



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE ZACATECAS
“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”



**“RECURSIVIDAD EN LAS BASES TEÓRICAS ESTRUCTURALES
DE LOS MODELOS DE LA GOTA LIQUIDA Y MODELO DE
CAPAS”**

TESIS

**Presentada en la Unidad Académica de Estudios Nucleares en
cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de:**

MAESTRÍA EN CIENCIAS NUCLEARES
Con opción terminal: Ingeniería Nuclear

Presenta:

Lic. en M. Mirna Patricia Talamantes Carlos

Asesores:

Dr. José Luis Pinedo Vega

Dr. Carlos Ríos Martínez

Zacatecas, Zac.,

México, 2019

ÍNDICE

ÍNDICE	ii
Abstract	4
Resumen	5
Introducción	6
Preguntas científicas	8
Hipótesis	8
Objetivo general	8
Objetivos particulares	8
I. Transición de la Física Atómica a la Física Nuclear	10
1.1 Introducción	10
1.2 Teoría de Dispersión de los rayos X	11
1.3 Atenuación de los rayos X y número atómico	16
1.4 Radiactividad	18
1.5 Teoría de la dispersión de partículas alfa y el núcleo atómico	20
1.51 Parámetro de impacto	20
II Masa Nuclear	29
II.1 Defecto de Masa (Δ)	29
II.2 Energía de enlace nuclear	31
II.3 Fórmula semi-empírica de la masa nuclear	33
II.3.1 Energía de volumen	34
II.3.3 Energía potencial nuclear	36
II.3.4 Efecto de Simetría o Paridad	39
II.3.5 Acoplamiento de spin o efecto non-par	39
II.3.6 Coeficientes de la Formula Semiempírica de la Masa Atómica	40
SEGUNDA PARTE	43
Problemas de Recursividad en el Modelo de la Gota Líquida	43

III. Cálculo del Radio Nuclear Coulombiano usando Teoría de Dispersión Alfa	44
Conclusiones	49
IV. Problemas de Recursividad en la Formula Semiempírica de la Masa	51
IV.1 Análisis de los términos componentes de la formula semiempírica	51
IV.2 Método de cálculo simultaneo de los coeficientes de la Formula Semiempírica	58
IV.3 Cálculo de las Masas Nucleares	61
IV.3.2 masas atómica utilizando los coeficiente y energías de enlace promedio parciales (excluyendo valores negativos)	61
IV.3.2 masas atómica utilizando los coeficiente y energías de enlace de <i>O17, Mn55, I127,</i> <i>Pt195</i>	63
IV.4 Radio Nuclear y Densidad Nuclear	65
Conclusiones	67
Referencias	69
Anexo	71

Abstract

This dissertation is an exhaustive treatment of some fundamental concepts of Nuclear Physics: Alpha Particles Dispersion Theory, the Semi-empirical Atomic Mass Formula, and the nuclear Density and Radii.

Alpha Particles Dispersion Theory was retaken, assuming it would account for the magnitude of the Coulombian nuclear radius and be a conceptual link to the nuclear structure. But nevertheless, the theoretical and numerical analysis done in this work showed that the coulombian cannot be determined through this theory, due that the maximum approach length does not converge, independently of the alpha particle energy. On the other hand, the coulombian nuclear radius can be calculated by recurrence from the associated coefficient to the electric potential energy.

An alternative semi-empirical nuclear mass formula is derived. This formula includes 5 terms, which depend on the atomic and mass numbers, to describe the nuclear characteristics experimentally observed. This derivation is based on two constants: one to account for the energy associated to the nuclear volume, and the other to account for the relationship between the nuclear volume and the number of nucleons or mass number. These were accomplished by developing a method to simultaneously calculate four of five formula coefficients.

Using these coefficients, the theoretical masses were calculated and compared to the experimental masses for 237 stable isotopes. The average of absolute differences between calculated and experimental masses for the 237 isotopes was 0.00228 u, equivalent to energy of 2.1237 MeV, and the standard deviation is on the order of 0.00259 u = 2.4125 MeV. Even though the absolute differences are similar than those obtained from the Arya coefficients and formula, the magnitude of the standard deviation indicates that, theoretically, the semi-empirical formula does not faithfully consider nuclear forces.

=

Resumen

En esta Tesis se tratan en forma exhaustiva temas fundamentales de la Física Nuclear: la Teoría de la Dispersión de Partículas Alfa, la Fórmula Semiempírica de la Masa Atómica, el Radio Nuclear y la Densidad nuclear

Se retomó la teoría de la dispersión de partículas alfa, suponiendo que proporcionaría la magnitud del radio nuclear coulombiano y que éste sería el eslabón conceptual para la estructura del núcleo. Sin embargo, el análisis teórico y numérico desarrollado en esta tesis demuestra que el radio nuclear coulombiano no puede determinarse mediante la teoría de la dispersión alfa, puesto que, sin limitar la energía de la partícula alfa, la distancia de máxima aproximación nunca converge. Por otra parte, se puede determinar el radio nuclear coulombiano, como se demuestra en ésta tesis, por recurrencia a partir del coeficiente asociado a la energía potencial eléctrica.

Esta tesis presenta una deducción alternativa de la fórmula semiempírica de la masa nuclear, que incluye 5 términos en función de los números atómico y másico, que describen las características nucleares observadas experimentalmente, haciendo intervenir dos constantes de proporcionalidad: una para dar cuenta de la energía asociada al volumen nuclear y la otra para dar cuenta de la relación entre el volumen y el número de nucleones o número másico. Se desarrolló un método propio para calcular en forma simultánea 4 de los 5 coeficientes de la fórmula. Estos coeficientes fueron usados para calcular las masas teóricas, que fueron comparadas con las masas experimentales de 237 isótopos estables. El valor absoluto promedio de las diferencias entre masas calculadas y las experimentales fue de 0.00228 u , equivalente a una energía del orden de 2.1237 MeV , con una desviación estándar igual a $0.00259 \text{ u} = 2.4125 \text{ MeV}$. Las diferencias absolutas son similares a las obtenidas con la fórmula y coeficientes de Arya, mientras que la magnitud de la desviación estándar es menor utilizando los coeficientes obtenidos en esta Tesis. Aun así, la magnitud de la desviación estándar indica que teóricamente la fórmula semiempírica no toma en cuenta fielmente las fuerzas nucleares.

Introducción

A pesar del rigor formal y metodológico que ha distinguido a la Física Nuclear, se considera que no ha alcanzado gran éxito, debido en gran parte a que varios de sus fundamentos permanecen todavía en controversia y a la poca importancia que se le ha dado dentro de los planes de estudio comparado con otras disciplinas físicas. Aún y cuando se ha desarrollado durante más de 80 años todavía no se ha alcanzado el objetivo de una "teoría unificada" que explique de manera completa la estructura nuclear (Solis, 2011).

Aunque con el experimento de Rutherford en 1911 se determinó la existencia del núcleo, no fue sino hasta el descubrimiento del neutrón por parte de Chadwick en 1932 cuando se comenzó a hablar de una estructura nuclear. Al principio solo se conocía que en el núcleo había protones y neutrones (nucleones), luego se encontró que era posible asignarles momentos angulares a los nucleones y obtener el momento angular del núcleo en su totalidad. Todo esto y el hecho de que el principio de exclusión de Pauli podía ser aplicado a los nucleones dieron origen a diversos modelos de la estructura nuclear.

No existe una respuesta correcta a cuantos modelos hay, pero Greiner y Maruhn (1998), afirman que hay 31 modelos diferentes (Cook, 2006).

El tamaño del núcleo, sus complejas interacciones, así como el hecho de que en nuestro mundo macroscópico no exista algo que se comporte de manera idéntica al núcleo atómico, hacen del estudio de éste algo difícil, sin embargo, se han encontrado formas de estudiarlo:

- 1) Bombardear los núcleos con otras partículas, para ver como esas partículas son dispersadas o como los núcleos son desintegrados (inducción de reacciones nucleares).
- 2) Muchos núcleos son radiactivos y la naturaleza de la radiactividad depende de la estructura del núcleo.
- 3) Los detalles finos del espectro atómico vistos cuando se aplican campos magnéticos dan información acerca de sus propiedades eléctricas y magnéticas
- 4) Aunque se conocen los componentes del núcleo y se sabe qué tipo de fuerzas son las que actúan entre ellos, todavía no se llega a comprender de manera exacta como actúan entre sí.

Basada en observaciones experimentales, la física nuclear ha recurrido a la utilización de modelos, los cuales ayuden a entender mejor las interacciones y los fenómenos que ocurren en el interior y alrededor del núcleo.

Entre los modelos nucleares que pretenden describir y entender las características de los núcleos, uno de ellos es el modelo nuclear de capas (Shell Model). La versión actual del

modelo de capas fue introducida en 1949 por María G. Mayer aunque la versión original de este modelo se introdujo en los años treinta (Talmi, 2005). En 1936 Niels Bohr afirmó que este modelo es equivocado para los nucleones en el núcleo. Esto tuvo un gran efecto y no hubo mucho progreso hasta 1948 (Talmi, 2010). Principalmente el modelo nuclear de capas se introdujo para explicar las regularidades de las propiedades nucleares asociadas a los números mágicos (Caurier, 2007).

La idea de un modelo es buscar una situación física que sea conocida y cuyas propiedades se asemejen a las del sistema de interés (un núcleo en nuestro caso). Entonces se estudia el modelo en detalle esperando que las nuevas propiedades que se puedan descubrir también sean propiedades del sistema. Este proceso de extrapolación tiene, por supuesto, que fallar en algún punto, pero es sorprendente hasta cuán lejos se puede llegar mediante él. Es importante destacar que aun cuando el modelo comience a fallar, el entender por qué esto sucede puede ser de gran interés permitiendo la modificación y mejora del modelo. Por supuesto, ningún modelo puede explicar todas las características conocidas de los núcleos y por lo tanto es necesario recurrir a distintos tipos de modelos según lo que nos interese describir (Solis, 2011).

El cálculo de las densidades a nivel nuclear es un problema de hace mucho tiempo en la física nuclear, con ramificaciones importantes en las reacciones de iones pesados, la astrofísica, y el diseño de reactores (Sunko, 1997).

La fórmula de la masa nuclear es importante para la física nuclear y campos relacionados con la ciencia y la tecnología. A pesar de los esfuerzos de muchas personas en muchos años todavía no tenemos una fórmula de masa que es satisfactorio en todos los aspectos (Koura et al., 2000).

Durante años se ha estudiado la fórmula de la masa que se compone de dos partes, una que representa la tendencia general de las masas como una función de los números de protones y de neutrones (Z , N) y el otro que representa las desviaciones de esta tendencia general. Este último puede ser llamado energías de capa en un sentido amplio, ya que es causada por la estructura de cubierta y, en su caso, la deformación del núcleo (Koura et al., 2000).

En esta Tesis se revisan dos temas básicos de la Física Nuclear: la Teoría de la Dispersión de Partícula alfa y la Fórmula Semiempírica de la Masa Atómica. Ambos tienen un carácter histórico, ambos fueron formulados para conocer características del tamaño y masa nuclear, ambos requirieron de bases teóricas del más alto nivel de la época, una capacidad deductiva impresionante, ocuparon a los científicos más notables de la época. Ambos temas

constituyen eslabones fundamentales de la concepción actual sobre la constitución y estructura de la materia.

Preguntas científicas

¿Es coherente que la densidad nuclear se asuma como constante? o ¿Cómo justificar la dependencia del número másico “A” con el radio nuclear? ¿Cuál es el nivel de reproducibilidad de la fórmula Semiempírica de la Masa atómica?

Hipótesis

Se puede desarrollar un método propio de deducción de la fórmula semiempírica, que sea explícito, coherente y didáctico.

Objetivo general

Delimitar desde el punto de vista teórico las limitaciones de la fórmula semiempírica de la masa atómica, la cual se dice es coherente con los modelos nucleares de capas y de la gota líquida.

Objetivos particulares

Revisar el desarrollo teórico y metodológico que llevó a la elaboración de la Fórmula Semiempírica de la Masa.

Desarrollar un método de cálculo de las masas atómicas, a partir de los fundamentos teóricos que resuelva los problemas de recursividad en el cálculo de las masas atómicas.

Revisar los diferentes métodos de cálculo del radio y masa nuclear y utilizarlos en la cuantificación de la densidad nuclear, en el caso de diferentes tipos de isótopos: estables, moderadamente estables y poco estables para poner en evidencia su recursividad en las bases teóricas de los modelos nucleares.

La tesis está dividida en dos Partes. En una primera parte se presentan las bases teóricas de los dos temas a tratar y comprende dos capítulos. En el Capítulo I se titula Transición de la Física Atómica a la Física Nuclear. El Capítulo II Se titula Masa Nuclear. La Segunda Parte titulada Problemas de Recursividad del Modelo de la Gota Líquida contiene el análisis teórico, y los resultados del análisis numérico de los dos problemas generales abordados en la Tesis. Está dividida en dos capítulos En el Capítulo III se presenta el cálculo del radio nuclear haciendo uso de la Teoría de dispersión Alfa. En el Cuarto Capítulo, se presenta los

problemas de recursividad asociados a la Fórmula Semiempírica de la Masa; nuestra propuesta de tratamiento de ésta teoría.

I. Transición de la Física Atómica a la Física Nuclear

1.1 Introducción

La Física Nuclear es una disciplina que se encarga del estudio: del tamaño y masa nuclear, radiaciones y reacciones nucleares, fuerzas y modelos nucleares. El surgimiento de la Física Nuclear vino a revolucionar la Teoría Atómica, que avanzaba lentamente y reinó escasamente un siglo. Lo que actualmente se conoce sobre la naturaleza de la materia tiene escasamente dos siglos, lo cual a la escala de la historia de la civilización es un tiempo pequeño. Por tanto, la Física Nuclear es la disciplina cuyo desarrollo probablemente ha sido el más intensivo de la era moderna (Heisenberg, 1953).

En 1808 **Dalton** formuló la teoría atómica, la cual consideraba que todos los átomos de un mismo elemento eran idénticos e indivisibles. En 1815 Prout postuló que los átomos de los diferentes elementos eran aglomerados de átomos de hidrógeno y que su masa era múltiplo de la masa del hidrogeno. Al determinar experimentalmente las masas atómicas resultó que no eran múltiplos enteros de la masa del hidrógeno, con lo cual la hipótesis de Prout se vino abajo.

En 1869 **Mendeleiev** organizó la tabla de los elementos en columnas con elementos con propiedades similares y en filas en las cuales incrementaba el peso atómico. El número atómico era tan solo una serie progresiva de números asignados conforme aumentaba el peso atómico. Sin embargo, en la asignación surgieron dos problemas. El primero relacionado con las combinaciones múltiples: al Indio se le había asignado un peso del doble del real en función de la combinación química conocida, sin embargo se descubrieron otras combinaciones. El peso atómico de elementos multivalente fue obtenido multiplicando el peso de las combinaciones químicas observadas por el entero más pequeño. El segundo problema estaba relacionado con aquellos elementos que teniendo un peso atómico más bajo tenían número atómico más alto. Los casos que se presentaban eran: el par Ar-K, para el cual, el argón con numero atómico 18 tenía mayor peso atómico que el potasio cuyo número atómico era el 19; de forma parecida se presentaban los casos del par Ni-Co y del par I-Te (Tabla I).

Para resolver este último problema, **Crookes** en 1886 argumentó que las masas de los elementos no eran múltiplos enteros del hidrógeno porque en realidad eran mezclas. Tomó el ejemplo del Cl, cuyo peso atómico fue 35.46 para decir que era una mezcla de los átomos con masas 34, 35 y 36. Con ello revivió la hipótesis de Prout (Atam, 1966).

Tabla I. Elementos con peso atómico más bajo que el número atómico

Elemento	Numero atómico	Peso atómico	Elemento	Número atómico	Peso Atómico
Ar	18	39.9	K	19	39.1
Ni	28	58.7	Co	27	58.9
I	53	126.9	Te	52	127.6

En 1887 J. J. Thomson descubrió el electrón (los rayos catódicos) con su famoso tubo de rayos catódicos. Con ello se puso en evidencia que la materia además de masa tiene cargas eléctricas positivas y negativas. Para explicar su coexistencia postuló que los electrones podían estar distribuidos en la materia como pasas en un budín, de ahí el nombre de su modelo atómico: *budín de pasas* (Münzenberg, 2012).

El Modelo atómico de Thomson, como se verá a continuación, es mucho más complejo de lo que su nombre indica. Entre otras cosas permitió definir el concepto de sección transversal del electrón y resolvió el problema de la dispersión de rayos X.

En 1895 Röntgen descubrió los rayos X probando los ases de electrones sobre diferentes materiales. Al estudiar la naturaleza ondulatoria, una de las pruebas fallidas fue que los rayos X no se reflejan ante un espejo, como lo hace la luz.

Thomson interpretó que debía de haber una interacción entre los rayos X y los electrones que él había demostrado estaban presentes en todos los átomos. Tratando los rayos X como ondas electromagnéticas derivó una expresión para la dispersión que debían producir los electrones. Estos debían ser considerados como libres, para responder a la fuerza producida por el vector eléctrico de la onda electromagnética de los rayos X.

I.2 Teoría de Dispersión de los rayos X

Thomson asumió que los rayos X se comportaban como ondas electromagnéticas polarizadas cuyo campo eléctrico ε de la onda incidente en la posición media del electrón puede ser escrito como

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin 2\pi\vartheta t \quad (I.1)$$

donde ϑ es la frecuencia, ε_0 la amplitud de la radiación incidente y t el tiempo.

La fuerza transmitida a un electrón libre de carga e por una onda electromagnética, en unidades del sistema Internacional es

$$F = Ke\varepsilon = Ke\varepsilon_0 \sin 2\pi\vartheta t \quad (I.2)$$

donde $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ es la constante de la ley de Coulomb

En el caso no relativista la ecuación de baja energía de este movimiento es

$$F = m_0 a = m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (I.3)$$

m_0 es la masa en reposo del electrón y z es la coordenada elegida en la dirección de polarización ε_0 .

Igualando (I.2) y (I.3)

$$m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = K e \varepsilon_0 \sin 2\pi\vartheta t \quad (I.4)$$

La solución para el desplazamiento z se puede obtener mediante integraciones sucesivas.

Integración la ecuación (I.4)

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} = \int \frac{K e}{m_0} \varepsilon_0 \sin(2\pi\vartheta t) dt \quad (I.5)$$

se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{K e}{m_0 (2\pi\vartheta)} \varepsilon_0 \cos(2\pi\vartheta t) \quad (I.6)$$

E integrando la ecuación (6)

$$\int dz = \int -\frac{K e}{m_0 (2\pi\vartheta)} \varepsilon_0 \cos(2\pi\vartheta t) dt \quad (I.7)$$

se obtiene el desplazamiento

$$z = -\frac{K e}{m_0 (2\pi\vartheta)^2} \varepsilon_0 \sin(2\pi\vartheta t) \quad (I.8)$$

El valor máximo de la amplitud se alcanza cuando $\sin(2\pi\vartheta t) = -1$. Por tanto

$$z_{max} = \frac{K e}{m_0 (2\pi\vartheta)^2} \varepsilon_0 \quad (I.9)$$

Y el momento dipolar magnético correspondiente es

$$z_{max} e = \frac{K e^2 \varepsilon_0}{m_0 (2\pi\vartheta)^2} \quad (I.10)$$

El electrón oscilante constituye un elemento de corriente oscilante $i dz$, con valores instantáneos. Al sustituir dz tendremos el elemento oscilante de corriente

$$i dz = \frac{Ke}{c} v = \frac{Ke dz}{c dt} = -\frac{Ke^2}{m_0 c} \frac{e}{2\pi\vartheta} \varepsilon_0 \cos 2\pi\vartheta t \quad (I. 11)$$

siendo $v = \frac{dz}{dt}$ la velocidad instantánea del electrón en la dirección z .

