

## APROXIMACIÓN A LA RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA ÓPTICA DE OBJETOS DE FASE SUAVES USANDO POLINOMIOS CHEBYSHEV

Miguel Eduardo Pinedo Vega, Juan Carlos Cardona Valdez, José Guadalupe Arceo Olague, Tonatiuh Saucedo Anaya, José Ismael de la Rosa Vargas.

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica, Maestría en Ciencias de la Ingeniería,  
Carretera a la Bufa No 1, Col. Centro. C.P. 98000  
Zacatecas, Zac., México.

e-pinedo@hotmail.com

### RESUMEN

En este artículo se presenta la reconstrucción de la imagen de la sección transversal de un objeto de fase usando técnicas de tomografía óptica, partiendo de la imagen de un interferograma sin portadora y un sistema óptico en configuración Mach-Zehnder. La reconstrucción se realiza usando polinomios Chebyshev como funciones base y el objeto de fase cumple las características de ser suave, continuo y radialmente simétrico.

*Palabras clave:* Tomografía óptica, interferometría, inversión de Abel, fase.

### ABSTRACT

In this paper is presented the reconstruction of a cross section of a phase object using techniques of optical tomography. It's used an interferogram without carrier and a Mach-Zehnder interferometer. The reconstruction is realized using Chebyshev polynomials as basis functions and the phase object is smooth, continuous and with radial symmetry.

*Keywords:* Optical tomography, interferometry, Abel inversion, phase.

### 1. INTRODUCCIÓN

La tomografía óptica es una técnica de reconstrucción no destructiva y no invasiva para obtener la distribución de los cambios en el índice de refracción de una sección transversal de un objeto de fase [1]. La tomografía se basa en dos principios fundamentales: la obtención de proyecciones y la reconstrucción a partir de éstas. Si el objeto de estudio es radialmente simétrico, solo es necesaria una proyección. La proyección es formada por un conjunto de rayos conocidos como rayos suma, y la reconstrucción se puede llevar a cabo usando métodos clásicos como la retroproyección filtrada o reconstrucción algebraica [2].

Los métodos algebraicos se basan en la representación matricial del conjunto de proyecciones, la combinación lineal de la matriz de proyecciones y la matriz de la sección transversal del objeto. Estos métodos son muy costosos en tiempo y es necesario un gran esfuerzo para reconstruir tan sólo una línea de información.

En este trabajo se presenta la reconstrucción tomográfica de la sección transversal de un objeto de fase circularmente simétrico usando un método basado en el uso de funciones base [3], tomando para este propósito al conjunto de polinomios Chebyshev.

La proyección se toma a partir de un interferograma obtenido por medio de un sistema óptico interferométrico en configuración Mach-Zehnder y el objeto de fase cumple las siguientes características: es suave, continuo y radialmente simétrico.

### 2. PRINCIPIOS TEÓRICOS

Los sistemas interferométricos tienen una gran cantidad de aplicaciones metrológicas como las usadas para medir cantidades físicas a partir de los cambios de índice de refracción relacionados a gradientes de presión, temperatura, deformaciones, entre otras. Para obtener esta información se debe procesar un patrón de franjas las cuales están moduladas en fase por la cantidad física a medir. La intensidad de un interferograma se representa matemáticamente:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos(2\pi f_0 x + \phi(x, y)) \otimes \eta \quad (1)$$

Donde  $a(x, y)$  es la iluminación de fondo,  $b(x, y)$  es la modulación de amplitud,  $\phi(x, y)$  es la fase del frente de onda asociada a la magnitud física que se desea conocer,  $f_0$  es la frecuencia de la portadora y  $\eta$  es el ruido donde  $\otimes$  indica que puede ser aditivo o multiplicativo. La ecuación (1) representa la interferencia de dos frentes de onda que generan un patrón de franjas con una frecuencia portadora  $f_0$ . En el caso de que  $f_0 = 0$  la ecuación de interferencia cambia a la forma de la ecuación (2).

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos(\phi(x, y)) \otimes \eta \quad (2)$$

Tanto con interferograma con portadora como sin portadora es posible obtener la fase.

