

Algunas alternativas a la transformada wavelet para la compresión y restauración de señales n-dimensionales

José Ismael de la Rosa, Jesús Villa, Gerardo Miramontes, Ma. Auxiliadora Araiza, Enrique de la Rosa y Efrén González

Resumen— Este trabajo tiene como finalidad presentar un conjunto de nuevas herramientas utilizadas para la restauración y compresión de señales. El análisis mediante la Transformada en Ondículas (TO) o Wavelets ha crecido a grandes pasos gracias a su aplicabilidad en diferentes áreas. Uno de los casos que había preocupado bastante era la inconsistencia de la TO para señales bidimensionales, pues la TO no es capaz de mapear adecuadamente discontinuidades a lo largo de una línea $L^2(\mathbf{R})$ o curva en un espacio $L^2(\mathbf{R})$, tal es el caso de los contornos (cerrados o abiertos). Con la finalidad de atacar este problema D. Donoho de la Universidad de Stanford y su equipo de trabajo se han dado a la tarea de proponer nuevas transformaciones que recurren al uso mismo de la teoría de ondículas, estas nuevas herramientas de análisis son conocidas como ridgelets, curvelets, beamlets, contourlets, bandelets, brushlets, y otros más.

Palabras Clave— Compresión, Curvelets, Wavelets, Restauración, Ridgelets.

I. INTRODUCCION

Las transformadas Ridgelet y Curvelet son dos alternativas recientes utilizadas para las representaciones de sistemas multiescala. Se pueden emplear tanto para filtrado de señales como para la compresión. La transformada ridgelet fue introducida en el trabajo de tesis de E. Candès en 1998 (Candès, 1998) bajo la supervisión de D. Donoho. Dicha transformada fue introducida como una expansión de funciones esparcidas en espacios continuos que son lo suficientemente regulares (smoothness condition), lo cual permite alejarse de posibles discontinuidades [3], [4], [5], [7], [11]. La transformada ridgelet discreta se obtiene para señales de tamaño finito y tiene un vínculo especial con la transformada de Radón finita (FRAT) [9].

En el caso del procesamiento de imágenes muchas de las tareas aprovechan representaciones esparcidas de los datos en donde se desea empaquetar un máximo de información en un mínimo de muestras. La elección más actual es la utilización de la transformada en ondículas o wavelets. El éxito en la utilización de bases en ondículas se debe a que es posible alcanzar grandes desempeños utilizando funciones regulares por segmentos o átomos, y sobre todo para casos de señales unidimensionales [15]. En el caso bidimensional, existen mayores restricciones debido a la existencia de singularidades (las regiones de regularidad están separadas por contornos) y hay que hacer manipulaciones para poder llevar a cabo la obtención de ondículas bidimensionales o n-dimensionales que permitan estabilidad a la transformación.

Una alternativa a la debilidad de las ondículas antes mencionada es la utilización de una representación llamada ridgelets que trata de manera más efectiva las singularidades que se presentan en dos dimensiones (2-D). La idea principal es “mapear” las líneas de singularidades en singularidades puntuales utilizando para ello la transformada de Radón. Enseguida, se aplica la transformada en ondículas (unidimensional) la cual sí puede manipular de forma eficaz las singularidades puntuales que se encuentran en el dominio de Radón.

En lo que se refiere a la transformada Curvelet [5], [6], [7], [8], [16] y [17], ésta es aún más reciente y también es de gran utilidad en el análisis multiresolución (Análisis multiresolución y análisis geométrico de forma simultánea). La ventaja de ésta sobre la transformada en ondículas, es que se pueden representar de mejor manera los objetos con contornos (discontinuidades bidimensionales). Esta transformada tiene muchas similitudes con la transformada en ondículas, pero también tiene algunas diferencias, entre ellas se encuentra un escalamiento anisotrópico (el de las ondículas es isotrópico). Su base está compuesta por diferentes etapas, y en éstas interviene el uso de ridgelets (monoescala y multiescala).