La interacción de este elemento concurrente con el vector magnético de la radiación incidente produce una pequeña fuerza sobre el electrón (y es la responsable de una red que deriva de los electrones a lo largo de la dirección de la radiación incidente) que puede despreciarse en comparación con $e\varepsilon$ en caso no relativista de baja energía. En consecuencia si la velocidad del electrón fuera exactamente a 90° la fase con los campos incidentes ε y H , no daría lugar a ningún pulso. Sin embargo, la fase del electrón retrasa la fase de los campos de incidentes, produciendo un impulso hacia adelante y permitiendo que el electrón pueda absorber la energía del campo ε para la radiación de retroceso (re-radiación). Esta velocidad neta de desviación es más pequeña que v_0 (el máximo valor de v) aproximadamente a la razón $\frac{v_0}{c}$. Para el caso no relativista de baja energía ($h\vartheta \ll m_0 c^2 = 0.51 \text{ Mev}$) la razón $\frac{v_0}{c} \ll 1$, y por lo tanto, la interacción magnética puede despreciarse en comparación con la simple interacción eléctrica de $m_0 \frac{d^2z}{dt^2} = e\varepsilon_0 \sin(1.2\pi\vartheta t)$. Hay que señalar también que esta ecuación deja de lado cualquier fuerza atómica de recuperación sobre el electrón desplazado y, por tanto, es equivalente a dejar de lado la energía de enlace atómica B_e del electrón en comparación con la energía cuántica $h\vartheta$. Estas dos simplificaciones restringen las fórmulas de Thomson a la radiación electromagnética por lo que

$$B_e \ll h\vartheta \ll m_0 c^2 \quad (I. 12)$$

Para una distancia R que es grande comparado con z_0 y con la longitud de onda $\frac{c}{\vartheta}$ (que es la zona de onda) la oscilación dipolo produce un campo electromagnético en el que las magnitudes de los vectores eléctricos ε' y H' son valores absolutos, en unidades cgs,

$$|\varepsilon'| = |H'| = \frac{Ke}{Rc^2} \frac{d^2z}{dt^2} \sin \xi \quad (I. 13)$$

$$|\varepsilon'| = |H'| = \left(\frac{1}{R} \frac{Ke^2}{m_0 c^2} \sin \xi \right) \varepsilon_0 \sin 2\pi\vartheta \left(t - \frac{R}{c} \right) \quad (I. 14)$$

Los vectores ε' y H' son normales entre sí a la dirección de R , que se encuentran en un ángulo ξ con z . La intensidad instantánea a la distancia R desde el centro de dispersión está

dada por la magnitud del producto vectorial $\frac{c}{4\pi} xH' = \frac{c}{4\pi} (\varepsilon')^2$, mientras que la intensidad promedio I' para R es $\frac{c}{8\pi} (\varepsilon_{max})^2$. Esto es

$$I' = \frac{c}{8\pi} (\varepsilon_{max})^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{Ke^2}{m_0c^2} \sin \xi \right)^2 \varepsilon_0^2 \frac{c}{8\pi} \quad (I.15)$$

o bien

$$I' = \frac{1}{R^2} \left(\frac{Ke^2}{m_0c^2} \right)^2 \frac{c}{8\pi} (\sin \xi)^2 \varepsilon_0^2 \quad (I.15a)$$

Sabemos que $R \gg z_0$ para esto se debe cumplir $R = tc$ para que ε sea máxima.

En un tiempo t , cada electrón irradia en promedio una energía $d(Q_e)$, y el poder de radiación promedio es $\frac{d(Q_e)}{t}$ en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ para el ángulo ξ está dado por

$$\frac{d(Q_e)}{t} = I' R^2 d\Omega \quad (I.16)$$

Sustituyendo la ecuación (I.15a)

$$\frac{d(Q_e)}{t} = I' R^2 d\Omega = \left(\frac{Ke^2}{m_0c^2} \right)^2 \frac{c}{8\pi} \varepsilon_0^2 (\sin \xi)^2 d\Omega \quad (I.17)$$

La intensidad I_0 de la onda incidente está dada por el valor promedio de este producto vectorial

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} \varepsilon_0^2 \quad (I.18)$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación (I.18) el poder de radiación de un electrón en el ángulo sólido $d\Omega$ puede escribirse como

$$\frac{d(Q_e)}{t} = I_0 \left(\frac{Ke^2}{m_0c^2} \right)^2 d\Omega (\sin \xi)^2 \quad (I.19)$$

Esta expresión se conoce como la forma diferencial del poder de dispersión de Thomson

La energía total de radiación Q_e por cada electrón es la integral de la ecuación anterior sobre todos los ángulos, con $d\Omega = 2\pi \sin \xi d\xi$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. La ecuación (I.19) se puede escribir como

$$d(Q_e) = I_0 t \left(\frac{Ke^2}{m_0c^2} \right)^2 2\pi (\sin \xi)^2 \sin \xi d\xi \quad (I.19a)$$

Donde integrando

$$\int d(Q_e) = I_0 t \left(\frac{Ke^2}{m_0 c^2} \right)^2 2\pi \int (\sin \xi)^2 \sin \xi d\xi \quad (I.20)$$

$$Q_e = I_0 t \left(\frac{Ke^2}{m_0 c^2} \right)^2 2\pi \int (1 - \cos^2 \xi) \sin \xi d\xi \quad (I.20a)$$

$$Q_e = I_0 t \left(\frac{Ke^2}{m_0 c^2} \right)^2 2\pi \left(-\cos \xi + \frac{(\cos \xi)^3}{3} \right)_{\pi}^{2\pi} \quad (I.20b)$$

$$Q_e = I_0 t \frac{8\pi}{3} \left(\frac{Ke^2}{m_0 c^2} \right)^2 \quad (I.21)$$

Fórmula que expresa el poder de dispersión de Thomson

Por analogía con la fórmula del área, Thomson interpretó que el término $\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{Ke^2}{m_0 c^2} \right)^2$ resultaba ser el área que presenta cada electrón ante la radiación o área de interacción y por ello lo denominó sección transversal del electrón. En consecuencia el término $r_e = \frac{Ke^2}{m_0 c^2}$ se le asignó el nombre de radio clásico del electrón. Así, la ecuación (I.21) puede ser escrita en forma compacta por

$$\frac{Q_e}{t} = \sigma_e I \quad (I.21a)$$

El radio clásico del electrón es

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{Ke^2}{m_0 c^2} = \frac{\left(9 \times 10^9 \frac{N m^2}{C^2} \right) (1.6022 \times 10^{-19} C)^2}{(9.109 \times 10^{-31} Kg) \left(1.3 \times 10^8 \frac{m}{s} \right)^2} = \\ &= \frac{\left(9 \times 10^9 \frac{Kg m m^2}{s^2 C^2} \right) (1.6022 \times 10^{-19} C)^2}{(9.109 \times 10^{-31} Kg) \left(1.3 \times 10^8 \frac{m}{s} \right)^2} = \\ &= 2.81814 \times 10^{-15} m = \mathbf{2.81814 \times 10^{-13} cm} \end{aligned}$$

Mientras que la sección transversal del electrón es

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{Ke^2}{m_0c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{\left(9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) (1.6022 \times 10^{-19} C)^2}{(9.109 \times 10^{-31} Kg) \left(1.3 \times 10^8 \frac{m}{s} \right)^2} \right]^2 = 6.6534 \times 10^{-29} m^2$$

$$= 6.6534 \times 10^{-25} cm^2$$

De aquí se adoptó el *barn*, abreviado *b*, como la unidad de área a nivel atómico.

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

I.3 Atenuación de los rayos X y número atómico

La Teoría de Dispersión de los rayos X, se refiere a la interacción de un solo fotón con un solo electrón. La atenuación de la radiación se refiere a la interacción, ya no de un solo fotón, sino de un flujo de fotones y no solo con un electrón sino los electrones de un medio.

Para ello, considérese una lámina de área A y espesor diferencial dx , de un material monoatómico con densidad atómica $N \left(\frac{\text{átomos}}{cm^3} \right)$ expuesta a un flujo de fotones con intensidad $I \left(\frac{\text{fotones}}{cm^2s} \right)$ (Figura I.1).

Si se asume que cada átomo tiene un número de electrones desconocido $z \left(\frac{\text{electrones}}{\text{átomo}} \right)$, el producto Nz , resulta ser el número de electrones por cm^3 . Esto es

$$N \left(\frac{\text{átomos}}{cm^3} \right) z \left(\frac{\text{electrones}}{\text{átomo}} \right) \rightarrow \left(\frac{\text{electrones}}{cm^3} \right)$$

Multiplicando Nz por el espesor de la placa dx el producto, resulta el número de electrones por cm^2 que se opone a un flujo de rayos X. Esto es

$$N * z \left(\frac{\text{electrones}}{cm^3} \right) dx (cm) \rightarrow \left(\frac{\text{electrones}}{cm^2} \right)$$

Multiplicando $Nz dx$ por el área de la lámina A , se obtiene el número de electrones en la lámina

$$N * z * dx \left(\frac{\text{electrones}}{cm^2} \right) * A (cm^2) \rightarrow (\text{electrones en } A)$$

Multiplicando $NzA dx$ por la sección transversal de los electrones σ_e se obtiene el área efectiva de todos los electrones

$$dA = N * z * A * dx (\text{electrones}) * \sigma_e \left(\frac{cm^2}{\text{electrón}} \right)$$

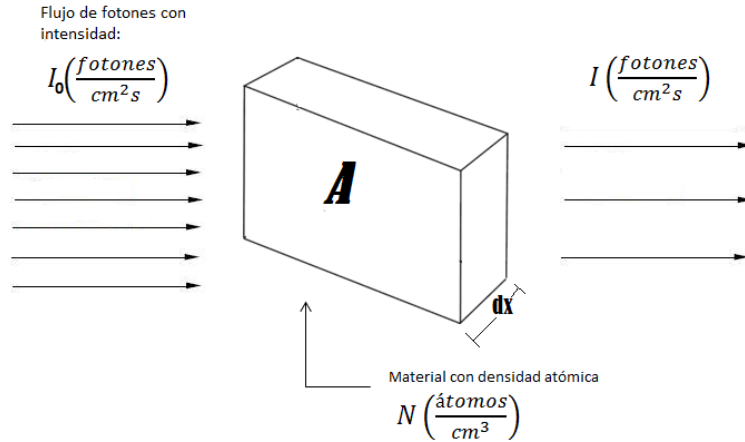


Figura I.1. Interacción de un flujo de fotones con un material de espesor diferencial

Dividiendo el área efectiva de todos los electrones (área de interacción de los rayos X) entre el área de la placa, se obtiene una cantidad adimensional que representa la fracción del área efectiva de interaccionar con los fotones.

$$\frac{dA}{A} = N * z * \sigma * dx \quad (I.22)$$

Esta fracción es equivalente a la disminución diferencial del flujo de fotones al atravesar una capa diferencial. Esto es:

$$-\frac{dI}{I} = N * z * \sigma_e * dx \quad (I.23)$$

Si luego se considera una placa de un espesor cualquiera x , la difusión de los rayos X puede calcularse integrando:

$$-\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = N * z * \sigma_e * \int_0^x dx \quad (I.24)$$

de donde se obtiene

$$I = I_0 e^{-Nz\sigma_e x} \quad (I.25)$$

que es *la ley de atenuación de rayos X*.

Experimentalmente se puede medir la transmisión de rayos X a través de un material, midiendo primero la intensidad del flujo de fotones I_0 sin intervención de la placa o un medio y luego midiendo la intensidad I intercalando un espesor x de un material

monoatómico conocido. La densidad atómica se puede calcular conociendo la densidad ρ , y el peso atómico M del material mediante

$$N = \frac{\rho N_A}{M} \quad (I.26)$$

Dado que todos los términos de la ley de atenuación pueden ser conocidos salvo z , este puede despejarse de la ecuación de atenuación (I.25). Es decir, se puede conocer el número atómico o número de electrones por átomo, mediante

$$z = \frac{M}{N_A \rho \sigma_e x} \ln \frac{I}{I_0} \quad (I.27)$$

Barkla en 1911 efectuó diversos experimentos para determinar el número atómico, entre otros del carbón. Encontró entre otras cosas que el número atómico del carbón era del orden de la mitad que el peso atómico.

Este método no es infalible para el cálculo de número atómico, puesto que puede ocurrir absorción de rayos X por efecto fotoeléctrico, con los electrones de las capas K y L produciendo fluorescencias. El efecto fotoeléctrico es fuertemente dependiente de la energía de los rayos X.

A pesar de sus inconvenientes, éste método permitió demostrar que el número atómico correspondía con el número de electrones por átomo z .

I.4 Radiactividad

En 1896, **Becquerel** descubrió la radiactividad, es decir la emisión de electrones, partículas alfas o radiación gamma desde el interior de los átomos. Este hecho puso en evidencia que los átomos radiactivos no podían ser idénticos en masa, puesto que al emitir algo su masa lógicamente se debía reducir ligeramente.

Lo primero que se observó fue que la radiactividad no podía ser afectada por factores físicos como la presión o la temperatura. Se concluyó entonces que se trataba de un fenómeno espontáneo o de tipo probabilístico, intrínseco a cada tipo de especie radiactiva. Se pensó, que para caracterizar el decaimiento radiactivo era suficiente asignar un término constante λ a cada una de las especies radiactivas, que diera cuenta de la probabilidad de decaimiento de cada especie radiactiva. A ese término se le llamó constante de decaimiento.

La *constante de decaimiento* λ se define como la probabilidad de que un núcleo radiactivo de una cierta especie decaiga en una unidad de tiempo. Si la unidad de tiempo es un

segundo las unidades de λ son (s^{-1}). Por lo tanto, la constante de decaimiento es equivalente a una frecuencia. Es decir λ representa la frecuencia de decaimiento.

Si se considera un tiempo diferencial dt , el producto

$$\lambda \left(\frac{1}{s} \right) dt(s) \quad (I.28)$$

da como resultado una cantidad adimensional, equivalente a la probabilidad de que cada átomo, de una cierta especie, decaiga en el intervalo de tiempo dt . Si en una muestra se tienen N átomos radiactivos, el producto

$$N\lambda dt \quad (I.29)$$

es numéricamente igual al número de átomos que decaen en el intervalo dt . Es decir es equivalente a la disminución en el número de átomos $-dN$ de esa especie

$$-dN = N\lambda dt \quad (I.29a)$$

Si en un material radiactivo en un inicio ($t = 0$) se tiene un cierto número de átomos N_0 , al cabo de un tiempo t el número de átomos radiactivos restante $N(t)$ se puede calcular por integración de la ecuación (I.29a)

$$-\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = \lambda \int_0^t dt \quad (I.30)$$

De lo cual resulta

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (I.31)$$

que es la *ley de decaimiento radiactivo*.

Derivando esta expresión respecto al tiempo, se obtiene la razón o velocidad de decaimiento, también llamada Actividad $A(t)$:

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \quad (I.32)$$

Donde utilizando la ecuación (I.31)

$$A(t) = N(t)\lambda \quad (I.33)$$

I.5 Teoría de la dispersión de partículas alfa y el núcleo atómico

El descubrimiento de la radiactividad, quebrantó la indivisibilidad del átomo, pero no puso en evidencia aún el concepto de núcleo.

El concepto de núcleo surgió al tratar de estudiar el comportamiento de las partículas alfa emitidas por los isotopos pesado.

En 1906 Ernest Rutherford observó que las desviaciones de las partículas alfa, al atravesar una lámina de mica o de oro, eran más grandes que las que predecía el modelo de Thomson.

En 1909 H. Geiger y E. Marsden haciendo experimentos de dispersión de partículas alfa, pusieron en evidencia la existencia del núcleo atómico.

En 1911 Rutherford desarrollo la teoría de dispersiones alfa y con ello se formalizó la concepción de núcleo atómico. El punto de partida de la Física Nuclear puede ser asociado a la explicación dada por Ernest Rutherford en 1911, sobre la dispersión de partículas alfa.

I.51 Parámetro de impacto

La teoría de la dispersión de partículas alfa es una deducción clásica de la trayectoria de la partícula alfa al interactuar en un medio. Se asume en principio que la dispersión de las partículas alfa se debe a la existencia de un potencial de interacción entre una partícula alfa y un núcleo atómico.

La Figura **I.2**, muestra una trayectoria hiperbólica de una partícula cargada en movimiento en el campo de fuerza repulsiva inversa del cuadrado de otra partícula cargada, según fue concebido por Rutherford.

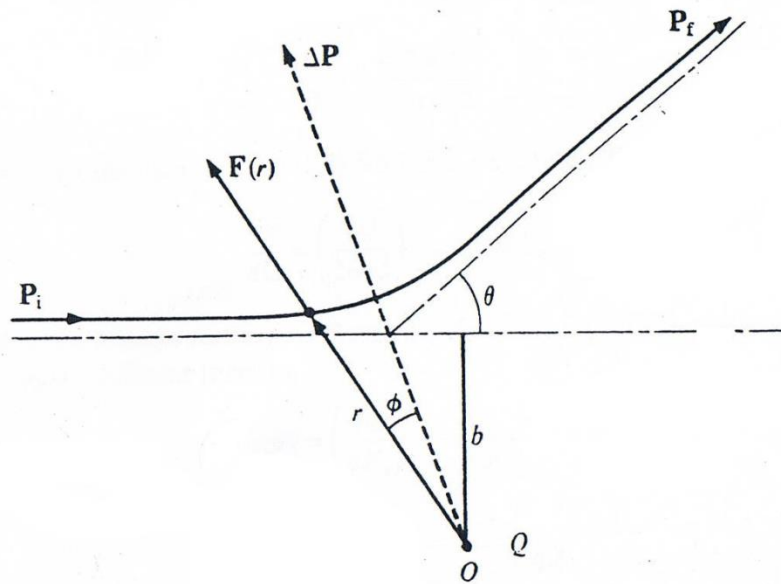


Figura I.2. Dispersión de una partícula alfa por una fuerza central conservativa (fuerza repulsiva).

En la Figura I.3 se presenta un esquema del balance de momentum $\overline{\Delta P}$, de una partícula alfa que interacciona con un núcleo atómico, siendo \vec{P}_i y \vec{P}_f los momentum inicial y final.

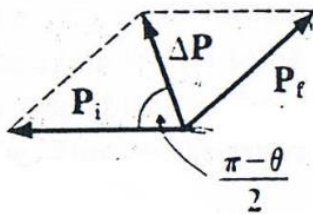


Figura I.3. Balance de momentum de una partícula alfa en la interacción con un núcleo.

El Teorema de la cantidad de movimiento establece que el cambio de momento $\overline{\Delta P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$ que experimenta la partícula debe ser igual a

$$\overline{\Delta P} = \int \vec{F}(r) dt \quad (I.33)$$

donde $\vec{F}(r)$ es la fuerza de interacción Coulombiana entre partícula y núcleo y t es el tiempo de interacción.

