

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS**  
**“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”**

---



**UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS**



**SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS CON  
COEFICIENTES ENTEROS,  
UNA PROPUESTA CON MATERIAL DIDÁCTICO**

Informe Académico de Desarrollo Profesional que para obtener el  
grado de

**Maestra en Matemática Educativa  
con Orientación en el Nivel Bachillerato**

Presenta:

**María Guadalupe Serafín Córdova**

Directoras del Informe Académico de Desarrollo Profesional:

**M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, M. en C. Mónica del  
Rocío Torres Ibarra y M. en M. Elvira Borjón Robles**

Zacatecas, Zac.,

Septiembre, 2019



Este trabajo ha sido realizado gracias al  
Apoyo financiero otorgado por el  
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de  
Enero 2018 a Julio 2019

No. de Becaria: 863850

**A QUIEN CORRESPONDA:**

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "*Suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, una propuesta con material didáctico*" y que fue realizado bajo nuestra asesoría por la C. María Guadalupe Serafín Córdova, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato; cumple con los requisitos de calidad académica **para ser sometido a su revisión**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente



M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara  
Asesora



M. en M. Elvira Borjón Robles  
Asesora



M. en C. Mónica del Rocío Torres Ibarra  
Asesora

Zacatecas, Zac., a 24 de Mayo del 2019

## CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 24 del mes de mayo del año 2019, la que suscribe María Guadalupe Serafín Córdova, alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Bachillerato con número de matrícula 21202623; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado *“Suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, una propuesta con material didáctico”* bajo la dirección de las M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara, M. en M. Elvira Borjón Robles y M. en C. Mónica del Rocío Torres Ibarra.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'María Guadalupe Serafín Córdova', is written over a horizontal line. The signature is stylized and somewhat cursive.

María Guadalupe Serafín Córdova

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	viii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
Introducción.....	x
Capítulo I. Planteamiento del problema de la práctica de Desarrollo Profesional .....	3
1.1 Motivación.....	3
1.2 Antecedentes .....	4
1.2.1 Enseñanza del Álgebra. ....	4
1.2.2 Material didáctico.....	6
1.2.3 Reflexión. ....	8
1.3 Planteamiento del problema de Desarrollo Profesional .....	8
1.3.1 Problemática.....	8
1.3.2 Problema.....	9
1.3.3 Pregunta de Desarrollo Profesional.....	9
1.3.4 Objetivo general.....	9
1.3.5 Objetivos particulares. ....	10
1.3.6 Supuestos.....	10
1.3.7 Justificación. ....	10
Capítulo II. Fundamento Teórico .....	15
2.1 Teoría de Situaciones Didácticas .....	15
2.2.1 Conceptos básicos.....	16
2.2.2 Tipos de Situaciones.....	17
2.2 Fundamento Matemático.....	18
2.2.1 Definición de polinomio y grado de un polinomio.....	18

2.2.2 Operaciones con polinomios.....	18
2.3 Material didáctico.....	20
2.3.1 Definición, características y clasificaciones para material didáctico. ....	21
2.3.2 Epistemología del material didáctico. ....	24
2.3.3 Ventajas y desventajas. ....	26
Capítulo III. Metodología.....	29
3.1 La Ingeniería Didáctica.....	29
3.1.1 Fases de la Ingeniería Didáctica.....	29
3.1.2 Fase 1: Análisis Preliminar. Esta fase, según Artigue <i>et al</i> (1995) debe analizarse bajo algunas de las siguientes dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. ....	29
3.1.3 Fase 2: La concepción y el análisis a priori. ....	29
3.1.4 Fase 3: Experimentación. ....	30
3.1.5 Fase 4: Análisis a posteriori y validación.....	30
Capítulo IV. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica.....	31
Capítulo IV. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica.....	33
4.1 Fase 1: Análisis Preliminar.....	33
4.1.1 Dimensión epistemológica. ....	33
4.1.2 Dimensión didáctica.....	35
4.1.3 Dimensión cognitiva. ....	38
4.2 Fase 2: Concepción y análisis a priori.....	46
4.2.1 La Secuencia didáctica. ....	46
4.2.2 Variables didácticas.....	47
4.2.3 Concepción y análisis a priori.....	48
4.2.4 Prueba piloto.....	55
4.3 Fase 3: Experimentación.....	58
4.3.1 La institución.....	58

4.3.2 Los estudiantes .....	59
4.3.3 Condiciones en las que se lleva a cabo la experimentación.....	59
4.4 Análisis a posteriori y validación .....	61
4.4.1 Análisis a posteriori.....	61
4.4.2 Fase de Validación.....	86
Reflexiones Finales .....	93
Referencias .....	101
Anexo 1 .....	106
Anexo 2.....	111
Anexo 3.....	114
Anexo 4.....	119

## Índice de Figuras

Figura 1. Proposición 4 del libro II de los elementos. Tomado de Socas, et al. (1989) .....	34
Figura 2. ¿Qué entiendes por polinomio? .....	40
Figura 3. Menciona los elementos que conforman a un polinomio .....	40
Figura 4. ¿Cómo se realiza la suma de polinomios? .....	41
Figura 5. ¿Cómo se realiza la resta de polinomios? .....	42
Figura 6. ¿Cómo se restan los polinomios? .....	42
Figura 7. Sumar los polinomios P(x) y Q(x).....	43
Figura 8. Resolver resta de polinomios.....	44
Figura 9. Resolver resta de polinomios.....	45
Figura 10. "El contenedor" (material didáctico).....	47
Figura 11. Vaciado de taparrosas.....	51
Figura 12. Ordenando las taparrosas .....	52
Figura 13. Participación grupal, ante los cuestionamientos.....	62
Figura 14. Profesora mostrando "El contenedor", como material didáctico.....	63
Figura 15 . Registro de resultado de la suma de $(a + b)$ .....	64
Figura 16. Resultados representativos obtenidos utilizando "El contenedor".....	65
Figura 17. Resta $p - q$ o suma $(p + (-q))$ , cambio de signo para el sustraendo y resultado ...	66
Figura 18. Resta $(p - q)$ , resultado final en "el contenedor" .....	66

Figura 19 .Nombramiento de cada cajón, según polinomio.....	67
Figura 20. Depósito de las taparrosas en" el contenedor" .....	68
Figura 21. Vaciado.....	69
Figura 22. Ejercicio de suma, transcripción y orden de los términos.....	69
Figura 23. Ejercicio de suma, resultados .....	70
Figura 24. Ejercicio de resta, transcripción y orden de los términos.....	70
Figura 25. Ejercicio de resta y resultados .....	71
Figura 26. Ejercicio de resta, error .....	71
Figura 27. Primera Bina. Registro, acomodo y depósito. (Suma) .....	72
Figura 28. Primera Bina. Eliminación y registro de resultados obtenidos .....	73
Figura 29. Segunda Bina. Registro y depósito. (Resta de polinomios) .....	73
Figura 30. Segunda Bina. Eliminación y obtención de resultados. (Resta de polinomios).....	74
Figura 31. Corrección de resultados en la resta de polinomio.....	75
Figura 32. Registro de definiciones con apoyo del pintarrón .....	78
Figura 33. Aplicación del conocimiento expresado de las restas .....	79
Figura 34. Repartición de hojas de trabajo #2 .....	79
Figura 35. Asistencia a cuestionamientos naturales.....	80
Figura 36. Trabajo en binas .....	81
Figura 37.Suma ( $a + b$ ).....	82
Figura 38.Resta ( $p - q$ ).....	83
Figura 39. Reacomodo para realizar la resta ( $p - q$ ).....	83
Figura 40. Registros del diseño del contenedor en hoja de trabajo #2.....	84
Figura 41. Registros del diseño del contenedor en hoja de trabajo #2.....	85

## Índice de Tablas

Tabla 1.....	106
Tabla 2.....	114

## RESUMEN

Este trabajo surge de la inquietud de una profesora de Matemáticas al enseñar un tema relacionado con el álgebra en el nivel bachillerato. En particular se observa que un grupo de 15 estudiantes del Plantel Luis Moya del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ) cometen errores al realizar sumas y restas de polinomios, sobre todo cuando los coeficientes de los polinomios son enteros o reales negativos.

Por tal motivo el objetivo de este trabajo es diseñar y aplicar una secuencia didáctica para abordar el tema de suma y resta de polinomios con el uso de material didáctico, para estudiantes del primer semestre en la clase de Matemáticas I, de esta institución, de manera que los jóvenes de este grupo, hagan uso del mismo como apoyo para construir su conocimiento.

Como marco teórico se utilizará la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica. Se puede concluir que la situación didáctica propuesta con el uso del material didáctico “El contenedor” contribuye para que los estudiantes se apropien de este conocimiento y logren realizar las tareas propuestas de manera autónoma.

**Palabras clave:** suma y resta de polinomios, material didáctico, Teoría de Situaciones Didácticas, Ingeniería Didáctica.

## ABSTRACT

This work arises from the concern of a math teacher in teaching a subject related to algebra at the baccalaureate level. In particular, it is observed that a group of 15 students from the Luis Moya Campus of the High School of the State of Zacatecas (COBAEZ) make mistakes when performing addition and subtraction of polynomials, especially when the polynomial coefficients are integers or real negatives.

For this reason, the objective of this paper is to design and apply a didactic sequence to address the issue of addition and subtraction of polynomials with the use of didactic material, for students of the first semester in the Mathematics I class of this institution, so that the young people of this group, make use of it as support to build their knowledge.

As a theoretical framework, the Theory of Didactic Situations will be used and, as a research methodology, the Didactic Engineering. It could be concluded that the proposed didactic situation with the use of the didactic material "The container" contributes to students taking ownership of this knowledge and achieve the proposed tasks autonomously.

**Key words:** addition and subtraction of polynomials, didactic material, Theory of Didactic Situations, Didactic Engineering.

## Introducción

La presente Práctica de Desarrollo Profesional surge a raíz de la experiencia como docente de la autora en las aulas del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ), al tratar de identificar problemas para el aprendizaje en el área de Matemáticas con los alumnos de primer semestre, esto seguido por la actitud de rechazo y temor de los estudiantes hacia la disciplina.

A través del tiempo y la experiencia docente propia, la autora considera muy importante la labor del maestro, específicamente en la parte de la didáctica, para la concepción de una propuesta de enseñanza que provoque en el alumno la participación activa en su proceso de aprendizaje y la motivación para el estudio de las matemáticas, en especial en el tema suma y resta de polinomios. Al respecto, se propone que la profesora incorpore materiales didácticos para la enseñanza de este tema y que los jóvenes del grupo de Matemáticas I del COBAEZ plantel “Luis Moya”, hagan uso del mismo para ayudarse a construir su conocimiento y logren realizar las tareas propuestas de manera autónoma.

Y dado que se buscará el desarrollo de una propuesta para la enseñanza de este tema, se considera como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, para diseñar una situación didáctica que permita establecer un ambiente propicio, en el que se pueda conectar los contenidos con los intereses de los estudiantes, pues en esta teoría se plantea la producción de conocimientos para controlar y producir acciones sobre la enseñanza.

El presente trabajo consta de cuatro capítulos, divididos en dos partes: la primera señala los aspectos teóricos (Capítulos I, II y III) y en la segunda se detalla el desarrollo de la Ingeniería Didáctica (Capítulo IV).

En el capítulo I se desarrollan los aspectos teóricos de la Práctica de Desarrollo Profesional en el cual se presentan: el planteamiento del problema de desarrollo profesional, que incluye motivación, antecedentes, problemática, problema, pregunta de desarrollo profesional, objetivo general y particulares, supuestos y justificación.

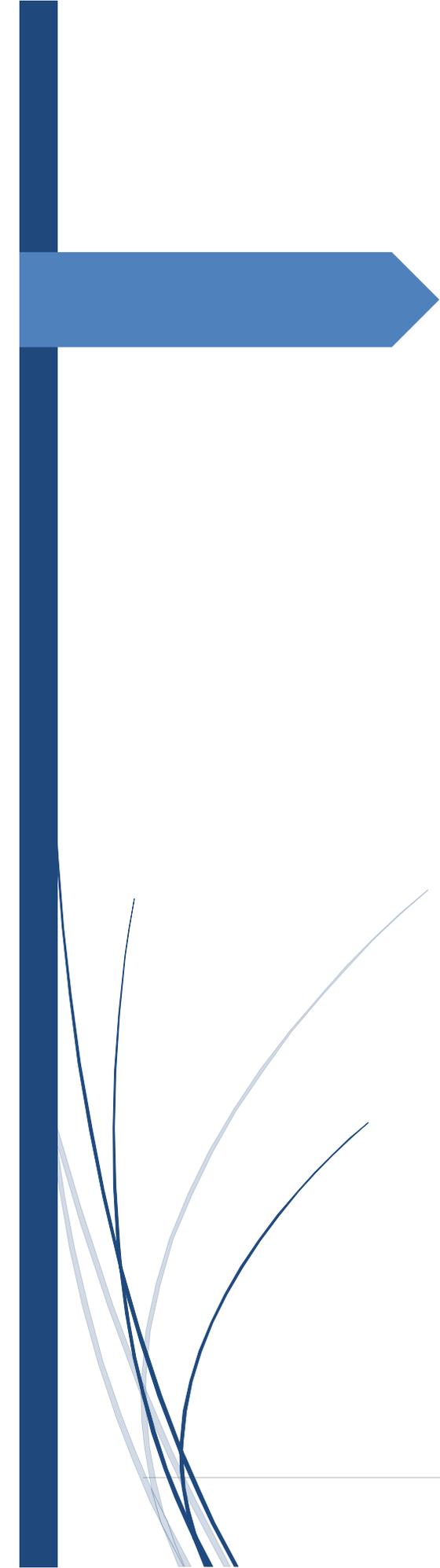
Como fundamento teórico, en el capítulo II se resaltan los aspectos más importantes de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), asimismo lo que se interpretará en este trabajo como material didáctico y la definición de suma y resta de polinomios.

En el capítulo III, como Metodología se presentan las principales concepciones de la Ingeniería Didáctica propuestas en (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

En el capítulo IV, se presenta el desarrollo de la Ingeniería Didáctica en cada una de sus fases.

La última sección comprende el cierre de la Práctica de Desarrollo Profesional, con las reflexiones finales obtenidas con relación a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones para la mejora de la situación didáctica y por ende para el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje en el tema suma y resta de polinomios, así como en torno a dicha práctica.





# **Capítulo I.**

## **Planteamiento del problema de la práctica de Desarrollo Profesional**



# Capítulo I. Planteamiento del problema de la práctica de Desarrollo Profesional

Este capítulo está compuesto de tres partes: en la primera se exponen los motivos por los cuales se elige estudiar una problemática relacionada con el estudio del álgebra en el nivel bachillerato, posteriormente se muestra la revisión de algunos trabajos relacionados con este tema de estudio. Por último, se presenta el planteamiento del problema de desarrollo profesional.

## 1.1 Motivación

La motivación para realizar este estudio nace al tratar de identificar problemas en el aprendizaje de las Matemáticas en estudiantes de primer semestre del Colegio de Bachilleres, plantel Luis Moya, esto seguido por las actitudes de rechazo y temor de los estudiantes hacia las matemáticas.

La autora de este trabajo ha tenido interés por estudiar la Matemática desde pequeña, pero su afinidad por el uso de materiales didácticos manipulables para la enseñanza de la misma surge hace catorce años aproximadamente, cuando por primera vez, como docente en un salón de clases en el Colegio de Bachilleres plantel “Luis Moya”, imparte la asignatura de Matemáticas I, ante un grupo apático frente a esta asignatura.

La mayoría de los estudiantes presentaban actitud de rechazo por esta materia y fue esto lo que en primera instancia le hizo darse cuenta de la necesidad de nuevas herramientas que le facilitarían el proceso de enseñanza y la construcción de nuevos aprendizajes para sus estudiantes.

A lo largo de este tiempo, y a través de variadas experiencias, esta profesora ha podido captar la atención de jóvenes que estudian un bachillerato (de 14 hasta 20 años de edad) valiéndose del uso de algunos materiales didácticos, como recurso, para posteriormente, adentrarlos, antes, durante o después en el tema matemático que se deseaba trabajar.

De esta manera, es que a través de su práctica, la diferencia que se ha observado entre utilizar y no utilizar materiales didácticos manipulables dentro del salón de clases, y en lo que a su labor docente corresponde, la primera opción marca la pauta para romper con el tradicionalismo educativo (centrado en el manejo de procedimientos memorísticos y de repetición). El poder sustentar de forma teórica lo que hasta ahora sólo ha sido experiencia laboral, es también una inquietud que la profesora desea investigar.

## 1.2 Antecedentes

En esta sección se presenta la revisión de algunas investigaciones que hicieron aportaciones para este trabajo, relacionadas con algunos conceptos algebraicos y materiales didácticos, centradas principalmente en los niveles de educación básica y educación secundaria, esto debido a que se han encontrado pocas publicaciones de trabajos que involucren recursos didácticos para la enseñanza de las Matemáticas en el nivel medio superior.

Los antecedentes que a continuación se presentan están organizados de acuerdo con la importancia del material didáctico en el aula y con la importancia de la enseñanza del Álgebra como contenido matemático.

### 1.2.1 Enseñanza del Álgebra.

Por otro lado, cabe señalar que el Álgebra tiene gran presencia como contenido matemático desde la secundaria hasta la universidad (Socas, 2011). El Álgebra prepara a los estudiantes para el futuro, con destrezas tales como: resolver problemas y pensar de forma crítica, ésta puede ayudar a los estudiantes a tener éxito en el trabajo y en la vida aún si no continúan sus estudios después de la preparatoria (EdSource, 2009). Sin embargo, según Cuesta, Escalante y Méndez (2013) los estudiantes siguen evitando cualquier acercamiento algebraico y retornan a procedimientos de carácter aritmético.

El Álgebra al igual que otras disciplinas han pasado por la insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza de la misma, dadas las dificultades y errores que tienen los alumnos (Socas, 2011). De acuerdo con este autor, en el estudio del álgebra se contemplan las siguientes dificultades, organizadas en cinco categorías, dos asociadas a la propia disciplina: La complejidad de los objetos algebraicos y los procesos de pensamiento algebraicos. Una tercer relacionada con los procesos de enseñanza, la cuarta con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y la quinta con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

En el trabajo de Ruano, Socas y Palarea (2008) acerca del análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en procesos algebraicos, a partir de los cuestionarios realizados a un grupo de 60 estudiantes, se encuentra que en uno de los tipos de errores cometidos el alumno “no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras o éstas no tienen significado para él” (p. 67). Otro tipo de errores que se contemplan en este trabajo son aquellos que tienen su origen en la aritmética, en donde si los estudiantes no han asimilado en el contexto aritmético algunos conceptos, no podrán usarlos en lo algebraico.

Esto ha llevado a buscar formas más efectivas para promover su aprendizaje, tales como el uso de notaciones, diagramas, gráficos; es decir, herramientas que faciliten al estudiante el desarrollo del pensamiento algebraico (Lins y Kaput, 2004, citado en Socas 2011).

Ahora, de manera específica, con respecto al tema de suma de expresiones algebraicas, Guzmán (2016) estudia en la educación secundaria el conocimiento que manifiestan dos profesoras en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje inherentes a este tema. Ella encuentra que las maestras identifican el origen de los errores que los alumnos podrían tener, por ejemplo, consideran que afectarían algunos conocimientos previos deficientes relacionados con los números reales y sus operaciones, debido a esto, las maestras dedican el inicio del tema a repasar esos conocimientos previos.

En este trabajo (Guzmán, 2016) también se identifica que las profesoras reconocen que los alumnos pueden tener dificultades para distinguir términos semejantes o proceder de manera mecánica al realizar las sumas de expresiones algebraicas y para minimizar esto proponen que razonen y reflexionen al construir este conocimiento, mediante la argumentación de su manera de proceder en las actividades.

En cuanto a propuestas para estudiantes se tiene el trabajo de Villarroel y Romero (2017), quienes proponen el uso de la herramienta didáctica “la caja de polinomios” para trabajar la suma y resta de éstos con alumnos de grado octavo (tercero de Secundaria) de una institución educativa de Medellín, Colombia. Con esta propuesta se propone trabajar con las expresiones algebraicas:  $x^2$ ,  $x$  y  $1$ , que corresponden a las fichas que se usarán, además se requiere un tablero, que se refiere a una región rectangular que simula al plano cartesiano, también se explica su funcionamiento. De esta investigación se tiene como resultado que la mayoría de los estudiantes involucrados obtuvieron notas similares, es decir, alcanzaron niveles de apropiación parecidos.

También está el trabajo de Martín (2013) en el que propone una didáctica interactiva para enseñar polinomios. Eduslide, como la ha llamado, es una plataforma interactiva, tecnología Web 2.0 que permite crear cursos de forma gratuita. Tiene como objetivo dotar al álgebra de significación y asegurar la correcta transición desde el área de la aritmética, a través de la incorporación de esta herramienta como complemento a la clase de Matemáticas.

La plataforma se encuentra dividida en tres sub-apartados, tales como: evaluación inicial, cosas que ya deberías saber y curiosidades. El primero permite realizar un diagnóstico al estudiante (en una sola ocasión) mediante una serie de preguntas relacionadas con el tema matemático a abordar, arrojando resultados mediante gráficas que le permiten al profesor identificar las deficiencias grupales de una forma más rápida. El segundo consta de tarjetas llamadas FlashCards, que están diseñadas en ambas caras, una contiene proposiciones con pregunta final y en el reverso la respuesta. El último sub-apartado incluye enlaces digitales

sobre: historia del álgebra, Al-Jwarizmi y el álgebra y civilizaciones antiguas, temas para despertar la curiosidad sobre la asignatura.

Esta investigación concluye que el uso adecuado de la tecnología aumenta la motivación y participación del estudiante, así que se invita al profesor a explorar dentro de este campo digital para descubrir todos los software libres que están a nuestra disposición.

### 1.2.2 Material didáctico.

En la primera parte de los antecedentes, se tiene la investigación de Garrido (2016), quien en su tesis de licenciatura titulada “Material didáctico para lograr aprendizajes significativos en la multiplicación en los estudiantes de cuarto grado de educación general básica, escuela fiscal mixta José Ingenieros n° 1, de la ciudad de Loja. Período académico 2014 – 2015”, piensa que la institución educativa practica un modelo de enseñanza tradicional en el área de Matemáticas y plantea como objetivo principal utilizar material didáctico, pues lo considera adecuado para hacer las clases más dinámicas, creando en los estudiantes un pensamiento activo, reflexivo, lógico, crítico y creativo para que el estudiante de cuarto grado de educación general básica logre aprendizajes significativos.

Por su parte, y dentro de este mismo tenor, Villalta (2010), menciona que existe un bajo rendimiento en la asignatura de Matemáticas y que una de las estrategias para aumentar el interés por esta materia es elaborar un material didáctico para conseguir mejores resultados en el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Después de estas dos aportaciones es conveniente referenciar el trabajo de Velazco (2012) “Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las Matemáticas”, título que otorgó a su tesis de licenciatura en la Universidad de Valladolid, en el que su principal objetivo fue concienciar al profesorado de la importancia de la utilización de material alternativo para una mejor comprensión de las Matemáticas por parte del estudiantado, dotando de una serie de orientaciones y recursos que puedan ser llevados al aula, señalando las ventajas que tiene el uso de materiales y recursos didácticos en las clases de Matemáticas, realizando recomendaciones sobre las posibles dificultades que se podrían encontrar a la hora de utilizar este tipo de materiales.

Una de las ventajas que esta investigación determina en cuanto al uso de material didáctico, es que éste permite alcanzar y afianzar un cierre de contenidos que sin su manejo, no se podría lograr, pues es considerado de gran ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que favorecen una mayor motivación y participación por parte del alumnado en este proceso. Aunque también menciona como desventaja, el suponer erróneamente o como único medio de enseñanza o como instrumento de distracción de la misma.

Por su parte, Tamayo (2008) considera que en la enseñanza de las matemáticas, la mayor cantidad del tiempo nos limitamos a una exposición meramente formal, que no permite ver aplicaciones directas o la parte lúdica, pues habitualmente se planifica sin tener en cuenta la componente de gratificación en el aprendizaje. Dicha investigación plantea como objetivo aportar en el campo de la didáctica de las matemáticas y llevar a la reflexión de que nosotros como maestros debemos empezar a generar verdaderos espacios de aprendizaje fundamentados en la lúdica y la experimentación del estudiante dentro del aula, para lograr que el proceso sea realmente significativo para nuestros jóvenes.

Mientras que Muñiz-Rodríguez, Alonso, y Rodríguez-Muñiz (2014) en su publicación titulada "El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora", nos presentan al juego como una opción de recurso didáctico. Propone como objetivo utilizar de forma adecuada los distintos medios y recursos didácticos como ayuda en el aprendizaje de las Matemáticas, esto después de mostrar algunas ventajas en el uso de material didáctico, en el cual se considera que una de ellas es la motivación y el interés hacia el estudio de la materia favoreciendo la adquisición de conocimientos.

Centrando un poco más la atención en el tema matemático que se pretende desarrollar, pero sin dejar de lado la importancia del material didáctico dentro del aula, Acevedo (2015), en su artículo titulado Enseñanza de factorización, con la ayuda del material didáctico "El álgebra es un juego", intenta enseñar factorización por medio del material didáctico con el fin de lograr la transición entre el pensamiento concreto y el pensamiento abstracto a través de la manipulación de material tangible. Plantea que el juego pase a ser un mediador instrumental y así tener otra opción que vaya más allá de los procesos algorítmicos y repetitivos, y que al resolverlos lo hagan comprendiendo el concepto y en forma correcta.

Cañadas, Durán, Gallardo, Martínez-Santaolalla, Peñas, Villarraga y Villega (2002) en "Materiales didácticos en la resolución de problemas", ante la necesidad de construir nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas, se fijan como objetivo principal reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados centrados en la resolución de problemas y en el uso de materiales didácticos.

Las investigaciones anteriores reafirman lo que Sowell (1989) presenta al concluir que los logros en matemáticas aumentan a través del uso a largo plazo de materiales concretos y que las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas mejoran cuando la instrucción con materiales concretos es proporcionada por maestros que conocen su uso.

### 1.2.3 Reflexión.

A partir de la revisión de estas investigaciones podemos pensar en un panorama de lo que se ha trabajado y se está trabajando actualmente en el campo de la investigación acerca del material didáctico como herramienta para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas y en particular con las sumas y restas de polinomios.

Al mencionar lo anterior, se hace partiendo del hecho de que existen problemas con el aprendizaje de las sumas y restas de expresiones algebraicas, por ejemplo, el uso incorrecto de la propiedad distributiva, de los recíprocos y de la cancelación, además de errores relativos al propio lenguaje algebraico (Guzmán, 2016; Martín, 2013; Villarreal, 2017), y si a esto le sumamos que la exposición meramente formal de los temas resulta insuficiente para mejorar el aprendizaje (Garrido, 2016), obtenemos como resultado la nula o poca comprensión del tópico matemático que se desea abordar. Por esta razón, es que se está proponiendo el uso de material didáctico para contribuir o ayudar a las tareas del aprendizaje de las matemáticas.

Existen varias propuestas encaminadas en este tenor, en particular, esta práctica de Desarrollo Profesional no es la excepción y le apuesta al diseño del material didáctico manipulable como alternativa para una mejora de la enseñanza del tema matemático sumas y restas de polinomios.

Lo expuesto en este apartado nos deja como punto de partida la reflexión de que nosotros como maestros, deberíamos generar verdaderos espacios de aprendizaje; y esto bien pudiera ser a través del diseño o implementación de algún material didáctico que favorezca el aprendizaje del estudiante dentro y fuera del aula, para lograr que el proceso sea realmente significativo para nuestros jóvenes.