II. TRANSFORMADAS RIDGELET Y CURVELET

A. Transformada Ridgelet

Transformada ridgelet continua [3]: Dada una función bivariable $f(x)$ e integrable, su transformada ridgelet continua (*Continuous ridgelet transform - CRT*) en el espacio bidimensional $x \in \mathbf{R}^2$, esta definida por (ecuación de análisis):

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbf{R}^2} \psi_{a,b,\theta}(x) f(x) dx \quad (1)$$

en donde θ indica el ángulo según la posición radial de un punto $x: (x_1, x_2)$ en el espacio \mathbf{R}^2 y las ridgelets $\psi_{a,b,\theta}(x)$ en dos dimensiones se definen a partir de una función de tipo ondícula $\psi(x)$ de una dimensión de la siguiente forma:

$$\psi_{a,b,\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b}{a}\right) \quad (2)$$

Puede compararse con la transformada bidimensional en ondículas separable, la cual está dada por:

$$W_f(a_1, a_2; b_1, b_2) = \int_{\mathbf{R}^2} \psi_{a_1, a_2; b_1, b_2}(x) f(x) dx, \quad (3)$$

en donde las ondículas bidimensionales se forman a partir de un producto tensorial

$$\psi_{a_1, a_2; b_1, b_2}(x) = \psi_{a_1, b_1}(x_1) \psi_{a_2, b_2}(x_2), \quad (4)$$

de ondículas unidimensionales,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (5)$$

Ambas transformadas son similares, pero los parámetros puntuales b_1 y b_2 se intercambian por los parámetros de línea b y θ . Las dos transformadas multiescala se relacionan según los siguientes argumentos:

Ondículas : $\psi_{\text{escala, posición puntual}}$

Ridgelets : $\psi_{\text{escala, posición lineal}}$

Ondículas : Eficientes para modelar objetos con singularidades puntuales aisladas.

Ridgelets : Eficientes para modelar objetos con singularidades a lo largo de una línea.

En forma general, se puede considerar que las ridgelets representan una concatenación de ondículas unidimensionales a lo largo de las líneas o contornos de objetos. En un espacio bidimensional, los puntos y las líneas se relacionan mediante una transformación de Radón, por lo que la transformada en

ondículas y la transformada ridgelet se relacionan mediante la misma transformación, la cual está dada por:

$$R_f(\theta, t) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) \delta(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - t) dx, \quad (6)$$

y entonces,

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbf{R}} \psi_{a,b}(t) R_f(\theta, t) dt. \quad (7)$$

La Figura 1 muestra los mapeos que se llevan a cabo entre los diferentes dominios: dominio frecuencial, dominio espacial, dominio de Radón y el dominio ridgelet.

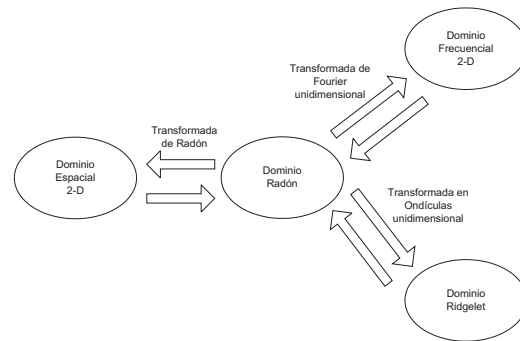


Figura 1. Relación entre los diferentes dominios.

Finalmente, la ecuación de síntesis ridgelet continua está dada partiendo de la siguiente expresión:

$$\int |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |CRT_f(a, b, \theta)|^2 \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}, \quad (8)$$

entonces

$$\int |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} CRT_f(a, b, \theta) \psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}, \quad (9)$$

que se puede generalizar para n -dimensiones.