Si θ es el ángulo de dispersión, el balance de momentum en la dirección x es

$$\Delta P_x = P_f \cos \theta - P_i \quad (I.34)$$

Y en la dirección y es

$$\Delta P_y = P_f \text{sen} \theta \quad (I.35)$$

Y la magnitud del cambio de momentum es

$$\|\overline{\Delta P}\| = \sqrt{(\Delta P_x)^2 + (\Delta P_y)^2} = \sqrt{P_f^2 + P_i^2 - 2P_f P_i \cos \theta} \quad (I.36)$$

Si en la dispersión, no hay intercambio de energía solo hay cambio de dirección de la partícula, es decir, los momentum inicial y final son iguales $P_f = P_i = P$

$$\|\overline{\Delta P}\| = \sqrt{2P^2 (1 - \cos \theta)} \quad (I.37)$$

Haciendo uso de la identidad

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2 \alpha) \quad (I.38)$$

Si $\alpha = \frac{\theta}{2}$

$$2(1 - \cos 2 \alpha) = 4 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (I.39)$$

Por tanto

$$\|\overline{\Delta P}\| = 2P \text{sen} \frac{\theta}{2} \quad (I.40)$$

La Figura I.2 muestra que $\overline{\Delta P}$ apunta en la dirección $\frac{\pi - \theta}{2}$ mientras que $\vec{F}(r)$ hace un ángulo \emptyset respecto a la dirección de $\overline{\Delta P}$. Donde $\frac{\pi - \theta}{2} \leq \emptyset \leq \frac{\pi - \theta}{2}$.

Tanto solo la componente de $\int \|\vec{F}(r)\| \cos \emptyset dt$ paralela a $\overline{\Delta P}$ contribuye al cambio de momentum de la partícula. Combinando las ecuaciones (I.33) y (I.40)

$$2mv \text{sen} \frac{\theta}{2} = \int \|\vec{F}(r)\| \cos \emptyset dt \quad (I.41)$$

Donde $P = mv$

Mientras que las componentes perpendiculares $\int \|\vec{F}(r)\| \sin \vartheta dt$ se contrarrestan o anulan. Esto es

$$0 = \int \|\vec{F}(r)\| \sin \vartheta dt \quad (I.42)$$

Si b es el parámetro de impacto o la distancia entre la dirección la trayectoria de la partícula y el centro del núcleo, el momento de la partícula a una distancia alejada del núcleo, es decir cuando el potencial de interacción eléctrica es imperceptible es

$$M(r \rightarrow -\infty) = mv_0 b \quad (I.43)$$

donde v_0 es la velocidad original de la partícula alfa.

Y por conservación del momento angular se debe de cumplir que el momento cuando $r \rightarrow -\infty$ es igual al momento angular para cualquier distancia r dentro del campo de fuerza Coulombiano

$$M(r) = mr^2 \omega \quad (I.44)$$

donde $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ es la velocidad angular.

Igualando (I.43) y (I.44)

$$mv_0 b = mr^2 \omega \quad (I.45)$$

sustituyendo $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v_0 b}{r^2} \quad (I.45)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de (I.41) por $d\vartheta$

$$2mv_0 \sin \frac{\theta}{2} = \int \|\vec{F}(r)\| \cos \vartheta \frac{dt}{d\vartheta} d\vartheta \quad (I.46)$$

Y sustituyendo (I.45)

$$2mv_0^2 b \sin \frac{\theta}{2} = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} r^2 \|\vec{F}(r)\| \cos \vartheta d\vartheta \quad (I.47)$$

De la Ley de Coulomb

$$\vec{F}(r) = \frac{KQq}{r^2} \quad (I.48)$$

Resulta evidente que, $r^2 \|\vec{F}(r)\| = KQq = cte$. Luego la ecuación (I.47) se convierte en

$$2mv_0^2 b \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = KQq \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \phi d\phi \quad (I.47a)$$

Resolviendo la integral

$$mv_0^2 b \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = KQq \cos \frac{\theta}{2} \quad (I.49)$$

De donde se obtiene la expresión del parámetro de impacto en función del ángulo de dispersión

$$b = \frac{KQq}{mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (I.50)$$

Si el parámetro de impacto aumenta en db , habrá una variación en el ángulo sólido de dispersión $d\theta$ (Figura I.4).

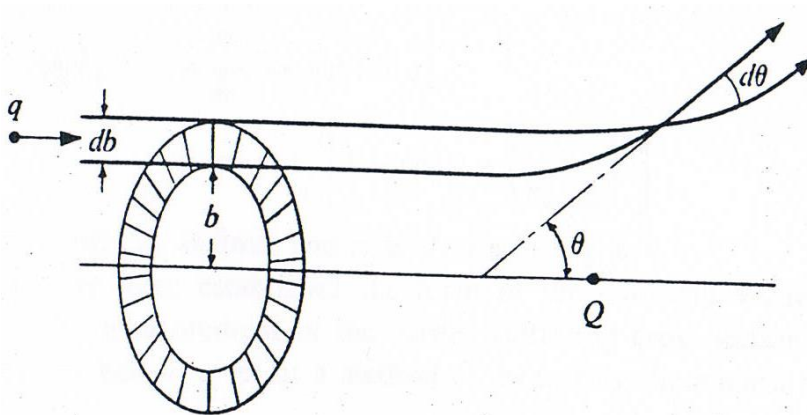


Figura I.4 cambio en la sección transversal debida a un cambio en el parámetro de impacto

Dado que donde un ángulo sólido diferencial, se define como $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \theta d\theta$, al haber una variación db en el parámetro de impacto en consecuencia habrá una variación en la sección transversal $d\sigma$.

La relación entre estas variaciones está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{-2\pi b db}{2\pi \text{sen}\theta d\theta} = \frac{-b db}{\text{sen}\theta d\theta} \quad (I.51)$$

Derivando la ecuación (I.50)

$$db = -\frac{KQq}{mv^2} \text{csc}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (I.52)$$

Sustituyendo las ecuaciones (I.50) y (I.52) en (I.51) y utilizando las equivalencias:

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\text{cos}\frac{\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \text{csc}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{KQq}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\frac{\theta}{2}} \quad (I.53)$$

O bien

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{KQq}{2K_\alpha}\right)^2 \frac{1}{(1 - \text{cos}\theta)^2} \quad (I.54)$$

La sección transversal total, es la integral de la (I.54)

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \left(\frac{KQq}{2K_\alpha}\right)^2 \int_0^\pi \left[\frac{1}{(1 - \text{cos}\theta)^2}\right] d\Omega = \\ &= -2\pi \left(\frac{KQq}{2K_\alpha}\right)^2 \left[\frac{1}{1 - \text{cos}\theta}\right]_0^\pi \end{aligned} \quad (I.55)$$

El cálculo de la sección transversal total mediante esta fórmula diverge. Es decir $\sigma_T = \infty$ (Figura I.5). La explicación que se ha dado a este resultado es que, la divergencia se debe a que el potencial coulombiano es de tipo $V(r) \propto \frac{1}{r}$. Por tanto, cuando $r \rightarrow 0$ $V \rightarrow \infty$. O de otra forma el producto $r^2 \|\vec{F}(r)\|$ es tal que la fuerza es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, por tanto cuando $r \rightarrow 0$ $\|\vec{F}(r)\| \rightarrow \infty$

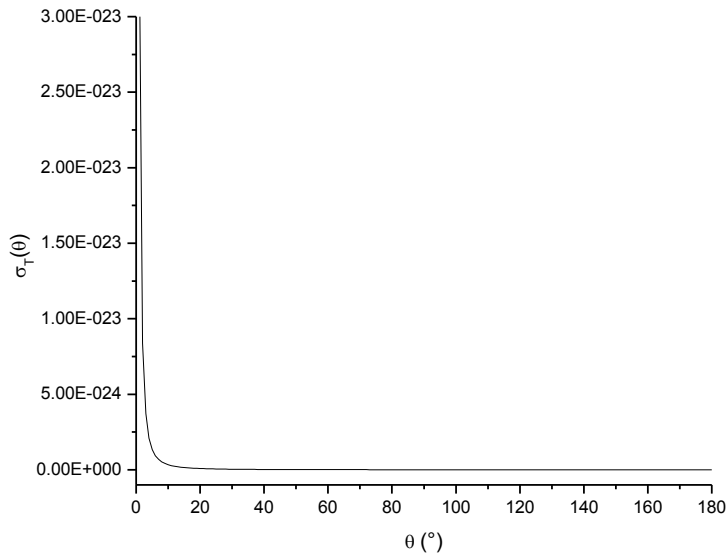


Figura I.5 sección transversal total en función del ángulo de dispersión

En forma similar a la ecuación (I.55) integrando la ecuación (I.54) se puede deducir una expresión la sección transversal de dispersión entre dos ángulos θ_i y θ_f en los cuales $\theta_i \neq 0$. Esto es

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{KQq}{2K_\alpha}\right)^2 \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[\frac{1}{(1.1 - \cos\theta)^2} \right] d\Omega \quad (I.56)$$

De esto resulta

$$\sigma = \left[\frac{-2\pi k}{u} \right]_{1-\cos\theta_i}^{1-\cos\theta_f} \quad (I.57)$$

donde $k = \frac{KQq}{2K_\alpha}$

El potencial de interacción para el sistema partícula- núcleo (potencial eléctrico), de acuerdo a la ley de Coulomb está dado por

$$E_p = E_p(r_c) = \frac{KQq}{r_c} \quad (I.58)$$

donde: $K = 1/4\pi\epsilon_0$, Q es la carga del núcleo y q la carga de la partícula

Si b es el parámetro de impacto o la distancia entre la dirección la trayectoria de la partícula y el centro del núcleo, el momento de la partícula a una distancia alejada del núcleo, es decir cuando el potencial es imperceptible es

$$M(r \rightarrow -\infty) = mv_0 b \quad (I.59)$$

Y por conservación del momento angular se debe de cumplir que el momento cuando $r \rightarrow -\infty$ es igual al momentum angular para cualquier distancia r . Cuando la partícula este en el punto más cercano de interacción (r_c), su momentum angular es

$$M(r_c) = mv_T r_c \quad (I.60)$$

donde v_T es el componente tangencial de la velocidad a la distancia de máxima de aproximación.

Igualando las ecuaciones (I.34) y (I.35)

$$mvb = mv_T r_c \quad (I.61)$$

de donde

$$v_T = \frac{vb}{r_c} \quad (I.61a)$$

Por otro lado, de acuerdo a la ley de la conservación de energía, la energía total es constante; lo que implica que la energía cinética inicial de la partícula K_α , es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial en cualquier punto r en el que intervenga un potencial

$$K_\alpha = \frac{1}{2}mv_T^2 + E_p \quad (I.62)$$

Sustituyendo la ecuación (I.36a)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{vb}{r_c}\right)^2 = K_\alpha - E_p = K_\alpha - \frac{KQq}{r_c} \quad (I.63)$$

Y dado que $K_\alpha = \frac{1}{2}mv^2$ entonces,

$$\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{b}{r_c}\right)^2 = K_\alpha\left(\frac{b}{r_c}\right)^2 = K_\alpha - \frac{KQq}{r_c} \quad (I.64)$$

de donde

$$\left(\frac{b}{r_c}\right)^2 = 1 - \frac{KQq}{K_\alpha r_c} \quad (I. 65)$$

Luego, despejando, la expresión del parámetro de impacto es

$$b = r_c \sqrt{\left(1 - \frac{KqQ}{r_c K_\alpha}\right)} \quad (I. 66)$$

La literatura habla de dos tipos de métodos para el cálculo del radio nuclear: a) Métodos de Radio Fuerza en los cuales se incluyen los métodos de dispersión alfa, decaimiento alfa y dispersión de neutrones rápidos y b) los Métodos de Radio Carga o Electromagnéticos, en los cuales se incluyen la dispersión de electrones, el átomo mesónico, los núcleos espejo, la dispersión de protones y el ajuste isotópico. La mayoría fueron desarrollados en los años 60's. Algunos de ellos son esbozados en los textos de Física Nuclear, aunque da la impresión de que por problemas de facilidades de cálculo no fueron probados más que para un número limitado de isótopos. Por otro lado, el esbozo prácticamente nunca es explícito. Por ejemplo, la Teoría de Dispersión Alfa, se encuentra en la literatura; pero es no nos fue posible encontrar como se utilizó esta teoría para el cálculo del radio carga nuclear. Con el desarrollo de las computadoras, es posible retomar haciendo uso de las facilidades de computo actuales.

II Masa Nuclear

II.1 Defecto de Masa (Δ)

Experimentalmente se ha demostrado que las masas de los diferentes isótopos, expresadas en unidades atómicas (u) están muy cerca del número másico o número de nucleones (A). La fracción relativa, entre la diferencia entre ambos con respecto al número másico, fue denominado por Aston (Squires, 1998) como la fracción de empaquetamiento

$$f = \frac{M(A, z) - A}{A} \quad (II. 1)$$

siendo, A el número másico, z el número atómico y $M(A, z)$ la masa atómica.

Y la diferencia entre la masa atómica y el número másico se le denominó defecto de masa Δ

$$\Delta = M(A, z) - A \quad (II. 2)$$

Los valores de Δ pueden encontrarse en las tablas de radionúclidos, entre otros en The Nuclear Wallet Cards (Audi, 2003) o bien en IAEA Nuclear Live Chart.

Para los primeros isótopos estables hasta el ${}_{7}N^{15}$ los valores de Δ son positivos, lo que implica que su masa es ligeramente superior al número másico. A partir del ${}_{8}O^{16}$, los valores de Δ son negativos, lo que implica que su masa es ligeramente superior al número másico. Posteriormente a los isótopos del Radón (Rn) los valores de Δ son positivos.

Las masas atómicas de los diferentes isótopos se pueden calcular a partir de los valores de Δ .

Ejemplo, para el caso del ${}_{92}U^{238}$ el valor de $\Delta = 47.308948 \text{ MeV}$. Luego la masa

$$\begin{aligned} M(238,92) &= \frac{\Delta (u)}{931.49419736 \left(\frac{\text{MeV}}{u}\right)} + A = \frac{47.308948 \text{ MeV}}{931.49419736 \left(\frac{\text{MeV}}{u}\right)} + 238 \\ &= 238.0507882369 \end{aligned}$$

Para este cálculo se usó el valor de Δ reportado por Audi et al. (2003). Este valor es similar a la masa atómica 238.050788247, aunque difiere a partir del 8° decimal.

En la Figura II.1 se presenta la coincidencia entre la masa experimental y la masa calculada mediante el defecto de masa para los 237 isótopos estables. Se puede observar una coincidencia excepcional. De hecho, la diferencia promedio es $5.826 \times 10^{-6} u$ con una

desviación estándar de 3.764×10^{-6} u; que puede deberse tan solo a la diferencia en el número de cifras significativas de las masas experimental y los valores del defecto de masa.

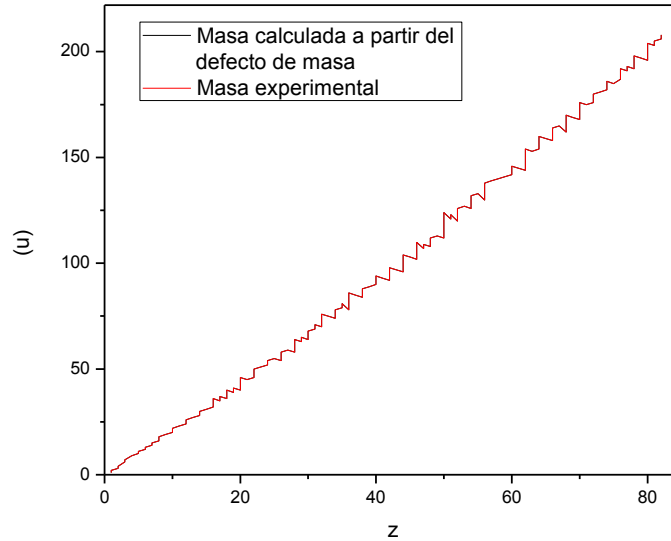


Figura II.1 Masa experimental y masa calculada mediante el defecto de masa para los 237 isótopos estables.

Se puede considerar el contenido total de energía de un núcleo como la suma total de tres componentes. La mayor parte de la energía la aporten las fuerzas nucleares que hace posible la cohesión de los componentes del núcleo. Esta energía es modificada por la tensión superficial y adicionalmente una parte de la energía total está asociada a las fuerzas de repulsión eléctricas.

Las fuerzas nucleares mantienen los protones y los neutrones juntos y al mismo tiempo están relacionadas con: la capacidad de ciertos núcleos de emitir partículas beta (β^-) y positrones (β^+) o con la posibilidad de fisión de algunos núcleos transuránicos.

La emisión de partículas beta tiene su origen en la trasmutación de un neutrón en protón



La emisión de positrones es resultado de la trasmutación de un protón en neutrón



donde: ν y $\bar{\nu}$ designan un neutrino y un antineutrino respectivamente.

Ambos fenómenos, decaimiento beta y emisión de positrón, permite establecer que el campo nuclear, asociado a las fuerzas nucleares, no distingue protones de neutrones. Por tanto, es posible representar las fuerzas nucleares, en función de un solo concepto, la energía de enlace. Este término se puede designar por BE (por sus siglas en inglés *Binding Energy*) o simplemente B .

II.2 Energía de enlace nuclear

La energía de enlace nuclear $B_N(A, z)$ puede ser definida como la energía necesaria para mantener unidos los nucleones, o bien es la energía necesaria para separar un núcleo en sus nucleones

La energía de enlace nuclear es la diferencia en términos de energía entre la suma de las masas de los constituyentes de un núcleo y la masa nuclear $M_N(A, z)$. Es decir

$$B_N(A, z) = [zm_p + (A - z)m_n - M_N(A, z)]c^2 \quad (II. 5)$$

donde: m_p y m_n son las masas, del protón, del neutrón, $n = A - z$ es el numero de neutrones, c es la velocidad de la luz y c^2 el factor que permite calcular el equivalente en energía de la masa.

Experimentalmente la masa nuclear $M_N(A, z)$ solo se puede determinar mediante las masas atómicas $M_A(A, z)$. La relación entre ambas es

$$M_N(A, z) = M_A(A, z) - zm_e + B_e(Z) \quad (II. 6)$$

o

$$M_A(A, z) = M_N(A, z) + zm_e - B_e(Z) \quad (II. 6a)$$

donde: m_e es la masa del electrón, zm_e es la suma de las masas de los electrones orbitales y $B_e(Z)$ es la energía de enlace de los electrones.

De acuerdo a Lunney (2003)

$$B_e(Z) = a_{el}Z^{2.39} + b_{el}Z^{5.35} \quad (II. 7)$$

donde: $a_{el} = 1.44381 \times 10^{-5}$ MeV and $b = 1.55468 \times 10^{-12}$ MeV

En términos de la masa atómica la ec. (II.5) puede escribirse como

$$B_N(A, z) = [zm_p + (A - z)m_n + zm_e - M(A, z)]c^2 \quad (II. 5a)$$

Dado que la masa de un átomo de hidrógeno es la suma de la masa de un protón más la de un electrón $m_H = m_p + m_e$, es común encontrar la ecuación anterior en la forma

$$B_N(A, z) = [zm_H + (A - z)m_n - M(A, z)]c^2 \quad (II. 5b)$$

Es común utilizar la energía de enlace promedio por nucleón como la relación entre la energía de enlace y el número de nucleones BE/A . Esta cantidad varía de un isotopo a otro en forma poco sistemática.

En la Figura II.2 se presenta la energía de enlace por nucleón para los isótopos estables. Para isotopos ligeros BE/A es relativamente baja e incrementa muy rápidamente. El máximo ocurre para isótopos con numero másico alrededor de $A \sim 50$. En este caso el valor máximo es del orden de 8.8 MeV/nucleón. Para isótopos con mayor número másico ($A > 50$) BE/A disminuye paulatinamente. Para $A \sim 140$ $BE/A \sim 8.4$ MeV/nucleón y para $A \sim 238$ (caso U^{238}) $BE/A \sim 7.6$ MeV.

Los bajos valores de BE/A correspondientes a isótopos ligeros, se han interpretado como resultado de efecto de la tensión superficial. Para altos números másicos, la disminución se ha adjudicado al aumento de las fuerzas de repulsión entre protones.