Por lo tanto, coincidimos con Velasco (2012) y Tamayo (2008) en el señalamiento de que actualmente es necesaria la utilización de material didáctico para la mejora del aprendizaje de las Matemáticas y es por ello y a partir de esta revisión que planteamos este trabajo.

## 1.3 Planteamiento del problema de Desarrollo Profesional

A partir de la experiencia que se tiene como profesora, y derivado del análisis de literatura realizado, procedemos a plantear el problema de desarrollo profesional.

### 1.3.1 Problemática.

En la actualidad la Educación Media Superior en México debe preparar un mayor número de jóvenes y dotarles de las condiciones que el marco internacional exige.

Pero cómo llegar al término idóneo de este nivel educativo si se cuenta con un gran índice de rezago escolar, principalmente en el área de Matemáticas.

A partir de la experiencia como docente se percibe que, en particular para el bachillerato, los estudiantes tienen problemas cuando abordan el tema de suma y resta de polinomios. La exposición meramente formal en la clase de Matemáticas se revela insuficiente y deriva en memorización y dificultades para el aprendizaje de conceptos fundamentales y sobre todo lo que los alumnos llaman “la poca aplicación en el medio que los rodea”. Es por esto que en este proyecto de desarrollo profesional hemos considerado como problemática el hecho de que existe dificultad para el aprendizaje del Álgebra en el nivel bachillerato.

Desde nuestro punto de vista la importancia de la enseñanza de las Matemáticas en el nivel bachillerato busca que éstas lleguen a ser “un instrumento de análisis, comprensión, interpretación y expresión de la realidad” (Hernández y Soto, 2012, p. 1) ayudando así a los jóvenes a desenvolverse de manera adecuada tanto en el ámbito académico como en el trabajo, si es que a esto se van a dedicar. En este sentido, el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas plantel “Luis Moya” no es la excepción, pues promueve la capacitación de los estudiantes para enfrentarse a situaciones de la vida diaria.

### 1.3.2 Problema.

Existe dificultad en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra, por ejemplo, los estudiantes cometen errores relacionados con el propio lenguaje algebraico (Ruano, Socas y Palarea, 2008; Socas, 2011) y en particular, para el tema sumas y restas de polinomios, suelen tener dificultades para distinguir términos semejantes o proceder de manera mecánica al realizar las sumas de expresiones algebraicas (Guzmán, 2016).

Además, a partir del análisis preliminar cognitivo, se percibe que existen mayores complicaciones en el estudio de este tema cuando los coeficientes de los polinomios son enteros negativos. Y a pesar de reconocer el valor del material didáctico para el aprendizaje, algunas veces se deja de lado su uso en este tema.

### 1.3.3 Pregunta de Desarrollo Profesional.

¿Qué consecuencias tiene en el aprendizaje de los estudiantes la introducción de material didáctico a través de una secuencia didáctica para la enseñanza del tema sumas y restas de polinomios con coeficientes enteros?

### 1.3.4 Objetivo general.

Proponer una secuencia didáctica para abordar el tema de suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, mediante el uso de material didáctico, para estudiantes del primer semestre en la clase de Matemáticas I, del Colegio de Bachilleres plantel “Luis Moya”.

### 1.3.5 Objetivos particulares.

- i) Distinguir elementos que sirvan de ayuda en el diseño de una secuencia didáctica incorporando material didáctico.
- ii) Diseñar una secuencia didáctica relacionada con la suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, con el uso de material didáctico.
- iii) Experimentar la secuencia didáctica con estudiantes del COBAEZ "Luis Moya".
- iv) Analizar los aprendizajes obtenidos.

### 1.3.6 Supuestos.

La puesta en marcha de una secuencia didáctica con material didáctico permitirá al estudiante apropiarse del conocimiento y realizar sumas y restas de polinomios.

### 1.3.7 Justificación.

Es conveniente mencionar que una gran parte del profesorado percibe la dificultad del aprendizaje de los estudiantes de algunas tareas en el aula, debido sobre todo, a la diversidad que presenta el estudiantado en cuanto a niveles de comprensión en el conocimiento, si a esto le aumentamos específicamente la complejidad del contenido del conocimiento matemático en el transcurso de cada uno de los niveles académicos continuos, desde el básico hasta el superior, se obtiene una combinación poco atractiva para desarrollar el proceso de enseñanza - aprendizaje de manera favorable. El empobrecimiento de estos resultados guarda relación con la progresiva incorporación del pensamiento abstracto al currículo de las Matemáticas.

Con base en lo anterior se presenta la justificación de este proyecto de Desarrollo Profesional, consideraron los siguientes aspectos:

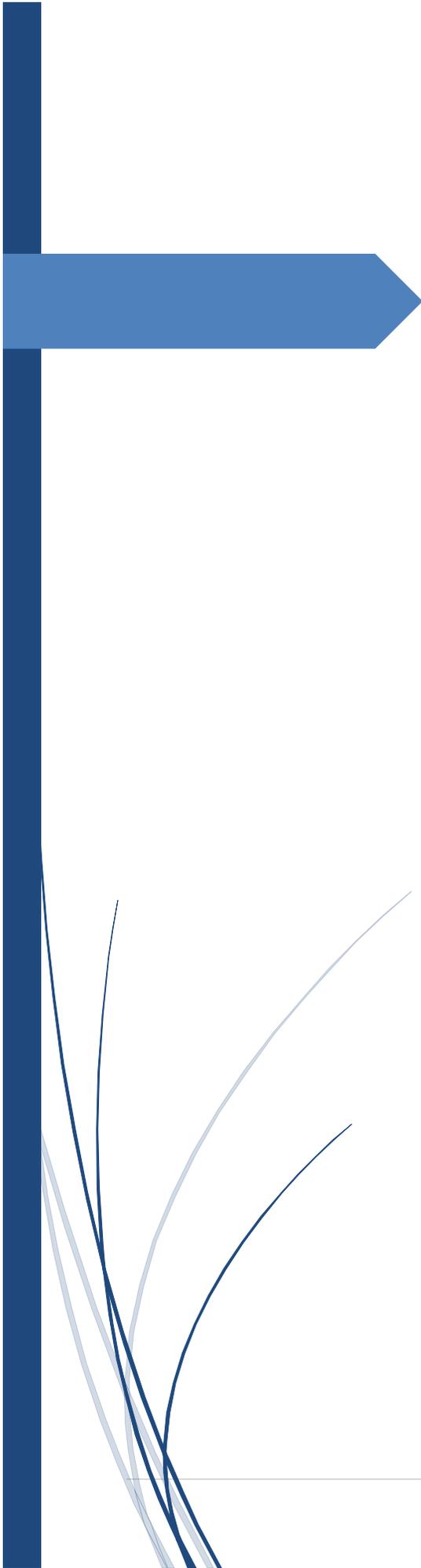
- Social. Debido a la gran deserción escolar relacionada con los índices de reprobación en Matemáticas dentro del centro de trabajo en el cual labora la autora del proyecto (Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas Plantel "Luis Moya").
- Contenido. La gran dificultad que presentan los estudiantes ante el tópico sumas y restas de polinomios en Matemáticas I al intentar resolverlos, específicamente en el manejo de coeficientes negativos.
- Didáctica. Beneficios a profesores al contar con una herramienta que permita acercar el tópico de suma y resta de polinomios con coeficientes enteros en forma más lúdica y atractiva a estudiantes para temas posteriores.

Se pretende, mediante la utilización del material didáctico, contribuir a la construcción del conocimiento matemático del estudiante de primer semestre de dicha institución educativa,

implementando el material como herramienta para los semestres subsecuentes y así apostarle a un mejor aprendizaje del tema.

A través de nuestro trabajo, se quiere resaltar la importancia que debe tener la dimensión didáctica en la concepción de una propuesta de enseñanza sobre la resolución de problemas relacionados con la suma y resta de polinomios; es por ello que consideramos que la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica son el marco teórico y la metodología idóneos para proponer una situación didáctica que permita la interacción entre el estudiante, los problemas de suma y resta de polinomios y el maestro.





# Capítulo II. Fundamento Teórico.



## Capítulo II. Fundamento Teórico

El contenido de este capítulo está dividido en tres apartados. El primero corresponde a las bases y fundamentos correspondientes a la Teoría de Situaciones Didácticas, pues es el marco teórico que utilizamos en esta Práctica de Desarrollo Profesional. En el segundo apartado se explicará el concepto matemático que es el núcleo de este trabajo, la suma y resta de polinomios y su definición en el nivel medio superior. Por último, se presenta lo correspondiente a material didáctico.

### 2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

Entre los precursores de la Didáctica de las Matemáticas, que fue iniciada en Francia, se encuentra Brousseau (1986), quien es el fundador de la Teoría de Situaciones Didácticas y ha sido uno de los más reconocidos por los aportes que realizó en esta teoría.

Dentro de la Matemática Educativa se ha desarrollado esta Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que según Panizza (2004) “se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea” (p. 60).

Para Figueroa (2013) la TSD “permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase, concebidas por el profesor, con el fin de disponer de un medio para realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento nuevo de la mejor manera posible” (p. 20).

Así, para Brousseau (1986),

El alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.13).

Siguiendo lo propuesto por este autor, el estudiante que logre adaptarse al medio propuesto, habrá aprendido. Es decir, el aprendizaje a través de la TSD, será por adaptación, siempre considerando la interacción entre el estudiante, el medio y el profesor, aunque este último sin intervención directa.

La TSD fue elegida para sustentar este proyecto de Desarrollo Profesional debido a que contempla la relación que existe entre estudiante, profesor y medio, todo esto alrededor de un saber, siempre con la firme intención de que alguien aprenda algo.

Por tal razón, en este apartado se analizará la TSD, pues nos servirá como marco de referencia para el diseño de nuestro proyecto: “sumas y restas de polinomios, con coeficientes

enteros, una propuesta con material didáctico". Para ello se abordarán conceptos básicos propios de la teoría para una mejor comprensión de la misma.

### 2.2.1 Conceptos básicos.

#### a. Situación didáctica.

Brousseau (1986, citado en Reaño, 2011), la define de esta manera: "Un conjunto de relaciones establecidas entre un grupo de alumnos, el medio y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido (p. 13)". Esta situación será construida intencionalmente con un fin educativo, además, para lograr el aprendizaje se contempla la intervención del estudiante, el medio y el profesor (indirectamente).

#### b. Situación a-didáctica.

Dentro de la situación didáctica podemos encontrar momentos o fases del aprendizaje caracterizados como situaciones a-didácticas (Panizza, 2004, p.62). Éstas situaciones se dan cuando el estudiante y el medio didáctico se fusionan entre sí, hasta lograr el aprendizaje sin la intervención directa del profesor, aquí desaparece, al menos de manera explícita, la enseñanza, para dar prioridad al aprendizaje.

En las situaciones a-didácticas es muy importante el trabajo propio de los estudiantes, haciendo diversos intentos, conjeturando, rechazando o verificando hipótesis y así adaptar y perfeccionar progresivamente su modelo de solución sin depender directamente de las orientaciones del profesor, y sin tratar de adivinar las expectativas del educador. Cabe señalar que no se espera que el profesor esté ausente en estas situaciones, que no intervenga, por el contrario, se deberá cuidar el tipo de intervenciones que haga éste, de manera que no dé respuestas, sino que ayude al estudiante a encontrarlas por sí mismo.

#### c. Devolución.

Brousseau (2007) señala que "La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctico) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de esta transferencia" (p. 87).

Ésta se presenta cuando el estudiante acepta buscar la solución del problema propuesto por el profesor, porque el problema ha logrado cautivar su atención y no solo porque sea deseo del docente, responsabilizándose así de los posibles resultados obtenidos.

#### d. Variable didáctica.

Para Figueroa (2013) "una variable didáctica permite generar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de resolución" (p. 22). Este tipo de

variable permite controlar hasta qué punto quiere el profesor que sus estudiantes utilicen los conocimientos; es decir, primero se encarga de presentar las condiciones necesarias para que los estudiantes puedan resolver un problema con ayuda de sus conocimientos previos, pero luego, modifica las variables didácticas, para propiciar que el problema sea más complejo o más sencillo y lograr que sus conocimientos sean reestructurados de tal manera que permitan enfrentar dicho problema.

e. Contrato didáctico.

Esta noción se refiere a la “regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena” (Brousseau, 1986, p. 15).

En el contrato didáctico es necesario que ambas partes: profesor y estudiante acepten la responsabilidad que éste conlleva; es decir, el primero deberá asegurar al estudiante los medios efectivos de la adquisición de conocimientos, mientras que el segundo admitirá el compromiso de resolver los problemas planteados.

### 2.2.2 Tipos de Situaciones.

Según Gálvez (2002, p. 43), Brousseau (1982b) distingue cuatro tipos de situaciones didácticas, cuya secuencia, en los procesos didácticos que organiza, es la siguiente:

- Situación de acción. “En la que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico” (Gálvez, 2002, p. 43). Se da cuando el estudiante sin la intervención directa del profesor decide actuar sobre el problema.
- Situación de formulación. “Su objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos” (Gálvez, 2002, p. 43). Se presenta en el momento en que el estudiante interactúa con una o más personas exponiendo su manera de resolver la tarea planteada.
- Situación de validación. “En las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen” (Gálvez, 2002, p. 43). En esta situación el estudiante debe demostrar que la estrategia que eligió es válida, y deberá sostener y defender su postura, ante la solución obtenida.
- Situación de institucionalización. “Destinadas a establecer convenciones sociales” (Gálvez, 2002, p. 44). Se da cuando se formaliza el conocimiento matemático, esta situación está a cargo del profesor.

Las situaciones didácticas de acción, formulación y validación también pueden caracterizarse como a-didácticas pues en éstas el momento principal es el del aprendizaje, dejando en segundo término la intención de la enseñanza. No así con la situación didáctica de institucionalización.

## 2.2 Fundamento Matemático

Este apartado está constituido por conceptos involucrados en la suma y resta de polinomios. Así, para abordar dicho tema es necesario mencionar las siguientes definiciones:

### 2.2.1 Definición de polinomio y grado de un polinomio.

**Polinomio.** Es una expresión algebraica que consta de dos o más términos (Ibáñez y García, 2010, p. 167).

También puede considerarse que un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \text{ siendo}$$

$a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$  números, llamados coeficientes

$n$  un número natural

$x$  la variable o indeterminada

$a_n$  es el coeficiente principal

$a_0$  es el término independiente

(García, Rodríguez y Ponce, 2018, p.151)

**Grado de un polinomio.** El grado de un polinomio  $P(x)$  es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable  $x$ . Según su grado los polinomios pueden ser de:

- Primer grado:  $P(x) = 3x + 2$
- Segundo grado:  $P(x) = 2x^2 + 3x + 2$
- Tercer grado:  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(García, Rodríguez y Ponce, 2018, p.152)

### 2.2.2 Operaciones con polinomios.

#### Suma de polinomios.

Según Ibáñez y García (2010) "Para sumar polinomios debemos agrupar los términos semejantes de los polinomios que se pretenden sumar y realizar las operaciones conducentes para que al final se integren en un solo resultado" (p. 175). Es decir, para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

Por otro lado, en (García, Rodríguez y Ponce, 2018) se define “la suma de los polinomios  $P$  y  $Q$  como:  $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$ . Es decir, al sumar dos polinomios se hará una simplificación de términos semejantes” (p. 153).

Por ejemplo: Dados los polinomios  $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$  y  $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

En primer lugar, ordenamos los polinomios, si no lo están. En este caso, tenemos que ordenar  $Q(x)$ , acomodando sus términos del grado mayor al menor.

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

1. Agrupamos los monomios del mismo grado.

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 2x^3) - 3x^2 + (5x + 4x) - 3$$

2. Sumamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar. Por ejemplo:

$$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \quad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$$

$$7x^4 + 4x^2 + 7x + 2$$

$$\underline{6x^3 + 8x + 3}$$

$$7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

$$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

**Resta de polinomios.** La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto (inverso aditivo) del sustraendo (García, Rodríguez & Ponce, 2018). Esto debido a que se considera que la resta es la operación inversa de la adición (Lehmann, 2012, p. 14).

Ejemplo considerando los polinomios del ejemplo anterior reste  $Q(x)$  de  $P(x)$

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$$

A continuación se presentan la regla de los signos y la definición de términos semejantes, pues constituyen algunos de los conocimientos previos para que el alumno pueda abordar el tema suma y resta de polinomios con coeficientes enteros.

Según Schwartz (1996) las reglas de los signos son las siguientes:

1. (+) (+) = (+) Es decir, el producto de dos números positivos es positivo.
2. (-) (+) = (-) Es decir, el producto de un número negativo por uno positivo es negativo.
3. (+) (-) = (-) Es decir, el producto de un número positivo por uno negativo es negativo.
4. (-) (-) = (+) Es decir el producto de dos números negativos es un número positivo.

Por otro lado, una expresión algebraica se obtiene efectuando operaciones algebraicas con números y letras que las cuales representan números. El término algebraico es la más simple de las expresiones en las que intervienen más de un número o literal y se obtiene combinando estos números y letras por medio de cualquiera de las operaciones, con excepción de la adición y sustracción. Los términos que difieren únicamente en sus coeficientes se llaman términos semejantes (Lehman, 2012).

### 2.3 Material didáctico

El material didáctico juega un rol muy importante dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas, pues éste es una herramienta de la que se puede servir el profesor para desarrollar de la mejor manera posible su labor docente.

Los materiales didácticos pueden ser muy variados, van desde la presentación más simple hasta la más compleja; todo depende del objetivo que se quiere alcanzar dentro del proceso enseñanza - aprendizaje. Por ejemplo, se pueden utilizar dados elaborados por los estudiantes con hojas de papel, o bien, comprar algunos elaborados de una manera más sofisticada.

Por otro lado, dichos materiales pueden clasificarse como: recursos impresos, audiovisuales o informáticos y los que podrían llamarse presenciales o vivenciales.

En este trabajo se presenta la definición de material didáctico, sus características y clasificaciones, desde el punto de vista del documento: “Los materiales didácticos y su vinculación con las evidencias de enseñanza y de aprendizaje. Argumentación del diseño de estrategia didáctica” (Secretaría de Educación Pública [SEP], s.f.). Además, se describe la importancia que tiene el uso del mismo dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

### 2.3.1 Definición, características y clasificaciones para material didáctico.

Comencemos señalando que, a partir de la experiencia de la autora como profesora de matemáticas del nivel bachillerato, se percibe poca o nula motivación en alumnos de este nivel por aprender las matemáticas. Es así que utilizar material didáctico para que el estudiante de Educación Media Superior logre aprender en esta área se distingue como un espacio de oportunidad; sin embargo se reconoce que no es una tarea fácil.

El interés por estudiar Matemáticas utilizando materiales didácticos surge hace catorce años aproximadamente, cuando por primera vez, como docente en un salón de clases del Colegio de Bachilleres plantel “Luis Moya” impartí la asignatura de Matemáticas I; ante un grupo apático frente a esta disciplina.

Después de lo ya mencionado a partir de mi práctica docente, considero que el uso de materiales didácticos, en particular los manipulables, favorecen para lograr el objetivo del aprendizaje. Principalmente con jóvenes que estudian el bachillerato, debido a que a esta edad y dicho de sus propias palabras “*ya no juegan*” y es a través de éste último que se utiliza como pretexto para el aprendizaje de las matemáticas. Según Tamayo (2008) quien considera que la mayor cantidad del tiempo nos limitamos a una exposición meramente formal y que esto no permite ver las aplicaciones directas o su parte lúdica, pues la enseñanza de las matemáticas se planifica habitualmente sin tener en cuenta la componente de gratificación en el aprendizaje y se plantea como objetivo aportar en el campo de la didáctica de las matemáticas, y llevar a la reflexión de que nosotros como maestros, debemos empezar a generar verdaderos espacios de aprendizaje fundamentados en la lúdica y la experimentación del estudiante dentro del aula, para lograr que el proceso sea realmente significativo para nuestros jóvenes.

Al utilizar material didáctico como apoyo para el desarrollo de la clase en la educación del nivel medio superior, estaríamos despertando el interés del estudiante en primera instancia para después adentrarlo al tema matemático que se desee abordar. La matemática que se estudia en el bachillerato no cuenta con fáciles y variadas aplicaciones, en comparación con los niveles educativos anteriores (preescolar, primaria y secundaria), en los cuales el manejo del material didáctico se propone desde el currículum para el desarrollo del proceso de enseñanza

- aprendizaje. Además, para los profesores, no es sencillo el acceso a publicaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas de este nivel.

Por esta razón, se considera el tema material didáctico para el fin de este trabajo. Asimismo, se centra la atención en el tema matemático que se pretende desarrollar. El área de trabajo Matemático es Álgebra, con el tópico suma y resta de polinomios, una propuesta con material didáctico.

En el transcurso de la experiencia de la autora se aprecia que el uso de materiales concretos ofrece a los estudiantes de bachillerato la posibilidad de manipular, indagar, descubrir, observar, convivir y desarrollar valores como cooperación, solidaridad, respeto, tolerancia, entre otros.

A continuación se da a conocer la definición propuesta por la SEP de material didáctico y todo a lo que a él concierne desde mi perspectiva. Pues existe una gran variedad de términos y conceptos en cuanto a este tema.

El aprendizaje significativo se da cuando el nuevo contenido se relaciona con nuestras experiencias vividas y otros conocimientos adquiridos y es precisamente esto lo que quiere lograr en el estudiante a través del material didáctico y el tópico matemático.

La Secretaría de Educación Pública [SEP] (s.f., p. 6) define a los materiales didácticos como “aquellos que selecciona o diseña el docente para facilitar el proceso de enseñanza y la construcción de nuevos aprendizajes o para fortalecer aprendizajes que permitan el despliegue de una competencia”.

Los materiales didácticos se clasifican como: recursos impresos (aquí destacan los libros de texto, y los que se encuentran vinculados a algún tema específico), audiovisuales o informáticos (videos, cines y audios) y los que podrían llamarse presenciales o vivenciales (visita a museos, jardines botánicos, centros de trabajo, universidades, centros de investigación, la exposición de especialistas en diferentes temáticas donde se propicie la participación de los estudiantes a través de la formulación de preguntas) (SEP, s.f.).

Estos a su vez, deben contar con algunas de las siguientes características (SEP, s.f., p.6):

- Que sean flexibles.
- Que muestren capacidad para mover.
- Que muestren capacidad para resolver necesidades de los estudiantes.
- Que sean sustentables.
- Que sean fácilmente sustituidos.

- Que brinden experiencias imprescindibles.
- Que sean funcionales, atractivos de fácil uso y seguros.
- Que incluyan derechos de autor o licencia libre.
- Que sean útiles para el trabajo grupal e individual.
- Incluya nombre, competencia y propósito.

Por otro lado, Cascallana (1999) clasifica los materiales en estructurados y no estructurados. Cabe señalar que ella se refiere a material didáctico simplemente como material. Así, los materiales estructurados son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas. No son figurativos y suponen una mayor capacidad de abstracción, pero son previos al uso exclusivo de los signos numéricos, ejemplo de estos son: tangram, cubo rubik y dominó algebraico. Los materiales no estructurados son todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creados con fines matemáticos, por ejemplo, juguetes. Además, Cascallana (1999) se refiere a la palabra *manipulativa* como la primera fase para la adquisición de conceptos matemáticos, en el que el estudiante debe observar diferentes materiales y tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismos el resultado de sus acciones.

Tomando como referente las definiciones anteriores, en este trabajo se definen los materiales manipulativos o manipulables como: “Todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones” (Valenzuela, 2012, p. 24).

Existen además otras maneras de clasificar los materiales didácticos, por ejemplo, Corbalán (1994, citado en Valenzuela, 2012) los clasifica según los momentos en que se puede utilizar el material manipulativo: Pre-instruccional, en el inicio de la clase, cuando se introduce un concepto, co-instruccional, durante el desarrollo de la clase, en el que se trabaja un concepto post-instruccional, al cierre de la clase, cuando se repasa un concepto o contenido.

De acuerdo al tipo de tarea o actividad que se pretende que el estudiante logre con el uso de materiales manipulativos, puede ser:

1. Mostrar-observar
2. Proponer-manipular
3. Plantear-Resolver problemas
4. Buscar-desarrollar estrategias

Finalmente se puede clasificar el material manipulativo, de acuerdo con el tipo de aprendizaje que se pretende desarrollar en los estudiantes:

1. Memorizar, retener y recuperar información.
2. Comprender, hacer relaciones.
3. Resolver problemas.
4. Aplicar algoritmos.
5. Ejercitarse, dominar la técnica.

La mayoría de los profesores de Matemáticas, en lo particular en Álgebra, enfrentamos el problema de no poder explicar satisfactoriamente muchos temas como las operaciones con polinomios, productos y cocientes notables, factorización, ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones de  $2 \times 2$  y ecuaciones de segundo grado. Todos estos temas se pueden explicar con la ayuda del material didáctico “El álgebra es un juego”, según Acevedo (2015).

El objeto de estudio de este trabajo es la suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, con el uso del material didáctico “el contenedor”, éste ayudó para enfrentar los errores algebraicos que surgieron en el desarrollo de la enseñanza - aprendizaje de este tema. Definiendo las operaciones de adición y sustracción de polinomios como aquellas que se realizan entre términos que son de la misma especie, lo cual significa que no es posible sumar o restar términos que no son semejantes.

### 2.3.2 Epistemología del material didáctico.

El conocimiento humano se adquiere por medio de los sentidos; el conocimiento matemático específicamente utiliza el sentido del tacto, complementándolo con la audición y la visión. Según Castro y otros (1997) los modelos como esquemas o materiales estructurados, tales como materiales manipulativos, permiten la formación de conceptos y el desarrollo de procedimientos matemáticos. Después de estas bases es interesante conocer el origen del material didáctico como tal.

Méndez (s.f.) presenta una breve historia acerca del origen del material didáctico para la enseñanza - aprendizaje:

La historia del material educativo o didáctico es casi tan antigua como la propia enseñanza, aunque suele citarse como referente del primer material propiamente didáctico, la obra *Orbis Sensualium Pictus* de J.A. Comenio, elaborada en el siglo XVII, ya que representa la creación del primer texto o manual generado con la

intencionalidad de facilitar la transmisión de conocimiento combinando el texto escrito con representaciones pictóricas así como incorporar la lengua vernácula del alumnado a las páginas impresas. Este libro tenía dos peculiaridades que lo convertían en “didáctico”: una era la combinación del texto escrito con la imagen, y el otro rasgo era que estaba escrito en la lengua “vernácula”, propia de los lectores. Frente a los libros escritos exclusivamente en latín, esta obra de Comenio supuso un salto cualitativo en generar materiales comprensibles para un público amplio y diverso.

