$  a lo largo del eje  $y$  extraídos de las series ideal y aberrada, respectivamente. Puesto que estas series suficientes fueron generadas de forma sintética y luego se normalizaron como corresponde, en ambos casos, se establecieron los valores  $[0.9 - 0.1]$  como umbrales máximo y mínimo para la realización de los ajustes lineales. Como se puede observar, a pesar de que los puntos (muestras) disponibles para realizar los ajustes lineales son bastante limitados, la función resultante en cada caso puede ser usada de manera satisfactoria para efectuar la estimación del gradiente del error en el frente de onda como lo sugiere la Ec. 2.12.

Siempre y cuando se garantice que la función lineal resultante contendrá un valor muy cercano al punto de inflexión de la función sigmoide correspondiente, esta reducción en el número de muestras disponibles para realizar el ajuste lineal de hecho se convierte en otra de

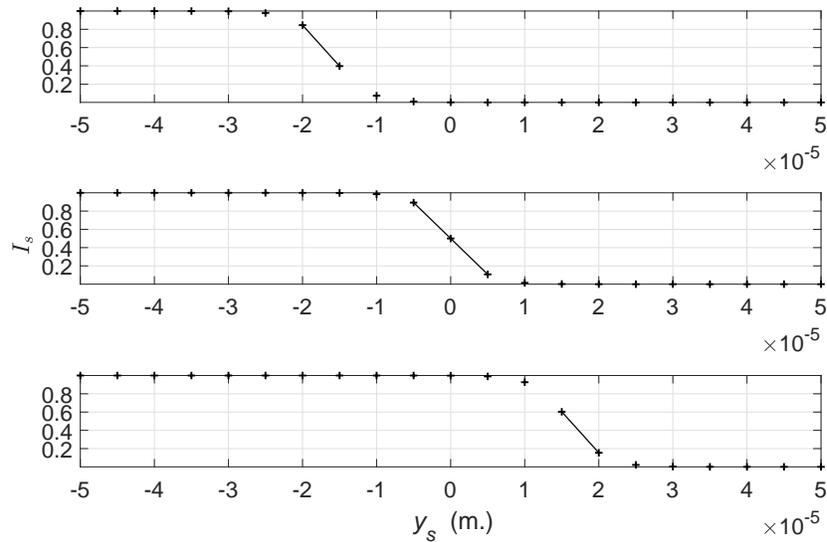


Figura 3.18: Muestras de perfiles de intensidad de irradiancia correspondientes a la serie ideal [puntos discontinuos] y sus ajustes de pendiente de transición entre estados a funciones lineales respectivos [línea continua].

sus ventajas ya que la generación del sistema de ecuaciones asociado (mismo que se resuelve por medio de la función *rref* de MATLAB) se simplifica.

Como corresponde, en las Figs. 3.20 y 3.21 se muestran los gradientes del error en el frente de onda estimados a partir de ambas series con el *MSEGF*D. Como se esperaba, los tiempos de cálculo respectivos se vieron reducidos de manera notable, requiriendo alrededor de tan solo 30.2s. en el caso de la serie ideal y 30.1s. en el caso de la serie aberrada.

Desde luego, también queda de manifiesto, en el caso particular de la serie aberrada, que una cierta parte de la información de alta frecuencia presente en las derivadas parciales originales (Fig. 3.8) se perdió o fue alterada como resultado de este proceso de estimación. No obstante, también es evidente que la afectación que se produce no es tan severa como la que ocurre cuando se emplean máscaras de estimación (Fig. 3.17), inclusive en el caso de la más pequeña. Esto se volverá aún más claro una vez que se comparen los resultados obtenidos por el algoritmo de integración cuando se le suministran los mapas de gradiente estimados con las

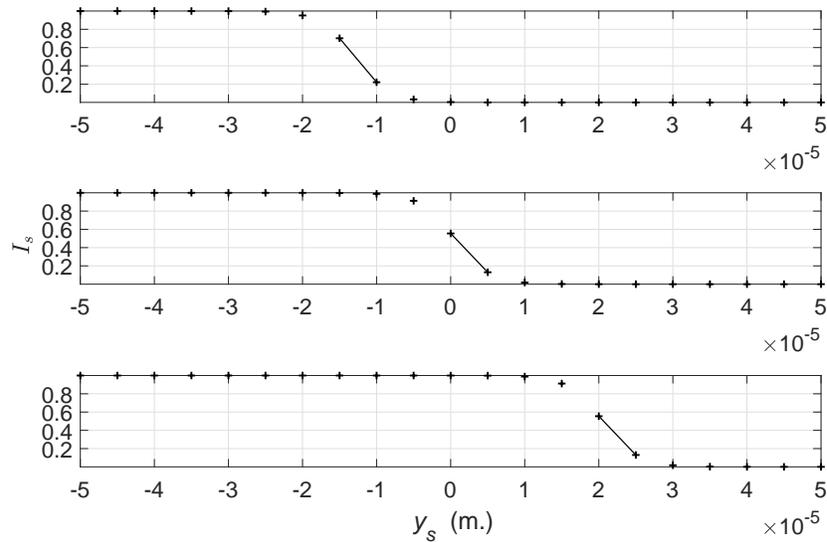


Figura 3.19: Muestras de perfiles de intensidad de irradiancia correspondientes a la serie aberrada [puntos discontinuos] y sus ajustes de pendiente de transición entre estados a funciones lineales respectivos [línea continua].

diversas metodologías propuestas, lo cual es llevado a cabo en la última sección del presente capítulo.

### 3.5 Generación de un birronchigrama con defoco simulado con el *MSRD*

A diferencia de la *PCF*, misma que requiere de una serie ordenada de foucaultgramas desplazados para realizar el cálculo del gradiente del error en el frente de onda; la *PCR* únicamente precisa de un solo birronchigrama con defoco para lograr los mismos resultados.

Desafortunadamente para los efectos de la simulación, tal y como lo sugiere claramente la Ec. 2.18, el *MSRD* solo se encuentra especificado para la generación ronchigramas con defoco unidireccionales, en otras palabras, el tipo de patrones de franjas que serían producidos haciendo uso de una sola rejilla con una orientación ortogonal al eje óptico cualesquiera como pantalla de modulación.

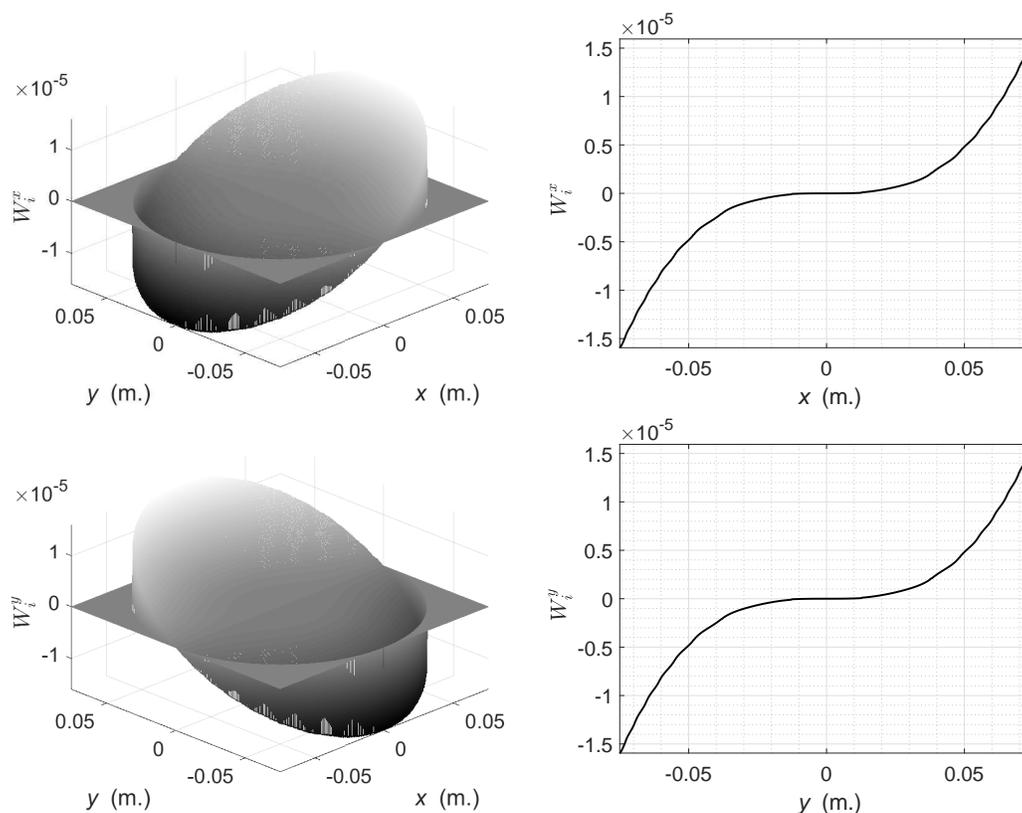


Figura 3.20: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MSEGFD* aplicado a la serie ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

El anterior inconveniente se debe a que dicho modelo tiene como base una función analítica con distribución sinusoidal, lo que además evidentemente también imposibilita superponer dos mapas de franjas con estas características de forma perpendicular para crear un birronchigrama con un perfil de irradiancia semejante al que se obtendría en la práctica.

Este problema es dejado de lado brevemente para fijar la atención en otro parámetro de este modelo, hasta el momento indeterminado, que debe ser establecido formalmente para poder generar birronchigramas con defoco aptos para el análisis con la *MEGBD*: la distancia  $l'$  a la cual se colocará la pantalla de modulación y responsable de introducir el término de defoco en las muestras. Conocer dicho valor resulta vital para la metodología ya que fija la frecuencia espacial que presentarán las franjas que aparecen en la muestra, misma que es

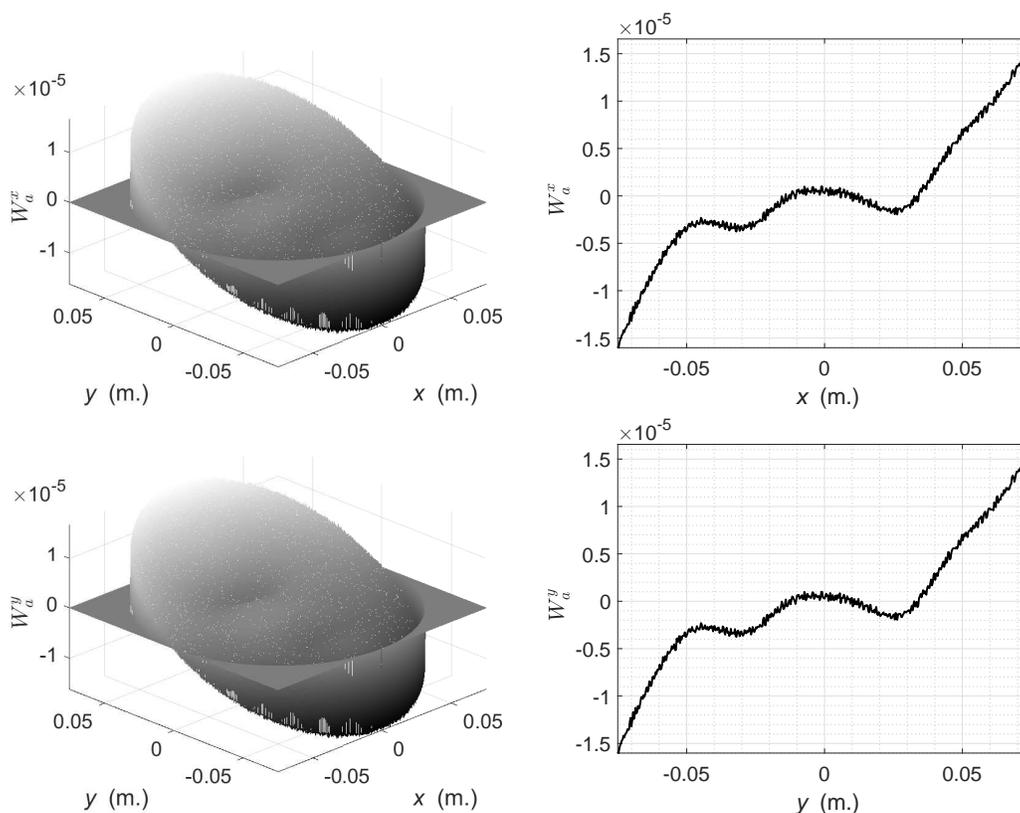


Figura 3.21: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MSEMGFD* aplicado a la serie aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

indispensable posteriormente para llevar a cabo las operaciones iterativas de filtrado espacial y desenvolvimiento de fase correspondientes.

No obstante, el parámetro  $l'$  involucrado en el cálculo de la frecuencia portadora de defoco inducida  $f_d$  (Ec. 2.19) de hecho solamente puede ser establecido con base en un procedimiento totalmente heurístico. Esto se debe a que no es posible determinar el tamaño ideal del desplazamiento de la rejilla para cualquier tipo de aparato de pruebas de Ronchi dado ya que la densidad de franjas observable en un ronchigrama depende tanto de las características del espécimen siendo analizado como también del periodo espacial de la rejilla empleada.

Sin embargo, es posible darse una idea clara del orden de frecuencia que debe presentar un ronchigrama con defoco cuando se toma en cuenta que cuantos más pares de líneas por unidad

de longitud aparezcan en el campo de visión, el *MEGBD* obviamente también alcanzará una mayor resolución. En contraposición, tampoco se puede pasar por alto que la sobre-saturación de franjas en la muestra tiene que ser evitada a toda costa puesto que, especialmente en la práctica, da lugar a imágenes carentes de contraste y por tanto no aptas para ser procesadas.

Precisamente por las razones recién discutidas, se estudió a detalle el fenómeno de la formación de franjas en un ronchigrama con defoco experimental. De manera empírica, se encontró que la rejilla puede ser desplazada alrededor de  $0.1f$  (respecto al plano focal) en orden de producir un ronchigrama con un número aceptable de franjas nítidas cuando se analiza una superficie óptica de distancia focal ( $f$ ) relativamente larga. Esto se cumple siempre y cuando la rejilla presente un periodo espacial de rango medio.

En nuestro caso particular, la rejillas implementadas en el aparato de pruebas de Ronchi cumplen con esta última característica ya que presentan un periodo aproximado de  $508\mu m$  ( $50\text{ lpi}$ , nominalmente). Por consiguiente, dadas las especificaciones del espécimen, el desplazamiento de la rejilla ( $l'$ ) que será empleado durante la simulación resulta de  $11.8\text{ cm}$ .

Como corresponde, en las Figs. 3.22 y 3.23 se muestran los ronchigramas con defoco, tanto verticales como horizontales, obtenidos de los perfiles ideal y aberrado haciendo uso del modelo descrito por la Ec. 2.18. Como se puede apreciar en ambos conjuntos, estos mapas de franjas constan de alrededor de 15 pares de líneas bien definidas, las cuales además son suficientes para obtener un grado aceptable de resolución con la metodología propuesta.

Al analizar estas muestras a simple vista se puede determinar que las franjas observadas son perfectamente rectas. Esta ausencia de deformaciones visibles en los patrones generados viene como resultado del defoco severo inducido por la posición de la rejilla. Dicho efecto secundario es esperado y de hecho obedece a una característica vital para el *MEGBD*: una modulación relativamente alta a la poste permite realizar de manera satisfactoria el filtrado espacial en el dominio de la frecuencia de los lóbulos asociados a la portadora por medio de filtros gaussianos simples.

Por lo tanto, alternativamente se puede concluir que, sabiendo de antemano que la información cuantitativa acerca del perfil que produjo un ronchigrama con defoco dado se encuentra “codificada” en la fase de sus franjas, resultará prácticamente imposible apreciar diferencias

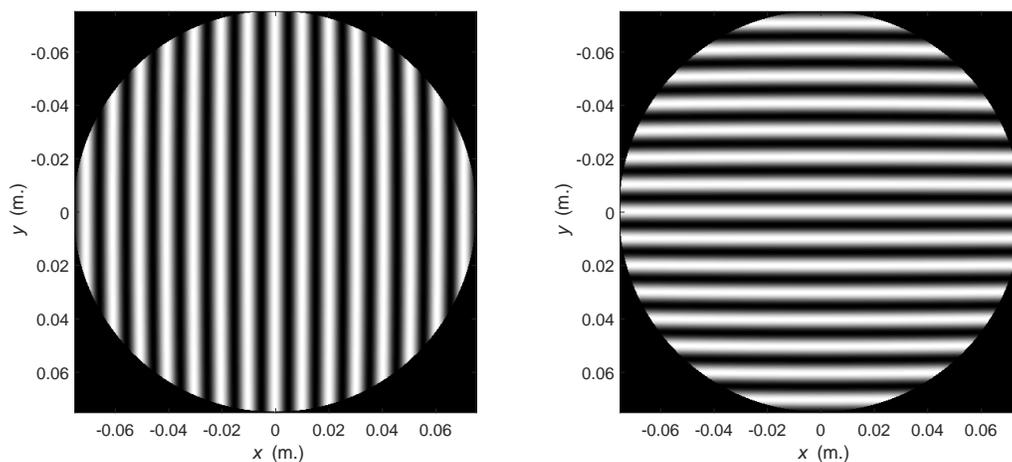


Figura 3.22: Ronchigramas vertical [izquierda] y horizontal [derecha] con defoco correspondientes al perfil ideal.