Si se considera a  $\Phi$  como la longitud de camino óptico de un campo transparente no homogéneo, se puede expresar como la relación (3)

$$\Phi = \int_C n ds \quad (3)$$

donde ésta es la integral del índice de refracción  $n$  del objeto transversal a lo largo del contorno  $C$ . Si el efecto de la refracción no es intenso, entonces es posible modelar la longitud de camino óptico en términos de integrales de línea. Bidimensionalmente se puede expresar como la ecuación (4).

$$\Phi(X, Y) = \int_L n(x, y) dL \quad (4)$$

Como los interferogramas generalmente se basan en la superposición de dos frentes de onda, la magnitud de interés es la diferencia de camino óptico cuya relación, a lo largo del eje  $z$ , está dada por la ecuación (5):

$$\Delta\Phi(X, Y) = \int_z [n_0 - n(x, y)] dz = N(x, y)\lambda \quad (5)$$

siendo  $n_0$  el índice de refracción del medio,  $\lambda$  la longitud de onda y  $N$  el orden de las franjas del interferograma. La diferencia de camino óptico se puede obtener a partir de la fase del interferograma usando la siguiente relación:

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\Phi(X, Y) \quad (6)$$

Es posible describir  $\Delta\Phi$  en términos de la transformada de Radon, ya que  $\phi$  equivale a la proyección del objeto de fase, además como el objeto de estudio es radialmente o cuasi radialmente simétrico también se puede describir en términos de la transformada de Abel expresada en la ecuación (7):

$$\Delta\Phi(X) = 2 \int_x^\infty \frac{n(r)r}{\sqrt{r^2 - X^2}} dr \quad (7)$$

donde  $r$  es la coordenada radial  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ .

### 3. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Como objetos de fase radialmente o cuasi radialmente simétricos se puede mencionar la temperatura de una flama o cautín, campos de flujo aerodinámicos y el flujo de gases comprimidos en túneles y tuberías, la densidad de gases químicos e inclusive la temperatura de líquidos [4][5].

El interferómetro en configuración Mach-Zehnder cumple las condiciones para obtener la diferencia de fase. Este sistema se basa en la superposición de dos frentes de onda planos con la misma longitud de camino óptico. Si en uno de los brazos del sistema se coloca un objeto de fase suave, entonces el frente de onda es distorsionado. El sistema experimental consiste en una fuente de luz coherente expandida y colimada, un divisor que separa el haz en dos caminos ópticos ortogonales, un par

de espejos para direccionar los haces y hacerlos superponer en un segundo divisor de haz. Esta configuración se muestra en la figura 1.

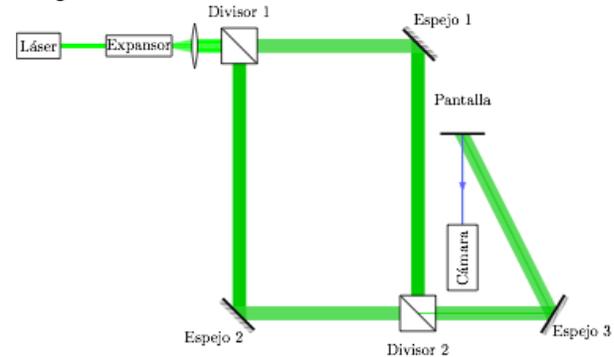


Fig. 1. Interferómetro de Mach-Zehnder

Una vez generado el interferograma, una cámara registra la imagen para su posterior procesamiento.

## 4. RECONSTRUCCIÓN USANDO FUNCIONES DE CHEBYSHEV

### 4.1. Algoritmo de reconstrucción

Los algoritmos de reconstrucción están basados en la inversión de matrices; sin embargo, bajo las condiciones de simetría descritas anteriormente, es posible generar la inversión de la transformada de Abel en el espacio vectorial  $R^1$  lo que simplifica el problema y el tiempo de programación.

Asumiendo el perfil del objeto como  $n(r)$ , estas pueden ser aproximadas por un conjunto de  $k$  funciones base  $f_i(r)$  y unos pesos numéricos  $w_i$  por lo tanto se puede representar el perfil como la combinación lineal descrita por:

$$n(r) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(r) \quad (8)$$

Si se considera  $N(x)$  como los puntos representativos de la fase del interferograma, es viable a partir de estos puntos, obtener la diferencia de camino óptico  $\Delta\Phi$  interpolando los órdenes de las franjas. En consecuencia se puede describir a la diferencia de camino óptico relacionando las ecuaciones (6), (7) y (8)

$$\Delta\Phi = \mathcal{A} \left\{ \sum_{i=1}^k w_i f_i(r) \right\} = \sum_{i=1}^k w_i \mathcal{A}\{f_i(r)\} = \sum_{i=1}^k w_i F_i(r) \quad (9)$$

y en donde  $\mathcal{A}$  es la transformada de Abel.