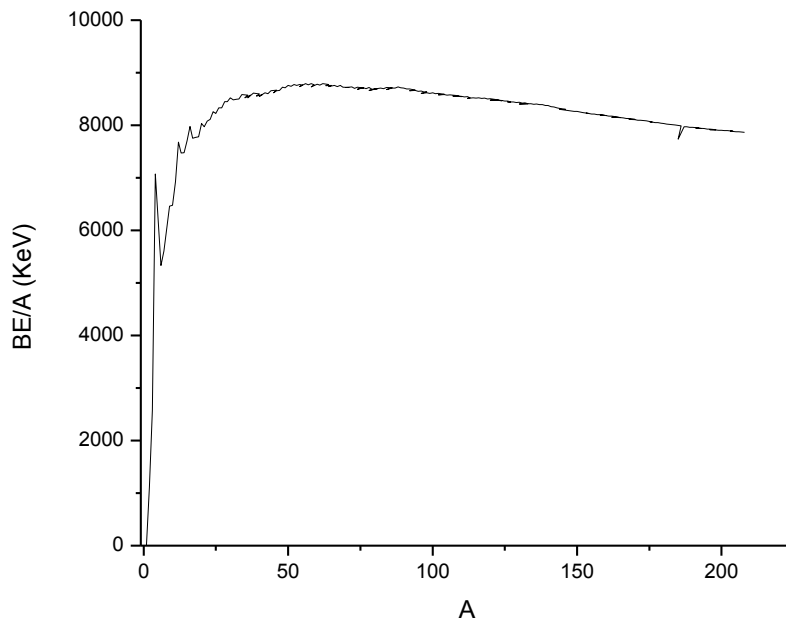


Figura II.2 energía de enlace por nucleón para los isótopos estables

II.3 Fórmula semi-empírica de la masa nuclear

No hay un modelo único que explique la masa nuclear. Por lo tanto, el tema continúa siendo vigente.

La fórmula semi-empírica de la masa nuclear, es una expresión que permite aproximar varias de las propiedades del núcleo atómico en términos del número de protones y neutrones. Fue propuesta en 1935 por el físico alemán Carl Friedrich von Weizsäcker. De acuerdo a él la masa nuclear básicamente es la suma de las masas de los constituyentes, a los cuales debe aplicarse una serie de términos correctivos, para dar cuenta de las fuerzas de corto alcance, similares a las fuerzas intermoleculares que intervienen en una gota líquida. Y aunque los coeficientes que se definen en ella han sido afinados, la estructura de la fórmula sigue siendo la misma. Teóricamente se basa en el modelo de la gota líquida el cual fue propuesto por George Gamow y desarrollado por Niels Bohr y John Archibald Wheeler, aunque, como su nombre lo indica, es basada en mediciones empíricas.

El modelo de la gota líquida, históricamente fue el primer modelo que describió propiedades nucleares. Surgió de la observación de que las fuerzas nucleares exhiben propiedades de saturación. La energía de enlace por nucleón, se consideró una prueba de ello.

El modelo de la gota líquida trata a los núcleos como una gota de un fluido nuclear incomprensible de muy alta densidad. El núcleo está constituido de nucleones (protones y neutrones) que se mantienen unidos mediante una fuerza nuclear. De manera semejante a las fuerzas intermoleculares en un líquido, las fuerzas internucleares, se asumieron, que son de corto alcance y tienen propiedades de saturación.

Esta analogía llevó a la adopción de varios términos en la fórmula de la masa que debía influir en la naturaleza del núcleo

$$M_A(A, z) = M_0 - M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 \quad (II. 8)$$

El primer término M_0 corresponde a la **masa de los constituyentes**

$$M_0 = zm_H + nm_n \quad (II. 9)$$

A la suma de la masa de los constituyentes, debe substraerse la **energía de volumen** o energía de empaquetamiento de los nucleones $E_v = M_1$, la cual es proporcional a volumen nuclear

$$M_1 \propto V \text{ o } M_1 = kV \quad (II. 10)$$

El signo negativo sobre M_1 en la ec. (II.8) significa que hay que restar a la masa de los constituyentes un equivalente de la energía necesaria para mantener enlazados los nucleones

El término M_2 corresponde a la **energía de superficie** o energía generada por el efecto de la tensión superficial, similar a una gota líquida, la cual debe ser función del número de nucleones o número másico (A)

$$M_2 = E_s(A) \quad (II. 11)$$

El término M_3 corresponde a la **energía potencial eléctrica**, la cual debe ser función tanto del número atómico z como del número másico A

$$M_3 = E_p(A, z) \quad (II. 12)$$

El término M_4 corresponde a la **simetría** o apareamiento neutrón-protón

El término M_5 corresponde a la **paridad de spin**, es decir, si al apareamiento entre protones o entre neutrones.

II.3.1 Energía de volumen

Si se asume que el volumen nuclear es proporcional al número de nucleones o número másico

$$V \propto A \text{ o } V = k'A \quad (II. 13)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ec. (II.13) en la ec. (II.10)

$$M_1 = E_v = kk'A = a_1A \quad (II. 10a)$$

donde a_1 es una constante de proporcionalidad a determinar, que toma en cuenta la proporcionalidad tanto con el volumen como con el número de nucleones

$$a_1 = k k' \quad (II. 14)$$

II.3.2 Energía de Tensión Superficial

En un líquido, las moléculas que se encuentran en el interior son atraídas por todas las moléculas vecinas, de tal forma que no hay fuerza resultante que las desplace en determinado sentido. A diferencia, las moléculas de la superficie son atraídas por las

moléculas del interior del líquido, generando una *tensión superficial*. En el caso de gotas de diferente tamaño, las gotas más grandes presentan mayor superficie, por tanto, tiene un mayor número de moléculas en la superficie. De esta manera la superficie tiene un exceso de energía en relación con el interior del líquido. La unidad de energía por unidad de superficie, en el sistema internacional (SI) es $\text{Jm}^{-2} = \text{kg s}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$. Esta última notación da cuenta de que esa cantidad de energía por unidad de superficie tiene unidades equivalentes a las de fuerza por unidad de longitud, por tal motivo a este tipo de energía se le reconoce como tensión superficial.

La *tensión superficial* γ se define como la relación entre el trabajo realizado o la energía requerida para incrementar la superficie de un líquido E_S y el aumento del área superficial del líquido dS . Esto es

$$\gamma = \frac{E_S}{S} \quad (\text{II. 15})$$

El Modelo Nuclear de la Gota Líquida asumió que, si los núcleos atómicos eran similares a una gota esférica, por tanto, debía existir una tensión superficial, de manera similar a lo que ocurre en las gotas un líquido.

Si M es la masa de un núcleo cuyo volumen es V , hipotéticamente se puede definir una densidad nuclear ρ para todos o cualquier núcleo

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (\text{II. 16})$$

Si se considera el volumen nuclear de forma esférica

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{II. 17})$$

a este volumen le debe corresponder una superficie

$$S = 4\pi R^2 \quad (\text{II. 18})$$

De la definición de tensión superficial, ec. (II.15)

$$E_S = \gamma S \quad (\text{II. 15a})$$

Sustituyendo la ec. (II.18) la energía de superficie resulta

$$E_S = 4\pi\gamma R^2 \quad (II. 15b)$$

Arya (1966), reporta que el coeficiente de tensión superficial nuclear es del orden de 10^{10} T/mm, pero no hay ninguna referencia del método de determinación.

De la ec. (II.13) $V = k'A$ igualando con la ec. (II.17) y despejando

$$R^3 = \frac{3k'A}{4\pi} \quad (II. 19)$$

Sustituyendo la ec. (II.19) en la ec. (II.15b) y esta a su vez en la ec. (II.11) resulta

$$M_2 = E_S = a_2 A^{\frac{2}{3}} \quad (II. 11a)$$

Donde

$$a_2 = (3k')^{2/3}(4\pi)^{1/3}\gamma \quad (II. 20)$$

es una constante de proporcionalidad que incluye el coeficiente de tensión superficial.

II.3.3 Energía potencial nuclear

La densidad de carga eléctrica en un núcleo atómico cualquiera –esencialmente debida a los protones- puede expresarse como

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad (II. 21)$$

donde $Q = ze$ siendo z el número de protones y $e = 1.60217656535 \times 10^{-19} C$ la carga eléctrica elemental.

Si se considera que los núcleos son esféricos de radio nuclear R , sustituyendo la ec. (II.17) en la ec. (II.21) la densidad nuclear puede expresarse como

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (II. 22)$$

La constitución del núcleo se puede ver como al adición paulatina de cargas diferenciales dq hasta llegar a conjuntar una carga final Q . Supóngase que en un cierto momento se tienen una carga inicial q a la cual se pretende agregar una carga adicional dq . De acuerdo a la ley de Coulomb, cargas iguales se rechazan, en cuyo caso la fuerza de repulsión es

$$F_{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{r^2} \quad (II.23)$$

y el campo eléctrico es

$$\mathcal{E} = \frac{F_{\mathcal{E}}}{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (II.24)$$

siendo $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ la constante de Coulomb y $\epsilon_0 = 8.85415 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ la permisividad eléctrica en el vacío.

Por tanto el agregar una carga diferencial dq requiere vencer un potencial

$$V = \frac{E_c}{dq} \quad (II.25)$$

Y disponer de una energía equivalente a la energía potencial

$$dE_c = Vdq \quad (II.26)$$

Por definición, la relación entre potencial eléctrico V y campo eléctrico \mathcal{E} está dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (II.27)$$

El potencial eléctrico producido por una carga primaria sobre cualquier carga a agregar, se puede obtener igualando el campo eléctrico (ec. II.27) con la fórmula para el de campo eléctrico obtenida de la ley de Coulomb (ec. II.24)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (II.28)$$

El potencial eléctrico se obtiene integrando la expresión anterior desde el infinito hasta el radio r de la carga primaria q . Esto es

$$\int_0^V \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) \partial r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r^2} \partial r \quad (II.29)$$

De donde resulta

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}\right) \quad (II.30)$$

o bien

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (II.30a)$$

Sustituyendo en la expresión de energía potencial eléctrica (ec. II.26)

$$dE_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dq \quad (II.31)$$

Asumiendo que la densidad de carga nuclear es constante, para un núcleo primario de carga q y radio r la densidad puede escribirse

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (II.32)$$

E igualando las ecuaciones (II.22) y (II.32)

$$q = \frac{QRr^3}{R^3} \quad (II.33)$$

Luego, diferenciando

$$dq = \frac{Q}{R^3} 3r^2 dr \quad (II.34)$$

Sustituyendo (II.33) y (II.34) en (II.31)

$$dE_c = \frac{\left(\frac{QRr^3}{R^3}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{Q}{R^3} 3r^2 dr\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{R^5} r^4 dr \quad (II.35)$$

La energía potencia que se debe vencer para constituir un núcleo de radio R y carga Q se obtiene integrando la ec. (II.35)

$$\int_0^{E_p} dE_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{R^5} \int_0^R r^4 dr \quad (II.36)$$

de donde

$$E_c = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{Q^2}{R} \quad (II.37)$$

Dado que la carga eléctrica nuclear se debe a los protones $Q = ze$, la ecuación (II.37) puede escribirse en términos del número atómico z como

$$E_c = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{z^2 e^2}{R} \quad (II.38)$$

E_c es la energía que hay que vencer para mantener unidos los protones. Esta expresión puede dar a entender que el radio nuclear solo depende de los protones. Sin embargo, el

radio nuclear R , debe tomar en cuenta no solo a los protones en el núcleo, sino también de los neutrones, para lo cual sería necesario ponerla en términos del número másico.

Utilizando la ec. (II.19), en la ecuación (II.38) la ec. (II.12) se puede expresar simplemente como

$$M_3 = E_c = a_3 \frac{z^2}{A^{1/3}} \quad (II. 12a)$$

donde

$$a_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) e^2 \left(\frac{4\pi}{3k'} \right)^{1/3} \quad (II. 39)$$

II.3.4 Efecto de Simetría o Paridad

Un análisis de los isotopos, muestra que los isotopos más estables tienen un número pares protón-neutrón apareado. Los núcleos con mayor energía de enlace, por tanto más estables, son aquellos para los cuales $A = 2z$. Cualquier desviación de disminuye la energía de enlace. Tomando en cuenta este hecho se propuso un término correctivo positivo para los nucleones no apareados. De acuerdo a Arya (1966) este término tiene la forma

$$M_4 = a_4 \frac{\left(\frac{A}{2} - z \right)^2}{A} \quad (II. 40)$$

donde a_4 es un coeficiente que se ha determinado empíricamente.

Evans (1972) establece que el exceso en el número de nucleones $|n - z|$ produce un déficit de energía de enlace en vista de que el exceso, está cuánticamente fuera del alcance de otros nucleones, la fracción del volumen nuclear afectado es $|n - z|/A$ y el déficit total es proporcional a

$$M_4 = a_4 \frac{(n - z)^2}{A} = a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \quad (II. 41)$$

II.3.5 Acoplamiento de spin o efecto non-par

Otro importante factor que afecta la energía de enlace, por lo tanto, la masa de los nucleones es el hecho de que el número de los neutrones o los protones sea par o non.

Los núcleos más estables son aquellos que tienen número par de protones y de neutrones, lo que se ha interpretado como un apareamiento del spin entre nucleones de la misma especie. Los núcleos menos estables son aquellos que tienen número no tanto de protones como de neutrones.

El efecto de acoplamiento de spin se representa por el término $\pm\delta(A, z)$; el cual es un factor negativo para el caso de los núcleos más estables o con mayor energía de enlace, es decir los que tienen A par y z par. Es igual a cero para los núcleos moderadamente estables o con número másico A non, y positivo para los núcleos menos estables o con menor energía de enlace (A par y z non).

II.3.6 Coeficientes de la Formula Semiempírica de la Masa Atómica

Luego, sustituyendo las ecs. (II.10a), (II.11a), (II.12a), (II.40) o (II.41) la formula semiempírica, según Arya (1966) toma la forma

$$M_A(A, z) = M_0 - a_1A + a_2A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{\left(\frac{A}{2} - z\right)^2}{A} \pm \delta(A, z) \quad (II. 42)$$

Mientras que de acuerdo a Evans (1972), toma la forma

$$M_A(A, z) = M_0 - a_1A + a_2A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \pm \delta(A, z) \quad (II. 43)$$

La diferencia entre ambas ecuaciones estriba en el término de simetría. Esa sola diferencia implica que el conjunto de valores de los coeficientes debe ser diferente.

La determinación de los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y $\delta(A, z)$ se dice en la literatura, ha sido efectuado, por diferentes autores, a partir de mediciones experimentales. Evans (1972) presenta una tabla comparativa de los diferentes cálculos de los coeficientes de la formula semiempírica (**Tabla IV.5**).

Arya (1964) utiliza como coeficientes: $a_1 = 0.0169123 \text{ u}$, $a_2 = 0.019114 \text{ u}$, $a_3 = 0.0007626 \text{ u}$, $a_4 = 0.10175 \text{ u}$, $\delta(A, z) = -0.036 A^{-\frac{3}{4}}$ para núcleos más estables (A par y z par), $\delta(A, z) = 0$ para núcleos con estabilidad intermedia (A: non) y $\delta(A, z) = 0.036 A^{-\frac{3}{4}}$ para núcleos menos estables (A par y z non).

En la Figura II.3 se presentan la masa experimental (obtenida a partir de [LiveChart of Nuclides](#)) y la masa calculada mediante la fórmula semiempírica, de 237 isótopos estables. Para el cálculo de las masas se han utilizado la formula y los coeficientes reportados por

Arya (1964). Aparentemente hay una coincidencia sorprendente. Sin embargo, en realidad existen diferencias entre ambos valores.

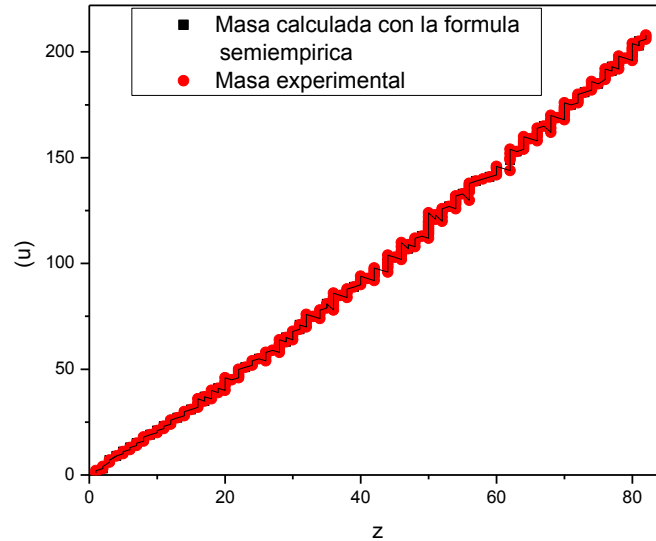


Figura II.3 Masa experimental y Masa calculada mediante la fórmula semiempírica, de los 237 isótopos estables.

En la Figura II.4 se presenta las diferencias entre los valores de la masa experimental y la masa calculada mediante la fórmula semiempírica. Como puede observarse aparentemente no hay ninguna sistematicidad. El valor promedio de las diferencias es $-8.89051E^{-4} u$ con una desviación estándar $\sigma = 0.00351 u$. Aunque la diferencia promedio es del orden de 0.83 MeV, es decir no es muy grande, la desviación estándar es del orden de 3.27 MeV, lo que es consecuencia de que las diferencias son muy variables.

Royer (2008) retomó el tema y calculó los coeficientes para 2027 isótopos. Logró mejora la precisión en el cálculo de la masa. No fue posible en esta tesis analizar este reciente modelo.

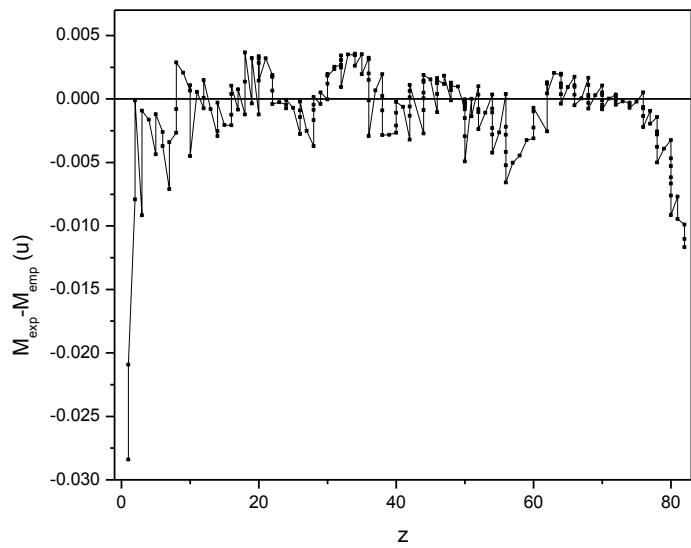


Figura II.4 Diferencia entre las masas experimentales y las masas obtenida con la formula semiempírica de los 237 isótopos estables.

SEGUNDA PARTE

Problemas de Recursividad en el Modelo de la Gota Líquida

(Análisis Teórico y Numérico)

III. Cálculo del Radio Nuclear Coulombiano usando Teoría de Dispersión Alfa

Se sabe que la Teoría de Dispersión Alfa, es un método mediante el cual se determinó el radio carga nuclear, pero no está implícito en la literatura como se utilizó. A continuación, se desarrolla un análisis teórico que permite calcular el radio carga nuclear y poner en evidencia las restricciones del método. Se parte de la ecuación que relaciona el parámetro de impacto (b) con la distancia de mínimo acercamiento (r_c), ec. (I.66).