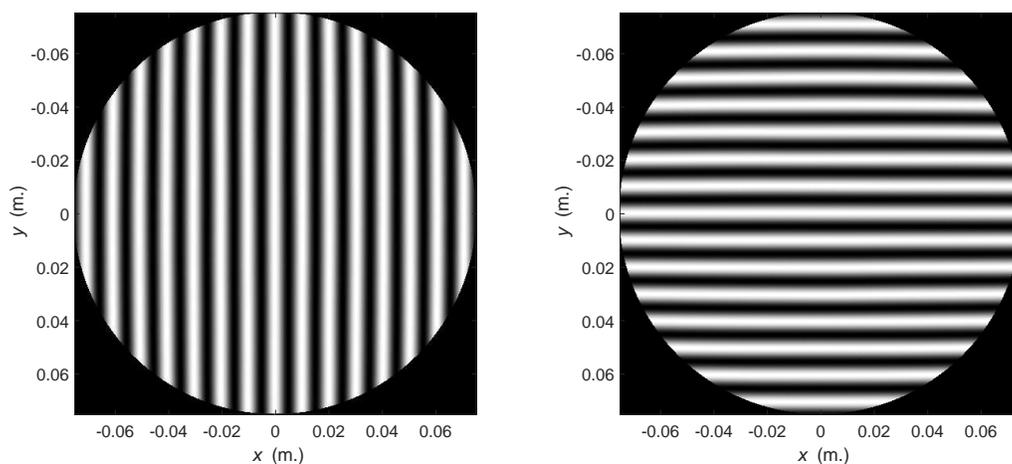


Figura 3.23: Ronchigramas vertical [izquierda] y horizontal [derecha] con defoco correspondientes al perfil aberrado.

significativas a simple vista entre las muestras correspondientes a dos perfiles con un alto grado de similitud morfológica, como ocurre en este caso.

Una vez en posesión de estos patrones sintéticos, finalmente es posible generar birronchigramas con defoco razonables para ambos perfiles haciendo uso de una técnica de segmentación simple. A pesar de que, evidentemente, tales mapas de cuadrícula no representarán

fielmente a la distribución observable en un birronchigrama real ya que son producidos mediante la superposición selectiva de dos ronchigramas ortogonales, resultan más que suficientes para llevar a cabo un análisis general de las características del *MEGBD* bajo un entorno de simulación controlado.

En la Fig. 3.24 se presentan los birronchigramas obtenidos mediante la segmentación selectiva de los ronchigramas ortogonales respectivos (Figs. 3.22 y 3.23). Para el caso del birronchigrama del perfil ideal, de aquí en adelante referido como “muestra ideal”, el ronchigrama vertical se superpone al horizontal, y viceversa para el birronchigrama del perfil aberrado, de aquí en más simplemente “muestra aberrada”. Como se puede intuir, la información de fase del patrón de franjas superpuesto sufre una alteración prácticamente nula durante la generación de estas muestras. Desafortunadamente, lo mismo no ocurre con la información de fase del patrón segmentado (base), como se corroborará en el análisis espectral que se presenta en la siguiente sección.

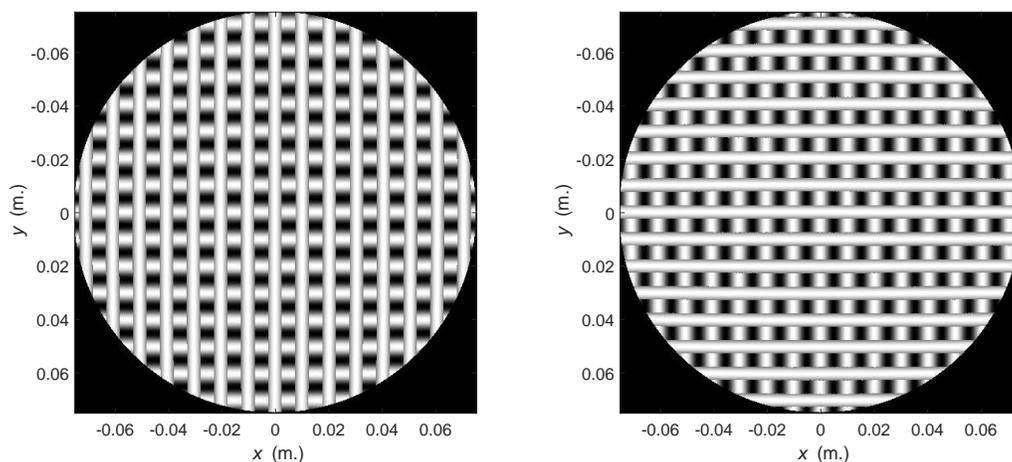


Figura 3.24: Birronchigramas con defoco del perfil ideal [izquierda] y del perfil aberrado [derecha].

Este par de muestras simuladas constituyen todos los datos preliminares necesarios para estar en condiciones de poner a prueba el desempeño del *MEGBD*, cuyas consideraciones y particularidades tanto algorítmicas como prácticas se discuten exhaustivamente a continuación.

### 3.6 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco simulado con el *MEGBD*

Antes de discutir los pormenores del algoritmo iterativo para la estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un solo birronchigrama con defoco, primeramente es necesario analizar el contenido frecuencial de este tipo de muestras y compararlo como el de los modelos teóricos predichos.

Dadas las características de esta metodología en particular, como se mencionó en el capítulo anterior, determinar la frecuencia portadora debida al defoco  $f_d$  directamente a partir de la muestra y con el menor grado de error posible es crucial para poder alcanzar resultados óptimos. Desde luego, al tratarse de una simulación, tal parámetro puede ser calculado fácilmente y sin oportunidad a error por medio de la Ec. 2.19. Para las especificaciones previamente establecidas de nuestro arreglo óptico, entonces dicho valor se obtiene como sigue:

$$f_d = \frac{0.118m}{2.36m(508\mu m)} = 98.425 \text{ cic}/m. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, este resultado analítico obviamente representa el valor exacto de la frecuencia portadora inducida por el defoco de la pantalla de modulación. Desafortunadamente, en una muestra experimental esta estimación estará más cerca o lejos del valor práctico real en una proporción desconocida debido a las características y limitaciones inherentes de cada aparato de pruebas de Ronchi implementado. Precisamente esta es la razón por la cual es imprescindible idear una estrategia formal para extraer el valor de dicho parámetro directamente de la muestra en cuestión.

Al analizar cuidadosamente la magnitud (ajustada por medio de la función raíz cúbica) de los espectros de Fourier de las muestras ideal y aberrada que se aprecian en la Fig. 3.25, a primera instancia evidentemente resulta imposible extrapolar el valor de la frecuencia fundamental con la precisión necesaria.

No obstante, por medio de este análisis frecuencial es posible corroborar a simple vista que los resultados obtenidos en efecto se asemejan al modelo teórico predicho que se describe en la Ec. 2.20. Desde luego y como se adelantaba en la sección anterior, también se pueden observar armónicos indeseados a lo largo del eje  $u$  en el espectro de Fourier de la muestra ideal

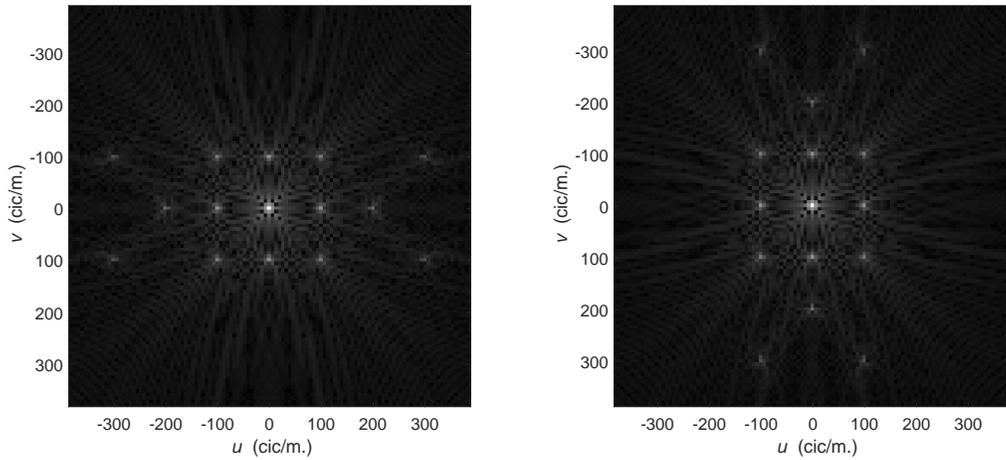


Figura 3.25: Magnitud de los espectros de Fourier de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha].

producto de la superposición del ronchigrama vertical sobre el horizontal para su generación, y viceversa para el caso del espectro de la muestra aberrada.

Una vez que el contenido espectral ha sido adecuadamente categorizado en ambos casos, los dos lóbulos positivos principales localizados en la frecuencia fundamental a lo largo del eje respectivo pueden ser fácilmente identificados y aislados, tal y como lo sugiere la Ec. 2.22. Como se mencionó en el apartado correspondiente, esta tarea puede ser realizada de forma sencilla en el dominio de la frecuencia haciendo uso de filtros Gaussianos básicos en 2D siempre y cuando, como en este caso, la información de fase relevante para el análisis haya sufrido una modulación espacial significativa. Además, puesto que la amplitud resulta obviamente irrelevante para nuestros propósitos, estos filtros pueden ser respectivamente diseñados como sigue:

$$\begin{aligned} H_x(u, v) &= \exp \left[ -\frac{(u - f_d)^2 + v^2}{2\sigma^2} \right] \\ H_y(u, v) &= \exp \left[ -\frac{u^2 + (v - f_d)^2}{2\sigma^2} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

para los cuales  $\sigma$  representa la desviación estándar, responsable de controlar el ancho de su campana. Nuevamente, un valor ideal para este parámetro en particular no puede ser establecido de antemano. Como en el caso de  $l'$ , éste depende de una serie de características propias del

arreglo óptico implementado (especificaciones del espejo a analizar, periodo de las rejillas, coeficiente de defoco inducido, etc.), y por lo tanto, es específico para cada usuario.

No obstante, es posible darse una idea clara de un valor apropiado para dicho parámetro cuando se conocen las dos premisas recíprocas que los filtros diseñados deben garantizar: impedir la intrusión de remanentes de los armónicos vecinos y evitar el corte (eliminación) de información significativa para el análisis. Con lo anterior en consideración, un valor inicial aceptable para  $\sigma$  encontrado de manera heurística en la práctica (y posteriormente también corroborado por simulación) que puede ser usado independientemente las circunstancias es  $f_d/4$ . Sin embargo, este parámetro está una vez más asociado a la frecuencia portadora de defoco  $f_d$ , la cual hasta el momento es conocida únicamente porque se trata de una simulación y puede ser calculada analíticamente.

Para finalmente dar solución a este problema, se procede a analizar las ampliaciones transversales de los lóbulos principales a lo largo del eje  $v$  extraídas de los espectros de Fourier que se presentan en la Fig. 3.26. A partir de estas imágenes se puede concluir que existe una discrepancia importante entre el valor de  $f_d$  calculado analíticamente (Ec. 3.8) y el observable en este análisis, en otras palabras, el valor de frecuencia axial asociado a la ocurrencia del pico de amplitud positivo, alrededor de  $100\text{cic}/\text{m}.$ .

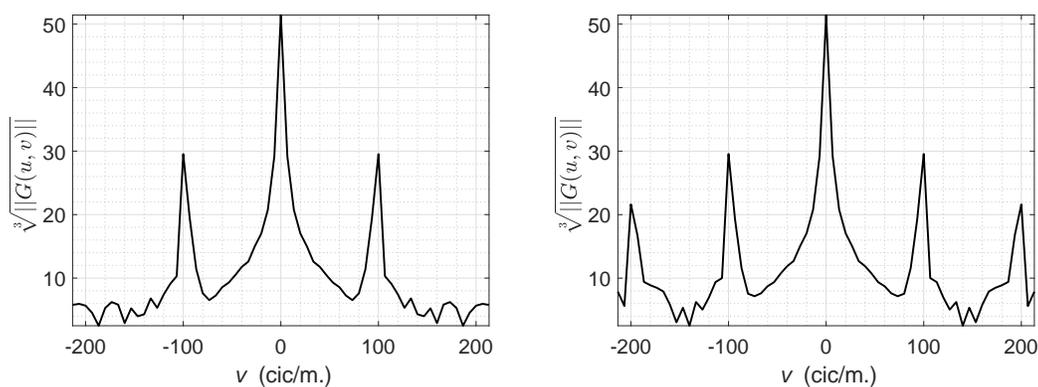


Figura 3.26: Perfiles transversales de la magnitud de los espectros de Fourier de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha].

Esta marcada disparidad viene mayormente como resultado de la naturaleza discreta y por lo tanto más burda de la operación transformada rápida de Fourier (FFT). A pesar de esto, no se debe pasar por alto que, al menos para propósitos prácticos, esta curva discreta es más significativa que cualquier otra clase de cálculo analítico ya que de hecho refleja de forma legítima el contenido espectral de la muestra capturada y, por extensión, representa mejor las características y condiciones experimentales reales del aparato de pruebas implementado.

Una opción simple para estimar con mayor exactitud el valor de  $f_d$  directamente de los espectros de Fourier obtenidos de las muestras consiste en emular un comportamiento analógico hipotético de estos datos haciendo uso de algún modelo de interpolación. Como se observa en las amplificación transversales a lo largo del eje  $v$  de los lóbulos espectrales positivos extraídos de ambas muestras que se presentan en la Fig. 3.27, dada la distribución sumamente dispersa de la información que se dispone, la interpolación de ranura cúbica (IRC) sobresale como un modelo sencillo decente para llevar a cabo este cometido. A través de de estas nuevas curvas interpoladas es posible determinar una  $f_d$  de alrededor de  $98.788\text{cic}/m$ .

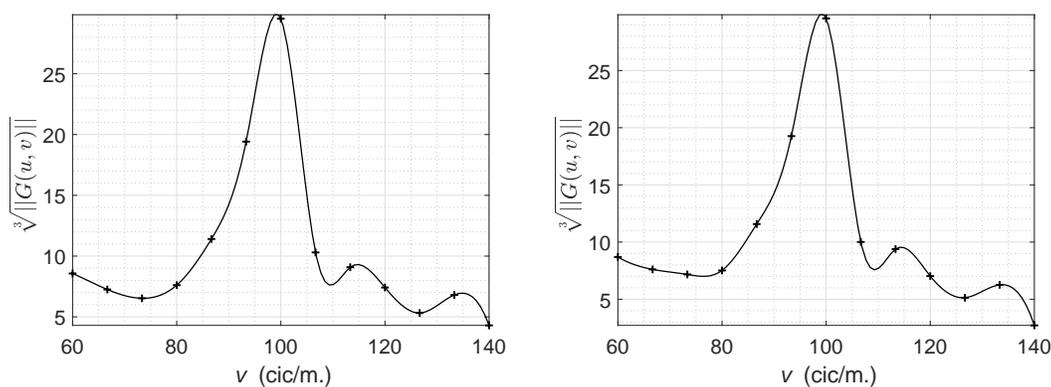


Figura 3.27: Amplificaciones transversales de los lóbulos espectrales positivos [puntos discontinuos] de las muestras ideal [izquierda] y aberrada [derecha] así como sus interpolaciones respectivas obtenidas con la IRC [líneas continua].

A pesar de que este nuevo método de estimación se acerca decentemente al valor ideal calculado en forma analítica ( $98.425\text{cic}/m$ ), desafortunadamente aún carece de la precisión necesaria para obtener resultados óptimos con la metodología propuesta, especialmente para

efectos prácticos. No obstante, esta nueva estimación puede ser empleada como punto central de un rango limitado de valores posibles para la frecuencia portadora, mismo que al ser introducido en algún algoritmo iterativo específicamente diseñado al menos garantizará que sea posible encontrar el minimizador ideal de forma más eficiente.

Una ventaja inherente de la técnica de procesamiento que se propone es que el incremento entre valores del rango limitado para  $f_d$  puede ser virtualmente establecido a cualquier nivel de precisión de acuerdo a los requerimientos de la aplicación y/o las capacidades del equipo de cómputo del usuario final. Sin embargo, en orden de obtener una precisión óptima sin impactar el tiempo de respuesta del algoritmo, se recomienda usar incrementos de una milésima por iteración.