Transformada ridgelet discreta [4], [9], [11]: Para poder llevar a cabo la transformada ridgelet discreta (*Discrete ridgelet transform - DRT*), primero es necesario definir la transformada de Radón discreta (*Discrete Radon transform - DRAT*) que bien puede ser aproximada por la transformada de Radón finita (*Finite Radon Transform - FRAT*) como lo muestra Minh Do [9] pues la DRT puede ser construida en base a la transformada discreta de Radón. La transformada de

Radón finita, es una versión invertible de la Transformada de Radón en tiempo discreto y bajo la suposición de periodicidad ésta funciona sin ningún problema. La FRAT de una función f de dimensión 2 y finita en \mathbf{Z}_p^2 se define como:

$$r_k[l] = \text{FRAT}_f(k, l) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(i,j) \in L_{k,l}} f[i, j], \quad (10)$$

en donde $L_{k,l}$ denota el conjunto de puntos que forman parte de la línea que se encuentra en \mathbf{Z}_p^2 , esto es:

$$L_{k,l} = \left\{ (i, j) : j = ki + l \pmod{p}, i \in \mathbf{Z}_p \right\}$$

para $0 \leq k < p$,

$$L_{p,l} = \left\{ (l, j) : j \in \mathbf{Z}_p \right\}$$

La inversa de la transformación se denomina retro-proyección o proyección finita hacia atrás (*finite back projection - FBP*) y se define por la suma de los coeficientes de Radón de todas las líneas que convergieron a un mismo punto, esto es

$$f[i, j] = \text{FBP}_r(i, j) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\substack{(k,l) \in P_{i,j} \\ (i,j) \in \mathbf{Z}_p^2}} r_k[l], \quad (11)$$

en donde $P_{i,j}$ indica el conjunto de índices de todas las líneas que van hacia el punto $(i, j) \in \mathbf{Z}_p^2$, es decir:

$$P_{i,j} = \left\{ (k, l) : l = j - ki \pmod{p}, k \in \mathbf{Z}_p \right\} \cup \{(k, l)\}.$$

Es muy importante tratar de buscar un orden óptimo para $r_k[l]$ pues de ello dependerá el buen desempeño de la FRAT. Partiendo de la FRAT, se puede entonces construir la transformada ridgelet finita (FRIT) como se muestra en la Figura 2.

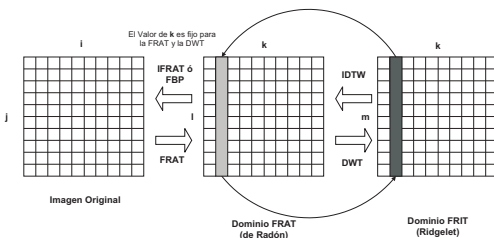


Figura 2. Relación entre los dominios espacial, FRAT y FRIT.

Adicionalmente, si se respeta la condición para la conformación de marcos (*frames*) tanto para la transformada discreta de Radón, como para la transformada en ondículas, entonces aseguramos estabilidad para llevar a cabo la transformada ridgelet discreta y la inversa de esta última (se puede llevar a cabo la expansión en bases ortonormales: diádicas, symlets, etc.).

Entonces los parámetros a y b pueden ser discretizados como: $a_j = a_0 2^j$ y $b_{j,k} = 2\pi k 2^j$. Viendo la transformada ridgelet en el plano frecuencial (de Fourier) tenemos:

$$\text{CRT}_f(a_j, b_{j,k}, \theta) = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{2^j \leq |\lambda| \leq 2^{j+1}} e^{(-i\lambda 2\pi 2^j)} \hat{f}(\xi(\lambda, \theta)) d\lambda \quad (12)$$

en donde $\hat{f}(\cdot)$ es la transformada de Fourier 2-D de $f(x)$ puesto que:

$$\text{CRT}_f(a, b, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}(a\lambda) e^{(-i\lambda b)} \hat{f}(\xi(\lambda, \theta)) d\lambda \quad (13)$$

y $\xi(\lambda, \theta) = (\lambda \cos(\theta), \lambda \sin(\theta))$, y se puede definir también,

$$w_{a,b}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}(a|\xi|) \exp(-i\lambda b). \quad (14)$$

Si además, $\theta_{j,l} = 2\pi l 2^{-j}$, entonces se puede obtener una condición de marco completa tal que se tiene la siguiente familia o colección de ridgelets,

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \psi \left(2^j \left(x_1 \cos(\theta_{j,l}) + x_2 \sin(\theta_{j,l}) - 2\pi k 2^{-j} \right) \right) \right\} \quad (15)$$

para $j \geq j_0, l, k$ y se encuentra en un disco unitario.