Haciendo la representación matricial de la ecuación (9), el problema se reduce al cálculo de los pesos  $w_i$  que se obtiene dando solución al sistema lineal de la ecuación (10)

$$\Delta\Phi = FW \quad (10)$$

siendo posible encontrar la solución para el cálculo de los pesos a partir de la expresión (11):

$$W = F^{-1}\Delta\Phi \quad (11)$$

y una vez obtenidos los pesos  $w$ , estos se sustituyen en la expresión (8) para calcular el índice de refracción.

#### 4.2. Conjunto de funciones base Chebyshev

El método de reconstrucción generalmente se basa en el uso de funciones de base radial [6]; sin embargo, es posible usar cualquier conjunto ortogonal.

Los polinomios Chebyshev son una buena opción para la reconstrucción debido a que la programación es sencilla, y son muy utilizados para el diseño de filtros, aproximación de funciones e inclusive para el desenvolvimiento de fase [7].

La ecuación de recurrencia que describe a este conjunto de funciones y con las cuales se pueden generar en cualquier entorno de programación, se observa en la relación (12):

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (12)$$

donde

$$T_0(x) = 1 \quad (13)$$

y

$$T_1(x) = x \quad (14)$$

En la figura 2 se observa el comportamiento de los polinomios Chebyshev tipo 1 del primero al sexto orden:

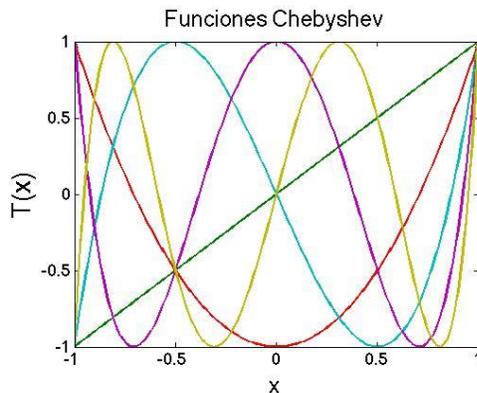


Fig. 2. Polinomios Chebyshev

Especificando las funciones base  $f_i(x)$  como funciones de Chebyshev  $T_i(x)$  la ecuación (9) se representa como (15),

$$\Delta\Phi = \mathcal{A} \left\{ \sum_{i=1}^k w_i T_i(r) \right\} \quad (15)$$

en la que con el sólo cálculo de los pesos  $w_i$  es posible reconstruir el campo transversal  $n(r)$ .

#### 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La aproximación algebraica de la transformada de Abel se deriva de la siguiente relación:

$$\Delta\Phi = 2w_i \sum_{j=1}^{I=1} T_i(r) \int_{X_j}^{X_{j+1}} \frac{X}{\sqrt{X^2 + X_i^2}} dX \quad (16)$$

con la solución de la integral en formato algebraico esta ecuación se expresa como:

$$w_i \sum_{j=1}^{I=1} A_{ij} T_i(r) = \frac{\Delta\Phi}{2\Delta X} \quad (17)$$

donde  $A_{ij}$  es la matriz de proyecciones que se genera a partir de la relación (18)

$$A_{ij} = \left\{ [(j+1)^2 - i^2] - (j^2 - i^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (18)$$

y con la cual se puede obtener la transformada de Abel de cada polinomio.

Para dar validez y ejemplificar el método de reconstrucción, este algoritmo se simuló sobre una ecuación analítica. Si se supone el perfil de un objeto de fase dado por la expresión (19) que se muestra en la figura 3

$$n(r) = e^{-r^2} + e^{-\frac{5r^2}{9}} \quad (19)$$

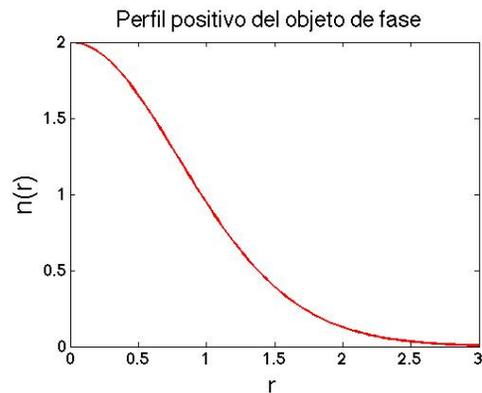


Fig. 3. Perfil simulado

a su vez se obtiene la proyección del objeto mediante la transformada de Abel  $N(x)$  como se observa en la figura 4.