Como se puede anticipar en este punto, el algoritmo iterativo que se plantea simplemente realizará la transformación inversa de Fourier de los lóbulos espectrales filtrados (como lo sugiere la Ec. 2.22 y por medio de la Ec. 3.9) seguida por el desenvolvimiento de fase de las señales resultantes (como lo indica la Ec. 2.24), empleando en ambos casos el valor actual de  $f_d$  en el rango preestablecido. En tales circunstancias, resulta fácil de intuir que puesto que la frecuencia fundamental comenzará a aumentar monótonicamente a partir de un valor inicial menor al esperado, la amplitud general del gradiente resultante tenderá a disminuir con cada iteración como consecuencia. Como habría de esperarse, la amplitud del gradiente alcanzará un valor mínimo en algún punto dentro del rango determinado y posteriormente comenzará esta vez a aumentar con el mismo ritmo con el cual decreció. Por lo tanto, para este procedimiento iterativo en particular, se puede establecer que el gradiente del error en el frente de onda es encontrado o que el algoritmo converge cuando un cierto valor de  $f_d$  dentro del rango limitado establecido minimiza el error cuadrático medio (RMSE) que existe entre la estimación actual y tanto la predecesora como la subsecuente.

Como nota final, dado que la modulación de fase esperada es muy suave debido a la delicada curvatura del espécimen y la naturaleza de baja frecuencia de sus imperfecciones (consulte la Ec. 2.23), virtualmente cualquier tipo de algoritmo de desenvolvimiento de fase puede ser usado sin mayores complicaciones en la etapa anterior. En nuestro caso, un algoritmo simple de salto de fase fue diseñado para llevar a cabo esta tarea. Adicionalmente, al tratarse de una

simulación, el minimizador ideal de hecho es conocido (Ec. 3.8), por lo que simplemente basta con establecer un valor inferior a éste como punto de inicio del rango de iteración.

Como corresponde, en las Figs. 3.28 y 3.29 se reportan los resultados obtenidos al aplicar el *MEGBD* a las muestras ideal y aberrada, para las cuales el algoritmo convergió en un valor promedio aproximado de  $f_d$  de  $98.474\text{cic}/m$ . En ambos casos, como se puede observar, fue aplicada una ligera reducción de pupila, la cual permite eliminar de tajo errores severos en las zonas cercanas al borde del espejo que aparecen como resultado de la influencia adversa del armónico (lóbulo) contiguo. Dicho armónico no puede ser suprimido completamente sin reducir de manera drástica el ancho de los filtros espaciales empleados para aislar los lóbulos principales (Ec. 3.9), lo que en consecuencia causa una disminución importante en la precisión de la estimación ya que entonces éstos también cortan (eliminan) información significativa para el análisis.

Al analizar detenidamente estos campos de gradiente, como se esperaba, a simple vista se comprueba que existe un error mayor en la estimación de la derivada parcial con respecto al eje  $x$  en el caso de la muestra ideal (compare con la Fig. 3.7) y viceversa para la serie aberrada (refiérase a la Fig. 3.8). Esto se debe precisamente a la influencia adversa del primer armónico extra que aparece en el espectro de Fourier respectivo producto del orden en el superpusieron los ronchigramas ortogonales para la generación de cada muestra, como se dejó entrever en dicho apartado. Obviamente, para el caso de la muestra aberrada la disparidad entre el gradiente calculado directamente a partir del perfil y el estimado con la técnica propuesta aumenta debido a que la mayor parte de la información de alta frecuencia prácticamente desaparece como resultado del proceso de filtrado espacial. Sin embargo, no se debe olvidar que el algoritmo de integración que se empleará también presenta esta tendencia, es decir, un comportamiento similar al de un filtro pasa-bajas, por lo que por el momento aún no se conoce a ciencia cierta la relevancia de la información de mayor frecuencia para los resultados finales.

De esta manera, se puede asegurar que el *MEGBD* es superior a su precursor, el *MEGFD*, ya que para estimar el gradiente completo del error en el frente de onda requiere la captura de una sola muestra en lugar de docenas de imágenes consecutivas, lo cual además evita la necesidad

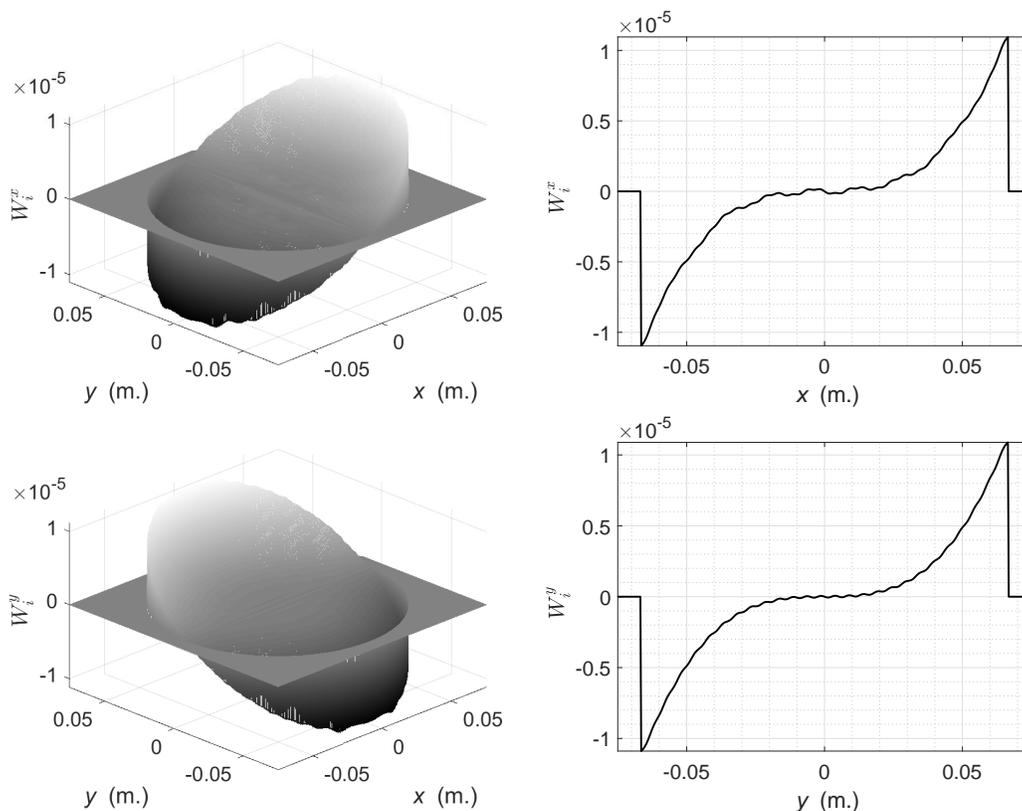


Figura 3.28: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGBD* aplicado a la muestra ideal y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

de alterar (manipular) la posición relativa del espécimen de forma mecánica o manual durante el proceso.

No obstante, el veredicto final acerca del grado de precisión que cada una de las técnicas propuestas son capaces de alcanzar solamente puede ser emitido una vez que se realice el proceso de integración de los campos de gradiente estimados, lo cual resulta clave para determinar una relación ideal entre precisión y tiempo de procesamiento globales.

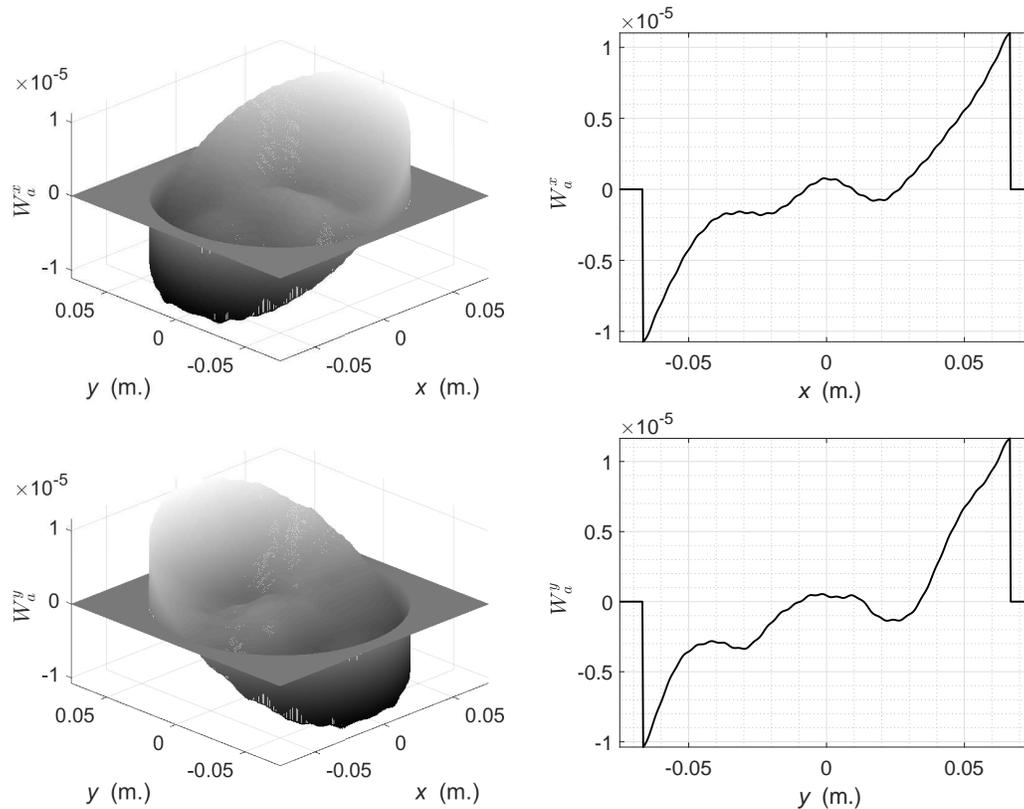


Figura 3.29: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGBD* aplicado a la muestra aberrada y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

### 3.7 Integración de los mapas de gradiente del error en el frente onda estimados a partir de patrones simulados con la *FCCR-MGCL*

Como se discutió en la última sección del capítulo anterior, la función de costo cuadrática regularizada *FCCR* (Ec. 2.25) constituye el método de optimización seleccionado para la integración de los mapas de gradiente estimados. En resumidas cuentas, esta fue elegida en vista de su capacidad para discriminar la información irrelevante fuera de la *ROI* para la integración, misma que en nuestro caso está delimitada por la pupila de salida del sistema.

Para este trabajo en particular, el algoritmo recursivo seleccionado para llevar a cabo la minimización de dicha función es el método de gradiente conjugado lineal *MGCL*. Este procedimiento, al ser comparado con otros algoritmos de su tipo, exhibe una razón de convergencia superior y, por lo tanto, un mejor desempeño en términos de tiempo de ejecución, todo sin la necesidad de sacrificar precisión.

No obstante, en orden de conocer el verdadero potencial en términos de precisión de la *PCF*, sus variaciones y la *PCR*, primeramente deben categorizarse y separarse adecuadamente los errores asociados a los diversos métodos de estimación del gradiente de los que vienen como resultado del proceso de integración propiamente dicho.

Por este motivo, se comienza por reportar en la Fig. 3.30 los perfiles obtenidos al integrar con la *FCCR-MGCL* las derivadas parciales calculadas con la función *gradient* (Figs. 3.7 y 3.8). Estas estimaciones requirieron tiempos de cálculo de alrededor de *1.4min.* y *2.3min.*, respectivamente (para todas las integraciones realizadas en esta sección y el siguiente capítulo se emplea  $\mu = 5 \times 10^{-3}$  y  $1 \times 10^{-5}$  como umbral de error global entre iteraciones para la *FCCR-MGCL*).

Desde luego, es posible calcular el error cuadrático medio normalizado (*NRMSE*), en otras palabras, el error porcentual promedio exacto que presentan estos perfiles estimados con respecto a los perfiles analíticos originales (Figs. 3.4 y 3.6) para determinar así, de manera inequívoca, exclusivamente el desempeño de la *FCCR-MGCL*. En este caso, la estimación del perfil ideal presentó un error de tan solo 0.31%, mientras que para el perfil aberrado fue de 3.45%.

Como se conocía con antelación, la precisión del algoritmo de integración diseñado disminuye significativamente cuando los mapas de gradiente contienen información de relativa alta frecuencia, como es el caso del *RGUD*, ya que el procedimiento exhibe un comportamiento similar al de un filtro pasa-bajos. No obstante, los resultados son satisfactorios para nuestros propósitos y, en general, superiores a los que se podría esperar de una técnica de integración de naturaleza global y/o no-iterativa como el método de integración basado en la teoría de Fourier.

Una vez que se conoce el orden de los errores asociados al método de integración, se puede proceder a analizar su desempeño cuando se le suministran las estimaciones del gradiente del

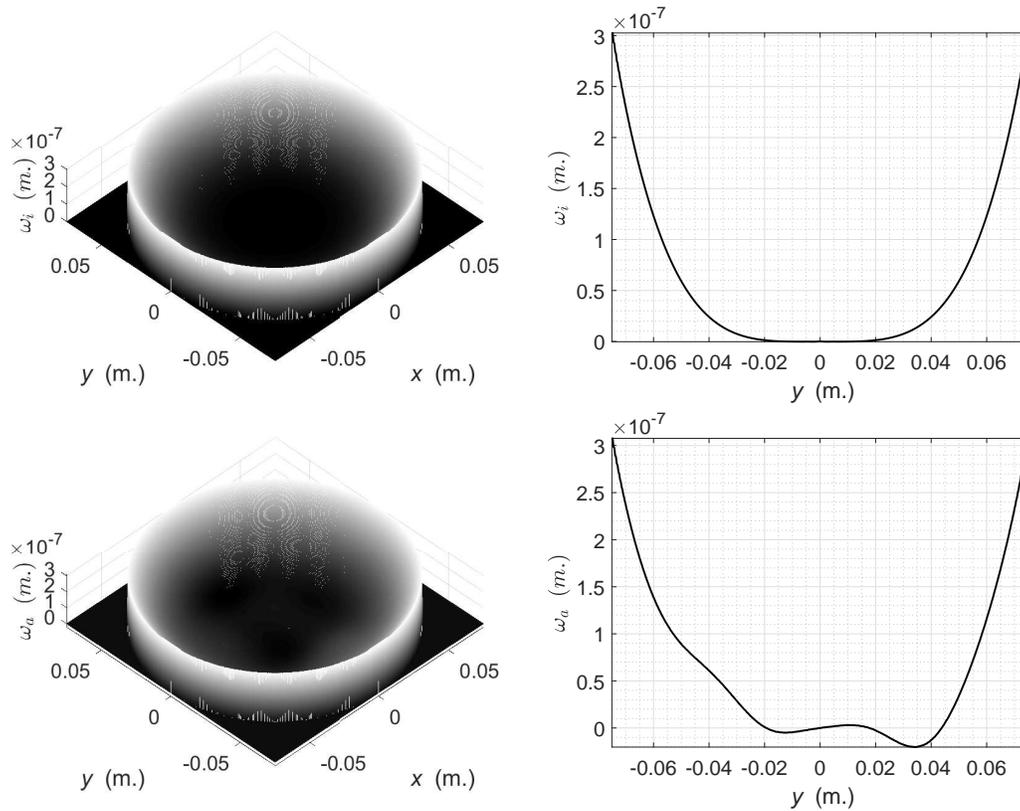


Figura 3.30: Perfiles estimados con la *FCCR-MGCL* a partir de los mapas de gradiente calculados directamente de los perfiles ideal [arriba] y aberrado [abajo] y una vista transversal de los mismos a lo largo del eje  $y$  [derecha].

error en el frente de onda obtenidas con las diversas metodologías propuestas. Como corresponde, los resultados de integrar con la *FCCR-MGCL* los mapas de gradiente estimados con el *MEGFD* a partir de las series ideal y aberrada (Figs. 3.13 y 3.15) se muestran en la Fig. 3.31. Esta vez, los tiempos de integración fueron de  $1.5min.$  y  $2.3min.$ , con errores respecto a los perfiles analíticos originales de  $0.4\%$  y  $3.49\%$  en cada caso. De esta manera se comprueba el alto grado de precisión que la *MEGFD* es capaz de alcanzar, mismo que evidentemente implica un sacrificio en términos de desempeño al requerir un tiempo de cálculo neto muy elevado.