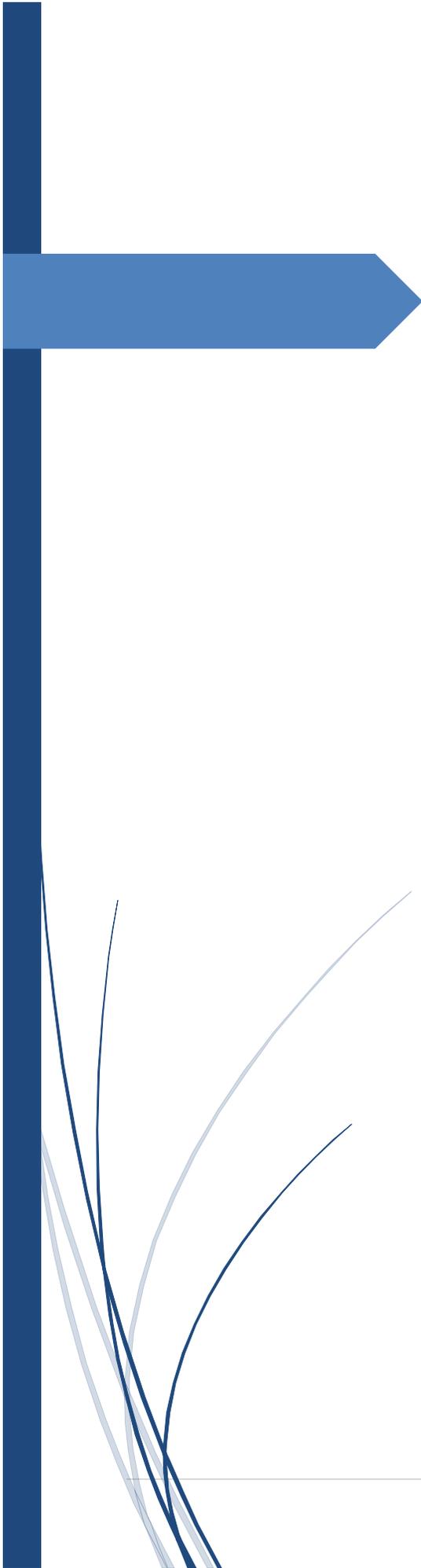
En épocas históricas anteriores como en la Grecia Antigua, como durante el Imperio Romano o posteriormente a lo largo de la Edad Media, la enseñanza se apoyaba en las demostraciones y explicaciones orales ofrecidas por el maestro. Era la transmisión del saber personal. El adulto enseñaba lo que conocía y había ido adquiriendo a lo largo de su experiencia vital, no lo que estaba en los libros. La entrada, presencia y generalización de los textos impresos y otros materiales didácticos en la enseñanza fue un proceso lento y gradual desarrollado a lo largo de varios siglos (aproximadamente desde el siglo XVI hasta el siglo XIX) que fue creciendo de modo paralelo a la consolidación de la obra impresa como canon del saber occidental, y a la aparición de una racionalidad didáctica que teorizaba y pretendía sistematizar la acción y procesos de enseñanza.

Sin embargo, el material didáctico no alcanza su plenitud o al menos sus señas de identidad hasta la aparición de los sistemas escolares a mediados del siglo XIX. La escolaridad, es decir, la educación institucionalizada dirigida a toda la población, es un fenómeno histórico relativamente reciente que surgió en Europa, en plena revolución industrial, a mediados del siglo XIX. A partir de entonces, sobre todo a lo largo del siglo XX, el material didáctico impreso se convirtió en el eje vertebrado de gran parte de las acciones de enseñanza y aprendizaje en cualquiera de los niveles y modalidades de educación. Desde la educación infantil hasta la enseñanza universitaria; en la educación a distancia, en la educación no formal, en definitiva, en cualquier actividad formativa suele existir un material impreso de referencia para docentes y alumnos. Unas veces adoptan el formato de un conjunto de fichas de actividades (como en la citada educación infantil); otras veces el formato de un manual (como en la enseñanza universitaria); otras como una guía práctica (como en un texto de enseñanza de habilidades prácticas como por ejemplo para aprender a escribir a máquina o para manejar un determinado software); otras veces como material de autoaprendizaje (como en el caso de la educación a distancia), o como los libros de texto (material propio de la enseñanza primaria y secundaria).

(Méndez, s.f.,p.2)

### 2.3.3 Ventajas y desventajas.

Aunque en la gran mayoría de los proyectos que han utilizado material didáctico siempre han resultado benéficos, como lo mencionan algunos autores y en experiencia propia, en la actualidad y después de tan largo proceso, se han podido observar desventajas sobre los mismos. Coriat, Cañizares y Alsina (citados en Castro, 2007) incluyen una lista de errores y dificultades que aparecen a la hora de utilizar materiales manipulativos en la enseñanza de la Geometría, entre los que destacamos los siguientes: sofisticación del material (complejidad del objeto), utilización del material por el docente y no por el estudiante, poca cantidad de materiales, la no adecuación del concepto presentado por el material, creer que el material ya asegura la adquisición de un concepto, falta de recursos para obtener materiales. Estas dificultades dependen en gran medida del uso que el docente haga del material en cuestión.



# Capítulo III. Metodología



## Capítulo III. Metodología

En este capítulo presentamos la Ingeniería Didáctica, la cual utilizamos como metodología en el proyecto para hacer el diseño, análisis, aplicación y validación de la secuencia didáctica que componen la situación didáctica.

### 3.1 La Ingeniería Didáctica

Para Douady (1995) la Ingeniería Didáctica es “un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas de manera coherente con el fin de realizar proyecto de aprendizaje para determinados alumnos” (p. 61).

Según Artigue *et al* (1995) ésta puede ser utilizada como metodología de investigación y como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. En nuestro caso, nuestra intención es utilizarla para este segundo fin.

En esta Práctica de Desarrollo Profesional se utiliza la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, por ser un esquema práctico basado en realizaciones didácticas en el aula; es decir, analiza los procesos de construcción, realización y análisis.

#### 3.1.1 Fases de la Ingeniería Didáctica.

Artigue *et al* (1995) define a la Ingeniería Didáctica en cuatro etapas: “Fase 1: Análisis preliminar, fase 2: La concepción y el análisis a priori, fase 3: Experimentación y fase 4: Análisis a posteriori y validación” (p. 33), que a continuación serán descritas.

3.1.2 Fase 1: Análisis Preliminar. Esta fase, según Artigue *et al* (1995) debe analizarse bajo algunas de las siguientes dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica.

**Epistemológica:** Se propone analizar las características del saber en juego, por ejemplo, historia de las matemáticas (Figueroa, 2013) y en nuestro caso, un marco histórico del desarrollo del Álgebra.

**Cognitiva:** Se plantea analizar las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, la forma en la que los estudiantes interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades, teniendo en cuenta sus conocimientos previos (Figueroa, 2013).

**Didáctica:** Se propone analizar las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Se considera la forma cómo se desarrolla el proceso de enseñanza del tema, así como los recursos didácticos que utiliza la profesora. (Figueroa, 2013).

#### 3.1.3 Fase 2: La concepción y el análisis a priori.

El investigador toma la decisión de trabajar con un determinado número de variables del sistema, llamadas variables de comando. Artigue *et al.* (1995) considera dos tipos:

a. Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.

b. Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir la organización de una secuencia o fase (p.42).

Un ejemplo de variable macro-didáctica es el número de sesiones en las que se llevará a cabo la propuesta. Uno de variable micro-didáctica es el tipo de variables que conforman los polinomios que usarán en la propuesta.

En esta fase se realiza el diseño de las situaciones que ayudarán en los procesos de construcción del saber en juego. Por otro lado, se deberá considerar un análisis de las posibles respuestas que darán los estudiantes al momento de llevar a cabo la propuesta.

#### 3.1.4 Fase 3: Experimentación.

Esta fase es la puesta en marcha de las actividades diseñadas. Inicia en el momento en que el investigador-profesor entra en contacto con la población de estudiantes.

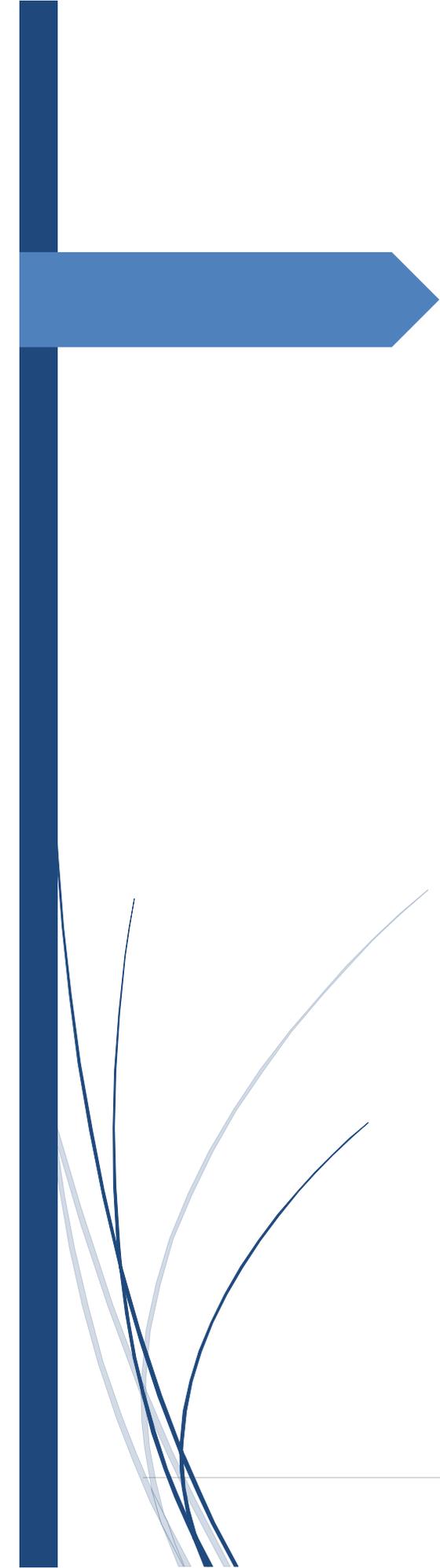
De Faria (2006) señala que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. (p. 5)

#### 3.1.5 Fase 4: Análisis a posteriori y validación.

El análisis a posteriori se refiere al estudio del conjunto de datos recogidos durante la experimentación: en nuestro caso, producciones de los estudiantes y de las sesiones video grabadas.

En cuanto a la validación, Artigue et al. (1995) sostienen: “la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación” (p. 48). De esta manera se identificarán los resultados obtenidos de la puesta en marcha de la situación didáctica.



# Capítulo IV. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica



## Capítulo IV. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica

En esta sección se presenta la implementación en el proyecto de desarrollo profesional de la metodología descrita.

### 4.1 Fase 1: Análisis Preliminar

Recordemos que estos análisis se pueden hacer a partir de tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En lo que sigue se presentarán los análisis preliminares realizados para este trabajo, comenzando con un estudio epistemológico acerca del nacimiento del Álgebra, posteriormente se presenta el análisis cognitivo, mediante una actividad para trabajar con la suma y resta de polinomios que realizaron estudiantes del primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ), plantel Luis Moya y por último el análisis didáctico, en el que se describe en qué lugar del programa de estudios está situado este tema, así como la manera en que se enseña la suma y resta de polinomios.

#### 4.1.1 Dimensión epistemológica.

En este apartado se presentan algunas características epistemológicas del Álgebra y su enseñanza, a través de la identificación de su nacimiento en la historia de las Matemáticas.

La primera etapa hacia los signos matemáticos y las fórmulas en general la constituye la aparición de los símbolos numéricos, que aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura y que jugó un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Todavía en este tiempo, cualquier ley o la resolución de un problema matemático se expresaba con palabras, pues la utilización de signos para las operaciones aritméticas y la designación literal para la incógnita tuvo lugar mucho más tarde (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989, p. 38).

A partir de esto, notamos que en los inicios de la Matemática, los problemas no se resolvían con signos, sino de forma verbal.

Para Socas et al (1989) la notación algebraica presenta tres periodos:

- Retórico o verbal, en el cual las operaciones se describen con palabras (1700 a. c. - 250 d. C.). En este periodo se encuentra el álgebra geométrica, desarrollada por los griegos (300 a. C.), rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.
- Sincopado o abreviado, en el cual se empiezan a utilizar algunas abreviaciones para simplificar la resolución de problemas (250 d. C. - comienzos del siglo XVI)
- Periodo simbólico, en el que ya se utilizan diferentes símbolos y signos matemáticos (siglo XVI - ...)

Un ejemplo de la resolución de un problema de manera verbal, correspondiente al periodo retórico, es el siguiente:

“conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870”. Esto equivale a resolver la ecuación  $x^2 - x = 870$ , que era resuelto por los babilonios de la siguiente manera: Se toma la mitad de 1, que es 0;30 (en base 60), y se multiplica 0;30 por 0;30, lo que da 0;15; se suma este resultado a 14,30 (14,30+0;15) es igual a 14,30;15, ya que 0;15 significa 0.15); pero 14,30;15 es el cuadrado de 29;30. Por último, se suma 0;30 a 29;30 y el resultado es 30, el lado del cuadrado. (Collete, 2003, p. 27).

También dentro del periodo verbal, para Collette (2003), los griegos, sin tener aún alguna notación algebraica adecuada, tuvieron que inventar procesos geométricos para llegar a solucionar problemas algebraicos. Por ejemplo, la proposición 4 del libro II de Los Elementos, “Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos”, permite verificar la expresión  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$  (Socas, et. al, 1989, p. 42), como se puede ver en la Figura 1 .

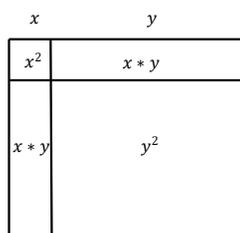


Figura 1. Proposición 4 del libro II de los elementos. Tomado de Socas, et al. (1989)

“Este método empleado por los griegos consistía en asociar letras a los lados de alguna figura geométrica; es decir, las líneas eran representadas por términos” (Martín, 2013, p. 21).

Como se puede notar en líneas atrás, el uso del Álgebra como herramienta para la resolución de problemas es sumamente importante, pero es hasta después del siglo XVI que se empiezan a utilizar símbolos algebraicos tales como los conocemos en la actualidad, pues el álgebra, comienza a estructurarse, principalmente, gracias a Viète (1540 - 1603), que empleó letras mayúsculas para representar cantidades y a Descartes (1596 - 1650), que contribuyó en la notación simbólica (Martín, 2013).

Si bien desearíamos centrar este apartado sobre la dimensión epistemológica del álgebra en mostrar por qué se suman los polinomios o se restan de la manera en que lo hacemos, notamos que el proceso de sumar expresiones algebraicas se realiza así desde las etapas retórica y sincopada, en las que los polinomios han estado presentes, pero no como un concepto en sí mismo, sino como herramienta en la resolución de problemas en los que se utilizaron

ecuaciones lineales y cuadráticas principalmente, por estar asociados a problemas de la vida cotidiana y problemas geométricos, esto es lo observado con los griegos y con Diofanto.

Así, se puede rescatar que el uso de elementos algebraicos, pero en otras representaciones, tales como las verbales o las geométricas, desde tiempos antiguos ayudaron en la resolución de problemas. De esta manera es que consideramos importante incluir actividades en las que los estudiantes del nivel bachillerato puedan utilizar representaciones verbales, geométricas, esquemas o materiales didácticos manipulables al enfrentarse con tareas algebraicas, para posteriormente relacionarlo con el conocimiento algebraico que se pide en este nivel. Consideramos que esto podría ayudar para dar sentido al uso del Álgebra en la resolución de problemas.

Para terminar este apartado, al haber detectado el uso de elementos algebraicos en diferentes representaciones, y de manera similar a la decisión tomada en (Martín, 2013) no se ha considerado entrar en mayor detalle en el desarrollo del lenguaje algebraico, ya que parte del sentido de este recorrido, era ése, encontrar algunos hechos en la epistemología del álgebra que nos permitieran sustentar alguna propuesta didáctica para la enseñanza de la suma y resta de polinomios en la actualidad.

#### 4.1.2 Dimensión didáctica.

En esta dimensión se analizan las características del funcionamiento de la enseñanza del tema suma y resta de polinomios en el COBAEZ plantel Luis Moya. En esta dimensión se analizan dos programas de estudios para la materia Matemáticas I (Dirección General de Bachillerato [DGB], 2018; DGB, 2013), algunos libros de texto sugeridos por jefes de materia de este subsistema y por la experiencia docente de la autora de esta práctica de desarrollo profesional.

Como se ha señalado, los programas de estudios a considerar en este trabajo son los propuestos por la DGB, de los años 2013 y 2018, pues en el último año mencionado se puso en marcha la Nueva Reforma Educativa y la institución que nos atañe fue piloto para su implementación solo en los primeros semestres.

El tema de suma y resta de polinomios se encuentra en la materia Matemáticas I, que se lleva en el primer semestre, con un módulo de 50 minutos de clase diarias. En los planes y programas del año 2013, había diez bloques, en los que el tema de suma y resta de polinomios, tema a considerar en esta práctica de Desarrollo Profesional, se encontraba en el bloque IV titulado "Realiza transformaciones algebraicas I". Posteriormente, en la Nueva Reforma Educativa 2018, el contenido de esta asignatura se redujo a siete bloques, en los cuales el tema de nuestro interés se ubica en el bloque V, que lleva por nombre "Operaciones algebraicas". En cuanto al tiempo destinado para cubrir este contenido, es el mismo en ambos planes y programas de estudio, 5 módulos.

A partir de aquí describiremos las competencias disciplinares y actitudinales así como los conocimientos previos y los aprendizajes esperados para el tema de suma y resta de polinomios con base en el programa de estudios 2018. Las competencias disciplinares que se espera desarrollen a través de este tema son las siguientes:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. (DGB, 2018, p.22).

Al respecto se considera que estas competencias son ambiciosas, pues consideramos complicado el intentar ver el tema de suma y resta de polinomios a través de la resolución de problemas reales. En lo que sí podría abonar nuestra propuesta sería en la interpretación del lenguaje algebraico para la comprensión y análisis de situaciones hipotéticas o formales, escolares. Y esperamos que, si los estudiantes aprenden el tema, posteriormente tal vez puedan usarlo de manera que logren desarrollar estas competencias.

Además, los aprendizajes esperados que se pretenden obtener en los estudiantes son los siguientes:

- Utiliza lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.

(DGB, 2018, p.22)

Los conocimientos previos con los que deben contar los estudiantes son: “operaciones con números reales (suma, resta, división y multiplicación), ley de los signos, ley de los exponentes y radicales y lenguaje algebraico” (DGB, 2018, p.22). Mientras que los conocimientos con los que se relaciona posteriormente este tema serán de primera instancia los productos notables.

Los contenidos actitudinales que se pretenden desarrollar son:

- Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.
- Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

- Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.

(DGB, 2018, p.22)

Al respecto, podemos comentar que estos contenidos nos sugieren una forma de trabajo en la que los estudiantes puedan compartir sus conocimientos previos y distintas estrategias a la hora de resolver problemas algebraicos. Desde nuestro punto de vista, esto da pie para utilizar la TSD, pues ésta propone que los estudiantes trabajen en equipo al resolver las tareas asignadas y validen sus ideas.

Cabe señalar que en el COBAEZ no hay libros de texto gratuitos para los estudiantes y tampoco se obliga a adquirirlos de forma particular; sin embargo, en las reuniones de academia del campo disciplinar de matemáticas, se sugieren algunos materiales para consulta, dichas reuniones se llevan a cabo al final o a inicios de cada semestre.

Los libros considerados en julio del 2018 son “Matemáticas I” de la editorial Umbral (2018) y “Matemáticas I, aritmética y álgebra” de editorial CENGAGE Learning (2013). Con base en éstos, la profesora que conduce esta práctica arma sus planeaciones de enseñanza y aprendizaje, en las que determina qué elementos irán en las notas de clase de sus estudiantes. Es importante mencionar que ella no les exige la compra de dichos libros, solamente los usa para consulta de manera personal. Es así que los jóvenes utilizan como principal fuente de estudio sus apuntes.

En el Anexo 1 se puede observar una planeación usual, que la profesora usaba para el tema “suma y resta de polinomios”, en ésta se aprecia que el desarrollo del tema es de la siguiente manera:

- a. Dar la definición de polinomio y una explicación acerca de cómo se realiza la suma y resta de polinomios.
- b. Resolución de ejemplos por parte de la profesora.
- c. Al final, resolución de ejercicios por parte de los estudiantes.

En general observamos que en esta planeación los ejercicios propuestos utilizan una sola variable, que es la misma para la mayoría de las tareas. Además, se trabaja con coeficientes y exponentes que son en su mayoría números enteros y positivos. Se distingue que el trabajo del estudiante consiste en ver, entender y luego aplicar.

Por su parte, la docente, define, explica los ejemplos, propone ejercicios y apoya a los estudiantes en la solución de los mismos. Observamos que el tipo de contrato usado por la profesora se parece a los de aplicación y control, y de utilización de conocimientos (Ávila, 2001), en los cuales, ella va explicando su clase y al mismo tiempo pregunta a sus estudiantes si tienen dudas que se contestan en el transcurso de la sesión, además, sugiere que los estudiantes resuelvan ejercicios para que utilicen lo aprendido.

Los contratos didácticos que utiliza la profesora podrían clasificarse como ligeramente didácticos (Ávila, 2001), observamos que ella se preocupa por la presentación de los contenidos, pero de esta forma no se puede asegurar que los estudiantes asuman como propia la responsabilidad de los aprendizajes.

A lo largo de la experiencia de la docente se ha podido percibir que en el plantel educativo en el que actualmente labora, este tema lo enseñaba de forma tradicional, en la que los efectos del aprendizaje no eran los esperados. Esto ha hecho que desde su trinchera (profesora de Matemáticas) trató de buscar e implementar herramientas para mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, en las que se aprecia que la Teoría de Situaciones Didácticas puede ser una alternativa.

Al analizar cómo se propone que se aborde el tema de suma y resta de polinomios en la materia, el libro de texto Matemáticas I Aritmética y Álgebra (Ibáñez y García, 2010), que forma parte de las referencias de la planeación usual, se observa que la estructura es: propone la definición de polinomio, muestra algunos ejemplos y por último proporciona una lista de ejercicios para que los estudiantes practiquen. Como se puede notar, se presenta de una manera muy parecida a como se propone el tema en la planeación didáctica, y es que la profesora solía tomar como base los libros sugeridos por la academia de Matemáticas.

El ser docente responsable de esta asignatura por más de trece años, me permitió observar la forma en que los libros de texto trabajan y sobre todo indagar en los resultados de aprendizaje con los estudiantes. En particular, al analizar el libro de texto (Ibáñez y García, 2010) y las planeaciones usuales, en cuanto al tema que nos atañe, me sirvió para determinar un aspecto básico que no habría de estar presente dentro de la secuencia didáctica que propongo: la manera de presentar el tema: definición, ejemplos y ejercicios.

Por otro lado, el haber trabajado la dimensión didáctica fue un gran acierto, pues de los propósitos del programa de estudios, se identificaron las competencias genéricas y disciplinares que habrán de proponerse al formular la situación didáctica con material didáctico.

#### 4.1.3 Dimensión cognitiva.

En esta dimensión se consideran los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes para, con base en ellos, poder construir nuevos conocimientos, de esta forma podrán ser apreciados por la profesora antes de la implementación de la situación didáctica con los estudiantes. Este análisis se realiza mediante la aplicación de un cuestionario con la finalidad de obtener información pertinente que permita saber qué conocen los estudiantes de bachillerato sobre el tema de sumas y restas de polinomios.

Los conocimientos previos con los que deben contar los estudiantes son: “operaciones con números reales (suma, resta, división y multiplicación), ley de los signos, ley de los exponentes y radicales y lenguaje algebraico” (DGB, 2018, p.22).

Al respecto, se considera que en la suma y resta de polinomios la suma de coeficientes se limita a la suma de números reales, de esta manera, creemos que las operaciones de división y multiplicación no se relacionan de manera directa con este tema. Además al realizar la suma y resta de las operaciones, sin duda se requiere de la ley de los signos. Y aunque en este momento no se necesita que los estudiantes utilicen la ley de los exponentes y radicales, sí es necesario que tengan en mente que al sumar o restar términos semejantes, los exponentes no se ven afectados. En cuanto al lenguaje algebraico, lo mínimo que se espera es que sepan distinguir entre constantes y variables, y recordar lo que es una expresión algebraica y términos semejantes.

Además, aunque la DGB nos indica los temas anteriores como parte de su conocimiento previo, es sabido que la mayoría de los estudiantes de primer semestre, de este nivel educativo, no cuenta con ellos, esto después de llevar el curso propedéutico de nuevo ingreso, implementado por la institución.

Por otra parte, se sabe que este tema no es del todo nuevo para los estudiantes de bachillerato, pues en el nivel secundaria ya han visto algo de esto, por tal motivo, consideramos importante explorar qué recuerdan al respecto: polinomios y cómo se suman o se restan.

Para realizar el análisis cognitivo se elaboró un cuestionario que consta de cuatro preguntas y un ejercicio que ha de resolverse mediante la operación de suma y resta de polinomios (Anexo 4), las cuales fueron elaboradas para un grupo de primer semestre del COBAEZ Luis Moya. Éste se aplicó a 47 estudiantes, que son la población estudiantil con la que se trabajará en esta práctica de Desarrollo Profesional, de éstos, 28 son mujeres y 19 son hombres. Cuatro de ellos tienen capacidades diferentes, dos diagnosticados con lento aprendizaje por parte de USAER (Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular) y los otros dos jóvenes sin diagnóstico. A inicios del semestre (agosto de 2018) se utilizó un módulo de la materia Matemáticas I para que los estudiantes contestaran el instrumento.

A continuación se presentan las preguntas que fueron consideradas y los ejercicios propuestos en el mismo, así como el análisis de cada uno de ellos.

#### 1. ¿Qué entiendes por polinomio?

De acuerdo con las definiciones que se proporcionan a los estudiantes en los libros de texto sugeridos por las reuniones de academia del mismo subsistema y por las anteriores a este nivel educativo, lo que se esperaba, es que los jóvenes respondieran que polinomio es una expresión algebraica del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

siendo  $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$  números reales, llamados coeficientes,  $n$  un número natural,  $x$  la variable o indeterminada y  $a_n$  es el coeficiente principal.

Sin embargo, en la mayoría de las respuestas se observó que los estudiantes entienden por polinomio una expresión algebraica de cuatro o más términos, o la distinguen como la suma o resta de varios términos compuestos por signos, números, letras o variables, y exponentes, como se puede ver en la Figura 2.

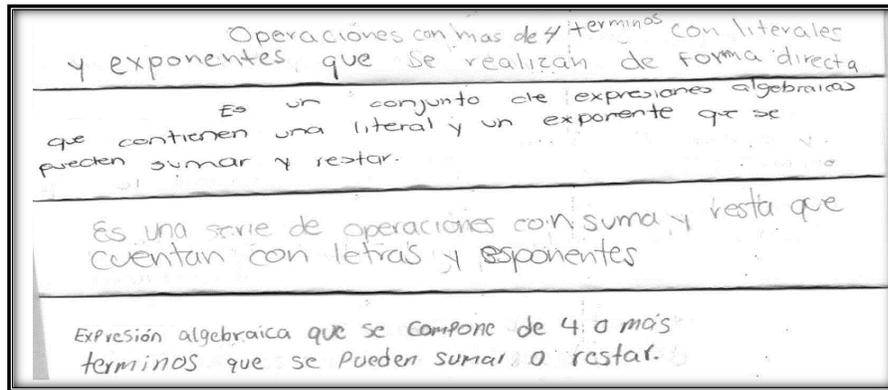


Figura 2. ¿Qué entiendes por polinomio?

2. Menciona los elementos que conforman a un polinomio.

En esta pregunta se esperaba que los estudiantes contestaran que los elementos que conforman a un polinomio eran monomios, variables, coeficientes, grado del polinomio y término independiente. Pero la respuesta en su mayoría fue signos, números, letras y exponentes o potencias (ver Figura 3).

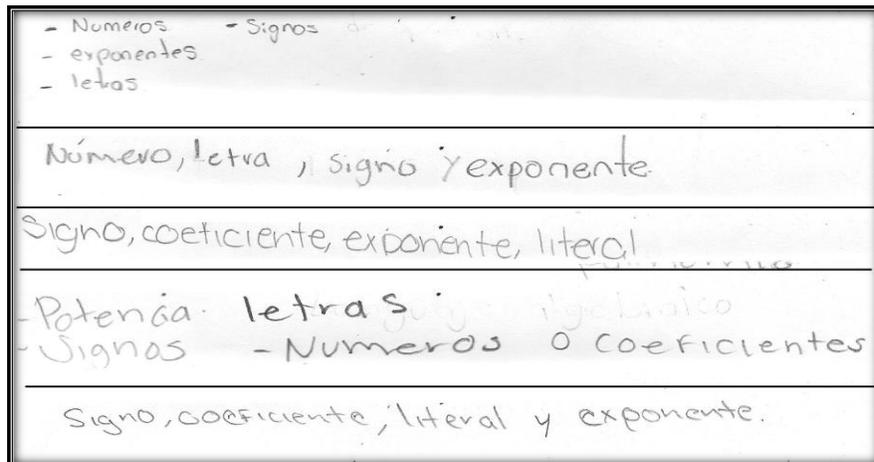


Figura 3. Menciona los elementos que conforman a un polinomio

Con base en esta respuesta y en la anterior podemos darnos cuenta que lo que tiene claro el estudiante de bachillerato, es que en un polinomio se va a poder encontrar siempre o casi siempre lo que ellos llaman términos con signos, números, letras y exponentes.