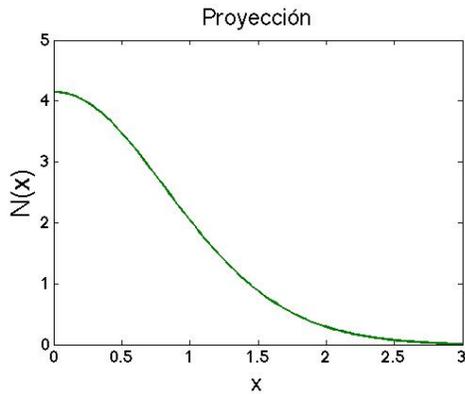


Fig. 4. Proyección

Posteriormente se generaron las cuatro funciones base de polinomios Chebyshev que se muestran en la figura 5

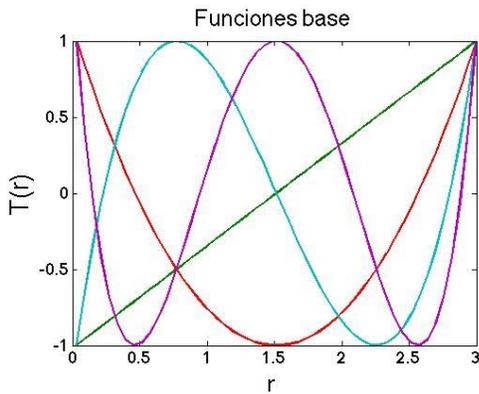


Fig. 5. Funciones base

y se aplicó la transformada de Abel a cada arreglo. Este paso se observa en la figura 6.

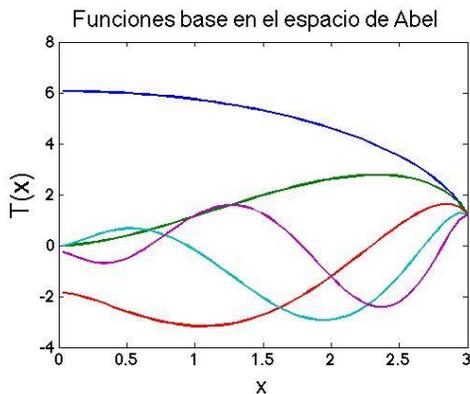


Fig. 6. Funciones base en el espacio de Abel

Finalmente se hizo el cálculo de los pesos y se generó la reconstrucción del perfil. La reconstrucción con 4 funciones base se observa en la figura 7.

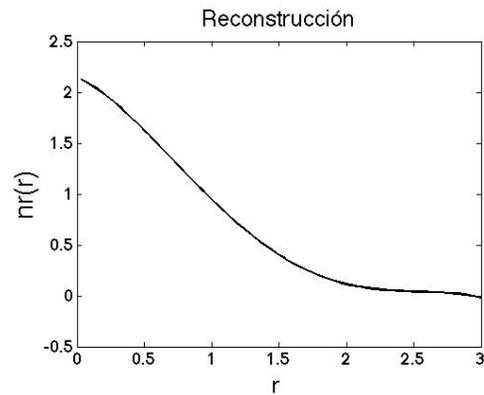


Fig. 7. Reconstrucción del perfil

Es posible observar que se tiene una buena aproximación y un error mínimo con muy pocas funciones base.

En la figura 8 se muestra el interferograma sin frecuencia portadora de una flama, donde los cambios de la temperatura de la flama se consideran como objetos de fase suaves y continuos. Este interferograma se generó usando una fuente de luz coherente con una longitud de onda  $\lambda = 532nm$ , y asumiendo un entorno con  $n_0 = 1.00025$ . Esta imagen se procesó con la finalidad de obtener la fase a partir de de las franjas formadas.

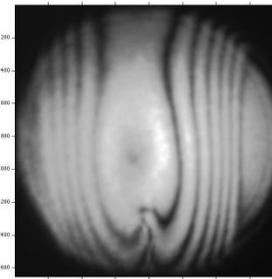


Fig. 8. Interferograma de una flama

Para obtener los órdenes del interferograma, este se binarizó y se adelgazó cada franja hasta quedar del ancho de un pixel [8]. Este proceso se contempla en la figura 9. Después se seleccionó el perfil positivo de la línea central de la imagen y a cada franja se le asignó un orden como lo propone Vest [1].

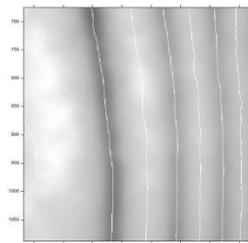


Fig. 9. Franjas procesadas

Con el conjunto de órdenes  $N$  y su posición en  $x$  mostrados en la figura 10, fue necesario aplicar un algoritmo de interpolación para generar la fase descrita en el interferograma.