Por otro lado, como se conoce, si se requiere y/o desea disminuir el tiempo de ejecución global de esta metodología es posible recurrir a la técnica complementaria de máscaras de estimación (Figs. 3.16 y 3.17). Como se reportó en dicha sección, el tamaño lateral  $m$  de las

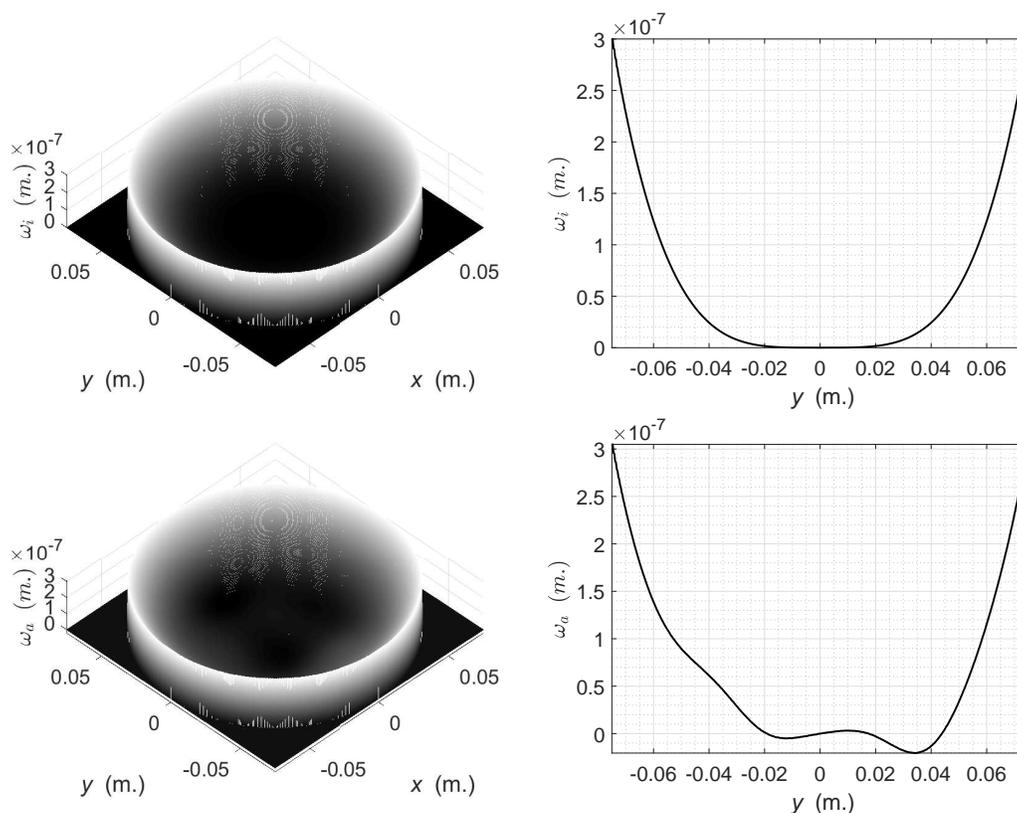


Figura 3.31: Perfiles obtenidos con la *FCCR-MGCL* a partir de los gradientes estimados con el *MEGFD* aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje  $y$  [derecha].

máscaras para cada estimación respectiva del gradiente fue 3, 5, 9 y 17 píxeles; mismas que tras el proceso de integración con la *FCCR-MGCL* presentaron un *NRMSE* en relación a los perfiles originales de 0.48%, 0.83%, 0.92% y 1.68% para el caso de la serie ideal; y 3.56%, 3.64%, 4% y 4.33% para el caso de la serie aberrada.

Como se estudió, cuando se usa el *MEGFD* esta simple técnica de procesamiento de imágenes supone una ganancia notable en términos de tiempo de estimación que a la postre también impacta desfavorablemente en la precisión general alcanzada. A pesar de que esto obviamente se hace patente, es decir, los errores globales en el perfil resultante evidentemente se incrementan conforme lo hace el tamaño de las máscaras, como se puede constatar, dadas las características del algoritmo de integración éstos de hecho no son tan significativos como sí lo

es el ahorro en tiempo de cálculo neto. Particularmente, cuando se hace uso de una máscara con  $m = 3$  (*MEGFD-V3*) la precisión final alcanzada es prácticamente la misma que con el método en su forma básica. En la Fig. 3.32 se reportan estos resultados como referencia.

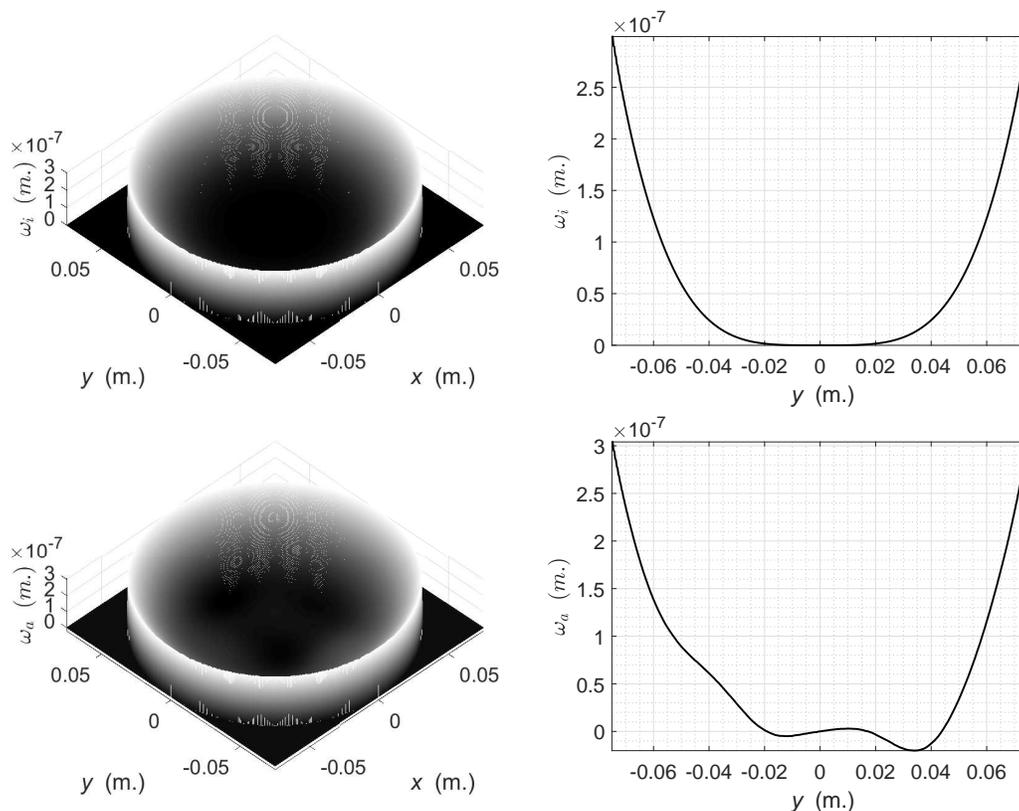


Figura 3.32: Perfiles obtenidos con la *FCCR-MGCL* a partir de los gradientes estimados con el *MEGFD-V3* aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Ahora bien, si se analizan los perfiles obtenidos de los mapas de gradiente estimados con la *MSEGFD* a partir de las series respectivas (Figs. 3.20 y 3.21) que se muestran en la Fig. 3.33; con tiempos de ejecución para el *FCCR-MGCL* de  $2min.$  y  $2.56min.$  así como errores porcentuales asociados de  $0.45\%$  y  $3.52\%$ , se corrobora que a pesar de que la línea recta en efecto no es el modelo ideal para ajustar los perfiles de transición de estado de iluminación, la disparidad con respecto a los resultados finales logrados por el modelo sigmoidal ideal es

insignificante en comparación al ahorro masivo en tiempo de cálculo, aún sin la necesidad de emplear máscaras de estimación.

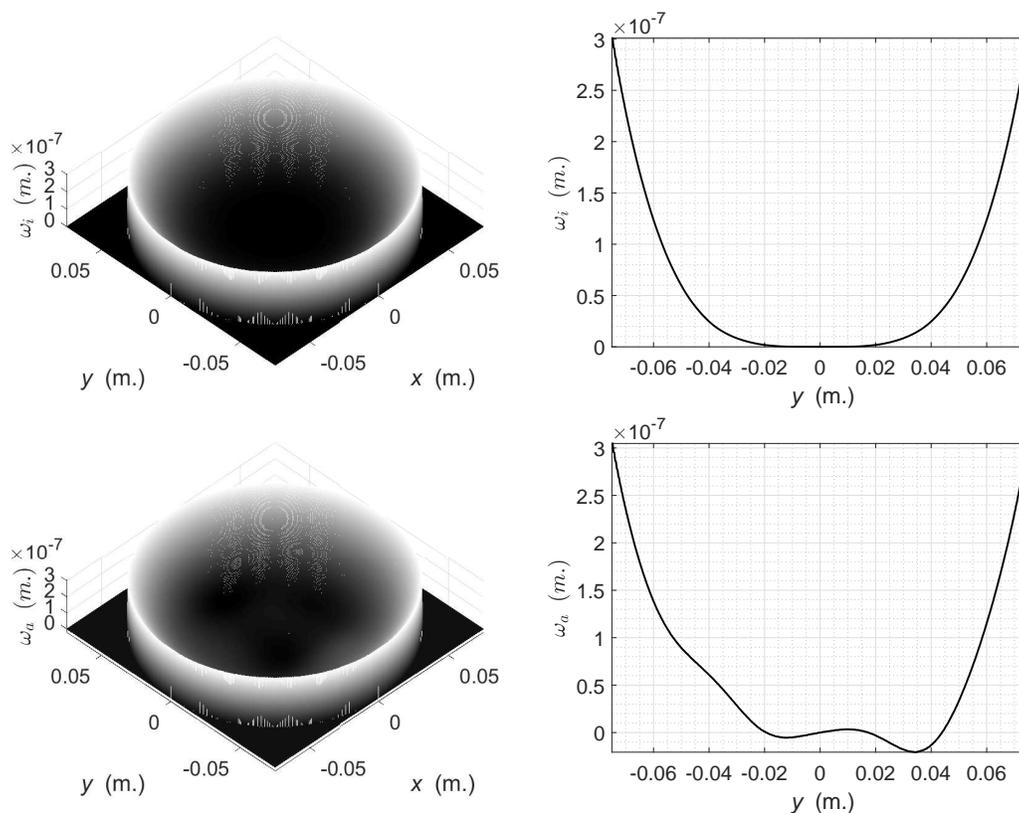


Figura 3.33: Perfiles obtenidos con la *FCCR-MGCL* a partir de los gradientes estimados con el *MSEGFD* aplicado a las series ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje *y* [derecha].

Para finalizar, en la Fig. 3.34 se reportan los perfiles estimados a partir de los mapas de gradiente calculados con el *MEGBD* aplicado a las muestras ideal y aberrada (Figs. 3.29 y 3.30). En este caso, los tiempos de integración con la *FCCR-MGCL* rondaron los  $1.1min.$  y  $1.9min.$  (la notable disminución en el tiempo de cálculo se debe a la reducción de pupila), mientras que los porcentajes promedio de error con respecto a los perfiles originales fueron de  $2.4\%$  y  $5.27\%$ . A partir de resultados se puede concluir que a pesar de que los errores globales presentes en los perfiles integrados son considerablemente mayores a los obtenidos con cualquiera de las otras técnicas propuestas con base en la prueba de Foucault, no se debe

pasar por alto que estas estimaciones fueron generadas a partir de la información de un solo birronchigrama, mientras que todas las antes mencionadas requirieron de dos series de 21 foucaultgramas desplazados. Adicionalmente, tampoco se puede omitir el hecho de que estas muestras sintéticas fueron generadas a partir de las superposición selectiva de dos ronchigramas ortogonales, lo que ocasiona, como se constató, que parte de la información necesaria para la estimación de a una de las derivadas parciales se corrompa ligeramente.

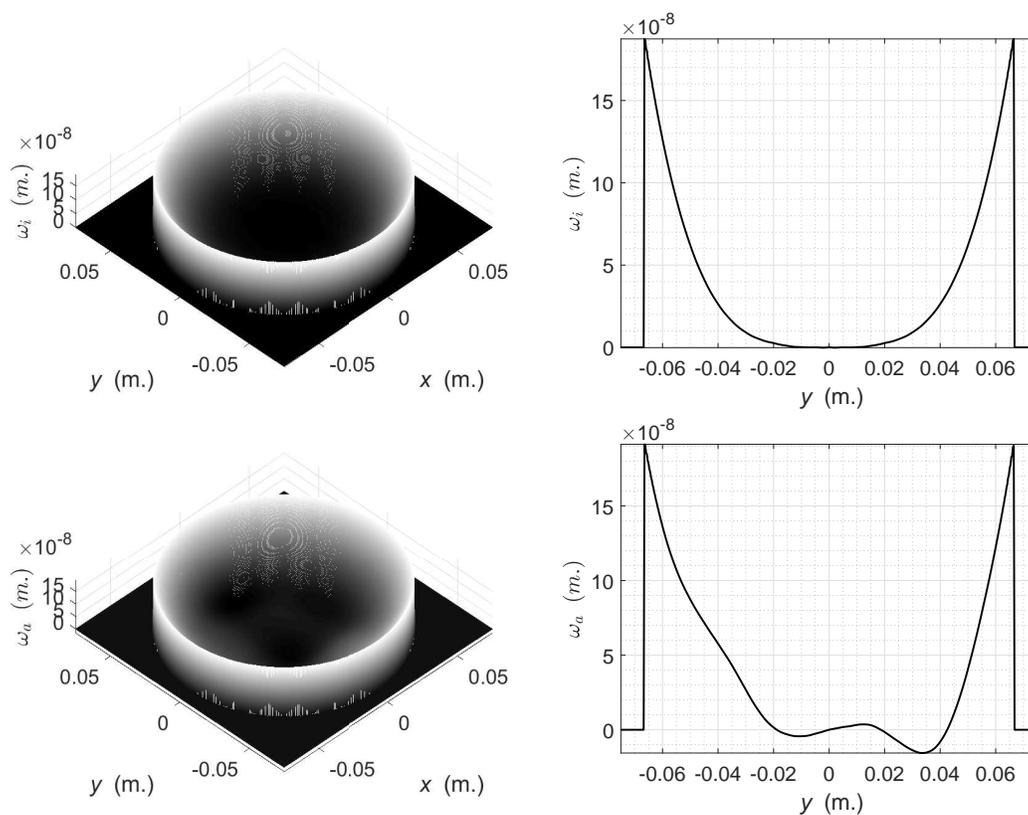


Figura 3.34: Perfiles obtenidos con la *FCCR-MGCL* a partir de los gradientes estimados con el *MEGBD* aplicado a las muestras ideal [arriba] y aberrada [abajo], así como una vista transversal de los mismos a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Como referencia final, todos los resultados relevantes obtenidos en esta sección se presentan de manera sintetizada en las Tabs. 3.1 y 3.2, la primera para el perfil ideal y la segunda para el perfil aberrado. Por medio de éstas resulta muy sencillo darse una idea clara del grado de precisión y desempeño de la *PCF*, sus variantes y la *PCR* en un entorno de simulación, lo que

facilita el proceso de elección para una potencial aplicación práctica. (No se incluyen tiempos de estimación para el *MEGBD* ya que el cálculo depende enteramente del valor inicial de  $f_d$  que se suministra al algoritmo iterativo, por lo que, una vez que se conoce el minimizador ideal, obviamente éste puede presentar una velocidad de respuesta tan rápida como el usuario desee.)

Tabla 3.1: Tiempos de estimación, integración y porcentaje promedio de error de las diversas metodologías propuestas al analizar el perfil ideal.

<b>Método</b>	<b>Tiempo de estimación</b>	<b>Tiempo de integración</b>	<b><i>NRMSE</i></b>
<i>gradient</i>	21ms.	1.4min.	0.31%
<i>MEGFD</i>	25.4min.	1.5min.	0.4%
<i>MEGFD-V3</i>	3.1min.	1.5min.	0.48%
<i>MSEGFD</i>	30.1s.	2min.	0.45%
<i>MEGBD</i>	—	1.1min.	2.4%

Tabla 3.2: Tiempos de estimación, integración y porcentaje promedio de error de las diversas metodologías propuestas al analizar el perfil aberrado.

<b>Método</b>	<b>Tiempo de estimación</b>	<b>Tiempo de integración</b>	<b><i>NRMSE</i></b>
<i>gradient</i>	26ms.	2.3min.	3.41%
<i>MEGFD</i>	29.1min.	2.3min.	3.49%
<i>MEGFD-V3</i>	3.3min.	2.6min.	3.56%
<i>MSEGFD</i>	30.2s.	2.56min.	3.52%
<i>MEGBD</i>	—	1.9min.	5.27%

Si bien es cierto que los resultados reportados en esta sección reflejan las condiciones propias de un entorno de simulación totalmente controlado, no es posible refutar el potencial que las metodologías propuestas exhiben para la extracción/estimación de información

cuantitativa precisa a partir de patrones de sombras y franjas clásicos. Por lo tanto, solo resta ponerlas a prueba en condiciones reales y posteriormente compararlas de manera directa con otra técnica de caracterización confiable para así validar también sus resultados prácticos.

## Capítulo 4

# Resultados experimentales

Antes de proceder con el análisis a fondo del desempeño de la *PCF* y la *PCR* en condiciones reales, a manera de recordatorio, se dan a conocer nuevamente las especificaciones generales del espécimen puesto a prueba y las características del equipo de computo en el cual se llevó a cabo el procesamiento de los datos. Posteriormente, también se describen detalladamente los aparatos de pruebas implementados a través de los cuales se obtuvieron las series y muestras experimentales que se reportan y analizan a lo largo de esta sección.