### 3. ¿Cómo se realiza la suma de polinomios?

La respuesta esperada para esta pregunta era “La suma de dos polinomios se realiza sumando los coeficientes de los términos del mismo grado”, y creo que la obtenida de forma real no está tan lejana a lo que oficialmente se acaba de presentar, pues todos los estudiantes contestaron que la suma de los polinomios se realiza sumando los términos que tengan el mismo tipo de letra y el mismo tipo de exponente (ver Figura 4).

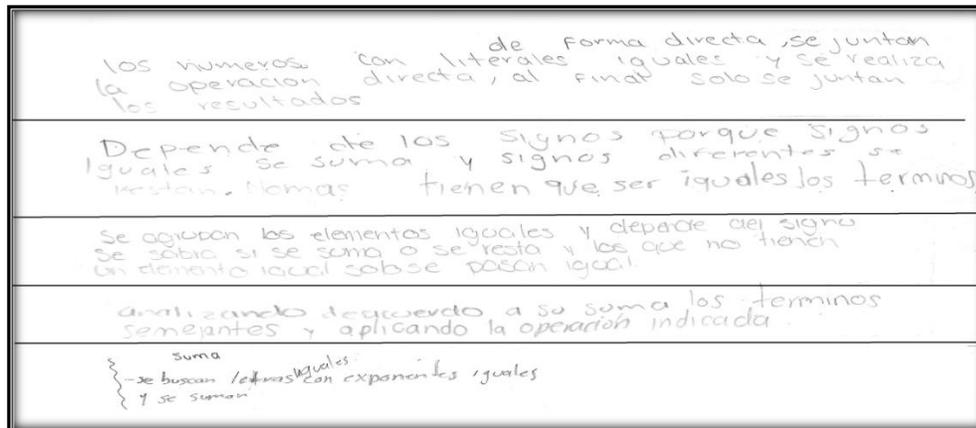


Figura 4. ¿Cómo se realiza la suma de polinomios?

Consideramos importante señalar que, aunque los estudiantes no utilizan un lenguaje formal, se puede interpretar que sus conocimientos previos los podrían ayudar a realizar de manera efectiva una suma de polinomios.

### 4. ¿Cómo se realiza la resta de polinomios?

La respuesta esperada era que la resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo; sin embargo, más del 90% de los estudiantes contestó que se hacía igual que la suma, pero con resta. Entendiendo por lo anterior que el proceso es el mismo que en la suma, solo que atendiendo el signo que le antecede al sustraendo, con relación a esto, se observó que algunos estudiantes consideran que el signo de la resta afecta solamente al primer término del sustraendo, por ejemplo, ver Figura 5.

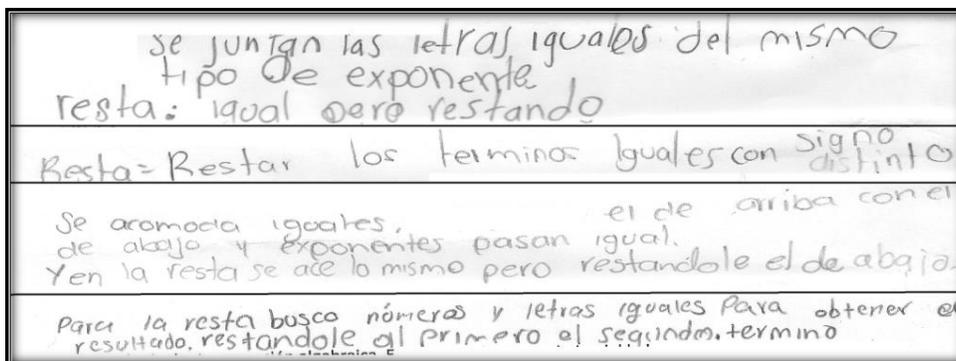


Figura 5. ¿Cómo se realiza la resta de polinomios?

Y solamente algunos estudiantes expresaron que para poder restar dos polinomios, de primera instancia se debería cambiar los signos al sustraendo y posteriormente realizar la operación, ver Figura 6.

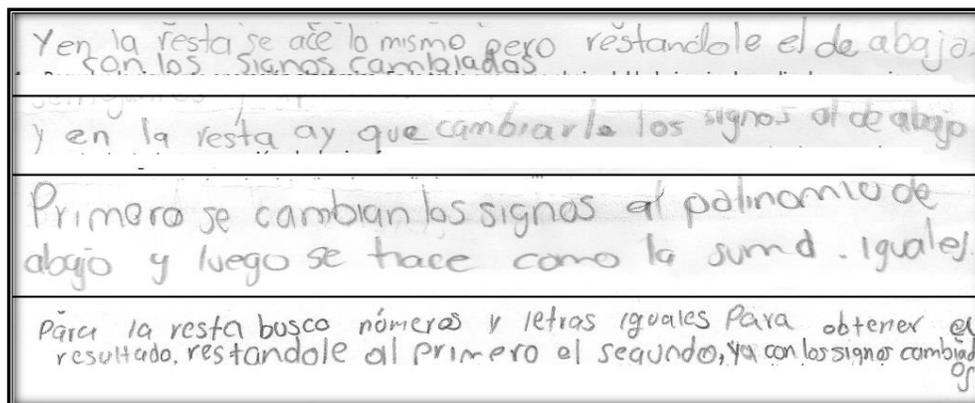


Figura 6. ¿Cómo se restan los polinomios?

Después de las preguntas planteadas se les pidió a los estudiantes resolvieran un ejercicio de suma y resta de polinomios. Con estos ejercicios identificaremos si los estudiantes pueden realizar las operaciones de suma y resta con números enteros (acotamos a este conjunto puesto que en la secuencia que se propone solamente se trabajan coeficientes de este tipo), además, la ley de los signos y términos semejantes.

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \text{ y } Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5,$$

obteniendo las siguientes respuestas:

- Suma de polinomios.

En esta operación se esperaba que los estudiantes tuvieran menos problema para su resolución, y efectivamente, más de 70% logró obtener la solución correcta.

El proceso fue diferente en algunos de los casos, pero la mayoría sumó los polinomios escribiendo uno debajo del otro (forma vertical), de manera que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

Algunos estudiantes optaron por resolver la adición de los polinomios agrupando los monomios del mismo grado y posteriormente procedieron a sumar los mismos. Otros decidieron encerrar los términos semejantes dentro de las mismas expresiones algebraicas propuestas y así llevaron a cabo la operación.

El último caso solo se presentó en 8 de los 47 estudiantes, en el que éstos resolvieron la operación de la suma de polinomios de forma directa, es decir, sin realizar ningún reacomodo de términos semejantes (Ver Figura 7).

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

$$Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$

Suma

$$R = 3x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 13$$

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

$$Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$

suma

$$3x^5 + 5x^4 + 4x^4 + 2x^3 + x^3 + 4x^2 + 2x - 5x + 8 + 5$$

$$3x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 13$$

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

$$Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$

$$R = 9x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 13 + 3x^5$$

Figura 7. Sumar los polinomios P(x) y Q(x)

➤ Resta de polinomios.

Se esperaba que los estudiantes primero realizaran el acomodo (orden) de los polinomios, en este caso tendrían que ordenar acomodando los términos del grado mayor al menor. Posteriormente cambiarían los signos del sustraendo por sus opuestos y finalmente procederían a trabajarlos como suma.

Sin embargo, el número de estudiantes que no hicieron lo que se esperaba fue muy alto, pues más del 50% resolvió la resta de los polinomios sin efectuar el cambio de signos para el sustraendo, obteniendo resultados erróneos ante la operación propuesta.

Aunque lo expuesto anteriormente fue lo que se considera, en este análisis, uno de los principales errores, también se pudo observar que éstos se agudizan más cuando los coeficientes son de signo negativo (ver Figura 8).

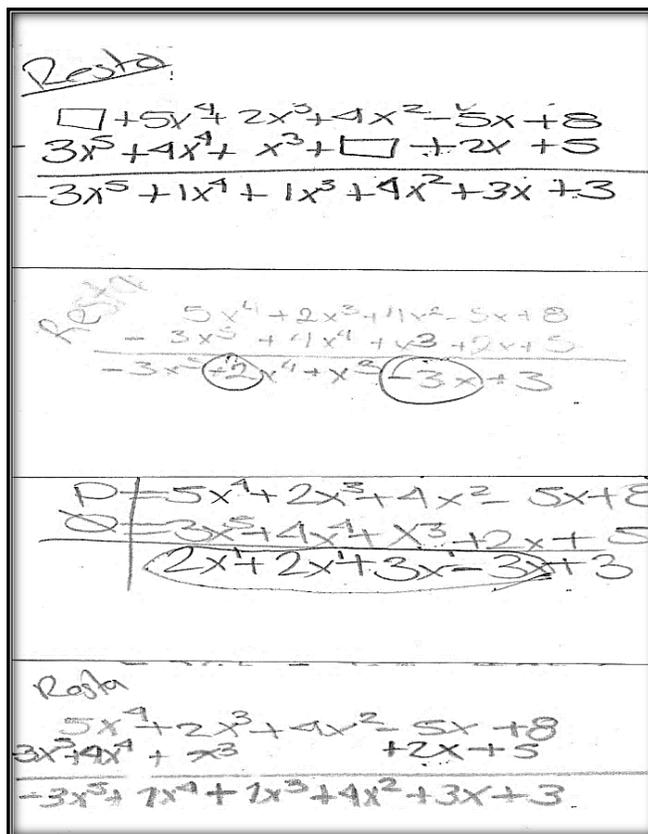


Figura 8. Resolver resta de polinomios

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \text{ y } Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$

Percibimos que la mayoría de los estudiantes han “memorizado” una estrategia en la que cuando tienen que restar dos polinomios, primero ordenan los términos del minuendo y del sustraendo, luego los acomodan de manera vertical, de forma que queden en una misma columna los términos semejantes, y por último restan los coeficientes del sustraendo a los del minuendo, respectivamente.

Esta estrategia funciona siempre que los signos de los coeficientes del sustraendo sean positivos, no así cuando son negativos. En particular, observamos que algunos estudiantes solo aplican la estrategia sin tomar en cuenta los signos, por ejemplo, ver Figura 9.

Resolva

$$\begin{array}{r}
 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \\
 - 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5 \\
 \hline
 -3x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x + 3
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 P = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \\
 Q = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5 \\
 \hline
 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 3x + 3
 \end{array}$$

Figura 9. Resolver resta de polinomios

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \text{ y } Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$

Cabe señalar que algunos estudiantes solamente acomodan los polinomios uno debajo del otro, sin tomar en cuenta que cada término debiera ir debajo de su semejante.

Este análisis nos brinda información importante del conocimiento de los estudiantes sobre el tema suma y resta de polinomios, pues permite darnos cuenta que a pesar de que es un tema que ya se abordó en el nivel académico anterior, los estudiantes no han logrado aprenderlo en su totalidad, por lo que se puede decir que no se ha comprendido, en particular, se requieren propuestas para la operación de la resta. Por esta razón las actividades que se propongan en la secuencia didáctica que se pretende diseñar estarán planeadas de tal manera que ayuden a los estudiantes a lograr los aprendizajes esperados.

En general este análisis preliminar constituido por tres dimensiones nos permite señalar lo siguiente:

- Desde siglos anteriores se ha trabajado con el Álgebra, aunque no de la forma en que se representa ahora; pues por mucho tiempo los problemas fueron resueltos utilizando recursos verbales o geométricos, hasta evolucionar a las estrategias algebraicas que se utilizan hoy en día.
- Cuando se aborda el tema de suma y resta de polinomios en primer semestre de bachillerato, casi siempre se tiende a omitir realizar el cambio de signos para el sustraendo, y así poder llevar a cabo la operación de la resta. Además, los estudiantes no han logrado identificar que al realizar sumas o restas de polinomios tienen que identificar primero quiénes son términos semejantes.
- De los propósitos del programa de estudios, se identificaron las competencias genéricas y disciplinares que habrán de proponerse al formular la situación didáctica con material didáctico.

Por otro lado, a partir de la revisión de antecedentes recordemos que el incorporar material didáctico en el nivel medio superior podría romper con el tradicionalismo con el que se ha estado trabajando en este nivel educativo, dentro del centro de trabajo que actualmente se labora.

#### 4.2 Fase 2: Concepción y análisis a priori

En esta sección se presenta de forma detallada la secuencia didáctica que se diseña y aplica con los estudiantes del primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ) plantel Luis Moya, considerando el material didáctico que se utiliza durante el desarrollo de las actividades, por sesión (dos, cada una de 50 minutos aproximadamente), así como los diferentes tipos de estrategias que se esperan por parte de los estudiantes para dar solución a las tareas planteadas y la forma de enseñanza que implementará la profesora.

##### 4.2.1 La Secuencia didáctica.

La secuencia didáctica ha sido elaborada de acuerdo con la Teoría de Situaciones Didácticas y siguiendo la Ingeniería Didáctica como metodología. Se presentan tareas algebraicas en las que los estudiantes en forma individual y en binas, deberán resolver, partiendo de sus conocimientos previos, mismos que se consideraron por medio del análisis preliminar cognitivo.

La secuencia se propone implementarla en dos sesiones de 50 minutos aproximadamente cada una. La primera está conformada principalmente por la presentación, manejo y uso del contenedor como material didáctico. La segunda para la puesta en escena de conocimientos adquiridos a través del uso del contenedor como material didáctico, viéndose reflejados en ejercicios con sumas y restas de polinomios, pero ya sin la ayuda de éste.

Cabe mencionar que el diseño de las actividades propuestas, inducen a pasar por situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

Propósito: Se pretende que la secuencia didáctica con el uso del material didáctico “el contenedor” provea de autonomía a los estudiantes para que se apropien del conocimiento y realicen la suma y resta de polinomios de manera independiente sin la intervención directa del profesor.

Material: Hojas de trabajo (

Anexo 2), material didáctico “El contenedor”, taparrosas (tapas de botellas de plástico) de color verde y rojo, plumones, tarjetas en blanco (forradas con plástico transparente), seis tarjetas con las etiquetas  $x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1$  (una por cada “término”) y lápiz (Ver Figura 10).



Figura 10. “El contenedor” (material didáctico)

El funcionamiento de “el contenedor” como material didáctico será a través de los siguientes lineamientos:

1. Cada cajón debe tener nombre (según el tipo de término que se quiera trabajar).
2. El depósito de las taparrosas será única y exclusivamente en el cajón del contenedor que le corresponda.
3. Los coeficientes enteros positivos deben representarse con las taparrosas verdes y los negativos con las taparrosas rojas.
4. Una taparroca verde con una taparroca roja, que se encuentren en un mismo cajón del contenedor, deberán eliminar.
5. Para el reporte de resultados, éstos estarán determinados por:
  - a. La etiqueta que corresponde al cajón de procedencia,
  - b. El número de taparrosas restantes (después de la eliminación), y
  - c. El color de las taparrosas (las verdes indican signo positivo y las rojas signos negativos).
6. La suma y resta de polinomios se trabajan de igual manera en el contenedor. Pero antes de realizar la resta, mediante el depósito de las taparrosas en cada uno de los cajones, el segundo polinomio (sustraendo) tendrá que cambiar el signo de cada uno de sus términos.

#### 4.2.2 Variables didácticas

Recordemos que una variable didáctica es un elemento dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje que puede modificarse de manera que se propicie el uso (o no) de ciertas estrategias.

Así, en este diseño se tendrán en cuenta las siguientes variables:

Macrodidácticas, concernientes a la organización de la aplicación.

- La situación didáctica está formada por dos sesiones, en la primera se utiliza el material didáctico del contenedor y en la segunda no, se pretende que los estudiantes puedan resolver los ejercicios propuestos sin éste.
- La formación de los grupos será por afinidad, en 22 equipos de 2 integrantes cada uno y un equipo de tres estudiantes.
- La entrega de las hojas de trabajo será al inicio de cada actividad, en las que se detallarán las acciones que deben seguir los estudiantes por equipos.

Microdidácticas, relativas a la organización de la secuencia.

- El material didáctico es el contenedor y éste estará elaborado del tipo de material que elijan los estudiantes para su construcción (cartón, madera, hierro).
- Taparrosas verdes y rojas, 20 de cada color, por equipo, las verdes representan los coeficientes enteros positivos y las rojas, los enteros negativos.
- Al menos seis tarjetas blancas forradas de plástico transparente y un plumón para pintarrón y algún trozo de tela o papel para borrar.
- Enteros positivos y negativos. Son los números con los que se trabaja, ya que debido al material que se utiliza, es difícil de cortar las taparrosas para poder representar números fraccionarios.
- Polinomios considerados. Se han elegido con base en los resultados de la dimensión cognitiva del análisis preliminar, en particular se decidió usar diferentes variables:  $a, b, c, d, m, n, r, s, t, x, y, z$  y la combianción de algunas de éstas, además, signos positivos y negativos para los coeficientes de los sustraendos, de manera que se propicie el aprendizaje del concepto suma y resta de polinomios. Además se consideró el orden en el que presentan los términos de los polinomios (en desorden).

En lo que sigue se presenta la concepción de la situación didáctica y su análisis a priori.

#### 4.2.3 Concepción y análisis a priori

La situación se lleva a cabo en dos sesiones, de las cuales a continuación se describe su organización en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Además, puede observarse en el

Anexo 3, la planeación diseñada para este tema.

## Sesión 1

### Situación de acción.

Se esperaba que la situación de acción se diera cuando el estudiante, sin ayuda directa del profesor, actuara sobre un problema haciendo uso de sus conocimientos previos. En esta situación se debía buscar que el estudiante aceptara la devolución; es decir, que aceptara que es su responsabilidad el aprendizaje.

La apertura de la primera sesión se pretendía se llevara a cabo en el momento en que la profesora enunciara el tema a desarrollar y abordara a los estudiantes sobre lo que éstos sabían del mismo.

Mediante las preguntas detonadoras “¿qué se entiende por polinomio?, ¿qué elementos conforman un polinomio?, ¿cómo se realiza la suma de un polinomio? y ¿cómo se realiza la resta de polinomios?, se pretendía lograr la devolución, de manera que en el grupo hubiera un ambiente de opinión, en el que a través de una lluvia de ideas se construyera en primera instancia una definición de manera informal sobre el tópico matemático, que después habría de reformularse.

Posteriormente la profesora presentaría el material didáctico llamado “el contenedor” y expondría su funcionamiento a través de los siguientes lineamientos:

1. Cada cajón debería tener nombre (según el tipo de término que se quiera trabajar).
2. El depósito de las taparrosas sería única y exclusivamente en el cajón del contenedor que le correspondiera.
3. Los números enteros positivos debería representarse con las taparrosas verdes y los negativos con las rojas.
4. Una taparrosa verde con un taparrosa roja, que se encuentren en un mismo cajón del contenedor, se deberían eliminar.
5. Para el reporte de resultados, éstos estarían determinados por:
  - a. La etiqueta que correspondiera al cajón de procedencia,
  - b. El número de taparrosas restantes (después de la eliminación), y

- c. El color de las taparrosas (las verdes indicarían signo positivo y las rojas signos negativos).
6. La suma y resta de polinomios se trabajarían de igual manera en el contenedor. Pero antes de realizar la resta, mediante el depósito de las taparrosas en cada uno de los cajones, el segundo polinomio (sustraendo) tendría que cambiar el signo de cada uno de sus términos.

Se esperaba que los estudiantes recurrieran a sus conocimientos previos para tener la mayor participación tanto en los cuestionamientos realizados, como en el desarrollo del propio ejemplo dirigido por la profesora.

### **Situación Acción - Formulación.**

La situación de formulación se daría cuando el estudiante intercambiara información con uno o varios compañeros, comunicando lo encontrado y esto propiciaría la devolución de la información que se comparte a través de mensajes escritos u orales. La opción del por qué se combinaría la situación de acción-formulación es debido a la forma en que éstas se presentarían dentro de la situación didáctica diseñada.

Después de tomar en cuenta cada uno de los lineamientos que se describieron anteriormente, y haciendo uso de las primeras tarjetas ya prediseñadas:  $x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1$ , la profesora explicaría el uso del contenedor a través de dos ejemplos de suma y resta de polinomios utilizando a su vez, para el registro, el pintarrón.

La maestra dirigiría la resolución de los siguientes ejemplos:  $(a + b)$  y  $(p - q)$  en “*el contenedor*”, intentando propiciar a través de preguntas la construcción del propio desarrollo de los anteriores dándoles solución (devolución).

$$a = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x - 7$$

$$b = 4x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3$$

$$p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8$$

$$q = 3m^5 + 4m^4 - m^3 + 2m + 5$$

Se esperaría que los estudiantes participen de forma voluntaria en el desarrollo del proceso que habría de dar solución a los ejemplos propuestos.

### **Situación de formulación.**

Como se ha señalado anteriormente, en la situación de formulación el estudiante propondría una manera de resolver la situación propuesta, además intercambiaría información con uno o varios compañeros, comunicando lo encontrado a través de mensajes escritos u orales.

Así, en la parte del desarrollo de la situación diseñada en la primera sesión, al término de la explicación con cada uno de los ejemplos, los estudiantes se organizarían por binas para resolver las tareas propuestas por la profesora.

Las tareas indicadas en “el contenedor”, propuestos por la profesora serían:

$$(a' + b), (c + d) \text{ y } (p - q), (e - f).$$

$$a' = 8 - 3a + a^3 + 2a^2 + 5a^4 \quad \text{y} \quad b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6$$

$$p = 3t^2 + 8 - t + 2t^3 - 5t^4 + t^5 \quad \text{y} \quad q = -3 + 2t^2 - t + t^3 - t^4 - t^5$$

$$c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \quad \text{y}$$

$$d = 3x^4y^2z^3 - x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5$$

$$e = 2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \quad \text{y} \quad f = mn - 3m^2n + 4m^2n^3 + 2mn^2 - 3$$

Una vez resueltas las tareas propuestas, los estudiantes deberían entregar por bina, para su revisión, la hoja de trabajo #1, al finalizar la clase.

Las posibles estrategias que se esperaría surjan al trabajar con el contenedor estos ejercicios serían las siguientes:

1. Identificarían las variables del polinomio con las que se van a trabajar, y las escribirían en las tarjetas, posteriormente las colocarían en cada uno de los cajones. Para los ejercicios propuestos las tarjetas que esperaríamos son:
  - $(a' + b)$ ,  $1$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$ .
  - $(c + d)$ ,  $1$ ,  $xyz$ ,  $x^2y^3z^4$ ,  $x^2y^3z^5$ ,  $x^4y^2z^3$
  - $(p - q)$ ,  $1$ ,  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$ ,  $t^4$ ,  $t^5$
  - $(e - f)$ ,  $1$ ,  $mn$ ,  $mn^2$ ,  $m^2n$ ,  $m^2n^3$
2. Harían el depósito de las taparroskas según los coeficientes que acompañarían a las variables, para la suma, primero un polinomio y luego el otro. Para la resta, el minuendo se esperaría lo realicen de manera directa, y con el sustraendo se realizaría el cambio de signos primero en su libreta, de manera que al depositarlos ya se estuviera considerando la resta (ver Figura 11).



Figura 11. Vaciado de taparrosas

- Posteriormente se esperarían saquen las taparrosas del depósito, cajón por cajón, ordenando por colores, eliminando las que sean posibles y sumando las restantes (ver Figura 12).



Figura 12. Ordenando las taparrosas

- Realizarían el registro en las hojas de trabajo. Para el reporte de resultados, recordemos que éstos estarían determinados por: la etiqueta que corresponda al cajón de procedencia, el número de taparrosas restantes (después de la eliminación), y el color de las taparrosas (las verdes indican signo positivo y las rojas signos negativos).

Así, las respuestas que se esperarían son las siguientes:

- $(a' + b), -5a^5 + 6a^4 - 2a^3 - 4a + 2$
- $(c + d), 7x^4y^2z^3 + 2x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^5 + 5xyz - 2$
- $(p - q), 2t^5 - 4t^4 + t^3 + t^2 + 11$
- $(e - f), -9m^2n^3 + 6m^2n + 4mn^2 + mn + 4$

Algunos de los posibles errores podrían ser:

- Que no se ordenaran los términos de los polinomios de acuerdo con su grado, esto conllevaría a que no se sumaran los términos que son semejantes.
- Que no se considerara el coeficiente 1 para aquellos términos que no lo tienen indicado.
- Que olvidaran hacer el cambio de signos al sustraendo al tratarse de una resta.
- Que además de los coeficientes, también se sumaran las potencias.

Estos errores podrían presentarse debido a que los estudiantes no cuentan con los conocimientos previos necesarios, tales como lenguaje algebraico, términos semejantes y ley de signos.

### **Situación de validación.**

Es aquella en la cual el estudiante debe demostrar que el modelo que ha elegido o creado es válido; es decir, no comunicar por comunicar, sino que también se afirme que lo que se dice es cierto en un sistema determinado y se sostenga su punto de vista con argumentos válidos.

Así, antes de dar por concluida la primera sesión, ya en la parte del cierre, la profesora debería pedir a dos binas (una con resultados correctos en su totalidad y otra con errores en sus resultados) pasar al frente del grupo a exponer la forma en la cual encontraron dichos resultados.

Se esperaría que los propios estudiantes en un ambiente de respeto y participación encontraran sus propios errores y los de sus compañeros (en caso de haberlos) dentro de los ejercicios resueltos.

## Sesión 2.

### Situación de Institucionalización.

Esta se presenta cuando el profesor da formalización al conocimiento matemático producido por los estudiantes ante el tema de suma y resta de polinomios, durante esta situación se concluye con la definición de los elementos involucrados dentro del tópico matemático.

En nuestro caso, se propone que al día siguiente, en la apertura de la segunda sesión y ya dentro del salón de clases, la profesora retomara la clase anterior y resaltara los temas que le anteceden a la suma y resta de polinomios (números reales, ley de signos y regla de los exponentes). Posteriormente, institucionalizará la definición de suma y resta de polinomios, trabajadas en la sesión pasada, de la siguiente manera:

- **Suma de polinomios.** La suma de polinomios  $P$  y  $Q$  queda definida como:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Es decir, *al sumar dos polinomios se hará una simplificación de términos semejantes.*

- **Resta de polinomios.** Sean los polinomios  $P$  y  $Q$ . Entonces la resta queda definida como:

$$(P - Q)(x) = P(x) + (-Q(x)).$$

*La resta de polinomios queda definida como una suma cambiando el signo a cada término del segundo polinomio. Esto debido a que se considera que la resta es la operación inversa de la adición (Lehmann, 2012, p. 14)*

Después de presentar las definiciones anteriores, y ya en parte del desarrollo de la sesión dos, la profesora solicitaría a los estudiantes trabajar en binas (por afinidad) para resolver algunos ejercicios pero ahora serían sin ayuda del contenedor. Las tareas propuestas para esta actividad (#2) serían las siguientes:

- Sumar ( $a' + b'$ )

$$a' = 6a + 5b - 3c - 6d \text{ y } b' = a - 3b + 2c - 6d$$
$$a' = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1 \text{ y } b' = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$$

- Restar ( $p - q$ )

$$p = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3 \text{ y } q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$$
$$p = 3x^6 + 6x^5 - 3x^2 + 5x + 2 \text{ y } q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$$

Sus resultados debían estar registrados en su hoja de trabajo #2.