La máxima aproximación de una partícula alfa con un núcleo se obtiene cuando en el caso de un choque frontal, es decir para $b = 0$. Despejando r_c de la ec. (I.66)

$$r_c = \frac{KqQ}{K_\alpha} \quad (III. 1)$$

En la Figura III.1, se presentan la distancia mínima de aproximación de partículas alfa de $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ para los 237 isotopos estables encontrados en la literatura (a) en función del número atómico (b) en función del número másico. La Figura III.1a, muestra valores discretos de r_c observando una dependencia lineal de r_c con el número atómico. La Figura III.1b muestra que r_c es igual para los isotopos de un mismo número atómico; lo cual pone en relieve que la única fuerza que se ha puesto en juego es la repulsión coulombiana.

Se puede asumir que la distancia mínima de aproximación corresponde a la suma de los radios coulombianos de la partícula alfa y del núcleo con el cual interacciona

$$r_c = R_\alpha + R_N \quad (III. 2)$$

La ecuación (III.67) implícitamente, establece que la suma de los radios es inversamente proporcional a la energía de la partícula alfa; lo que implica que tales radios no son los radios físicos, puesto que, para diferentes energías, la distancia máxima de aproximación es diferente. Sin embargo, su cálculo permite tener una idea de las dimensiones de los núcleos atómicos.

Se puede asumir que el volumen de un núcleo atómico es proporcional al número de nucleones

$$V_n \propto A \quad \text{o} \quad V_n = kA \quad (III. 3)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad a determinar.

Asumiendo además que el volumen nuclear es esférico $V_n = \frac{4}{3}\pi R_n^3$ y utilizando la ec. (III.3)

$$R_n = \sqrt[3]{\frac{3kA_n}{4\pi}} \quad (III.4)$$

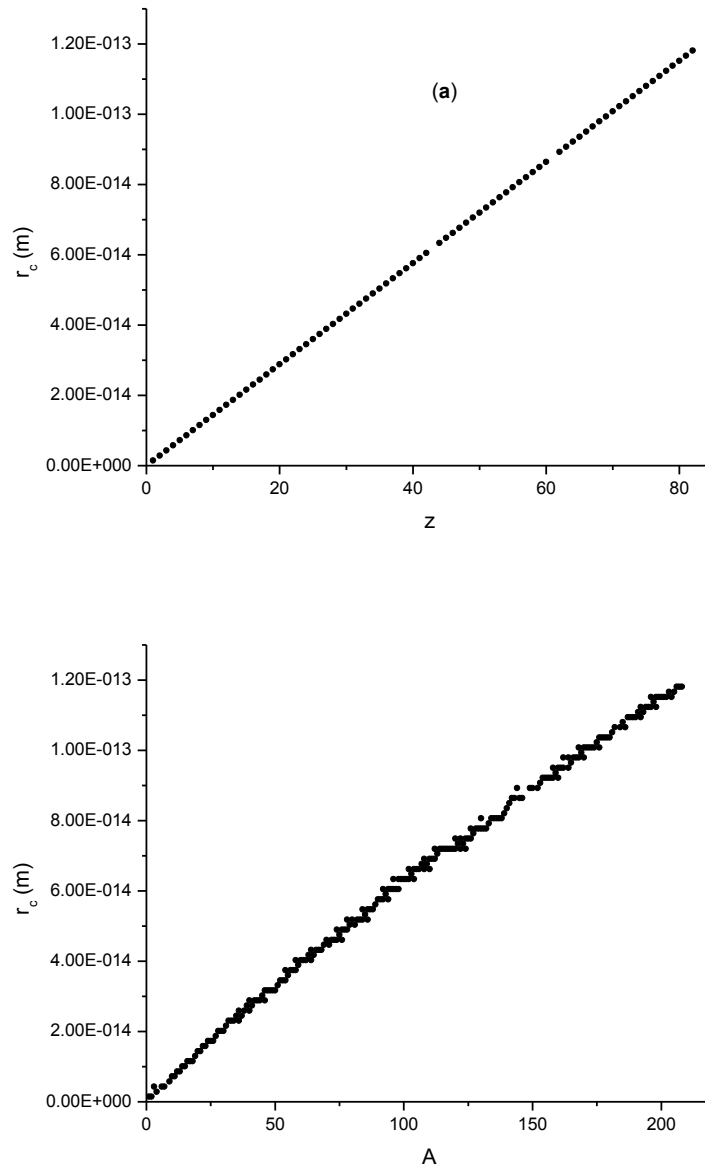


Figura III.1.- Distancia mínima de aproximación de partículas alfa de $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ (a) en función del número atómico (b) en función del número másico.

Sustituyendo la ec. (III.4) en en la ec. (III.2) se puede verificar que

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}(A_n + A_\alpha)} \quad (III. 5)$$

de donde

$$k = \frac{4\pi r_c^3}{3(A_n + A_\alpha)} \quad (III. 6)$$

Esta expresión permite calcular el coeficiente de proporcionalidad correspondiente al radio nuclear coulombiano (ec. III.4).

En la Figura **III.2** se presenta el comportamiento de k en función del número atómico. Evidentemente k no es propiamente una constante, depende de r_c^3 y es inversamente proporcional a A_n . Los picos, se deben a que para un mismo número atómico hay varios isótopos.

Conociendo la distancia mínima de aproximación, es relativamente fácil calcular el radio nuclear utilizando la ec. (III.4). En la Figura **III.3** se presenta los radios nucleares coulombianos, para los 237 isotopos estables conocidos, considerando partículas alfa de $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ (a) en función del número atómico (b) en función del número másico. Cabe remarcar que en este caso se han utilizado los coeficientes específicos para cada valor de A_n .

La Figura **III.3a** muestra una dependencia lineal del radio nuclear con el número atómico. Mientras que la Figura **III.3b** muestra un que para todos los isotopos con el mismo número atómico el radio es similar.

El valor de k no es constante, para $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ su valor promedio es $k = 1.25407 \times 10^{-41} \text{ m}^3$ con una desviación estándar de $\sigma = 9.87189 \times 10^{-42} \text{ m}^3$; su desviación estándar del orden del 78.72% respecto al valor promedio. Aun así, se puede buscar una correlación entre el radio nuclear y el número másico, para ello la ecuación (III.4) se puede escribir como

$$R_n = R_{0c} A^{\frac{1}{3}} \quad (III. 7)$$

donde:

$$R_{0C} = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}} \quad (III.8)$$

Para $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ calculando los valores de R_{0C} para cada uno de los isótopos estable y promediando se obtiene $R_{0C} = 1.29111 \times 10^{-14} \text{ m} = 1.291116 \times 10^{-12} \text{ cm}$ con una desviación estándar $\sigma = 4.8398 \times 10^{-15} \text{ m}$. Este valor es del orden de 9 veces superior al reportado en la literatura para dispersión de partículas alfa ($R_0 = 1.414 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.414 \times 10^{-13} \text{ cm}$).

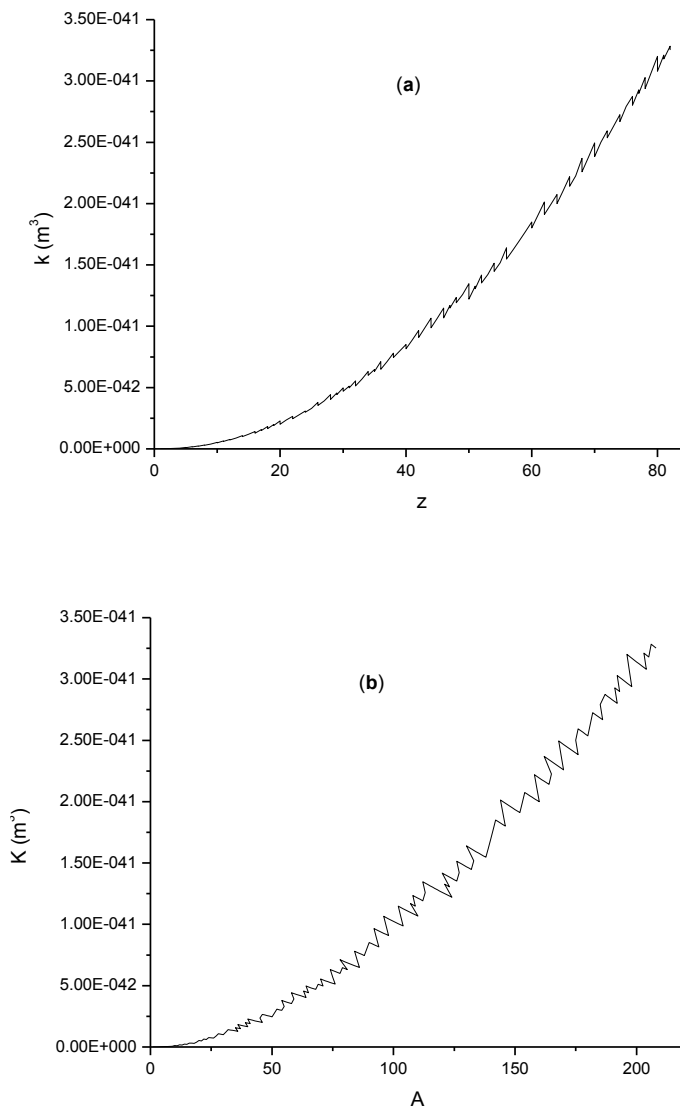


Figura III.2.- Coeficiente de proporcionalidad para el cálculo de radio nuclear para partículas alfa de $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ (a) en función del número atómico (b) en función del número másico.

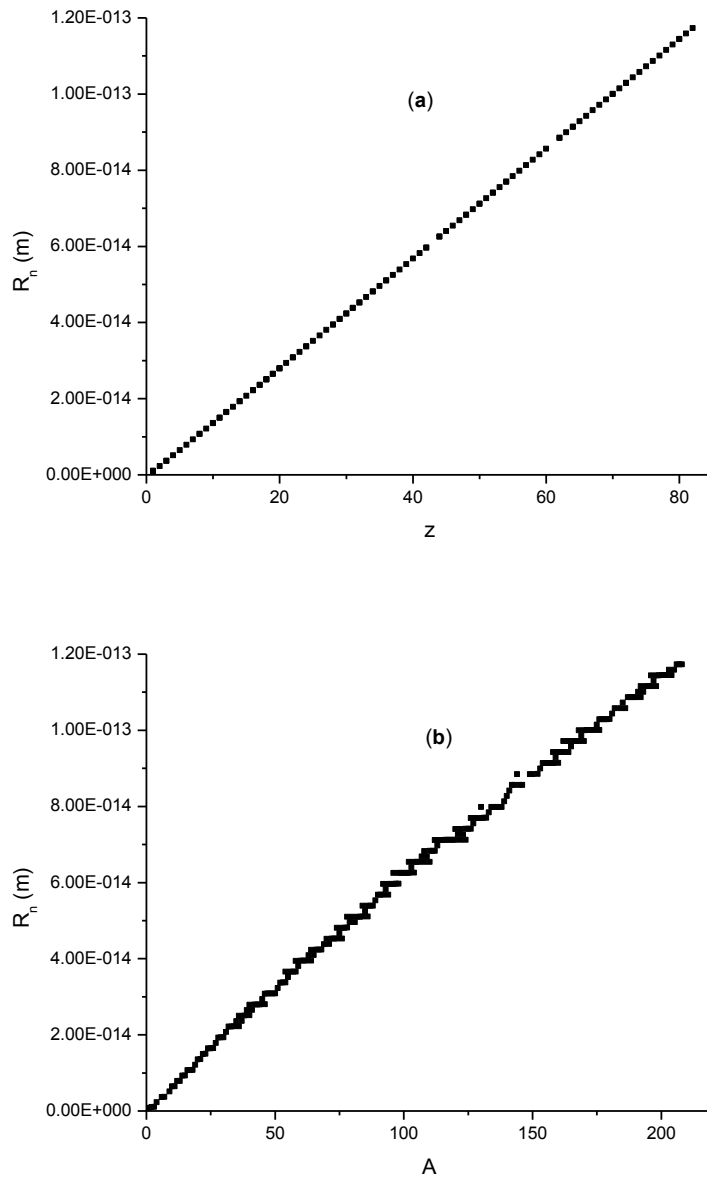


Figura III.3.- Radio Nuclear Coulombiano para los 237 isotopos estables considerando partículas alfa de $K_\alpha = 2 \text{ MeV}$ (a) en función del número atómico (b) en función del número másico.

Ciertamente, en la literatura no se especifica la energía de las partículas alfa ni el rango del número másico de los isotopos estudiados.

Si la energía de las partículas alfa es $K_\alpha = 4 \text{ MeV}$, el valor promedio resulta $R_{0C} = 6.4555 \times 10^{-15} \text{ m} = 6.4555 \times 10^{-13} \text{ cm}$ con una desviación estándar de $\sigma =$

$2.41999 \times 10^{-15} m$. Solo para isótopos más ligeros que el Be tienen valores del mismo orden que el reportado en la literatura ($R_0 = 1.414 \times 10^{-13} cm$)

Si la energía de las partículas alfa es $K_\alpha = 8 MeV$, el valor promedio de $R_{0C} = 3.22277 \times 10^{-15} m$ con una desviación estándar de $\sigma = 1.20995 \times 10^{-15} m$; valor que es mayor que el doble del valor reportado en la literatura. Con partículas alfa de esta energía solo para isótopos más ligeros que el aluminio tienen valores inferiores al reportado en la literatura ($R_0 = 1.414 \times 10^{-13} cm$).

En la Figura III.4 Se presenta los valores promedio de R_{0C} en función de la energía de las partículas alfa, para el conjunto de isótopos estables. Podría decirse que R_{0C} converge a 0, pero no converge R_0 .

A una energía de 25 MeV para todos los isótopos con $z < 69$ los valores de $R_{0C} < R_0$. Aún para una energía hipotética de $K_\alpha = 100 MeV$, todos los valores de $R_{0C} < R_0$. No se tomaron en cuenta consideraciones relativistas.

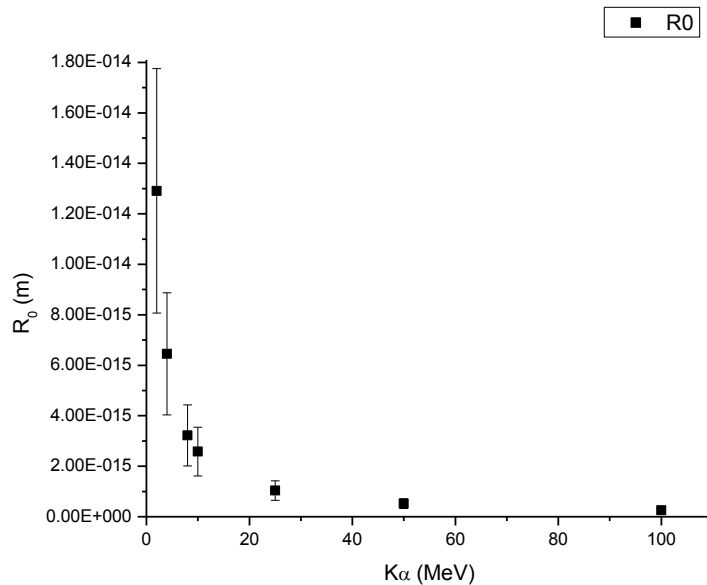


Figura III.4. Valores de R_{0C} en función de la energía de las partículas alfa K_α

Conclusiones

El método de cálculo propuesto, es fácilmente reproducible. En este apartado, fue desarrollado para el conjunto de los 237 isótopos estables encontrados en la literatura, asignando a las partículas alfa una energía de $K_\alpha = 2, 4, 8, 10, 25$ y $100 MeV$. Puede ser

extendido para el conjunto de los isótopos conocidos, aunque es previsible que los resultados sean similares. Para todos estos valores K_α se calculó la distancia mínima de aproximación de la partícula alfa y se calculó para cada caso un valor de R_0 promedio. Sin embargo, no se encontró el valor reportado en la literatura.

El rango de isótopos para los cuales el valor de R_{0c} sea del mismo orden del encontrado en la literatura corresponde a isótopos ligeros. Evidentemente no se puede hablar de un valor único, primeramente porque en la ecuación (III.8) k no es constante sino que es una función que depende de r_c^3 y de A_n ; mientras que a su vez r_c depende de K_α . A $K_\alpha = 8 \text{ MeV}$ solo para isótopos más ligeros que el aluminio R_{0c} tienen valores inferiores al reportado en la literatura. Adicionalmente la desviación estándar de R_{0c} es del orden de 37% de su valor promedio, lo que refleja una enorme dispersión.

Este análisis permite interpretar que si se consideran una interacción estrictamente coulombiana no se puede concluir que el radio nuclear es proporcional al número másico, ni que la densidad nuclear es constante. De hecho, la Figura III.3b muestra que la correlación entre el radio nuclear y el número másico, está más cerca de dependencia lineal que de una dependencia con $A^{\frac{1}{3}}$. Adicionalmente el radio nuclear es el mismo para isótopos con el mismo número másico, a pesar de que el número de nucleones es diferente.

IV. Problemas de Recursividad en la Formula Semiempírica de la Masa

La fórmula semiempírica de la masa permite obtener valores de la masa atómica muy cercanos a los valores experimentales, sin embargo, como se ha señalado en el Capítulo II (§ II.3.5) el cálculo de la diferencia entre los valores experimentales y valores calculados, presenta diferencias importantes (Figura II.4).

La pretensión de este trabajo fue elucidar la causa de esas diferencias y si fuera posible presentar un método reproducible de cálculo de los coeficientes, sin necesidad de asumir que la densidad nuclear es constante. Hay varios problemas de carácter didáctico con relación a la formula semiempírica; entre otros, el primero de ellos es que el método de cálculo de los coeficientes no es explícito en la literatura, el segundo de ellos es que se encuentra diferentes valores de los coeficientes de los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y $\delta(A, z)$.

IV.1 Análisis de los términos componentes de la formula semiempírica

El primer problema a resolver a propósito de la formula semiempírica es entender el origen de los coeficientes de la formula (ec. II.43).

Por definición, la energía de enlace nuclear, $B_N(A, z)$ es la diferencia entre la masa de los constituyentes de un átomo y la masa atómica

$$B_N(A, z) = [zm_p + (A - z)m_n - M_N(A, z)]c^2 \quad (II. 5)$$

Si la masa de los constituyentes es

$$M_0 = zm_H + nm_n \quad (II. 9)$$

La energía de enlace nuclear ec. (II.5) se puede escribir como

$$B_N(A, z) = [M_0 - M_N(A, z)]c^2 \quad (II. 5a)$$

y re-arreglando la masa atómica es

$$M_A(A, z) = M_0 - \frac{B_N(A, z)}{c^2} \quad (II. 5b)$$

De acuerdo a Evans (1972) la formula semiempírica de la masa atómica está dada por

$$M_A(A, z) = M_0 - a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \pm \delta(A, z) \quad (II. 43)$$

Por analogía entre (II.5b) y (II.43) los últimos 5 términos de la ec. (II.43) corresponden a la energía de enlace

$$-\frac{B_N(A, z)}{c^2} = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \pm \delta(A, z) \quad (IV. 1)$$

O bien

$$B_N(A, z) = \left[a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \mp \delta(A, z) \right] c^2 \quad (IV. 1a)$$

Nota: La diferencia en los signos entre las ec. (II.43) y (IV.1a) se debe a que la primera ecuación está en términos de masa y la segunda en términos de energía. En términos de la masa, la energía de volumen es negativa, lo que implica que se utilizó una fracción de la masa como energía de enlace; por ello la masa atómica es menor que la suma de los constituyentes. En términos de términos de energía, la energía de volumen es positiva.

La ec. (IV.1a) puede escribirse como

$$B_N(A, z) = B_1 - B_2 - B_3 - B_4 \mp \delta(A, z) \quad (IV. 2)$$

Haciendo uso de los coeficientes reportados por Arya (§ II.3.6) en la Figura **IV.1**, se presenta en términos de masa, los valores de los componentes de la energía de enlace de 237 isótopos estables. Puede observarse que la componente más determinante de la formula semiempírica corresponde a la energía de volumen $M_1 = -a_1 A$. Es evidente que la energía de volumen es una función lineal de A y a_1 simplemente corresponde a la pendiente. Dividiendo entre el número másico la energía de volumen por nucleón evidentemente es constante.