El dispositivo analizado fue un gran espejo ásferico de  $15\text{cm.}$  de diámetro superficial ( $D$ ) y  $2.36\text{m.}$  de radio de curvatura nominal ( $r$ ), todavía sin recubrimiento óptico y destinado a ser el primario de un telescopio newtoniano. Todas las tareas pertinentes al procesamiento y visualización de imágenes, así como también todos los cálculos requeridos fueron realizados en la plataforma MATLAB R2017b siendo ejecutada por una computadora Intel Core i7-4770 @ 3.4GHz con 16GB de RAM.

En cuanto a los aparatos de pruebas implementados se refiere, ambos presentaron un LED blanco de alta intensidad de  $5\text{mm.}$  como fuente de luz semi-puntual en el centro de curvatura ( $s$ ). Para el caso del aparato de Foucault, la apertura de iluminación consistió simplemente de una ranura vertical extendida [I], mientras que para el aparato de Ronchi, se diseñó una apertura con forma de cruz [+]. En ambos casos, éstas fueron especialmente dispuestas en arreglo para reducir los efectos estenopeicos o “de cono estrecho” e inducir, simultáneamente, un incremento significativo en la nitidez de los patrones generados.

Con respecto a las pantallas de modulación correspondientes, una navaja de afeitar común hizo las veces de este elemento en el aparato de Foucault, mientras que un par de rejillas de cromo sobre vidrio de alta precisión superpuestas perpendicularmente hicieron lo propio para el aparato de Ronchi. Dichas rejillas, de la marca Edmund, presentaron un periodo espacial nominal ( $p$ ) de  $508\mu m$ . ( $50lpi$ .)

Por su parte, como dispositivo formador de imágenes u “observador” se empleó una cámara CMOS monocromática Flir Flea3 con una resolución máxima de  $1280 \times 1024 \text{ pix}$ . Adicionalmente y con la finalidad de lograr una alineación precisa de los diversos elementos constituyentes de ambos arreglos ópticos, todos estos componentes fueron montados sobre plataformas de aluminio de alto rendimiento fabricadas por Newport. En la práctica, éstas fueron controladas por medio de micrómetros con una resolución de paso máxima de  $5\mu m$ .

Una vez que se han descrito apropiadamente los dispositivos e instrumentos necesarios para reproducir los resultados que se reportan en las siguientes secciones, se puede proceder a analizar su operación y desempeño práctico.

## **4.1 Generación de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados experimentales**

Como se estudió en los capítulos anteriores, no es posible determinar de antemano un valor “ideal” para el desplazamiento entre muestras del filo de la navaja cuando se pretende capturar una serie suficiente de foucaultgramas ya que éste depende enteramente de las especificaciones y defectos propios del dispositivo óptico siendo analizado. Afortunadamente, en la práctica dicho “valor del paso” puede ser encontrado fácilmente de forma empírica: basta con localizar las dos posiciones complementarias del filo de la navaja que causan la aparición de los foucaultgramas extremos, es decir, la pareja de mapas de sombras marginales que exhiben los estados opuestos de iluminación uniforme y oclusión total. En tales circunstancias, entonces solamente restaría establecer el número de foucaultgramas ( $n$ ) deseado para la serie con el conocimiento de que a mayor número de imágenes, se tendrá en general también un mayor grado de sensibilidad. Desde luego, no se debe pasar por alto que el valor del paso también está supeditado

a la resolución del micrómetro o dispositivo empleado para controlar los desplazamientos de la navaja, por lo que siempre existe un valor máximo límite para el número de muestras que puede constituir una serie suficiente determinada.

Asimismo, debe tenerse en consideración que los perfiles de transición de estado de iluminación que se extraerán de las series capturadas serán posteriormente ajustados a distribuciones sigmoideas, por lo que es recomendable agregar márgenes considerables a las posiciones extremas de la navaja encontradas empíricamente para asegurar la ocurrencia de este tipo de perfil en todos los puntos dentro de la pupila de salida del sistema.

Teniendo en cuenta las recomendaciones antes discutidas, las posiciones extremas de la navaja encontradas en la práctica al analizar el espejo de pruebas se extendieron desde los  $-125\mu m.$  hasta los  $125\mu m.$  del eje respectivo en el plano paraxial, lo que al emplear la máxima resolución de nuestro micrómetro, implica que las series capturadas contendrán 51 muestras. El tamaño de estas series suficientes es más que suficiente para nuestros propósitos puesto que en las simulaciones se alcanzaron excelentes resultados con menos de la mitad de esta cantidad de patrones.

Dado que existe una distancia considerable entre la superficie reflectora y el observador (alrededor de  $2.36m.$  en nuestro caso), y puesto que el uso de enfoque excesivo no es recomendado cuando se capturan patrones de franjas ya que corrompe severamente los perfiles de intensidad de iluminación, la pupila de salida del sistema presentó un diámetro efectivo de  $269pix.$  En este caso, el tamaño de las imágenes es significativamente menor al de las muestras simuladas, sin embargo, no debe omitirse que el *MEGFD-V3* alcanzó prácticamente los mismos resultados que la técnica básica, por lo que el tamaño aún es adecuado para nuestros propósitos.

Como se comentaba en el capítulo anterior, resulta prácticamente imposible apreciar diferencias importantes entre foucaultgramas desplazados consecutivos a simple vista, motivo por el cual en la Fig. 4.1 se aprecian solo 5 muestras representativas por orientación de los foucaultgramas obtenidos experimentalmente, mismas que se encuentran asociadas a los desplazamientos del filo de la navaja de  $-30\mu m.$ ,  $-10\mu m.$ ,  $10\mu m.$ ,  $30\mu m.$  y  $50\mu m.$  (de aquí en adelante se hace alusión a este conjunto de patrones simplemente como “serie experimental”).

Como podría de esperarse, la posición del foucaultgrama central de hecho no se corresponde con el origen del eje de desplazamiento paraxial debido a que los estados extremos fueron determinados de manera empírica, por lo que en la mayoría de los casos éstos no habrán de ser necesariamente simétricos.

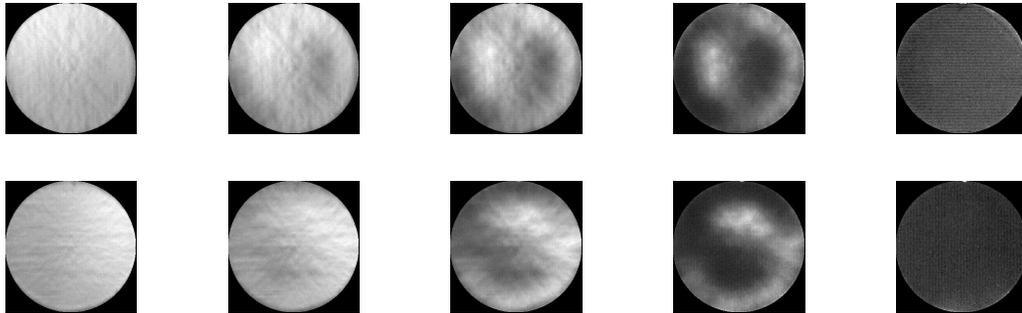


Figura 4.1: Muestras de foucaultgramas desplazados verticales [arriba] y horizontales [abajo] correspondientes a la serie experimental.

Afortunadamente, como se comprobará al analizar los perfiles de transición de estado de iluminación que se presentan en la siguiente sección, este error práctico está presente en todas las muestras de la serie y se manifiesta en forma de una simple constante pistón que puede ser corregida fácilmente de manera analítica una vez que se ha estimado la derivada parcial correspondiente.

## 4.2 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados experimentales con el *MEGFD*

Como se estableció en capítulos anteriores, para calcular el gradiente del error en el frente de onda del espejo analizado haciendo uso del *MEGFD* es necesario extraer todos los perfiles de transición de estado de iluminación asociados a cada punto contenido dentro de la pupila de salida del sistema. En la Fig. 4.2 se observan tres de estos perfiles de irradiancia representativos a lo largo del eje  $y$  obtenidos de la serie experimental y asociados a los puntos  $-5.625\text{cm.}$ ,  $0$ , y  $5.625\text{cm.}$  en el interior de la pupila de salida, respectivamente. Cada uno de estos perfiles

evidentemente está constituido por 51 muestras (puntos) que son posteriormente ajustadas a un modelo sigmoidal (Ec. 2.8, lo cual luego permite estimar el valor de la derivada parcial en dicho punto mediante la Ec. 2.9. A través de estos perfiles se demuestra de manera irrefutable que las series capturadas experimentalmente también presentan una distribución de irradiancia inherentemente sigmoidal como se había anticipado.

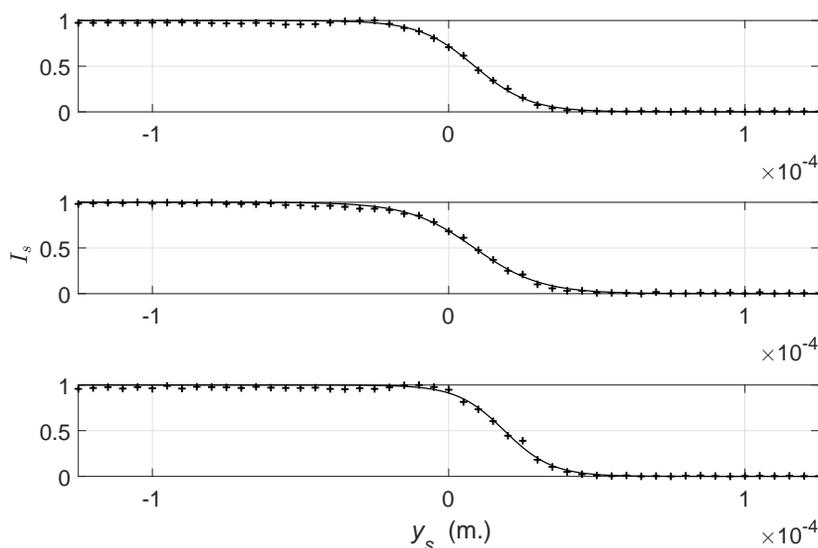


Figura 4.2: Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie experimental [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones sigmoiales respectivos [línea continua].

Como corresponde, en la Fig. 4.3 se muestra la estimación del gradiente del error en el frente de onda resultado de aplicar el *MEGFD* a la serie experimental (en todas la estimaciones que se presentan en este capítulo el pistón ha sido corregido tomando como referencia el centro del espejo, punto en el cual se considera que el gradiente es cero y, además, se ha aplicado una ligera reducción de pupila para lidiar con los errores introducidos por el borde áspero de la pieza). El tiempo total de cálculo requerido para realizar esta estimación fue de alrededor de  $10min.$ , mejora con respecto a la simulaciones que obviamente viene como resultado del tamaño comparativamente más reducido de estas muestras.

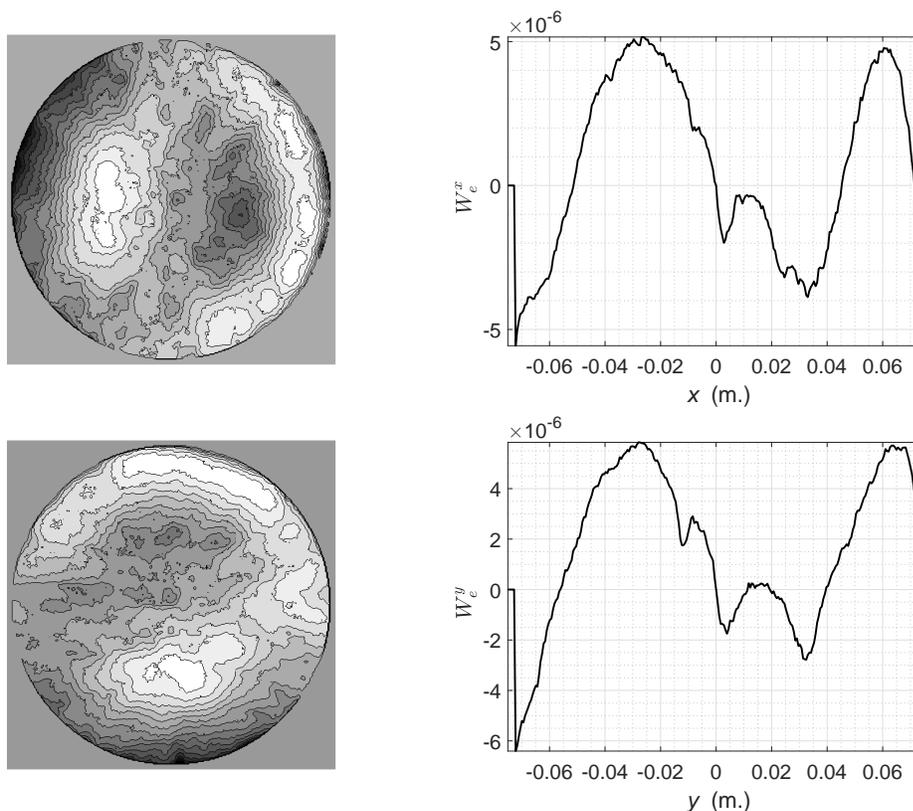


Figura 4.3: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGFD* aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

Al analizar cuidadosamente estos mapas de gradiente estimados se puede corroborar que la asunción de la propiedad de simetría rotacional durante la caracterización de una superficie óptica generalmente producirá resultados severamente errados en la práctica. Afortunadamente, en nuestro caso, no es necesario modificar en lo absoluto el aparato de pruebas de Foucault implementado para obtener una segunda serie suficiente ortogonal, simplemente basta con rotar el espejo de pruebas  $-\pi/2 \text{ rad.}$  y repetir el barrido de la navaja. Con estos resultados se comprueba la capacidad del *MEGFD* para extraer información cuantitativa precisa acerca del error en el frente de onda de una superficie óptica focalizadora en la práctica.

No obstante y para complementar el análisis, si se desea reducir aún más el tiempo de cálculo del algoritmo a cambio de un leve sacrificio en términos de precisión, es posible recurrir

a la técnica de máscaras de estimación. En el capítulo anterior se comprobó que  $m = 3$  es el tamaño de máscara ideal ya que supone una propagación de errores mínima y prácticamente inconsecuente una vez que es llevado a cabo el proceso de integración.

En la Fig. 4.4 se muestran las derivadas parciales estimadas con el *MEGFD-V3* aplicado a la serie experimental, procesamiento que requirió un tiempo de ejecución de alrededor de  $1.2min$ . Como se esperaba, aunque los resultados son claramente más burdos, la pérdida de resolución es mínima y evidentemente no equiparable con el importante ahorro en tiempo de cálculo global.

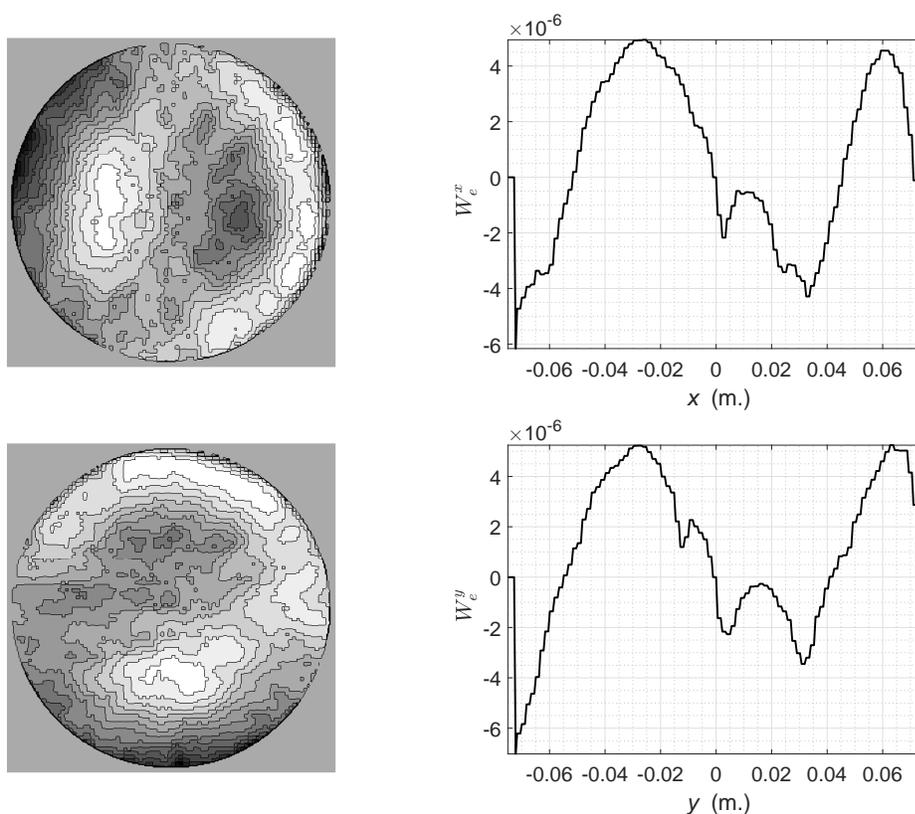


Figura 4.4: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGFD-V3* aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

En este punto solamente quedaría pendiente realizar el proceso de integración con la *FCCR-MGCL* para recuperar el perfil de las aberraciones presentes en la pieza probada, sin embargo,

antes es necesario analizar el desempeño de las otras técnicas de estimación de gradiente en orden de establecer un panorama general para su posterior comparación.