Una vez terminados los ejercicios, en la parte del cierre de esta última sesión se procedería a socializar los resultados obtenidos en el grupo.

Al término de esta situación se esperaría que el estudiante haya construido una estrategia adecuada y a su vez se haya apropiado de la definición “formal” o muy cercana a la formal para suma y resta de polinomios, de manera que esto le permitiera realizar con éxito las tareas propuestas.

#### 4.2.4 Prueba piloto

Después del diseño de la secuencia didáctica se optó por realizar una prueba piloto para ver el desempeño del instrumento en la puesta en escena y realizar ajustes si fuera necesario. Dicha prueba se lleva a cabo con estudiantes del primer semestre “grupo D” del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas Plantel “Luis Moya”, centro en el que labora la autora de este trabajo.

El grupo piloto está formado por 41 estudiantes, 24 mujeres y 17 hombres, los cuales por indicaciones de la profesora, elaboraron su propio “contenedor” (material didáctico propuesto) en binas. Las instrucciones se dieron tal cual estaba previsto.

Construir un contenedor en forma rectangular con seis cajones contiguos, cada uno debería medir 10 cm de ancho, 20 cm de largo y 12 cm de alto aproximadamente, el material sería a su elección (dependiendo del recurso económico con el que se cuente).

1. Se les solicita por binas recolectar taparrosas de color verde (40) y rojo (40) de igual tono y tamaño.
2. Cada cajón debe tener en la parte frontal un sobre transparente con la parte superior abierta, para poder insertar tarjetas que posteriormente se puedan cambiar por otras.
3. Seis tarjetas (material a elección) de 8 cm de ancho por 13 cm de alto con las siguientes etiquetas (una por tarjeta):  $x^5$ ,  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$ , 1.
4. Seis tarjetas blancas forradas de plástico transparente de 8 cm de ancho por 13 cm de alto.
5. Un plumón para pintarrón y un pedazo de papel higiénico.

Lo anterior se solicita con previa anticipación (desde el inicio del segundo semestre de 2018: 2018/B) para abordar el tema de sumas y restas de polinomios, programado para su ejecución a finales del mismo. Cuando los estudiantes entregan su contenedor, éstos son almacenados en el salón de Matemáticas.

Partiendo entonces de que los contenedores están almacenados en el salón de clases de la profesora y a la vista de todos los estudiantes, su interés aumenta por saber cómo es su funcionamiento.

### Resultados de la prueba piloto.

El día de la aplicación de la prueba piloto sucede lo siguiente:

En un ambiente de entusiasmo e interés por parte de los estudiantes ante los contenedores creados por ellos mismos, el día de su utilización por fin ha llegado.

Posteriormente la profesora presenta “el contenedor” (material didáctico) y expone su funcionamiento a través de los lineamientos mencionados en el diseño de la secuencia didáctica.

Después de tomar en cuenta cada uno de los pasos sugeridos, y haciendo uso de las primeras tarjetas ya etiquetadas ( $x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1$ ) la profesora explica el uso del contenedor a través de dos ejemplos de suma y resta de polinomio:

$$a = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \quad y \quad b = 4x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3$$

$$p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8 \quad y \quad q = 3m^5 + 4m^4 - m^3 + 2m$$

En general, se obtiene buena participación e interés por parte de los estudiantes ante el desarrollo de estos ejemplos propuestos por parte de la docente. Una vez expuestas las reglas del juego y después de observar la técnica de ejecución, se procede a organizar a los estudiantes en grupos de dos personas (por afinidad) obteniendo así un total de 19 binas y un equipo conformado por tres estudiantes para dar indicaciones y que éstos resuelvan con ayuda del contenedor los siguientes ejercicios, que se encuentran en la hoja de trabajo:

$$(a' + b), (c + d) \text{ y } (p - q), (e - f)$$

$$a' = 8 - 3a + a^3 + 2a^2 + 5a^4 \quad y \quad b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6$$

$$p = 3t^2 + 8 - t + 2t^3 - 5t^4 + t^5 \quad y \quad q = -3 + 2t^2 - t + t^3 - t^4 - t^5$$

$$c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \quad y$$

$$d = 3x^4y^2z^3 - x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5$$

$$e = 2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \quad y \quad f = mn - 3m^2n + 4m^2n^3 + 2mn^2 - 3$$

Una vez resueltos los ejercicios propuestos, los estudiantes deben entregar por bina, para su revisión, la hoja de trabajo (1), al finalizar la clase.

Al haber realizado la prueba piloto del primer día, se identifica que la situación didáctica podría llevarse a cabo como se tiene propuesta, esto debido a que se percibe que se logra lo planeado en el análisis a priori, para las situaciones de acción y acción formulación: se logra la devolución, y los estudiantes, junto con la profesora logran realizar las tareas propuestas con el uso del contenedor.

Un elemento que podría mejorarse con respecto a la organización es el trabajo en binas, que en la prueba piloto se realizó después de que se presenta el uso del contenedor, y esto llevó más tiempo de lo planeado. Por lo que, para la experimentación, primero se organizará el grupo en binas y posteriormente se indicará el uso del contenedor.

Al día siguiente (segunda sesión), y ya dentro del salón de clases la profesora hace un recordatorio sobre la clase anterior y resalta los temas que le anteceden a la suma y resta de polinomios (números reales, ley de signos y regla de los exponentes). De esta manera se institucionaliza la definición de suma y resta de polinomios trabajadas en la sesión anterior:

➤ **Suma de polinomios.** La suma de polinomios  $P$  y  $Q$  queda definida como:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Es decir, *al sumar dos polinomios se hará una simplificación de términos semejantes.*

➤ **Resta de polinomios.** Sean los polinomios  $P$  y  $Q$ . Entonces la resta queda definida como:

$$(P - Q)(x) = P(x) + (-Q(x)).$$

*La resta de polinomios queda definida como una suma cambiando el signo a cada término del segundo polinomio.*

Después de presentar las definiciones anteriores, la profesora solicita a los estudiantes trabajar en binas (por afinidad) para resolver algunos ejercicios, pero ahora sin ayuda del contenedor. Los ejercicios propuestos para esta actividad (#2) son los siguientes:

➤ Sumar ( $a' + b'$ )

$$a' = 6a + 5b - 3c - 6d \text{ y } b' = a - 3b + 2c - 6d$$

$$a' = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1 \text{ y } b' = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$$

➤ Restar ( $p - q$ )

$$p = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3 \text{ y } q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$$

$$p = 3x^6 + 6x^5 - 3x^2 + 5x + 2 \text{ y } q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$$

Sus resultados deben estar registrados en su hoja de trabajo #2.

Después de la aplicación de la prueba piloto, la experiencia fue buena, pues por el desenvolvimiento de los estudiantes queda claro que las instrucciones para el uso de “el contenedor” como material didáctico fueron las indicadas.

En cuanto al tiempo, éste se excedió en 5 minutos aproximadamente, por lo que, de cara a la aplicación de la secuencia didáctica, la organización de las binas será antes de dar las instrucciones de uso del contenedor.

De forma general la aplicación de la prueba piloto fue exitosa y consideramos que cumplió con su objetivo, pues se pudo observar de forma adecuada el desarrollo de las actividades, con claridad, y en los estudiantes, se propició el aprendizaje sobre el tema sumas y restas de polinomios. Un análisis a posteriori detallado se realizará a partir de la experimentación, que es la siguiente fase de la Ingeniería Didáctica.

### 4.3 Fase 3: Experimentación

Esta fase es la puesta en marcha de las actividades diseñadas. En esta sección describimos las condiciones en las que se realiza la práctica de Desarrollo Profesional, a partir de las características de la institución en la que se experimenta, así como de los estudiantes involucrados.

#### 4.3.1 La institución

La implementación de la situación didáctica se llevó a cabo en el COBAEZ Plantel Luis Moya, el cual es un centro educativo de nivel medio superior que pertenece al subsistema Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, organismo público descentralizado que ofrece como oferta educativa el Bachillerato General con un currículo dividido en asignaturas básicas, de formación propedéutica para cursarse en seis semestres, adicionalmente imparte capacitaciones para la formación para el trabajo cada una con 7 horas semana mes; además se practican las actividades cívicas, deportivas y culturales de tal manera que los estudiantes reciban una educación integral.

Este plantel educativo se encuentra ubicado en el municipio de Luis Moya Zacatecas, México, aproximadamente a 65 km de la capital Zacatecana y de la capital Hidrocálida (estado de Aguascalientes, México). Su población estudiantil es mayoritariamente de estudiantes considerados como foráneos, pues son habitantes de diferentes comunidades colindantes al municipio como son: Buenavista, Boquillas, San Tomás, San Juan de Carboneras y La Concha (pertenecientes al vecino municipio de Ojocaliente), Los Griegos, La Noria de Molinos, La Manga, El Coecillo, La Julián Adame, Barranquillas, El Fresno, La Colonia Hidalgo, La 20 de Noviembre, Esteban S. Castorena, La Leyva y de la localidad de Soledad de Abajo (perteneciente al municipio de Cosío, Aguascalientes).

En el momento de la observación, en el semestre 2019/A, se cuenta con una matrícula de 334 estudiantes, en la que 189 son mujeres y 145 son hombres, divididos en 10 grupos (cuatro

grupos de primero, tres de segundo y tres de tercer año), se imparten tres capacitaciones a partir del tercer semestre: contabilidad, higiene y salud comunitaria e informática.

La planta directiva y docente de este plantel educativo está conformada por: 1 Directora, 16 docentes, 1 encargado de orden, 3 secretarias, 4 intendentes y 2 veladores. De los docentes 7 son mujeres y 9 hombres, uno de ellos tiene estudios de Maestría, 12 Licenciatura y 3 Técnicos. De los maestros, solamente dos de ellos se han certificado en el Proceso de Certificación de Competencias Docentes para la Educación Media Superior (CERTIDEMS), y siete más han acreditado el Programa de Formación Docente de Educación Media Superior (PROFORDEMS).

El nivel socioeconómico de las familias de los estudiantes de esta institución es medio bajo, lo cual propicia, en la mayoría de los casos, que no se cuente con lo necesario para su formación académica, por ejemplo, existen dificultades para la compra de uniformes escolares o de libros de apoyo académico, incluso, algunas veces los estudiantes no cuentan con apoyo económico para trasladarse desde sus comunidades al municipio.

#### 4.3.2 Los estudiantes

La práctica se llevó a cabo con 47 estudiantes del primer semestre, grupo C, de la escuela indicada, este grupo está formado por 28 mujeres y 19 hombres, cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años y donde el estilo de aprendizaje grupal es kinestésico.

La elección del grupo fue porque en él se presentaron con mayor frecuencia deficiencias en cuanto a la suma y resta de polinomios, y porque era el grupo que se iba a atender en el siguiente ciclo escolar.

#### 4.3.3 Condiciones en las que se lleva a cabo la experimentación

La puesta en escena de la situación didáctica se llevó a cabo los días 4 y 5 de diciembre de 2108, en el Aula 21, que corresponde a una de las profesoras que imparte la materia de Matemáticas.

El contrato didáctico que se utilizó en las sesiones puede caracterizarse como fuertemente didáctico, puesto que la profesora asume la responsabilidad del aprendizaje de sus estudiantes, organizando el medio, considerando los saberes previos y los procesos de construcción y adquisición del aprendizaje de los estudiantes (Ávila, 2001).

La obtención de evidencias se realiza mediante la videograbación de las actividades realizadas. Un estudiante de sexto semestre apoyó con esta tarea, considerando que, si la profesora tomaba la palabra, había que grabarla a ella, de otra manera, se dedicaba a grabar el

trabajo de cada una de las binas. En la fase de validación, la instrucción fue grabar hacia el pintarrón.

Además, la profesora utiliza notas de campo, en las que va registrando lo que va haciendo cada bina, aciertos, errores y diversas estrategias.

Por último, se tienen las hojas de trabajo, que se recogen para rescatar las formulaciones realizadas por los estudiantes.

## 4.4 Análisis a posteriori y validación

### 4.4.1 Análisis a posteriori.

En esta última fase de la Ingeniería Didáctica para realizar el análisis a posteriori nos apoyamos del conjunto de datos recolectados durante la fase de experimentación, las hojas de trabajo de los estudiantes y los aprendizajes esperados.

Recordemos que para llevar a cabo la situación didáctica se diseña una secuencia didáctica planteada en dos sesiones de aproximadamente 50 minutos cada una (a través de tres momentos: apertura, desarrollo y cierre), con fechas de aplicación diferente. El objetivo principal de su elaboración es que el uso del material didáctico “el contenedor” provea de autonomía al estudiante para que se apropie del conocimiento y realice la suma y resta de polinomios de manera independiente sin la intervención directa del profesor.

La primera sesión está conformada principalmente por la presentación, manejo y uso del contenedor como material didáctico. La segunda para la institucionalización y puesta en escena de conocimientos adquiridos a través del uso del contenedor como material didáctico, viéndose reflejados en ejercicios con sumas y restas de polinomios, pero ya sin la ayuda de éste.

#### **Sesión 1**

##### **Situación de acción**

La apertura de la primera sesión se llevó a cabo en el momento en que la profesora enuncia el tema a desarrollar y aborda a los estudiantes sobre lo que éstos saben del mismo.

Profesora: Buenos días, vamos a empezar con el tema del día de hoy, esta sesión va a empezar con el tema de polinomios, pero antes de comenzar necesito saber qué traen ustedes de secundaria en cuanto al tema de polinomios.

Tal como se había previsto, mediante preguntas detonadoras se logró la devolución, de manera que en el grupo se generó un ambiente de opinión, en el que a través de una lluvia de ideas se construyó en primera instancia una definición de manera informal sobre el tópico matemático, que después habrá de reformularse.

Profesora: ¿alguien sabe qué es un polinomio?, con sus propias palabras.

Estudiantes: Números y letras elevados a una potencia. Por ejemplo  $x^4$ .

Profesora: Entonces, si polinomio son números, signos y letras elevados a una potencia, ahora díganme ¿cuáles son los elementos que pueden conformar un polinomio?

Estudiantes: Letras, números, signos, potencias.

Profesora: ¿Alguien ha escuchado, qué es un monomio, binomio, trinomio?, ¿cuáles son los monomios?

Estudiantes: Los que tienen uno.

Profesora: ¿Un qué?

Estudiantes: Un término.

En la Figura 13 se muestra una imagen de la participación grupal, ante los cuestionamientos de la profesora.



Figura 13. Participación grupal, ante los cuestionamientos

Posteriormente la profesora cuestiona acerca de lo que es un binomio, trinomio, y polinomio, concluyen que: Polinomio se refiere a cuando se tienen más de tres términos.

Luego de esto, la profesora les cuestionó acerca de las operaciones básicas, ellos contestan que son: suma, resta, multiplicación y división, y señala que comenzarán estudiando la suma y resta de polinomios. Para ello, la profesora presentó el material didáctico llamado “Contenedor”, señalando que esta idea surgió a partir del proyecto transversal institucional “Una escuela limpia y pulcra” y expuso su funcionamiento a través de los lineamientos advertidos desde el análisis a priori. Para ello invitó a los estudiantes a poner atención y su participación para conocer las reglas del juego.

Profesora: Ustedes deberán etiquetar cada cajón según el tipo de variables que se tienen. Es decir, ponerle nombre a cada uno de éstos de acuerdo con las tarjetas que ya tienen y las que están en blanco.

### Situación de acción - formulación

A continuación comenzaron a resolver el ejemplo que estaba escrito en el pizarrón  $a + b$ , con la variable  $x$ .

$$a = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x - 7$$

$$b = 4x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3$$

Para el primer paso, la profesora fue consultando a los estudiantes acerca de qué etiquetas le correspondían a cada cajón. Cabe señalar que les preguntó qué es una constante y cómo la representarían, a lo que los estudiantes respondieron: es un número solo, o cualquier número solo, y lo podríamos representar con el uno (ver Figura 14).

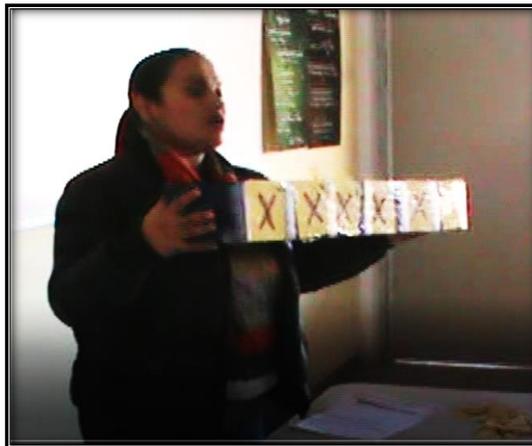


Figura 14. Profesora mostrando "El contenedor", como material didáctico.

En seguida la profesora invita a realizar "el depósito de la basura", en este caso, de las constantes en cada uno de los cajones. Además, les sugirió asignar el coeficiente 1 para aquellas variables y potencias que no lo tenían expresado, esto para evitar confusiones. Posteriormente señaló cómo interpretar los números positivos, negativos y el cero, con las taparrosas, de acuerdo con su color:

Profesora: Los números enteros positivos se representan con las taparroskas verdes y los negativos con las taparroskas rojas.

Después se fue haciendo el depósito de taparroskas en cada cajón, comenzando con el primer polinomio, de acuerdo con las variables que se tenían. Posteriormente se hizo lo mismo con el segundo polinomio. Algunos estudiantes, desde su lugar iban haciendo el procedimiento en su propio contenedor.

A continuación, la profesora les explica que el proceso de cancelación, como normalmente se le conoce en matemáticas, corresponde a la propiedad del elemento neutro; es decir, eliminar constantes del mismo valor numérico, pero con signo contrario. En este caso, una taparrosca verde con una roja, que se encuentren en un mismo cajón del contenedor, se deberán eliminar. Y aunque la profesora realiza la acción de meter, sacar y eliminar las taparroskas, de manera constante está cuestionando a los estudiantes acerca del procedimiento, siempre intentando que sean ellos quienes realicen los procesos mentales, sumen, eliminen y determinen el signo de cada constante que corresponde a los términos del polinomio.

Profesora: Seguimos con el término:  $x^4$ , que en el cajón tiene 2 taparroskas verdes y 5 rojas. Recuerden que por propiedad del elemento neutro podemos eliminar una taparrosca verde con una roja, porque es el mismo valor pero con signo contrario.

Estudiantes: Nos quedan tres rojas.

Ante los cuestionamientos dirigidos por la profesora, los estudiantes recurrieron a sus conocimientos previos para poder participar de forma certera en las preguntas realizadas. Las aportaciones por parte de éstos fueron variadas, y en la mayoría de los casos de forma correcta.

Para terminar el ejercicio de la suma, la profesora va escribiendo en el pintarrón los resultados (ver Figura 15), apoyándose siempre del uso del contenedor (ver Figura 16).

$$\begin{aligned} a &= x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \\ b &= -4x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3 \\ +b) &= +5x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

$(p+q)$   
 $p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2$   
 $q = -3m^5 + 4m^4 - m^3$

Figura 15 . Registro de resultado de la suma de  $(a + b)$



Figura 16. Resultados representativos obtenidos utilizando "El contenedor"

Enseguida plantea cómo trabajar cuando se trata de la resta de polinomios. Para ello la profesora señala que se trabajará de manera similar a la suma, pero antes de realizar la resta, mediante el depósito de las taparroschas en cada uno de los cajones, para el segundo polinomio (sustraendo) se tendrá que cambiar el signo de cada uno de sus términos, esto debido a que se considera que la resta es la operación inversa de la suma. Para ello, la maestra dirigió la resolución de la resta  $(p - q)$  en "el contenedor", propiciando a través de preguntas la construcción del propio desarrollo de los anteriores dándoles solución (devolución).

$$p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8$$

$$q = 3m^5 + 4m^4 - m^3 + 2m + 5$$

Cabe señalar que los estudiantes participaron de forma voluntaria, constantemente en el desarrollo del proceso que dio solución a los ejemplos propuestos por la profesora, Además indico desde su lugar el procedimiento a seguir para poder encontrar el resultado correcto a las operaciones de polinomios. La profesora indica que es necesario realizar un cambio de tarjetas de los cajones del contenedor, y cuestiona a los estudiantes acerca del por qué:

Estudiantes: Porque son  $m$ 's.

Estudiantes: Van a ser  $m^5, m^4, m^3, m^2, m$

Profesora: Y ¿para los números?

Estudiante: La constante.

En la resolución de este ejercicio, la mayoría de los estudiantes lo iba haciendo también en su propio contenedor. Además, la profesora les indica que se realizará la resta en términos de la suma, es decir:

Profesora: se le va a sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. ¿Qué quiere decir eso?, lo primero que tenemos que hacer, es cambiar el signo a todo el polinomio  $q$  (sustraendo).

La profesora en el pizarrón, con ayuda de los estudiantes realiza el cambio de signos para el polinomio del sustraendo, además, aprovechan para organizarlos de manera vertical cuidando que cada término quede debajo del que le corresponde (el que tiene la variable elevada a la misma potencia). Al concluir esto, se realizan los depósitos en el contenedor de igual manera como se hizo para la suma (ver Figura 17 y Figura 18).

$$\begin{array}{r}
 (p-q) \\
 p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8 \\
 q = 3m^5 + 4m^4 - m^3 + 2m + 5 \\
 \hline
 p = \boxed{5m^4} + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8 \\
 q = 3m^5 - 4m^4 + m^3 - 2m + 5 \\
 \hline
 (p-q) = -3m^5 + 1m^4 + 3m^3 + 4m^2 - 7m + 3
 \end{array}$$

Figura 17. Resta  $(p - q)$  o suma  $(p + (-q))$ , cambio de signo para el sustraendo y resultado

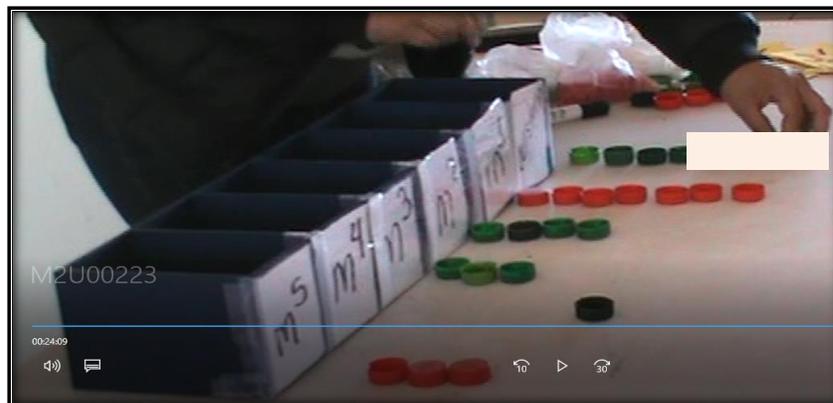


Figura 18. Resta  $(p - q)$ , resultado final en "el contenedor"

## Situación de formulación

Por otro lado, en la parte del desarrollo de la situación diseñada para esta primera sesión, al término de la explicación con cada uno de los ejemplos, la situación de formulación se desarrolla mediante el trabajo en equipos, para llegar a la solución que se pretende, se requiere de la comunicación de los estudiantes, en la que ellos compartan experiencias propias para así poder construir el aprendizaje.

Profesora: Por favor, las tarjetas que acaban de utilizar, quítenlas, y a continuación utilicen tarjetas en blanco. Les voy a entregar la primera hoja de trabajo (#1), que es el ejercicio clase del día de hoy, en donde según el tipo de variable que se les pida, va a ser nombrado el cajón de su contenedor.

Posteriormente, la profesora con ayuda de dos estudiantes distribuyeron por binas la hoja de trabajo #1, en la que se resolvieron ejercicios utilizando el contenedor, éstos fueron los siguientes:  $(a + b)$ ,  $(c + d)$  y  $(p - q)$ ,  $(e - f)$ .

$$a = 8 - 3a + a^3 + 2a^2 + 5a^4 \quad \text{y} \quad b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6$$

$$p = 3t^2 + 8 - t + 2t^3 - 5t^4 + t^5 \quad \text{y} \quad q = -3 + 2t^2 - t + t^3 - t^4 - t^5$$

$$c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \quad \text{y}$$

$$d = 3x^4y^2z^3 - x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5$$

$$e = 2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \quad \text{y} \quad f = mn - 3m^2n + 4m^2n^3 + 2mn^2 - 3$$

Por otro lado, en la mayoría de las ocasiones, la estrategia de trabajo para las binas siempre estuvo regida bajo los siguientes procesos:

1. Identificaban las variables del polinomio que iban a resolver, y las escribían en las tarjetas, para posteriormente colocarlas en cada uno de los cajones del contenedor, por ejemplo, ver Figura 19.



Figura 19. Nombramiento de cada cajón, según polinomio

Al comienzo del trabajo en equipo, surgieron dudas tales como las siguientes:

Estudiantes: Entonces, en las tarjetas en blanco, ¿vamos a poner la letra que necesitamos?

Estudiantes: La letra de los nuevos polinomios, ¿van a ser los nuevos nombres de cada cajón?

Además, en este proceso también se preguntaban cómo nombrar el cajón de las constantes, comentando lo siguiente:

Estudiantes: En el último cajón, en el de los números solos. ¿Podemos ponerle constantes?

Estudiantes: Y si nada más le dejamos así, ¿números solos?

Estudiantes: Nosotros le pusimos un "1". ¿Está bien?

Al respecto, la profesora consideró que cada una de estas propuestas era adecuada, así que les indicó que podían ponerle el nombre que ellos consideraran.

2. Al hacer el depósito de las taparrosclas en cada uno de los cajones, primero identificaban el coeficiente que acompañaba a las variables, para la suma, primero un polinomio y luego el otro. Para la resta, el minuendo lo hacían de manera directa, y con el sustraendo, el depósito lo realizaban de forma inversa al signo que originalmente se presentaba (ver Figura 20).



Figura 20. Depósito de las taparrosclas en "el contenedor"

3. Posteriormente hacían el vaciado de las taparrosclas de cada uno de los cajones (cajón por cajón), ordenando por colores, eliminando las que eran posibles y sumando las

restantes. Siempre identificando el resultado total por cajón de procedencia (ver Figura 21).



Figura 21. Vaciado

4. Realizar el registro en las hojas de trabajo. Para el reporte de resultados, recordemos que éstos estaban determinados por: la etiqueta que corresponde al cajón de procedencia, el número de taparrosas restantes (después de la eliminación), y el color de las taparrosas (las verdes indican signo positivo y las rojas signos negativos), así que una vez resueltos los ejercicios propuestos, los estudiantes entregaron por bina, para su revisión, la hoja de trabajo #1, al finalizar la clase.