¿Cómo se obtiene el coeficiente a_1 ? Si se conociera la energía de volumen, por regresión lineal podría fácilmente determinarse a_1 ; pero en este simple término hay dos incógnitas por lo pronto difíciles de relacionar.

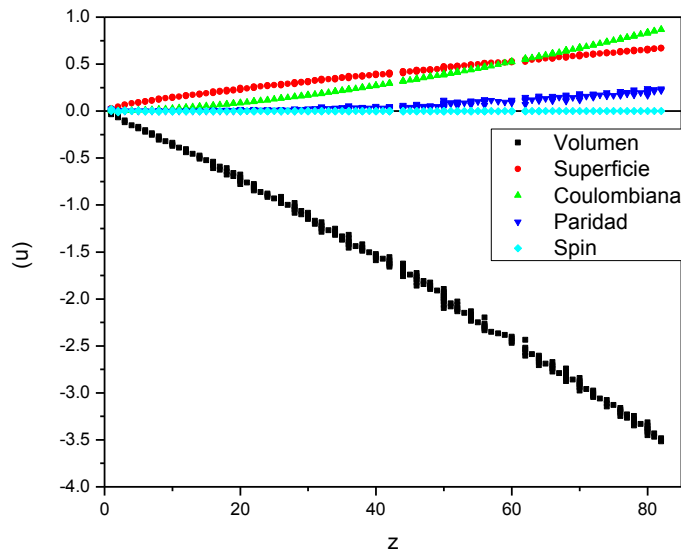


Figura IV.1 Componentes de la fórmula semiempírica, correspondientes a la energía de enlace de los 237 isótopos estables.

Si la energía de enlace correspondiera tan solo a la energía de volumen M_1 , fuera necesaria más masa nuclear para aportar esa energía que mantiene unidos a los nucleones. Es decir, en lugar de que la energía de enlace fuera del orden de 8 MeV por nucleón fuera de 14 MeV por nucleón, por lo tanto, los átomos tendrían menos masa.

Sin embargo, hay otros fenómenos que intervienen en la constitución de los átomos, y que teóricamente aportan energía para la constitución del núcleo. Ellos son la energía de superficial, la energía coulombiana, la energía por asimetría y por paridad. A M_1 debe restársele la energía que aporta cada uno de esos fenómenos.

En la Figura IV.2 se presentan los componentes de la energía de enlace por nucleón: en rojo la energía por volumen, la cual utilizando el coeficiente reportado por Arya $\frac{E_v}{A} = 15.7538 \text{ MeV}$; en azul, la energía por volumen después de restarle la energía de superficie; en verde la energía resultante después de restarle la energía de repulsión coulombiana; en magenta la energía resultante después de restarle la energía debida a la asimetría; y en negro (la cual está prácticamente oculta por la línea magenta) se presenta la energía de enlace por nucleón experimental.

Puede observarse una coincidencia entre la energía de enlace experimental y la suma algebraica de los componentes teóricos de la energía de enlace.

Como puede verse en la Figura **IV.2** la energía de superficie $M_2 = a_2 A^{\frac{2}{3}}$, es de mayor proporción para los isótopos con número atómico menor a $z < 60$.

Le sigue en importancia la repulsión colombiana $M_3 = a_3 z^2 A^{-\frac{1}{3}}$. Luego la energía debida a la simetría $M_4 = a_4 \frac{(A-2z)^2}{A}$ y finalmente la correspondiente a la paridad o spin $M_5 = \delta(A, z)$.

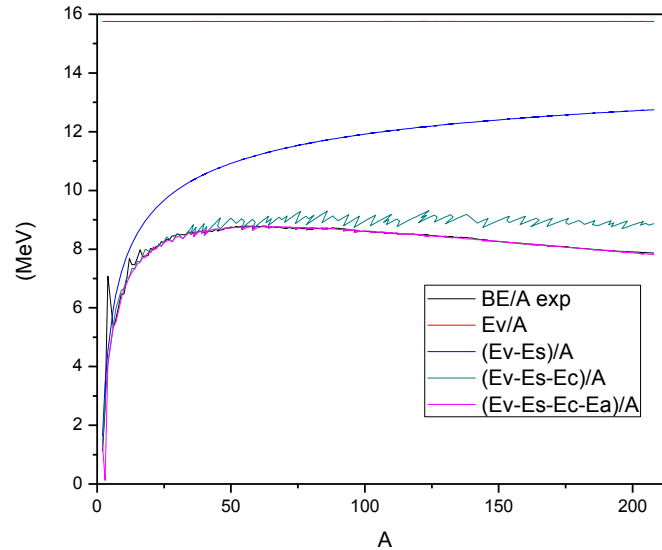


Figura **IV.2** Contribución de los componentes de las energías de enlace por nucleón para los 237 isótopos estables.

¿Cómo calcular los coeficientes de los componentes de la energía de enlace?

Se puede comenzar, siguiendo la literatura (Evans, 1972), por determinar primero otros coeficientes. La determinación de los coeficientes, a_3 que corresponde a la energía coulombiana y a_4 que corresponde a la simetría, se realizó analizando el comportamiento de los isobaros estables (Tabla **IV.1**).

Para isótopos con A no el término de correspondiente a apareamiento protón-protón y neutrón-neutrón es $\delta(A, z) = 0$. Para este caso la formula semiempírica (ec. II.43) puede expresarse simplemente como

$$M_A(A, z) = M_0 - a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \quad (IV. 3)$$

La ecuación es cuadrática en z ; por lo tanto para cada valor de A hay varios valores de z o isóbaros, de los cuales solo para uno la masa es mínima y el valor particular de z corresponde al isotopo estable. El mínimo se obtiene derivando la ec. (IV.3) e igualando a cero. Dado que de la ec. (II.9) $M_0 = zm_H + (A - z)m_n$

$$\frac{\partial M_A(A, z)}{\partial z} = m_H - m_n + 2a_3 \frac{z}{A^{\frac{1}{3}}} - 4a_4 \frac{(A - 2z)}{A} = 0 \quad (IV.4)$$

o bien

$$m_H - m_n + 2a_3 \frac{z}{A^{\frac{1}{3}}} - 4a_4 \frac{(A - 2z)}{A} = 0 \quad (IV.4a)$$

En la **Tabla IV.1**, se presentan los valores promedio de los términos $2zA^{-\frac{1}{3}}$ y $4\frac{(A-2z)}{A}$ de la ecuación (IV.4a) para catorce núcleos estables con A non.

Para calcular a_4/a_3 en un primer paso Evans ignorado el término $m_H - m_n = -8.4 \times 10^{-4}$ de la ec. (IV.4a). En tal caso, la ecuación se convierte en

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{zA^{\frac{2}{3}}}{2(A - 2z)} \quad (IV.5)$$

En la **Tabla IV.1** última fila, se presenta los valores para cada isótopo de a_4/a_3 . El valor promedio $\frac{a_4}{a_3} = 33.71907$ y la desviación estándar $\sigma = 2.38668$. La desviación estándar es 7.07% respecto al valor promedio, que si bien es cierto es aceptable, de cualquier manera arrastra un error al haber ignorado el término $m_H - m_n$. Este cálculo es relativamente similar al reportado por Evans (31.7 MeV), habiendo utilizado casi la misma lista de isótopos.

Sin embargo a_3 queda en función de a_4 y viceversa.

¿Cómo calcular cualquiera de ellos?

Evans utiliza el valor de $\frac{a_4}{a_3}$ en la ec. (IV.4a) para calcular ahora un z_0 para cualquier A y luego recalcar $\frac{a_4}{a_3}$ hasta que el valor no fluctué más allá de un cinco por ciento.

Para ello, se re-arreglar la ecuación (IV.4a)

$$z_0 \left(2A^{-\frac{1}{3}}a_3 + \frac{8}{A}a_4 \right) = 4a_4 - (m_H - m_n) \quad (IV.4b)$$

$$z_0 = \frac{A}{2} \left[\frac{1 - \frac{(m_H - m_n)}{4a_4}}{1 + \frac{a_3}{4a_4} A^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (IV.4c)$$

Dado es $m_H - m_n = -8.39872 \times 10^{-4}$ y $\frac{a_4}{a_3} = 33.71907$

$$z_0 = \frac{A}{2} \left[\frac{1 - \frac{-8.39872 \times 10^{-4}}{4a_4}}{1 + \frac{1}{4 * 33.71907} A^{\frac{2}{3}}} \right] = \frac{A}{2} \left[\frac{1 + \frac{2.0968 \times 10^{-4}}{a_4}}{1 + 0.0074142 A^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (IV.5)$$

Sin embargo, se puede observar que de la ec. (IV.5) se puede despejar a_4

$$\frac{2z_0}{A} \left[1 + 0.0074142 A^{\frac{2}{3}} \right] - 1 = \frac{2.0968 \times 10^{-4}}{a_4} \quad (IV.5a)$$

De donde

$$a_4 = \frac{2.0968 \times 10^{-4} A}{2z_0 \left[1 + 0.0074142 A^{\frac{2}{3}} \right] - 1} \quad (IV.6)$$

En la **Tabla IV.1** última columna, se presentan los valores de a_4 para 14 isótopos estables con A non, así como el valor promedio $a_4 = 2.09865 \times 10^{-4} u$ y desviación estándar $\sigma = 2.01125 \times 10^{-6} u$.

Dado que $\frac{a_4}{a_3} = 33.71907$, $a_3 = \frac{a_4}{33.71907} = \frac{2.09865 \times 10^{-4} u}{33.71907} = 6.2239 \times 10^{-6} u$

Sin embargo, los cálculos distan mucho de los valores reportados en la literatura. El problema debe estar en haber ignorado el término $m_H - m_n = -8.4 \times 10^{-4}$. Por ello a última columna de la **Tabla IV.1** se ha presentado en tono pálido, porque los valores no se pueden asumir como válidos.

Probablemente esto se debe a que apenas se ha realizado una primera iteración o un primer cálculo de z_0 . Además hay una gran confusión sobre el carácter e interpretación de z_0 .

Tabla IV.1 Valores de los coeficientes a_4/a_3 para diferentes isotopos estable con A non					
	z	N	A	$\frac{a_4}{a_3}$	a_4
As	33	42	75	29.78302	2.10515×10^{-4}
Br	35	44	79	38.25455	2.08217×10^{-4}
Br	35	46	81	38.03038	2.13058×10^{-4}
Nb	41	52	93	31.88324	2.06397×10^{-4}
Rh	45	58	103	31.15344	2.06351×10^{-4}
I	53	74	127	32.89148	2.11586×10^{-4}
Cs	55	78	133	32.50916	2.12477×10^{-4}
Tb	65	94	159	34.0185	2.10624×10^{-4}
Ho	67	98	165	33.36905	2.11104×10^{-4}
Tm	69	100	169	34.51024	2.0934×10^{-4}
Ta	73	108	181	32.96864	2.10103×10^{-4}
Ir	77	114	191	34.29072	2.08732×10^{-4}
Ir	77	116	193	29.78302	2.10628×10^{-4}
Au	79	118	197	38.25455	2.0898×10^{-4}
Promedio				33.71907	2.09865×10^{-4}
σ				2.38668	2.01125×10^{-6}

Evans a partir de la ec. (II.34), toma $a_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{e^2}{R_0}$ y usando como valor del radio nuclear unitario $R_0 = 1.45 \times 10^{-15} \text{ m}$ (el cual se obtuvo semi-empíricamente a partir de teoría del decaimiento alfa) y reporta $a_3 = 0.595 \text{ MeV}$, el cual, utilizando la relación $\frac{a_4}{a_3}$ obtiene el valor de a_4 .

Sin embargo, por nuestra cuenta, si se repiten los cálculos en unidades del SI, y con los valores actuales de las constantes físicas, el cálculo es

$$a_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi \left(8.85415 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right)} \right) \frac{(1.602176 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{1.45 \times 10^{-15} \text{ m}} = \frac{9.53 \times 10^{-14} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-13} \frac{\text{J}}{\text{MeV}}} = 0.596 \text{ MeV}$$

Con este valor, sustituido en $\frac{a_4}{a_3} = 33.71907$, el valor de $a_4 = 20.1188 \text{ MeV}$, mientras que Evans reporta 19.0 MeV .

Luego, Evans, haciendo uso de la energía de enlace por nucleón, para ciertos pares de nucleones estables con A:non (para los cuales $\delta(A, z) = 0$) y de los coeficientes antes mencionados: $a_3 = 0.595 \text{ MeV}$ y $a_4 = 19.0 \text{ MeV}$ obtiene $a_1 = 13 \text{ MeV}$ y $a_2 = 14.1 \text{ MeV}$

Es síntesis, el método descrito por Evans, resulta laborioso, pasa por utilizar el radio nuclear unitario y asumir una densidad nuclear constante.

IV.2 Método de cálculo simultaneo de los coeficientes de la Formula Semiempírica

Comenzamos por reconocer que en la ec. (II.43) los términos correspondientes a la energía de volumen, de superficie, de repulsión coulombiana, de simetría y de paridad, equivalen a la energía de enlace. Esto es

$$-B_N(A, z) = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2z)^2}{A} \pm \delta(A, z) \quad (IV. 1a)$$

Por tanto la energía de enlace por nucleón debe ser

$$\frac{B_N(A, z)}{A} = a_1 - a_2 A^{-\frac{1}{3}} - a_3 z^2 A^{-\frac{4}{3}} - a_4 \left(\frac{A - 2z}{A} \right)^2 \pm \delta(A, z) \quad (IV. 7)$$

La energía de enlace, como ha sido descrito anteriormente, es la diferencia entre la masa de los constituyentes y la masa atómica. Dado que ésta última es de carácter experimental por tanto la energía de enlace es también de carácter experimental.

Para calcular los coeficientes, se propone utilizar la energía de enlace de un grupo de isótopos estables con número másico A: no, de tal forma que el coeficiente $\delta(A, z) = 0$, y al mismo tiempo evitando que haya proximidad con los números mágicos. En la **Tabla IV.3** se presentan la lista de los 6 isótopos estables utilizados; esencialmente los mismos utilizados por diferentes autores entre otros por Evans (1972).

Tabla IV.3 Isotopos estables con A: no utilizados para el cálculo de los coeficientes a_1, a_2, a_3 y a_4 de la formula semiempírica.									
Isótopo	z	N	A	BE/A (keV)	M(A,z) (u)	c_1	c_2	c_3	c_4
O	8	9	17	7750.728	16.9991	1	-0.38891	-1.46414	-0.00346
S	16	17	33	8497.63	32.9715	1	-0.31177	-2.41855	-9.18274E-4
Mn	25	30	55	8765.0098	54.938	1	-0.26295	-2.98811	-0.00826
Cu	29	36	65	8757.0931	64.92787	1	-0.24871	-3.21794	-0.0116
I	53	74	127	8445.48729	126.904	1	-0.19894	-4.40028	-0.02734
Pt	78	117	195	7926.5655	194.965	1	-0.17245	-5.38034	-0.04

Siendo: $c_{i1} = A$, $c_{i2} = A^{-\frac{1}{3}}$, $c_{i3} = z^2 A^{-\frac{4}{3}}$, $c_{i4} = \left(\frac{A-2z}{A} \right)^2$; siendo a su vez i cada uno de los isótopos en cuestión

Dado que para cada uno de ellos se conocen z y A , se puede formular fácilmente un grupo de ecuaciones simultaneas, una por cada isótopo, cuyas incógnitas sean los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 y a_4 .

$$B_{i1} = c_{i1} a_1 + c_{i2} a_2 + c_{i3} a_3 + c_{i4} a_4 + 0$$

En virtud de que se tienen cuatro incógnitas (los cuatro coeficientes) se necesitan 4 ecuaciones.

Dado que se tienen datos de 6 isótopos estables, se han escogido grupos de 4, para calcular simultáneamente los coeficientes de la formula semiempírica de la masa, sin asumir un radio nuclear de la forma $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$, como lo hicieron múltiples autores.

Los coeficientes se pueden obtenerse, de múltiples maneras, en nuestro caso se utilizaron matrices. Si C es la matriz de los términos asociados a los coeficientes, y B la matriz de las energías de enlace por nucleón y A la matriz de coeficientes de la formula semiempírica:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (IV.8)$$

La matriz A se puede obtener calculando la matriz inversa de C (C^{-1})

$$A = C^{-1}B \quad (IV.9)$$

En la **Tabla IV.4** se presentan los valores de los coeficientes obtenidos utilizando diferentes combinaciones de isotopos estables. Los valores, aunque parecen próximos entre ellos, evidentemente son diferentes. Pareciera que son diferentes para diferentes rangos de valores de A . En la primera fila, los valores corresponden a isótopos con $A < 65$; ellos valores son más elevados en particular los que corresponden a a_2 y a_3 (energía de superficie y energía coulombiana). La segunda fila corresponde a isótopos en forma salteada desde el Oxígeno hasta el Pt, diríase que pueden ser representativa de todos los isótopos. Los valores correspondientes a isotopos $33 \leq A \leq 127$ (S^{33} , Mn^{55} , Cu^{65} , I^{127}) arrojan un valor negativo en el caso de a_3 y un valor muy elevado para a_4 parecen extraños.

¿Cuáles son los coeficientes idóneos?

El hecho de que los valores para diferentes grupos, sean diferentes sugiere que puede o debe haber propiedades nucleares que no se ha puesto en consideración en la formula semiempírica.

Si se excluye este grupo de isótopos (S^{33} , Mn^{55} , Cu^{65} , I^{127}) en las dos últimas filas de la **Tabla IV.4**, se presenta los valores promedio, llamados parcial.

Tabla IV.4 Coeficientes para la formula semiempírica de la masa (MeV) obtenidos mediante ecuaciones simultánea formuladas , sin necesidad de considerar la densidad nuclear constante				
	a_1	a_2	a_3	a_4
$O^{17}, S^{33}, Mn^{55}, Cu^{65}$	16.6688061	19.4594366	0.86014762	26.2142311
$O^{17}, Mn^{55}, Cu^{65}, Pt^{195}$	14.3169813	14.866376	0.4513931	34.5839321
$O^{17}, S^{33}, I^{127}, Pt^{195}$	15.5028903	17.1800718	0.67240543	24.8979486
$S^{33}, Mn^{55}, Cu^{65}, I^{127}$	13.3979686	16.07648	-0.07516059	76.251848
$O^{17}, Mn^{55}, I^{127}, Pt^{195}$	15.5933955	17.3447975	0.69351989	23.6012096
Promedio total	15.09601	16.98543	0.52046	37.10983
Desv. estándar	1.26262	1.70326	0.3633	22.29801
Promedio parcial	15.52052	17.21267	0.66937	27.32433
Desv. estándar	0.96137	1.87719	0.16783	4.95591

Diversos autores y métodos han sido utilizados para el cálculo de coeficientes de la formula semiempírica. En la **Tabla IV.5** se presentan los coeficientes obtenidos por diferentes autores. Como puede observarse, existen diferencias importantes entre autores, con excepción Fermi, Metropolis y Feenberg que obtiene prácticamente los mismos coeficientes.