Al igual que la transformada en ondículas, la existencia de los límites A y B implica que se puede obtener un análisis/síntesis mediante ridgelets duales $\bar{\psi}_{j,k,l}$, tal que

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f, \bar{\psi}_{j,k,l} \rangle \psi_{j,k,l}, \quad (16)$$

en donde se pueden utilizar familias de ondículas diádicas, de Meyer, etc., adicionalmente se pueden construir diccionarios de ridgelets basados en las familias de ondículas antes mencionadas. Por otro lado y al igual que en el análisis con ondículas, también se puede hacer uso de paquetes de ridgelets (*ridgelet packets*) con la finalidad de mejorar los desempeños

de los esquemas de análisis/síntesis [13]. O bien se puede optar por esquemas de análisis multinivel ridgelet, como el propuesto por Minh Do (FRIT Multilevel) [9].

B. Transformada Curvelet

Transformada curvelet continua [5], [6], [17]: La transformada curvelet (TCvC) es una transformada muy reciente y es de gran utilidad en el análisis multiresolución, está inspirada en una evolución de las ideas que dieron base a la transformada ridgelet. La ventaja de la TCvC sobre la transformada en ondículas, es que se pueden representar de mejor manera los objetos con contornos curvilíneos (discontinuidades bidimensionales). El error cuadrático de representación requiere de al menos $\frac{1}{N}$ ondículas, mientras que sólo se necesitan para un mismo error, $\frac{1}{\sqrt{N}}$ curvelets. La transformada curvelet se basa en la construcción de marcos estrechos que obedecen la regla: ancho \approx (longitud)². Esta nueva transformada equivale a llevar a cabo al mismo tiempo dos análisis: análisis multiresolución y un análisis geométrico. La transformada curvelet continua (TCvC) se define a partir de lo siguiente: sea M' una colección de M subconjuntos en donde se encuentran incluidos los parámetros de indexado (k_1 y k_2) y que corresponden a etapas de integración. La transformada curvelet es un mapeo $L^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow l^2(M')$, en donde se obtienen coeficientes curvelet ($\alpha_\mu : \mu \in M'$). Existen dos tipos de coeficientes:

I) Para escalas grandes se tienen coeficientes basados en una ondícula de escalamiento

$$\alpha_\mu = \langle \phi_{k_1, k_2}, P_0 f \rangle, \quad \mu = (k_1, k_2) \in M'/M, \quad (17)$$

en donde ϕ_{k_1, k_2} es una función de escalamiento de Lamarié que proporciona bases de Meyer, y P_0 es un filtro pasa-bajas.

II) Para escalas finas se tienen coeficientes ridgelet multiescala que se obtienen después de un filtrado pasa-banda (filtrado en sub-bandas),

$$\alpha_\mu = \langle \Delta_s f, \psi_\mu \rangle, \quad \mu \in M_s, \quad (18)$$

$$s = 1, 2, \dots$$

en donde $\Delta_s f = \psi_{2^s} * f$ y $\psi_{2^s} = 2^{4s} \psi(2^{2s})$, Δ_s son filtros sub-banda. Cada coeficiente está asociado a la escala 2^{-s} , lo cual significa que se obtiene una versión filtrada en sub-bandas de f , es decir $\Delta_s f$ y los coeficientes no se obtienen directamente de f .

De lo anterior se deducen las siguientes propiedades:

- Un marco estrecho puede obtenerse si

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\mu \in M'} |\alpha_\mu|^2. \quad (19)$$

- Si existen marcos apropiados, entonces existen coeficientes representativos

$$\alpha_\mu = \langle f, \gamma_\mu \rangle \quad (20)$$

en donde $\gamma_\mu \in L^2(\mathbf{R}^2)$ es un marco estrecho.