En la suma de los polinomios la forma de registro utilizada por el total de los estudiantes para los resultados fue:

- a. Transcribir y ordenar por términos semejantes en forma vertical cada uno de los polinomios (ver Figura 22).

$$\begin{array}{l}
 a = \quad + 5a^4 - 1a^3 + 2a^2 - 3a^1 + 8 \\
 b = 5a^5 + 1a^4 - 3a^3 - 2a^2 - 1a^1 - 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \\
 d = 3x^4y^2z^3 - 1x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 + 1xyz - 5
 \end{array}$$

Figura 22. Ejercicio de suma, transcripción y orden de los términos

- b. Cabe señalar que los estudiantes agregaron a su hoja de trabajo el resultado obtenido, después de la práctica desarrollada en el contenedor (ver Figura 23).

$$\begin{array}{r}
 a = -5a^4 - 1a^3 + 2a^2 - 3a + 8 \\
 b = 5a^5 + 1a^4 - 3a^3 - 2a^2 - 1a - 6 \\
 \hline
 -5a^5 + 6a^4 - 2a^3 - 4a + 2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \\
 d = 3x^4y^2z^3 - 1x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 + 1xyz - 5 \\
 \hline
 +7x^4y^2z^3 + 2x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^5 + 5xyz - 2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 a = 0a^5 + 5a^4 + a^3 + 2a^2 - 3a + 8 \\
 b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6 \\
 \hline
 a + b = -5a^5 + 6a^4 - 2a^3 - 4a + 2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \\
 d = 3x^4y^2z^3 - 1x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5 \\
 \hline
 c + d = 7x^4y^2z^3 + 2x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^5 + 5xyz - 2
 \end{array}$$

Figura 23. Ejercicio de suma, resultados

Para la resta, la estrategia fue similar, solo que con el previo cambio de signos, para el segundo polinomio (sustraendo), tal como se realizó en el contenedor (ver Figura 24 y Figura 25).

$$\begin{array}{r}
 e = 2m^4n^3 + 3m^2n^3 - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \\
 p = -1mn^3 + 3m^2n^3 - 4m^2n^3 - 2m^2 + 3 \\
 \hline
 +1mn^3 + 6m^2n^3 - 9m^2n^3 + 4mn^2 + 2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 p = 1t^5 - 5t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 1t + 8 \\
 q = +1t^5 + 1t^4 - 1t^3 - 2t^2 + 1t + 3 \\
 \hline
 +2t^5 - 4t^4 + 1t^3 + 1t^2 \quad 0 \quad +11
 \end{array}$$

Figura 24. Ejercicio de resta, transcripción y orden de los términos

RESTAS

$$\begin{array}{r}
 P = +1t^5 - 5t^4 + 2t^3 + 3t^2 - t + 8 \\
 Q = +t^5 + 1t^4 - 1t^3 - 2t^2 + t + 3 \\
 \hline
 P - Q = +2t^5 - 4t^4 + 1t^3 + 1t^2 // +11
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 e = +2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \\
 f = -1mn + 3m^2n - 4m^2n^3 - 2mn^2 + 3 \\
 \hline
 e - f = +1mn + 6m^2n - 9m^2n^3 + 4mn^2 + 4
 \end{array}$$


---

**RESULTADOS**

$$\begin{array}{l}
 a + b = -5a^5 + 6a^4 - 2a^3 - 4a + 2 \\
 P - Q = +2t^5 - 4t^4 + 1t^3 + 1t^2 + 11 \\
 c + d = 7x^4y^2z^3 + 2x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^5 + 5xyz - 2 \\
 e - f = +1mn + 6m^2n - 9m^2n^3 + 4mn^2 + 4
 \end{array}$$

Figura 25. Ejercicio de resta y resultados

Cabe señalar que los estudiantes no utilizaron la notación  $a - (b)$ , sino que su estrategia consistió en cambiar directamente los signos de  $b$ .

El total de equipos formados en esta primera sesión, logró obtener resultados favorables en por lo menos la mitad de los ejercicios asignados en esta hoja de trabajo #1 (los correspondientes a la suma de polinomios). Y más de la cuarta parte de las binas obtuvieron la máxima calificación (10).

Por otro lado, el error más frecuente se presentó en la resta de los polinomios, cuando las binas omitían realizar el cambio de signos para el sustraendo, por ejemplo, ver Figura 26.

$$\begin{array}{r}
 e - f = -5m^2n^3 + 3m^2n + 6mn^2 + 2mn + 1 \\
 + 4m^2n^3 + 3m^2n - 2mn^2 + mn + 3 \\
 \hline
 + 9m^2n^3 + 6m^2n + 4mn^2 + 1mn + 4
 \end{array}$$

Figura 26. Ejercicio de resta, error

Observemos que en la figura, al realizar  $e - f$ , este equipo solamente cambió algunos de los signos del sustraendo, motivo por el cual, el resultado estuvo mal.

### Situación de validación

La situación de validación se presenta en el momento en que las binas llevan a cabo su proceso de construcción de conocimiento, dando a conocer a los demás sus respuestas, y además validando cada una de ellas con la finalidad de convencer al resto del grupo de que su resultado es correcto.

Antes de dar por concluida la primera sesión, ya en la parte del cierre, la profesora pide la participación voluntaria de dos binas para pasar al frente del grupo a exponer la forma en la cual encontraron dichos resultados. En este momento varios equipos manifiestan querer participar, por lo cual la profesora los elige, considerando a aquellos que contaban con estrategias diferentes: con resultados correctos en su totalidad y con errores. La aportación fue voluntaria, y cada bina estaba segura de presentar lo que para ellos era el resultado adecuado.

En un ambiente de respeto, pero también de mucha participación, los estudiantes que pasaron a exponer su forma de trabajo frente al resto de sus compañeros, escriben en el pintarrón, de primera instancia, los polinomios asignados para su resolución y posteriormente la bina procede al depósito de cada una de las taparroskas según los ejercicios propuestos en la hoja de trabajo #1.

Las binas que pasaron a exponer por separado cada uno de los ejercicios; es decir, la bina número uno realiza la operación de la suma y la bina número dos la operación de la resta de los polinomios.

La primera bina concluye de forma correcta y con la aprobación de sus compañeros, el término de su operación asignada (suma), por ejemplo, ver Figura 27 y Figura 28.



Figura 27. Primera Bina. Registro, acomodo y depósito. (Suma)

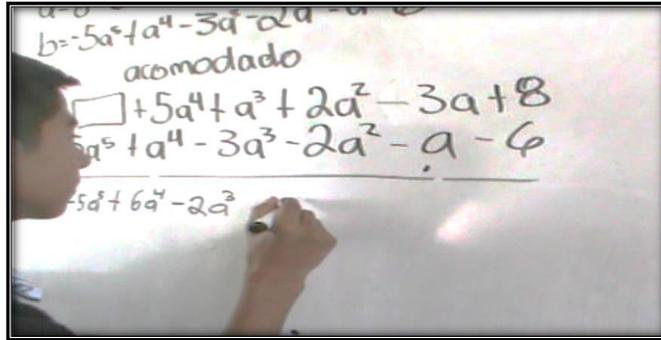


Figura 28. Primera Bina. Eliminación y registro de resultados obtenidos

Mientras que la segunda bina, al momento de depositar las taparroschas que corresponden al polinomio del sustraendo en el contenedor, omiten realizar el cambio de signos; y el resto del grupo empieza a tratar de hacerles notar el error en el que están incurriendo (ver Figura 29).

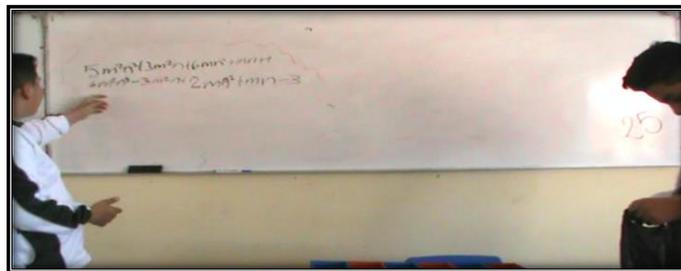


Figura 29. Segunda Bina. Registro y depósito. (Resta de polinomios)

Mientras los estudiantes explicaban su procedimiento, se escuchaba que algunos susurraban:

Estudiante: Están mal.

Estudiante: La resta no se hace así.

Estudiante: Se les olvidó cambiarles el signo a los de abajo.

Profesora: Guarden silencio, dejen que terminen sus compañeros. Por favor, observaciones hasta el final

La profesora medía el ambiente grupal y pide terminar con la operación asignada a dicha bina (ver Figura 30).

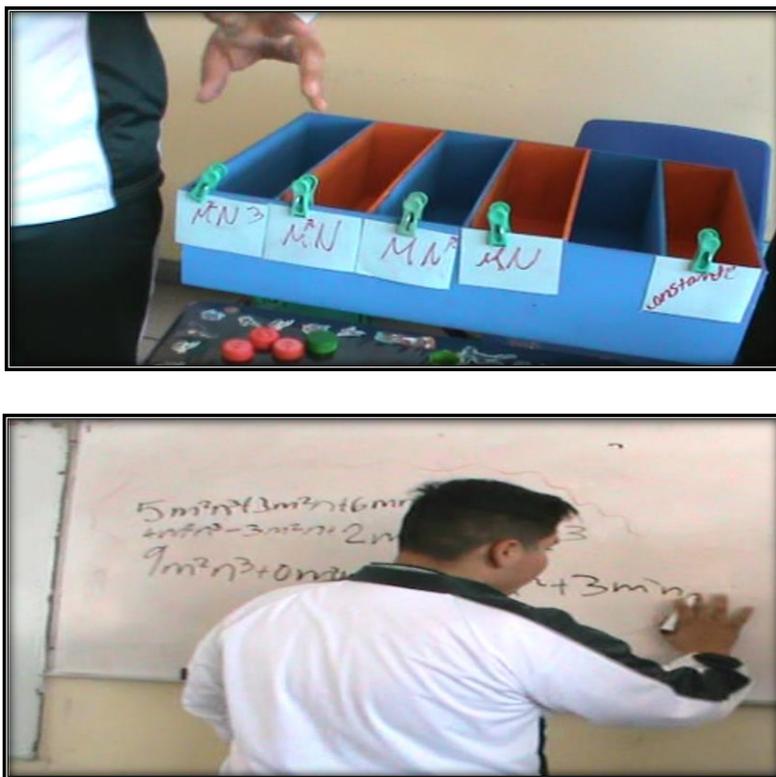


Figura 30. Segunda Bina. Eliminación y obtención de resultados. (Resta de polinomios)

Al concluir con su respuesta, los compañeros comienzan a señalar que está mal el resultado, expresando lo siguiente:

Estudiante: Pero aún no han acabado.

Estudiante: Pero, ¿no se supone que en la resta se cambiaban los signos?

Profesora: ¿a cuál polinomio?

Estudiante: Al de abajo, el cambio es de positivos a negativos, y de negativos a positivos, ¿recuerdan eso?

Estudiantes de la bina que expuso: Mmmm... Sí...

En este momento, los estudiantes de la bina que estaba exponiendo se quedan pensativos y se dan cuenta de los errores cometidos, asumiendo que sí lo sabían pero que lo olvidaron.

Enseguida, al ver que varios estudiantes querían participar, la profesora pidió a algún voluntario o voluntaria pasar al pintarrón para hacer los cambios que se debieron haber hecho en el sustraendo (cambiar a signos contrarios) y corregir la operación de resta de polinomios (ver Figura 31).

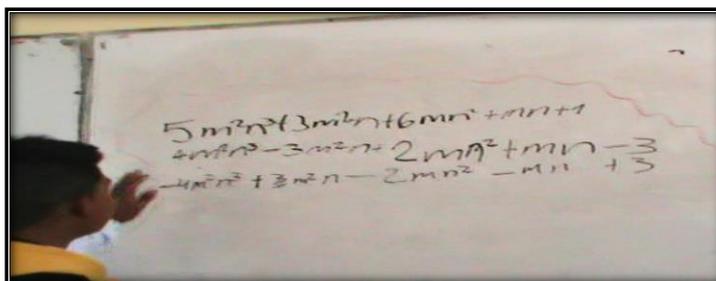


Figura 31. Corrección de resultados en la resta de polinomio

Con esta participación concluyó la sesión 1.

## **Sesión 2.**

### **Situación de institucionalización**

La institucionalización es parte importante de la clase, pues es en este momento en el que se formulan conclusiones tales como: recapitulación, sistematización, ordenación y vinculación de lo que se construyó con los estudiantes. Es decir, la parte en la que el profesor formaliza el conocimiento matemático producido por los estudiantes en cuanto a suma y resta de polinomios.

Al día siguiente de la sesión 1, en la apertura de la segunda sesión y ya dentro del salón de clases, la profesora hizo un recordatorio sobre la clase anterior y resaltó los temas que le anteceden a la suma y resta de polinomios, tales como: números reales, ley de signos y regla de los exponentes.

Profesora: Después del ejercicio que hicimos ayer de la suma y resta de polinomios con los contenedores, ahora vamos a hacer otros, pero sin la ayuda del contenedor.

Estudiantes: No, pues va a estar más difícil.

Profesora: Se pretende, que les vaya un poquito mejor y que se hayan familiarizado un poco más con el tema. Pero antes de eso, quiero que recuerden las reglas básicas o ¿qué es lo que necesito yo, para poder empezar a trabajar operaciones de suma y resta de polinomios?, y, ¿qué debo de saber para sumar y restar polinomios?

Estudiantes: Ley de los signos.

Profesora: ¿Qué más?

Estudiantes: Ley de exponentes.

Profesora: Y, ¿qué más?

Estudiantes: Pues sumar y restar.

Profesora: Ok, ¿alguien se acuerda cómo se aplica la ley de los signos para sumas?

Estudiantes: Signos iguales se suman y se deja el signo igual.

Estudiantes: ¡No!, signos iguales se suman y se deja el signo que tienen.

Profesora: Y, ¿alguien se acuerda cómo se aplica la ley de los signos para la resta?

Estudiantes: Signos diferentes se restan y se deja el signo que tenga mayor valor.

Profesora: En cuanto a exponentes, ¿qué hago con variables que cuentan con exponente, y que las tengo que sumar o restar? ¿Qué se les hace a las potencias?

Estudiantes: Así se dejan.

Profesora: Es cierto, así lo expresa una regla los exponentes. Entonces, después de lo que acabamos de recordar, vamos a empezar a trabajar de forma directa con la definición formal de polinomios, su suma y resta.

Posteriormente, se institucionalizó con la definición “formal” de polinomio y suma y resta de polinomios trabajadas en la sesión pasada, pidiendo que los estudiantes las registraran en su cuaderno, éstas fueron a través de escribirlas en el pintarrón y mediante un dictado:

➤ **Polinomio.** Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \text{ Siendo:}$$

$a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$  números, llamados coeficientes.

$n$  un número natural.

$x$  la variable o indeterminada.

$a_n$  es el coeficiente principal.

$a_0$  es el término independiente.

Posteriormente la profesora les comentó que ésta era la manera de definir un polinomio y les escribió la definición para sumar y restar polinomios.

Profesora: Ésta es la forma matemática en que se puede concebir un polinomio.

➤ **Suma de polinomios.** La suma de polinomios  $P$  y  $Q$  queda definida como:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Profesora: Es decir, al sumar dos polinomios se hará una simplificación de términos semejantes.

➤ **Resta de polinomios.** Sean los polinomios  $P$  y  $Q$ . Entonces la resta queda definida como:

$$(P - Q)(x) = P(x) + (-Q(x)).$$

Profesora: La resta de polinomios queda definida como una suma cambiando el signo a cada término del segundo polinomio (ver Figura 32).

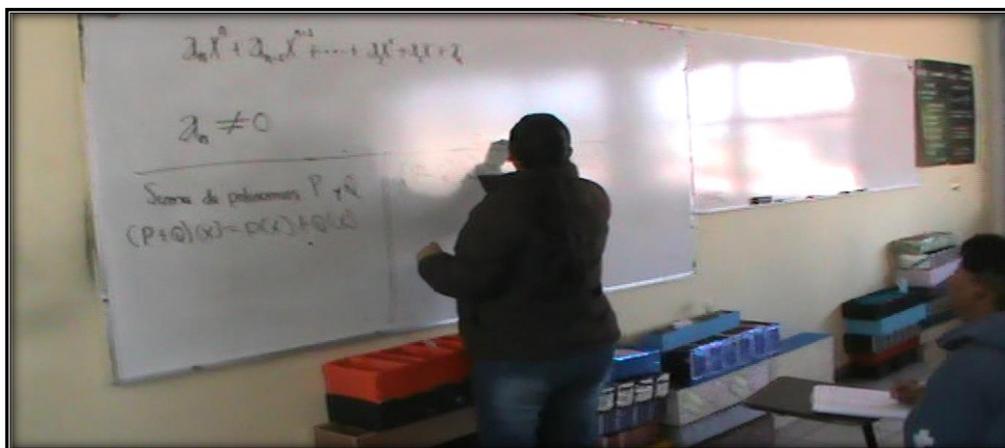


Figura 32. Registro de definiciones con apoyo del pintarrón

Después de presentar las definiciones anteriores, y ya en la parte de desarrollo, la profesora solicitó a los estudiantes trabajar en binas por afinidad (las mismas de la sesión anterior) para resolver algunos ejercicios, pero ahora sin ayuda del contenedor.

Profesora: La indicación es que resuelvan un par de ejercicios de suma y resta, pero sin la ayuda del contenedor. Es un ejercicio clase. ¿Hay alguna duda sobre cómo se suma y se resta los polinomios?

Estudiante: ¡Yo! Dijimos que en la resta nada más se cambiaban los signos del de abajo, ¿verdad?

Profesora: Sí. Por favor, guarden su libreta.

Ante la expresión exclamada por parte de la estudiante al mencionar que en la resta nada más se cambiaban los signos del de abajo, ella se está refiriendo al polinomio referente al sustraendo, y efectivamente esto se ve reflejado en su hoja de trabajo al realizar correctamente cada uno de los procedimientos, hasta llegar al resultado correcto.

El comentario final por parte de la profesora, en cuanto a que deben guardar el cuaderno, es para cerciorarse que efectivamente se esté aplicando el conocimiento construido recientemente y no solo sigan los pasos de algún otro ejemplo (ver Figura 33).

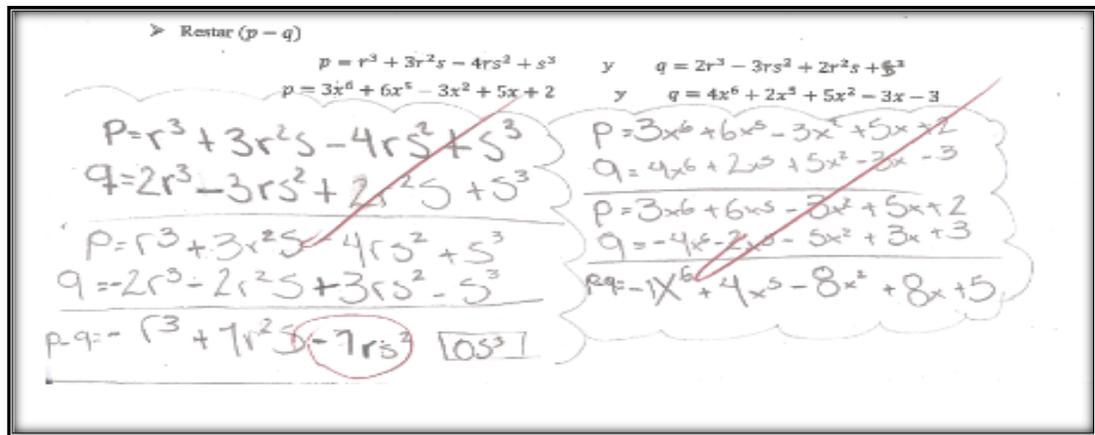


Figura 33. Aplicación del conocimiento expresado de las restas

Las tareas propuestas para esta actividad (hoja de trabajo #2) son las siguientes:

- Sumar ( $a + b$ )

$$a = 6a + 5b - 3c - 6d \text{ y } b = a - 3b + 2c - 6d$$

$$a = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1 \text{ y } b = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$$

- Restar ( $p - q$ )

$$p = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3 \text{ y } q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$$

$$p = 3x^6 + 6x^5 - 3x^2 + 5x + 2 \text{ y } q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$$

También les pidió registrar sus resultados en su hoja de trabajo #2. Con ayuda de dos estudiantes, la profesora comienza a entregar la segunda hoja de trabajo para cada una de las binas. Dando pauta para el inicio de lo que sería su segundo ejercicio clase de suma y resta de polinomios (Ver Figura 34).



Figura 34. Repartición de hojas de trabajo #2

Durante todo el tiempo en que los estudiantes realizaban los procedimientos para tratar de obtener los resultados de cada uno de los ejercicios propuestos en su hoja de trabajo 2, la profesora estuvo presente dentro del salón de clases, para poder asistir en algunas dudas que se presentaban de forma natural en los estudiantes (Ver Figura 35).



*Figura 35. Asistencia a cuestionamientos naturales*

El objetivo principal de asistir a los estudiantes por parte de la profesora ante algunos cuestionamientos durante el desarrollo del segundo ejercicio clase (hoja de trabajo #2) siempre se planteó en términos de no dejarlos estancados, ante dudas que parecieran pequeñas, pero que pudieran frustrar su desempeño en el proceso de solución de los ejercicios indicados.

Algunas de las dudas más frecuentes realizadas por los estudiantes hacia la profesora, se pueden apreciar en los siguientes diálogos:

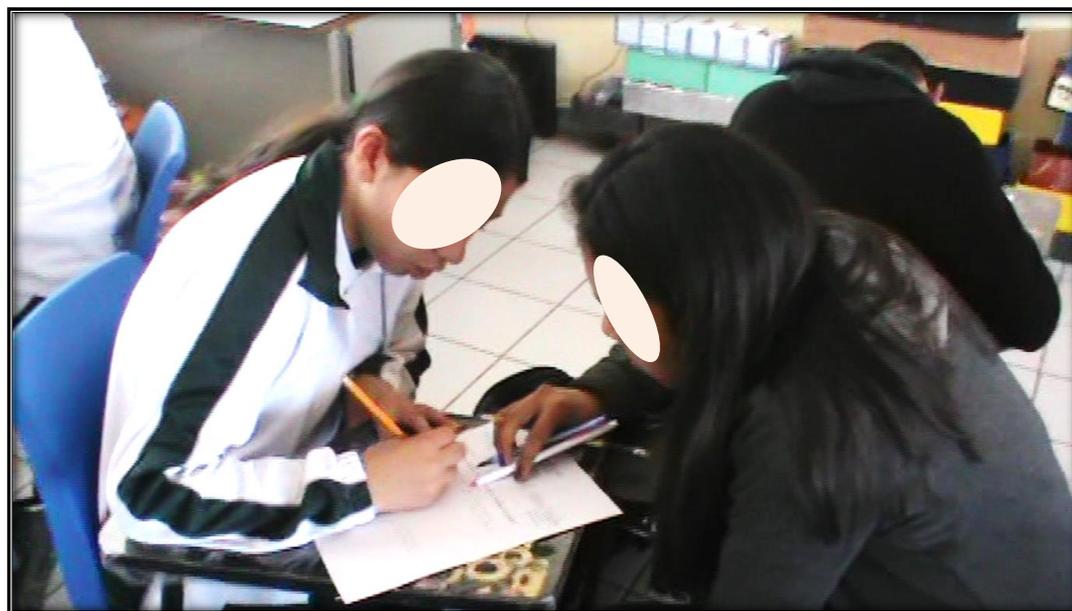
Estudiantes: ¿Por qué este termino de aquí no tiene exponentes?, ¿le puedo poner un uno?

Estudiante: Por ejemplo si me queda  $1c$ , ¿nada más puedo poner la  $c$  solita?

Estudiante: Si ya tengo acomodadas las variables ¿ya puedo hacer la suma?

Estudiante: Si acabamos de restar porque los términos tenían signos diferentes, ¿Qué signo le pongo al resultado si me quedo cero?

Una vez terminados los ejercicios, en la parte del cierre de esta última sesión se procedió a socializar el procedimiento y los resultados obtenidos, en el grupo. Ante las expresiones de sus mismos compañeros, los estudiantes en su mayoría se pudieron dar cuenta si sus resultados obtenidos en las binas fueron los correctos o no (Ver Figura 36).



*Figura 36. Trabajo en binas*

Al término de esta sesión la mayoría de los estudiantes proponían una estrategia para dar solución a las operaciones de polinomios indicadas, la cual consistía en ordenar cada uno de los términos del polinomio en primera instancia y posteriormente colocarlos de forma vertical considerando siempre términos semejantes, para así poder reducirlos. Ante dichas propuestas se pudo observar en algunos casos la apropiación de la definición para suma y resta de polinomios, pues el dominio que presentaban al expresar sus experiencias de trabajo ante el resto de sus compañeros era evidente, y no solo eso, los resultados obtenidos en el análisis después de su revisión en la hoja de trabajo #2, reporta que el 91% de las binas obtuvieron una calificación aprobatoria (mínimo seis, máximo diez).

### Resultados de la Ejercitación

En este apartado mostramos los resultados obtenidos, con el objetivo de analizar datos importantes tales como el número de estudiantes que lograron obtener resultados favorables durante la ejercitación e identificar el tipo de errores cometidos durante la misma.

La mayoría de los equipos (dieciocho) utilizaron la misma estrategia de trabajo para obtener sus resultados, ésta fue ordenando los términos semejantes de los polinomios en forma vertical, para después comenzar a reducirlos mediante la operación indicada (ver Figura 37).

$a = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1$   
 $b = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$   
 $a+b = 13x^3y + 4xz^2 - 6$

Figura 37. Suma ( $a + b$ )

Los resultados obtenidos en este segundo ejercicio clase (hoja de trabajo #2) nos permiten ver que las binas en su totalidad lograron realizar por lo menos uno de los cuatro ejercicios propuestos, la mayoría en la suma de polinomios.

La operación de la suma para polinomios fue la más acertada, pues de 23 equipos, 14 lograron llegar al resultado correcto en las dos propuestas. Mientras que el 34 % de las binas solamente fueron asertivas en una adición. Aunque este tipo de operación fue la menos perjudicada, también se presentaron errores, tales como, la mala aplicación de la ley de los signos al momento de reducir los términos semejantes, esto a pesar de que al inicio de la sesión

se había retomado ese tema. Al respecto, podemos señalar que los estudiantes requieren mayor trabajo en cuanto a las operaciones con números negativos.

Para el caso de la resta de polinomios, aunque se trabajó de forma similar, se observaron dos estrategias diferentes, tales como:

- a) Realizaban el cambio de signos para el sustraendo, de forma directa, es decir, observaban los polinomios originales y al ordenarlos de forma vertical (términos semejantes) asignaban el nuevo signo (ya considerando el cambio), por ejemplo, ver Figura 38.

RESTAS

$$P = 1t^5 - 5t^4 + 2t^3 + 3t^2 - t + 8$$

$$Q = +t^5 + 1t^4 - 1t^3 - 2t^2 + t + 3$$


---


$$P - Q = +2t^5 - 4t^4 + 1t^3 + 1t^2 // +11$$

Figura 38. Resta ( $p - q$ )

- b) En primera instancia ordenaban los términos semejantes (naturales) de ambos polinomios de forma vertical, después volvían a transcribir los mismos polinomios, pero ya con el cambio de signo para el sustraendo. Posteriormente ejecutaban la operación indicada según la ley de los signos (ver Figura 39).

Restar ( $p - q$ )

$P = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3$ $Q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $P - Q = -r^3 + 1r^2s - 7rs^2 + 10s^3$	$P = 3x^6 + 6x^5 - 3x^4 + 5x + 2$ $Q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $P - Q = -x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 8x + 5$
---	---

Figura 39. Reacomodo para realizar la resta ( $p - q$ )

En los ejercicios correspondientes a la sustracción más del 50% de las binas resolvieron por lo menos una operación de forma correcta, lo cual es muy favorable, pero sin embargo siguen apareciendo errores de omisión ante el cambio de signos para el sustraendo.

Es importante señalar que aproximadamente el 21% de las binas dibujaron el contenedor en la hoja de trabajo #2, para poder llegar al resultado. De éstas, 3 equipos resolvieron de forma correcta tres de los cuatro ejercicios propuestos, obteniendo así una calificación aprobatoria considerable (ver Figura 40 y Figura 41).