### **4.3 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de una serie de foucaultgramas desplazados experimentales con el *MSEMGD***

En orden de demostrar que en la práctica también resulta válido proceder de un modelo de ajuste sigmoïdal (Ec. 2.8) a uno lineal (Ec. 2.10) para realizar la estimación del gradiente del error en el frente de onda, en la Fig. 4.5 se muestran tres perfiles de irradiancia representativos a lo largo del eje  $y$  correspondientes a la serie experimental y asociados, respectivamente, a los puntos  $-5.625\text{cm.}$ ,  $0$ , y  $5.625\text{cm.}$  dentro de la pupila de salida del sistema. Como se puede corroborar, estos perfiles de intensidad de irradiancia extraídos de muestras reales claramente exhiben pendientes centrales de transición semi-lineales. No obstante, para el caso de una serie experimental se aconseja reducir los umbrales de selección de los  $m$  puntos (muestras) para el ajuste lineal a  $[0.8 - 0.2]$  ya que estos datos comúnmente presentarán una mayor varianza que los que se simularon. Esto asegura que únicamente los puntos con una tendencia lineal sean aislados. A pesar que los umbrales fueron reducidos como se señaló, gracias al considerable número de patrones contenidos por cada serie suficiente ortogonal capturada (51), en todos los casos se dispuso de un promedio de 6 muestras para realizar el ajuste lineal, cantidad más que suficiente para nuestros propósitos y de hecho muy superior a la observada en las simulaciones.

Como se puede intuir, al tratarse de una variante directa, la constante pistón presentada por las estimaciones del *MEGFD* se verá reflejada íntegramente en los resultados alcanzados con el *MSEMGD*. Afortunadamente, dicho error puede ser compensado de forma muy sencilla como se vio anteriormente. Como se discutió en el capítulo anterior, la relevancia de este método alternativo recae en que no precisa de algún método de ajuste no lineal para estimar el punto de inflexión exacto de los perfiles de transición de estado de iluminación (Ec. 2.12), lo cual reduce enormemente el tiempo de cálculo. Esto se vuelve evidente cuando se toma en cuenta que, tan solo en nuestro caso, es necesario realizar 56,397 ajustes de este tipo en orden de obtener

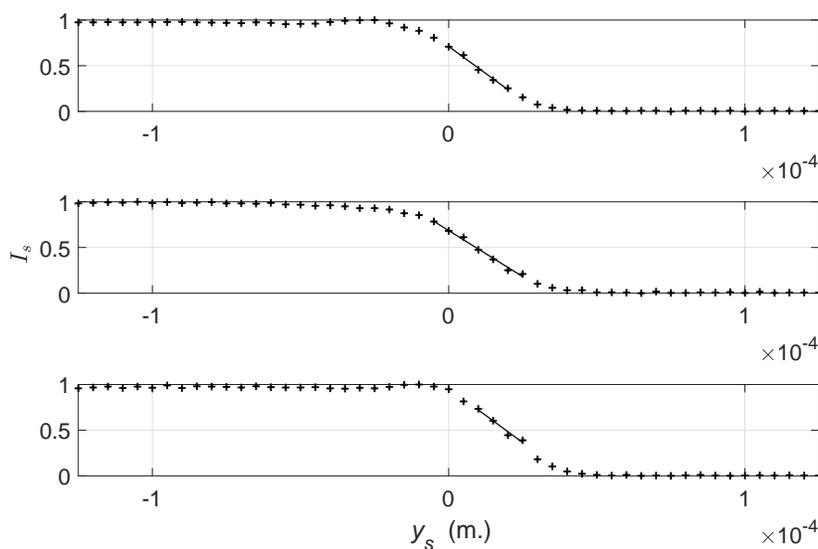


Figura 4.5: Muestras de perfiles de transición entre estados de iluminación correspondientes a la serie experimental [puntos discontinuos] y sus ajustes a funciones lineales respectivos [línea continua].

apenas una de las derivadas parciales buscadas. Además, como se comprobó previamente, esta metodología es incluso más eficiente y precisa que el *MEGFD-V3*.

Como corresponde, en la Fig. 4.6 se observa el gradiente del error en el frente de onda estimado a partir de la serie experimental haciendo uso del *MSEGFD*. El tiempo de procesamiento global se vio reducido a alrededor de tan solo 12.9s. tal y como se esperaba, con lo que una vez más se demuestra el notable desempeño de la técnica.

A pesar de que evidentemente es posible apreciar ciertas diferencias visuales leves entre las diversas estimaciones del gradiente del error en el frente de onda de la pieza analizada (Figs. 4.3, 4.4 y 4.6), una métrica relevante y decisiva para comparar su precisión relativa solamente puede obtenerse una vez que se llevan a cabo los procesos de integración respectivos y se reportan los resultados definitivos. No obstante, antes de poder proceder con dicho análisis, aún queda pendiente examinar por completo el desempeño práctico de la *PCR*.

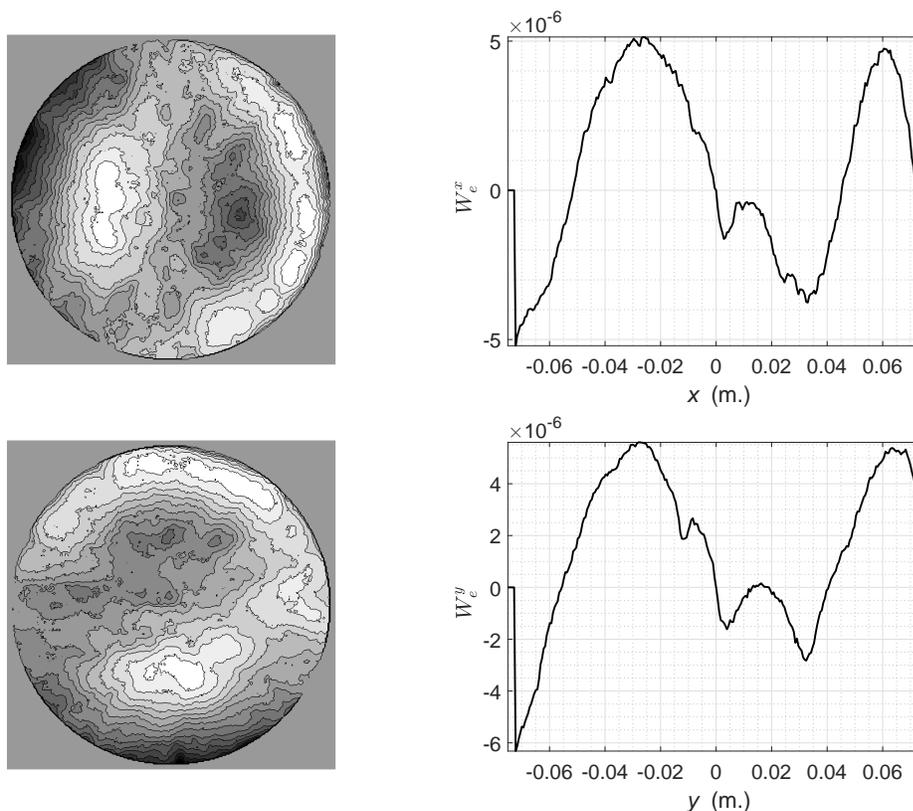


Figura 4.6: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MSEGFD* aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

#### 4.4 Generación de un ronchigrama con defoco experimental

Como se estudió en el capítulo anterior, una vez que las posiciones pertinentes de la superficie óptica siendo analizada (espécimen), la fuente de iluminación (LED) y el observador (cámara digital) se establecen de forma precisa para una aparato de pruebas de Ronchi determinado, éstas permanecen fijas a lo largo de todo el procedimiento. Por otra parte, como también se aclaró en las secciones correspondientes, no es posible establecer por adelantado una posición ideal en la cual colocar a la pantalla de modulación a lo largo del eje óptico ( $l'$ ) para cualquier arreglo óptico dado, pues ésta depende de las características y especificaciones propias de todos los componentes involucrados.

No obstante, previamente también se encontró que, independientemente de la configuración, una posición inicial aceptable para dicha pantalla es  $0.1f$ . En nuestro caso particular, esto se traduce en un desplazamiento paraxial de  $11.8\text{cm.}$ , distancia que también fue empleada para generar los birronchigramas con defoco simulados. Bajo estas condiciones fue posible capturar la muestra con defoco que aparece en la Fig. 4.7, misma que, como se esperaba y puede corroborarse, consta de un enrejado con alrededor de 15 bandas (franjas) nítidas en cada dirección perpendicular (de aquí en más se hará alusión a este patrón simplemente como “muestras experimental”).

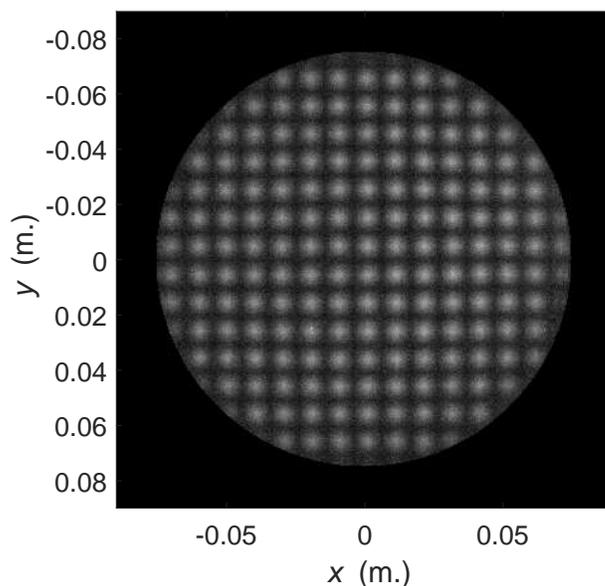


Figura 4.7: Birronchigrama con defoco obtenido experimentalmente.

Cabe mencionar que esta muestra de hecho fue obtenida promediando 5 distintos cuadros capturados por la cámara digital, lo cual mejora significativamente la nitidez de la imagen ya que reduce el impacto de las ligeras variaciones de temperatura que se presentan a lo largo del camino óptico que recorre el cono de rayos de luz reflejado. Después de la segmentación correspondiente la resolución final de la muestra experimental resultó de  $393 \times 393 \text{pix}$ . A pesar de que, comparado con la resolución de la cámara, este podría considerarse un tamaño reducido, nuevamente no debe olvidarse que esta clase de patrones no deben ser capturados haciendo uso de una lente con enfoque excesivo. Además, en este caso el tamaño no difiere

marcadamente con respecto al de las muestras simuladas y, de hecho, es muy superior al de las imágenes de la serie experimental.

Por otro lado, como se esperaba también y puede ser comprobado, en una muestra obtenida experimentalmente tanto la morfología como la definición de las franjas en cualquiera de sus direcciones perpendiculares no se ven afectadas por la superposición en forma cruzada de las dos rejillas de Ronchi que conforman la pantalla de modulación, por lo que no aparecerán armónicos extra indeseados en el espectro de Fourier como ocurrió en el caso de las muestras simuladas. Esto último evidentemente supone un incremento global en la precisión del *MEGBD* al ser aplicado en muestras reales dadas las limitantes que se tienen al generar birronchigramas con defoco artificiales con base en el *MSRD*.

#### **4.5 Estimación del gradiente del error en el frente de onda a partir de un birronchigrama con defoco experimental con el *MEGBD***

Dada la posición en la cual fue colocada la pantalla de modulación al generar la muestra experimental, la frecuencia espacial debida a este defoco ( $f_d$ ) necesariamente rondará las  $98.425\text{cic}/m$ . (Ec. 3.8). El grado de precisión de esta primera estimación analítica puede ser ratificado al analizar la magnitud del espectro de Fourier de la muestra experimental que se observa en la Fig. 4.8 y para el cual su amplitud global fue una vez más ajustada por medio de la función raíz cúbica, lo cual hace más simple la visualización de sus lóbulos principales. Como se adelantaba en la sección anterior, en este birronchigrama con defoco solo se presentan los armónicos no deseados asociados al irremediable efecto Moiré (lóbulos diagonales al origen).

Tal y como ocurrió en el caso de las muestras simuladas, resulta imposible extrapolar el valor de  $f_d$  con la precisión requerida por el *MEGBD* directamente del espectro obtenido. Sin embargo, se comprueba que todas las premisas y aseveraciones que se pueden realizar acerca del desempeño de la técnica bajo un entorno de simulación, se mantendrán también en condiciones prácticas.

Por lo tanto, se puede proceder a determinar el valor central ideal del rango acotado de frecuencias que puede tomar  $f_d$ , mismo que posteriormente es suministrado al algoritmo iterativo

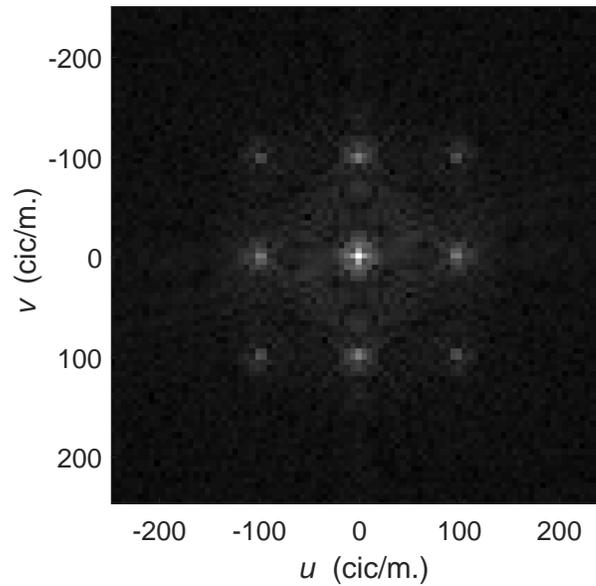


Figura 4.8: Magnitud del espectro de Fourier de la muestra experimental.

para la estimación del gradiente del error en el frente de onda. Esto se logra por medio de la amplificación transversal a lo largo del eje  $v$  del lóbulo espectral positivo extraído de la muestra experimental que se aprecia en la Fig. 4.9, misma que al ser interpolada con la *IRC* da lugar a una curva que emula de manera muy competente un comportamiento analógico hipotético de los datos. Por supuesto y como se podría esperar, nuevamente existe una discrepancia considerable entre el valor de  $f_d$  calculado analíticamente ( $98.425\text{cic}/m.$ ) y el observado en los datos originales (alrededor de  $100.408\text{cic}/m.$ ). Pese a esto, la *IRC* es capaz de predecir un valor muy cercano al esperado:  $97.873\text{cic}/m.$  Este valor garantiza que el algoritmo iterativo de estimación converja de forma más rápida, aún a pesar de que no se debe pasar por alto que, en el caso una muestra experimental, la  $f_d$  estimada en forma analítica de hecho no representa el valor exacto de la frecuencia espacial fundamental de sus franjas constituyentes.

En esta instancia se cuenta con todos los parámetros necesarios para poner en marcha el *MEGBD*, el cual involucra el aislamiento de los lóbulos principales axialmente positivos que se localizan en las frecuencias fundamentales (Ec. 2.22) por medio de filtros gaussianos simples en 2D (Ec. 3.9), para posteriormente desenvolver la fase de las señales resultantes (Ec. 2.24), todos los anteriores, haciendo uso del valor actual de  $f_d$  dentro del rango acotado establecido.

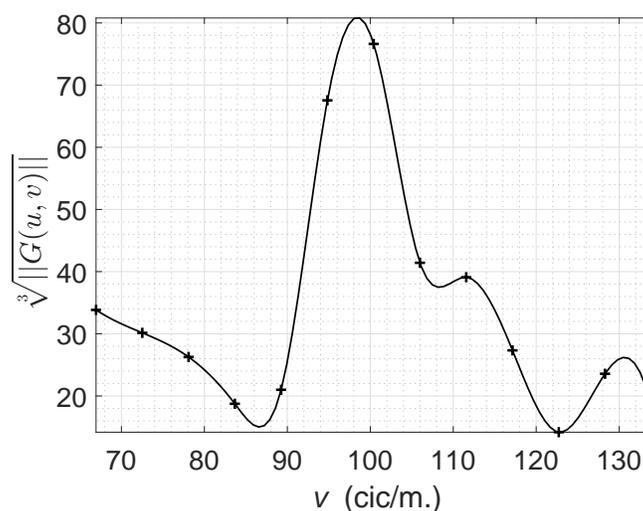


Figura 4.9: Amplificación transversal del lóbulo espectral positivo de la muestra experimental [puntos discontinuos] así como su interpolación respectiva obtenida con la IRC [línea continua].