- También existe la transformada inversa, tal que

$$f = \sum_{\mu \in M'} \langle f, \gamma_\mu \rangle \gamma_\mu. \quad (21)$$

- Y, por fórmula, los marcos estrechos están definidos por:

$$\gamma_\mu = \Delta_s \psi_\mu, \quad \mu \in \mathbf{Q}_s, \quad (22)$$

en donde \mathbf{Q}_s es el conjunto de $\mathbf{Q} = (s, k_1, k_2)$ que tienen la forma diádica siguiente: $\mathbf{Q} = [k_1/2^s, (k_1+1)/2^s] \times [k_2/2^s, (k_2+1)/2^s]$ tal que $\mu = (\mathbf{Q}, \lambda)$ y $\psi_\mu = 2^s T_{\mathbf{Q}}(w, \rho_\lambda)$, esta última ecuación hace referencia a ridgelets multiescala y ortonormales. Entonces, las curvelets se obtienen mediante el filtrado pasa-banda de ridgelets multiescala en donde la banda de paso está relacionada estrechamente con la escala de la localización espacial.

La ley de *anisotropía* en la escala está dada de la siguiente

forma: El filtro pasa-banda $|\xi| \approx 2^{2s}$ y la escala espacial es 2^{-s} , esto impone que muchas ridgelets multiescala no sobrevivirán durante el filtrado pasa-banda y entonces la longitud de las curvelets es longitud $\approx 2^{-s}$ y el ancho es: ancho $\approx 2^{-2s}$ por lo que se tiene la relación ancho \approx (longitud)².

Transformada curvelet discreta [5], [10], [16], [17]: Al igual que la DRT, la transformada curvelet discreta (TCvD) también conocida como transformada curvelet digital (Digital Curvelet Transform-DCvT) es complicada de obtener debido a ciertas condicionantes y a la falta de más trabajo que permita establecer algoritmos contundentes, en este sentido parece aún haber un camino por recorrer dentro de la investigación de estas nuevas herramientas.

Para llevar a cabo la TCvD es necesario definir los procedimientos a seguir para efectos de análisis y también de síntesis.

Análisis (puntos importantes):

- Descomposición en sub-bandas,

$$f \mapsto (P_0 f, \Delta_1 f, \Delta_2 f, \dots), \quad \Delta_s, s \geq 0.$$

en donde hay detalles sobre un ancho de 2^{-2^s} .

- Particionamiento de regiones regulares: ventanas cuadradas w_Q localizadas según Q ,
 $\Delta_s f \rightarrow (w_Q \Delta_s f)_{Q \in Q_s}$.
- Renormalización: cada ventana cuadrada es renormalizada a una escala unitaria,

$$T_Q f(x_1, x_2) = 2^s f(2^s x_1 - k_1, 2^s x_2 - k_2)$$

en donde T_Q es el operador que transporta y renormaliza a f .

Entonces, la renormalización se completa por,

$$g_Q = (T_Q)^{-1}(w_Q \Delta_s f), \quad Q \in Q_s$$

- Análisis ridgelet: cada cuadro es analizado por un sistema ridgelet ortonormal con elementos base $\rho_\gamma \in L^2(\mathbf{R}^2)$,
 $\alpha_\mu = \langle g_Q, \rho_\lambda \rangle, \quad \mu = (Q, \lambda)$.

En la Figura 3 se ilustra un diagrama en donde se muestra gráficamente el proceso descrito en los puntos anteriores.

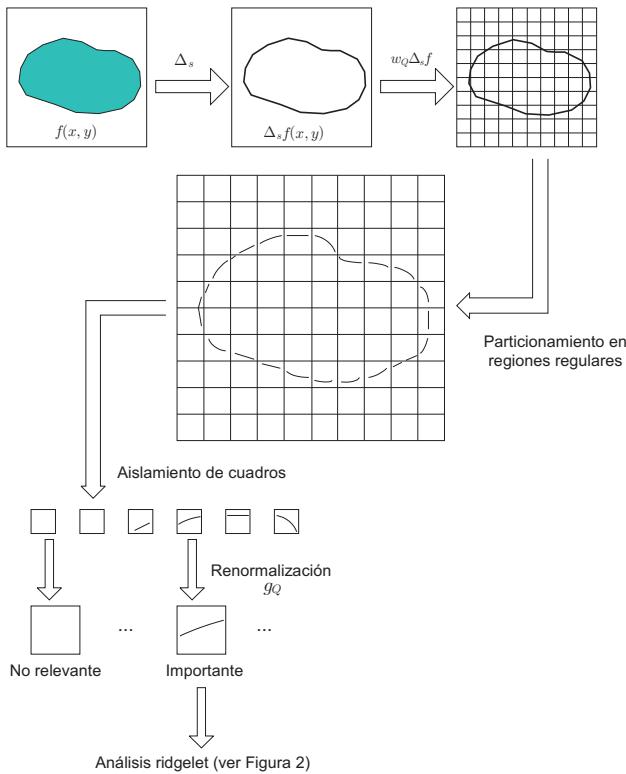


Figura 3. Pasos a seguir para el análisis curvelet (Descomposición en una sub-banda).