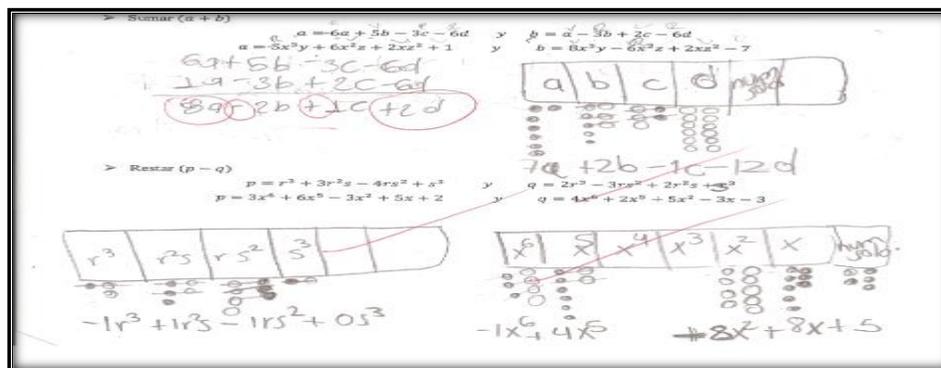
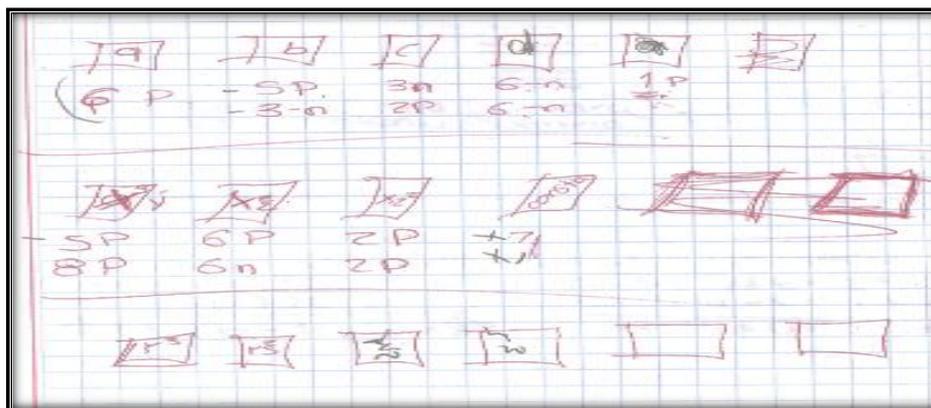
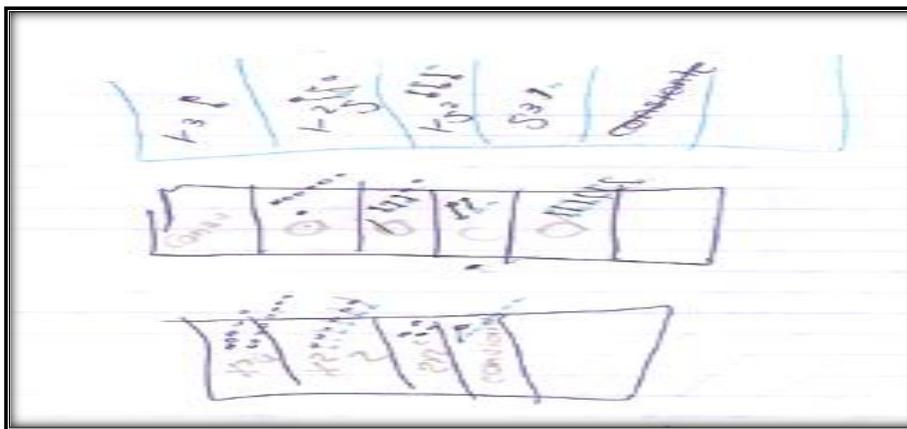


Figura 40. Registros del diseño del contenedor en hoja de trabajo #2

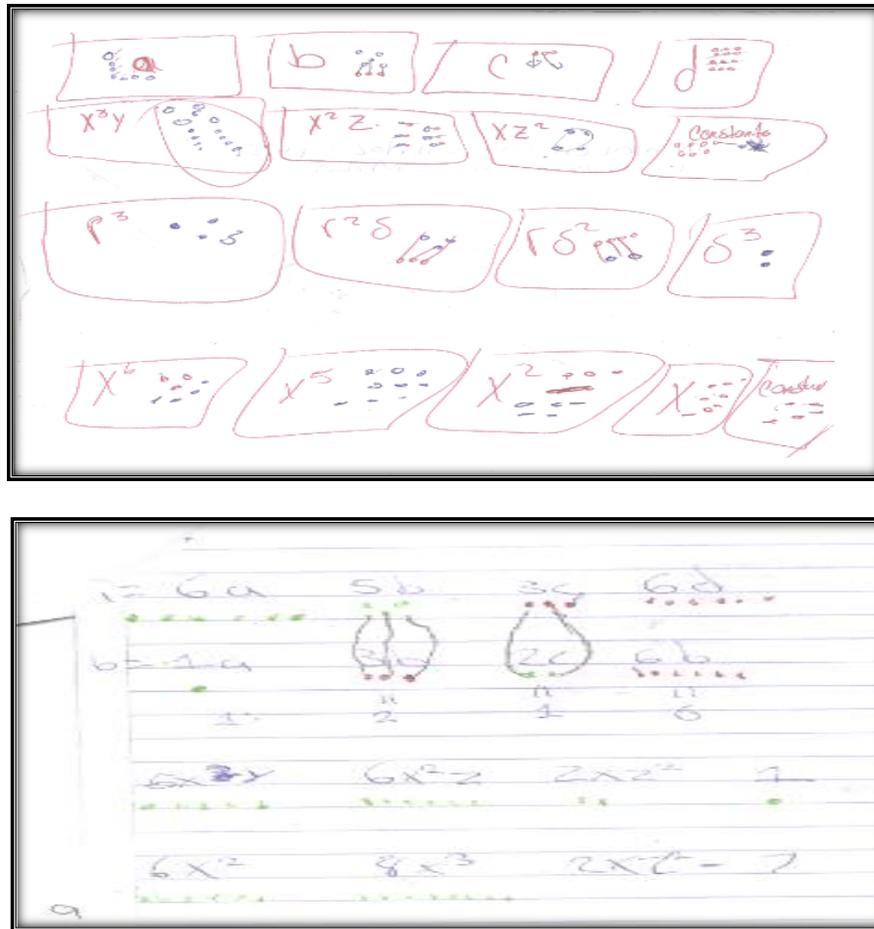


Figura 41. Registros del diseño del contenedor en hoja de trabajo #2

El dibujar los contenedores en sus hojas de trabajo los ayudó a ordenar los polinomios sumandos o minuendo y sustraendo, además de que implícitamente los favoreció al trabajar con la ley de los signos, permitiéndoles “comprender” que si en la operación tengo dos elementos con signos iguales éstos se tendrían que sumar y si tengo números con signos contrarios éstos deberán restarse.

#### 4.4.2 Fase de Validación

En esta fase se hace una comparación entre los análisis a priori y a posteriori de la situación didáctica, comparando los aprendizajes esperados con lo que se construyó realmente durante el desarrollo de las clases.

##### Situación de acción

Durante esta práctica de Desarrollo Profesional se esperaba que los estudiantes recurrieran a sus conocimientos previos para tener la mayor participación en los cuestionamientos realizados durante la clase.

Una vez analizada la situación, los estudiantes sí recurrieron a sus conocimientos previos para poder participar de forma certera en las preguntas realizadas. Las aportaciones por parte de éstos fueron variadas, y en la mayoría de los casos de forma correcta.

De los conocimientos previos presentes, se rescataron datos importantes tales como: que un polinomio puede estar compuesto por variables, coeficientes y exponentes, y, que la suma de los polinomios se realiza iguales con iguales (dicho de sus propias palabras). La ausencia se presentó en el tema de las restas, pues la mayoría de los estudiantes no recordaban realizar el cambio de signos al sustraendo para posteriormente poder trabajar la resta en términos de la suma.

##### Situación de acción formulación

En esta situación se esperaba que los estudiantes tuvieran una mediana participación de forma voluntaria en el desarrollo del proceso que ha de dar solución a los ejemplos propuestos por la profesora al mostrar el uso y manejo del contenedor como material didáctico, y el resultado fue mejorado, pues los estudiantes se vieron muy activos constantemente durante el desarrollo del proceso que dio solución a dichos ejemplos. Indicando, desde su lugar el procedimiento a seguir para poder encontrar el resultado correcto a las operaciones de polinomios.

Es en esta situación en la que el contrato didáctico establecido ayudó a que se promoviera la participación entre los estudiantes, pues, mediante el desarrollo de los ejemplos por parte de la profesora, los estudiantes iban haciendo el ejercicio en su propio contenedor (esto sin haberlo indicado). Lo anterior es importante, debido a que se esperaba que la profesora dirigiera esta situación, pero se superó la expectativa, al ver que ellos iban realizando sus propias acciones y formulaciones en sus contenedores desde su lugar.

### Situación de formulación

Se pudo observar que los estudiantes antes de empezar a trabajar con su material didáctico primero separaron las taparrosca por colores (verdes y rojos), y después continuaron la asignación de nombres para cada uno de los cajones del contenedor.

La forma en que los estudiantes trabajaron las tareas en el contenedor fue muy activa y divertida, pues dicho de sus propias palabras, en este nivel educativo son pocos los temas que se pueden ver utilizando material didáctico. El desarrollo de cada una de las etapas del proceso por encontrar la solución correcta para cada ejercicio indicado en la hoja de trabajo #1, fue favorable, pues se observó a los estudiantes divirtiéndose al resolver un ejercicio matemático.

Los resultados fueron buenos pues todos los equipos lograron obtener una calificación aprobatoria (mínima de seis), esto al revisar sus hojas de trabajo, mostrando así su capacidad para resolver sumas y restas de polinomios con ayuda del contenedor como material didáctico.

Estos resultados nos mostraron como principal estrategia utilizada por los estudiantes, aquella que consistía en realizar de forma directa el depósito de cada una de las constantes según su taparrosca representativa en cada uno de los polinomios, esto en el caso de la suma. Para la resta la táctica fue identificar los signos originales del polinomio a resolver y a la par ir realizando el cambio de los mismos mentalmente, de tal manera que el depósito sería mismas constantes pero con signo contrario.

Un error que creemos se cometió al trabajar con el contenedor como material didáctico, fue que, los estudiantes se confiaron, y empezaron a tratar de resolverlos sin la ayuda del mismo. Después de realizar el segundo ejercicio (sumas), se presentaron los desaciertos, pues si hubieran utilizado el contenedor sería casi imposible equivocarse en los resultados, después de haber realizado correctamente el cambio de signos en el sustraendo (para la resta) y además el acertado depósito de las taparrosca para cada uno de los términos del polinomio. Lo anterior fue un error que no imaginábamos que aparecería.

### Situación de validación

La situación de validación permite que los estudiantes expresen y definan sus respuestas ante sus compañeros, además que convengan al resto del grupo con sus propias explicaciones. Y esto fue lo que pasó dentro del salón de clases al finalizar la primera sesión, pues aunque se esperaba poca participación para pasar al frente del grupo a exponer la forma de trabajo y los resultados obtenidos por la timidez de los estudiantes al ser grabados por primera vez, esto no fue así.

La mayoría de los equipos querían exponer frente a sus compañeros y defender lo que para ellos era el resultado correcto, así que ante tal situación y por los tiempos destinados

durante la secuencia didáctica previamente diseñada, la profesora tuvo que elegir solo a dos de las binas con resultados diferentes (una para la suma y otra para la resta) para su exposición.

El objetivo se cumplió, pues la devolución se dio al ver cómo el resto del grupo aprobaba la exposición del primer equipo al realizar la suma de polinomios, y posteriormente al señalar los errores cometidos por la segunda bina en el momento en que éstos olvidaron realizar el cambio de signos para el sustraendo en el caso de la resta.

Después del análisis, se concluye que la validación fue afianzada por ambos protagonistas de la educación, y es que, si bien es cierto que fueron los propios estudiantes quienes ayudaron a que sus compañeros se dieran cuenta del error en que estaban incurriendo, también fue pieza clave la intervención oportuna de la profesora y el encaminamiento de la misma.

Por otro lado, y reafirmando el rol de la profesora en la toma de decisiones para dicha validación, es necesario hacer hincapié en la buena selección de quiénes pasaban al pintarrón, pues fue esencial el identificar previamente a los equipos con las respuestas a los ejercicios diferentes.

#### Situación de institucionalización

La situación de institucionalización es parte importante dentro del desarrollo de cualquier disciplina y en cualquier tema, y en Matemáticas, ésta es indispensable, pues, depende de la institucionalización del contenido para la comprensión del tema en situaciones posteriores.

Los tiempos asignados para la secuencia didáctica dentro de la segunda sesión, fueron los correctos, pues se logró desarrollar la situación de institucionalización de una forma plena, es decir, hubo momentos suficientes para la intervención de la profesora al formalizar la definición del concepto polinomio y la suma y resta de los mismos, para posteriormente ejercitar mediante operaciones del mismo tema.

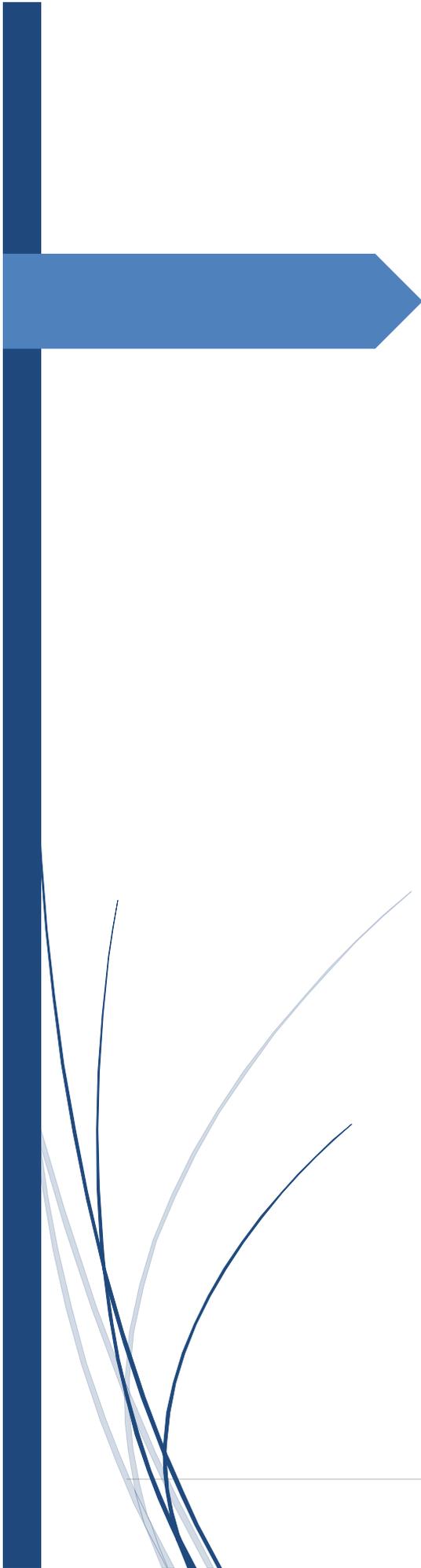
Al ser un tema que se aborda en el nivel académico que le antecede al bachillerato, ayuda de mucho, pues ya se cuenta con el conocimiento previo para institucionalizar lo que se quiere, suma y resta de polinomio.

Después de haber mencionado, definido, atendido, y analizado cada una de las fases de la Ingeniería Didáctica, mediante la Teoría de Situaciones Didácticas dentro de mi práctica docente, puedo percibir enormemente el cambio que esta teoría trajo a mi Desarrollo Profesional. Basta con mirar un poco hacia mi desempeño laboral, años atrás y así poder dar cuenta de la falta de herramientas necesarias para un mejor desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje, tales como, estrategias (adecuadas), uso de materiales didácticos (variados) y un diseño de secuencia didáctica (mejorado).

De forma particular el uso del material didáctico dentro del aula con alumnos que estudian el bachillerato es una de las formas más divertidas de presentar las Matemáticas, y esto es la ganancia que yo como profesora rescato e integro a mi práctica docente.

El contenedor, como he llamado al material didáctico, que he presentado a lo largo de esta práctica de Desarrollo Profesional, me ha ayudado de mucho en la forma en que presenté el tema de suma y resta de polinomios con estudiantes de educación media superior, incluso para aquellos estudiantes con capacidades intelectuales diferentes, en los cuales el nivel de concentración es difícil de obtener.





# Reflexiones Finales



## Reflexiones Finales

Como parte protagónica del proceso de enseñanza – aprendizaje, el maestro debe buscar ser profesional dentro de su propio campo laboral. Y el identificar nuestras fortalezas y debilidades en cuanto a conocimientos del contenido matemático y didáctico, es de gran ayuda para tratar de desarrollar cada vez mejor nuestra práctica docente, pues estos conocimientos son básicos, y se considera que son necesarios para que un profesor esté frente a grupo.

La preparación continua es la base para fortalecer cada día nuestro Desarrollo Profesional Docente, y en este tenor, es en el que me encuentro. El cursar la Maestría en Matemática Educativa me ha ayudado a prepararme más y mejor para enfrentar situaciones u obstáculos del propio proceso educativo.

¿Qué consecuencias tiene en el aprendizaje de los estudiantes la introducción de material didáctico a través de una secuencia didáctica para la enseñanza del tema sumas y restas de polinomios con coeficientes enteros?, es la pregunta de Desarrollo Profesional que me he planteado en este proceso de formación docente.

Con base en la experiencia desarrollada a través de este informe de práctica de Desarrollo Profesional se confirma que los materiales didácticos están al servicio de la enseñanza y son elementos esenciales en el proceso de construcción de conocimientos, pues éstos favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje (SEP, s.f.). Sin embargo, se observó que en el nivel medio superior, en el COBAEZ “Luis Moya”, éstos ya no se emplean de manera constante.

Además, una de las consecuencias que se presentó en el aprendizaje de los estudiantes al introducir el material didáctico “el contenedor” a través de una secuencia didáctica para la enseñanza del tema suma y resta de polinomios, fue que la mayoría de ellos logró realizar con éxito la operación de la suma y en cuanto a la resta, aproximadamente el 60% tiene resultados favorables.

Por otro lado, el uso del contenedor como material didáctico proporcionó de autonomía al estudiante para que se apropiara del conocimiento y realizara la suma y resta de polinomios de manera independiente, a través del mismo, sin la intervención directa del profesor. Ésta fue tal, que aun estando en la parte de ejercitación en la situación de institucionalización, algunos estudiantes dibujaron el contenedor para poder seguir haciendo uso de esta herramienta: los resultados, en su caso, fueron acertados, obteniendo la máxima calificación en la actividad asignada.

Y aunque el uso del material didáctico, por sí mismo, no asegura la adquisición del conocimiento, considero que el acompañarlo con la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica, tiene grandes ventajas para mejorar el proceso de enseñanza –

aprendizaje de las Matemáticas y en particular con la suma y resta de polinomios, pues esta teoría pone al estudiante en el centro de dicho proceso.

Cabe mencionar que “el contenedor” como he nombrado al material didáctico propuesto en esta secuencia didáctica, nació a partir del proyecto transversal “una escuela limpia y pulcra”, en el que cada profesor debería integrar esta idea en su materia relacionándola con la misma. Además éste fue elaborado, con mi dirección, por los propios estudiantes, y es que no hay material didáctico simple, si éste es bien diseñado y bien aplicado, se podrían obtener buenos resultados, tales como los que se encontraron en esta práctica de Desarrollo Profesional.

A continuación, presento algunas reflexiones importantes obtenidas en esta práctica de Desarrollo Profesional con relación a los objetivos particulares planteados:

Con relación al primer objetivo particular.

- i) “Distinguir elementos que sirvan de ayuda en el diseño de una secuencia didáctica incorporando material didáctico”.

Este objetivo se cumplió, pues se hizo el análisis correspondiente utilizando los elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas y los aportes de la Ingeniería Didáctica. Las dimensiones abordadas en esta parte del análisis preliminar fueron: epistemológica, didáctica y cognitiva.

De la dimensión epistemológica identificamos que desde siglos anteriores se ha trabajado con *lo algebraico* para la resolución de problemas, para ello se utilizaron recursos verbales o geométricos, hasta evolucionar a las estrategias algebraicas que se utilizan hoy en día. En este sentido, nuestra propuesta retoma ese trabajo con *lo algebraico* por medio del material didáctico “el contenedor”, antes de institucionalizar la suma y resta de polinomios.

En cuanto a la dimensión cognitiva, los resultados de los ejercicios de la actividad de diagnóstico revelaron que más del 70% de los estudiantes presentaban serias dificultades para resolver la resta de polinomios. Aquí se identificó que los estudiantes suelen omitir realizar el cambio de signos para el sustraendo, y así poder llevar a cabo la operación de la resta. Además, que los estudiantes no habían logrado identificar que al realizar sumas o restas de polinomios tenían que identificar primero quiénes son términos semejantes. En este sentido, se pretendía que el trabajo con “el contenedor”, en particular, el uso de los cajones, ayudara con la identificación de términos semejantes. Y el uso de taparrosas verdes y rojas, y la dinámica de cambiar los signos del sustraendo, en el proceso para la resta.

- Para la dimensión didáctica, de los propósitos del programa de estudios, se identificaron las competencias genéricas y disciplinares que habrían de proponerse en juego al formular la situación didáctica con material didáctico.

Con relación al segundo objetivo particular.

- ii) “Diseñar una secuencia didáctica relacionada con la suma y resta de polinomios con coeficientes enteros, mediante el uso de material didáctico”.

Las dificultades graduadas adecuadamente y propuestas para trabajarlas en equipo, son parte importante de la propuesta didáctica, pues el haber trabajado de esta forma (binas), permitió a los estudiantes pasar por las fases de formulación y validación al comparar sus resultados y tener que dar una única respuesta. Esto se puede apreciar más claramente en la actividad de desarrollo de la primera sesión.

La forma de trabajo de la profesora, es uno de elementos rescatados en nuestro objetivo particular anterior, pues ayudó a definir la organización en la que habían de trabajar los estudiantes (en equipos) durante la secuencia didáctica diseñada, por otro lado, su rol en el tipo de contrato didáctico establecido fue de primordial importancia, pues ayudó en la gestión de los aprendizajes, convirtiéndose en una guía para sus estudiantes.

La secuencia didáctica diseñada contribuyó a consolidar los aprendizajes relacionados con los conocimientos previos y con la resolución de tareas que involucran a la suma y resta de polinomios.

Con relación al tercer objetivo particular.

- iii) “Experimentar la secuencia didáctica con estudiantes del COBAEZ plantel Luis Moya”.

La experimentación se llevó con gran éxito, pues se desarrolló en los tiempos estimados, la organización de la forma de trabajo fue la adecuada; debido a que así se propició un ambiente de crítica, estrategia y reflexión por parte de los equipos. Además de que las instrucciones del uso y funcionamiento del contenedor como material didáctico siempre fueron claras.

Con relación al cuarto objetivo particular.

- iv) “Analizar los aprendizajes obtenidos”.

El haber realizado los análisis preliminares, el diseño, la prueba piloto y la puesta en escena de la secuencia didáctica propuesta ayuda en el propio Desarrollo Profesional y por ende facilita el proceso de enseñanza – aprendizaje.

El ser la profesora responsable del grupo y la titular de la asignatura, es una ventaja pues puedo ver en los estudiantes el crecimiento académico manifestado después de dicha situación didáctica.

El haber trabajado esta propuesta didáctica contribuyó notablemente al aprendizaje de la suma y resta de polinomios ya que las dificultades identificadas fueron disminuyendo conforme avanzaban las actividades. Esto se puede apreciar comparando los resultados de las hojas de trabajo #1 y las hojas de trabajo # 2, todos los equipos mejoraron notablemente al resolver la sustracción. Así, el avance académico fue notorio, pues para temas posteriores a éste, la dificultad presentada era cada vez menor al dar solución a ejercicios de este tipo.

Sugerencias.

Con base en el trabajo realizado y los análisis a los que he llegado, presento las siguientes sugerencias:

1. Para el aprendizaje de las Matemáticas en general, y en particular para la suma y resta de polinomios, incluir en las actividades situaciones que induzcan al estudiante a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización con actividades individuales y grupales de dificultad graduada. Es importante diseñar actividades grupales pensadas especialmente para propiciar el desarrollo de las fases de formulación y validación.
2. Estimular el desarrollo de la capacidad de crear expresiones algebraicas que representen alguna situación en particular.
3. Plantear problemas escolares que impliquen su resolución a través de suma y resta de polinomios.

Limitaciones

1. El material didáctico “el contenedor” solo es útil para suma y resta de polinomios con coeficientes enteros.
2. El valor del coeficiente de cada término según su variable deberá ser oportuno, debido al número de taparrosas que se han de utilizar y al tamaño del cajón del contenedor.

3. Los términos de los polinomios tampoco podrán ser muchos, pues sería complicado construir un contenedor con demasiados cajones.

## Reflexión Docente

Soy profesora desde hace catorce años en el nivel medio superior y en el transcurso de este tiempo he tratado, en la medida de lo posible, estar en constante preparación; acudiendo a congresos, diplomados, conferencias, talleres, simposios, entre otras actividades académicas, relacionadas con la educación y la Matemática Educativa, que me pudieran ayudar para tratar de mejorar mi práctica docente. Pero el parte aguas se presentó cuando decidí entrar a la Maestría en Matemática Educativa (MME) de nuestra Benemérita Universidad Autónoma de Zacatecas (BUAZ) pues este proceso habría de marcar el reto que como docente siempre quise alcanzar.

Así pues, desde un inicio, en el momento en que recibí las clases impartidas por mis maestros (muy preparados), pude darme cuenta de que el conocimiento matemático no está peleado con la didáctica. Además, que no nada más es tener noción de ello, sino asimilar que la enseñanza de las Matemáticas es un proceso realmente complejo en el cual todos los profesores debemos estar dispuestos a aprender para mejorar nuestra labor docente.

Existe una frase de Carl Friedrich Gauss que encaja perfecto con este periodo de mi vida académica y dice lo siguiente: “Los encantos de esta ciencia sublime, las Matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella”, y quién más que un profesor comprometido con la enseñanza - aprendizaje de sus estudiantes, y es que, es esto lo que siento al pararme frente a un grupo en un salón de clases.

El irme dando cuenta de que a mi práctica docente le faltaba conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas, no tardó mucho, pues con el paso del tiempo y a través de las diferentes asignaturas que se imparten en esta Maestría, comprendí que la solución muchas veces no es única y que éstas pueden representarse de diferentes maneras, es decir, existen diferentes formas de enseñanza para esta disciplina.

Mi experiencia en este grado académico fue muy grata, pudiera decir que doblemente satisfactoria, y es que el revivir mi etapa como estudiante y el tratar de contextualizar mi experiencia docente fue algo maravilloso que sin duda volvería a repetir. Y en este tenor estoy firmemente convencida de que, como lo dijo John Cotton Dana, quien se atreva a enseñar nunca debe dejar de aprender.