Tabla IV.5 Comparación entre los coeficientes la formula semiempírica de la masa (MeV) obtenidos por diferentes autores y diferentes métodos

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\delta(A, z)$
Bethe and Bacher (1936)	13.86	13,2	0.58	19.5	
Feenberg (1939)		13.3	0.62		
Bohr & Wheeler (1939)		14	0.59		
Flugge (1942)	14.66	15.4	0.602	20.5	
Fermi (1945)	14.0	13.0	0.583	19.3	$33.5A^{\frac{3}{4}}$
Metropolis & Reitweiser (1950)	14.0	13.0	0.583	19.3	$33.5A^{\frac{3}{4}}$
Feenberg (1947)	14.1	13.1	0.585	18.1	$33.5A^{\frac{3}{4}}$
Fowler (1947)	15.3	16.7	0.69	22.6	
Friedlander & Kennedy (1949)	14.1	13.1	0.585	18.1	132/A
Rosenfeld (1949)	14.66	15.4	0.602	20.54	
Canadian National Research Council (1945)	14.05	14.0	0.61	19.6	
Green (1954)	15.75	17.8	0.71	23.7	
Evans (1955)	14.1±0.2	13±0.1	0.595±0.02	19.0±0.9	
UAEN	15.52052	17.21267	0.66937	27.32433	

Fuente: datos tomados de R.D. Evans (1972) The Atomic Nucleus, Mc. Graw Hill Book Company, p. 383.

IV.3 Cálculo de las Masas Nucleares

IV.3.2 masas atómica utilizando los coeficiente y energías de enlace promedio parciales (excluyendo valores negativos)

Los valores promedio parciales de las constantes de la formula semiempírica obtenidas (últimas dos filas de la **Tabla IV.4**) son: $a_1 = 15.52052 \text{ MeV} = 0.01666196431 u$; $a_2 = 17.21267 \text{ MeV} = 0.01847855621 u$; $a_3 = 0.66937 \text{ MeV} = 0.00071859828 u$ y $a_4 = 27.32433 \text{ MeV} = 0.02933387613 u$. Como puede observarse en la **Tabla IV.5** son muy similares a los de Fowler (1947) que los determinó por ajuste por mínimos cuadrados y a los de Green (1954) del cual no pudimos saber con exactitud que método siguió.

¿Cuál es el comportamiento de estos coeficientes en el cálculo de las masas atómicas?

En la Figura **IV.3** se presentan en rojo la masa experimental (obtenida a partir de [LiveChart of Nuclides](#)) y en negro la masa calculada mediante la fórmula semiempírica, de 237 isótopos estables. Para el cálculo de las masas de los 237 isótopos estables se han utilizado la formula semiempírica (ec. II.43) y los valores promedio parcial de los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 y a_4 anteriores. Aparentemente hay una buena coincidencia entre ambos tipos de valores. Sin embargo, en realidad existen diferencias importantes entre ambos valores.

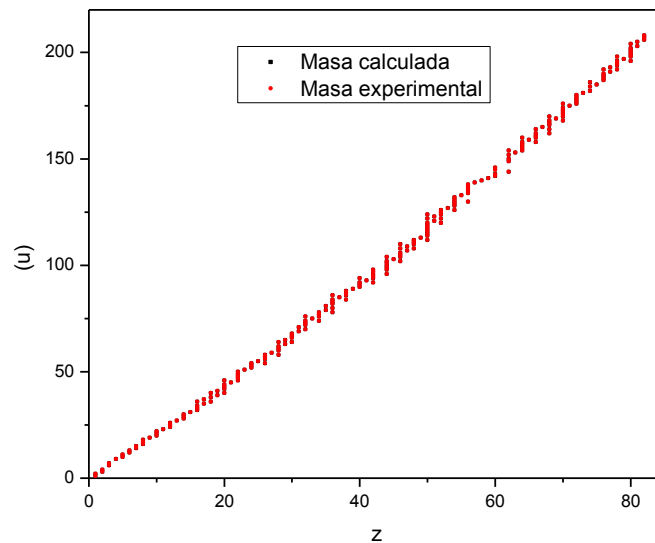


Figura **IV.3** Masa experimental y Masa calculada mediante la fórmula semiempírica, de los 237 isótopos estables.

En la Figura **IV.4** se presenta las diferencias entre los valores de la masa experimental y la masa calculada mediante la fórmula semiempírica. Como puede observarse aparentemente no hay ninguna sistematicidad. El valor promedio de las diferencias es -0.00387 u con una desviación estándar $\sigma = 0.00713 \text{ u}$. Aunque la diferencia promedio es del orden de 3.6048 MeV , con una desviación estándar es del orden de 6.64155 MeV , lo que es consecuencia de que las diferencias son muy variables. Estos valores son superiores en un orden de magnitud a los obtenidos con la formula y coeficientes de Arya. (§ II.3.6). Por lo tanto, se concluye que no pueden ser representativos.

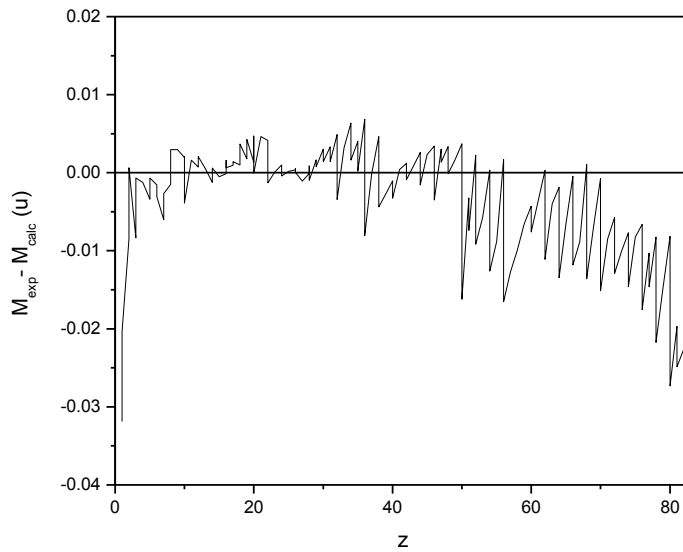


Figura II.4 Diferencia entre las masas experimentales y las masas obtenida con la fórmula semiempírica utilizando los llamados coeficientes promedio de los 237 isótopos estables.

IV.3.2 masas atómica utilizando los coeficiente y energías de enlace de $O^{17}, Mn^{55}, I^{127}, Pt^{195}$

Los isótopos $O^{17}, Mn^{55}, I^{127}, Pt^{195}$ están mejor distribuidos en el rango de valores másicos de los isótopos estables; por ello se asume que pueden ser más representativos. Las constantes de los coeficientes correspondientes son (quinta fila de la **Tabla IV.4**) son

$$a_1 = 15.5933955 \text{ MeV} = 0.01674019851496 \text{ u};$$

$$a_2 = 17.3447975 \text{ MeV} = 0.01862040588 \text{ u};$$

$$a_3 = 0.69351989 \text{ MeV} = 0.00074452422 \text{ u} \text{ y}$$

$$a_4 = 23.6012096 \text{ MeV} = 0.0253369404949 \text{ u}.$$

Utilizando estos coeficientes, la gráfica de los valores experimentales y calculados de las masas atómicas es similar a la gráfica de la Figura IV.3. Sin embargo, las diferencias son importantes. En la Figura II.5 se presentan estas diferencias. El valor absoluto promedio de las diferencias es 0.00228 u con una desviación estándar $\sigma = 0.00259 \text{ u}$. El valor absoluto promedio de las diferencias en términos de energía es 2.1237 MeV, y la desviación estándar es del orden de = 2.4125 MeV.

El valor absoluto promedio de las diferencias obtenidas con la fórmula y los coeficiente reportados por Arya, fue 0.00212 u = 1.9747 MeV con una desviación estándar $\sigma =$

$0.00293 = 2.7292 \text{ MeV}$. Es decir, el valor absoluto promedio obtenido con los coeficientes y la fórmula de Arya es menor que el obtenido con los coeficientes determinados en ésta Tesis, pero la desviación estándar con los coeficientes de Arya es mayor. Lo que implica que en este trabajo se mejoró la dispersión de las diferencias.

En la Figura IV.6 se presenta las diferencias respecto a la masa experimental obtenidas mediante la fórmula y coeficientes de Arya, y las diferencias encontradas con la fórmula revisada y los coeficientes obtenidos en este trabajo.

En conclusión, se puede hablar de una ligera mejora en los resultados, particularmente en los valores de las masas atómicas; probablemente esto se deba a que se han utilizado los valores más recientes tanto de las energías de enlace como de las masas nucleares y así mismo se ha usado software mucho más preciso que lo que pudo haberse usado en los años 50's. Aun así, no se puede concluir que el modelo está totalmente acabado.

Uno de las bondades de éste trabajo fue clarificar la deducción de la fórmula semiempírica de la masa. Sin embargo, aunque la aproximación entre valores calculados y experimentales es sorprendente, la dispersión asociada a dichas diferencias da cuenta de que la teoría de la fórmula semiempírica no ha tomado en cuenta la totalidad de los fenómenos o fuerzas que entran en juego en la constitución del núcleo.

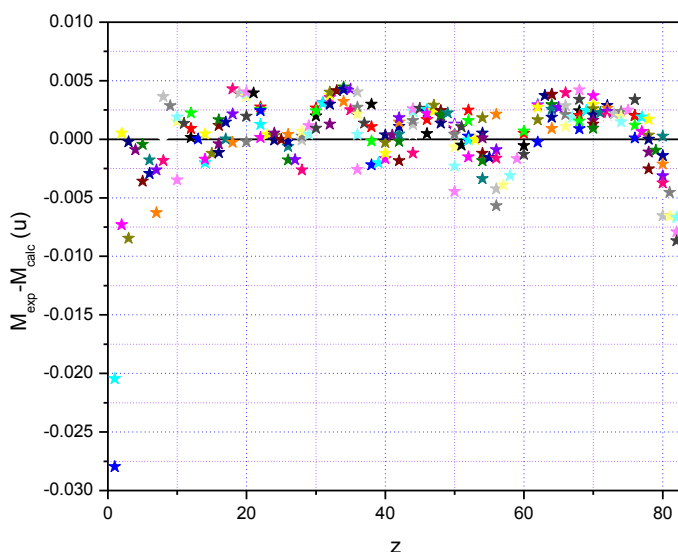


Figura II.5 Diferencia entre la masas experimental y la masa calculada de los 237 isótopos estables mediante la fórmula semiempírica y los coeficientes obtenidos para los isótopos O^{17}, Mn^{55}, I^{127} y Pt^{195}

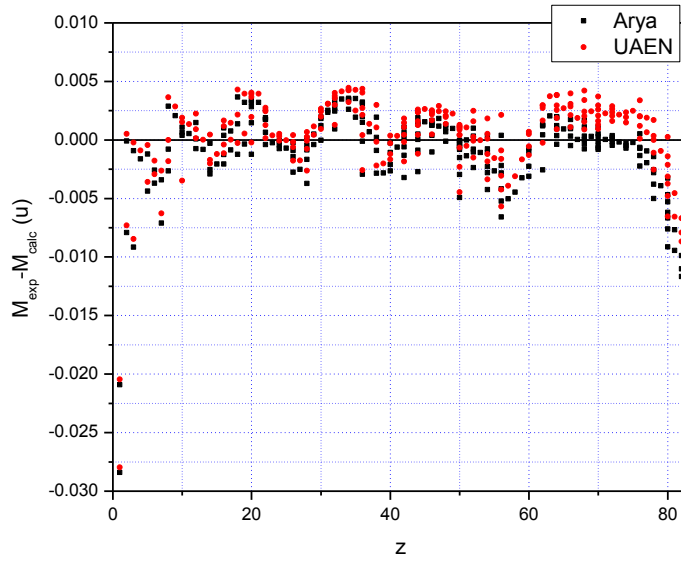


Figura II.6 Comparación de las diferencia entre la masas experimental y la masa calculada de los 237 isótopos estables mediante la fórmula semiempírica y coeficientes de Arya y la formula revisada y los coeficientes obtenidos para los isótopos O^{17} , Mn^{55} , I^{127} y Pt^{195}

IV.4 Radio Nuclear y Densidad Nuclear

Es posible calcular la constante de proporcionalidad k' asociada a la constante $a_3 = 0.66937$ (MeV). Dado que

$$a_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) e^2 \left(\frac{4\pi}{3k'} \right)^{1/3} \quad (\text{II. 39})$$

Despejando

$$k' = \frac{4\pi}{3} \left[\frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) e^2 \right]^3 \quad (\text{II. 39a})$$

Sustituyendo: $a_3 = (0.69351989 \text{ MeV}) \left(1.60217656535 \times 10^{-13} \frac{\text{J}}{\text{MeV}} \right) = 1.111141315$

$\epsilon_0 = 8.8541510^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}}$ y $e = 1.60217656535 \times 10^{-19} \text{ C}$

$$k' = 8.098908736 \times 10^{-45} \text{ m}^3$$

Luego de la ec. (II. 19) puede calcularse el radio nuclear para cualquier isótopo de número másico A

$$R = \left[\frac{3k'A}{4\pi} \right]^{1/3} \quad (II.19a)$$

Para $A = 1$

$$R = R_0 = 1.245793227 \times 10^{-15} \text{ m}$$

De acuerdo a Arya, el rango de valores del radio nuclear unitario varía entre 1.2×10^{-15} y 1.48×10^{-15} m. De hecho el valor utilizado por Evans en el cálculo del coeficiente a_3 fue 1.48×10^{-15} m.

En este trabajo, no fue posible determinar el grado de incertidumbre de R_0 dado que no se pudo determinar el grado de incertidumbre de a_3 .

Se puede calcular el radio de los 237 isótopos estables a partir de la ec. (II.19a). En efecto el radio nuclear es de la forma $R = R_0 A^{1/3}$. La sola aclaración es que esta fórmula debe encerrar una incertidumbre importante, cuyo cálculo no fue posible determinar. Solo como avance, si la desviación estándar de la diferencia entre masas experimental y masa teórica es del orden de 0.343 %, la incertidumbre debe ser de éste orden.

De la ec. (II.20) puede despejarse el coeficiente de tensión superficial

$$\gamma = \frac{a_2}{(3k')^{2/3}(4\pi)^{1/3}} \quad (II.20a)$$

Y dado que

$$a_2 = 17.3447975 \text{ MeV y}$$

$$\gamma = 1.424878438 \times 10^{17} \frac{J}{m^2} = 1.424878438 \times 10^{17} \frac{N}{m}$$

Fue mencionado en § II.3.1, que Arya, reportó el coeficiente de tensión superficial nuclear del orden de 10^{10} T/mm. En efecto, dado que $1 \text{ kg} = 9.8 \text{ N}$ la cantidad anterior equivale a $1.45 \times 10^{10} \frac{T}{mm}$.

De la ec. (II.14) se puede despejar k la constante de proporcionalidad entre la energía de volumen y el volumen

$$k = \frac{a_1}{k'} \quad (II.14a)$$

Dado que $a_1 = 15.5933955 \text{ MeV}$

$$k = 3.084782612 \times 10^{32} \frac{J}{m^3}$$

Que da cuenta de la dimensión de la densidad de energía asociada al volumen nuclear

De la ec. (II.16) se puede definir una densidad nuclear

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (II.16a)$$

Si se asocia el radio nuclear unitario $R_0 = 1.245793227 \times 10^{-15} m$ a una unidad de masa atómica $A = 1 u = 1.66053873 \times 10^{-27} kg$, la densidad nuclear unitaria es

$$\rho = 2.05032404 \times 10^{17} \frac{Kg}{m^3} = 2.05032404 \times 10^8 \frac{Kg}{mm^3} = 2.05032404 \times 10^5 \frac{T}{mm^3}$$

La densidad nuclear reportada por Arya fue $10^5 T/mm^3$.

Conclusiones

En esta tesis se revisaron los fundamentos teóricos de la formula semiempírica de la masa. Se describió el método de deducción de Evans y se puso en evidencia los problemas de recursividad del mismo. Entre los esbozos de método encontrado en la literatura se recurre a aproximaciones sucesivas de los coeficientes de la formula. Para el cálculo del coeficiente del coeficiente de la energía coulombiana a_3 , se recurre a teoría del decaimiento alfa. Una vez calculado a_3 haciendo uso de isobaros estables se calcula a_4 : No es explícita la forma como se calcula el resto de los coeficientes. Por tanto, resulta difícil reproducir el método de cálculo de los coeficientes de la formula semiempírica.

Ante lo sofisticado e incompleto de las aproximaciones, en este trabajo se desarrolló un método propio que permite el cálculo simultaneo de 4 de los 5 coeficientes de la formula semiempírica. Este método, es directo, no requiere iteraciones, es o pretende ser suficientemente didáctico por tanto reproducible. Se funda en la formulación teórica de la formula y hace uso de las energías de enlace experimentales de 6 isótopos estables con número másico A: non; y utiliza las masas experimentales como elemento de verificación de reproducibilidad de la formula.

Se determinaron cinco juegos de los coeficientes, de la formula semiempírica; los cuales, con excepción de uno, son similares a algunos de los 14 grupos de coeficientes encontrados en la literatura.

Dos de los cinco juegos de coeficiente se probaron en el cálculo de las masas de 237 isótopos estables. Para verificar el nivel de reproducibilidad, se determinaron las diferencias entre los valores experimentales y teóricos o calculados, además, el orden de dispersión se determinó mediante la desviación estándar. Los resultados se compararon con los cálculos efectuados utilizando los coeficientes y la fórmula semiempírica de Arya (1966). Se observó que el juego de coeficientes que corresponde a los isótopos O^{17} , Mn^{55} , I^{127} y Pt^{195} produce resultados ligeramente mejores que los que se obtienen con los coeficientes de Arya.

Adicionalmente, la deducción de la fórmula puso en evidencia el carácter interdependiente de tres de los cinco coeficientes de la fórmula a_1 , a_2 y a_3 , según lo demuestran las ecs. (II.14, II.20 y II.39). Las tres contienen el factor de proporcionalidad entre el volumen y el número másico k' . Se presenta la forma de calcular k' , y una vez evaluado k' , por recurrencia se evaluaron el coeficiente de tensión superficial y la constante de proporcionalidad de la energía de volumen k . No se conocen en la literatura estos coeficientes; una forma de verificar su coherencia fue el evaluar el radio unitario R_0 y la densidad nuclear y compararlo con los correspondientes valores reportados en la literatura.

En cuyo caso el mérito fue hacer explícita una forma de cálculo; misma que no es explícita en la literatura.

En esta tesis se explican los fundamentos teóricos de la fórmula semiempírica de la masa. Pero no se puede concluir que el modelo sea acabado. Los coeficientes encontrados si bien son similares, forman parte de un sinnúmero de intentos por justificar la fórmula semiempírica. Además, el orden de dispersión de las diferencias, indica que debe haber factores no tomados en cuenta en las bases teóricas de la fórmula semiempírica.

Lo que es real es lo experimental. La fórmula semiempírica, solo es una aproximación sorprendente, pero de ninguna manera es un método acabado.

Referencias

- Arya A.P. (1966) Fundamentals of Nuclear Physics, Allyn and Bacon Inc., p. 135
- Audi G., A.H.Wapstra and C.Thibault, 2003, The Ame2003 atomic mass evaluation (II), Nuclear Physics A729 p. 337-676.
- Evans R.D. (1972) The Atomic Nucleus, Ed. Mc Graw Hill, p 383.
- Feenberg E. (1947) Semi-Empirical Theory of the Nuclear Energy Surface, Rev. Mod. Phys. 19, 239
- LiveChart of Nuclides, IAEA Nuclear Data Services, <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>
- Royer (2008), On the coefficients of the liquid drop model mass formulae and nuclear radii, Nuclear Physics A 807 (2008) 105–118.
- Squires G., (1998), Francis Aston and the mass spectrograph, J. Chem. Soc., Dalton Trans, 3893–3899.
- Caurier, E. (2007), Shell model and nuclear structure. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 59, 226-242.
- Cook, D. N. (2006) Modelos of the Atomin.
- EVANS, R. D. 1955. *The Atomic Nucleus*, Tata McGraw Hill Publishing Company Limited.
- KOURA, H., UNO, M., TACHIBANA, T. & YAMADA, M. 2000. Nuclear mass formula with shell energies calculated by a new method. *Nuclear Physics A*, 674, 47-46.
- PARIKH, J. C. 1977. Independent particle model approach to nuclear mass formula and mass relationships. *Pramāṇa*, 10, 47-61.
- SOLIS, S. 2011. *Modelo nuclear de geometrías y saturación de energía*. Universidad Autónoma de Zacatecas.
- SUHONEN, J. & KORTELAINEN, M. 2005. Analysis of the $2\nu\beta\beta$ decay and muon capture reactions for the mass $A = 46$ and $A = 48$ nuclei using the nuclear shell model. *Nuclear Physics B*, 138, 227-229.