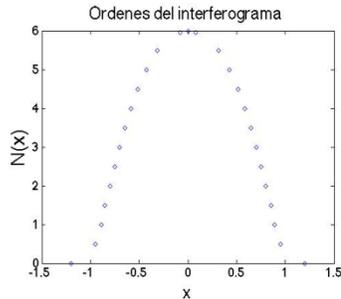


Fig. 10. Órdenes

La interpolación se aplicó usando el algoritmo de Burden para trazadores cúbicos numéricos [9], y de esta manera se conservaron las características de suavidad y continuidad del objeto de fase. El resultado de la interpolación es mostrado en la figura 11.

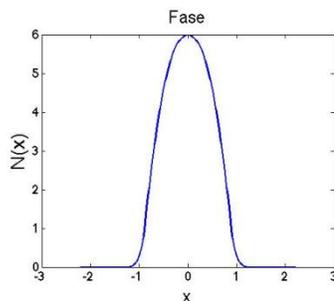


Fig. 11. Fase generada

Después con el uso de polinomios de Chebyshev como funciones base y con el algoritmo descrito en la sección anterior se reconstruyó el campo de gradientes de índice de refracción del objeto de fase. Este resultado se observa en la figura 12.

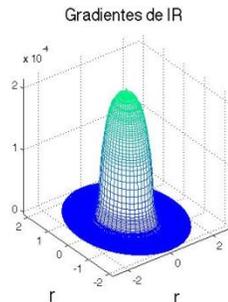


Fig. 12. Gradientes de índice de refracción

También al ser el objeto de fase la temperatura de una flama, éste se vinculó con la temperatura en grados centígrados por medio de la relación de Gladstone–Dale [1]. Los resultados se aprecian en la figura 13.

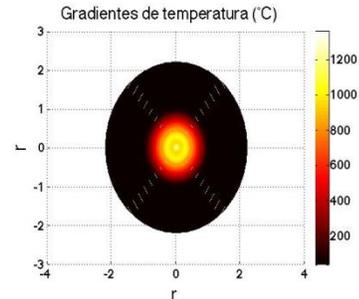


Fig. 13. Gradientes de temperatura

## 6. CONCLUSIÓN

El método de reconstrucción tomografía óptica por medio de polinomios Chebyshev es un algoritmo rápido y preciso. Las ecuaciones de recurrencia son sencillas de programar y bastante rápidas independientemente del número de funciones que se requieran. La interpolación de la fase permitió una mayor aproximación de ésta, a diferencia de que si sólo se hubieran tomado los puntos representativos (órdenes) del interferograma detectado. La reconstrucción se validó con una simulación numérica cuyos resultados mostrados fueron bastante aproximados a la función de prueba.

## 7. REFERENCIAS

- [1] C. M. Vest, *Holographic Interferometry*, New York, John Wiley & Sons, New York, 1979, 254-386.
- [2] S.R. Deans, *The Radon transform and some of its applications*, New York, John Wiley & Sons, 1983, 136-146.
- [3] E. De La Rosa, L. Berriel, E. Gonzalez, D. Alaniz, T. Saucedo, J. Villa, V. Torres, V. Castaño, An alternative approach to the tomographic reconstruction of smooth refractive index distributions, *J. Europ. Opt. Soc. Rap. Public*, Vol 8., 2013, 13036.
- [4] Thomas Kreis, *Handbook of Holographic Interferometry*, Bremen Germany, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005, 366-377.
- [5] F.Boudaoud and M. Lemerini, Using a Mach-Zehnder interferometer to deduce nitrogen density mapping, *Chin. Phys. B.*, vol. 24., 2015, 075205.
- [6] E. de la Rosa Miranda, L. R. Berriel Valdós, E. González Ramírez, C. A. Olvera O., T. Saucedo Anaya, J. G. Arceo Olague, I. de la Rosa Vargas, Fast flame temperature estimation using a point diffraction interferometer and non-negative least square method, *OPTIMESS*, 2015, 52.
- [7] E. de la Rosa, E. Gonzalez, J. G. Arceo, J. J. Villa, I. de la Rosa, T. Saucedo, L. R. Berriel, and N. Escalante, Phase Unwrapping using Chebyshev Polynomials, *Proc. of SPIE*. vol. 8785, (2013), 8785BA-1.
- [8] G. Pajares, J.M. de la Cruz, *Visión por computadora*, Madrid, Alfaomega, 2002, 267-285.
- [9] R. L. Burden y J. D. Faires, *Análisis numérico*, Math Learning, 2001, 141-147.