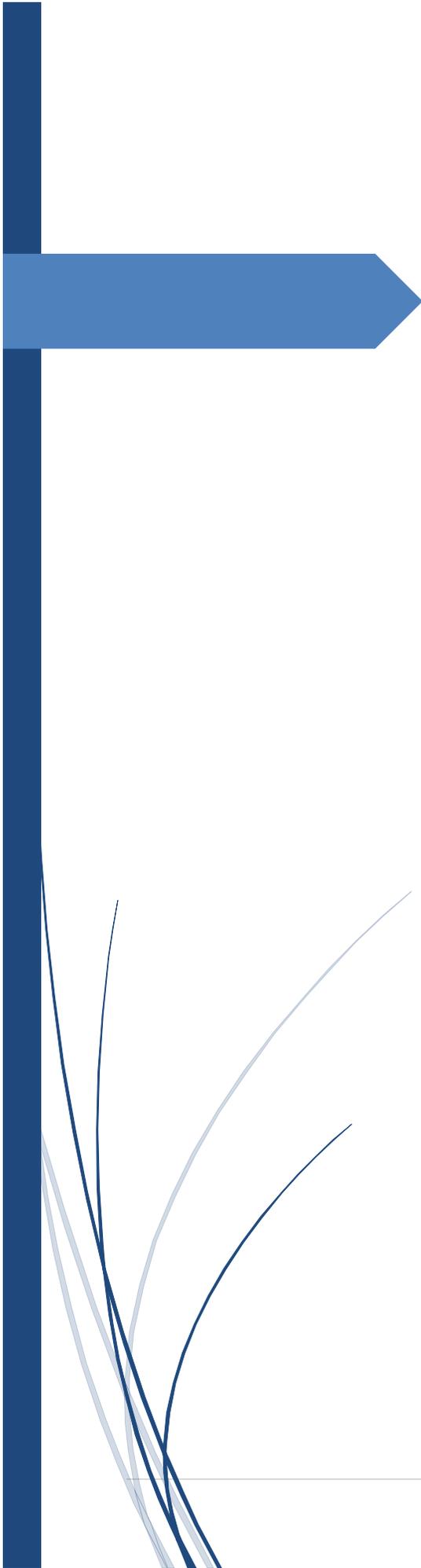
El ser estudiante de la MME me ayudó a identificar las necesidades en mi persona como profesionista, que debo atender para tener un Desarrollo Profesional efectivo, y así poder afrontar las dificultades mismas del desarrollo del proceso educativo en el que me encuentro y poder lograr alcanzar los objetivos que la nueva Reforma Educativa nos exige.

La forma de titulación elegida, fue la de Experiencia de Desarrollo Profesional, pues considero es una ventaja para aquellos profesores que estamos en servicio, y éste es mi caso. Además de que no hay nada mejor, que poder ver los resultados con los mismos estudiantes, en semestres o ciclos posteriores.

Después de haber concluido este proceso de formación profesional docente en la MME, puedo decir con orgullo que mi práctica ha cambiado, y ha sido para bien, y que mis estudiantes pueden dar fe de los aprendizajes obtenidos.

Ser profesora profesional de Matemáticas no es fácil, el trabajo es mucho y la mayoría de las veces la remuneración económica no lo es, pero la MME es la plataforma correcta para despegar y tratar de alcanzar un Desarrollo Profesional Docente efectivo que forme estudiantes integrales dentro de la educación.

Amo ser maestra.



# Referencias

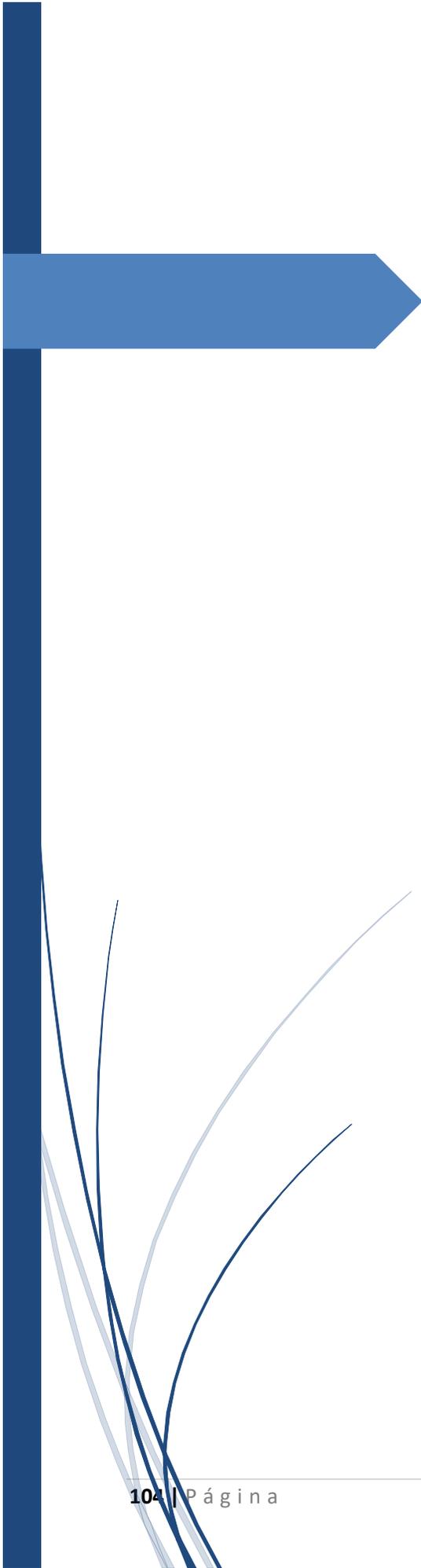


## Referencias

- Acevedo, H. (2015). Enseñanza de factorización, con la ayuda del material didáctico "El álgebra es un juego". *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 518-526.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauiana. *Educación matemática*, 13(3), 5-21.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 7 (2), 33-115.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Libros del Zorzal.
- Cañadas, M., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M., Peñas M., Villarraga, M., & Villega, J. (2002). *Materiales didácticos en la resolución de problemas*. Recuperado de <http://www.funes.uniades.edu.co/2681/1/CannadasM02.-2748.PDF>.
- Cascallana, M, T. (1999). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Aula XXI / Santillana.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: Editorial Horsori.
- Cuesta, A., Escalante, J. & Méndez, M. (2013). Impacto de los cursos Universitarios en la formación de competencias Algebraicas. *Educación Matemática*. V (25), 35-59.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2. Universidad de Costa Rica.
- EdSource. (2009, Mayo 7). *Highlighting strategies for student success*. Recuperado de: [www.edsource.org/pub\\_algebra09\\_QA.html](http://www.edsource.org/pub_algebra09_QA.html)
- Figuroa, R. E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima Perú.
- Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp39-63). Buenos Aires: Paidós Educador.

- García, N.A., Rodríguez, S.L. y Ponce, J.A. (2018). *Matemáticas I*. Umbral: México.
- Garrido, Y. (2016). *Material didáctico para lograr aprendizajes significativos en la multiplicación en los estudiantes de cuarto grado de educación general básica, paralelo a de la escuela fiscal mixta José Ingenieros n° 1, de la ciudad de Loja. Período académico 2014 - 2015*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Nacional de Loja. Ecuador.
- Guzmán, M. V. (2016). *Conocimiento de dos profesoras de matemáticas en formación continua sobre las dificultades de aprendizaje en el tema de adición de expresiones algebraicas en el nivel secundaria*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas. México.
- Hernández, O. D. y Soto, A. (2012). *Aprender Matemáticas con material lúdico*. Propuesta Pedagógica. Recuperado de <https://omardelwinhernandez.blogspot.com/2012/12/proyecto-de-aula-aprender-matematicas.html>.
- Ibáñez, P. y García, G. (2010). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. CENGAGE Learning: México.
- Lehmann, C. (2012). *Algebra*. LIMUSA: México.
- Martín, R. A. (2013). *Propuesta Didáctica para enseñar polinomios a 3º ESO utilizando Eduslide*. (Tesis de maestría). Universidad Internacional de La Rioja. Valencia.
- Méndez, K. P. (s.f.). *El origen de los materiales educativos o didácticos*. (2018, marzo 8). Recuperado de <https://sites.google.com/site/medioskarenpamelamendez/orbin-sesualium-pictus/el-origen-de-los-materiales-educativos-o-didacticos>.
- Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 39, 19-33.
- Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB: análisis y propuestas*. (p. 59-71). Buenos Aires: Paidós.
- Redacción Jóvenes. (2013, Agosto 7). *Educación personalizada: alternativa de aprendizaje*. Recuperado de: <http://www.vanguardia.com/vida-y-estilo/jovenes/219639-educacion-personalizada-alternativa-de-aprendizaje>.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra*. PNA 2(2), 61-74.
- Schwartz, N. (1996). *Diccionario y manual de matemáticas*. Iberoamérica: México.

- Secretaría de Educación Pública. (s.f). *Los materiales didácticos y su vinculación con las evidencias de enseñanza y de aprendizaje. Argumentación del diseño de estrategia*: México, D.F.: Autor.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Números*, 77, 5-34.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra (23)*. Madrid, España: Síntesis
- Tamayo, C. (2008). El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ASOCOLME)*, Medellín, Colombia.
- Valenzuela, M. (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile*. (Tesis de máster no publicada). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica De la Matemática, Granada.
- Velazco, E. (2012). *Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las Matemáticas*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad de Valladolid. Segovia.
- Villalta, P. (2010). *Elaboración de material didáctico para mejorar el aprendizaje en el área de matemáticas con los niños del séptimo año de educación de la escuela "Daniel Villagomez", parroquia Tayuza, Canton Santiago, de la providencia de morona Santiago 2010-2011*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Politécnica Salesiana. Ecuador.
- Villarroel Solis, J. M. & Romero-Leiton, J. P. (2017), *La caja de polinomios y el método tradicional: dos alternativas didácticas para la enseñanza de la suma y la resta de polinomios*, Bogotá: Editorial Politécnico Grancolombiano.



# Anexos



Anexo 1

Tabla 1

Planeación usual – analizada en la Dimensión Didáctica de la Fase de análisis preliminares

 <b>SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR</b> <b><u>INSTRUMENTO DE REGISTRO DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS<sup>1</sup></u></b>								
<b>IDENTIFICACIÓN (1)</b>								
<b>Institución :</b>	COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE ZACATECAS							
<b>Plantel:</b>		<b>Profesora:</b>		_____				
<b>Asignatura Bloque</b>	MATEMÁTICA S I IV	<b>Semestr e</b>	<b>2013 - B</b>	<b>Compo nente:</b>	<b>BÁSICO</b>	<b>Periodo de aplicación :</b>	<b>10 HR S</b>	<b>Fecha de elaboraci -ón:</b>
	Realizas transformacione s algebraicas I					<b>Duración en horas:</b>		
<b>Tema:</b>	Suma y resta de polinomios							
<b>INTENCIONES FORMATIVAS</b>								
<b>Propósito de la estrategia didáctica por Asignatura: (1)</b>								
<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Lograr que el alumno identifique operaciones de suma, resta y división de polinomios.</li> <li>➤ Ejecutar sumas y restas de polinomios</li> </ul>								
<b>Contenidos fácticos: (2)</b>								
<b>Conceptos Fundamentales:</b>								
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operaciones con números reales (suma, resta, división y multiplicación)</li> <li>• Ley de los signos</li> <li>• Ley de los exponentes</li> <li>• Ley de radicales</li> <li>• Lenguaje algebraico</li> </ul>								
<b>Contenidos procedimentales: (1)</b>								
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las operaciones de suma, resta, multiplicación de polinomios de una variable.</li> <li>• Ejecuta sumas, restas y multiplicaciones con polinomios de una variable.</li> <li>• Emplea productos notables para determinar y expresar el resultado de multiplicaciones de binomios.</li> <li>• Comprende las diferentes técnicas de factorización, como, de extracción de factor común y agrupación; de trinomios cuadrados perfectos y de productos notables a diferencia de cuadrados perfectos.</li> <li>• Formula expresiones en forma de producto, utilizando técnicas básicas de factorización.</li> <li>• Utiliza los productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos.</li> </ul>								
<b>Contenidos actitudinales: (1)</b>								
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Comprender que el desarrollo de las matemáticas está relacionado con el entorno donde se desarrolla el hombre.</li> <li>✓ Analizar de qué forma ha influido la matemáticas para la modificación del entorno.</li> <li>✓ Mostrar solidaridad en el trabajo de equipo, aportando experiencias y aceptando las de otros compañeros.</li> </ul>								

(1) Aplicable para los tres componentes: básico, propedéutico y profesional.

(2) Aplicable para los componentes: básico y propedéutico.

(3) Aplicable para el componente: profesional.

### Competencias genéricas y atributos: (1)

#### Se auto determina y cuida de sí

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

**Atributos:**

- a) Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- b) Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- c) Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
- d) Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- e) Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
- f) Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

**Atributos:**

- a) Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- b) Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
- c) Participa en prácticas relacionadas con el arte.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

**Atributos:**

- a) Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
- b) Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
- c) Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

#### Se expresa y comunica

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

**Atributos:**

- a) Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- b) Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- c) Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- d) Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- e) Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

#### Piensa crítica y reflexivamente

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

**Atributos:**

- a) Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- b) Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- c) Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- d) Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- e) Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- f) Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

**Atributos:**

- a) Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- b) Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- c) Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- d) Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

**Aprende de forma autónoma**

- 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

*Atributos:*

- a) Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- b) Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- c) Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

**Trabaja en forma colaborativa**

- 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

*Atributos:*

- a) Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- b) Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- c) Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

**Participa con responsabilidad en la sociedad**

- 9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

*Atributos:*

- a) Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
- b) Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
- c) Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
- d) Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
- e) Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
- f) Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

- 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

*Atributos:*

- a) Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
- b) Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
- c) Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

- 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

*Atributos:*

- a) Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
- b) Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
- c) Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente

**Competencias disciplinares: (1)**

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE (1)

Apertura				
Actividades	Competencia(s)		Producto(s) de Aprendizaje	Evaluación
	Genérica(s) y sus atributos	y Disciplinar(es)		
<p><b>Actividad 1:</b> (Maestra). A través de un dictado da la definición de polinomio, y los elementos que lo conforman.</p>	4a,5a-b-f, 6a,7a, 8a-b-c	1,2,3,5,8	Los alumnos construyen polinomios mediante la definición enunciada por parte de la profesora.	Listado de polinomios propuestos
<p><b>Actividad 2:</b> (Maestra). Define la suma y resta de los polinomios, y resuelve ejemplos en el pintarrón.</p>			A través de la ley de los signos y mediante varios ejemplos identifica el caso de suma y resta monomios en los polinomios.	Señalado en su cuaderno de forma personal la suma y resta de los monomios de los polinomios antes propuestos.
Desarrollo				
Actividades	Competencia(s)		Producto(s) de Aprendizaje	Evaluación
	Genérica(s) y sus atributos	Disciplinar(es)		
<p>Actividad 3. (Maestra). Escribe en el pintarrón una serie de ejercicios de suma y resta de polinomios para su resolución.</p>	4a- b,5a-b-f, 6 <sup>a</sup> , 8a-b-c	1, 2, 3, 5, 8	Efectuar operaciones básicas (suma y resta) con polinomios.	Ejercicios resueltos correctamente.
Cierre				
Actividades	Competencia(s)		Producto(s) de Aprendizaje	Evaluación
	Genérica(s) y sus atributos	Disciplina r (es)		

<b>Actividad 4.</b> (Maestra), Explica de forma a la zar un ejercicio de suma y uno de resta de los polinomios propuestos para mostrar la solución correcta al grupo.	4a- b, 5a-b-f, 6a 8a-b-c	1, 2, 3, 8	Concientizar sobre el proceso, las reglas y cada una de las leyes aplicadas para la resolución de dichos ejercicios.	Observación: participación de los alumnos.
<b>Material</b>	<b>Fuentes de información</b>			
- Plumones - fotocopias	Ibáñez, Carrasco Patricia y Gerardo García Torres. (2010) "Matemáticas I: Aritmética y Algebra", Ed. CENGAGE Learning, 1RA Edición, 485 p., México.			
<b>VALIDACIÓN</b>				
Elabora:  <hr/> Profesora	Recibe:  <hr/> Director	Avala:  <hr/> Jefe de materia		

## Anexo 2

### Instrumento para la fase de Experimentación – Secuencia didáctica 1 y 2

#### Hojas de trabajo

Una vez diseñada la secuencia didáctica se continuará con su aplicación y en ésta será necesario utilizar dos hojas de trabajo como lo indica la misma dentro de las actividades propuestas durante las dos sesiones. Dichos instrumentos están diseñados para hacer uso del material didáctico propuesto (sesión I, hoja de trabajo#1) en primera instancia y posteriormente para ejercitación sin ayuda del mismo (sesión II, hoja de trabajo #2).

El diseño de las hojas de trabajo descritas anteriormente son las siguientes:



SECRETARÍA DE  
**EDUCACIÓN**  
TRABAJEMOS DIFERENTE



COLEGIO DE BACHILLERES  
DEL ESTADO DE ZACATECAS

**Colegio de Bachilleres del Edo. de Zac.  
Organismo Público Descentralizado  
Plantel "Luis Moya"  
Clave: 32CB0023-U**

**Matemáticas I  
Primer Semestre  
Ejercicio clase**

Nombre (s): E.1 \_\_\_\_\_

E.2 \_\_\_\_\_

Numero de Aciertos \_\_\_\_\_

Calificación por binas \_\_\_\_\_

### Hoja de trabajo #1.

Realizar las siguientes operaciones con polinomios en "el contenedor".

- Ejercicios indicados  $(a' + b)$ ,  $(c + d)$  y  $(p - q)$ ,  $(e - f)$

$$a' = 8 - 3a + a^3 + 2a^2 + 5a^4 \text{ y } b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6$$

$$p = 3t^2 + 8 - t + 2t^3 - 5t^4 + t^5 \text{ y } q = -3 + 2t^2 - t + t^3 - t^4 - t^5$$

$$c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \text{ y}$$

$$d = 3x^4y^2z^3 - x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5$$

$$e = 2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \text{ y}$$

$$f = mn - 3m^2n + 4m^2n^3 + 2mn^2 - 3$$



Colegio de Bachilleres del Edo. de Zac.  
Organismo Público Descentralizado  
Plantel "Luis Moya"  
Clave: 32CB0023-U

Matemáticas I  
Primer Semestre  
Ejercicio clase

Nombre (s): E.1 \_\_\_\_\_

E.2 \_\_\_\_\_

Numero de Aciertos \_\_\_\_\_

Calificación por binas \_\_\_\_\_

**Hoja de trabajo #2.**

Instrucción: Resuelve los siguientes ejercicios de suma y resta de polinomios (sin utilizar "el contenedor").

- Sumar ( $a' + b'$ )

$$a' = 6a + 5b - 3c - 6d \text{ y } b' = a - 3b + 2c - 6d$$

$$a' = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1 \text{ y } b' = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$$

- Restar ( $p - q$ )

$$p = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3 \text{ y } q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$$

$$p = 3x^6 + 6x^5 - 3x^2 + 5x + 2 \text{ y } q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$$

Definiendo en ambas hojas de trabajo E1 como estudiante número uno y E2 como estudiante número dos respectivamente.

Anexo 3

**Instrumento para la Fase de Experimentación. Planeación didáctica Sesión 1 y 2**

Tabla 2

Planeación de enseñanza -aprendizaje de un tópico matemático "Sumas y restas de polinomios"

Datos Generales				
<b>Instrumento de registro de estrategias didácticas</b>				
Datos de identificación				
<b>Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ)</b>				
<b>Plantel: Luis Moya</b>			<b>Docente:</b>	
<b>Asignatura:</b> Matemáticas I	<b>Semestre:</b> Primero	<b>Periodo de aplicación:</b>	Tercer parcial	<b>Fecha:</b>
		<b>Duración:</b>	2 sesiones (50 mint. c/u)	
Intenciones formativas				
Propósito de la estrategia didáctica por asignatura				
Bloque V:	Operaciones algebraicas	Tema:	Suma y resta de polinomios	
Propósito del bloque:				
Aplica el Álgebra en su vida, valorando su importancia para dar solución a problemas relacionados con fenómenos controlados.				
Contenidos actitudinales				
*Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. *Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones. *Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. *Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.				
Competencias genéricas				
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.				
Competencias disciplinares				
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.				
Aprendizajes esperados				

<p>*Utiliza lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.</p> <p>* Propone procesos de solución identificando posibles errores.</p> <p>*Aplica el Álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.</p>			
Conocimientos previos			
Operaciones con números reales; suma, resta, división, multiplicación, leyes de los signos y leyes de los exponentes.			
Conocimientos posteriores			
Productos notables.			
Objetivo General:	Que el alumno logre resolver problemas aplicados a su contexto, mediante procedimientos que involucre a la suma y resta de polinomios.		
Objetivos específicos:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Que el alumno logre comprender cada operación en un problema de sumas y restas de polinomios.</li> <li>• El alumno pueda identificar la suma y resta de polinomios de forma correcta.</li> </ul>		
<b>Actividades de aprendizaje - SESIÓN I</b>			
<b>Apertura</b>			
<b>Actividades</b>	<b>Medios</b>		<b>Evaluación</b>
<b>Actividades de enseñanza aprendizaje</b>	<b>Para la enseñanza</b>	<b>Para el aprendizaje</b>	<b>Tipo de evaluación</b>
La maestra nombra el tema matemático a desarrollar y cuestiona a los alumnos sobre lo que estos saben del mismo. La docente presenta “el contenedor” (material didáctico) y expone su funcionamiento.	Dar indicios de la ley de signos para suma y resta en polinomios.	Recordar las operaciones básicas de polinomios (de ciclos académicos anteriores).	Participación.
<b>Actividad</b>			
Mediante las preguntas detonadoras “¿qué se entiende por polinomio?, ¿menciona los elementos que conforman a un polinomio?, ¿cómo se realiza la suma de un polinomio? y ¿cómo se realiza la resta de polinomios? Se propicia en el grupo un ambiente de opinión, donde a través de una lluvia de ideas se construye en primera instancia una definición de manera informal sobre el tópico matemático, que después habrá de reformularse.			
<b>Desarrollo</b>			
<b>Actividades</b>	<b>Medios</b>		<b>Evaluación</b>
<b>Actividades de enseñanza aprendizaje</b>	<b>Para la enseñanza</b>	<b>Para el aprendizaje</b>	<b>Tipo de evaluación</b>

La docente practica con 2 ejemplos de polinomios (suma y resta) mediante el uso de "el contenedor".	Ley de Signos, Reglas de exponentes y concepción de operaciones básicas (suma y resta).	La comprensión del tema con los ejemplos.	Participación grupal.
---	---	---	-----------------------

### Actividad

La maestra resolverá los siguientes ejemplos:  $(a + b)$  y  $(p - q)$  en "el contenedor", propiciando a través de preguntas la construcción del propio desarrollo de los anteriores dándoles solución.

$$a = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \text{ y } b = 4x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3$$

$$p = 5m^4 + 2m^3 + 4m^2 - 5m + 8 \text{ y } q = 3m^5 + 4m^4 - m^3 + 2m + 5$$

### Cierre

Actividades	Medios		Evaluación
Actividades de enseñanza aprendizaje	Para la enseñanza	Para el aprendizaje	Tipo de evaluación
Organización en binas.	Ley de signos y reglas de exponentes, sumas y restas.	Operaciones de suma y resta para polinomios con una variable.	-La revisión de una hoja de trabajo (por bina) al finalizar la clase.

### Actividad #1

- Por binas resolverán ejercicios propuestos por la profesora.
- Ejercicios indicados  $(a + b)$ ,  $(c + d)$  y  $(p - q)$ ,  $(e - f)$  en "el contenedor", propuestos por la profesora.

$$a = 8 - 3a + a^3 + 2a^2 + 5a^4 \text{ y } b = -5a^5 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 - a - 6$$

$$p = 3t^2 + 8 - t + 2t^3 - 5t^4 + t^5 \text{ y } q = -3 + 2t^2 - t + t^3 - t^4 - t^5$$

$$c = 4x^4y^2z^3 + 3x^2y^3z^4 - 2x^2y^3z^5 + 6xyz + 3 \text{ y } d = 3x^4y^2z^3 - x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^5 - xyz - 5$$

$$e = 2mn + 3m^2n - 5m^2n^3 + 6mn^2 + 1 \text{ y } f = mn - 3m^2n + 4m^2n^3 + 2mn^2 - 3$$

### Actividad # 2

La profesora pide a dos binas (una con resultados correctos en su totalidad y otra bina con errores en sus resultados) pasar al frente del grupo a exponer la forma de como encontraron dichos resultados.

### Actividades de aprendizaje - SESIÓN II

#### Apertura

Actividades	Medios		Evaluación
Actividades de enseñanza aprendizaje	Para la enseñanza	Para el aprendizaje	Tipo de evaluación
Recordando la clase anterior, la ley de signos y la regla de potencias.	Dar indicios de lo visto el día anterior.	Recordar ley de signos, regla de potencias y operaciones básicas (suma y resta) para números enteros.	La participación del grupo

#### Actividad

##### Recordar sumas y restas de polinomios

A través de un recordatorio sobre los temas que anteceden a la suma y resta de polinomios (números reales, ley de signos y regla de exponentes) la profesora señala la importancia de cada uno según corresponde, aterrizando en el tema a tratar.

#### Desarrollo

Actividades	Medios		Evaluación
Actividades de enseñanza aprendizaje	Para la enseñanza	Para el aprendizaje	Tipo de evaluación y ponderación
<p>La profesora enuncia de manera formal la definición de cada una de las operaciones de polinomios trabajadas en la sesión anterior.</p> <p><b>Suma de polinomios.</b> La suma de polinomios <math>P</math> y <math>Q</math> queda definida como:</p> $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$ <p>Es decir, <i>al sumar dos polinomios se hará una simplificación de términos semejantes.</i></p> <p><b>Resta de polinomios.</b> Sean los polinomios <math>P</math> y <math>Q</math>.</p>	Lenguaje algebraico y suma y resta de polinomios con una variable.	Ley de signos, regla de potencias, operaciones básicas (suma y resta) para números enteros y lenguaje algebraico.	<p>La revisión de una hoja de trabajo (por bina) al finalizar la clase:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Solución correcta de cada ejercicio.</li> <li>- Y plenaria por parte de algunas binas.</li> </ul>

Entonces la resta queda definida como:  $(P - Q)(x) = P(x) + (-Q(x)).$  La resta de polinomios queda definida como una suma cambiando el signo a cada término del segundo polinomio.			
--	--	--	--

### Actividad

La profesora:

- Da instrucciones para resolver los siguientes ejercicios de suma y resta de polinomios (sin utilizar "el contenedor") en su hoja de trabajo #2.

- Sumar ( $a + b$ )

$$a = 6a + 5b - 3c - 6d \text{ y } b = a - 3b + 2c - 6d$$

$$a = 5x^3y + 6x^2z + 2xz^2 + 1 \text{ y } b = 8x^3y - 6x^2z + 2xz^2 - 7$$

- Restar ( $p - q$ )

$$p = r^3 + 3r^2s - 4rs^2 + s^3 \text{ y } q = 2r^3 - 3rs^2 + 2r^2s + s^3$$

$$p = 3x^6 + 6x^5 - 3x^2 + 5x + 2 \text{ y } q = 4x^6 + 2x^5 + 5x^2 - 3x - 3$$

- Pide a los alumnos trabajar en binas (por afinidad).

### Cierre

Actividades	Medios		Evaluación
Actividades de enseñanza aprendizaje	Para la enseñanza	Para el aprendizaje	Tipo de evaluación
Una vez terminados los ejercicios propuestos en su totalidad por las binas, se procederá a socializar los resultados obtenidos en el grupo.	Ley de signos y reglas de exponentes, sumas y restas con números enteros.	Operaciones de suma y resta para polinomios con una variable.	Participación. Autoevaluación (binas) Coevaluación (grupal)

### Actividad

1. La profesora dará a conocer los resultados finales reales de cada ejercicio.
2. Retroalimentación por parte de la profesora ante errores más comunes.
3. Aclaración de dudas.

### Instrumento para Dimensión Cognitiva de la Fase de Análisis Preliminares

Con el objetivo de realizar un análisis preliminar para rescatar elementos que sirvan de ayuda en el diseño de una secuencia didáctica incorporando material didáctico se planteó el siguiente cuestionario:



### Sumas y restas de polinomios

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

**Propósito.** El presente ejercicio matemático tiene como objetivo indagar en el conocimiento algebraico, específicamente acerca de sumas y restas de polinomios, del estudiante de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, Plantel Luis Moya.

**Instrucciones:** contesta lo que se te pide y realiza los ejercicios de los polinomios que se te indican.

1. ¿Qué entiendes por polinomio?
2. Menciona los elementos que conforman a un polinomio
3. ¿Cómo se realiza la suma de polinomios?
4. ¿Cómo se realiza la resta de polinomios?
5. Realiza suma y resta con los siguientes polinomios:

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

$$Q(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 5$$