- SUNKO, D. K. 1997. Code SPINDIS: Nuclear shell-model level densities at high energies with a simplified pairing interaction. *Computer Physics Communications*, 101, 171-182.
- TALMI, I. 2005. 55 Years of the shell model: A challenge to nuclear many-body theory. *International Journal of Modern Physics E*, 14, 821-844.
- TALMI, I. 2010. Sixty Years of the Nuclear Shell Model. *Latin American Symposium on Nuclear Physics and Applications*.

Anexo

Datos Nucleares de los 237 isótopos Estables utilizados en este Estudio

Fuente: [LiveChart of Nuclides, IAEA Nuclear Data Services, https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html](https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html)

NUCLID E	Z	n	A	Binding energy/A (Kev)	Atomic Mass [μ AMU]	Mass Excess [keV]
H	1	0	1	0.0	1007825.032239	7288.970599
H	1	1	2	1112.283 0	2014101.7781212	13135.7217411
He	2	1	3	2572.681 1	3016029.32008250	14931.21551233
He	2	2	4	7073.915 0	4002603.254136	2424.915616
Li	3	3	6	5332.331 0	6015122.88742155	14086.87893144
Li	3	4	7	5606.439 1	7016003.43659454	14907.10520423
Be	4	5	9	6462.668 9	9012183.06582	11348.45377
B	5	5	10	6475.075 38	10012936.949412	12050.690384
B	5	6	11	6927.716 38	11009305.355446	8667.883416
C	6	6	12	7680.144 0	12000000.00	0.00
C	6	7	13	7469.849 0	13003354.8350723	3125.0087521
N	7	7	14	7475.614 0	14003074.0044320	2863.4166919
N	7	8	15	7699.460 0	15000108.8988864	101.4386659
O	8	8	16	7976.206 0	15994914.6195717	-4737.0013716
O	8	9	17	7750.728 0	16999131.7565069	-808.7636164
O	8	10	18	7767.097 0	17999159.6128676	-782.8155871
F	9	10	19	7779.018 0	18998403.1627392	-1487.4443486
Ne	10	10	20	8032.240 0	19992440.17617168	-7041.93055157
Ne	10	11	21	7971.713 2	20993846.68541	-5731.77638
Ne	11	12	22	8080.465 1	21991385.11418	-8024.71418
Na	11	12	23	8111.493 0	22989769.28196194	-9529.85249181
Mg	12	12	24	8260.709 1	23985041.69714	-13933.56913
Mg	12	12	25	8223.502 2	24985836.97650	-13192.77147
Mg	12	14	26	8333.870 1	25982592.96831	-16214.54630
Al	13	14	27	8331.548 4	26981538.531111	-17196.747104
Si	14	14	28	8447.744 0	27976926.5346544	-21492.7945941
Si	14	15	29	8448.635 0	28976494.6649051	-21895.0786749
Si	14	16	30	8520.654 1	29973770.13623	-24432.96122
P	15	16	31	8481.167 0	30973761.9984270	-24440.5411165
S	16	16	32	8493.129 0	31972071.17441141	-26015.53353132
S	16	17	33	8497.630 0	32971458.90982145	-26585.85432135
S	16	18	34	8583.498 1	33967867.00447	-29931.69345
S	16	20	36	8575.389 5	35967080.706201	-30664.124188
Cl	17	18	35	8520.279 1	34968852.68237	-29013.54035
Cl	17	20	37	8570.280 1	36965902.60255	-31761.52152

Ar	18	18	36	8519.909 1	35967545.10528	-30231.54027
Ar	18	20	38	8614.280 5	37962732.106209	-34714.820195
Ar	18	22	40	8595.259 0	39962383.12372239	-35039.89464223
K	19	20	39	8557.025 0	38963706.48643492	-33807.19022458
K	19	22	41	8576.072 0	40961825.25792408	-35559.54329380
Ca	20	20	40	8551.304 1	39962590.86322	-34846.38621
Ca	20	22	42	8616.563 4	41958617.830159	-38547.243149
Ca	20	23	43	8600.663 5	42958766.438244	-38408.815228
Ca	20	24	44	8658.175 7	43955481.561348	-41468.658325
Ca	20	26	46	8668.958 49	45953689.0232426	-43138.3962261
Sc	21	24	45	8618.915 16	44955908.275773	-41071.177721
Ti	22	24	46	8656.434 7	45952627.718351	-44126.996327
Ti	22	25	47	8661.206 8	46951758.787382	-44936.400357
Ti	22	26	48	8722.986 7	47947941.979384	-48491.734358
Ti	22	27	49	8711.137 7	48947865.676386	-48562.809360
Ti	22	28	50	8755.698 7	49944786.889389	-51430.681362
V	23	28	51	8742.096 17	50943957.036942	-52203.685877
Cr	24	28	52	8775.967 11	51940506.231631	-55418.089588
Cr	24	29	53	8760.177 11	52940648.147620	-55285.894578
Cr	24	30	54	8777.935 11	53938879.158611	-56933.697570
Mn	25	30	55	8765.009 8	54938043.910476	-57711.725444
Fe	26	28	54	8736.370 9	53939608.986529	-56253.867494
Fe	26	30	56	8790.342 8	55934936.326489	-60606.422456
Fe	26	31	57	8770.267 8	56935392.841490	-60181.180457
Fe	26	32	58	8792.239 8	57933274.431527	-62154.467492
Co	27	32	59	8768.025 9	58933194.288556	-62229.119518
Ni	28	30	58	8732.049 8	57935342.414518	-60228.153483
Ni	28	32	60	8780.764 8	59930785.885518	-64472.533483
Ni	28	33	61	8765.016 8	60931055.570519	-64221.322484
Ni	28	34	62	8794.546 8	61928345.365554	-66745.863517
Ni	28	36	64	8777.454 9	63927966.816584	-67098.478545
Cu	29	34	63	8752.131 8	62929597.723556	-65579.298518
Cu	29	36	65	8757.093 10	64927789.704709	-67263.457661
Zn	30	34	64	8735.901 10	63929142.013709	-66003.789661
Zn	30	36	66	8759.630 13	65926033.809939	-68899.062876
Zn	30	37	67	8734.148 13	66927127.746958	-67880.067893
Zn	30	38	68	8755.677 13	67924844.554980	-70006.846913
Ga	31	38	69	8724.579 17	68925573.5411285	-69327.7991198
Ga	31	40	71	8717.604 11	70924702.577874	-70139.097815
Ge	32	38	70	8721.699 12	69924248.750903	-70561.835842
Ge	32	40	72	8731.745 1	71922075.82681	-72585.90176
Ge	32	41	73	8705.049 1	72923458.95661	-71297.52357
Ge	32	42	74	8725.200 0	73921177.76113	-73422.44213

Ge	32	44	76	8705.236 0	75921402.72619	-73212.88918
As	33	42	75	8700.874 12	74921594.567948	-73034.190884
Se	34	40	74	8687.715 0	73922475.93415	-72213.20215
Se	34	42	76	8711.477 0	75919213.70417	-75251.95016
Se	34	43	77	8694.690 1	76919914.15467	-74599.48563
Se	34	44	78	8717.806 2	77917309.280195	-77025.909182
Br	35	44	79	8687.595 16	78918337.5791387	-76068.0551292
Br	35	46	81	8695.929 16	80916289.6901375	-77975.6511281
Kr	36	46	78	8661.254 9	77920364.944756	-74179.577705
Kr	36	44	80	8692.928 9	79916378.084747	-77893.313697
Kr	36	46	82	8710.657 11	81913482.730940	-80590.318877
Kr	36	47	83	8695.721 4	82914127.164321	-79990.031300
Kr	36	48	84	8717.446 0	83911497.72816442	-82439.33541412
Kr	36	50	86	8712.029 0	85910610.62693407	-83265.66488379
Rb	37	48	85	8697.441 0	84911789.73790535	-82167.33008498
Sr	38	46	84	8677.512 15	83913419.1361334	-80649.5551243
Sr	38	48	86	8708.457 13	85909260.6081154	-84523.1991076
Sr	38	49	87	8705.235 12	86908877.5311154	-84880.033107
Sr	38	50	88	8732.592 12	87905612.5421164	-87921.3511085
Y	39	50	89	8713.987 25	88905840.3482397	-87709.1512233
Zr	40	50	90	8709.980 21	89904697.6591984	-88773.5581849
Zr	40	51	91	8693.320 20	90905639.5871964	-87896.1581830
Zr	40	52	92	8692.684 20	91905034.6751962	-88459.6301828
Zr	40	54	94	8666.818 20	93906310.8282019	-87270.9011881
Nb	41	52	93	8664.186 20	92906373.0041958	-87212.9841824
Mo	42	50	92	8657.722 8	91906807.959837	-86807.827781
Mo	42	52	94	8662.320 5	93905084.903479	-88412.843447
Mo	42	53	95	8648.707 5	94905838.766473	-87710.624441
Mo	42	54	96	8653.974 5	95904676.115473	-88793.627441
Mo	42	55	97	8635.080 5	96906018.118490	-87543.559457
Mo	42	56	98	8635.157 5	97905404.820493	-88114.842460
Ru	44	52	96	8609.399 5	95907590.255491	-86079.123457
Ru	44	54	98	8620.312 66	97905286.8136937	-88224.7656463
Ru	44	55	99	8608.677 11	98905934.0821129	-87621.8381052
Ru	44	56	100	8619.323 11	99904214.2561129	-89223.8461052
Ru	44	57	101	8601.330 11	100905576.8721154	-87954.5771075
Ru	44	58	102	8607.392 11	101904344.0961155	-89102.9001076
Ru	44	60	104	8587.380 25	103905427.4812755	-88093.7342567
Rh	45	58	103	8584.157 24	102905497.9932610	-88028.0522431
Pd	46	56	102	8580.563 26	101905602.1872833	-87930.9962639
Pd	46	58	104	8584.846 13	103904030.5401435	-89394.9761337
Pd	46	59	105	8570.649 11	104905079.6261222	-88417.7591139
Pd	46	60	106	8579.991 10	105903480.4261187	-89907.4041106

Pd	46	62	108	8567.025 10	107903891.6401191	-89524.3611110
Pd	46	64	110	8547.168 6	109905172.199745	-88331.527694
Ag	47	60	107	8553.899 22	106905091.6112557	-88406.5952382
Ag	47	62	109	8547.919 12	108904755.2821405	-88719.8831309
Cd	48	60	108	8550.020 10	107904183.4401206	-89252.5511124
Cd	48	62	110	8551.282 5	109903006.606606	-90348.765564
Cd	48	63	111	8537.087 5	110904182.872605	-89253.079564
Cd	48	64	112	8544.738 5	111902762.868595	-90575.805555
In	49	64	113	8522.917 8	112904061.839914	-89365.821852
Sn	50	62	112	8513.627 5	111904823.874614	-88655.990573
Sn	50	64	114	8522.545 9	113902782.6951042	-90557.336971
Sn	50	65	115	8514.069 0	114903344.69916	-90033.83315
Sn	50	66	116	8523.116 1	115901742.797102	-91525.99596
Sn	50	67	117	8509.612 4	116902953.983519	-90397.782483
Sn	50	68	118	8516.534 4	117901606.574536	-91652.886500
Sn	50	69	119	8499.449 6	118903311.172779	-90065.063726
Sn	50	70	120	8504.494 8	119902201.634970	-91098.591904
Sn	50	72	122	8487.909 20	121903443.7742576	-89941.5452400
Sn	50	74	124	8467.421 8	123905276.6451089	-88234.2371014
Sb	51	70	121	8482.052 23	120903811.9673009	-89598.5752803
Sb	51	72	123	8472.335 17	122904213.2042278	-89224.8252122
Te	52	68	120	8477.035 26	119904059.3003341	-89368.1863113
Te	52	70	122	8478.140 12	121903043.4551619	-90314.4401509
Te	52	72	124	8473.279 12	123902817.0851614	-90525.3021504
Te	52	73	125	8458.045 12	124904429.9201614	-89022.9551504
Te	52	74	126	8463.248 12	125903310.8861616	-90065.3301505
I	53	74	127	8445.487 29	126904471.8533915	-88983.8953647
Xe	54	72	126	8443.530 28	125904298.2923847	-89145.5663584
Xe	54	74	128	8443.298 8	127903531.0181138	-89860.2781061
Xe	54	75	129	8431.390 0	128904780.86113596	-88696.05676555
Xe	54	76	130	8437.731 0	129903509.34910	-89880.4629
Xe	54	77	131	8423.736 2	130905084.057236	-88413.631220
Xe	54	78	132	8427.622 0	131904155.08563559	-89278.96289521
Cs	55	78	133	8409.978 0	132905451.9618	-88070.9318
Ba	56	74	130	8405.550 20	129906320.6692767	-87261.7342578
Ba	56	78	134	8408.173 2	133904508.182296	-88950.055276
Ba	56	79	135	8397.534 2	134905688.375294	-87850.713274
Ba	56	80	136	8402.756 2	135904575.727294	-88887.138274
Ba	56	81	137	8391.828 2	136905827.141303	-87721.453283
Ba	56	82	138	8393.422 2	137905246.995306	-88261.856285
La	57	82	139	8378.043 16	138906356.2562438	-87228.5852271
Ce	58	82	140	8376.339 16	139905443.1072340	-88079.1782180
Pr	59	82	141	8353.998 15	140907657.5682292	-86016.4222135

Nd	60	82	142	8346.029 13	141907728.9961953	-85949.8861820
Nd	60	83	143	8330.487 13	142909819.9891953	-84002.1391819
Nd	60	85	145	8309.186 13	144912579.3221953	-81431.8371819
Nd	60	86	146	8304.091 12	145913122.6281953	-80925.7511819
Sm	62	82	144	8303.678 14	143912006.4662090	-81965.4491947
Sm	62	87	149	8263.462 12	148917192.0621839	-77135.0971714
Sm	62	88	150	8261.617 11	149917282.9191809	-77050.4641685
Sm	62	90	152	8244.057 11	151919739.7211759	-74761.9681639
Sm	62	92	154	8226.830 12	153922216.8611964	-72454.5271830
Eu	63	90	153	8228.693 11	152921238.0031846	-73366.3271720
Gd	64	90	154	8224.792 11	153920874.0601747	-73705.3381628
Gd	64	91	155	8213.247 10	154922630.4731742	-72069.2501624
Gd	64	92	156	8215.318 10	155922131.2411742	-72534.2821624
Gd	64	93	157	8203.500 10	156923968.5691742	-70822.8221623
Gd	64	94	158	8201.815 10	157924112.3481742	-70688.8921623
Gd	64	96	160	8183.009 11	159927062.4111840	-67940.9261714
Tb	65	94	159	8188.796 11	158925354.7101879	-69531.6401751
Dy	66	92	158	8190.123 18	157924415.8753075	-70406.1592865
Dy	66	94	160	8184.046 12	159925204.6462021	-69671.4231883
Dy	66	95	161	8173.302 12	160926940.4922020	-68054.4931882
Dy	66	96	162	8173.449 12	161926805.5732021	-68180.1701883
Dy	66	98	164	8158.706 11	163929181.8742021	-65966.6601883
Ho	67	98	165	8146.960 12	164930328.8352129	-64898.2721983
Er	68	94	162	8152.389 12	161928788.3642045	-66333.2111906
Er	68	98	164	8149.012 12	163929208.7912024	-65941.5861886
Er	68	100	166	8141.956 12	165930299.5302179	-64925.5692029
Er	68	99	167	8131.743 12	166932054.6172180	-63290.7162031
Er	68	100	168	8129.598 12	167932376.6882182	-62990.7092033
Er	68	102	170	8111.961 14	169935470.2302556	-60109.0942381
Tm	69	100	169	8114.475 12	168934217.8892217	-61275.6412065
Yb	70	98	168	8111.896 12	167933889.6022198	-61581.4392048
Yb	70	100	170	8106.614 12	169934766.3762210	-60764.7292059
Yb	70	101	171	8097.889 12	170936330.2082167	-59308.0292019
Yb	70	102	172	8097.433 12	171936385.8722166	-59256.1792017
Yb	70	103	173	8087.433 12	172938215.1362160	-57552.2292013
Yb	70	104	174	8083.853 12	173938866.4372160	-56945.5472013
Yb	70	106	176	8064.075 13	175942576.4472414	-53489.6952249
Lu	71	104	175	8069.151 11	174940775.1912041	-55167.5531902
Hf	72	104	176	8061.371 12	175941407.6282190	-54578.4422041
Hf	72	105	177	8051.849 11	176943227.7172031	-52883.0411892
Hf	72	106	178	8049.456 11	177943705.8332029	-52437.6781890
Hf	72	107	179	8038.560 11	178945823.2122028	-50465.3521890
Hf	72	108	180	8034.944 11	179946557.0422032	-49781.7941893

Ta	73	108	181	8023.418 10	180947995.7691979	-48441.6291844
W	74	108	182	8018.318 5	181948203.945905	-48247.714843
W	74	110	184	8005.088 5	183950930.916942	-45707.557878
W	74	112	186	7988.614 8	185954362.7711655	-42510.8051542
Re	75	110	185	7991.0297	184952954.4861326	-43822.6141235
Os	76	111	187	7973.791 8	186955747.4221609	-41221.0101500
Os	76	112	188	7973.875 8	187955835.1741616	-41139.2701506
Os	76	113	189	7963.011 8	188958144.1621694	-24602.18110891
Os	76	114	190	7962.112 8	189958443.7021705	-38709.4421588
Os	76	116	192	7948.534 14	191961476.9982926	-35883.9452726
Ir	77	114	191	7948.124 10	190960589.2932063	-36710.8371922
Ir	77	116	193	7938.144 10	192962921.5872074	-34538.3191932
Pt	78	114	192	7942.511 16	191961038.7463225	-36292.1743004
Pt	78	116	194	7935.954 5	193962680.8501002	-34762.564935
Pt	78	117	195	7926.565 5	194964791.719995	-32796.302927
Pt	78	118	196	7926.541 5	195964952.091985	-32646.917918
Pt	78	120	198	7914.159 11	197967894.9202324	-29905.6892165
Au	79	118	197	7915.660 3	196966568.786705	-31140.975657
Hg	80	116	196	7914.373 15	195965832.5603172	-31826.7652955
Hg	80	118	198	7911.555 2	197966768.602515	-30954.847480
Hg	80	119	199	7905.280 2	198968280.643457	-29546.390426
Hg	80	120	200	7905.896 2	199968326.590467	-29503.591435
Hg	80	121	201	7897.561 3	200970302.839693	-27662.727646
Hg	80	122	202	7896.851 3	201970643.400692	-27345.496645
Hg	80	124	204	7885.545 2	203973493.981527	-24690.197491
Tl	81	122	203	7886.050 6	202972344.5931363	-25760.8461271
Tl	81	124	205	7878.392 6	204974427.8011426	-23820.3491329
Pb	82	124	206	7875.359 6	205974465.6831329	-23785.0621238
Pb	82	125	207	7869.864 6	206975897.2971332	-22451.5231241
Pb	82	126	208	7867.450 6	207976652.4811333	-21748.0741242