Un punto especial a considerar acerca de la aplicación práctica de esta metodología es el siguiente: si bien la pantalla de modulación en efecto está constituida por dos rejillas cruzadas superpuestas de idéntico periodo, es lógico esperar que exista una muy ligera variación entre las frecuencias portadoras inducidas por cada una de ellas. Por lo tanto, en orden de alcanzar la máxima precisión posible, es recomendable que se determinen dos valores separados de  $f_d$ , uno por cada derivada parcial correspondiente.

Finalmente, en la Fig. 4.10 se reportan los resultados definitivos alcanzados por el *MEGBD* al aplicarlo a la muestra experimental. En este caso, el algoritmo convergió respectivamente en los valores de  $98.006\text{cic/m.}$  y  $98.111\text{cic/m.}$ , mismos que pueden ser considerados de manera formal como las frecuencias espaciales presentes en la muestra debidas al defoco inducido por la posición de la pantalla modulación durante su captura. La ligera discrepancia que existe en ambos casos con respecto al cálculo analítico, en general, puede ser atribuida a las limitaciones inherentes de los dispositivos e instrumentos empleados para la implementación de la prueba.

Al analizar detalladamente estos mapas de gradiente se puede concluir que el *MEGBD* es superior al *MEGFD* en la práctica ya que ambas derivadas parciales pueden ser estimadas a

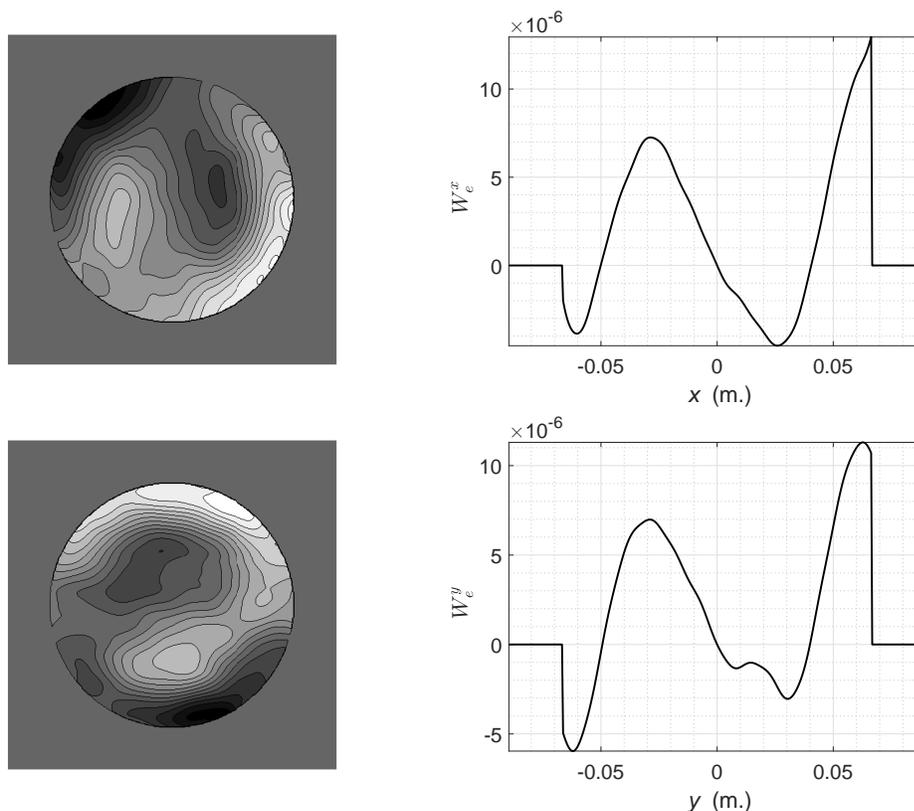


Figura 4.10: Derivadas parciales con respecto a  $x$  [arriba] e  $y$  [abajo] estimadas con el *MEGBD* aplicado a la serie experimental y una vista transversal de las mismas a lo largo del eje respectivo [derecha].

partir de una sola muestra capturada y sin la necesidad de manipular la posición del espécimen durante el proceso. No obstante, también deben tomarse en cuenta que el proceso de filtrado espacial, mismo que elimina la mayor parte de la información de alta frecuencia presente en el gradiente y al mismo tiempo altera su morfología general cuanto más cerca se está del borde de la pieza, es el responsable de la disparidad significativa que existe entre estos resultados y los alcanzados con las otras técnicas propuestas.

En esta instancia, finalmente solo resta llevar a cabo la integración de los diversos mapas de gradiente estimados para poder establecer una comparación directa entre la *PCF* y la *PCR* y, más importante aún, poder validar sus resultados al contrastarlos con los alcanzados por medio de un método análisis interferométrico confiable.

## 4.6 Integración de los mapas de gradiente del error en el frente onda estimados a partir de patrones experimentales con la *FCCR-MGCL*

Como se discutió extensivamente en la parte final del capítulo anterior, la *FCCR-MGCL* es el método de optimización seleccionado para integrar los campos de gradiente estimados con las técnicas propuestas. Los parámetros globales del algoritmo asociado empleados para estimar los perfiles del error en el frente de onda que se presentan en esta sección se corresponden íntegramente con los utilizados durante las simulaciones.

Para comenzar, en la Fig. 4.11 se reporta el error en el frente de onda (en todos los casos el pistón es eliminado de estos perfiles para permitir evaluar más fácilmente su relación *P-V*) obtenido al integrar con la *FCCR-MGCL* las derivadas parciales estimadas con el *MEGFD* (Fig. 4.3), procesamiento que requirió un tiempo de cálculo de 19.7s. Este perfil puede ser considerado como la estimación más precisa del error en el frente de onda del espejo de pruebas que esta investigación es capaz de producir ya que su gradiente es obtenido a través de un método que emplea el modelo matemático ideal para describir sus observaciones (cuando se compara con el *MSEGFD*) y, al mismo tiempo, hace uso de una mayor cantidad de información (imágenes) para producir tales resultados (en comparación con el *MEGBD*).

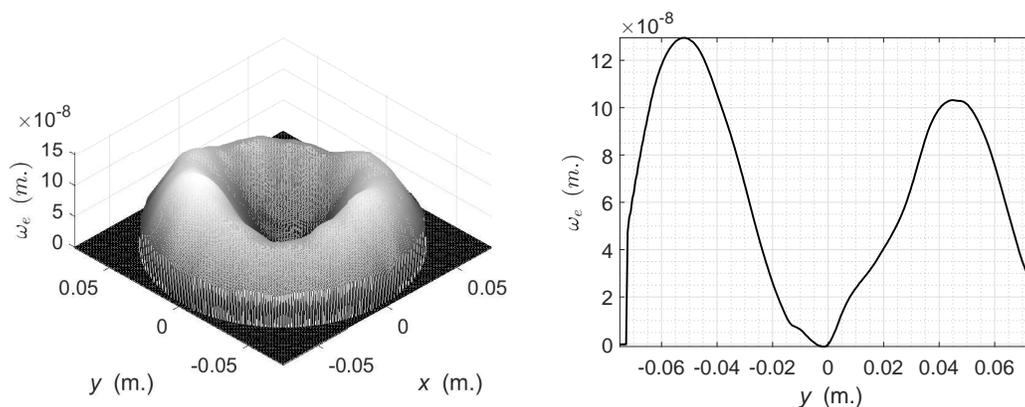


Figura 4.11: Perfil obtenido con la *FCCR-MGCL* a partir del gradiente estimado con el *MEGFD* aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje *y* [derecha].

Por supuesto, este par de características antes mencionadas también constituyen su principal desventaja debido a que la complejidad del ajuste sigmoideal y la gran cantidad de muestras que constituyen cada perfil de transición de estado de iluminación respectivo impactan severamente su desempeño. En conclusión, esta técnica podría ser descrita como la metodología más precisa, pero también la más lenta, de todas las propuestas.

Ahora bien, en la Fig. 4.12 aparece el perfil de las aberraciones resultante de integrar con la *FCCR-MGCL* los mapas de gradiente estimados con el *MEGFD-V3* (Fig. 4.4). Puesto que el tamaño de las matrices y con ello también de la pupila de salida del sistema es el mismo, los tiempos de ejecución del algoritmo de integración, en general, obviamente no presentarán una variación significativa. En este caso dicho procesamiento tomó alrededor de 20.9s., lo que corrobora lo antes mencionado.

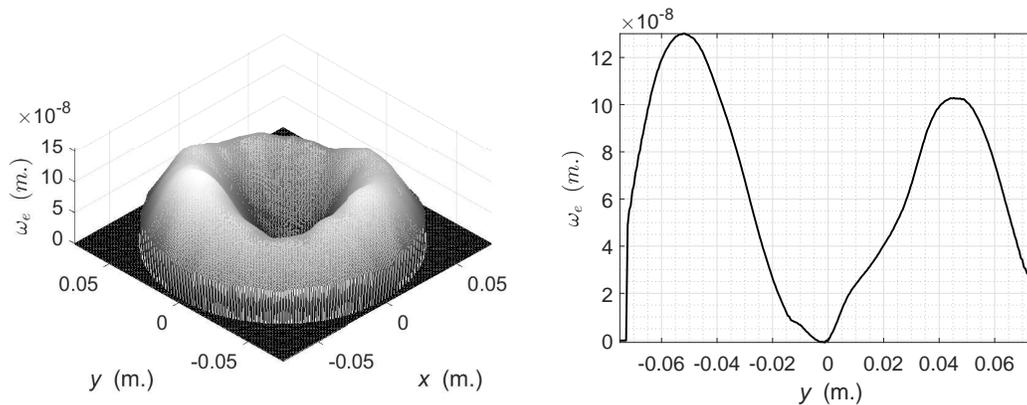


Figura 4.12: Perfil obtenido con la *FCCR-MGCL* a partir del gradiente estimado con el *MEGFD-V3* aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Puesto que este método de estimación de gradiente alternativo también hace uso del modelo de ajuste sigmoideal, sus resultados habrán de ser igualmente precisos que los de la técnica que lo antecede. En este caso la pérdida de exactitud evidentemente viene como consecuencia del proceso de enventanado empleado durante la estimación de las derivadas parciales. No obstante, como se corroboró en el capítulo anterior y también puede observarse en estos resultados, dadas las características propias del algoritmo de integración y el tamaño considerable

de las imágenes capturadas, la pérdida de precisión es insignificante y prácticamente inconsecuente para propósitos prácticos. De esta manera, se concluye que esta variante del *MEGFD* es la opción ideal para hacer uso de la metodología cuando se desea evitar a toda costa tiempos de cálculo excesivos.

Por su parte, con un tiempo de ejecución de 17.8s., en la Fig. 4.13 se observa el perfil estimado por la *FCCR-MGCL* a partir del gradiente obtenido con el *MSEGFD* (Fig. 4.6). Esta segunda variante del *MEGFD* puede ser considerada como la forma definitiva de la *PCF* ya que exhibe una precisión prácticamente idéntica a la del procedimiento original y, al mismo tiempo, es inclusive más eficiente que el *MEGFD-V3*.

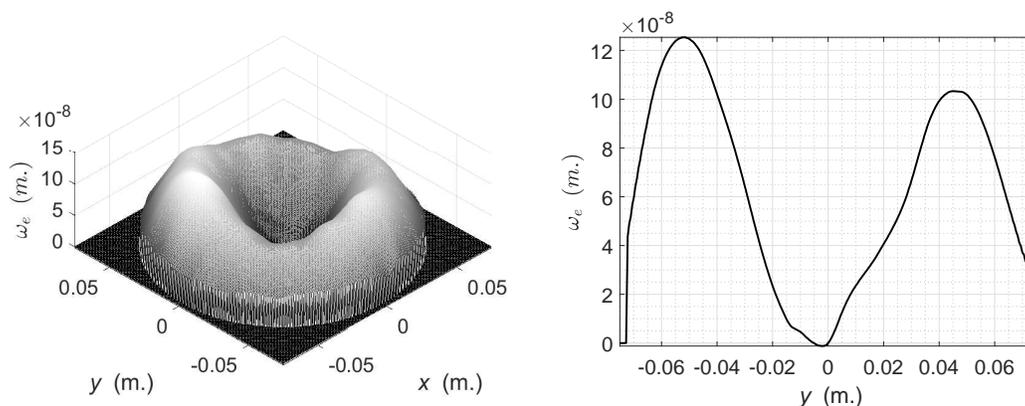


Figura 4.13: Perfil obtenido con la *FCCR-MGCL* a partir del gradiente estimado con el *MSEGFD* aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Adicionalmente, esta técnica también precisa del algoritmo asociado más sencillo de todos los que se proponen en este trabajo, lo que la hace idónea para ser la primera en implementarse en un potencial prototipo autónomo. Esto no es un asunto menor, pues impulsaría drásticamente la diseminación estos métodos y con ello también la relevancia y trascendencia de la investigación misma.

Para finalizar, en la Fig. 4.14 se reporta el resultado obtenido por la *FCCR-MGCL* a partir de los campos de gradiente estimados con el *MEGBD* (Fig. 4.10). El algoritmo de integración requirió un procesamiento de cerca de 29.2s. En este caso, el tiempo de ejecución del código

difiere un poco con respecto a la duración de las estimaciones anteriores ya que el tamaño del birronchigrama capturado es bastante superior al de los foucaultgramas generados.

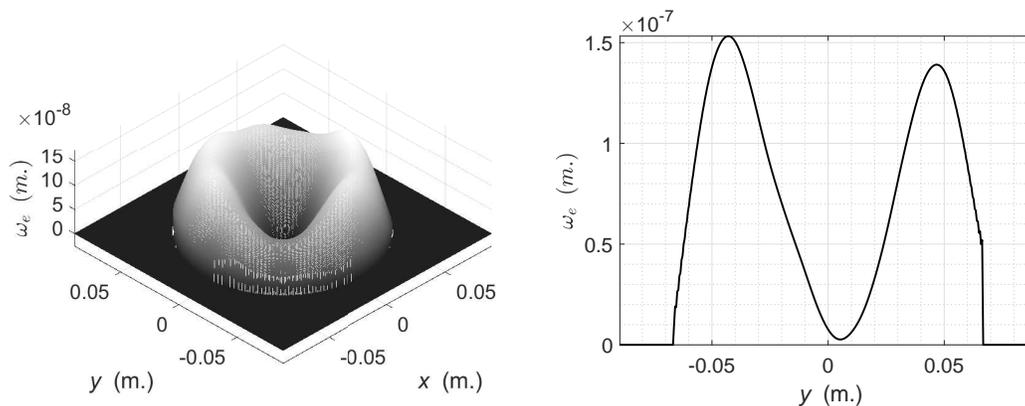


Figura 4.14: Perfil obtenido con la *FCCR-MGCL* a partir del gradiente estimado con el *MEGBD* aplicado a la serie experimental, así como una vista transversal del mismo a lo largo del eje  $y$  [derecha].

Como se ha discutido anteriormente, en este procedimiento el cálculo completo de gradiente del error en el frente de onda se realiza a partir de la información de fase contenida en una sola imagen, por lo que no es de extrañar que el grado de precisión global de esta metodología sea significativamente inferior al del resto de las técnicas presentadas, mismas que hacen uso de más de 100 muestras para lograr el mismo cometido.

Sin embargo, este sacrificio en precisión trae consigo también una serie de ventajas prácticas, especialmente si el método se plantea implementar en forma de un dispositivo totalmente integrado. A diferencia de los casos anteriores, el prototipo asociado obviamente no solo requeriría de una mucho menor cantidad de memoria para almacenar las muestras capturadas, sino que también sería considerablemente menos complejo, desde el punto de vista mecánico, ya que la pantalla de modulación (rejillas cruzadas) únicamente se desplaza a través del eje óptico ( $z$ ), mientras que el filo de la navaja debe hacer lo propio a lo largo de dos direcciones perpendiculares ( $x$  e  $y$ ). Desde luego, siempre se puede optar por rotar el espécimen siendo analizado para evitar la necesidad de una segunda orientación ortogonal de la navaja,

no obstante, en la práctica esto resulta engorroso y además representa una fuente potencial de errores mecánicos y/o humanos.

Por lo tanto, solamente resta contraponer los resultados obtenidos al analizar el espejo de pruebas con otra técnica de caracterización confiable para hacer válida la puesta en práctica de las metodologías presentadas en este trabajo.

## 4.7 Estimación del error en el frente de onda mediante interferometría

A decir verdad, al tratarse de dos técnicas con fundamentes teóricos tan dispares, la semejanza entre los resultados conseguidos por la *PCF* y la *PCR* ya constituye en sí un especie de proceso de “auto-validación” para la presente investigación. Sin embargo, también es importante comparar sus capacidades y limitaciones con respecto a una técnica de caracterización óptica moderna y certificada, especialmente si esto involucra un instrumento comercial.