Síntesis (puntos importantes):

- Síntesis ridgelet: cada cuadro es reconstruido,

$$g_Q = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda, Q} \rho_{\lambda}$$

- Renormalización: cada cuadro resultante del proceso anterior es renormalizado,
 $h_Q = T_Q g_Q, \quad Q \in Q_s$.
- Integración en regiones regulares: se revierte el proceso de ventaneo, reconstruyendo
 $\Delta_s f = \sum_{Q \in Q_s} w_Q \cdot h_Q$.
- Recomposición de las sub-bandas: Reconstrucción o síntesis del filtrado sub-banda, según la fórmula

$$f = P_0(P_0 f) + \sum_{s>0} \Delta_s(\Delta_s f)$$

El cual es el proceso inverso al mostrado en la Figura 3.

La idea principal de la transformada curvelet es, entonces, primero descomponer la imagen en sub-bandas con el propósito de separar el objeto en una serie de escalas disjuntas. Cada escala es analizada de forma local por la transformada ridgelet. Entonces, los diferentes niveles de la pirámide ridgelet multiescala se utilizan para representar diferentes sub-bandas de un banco de filtros de salida. El punto clave está en la existencia de una relación muy especial entre la profundidad de la pirámide multiescala y los índices de las sub-bandas diádicas, manteniendo la propiedad fundamental de la transformada curvelet en donde los elementos de longitud de $2^{-j/2}$ sirven para el análisis y la síntesis de la j -ésima sub-banda $[2^j, 2^{j+1}]$.

El algoritmo de filtrado en sub-bandas propuesto por Mallat [15] (*the "à trous" algorithm*) tiene una estructura óptima para ser utilizado en la transformada curvelet discreta según lo manifiesta Starck [16], dicho algoritmo lleva a cabo una descomposición descrita por la siguiente ecuación:

$$I(x_1, x_2) = c_J(x_1, x_2) + \sum_{j=1}^J w_j(x_1, x_2), \quad (23)$$

en donde c_J es una versión suavizada de la imagen original I y w_j representa los detalles de I a escalas 2^{-j} . El algoritmo tiene como salidas $J + 1$ arreglos de sub-bandas de dimensión $n \times n$, para el cual $j = 1$ corresponde a la escala más fina (altas frecuencias).

III. COMBINACIÓN DE ALGORITMOS Y OTROS MÉTODOS

En trabajos presentados por Candès [5] y Starck [16], [17], se recomienda sacar ventaja de los puntos fuertes tanto de la transformada curvelet (modelado adecuado de discontinuidades de longitud relativamente grande) como de la transformada wavelet (modelado adecuado de discontinuidades de longitud relativamente pequeña), de tal modo que se sugiere la construcción de algoritmos híbridos, que permitirán aumentar el PSNR y la calidad visual de las

imágenes reconstruidas, utilizando para ello esquemas iterativos y en donde se proponen criterios a ser minimizados basados en normas de tipo L_1 o de variación total (e.g. *total variation norm*). Otros métodos recientes de análisis multiresolución (análisis direccional) también están basados en bases beamlets, contourlets, bandelets, brushlets, y otros más. El uso final que se pretende de estas nuevas herramientas para el análisis multiresolución se dirige a responder varias preguntas, una de ellas es: ¿las nuevas transformadas podrían ser aplicadas en la codificación de hologramas?, en donde se pretende trabajar con aspectos iniciados en investigaciones de Ma. Araiza [1], [2], [14]. Una segunda pregunta es: ¿La restauración de imágenes podría ser aplicada a la instrumentación óptica?, como en el caso de los trabajos de J. Villa [18], [19], y más aún, ¿entre las técnicas de restauración mediante Campos de Markov y análisis multiresolución, cuales son más eficientes en términos de reconstrucción y tiempo de cálculo, para aplicaciones de instrumentación en óptica?

RECONOCIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos al Programa de Mejoramiento al Profesorado (PROMEP) de la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México, este trabajo fue parcialmente apoyado por PROMEP-SEP bajo registro UAZAC PTC 24-103.5/03/1127.

REFERENCIAS

- [1] Araiza M. y Guel S. (2003). "Two-channel computer-generated holograms: a simplified method." *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 39, pp. 629-634.
- [2] Araiza M., Guel S. y Ojeda J., (2004). "Multichannel image storage with image processing capabilities." *Opt. Comm.* Vol. 230, pp. 131-135.
- [3] Candès E. J. (1998). *Ridgelets: Theory and Applications*, Ph.D. Thesis. Department of Statistics, Stanford University.
- [4] Candès E. J. y Donoho D. L. (1999). "Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency?" *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* Vol. A 357, pp. 2495-2509.
- [5] Candès E. J. y Donoho D. L. (2000). "Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges." In Proc. of Curves and Surfaces Fitting, L. L. Schumaker, A. Cohen, and C. Rabut. Eds. Vanderbilt University Press, Nashville, TN. pp. 105-120.
- [6] Candès E. J. y Donoho D. L. (2000). "Curvelets and Curvilinear Integrals." *Journal of Approx. Theory*. Vol. 113, pp. 59-90.
- [7] Candès E. J. y Guo F. (2002). "New multiscale transforms, minimum total variation synthesis: Applications to edge-preserving image reconstruction." *Journal of Signal Processing*. Vol. 82, pp. 1519-1543, Jan.
- [8] Candès E. J. y Donoho D. L. (2004). "New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Smooth C^2 Singularities." *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 57, pp. 219-266.
- [9] Do M. N. y Vetterli M. (2003). "The Finite Ridgelet Transform for Image Representation." *IEEE Trans. on Image Processing*. Vol. 12, pp. 16-28, Jan.
- [10] Donoho D. L. y Duncan, M. R. (2000). "Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments." In Proc. Aerosense 2000, Wavelet Applications VII, SPIE. Vol. 4056, pp. 12-29.
- [11] Donoho D. L. y Flesia A. G. (2001). "Digital Ridgelet Transform based on true Ridge Functions." Technical Report, Stanford University.
- [12] Donoho D. L. y Huo X. (2002). "Beamlets and Multiscale Image Analysis. Multiscale and Multiresolution Methods," *Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering* (Editors T.J. Barth, T. Chan, and R. Haimes). Vol. 20, pp. 149-196.
- [13] Flesia A. G., Hel-Or H., Averbuch A., Candès E. J., Coifman R. R. y Donoho D. L. (2002). "Digital Implementation of Ridgelet Packets." Technical Report, Stanford University.
- [14] García J., Zalevsky Z. y Mendlovic D. (1996). "Two-dimensional wavelet transform by wavelength multiplexing." *Applied Optics*. Vol. 35, No. 35, pp. 7019-7024, Dec.
- [15] Mallat S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Second Edition.
- [16] Starck J. L., Donoho D. L. y Candès E. J. (2001). "Very High Quality Image Restoration by Combining Wavelets and Curvelets." In Proc. of Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX, A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser eds., Proc. SPIE. Vol. 4478.
- [17] Starck J. L., Candès E. J. y Donoho D. L. (2002). "The Curvelet Transform for Image Denoising." *IEEE Trans. on Image Processing*. Vol. 11, pp. 670-684, Jun.
- [18] Villa J., Servín M. y Castillo L. (1999). "Profilometry for the measurement of 3-D object shapes based on regularized filters." *Opt. Comm.* Vol. 161, pp. 13-18.
- [19] Villa J., De la Rosa J. L., Miramontes G. y Quiroga J. A. (2005). "Phase recovery from a single fringe pattern using an orientational vector field regularized estimator." *J. Opt. Soc. Am. A*. Vol. 22, No. 12, pp. 2766-2773, Dec.