Como corresponde, en la Fig. 4.15 se reportan los resultados técnicos alcanzados por un interferómetro de Fizeau modelo Wyko 6000 al analizar el espejo de pruebas. Como se observa, este perfil de aberración se corresponde de buena manera en términos de morfología general con los resultados obtenidos con las metodologías propuestas.

No obstante, una métrica más conveniente y definitiva que evidencia de forma irrefutable la semejanza entre los resultados alcanzados por cada una de las técnicas presentadas es la relación *P-V*. Por este motivo, en la Fig. 4.16 se muestra una vista transversal a lo largo del eje *y* extraída del perfil anterior, misma que exhibe una relación *P-V* de alrededor de  $155nm.$ , o en otras palabras, aproximadamente  $\lambda/4$  (suponiendo  $\lambda \approx 633nm.$ )

Este valor de hecho es muy cercano al pico de amplitud que presentan cada uno de los perfiles transversales respectivos obtenidos con cada una de las diversas metodologías propuestas (Figs. 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14), lo cual otorga un panorama claro del grado de precisión que estas técnicas son capaces de conseguir en la práctica.

Naturalmente, tal nivel de resolución no sorprende en lo absoluto cuando se conoce que proviene de una técnica de caracterización óptica que de hecho representa el estado del arte en

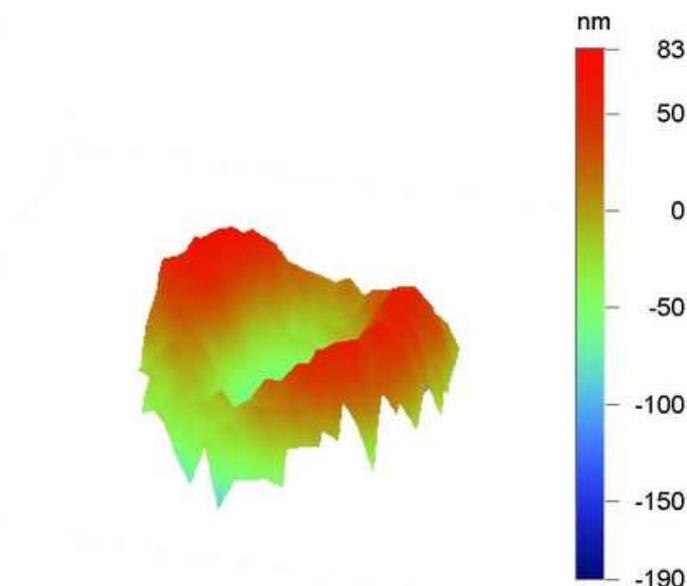


Figura 4.15: Perfil de las aberraciones en el espejo de pruebas obtenido por el análisis interferométrico.



Figura 4.16: Vista transversal a lo largo del eje  $y$  del perfil de las aberraciones en el espejo de pruebas obtenido por el análisis interferométrico.

el ramo. Sin embargo, estos resultados son objetivamente sobresalientes cuando se valora en su justa medida que fueron logrados haciendo uso de metodologías que se basan exclusivamente en la captura y procesamiento digital de mapas de sombras y franjas de las pruebas clásicas de

Foucault y Ronchi, técnicas que hoy en día a menudo son totalmente descartadas en nuestro campo o inclusive han sido olvidadas.

De esta forma, finalmente se han validado apropiadamente todos los métodos para el análisis de espejos focalizadores propuestos. Estas metodologías pueden ser reproducidas fácilmente en la práctica y también ser empleadas de manera confiable durante el delicado proceso de figuración de espejos primarios. Adicionalmente, no debe pasarse por alto que estas técnicas renovadas manifestaron un grado de precisión aceptable como para ser implementadas a manera de pruebas ópticas de caracterización complementarias tanto en la investigación científica como en la fabricación industrial.

## Capítulo 5

# Conclusión

En la presente investigación se re-interpretaron y posteriormente re-formularon la mayor parte de los aspectos teórico-prácticos de dos de las técnicas más importantes de la familia de Schlieren. Dicho análisis tuvo como propósito fundamental la propuesta de nuevos algoritmos de procesamiento digital de imágenes capaces de estimar el gradiente del error en el frente de onda de un espejo cóncavo a través de estos patrones de sombras y franjas básicos. Como corresponde, tales metodologías fueron complementadas con un algoritmo de integración apropiado, constituyendo así métodos de caracterización de superficies ópticas renovados y competentes.

En el caso de la prueba “del filo de la navaja” de Foucault, la estimación precisa del gradiente se logró mediante la generación y captura de una serie suficiente de foucaultgramas desplazados, a partir de la cual se extrajeron los perfiles de transición de estado de iluminación respectivos. Estas curvas de datos fueron debidamente ajustadas en primera instancia a un modelo sigmoideal y más tarde a uno lineal, todo con la finalidad de calcular de manera exacta el punto de inflexión de cada perfil de intensidad de iluminación en cuestión, mismo que se relaciona directamente con el valor de la derivada parcial en dicho píxel. La función sigmoide demostró ser el modelo ideal para describir este tipo de observaciones, no obstante, también acusó una notable baja eficiencia al requerir de minimizaciones no lineales para su solución. Por su parte, el modelo lineal, al tratarse de una función más simple, comparativamente manifestó un desempeño muy superior en lo que a tiempo de procesamiento se refiere, ganancia que evidentemente vino a cambio de un ligero sacrificio en términos de precisión.

Para la prueba “de la rejilla” de Ronchi, un solo birronchigrama con defoco constituyó información suficiente para realizar la estimación de ambas derivadas parciales del error en el frente de onda, lo cual se logró por medio de las operaciones comunes de transformación de dominio de Fourier, filtrado espacial y desenvolvimiento de fase, respectivamente. Estas meticolosas mediciones de fase basadas en el análisis de Fourier se vieron regidas por el valor de la frecuencia portadora espacial presente en la muestra, misma que es inducida por el coeficiente de defoco asociado a la posición relativa de la pantalla de modulación a lo largo del eje óptico durante su captura. Si bien es cierto que la precisión general de esta metodología palidece en comparación con la de la anteriormente discutida, no se debe pasar por alto que esta estimación de gradiente es lograda a partir de una sola muestra experimental, en contraposición a las docenas o cientos que son requeridas en el caso de la técnica precedente.

Una vez en posesión de este tipo de información cuantitativa acerca del frente de onda de la pieza siendo analizada, se procedió a realizar la integración correspondiente de dichos campos de gradiente. Este proceso fue llevado a cabo haciendo uso de un algoritmo iterativo con base en la teoría de regularización, mismo que, entre otras cosas, es capaz de delimitar la *ROI* de datos significativos a integrar de forma intuitiva y eficiente. De esta forma, fue posible disminuir apreciablemente la propagación de errores durante esta etapa complementaria y, con ello, alcanzar resultados finales que se acercaran más fielmente a los reportados por el método de análisis interferométrico que se aplicó como prueba de validación.

En resumidas cuentas, las metodologías aquí presentadas desacreditan de manera contundente la percepción tradicional que se tiene acerca de las pruebas de la familia de Schlieren, las cuales generalmente son consideradas como técnicas de análisis de naturaleza puramente cualitativa o, en otras palabras, enteramente subjetivas, y cuya aplicación está únicamente destinada al ámbito amateur. Tanto la *PCF* como la *PCR* no solo demostraron ser, como era de esperarse, procedimientos inherentemente más sencillos y substancialmente más asequibles que el análisis interferométrico, sino que también consiguieron un grado de precisión suficiente como para ser usadas de manera confiable en la investigación científica y la fabricación industrial.

No obstante, a pesar de que los resultados obtenidos con los métodos teórico-prácticos aquí propuestos se corresponden adecuadamente con los alcanzados por otra técnica de caracterización validada, especialmente en el caso de aplicaciones de alta precisión, se recomienda diseñar e implementar aparatos de pruebas mejorados en los cuales sea posible controlar y monitorear en todo momento la alineación exacta del arreglo óptico de forma eficaz y precisa. Esto traerá consigo un aumento importante en la resistencia de los procedimientos ante los errores de pose tales como el tilt (inclinación). Adicionalmente, también queda pendiente la propuesta y desarrollo de un algoritmo de integración superior capaz de recuperar de mejor manera los detalles finos de alta frecuencia que se observan en el perfil de aberración reportado por la técnica interferométrica. Esto viene como resultado de que cualquier método iterativo de optimización numérica tenderá a exhibir un comportamiento similar al de un filtro pasa-bajos, lo que, como ocurrió en nuestro caso, suaviza considerablemente el relieve estimado de la superficie óptica analizada.

## Referencias

- [1] J. Texereau, *How to Make a Telescope* (Interscience Publishers, New York, USA, 1957).
- [2] L. Noethe, “History of mirror casting, figuring, segmentation and active optics,” *Exp. Astron.* **26**, 1–18 (2009).
- [3] D. A. Harbour, *Understanding Foucault* (Netzari Press, USA, 2008).
- [4] D. Malacara, *Optical Shop Testing* (John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 2007), 3rd ed.
- [5] D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing* (Taylor & Francis, Boca Raton, USA, 2005), 2nd ed.
- [6] S. C. B. Gascoigne, “The theory of the foucault test,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **104**, 326–334 (1944).
- [7] E. H. Linfoot, “Astigmatism under the foucault test,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **105**, 193–199 (1945).
- [8] E. H. Linfoot, “A contribution to the theory of the foucault test,” *Proc. R. Soc. A* **186**, 72–99 (1946).
- [9] E. H. Linfoot, “On the theory of the zonal foucault test,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **108**, 428–445 (1948).
- [10] E. H. Linfoot, “On the interpretation of the foucault test,” *Proc. R. Soc. A* **193**, 248–259 (1948).
- [11] E. H. Linfoot, “The Foucault test,” *Recent Advances in Optics* (Oxford), Chap. II, 128–174 (1958).
- [12] W. T. Welford, “A note on the theory of the foucault knife-edge test,” *Opt. Commun.* **1**, 443–445 (1970).
- [13] S. Katzoff, “Quantitative determination of optical imperfections by mathematical analysis of the foucault knife-edge test pattern,” *Tech. Note D-6119*, NASA (1971).

- [14] R. G. Wilson, "Wavefront-error evaluation by mathematical analysis of experimental foucault-test data," *Appl. Opt.* **14**, 2286–2297 (1975).
- [15] E. M. Granger, "Wave-front measurements from a knife-edge test," *Conf. Proc. SPIE* **429**, 174–177 (1983).
- [16] R. Barakat, "General Diffraction Theory of Optical Aberration Tests, from the Point of View of Spatial Filtering," *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 1432–1439 (1969).
- [17] J. Bescos and L. R. Berriel-Valdos, "Foucault test in white light imagery," *Opt. Com.* **57**(1), 10–15 (1986).
- [18] B. J. Pernick, "Two-dimensional light-distribution measurement with a 90° cornered knife edge," *Appl. Opt.* **32**, 3610–3613 (1993).
- [19] D. Malacara and A. Cornejo, "Null Ronchi Test for Aspherical Surfaces," *Appl. Opt.* **13**, 1778–1780 (1974).
- [20] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodriguez and O. Cardona-Nunez, "Null Hartmann and Ronchi-Hartmann tests," *Appl. Opt.* **29**, 4618–4621 (1990).
- [21] J. Schwider, "Single sideband Ronchi test," *Appl. Opt.* **20**, 2635–2642 (1981).
- [22] T. Yatagai, "Fringe scanning Ronchi test for aspherical surfaces," *Appl. Opt.* **23**, 3676–3679 (1984).
- [23] K. Omura and T. Yatagai, "Phase measuring Ronchi test," *Appl. Opt.* **27**, 523–528 (1988).
- [24] K. Patorski and A. Cornejo-Rodriguez, "Fringe contrast interpretation for an extended source Ronchi test," *Appl. Opt.* **25**, 2790–2795 (1986).
- [25] J. Ojeda-Castañeda and L. R. Berriel-Valdos, "Classification scheme and properties of schlieren techniques," *Opt. Exp.* **18**(19), 3338–3341 (1979).
- [26] D. E. Vandenberg, W. D. Humbel, and A. Wertheimer, "Quantitative evaluation of optical surfaces by means of an improved foucault test approach," *Opt. Eng.* **32**, 1951–1954 (1993).
- [27] H. B. Cheng, Y. Yam, and H. Tong, "A quantitative knife-edge testing method for local deformation evaluation in optical aspheric fabrication," in "Proceedings of the 3rd Annual IEEE Conference on Automation Science and Engineering," (IEEE, Scottsdale, AZ, USA, 2007), pp. 818–822.
- [28] B. Zou, H. Zhao, and Y. Zhang, "In-situ measurement of the deformation of the off-axis parabolic mirror with large aperture," in "8th IEEE International Symposium on Instrumentation and Control Technology (ISICT)," (IEEE, London, England, 2012), pp. 215–218.

- [29] D. Malacara, "Analysis of the interferometric Ronchi test," *Appl. Opt.* **29**, 3633–3637 (1990).
- [30] H. Schreiber and J. Schwider, "Lateral shearing interferometer based on two Ronchi phase gratings in series," *Appl. Opt.* **36**, 5321–5324 (1997).
- [31] B. Hao, M. Shan, Z. Zhong, M. Diao and Y. Zhang, "Common-path interferometer with four simultaneous phase-shifted interferograms using ronchi grating and cube beam-splitter," *Opt. and Lasers in Eng.* **51**, 1278–1282 (2013).
- [32] A. Cordero-Dávila, J. Díaz-Anzures and V. Cabrera-Peláez, "Algorithm for the simulation of ronchigrams of arbitrary optical systems and Ronchi grids in generalized coordinates," *Appl. Opt.* **41**, 3866–3873 (2002).
- [33] D. Aguirre-Aguirre, R. Izazaga-Pérez, F.S. Granados-Agustín, B. Villalobos-Mendoza, M.E. Percino-Zacarías and A. Cornejo-Rodríguez, "Algorithm for Ronchigram recovery with random aberrations coefficients," *Opt. Eng.* **52**, 053606 (2013).
- [34] A. Cordero-Dávila and J. González-García, "Optical surface evaluation by correlating bi-Ronchigram images," *Opt. Eng.* **54**, 034108 (2015).
- [35] G. Rodríguez, J. Villa, R. Ivanov, E. González and G. Martínez, "Foucault test: a quantitative evaluation method," *J. Opt. Soc. Am. A* **33**(8), 1604–1611 (2016).
- [36] G. Rodríguez, *Procesamiento digital de imágenes para el análisis cuantitativo de la prueba de Foucault*, (Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Universidad Autónoma de Zacatecas, 2015).
- [37] J. Villa, G. Rodríguez, I. de la Rosa, R. Ivanov, T. Saucedo and E. González, "Foucault test: shadow-gram modeling from the physical theory for quantitative evaluations," *J. Opt. Soc. Am. A* **31**(12), 2719–2722 (2014).
- [38] G. Rodríguez, J. Villa, G. Martínez, I. de la Rosa and R. Ivanov, "Towards the automatization of the foucault knife-edge quantitative test," in: *Proc. Third International Conference on Applications of Optics and Photonics*, 104531T (2017).
- [39] J. Villa, G. Rodríguez, R. Ivanov and E. González, "Regularized quadratic cost-function for integrating wave-front gradient fields," *Opt. Lett.* **41**(10), 2314–2317 (2016).
- [40] G. Rodríguez, J. Villa, R. Ivanov, I. de la Rosa and J. L. Flores, "Bironchigram processing method for quantitative evaluation of optical focusing mirrors," *Opt. and Lasers in Eng.* **113**(2), 47–54 (2019).
- [41] T. C. Poon and K. B. Doh, "On the Theory of Optical Hilbert transform for incoherent objects," *Opt. Exp.* **15**(6), 3006–3011 (2007).
- [42] F. W. King, "Hilbert Transforms," *Encyclopedia of Mathematics and Applications* (Cambridge University), 145–251 (2009).

- [43] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill Companies, New York, USA, 1996), 2nd ed.
- [44] A. Cordero-Dávila, E. Luna-Aguilar, S. Vázquez-Montiel, S. Zárate-Vázquez, and M.E. Percino-Zacarias, “Ronchi test with a square grid,” *Appl. Opt.* **37**, 672–675 (1998).
- [45] J. Villa, M. Araiza, D. Alaniz, R. Ivanov and M. Ortiz, “Transformation of phase to (x,y,z)-coordinates for the calibration of a fringe projection profilometer,” *Opt. and Lasers in Eng.* **50**(2), 256–261 (2012).
- [46] R. Legarda-Saenz and A. Espinosa-Romero, “Wavefront reconstruction using multiple directional derivatives and fourier transform,” *Opt. Eng. Lett.* **50**, 040501 (2011).
- [47] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization* (Springer, New York, USA, 1999), 1st ed.